ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

CHARLES BLANC

Sur les équations différentielles linéaires non homogènes, à coefficients variables

Annales de l'université de Grenoble, tome 22 (1946), p. 119-134
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1946__22__119_0>

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES NON HOMOGÈNES, A COEFFICIENTS VARIABLES

par **Charles BLANC** (Lausanne).

La recherche d'une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire non homogène se réduit, si l'on connaît l'intégrale générale de l'équation homogène correspondante, à des opérations algébriques et à des quadratures. Cette façon de procéder est irréprochable quant à la rigueur, elle présente cependant l'inconvénient très sensible d'exiger au préalable l'intégration de l'équation sans second membre, puis ensuite des calculs en général assez longs, sans pour cela mettre en évidence le comportement des intégrales. Par exemple, si l'équation considérée résulte de l'étude d'un phénomène se déroulant sous l'effet d'une force extérieure dans un système amorti, on peut facilement présumer que l'état du système, à un instant donné, dépend essentiellement de la valeur de la force à cet instant et aux instants immédiatement antérieurs ; c'est-à-dire qu'on peut prévoir qu'il existe une intégrale qui s'exprime par une série procédant suivant les dérivées successives par rapport au temps de cette force, alors que la méthode de la variation des constantes donne en fin de compte une solution de l'équation par une intégrale définie contenant la force.

J'ai donné (1) une solution du problème pour le cas où l'équation est à coefficients constants, le second membre pouvant être discontinu. L'intégrale particulière est alors la somme d'un développement limité, d'où l'on tire, par passage à la limite, une série. Les condi-

(1) Ch. Blanc, *Sur les équations différentielles linéaires non homogènes, à coefficients constants,* Comment. Math. Helv., *19* (1946), 61-71.

tions de validité énoncent, sous une forme précise, le fait suivant : le système doit être assez amorti pour « suivre » les variations de la force extérieure.

On étudiera ici le cas d'une équation à coefficients variables ; on se bornera au cas où le second membre est continu et dérivable, mais on considérera aussi le cas où les coefficients sont des fonctions discontinues, avec discontinuités de première espèce. On commence par établir (théorème 1) une relation qui donne par une intégrale définie la solution cherchée de l'équation différentielle. Puis on passe de cette expression à un développement limité (11), dont le théorème 2 donne, avec les conditions de validité, le passage à la limite sous forme d'une série.

On compare ensuite la valeur, à l'instant t, de la solution trouvée et celle de la solution de l'équation linéaire à coefficients constants dont les coefficients seraient égaux à ceux de l'équation donnée, à l'instant considéré. Ces deux solutions diffèrent d'une certaine quantité dont une évaluation est donnée dans le cas général par l'inégalité (23), qui se réduit à (24) si le second membre est une exponentielle.

La validité des relations obtenues repose sur des hypothèses relatives au comportement asymptotique des intégrales de l'adjointe de l'équation donnée. On connaît déjà des critères permettant de déterminer ce comportement à partir des coefficients de l'équation, ces critères concernent toutes les intégrales de l'équation, ils ne donnent donc que l'ordre exponentiel de la décroissance ; on démontre ici (théorème 3) un critère plus précis : il s'agit d'une inégalité (30) pour la valeur, lorsque $t = t_0 + \tau$, d'une intégrale fixée par des conditions relatives à t_0, et cela indépendamment du choix de t_0 ; on a ainsi un critère d'uniformité pour le comportement asymptotique des intégrales.

1. Considérons une équation différentielle linéaire

$$Du \equiv \sum_0^N a_\nu(t) u^{(\nu)} = F(t) ; \tag{1}$$

la variable t étant toujours réelle ici, on suppose que

1° $a_\nu(t)$ est réelle, continue, et possède une dérivée continue ; de plus $a_N(t) \equiv 1$;

2° $F(t)$ est intégrable, réelle ou complexe, bornée.

Considérons d'autre part l'opérateur adjoint à D :

$$D^*v \equiv \sum_0^N (-1)^\nu (a_\nu v)^{(\nu)}; \qquad (2)$$

on a la relation de Lagrange

$$v\mathrm{D}u - u\mathrm{D}^*v = \frac{d}{dt}\mathrm{L}(u, v) \qquad (3)$$

avec

$$\mathrm{L}(u, v) = \sum_{p+q=0}^{N-1} (-1)^p u^{(q)} (a_{p+q+1} v)^{(p)}. \qquad (4)$$

Introduisons maintenant deux fonctions $K(t, \tau)$ et $K^*(t, \tau)$ avec (l'indice placé après D et D* indique la variable sur laquelle on opère) :

$$\mathrm{D}_t \mathrm{K}(t, \tau) = 0; \qquad \mathrm{D}_t^* \mathrm{K}^*(t, \tau) = 0;$$

$$\mathrm{K} = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{N-2}\mathrm{K}}{\partial t^{N-2}} = 0, \quad \frac{\partial^{N-1}\mathrm{K}}{\partial t^{N-1}} = 1, \quad \text{si } t = \tau;$$

$$\mathrm{K}^* = \frac{\partial \mathrm{K}^*}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{N-2}\mathrm{K}^*}{\partial t^{N-2}} = 0, \quad \frac{\partial^{N-1}\mathrm{K}^*}{\partial t^{N-1}} = (-1)^{N-1}, \text{ si } t = \tau.$$

Lemme : On a la relation de symétrie

$$\mathrm{K}(t, \tau) = \mathrm{K}^*(\tau, t). \qquad (5)$$

En effet, par (3),

$$\frac{d}{dt}\mathrm{L}[\mathrm{K}(t, t_2), \mathrm{K}^*(t, t_1)] = 0.$$

d'où, en intégrant de t_1 à t_2,

$$\mathrm{L}[\mathrm{K}(t_2, t_2), \mathrm{K}^*(t_2, t_1)] = \mathrm{L}[\mathrm{K}(t_1, t_2), \mathrm{K}^*(t_1, t_1)];$$

en explicitant ces fonctions, et en tenant compte des conditions imposées à K et à K*, on obtient

$$\mathrm{L}[\mathrm{K}(t_2, t_2), \mathrm{K}^*(t_2, t_1)] = \mathrm{K}^*(t_2, t_1)$$

et

$$\mathrm{L}[\mathrm{K}(t_1, t_2), \mathrm{K}^*(t_1, t_1)] = \mathrm{K}(t_1, t_2),$$

le lemme est ainsi démontré.

2. Levons maintenant l'hypothèse que nous avons faite sur la continuité des coefficients $a_\nu(t)$ de l'équation (1) ; d'une façon plus précise, supposons que les $a_\nu(t)$ sont continus et ν fois dérivables excepté sur un ensemble discret de points, où on a des discontinuités de première espèce. On posera, si on a une discontinuité pour $t = t_k$,

$$\delta_{k,\nu}^{(i)} = a_\nu^{(i)}(t_k + 0) - a_\nu^{(i)}(t_k - 0).$$

On définit $K(t, \tau)$ comme plus haut, en supposant cette fonction continue en t ainsi que ses $(N - 1)$ premières dérivées. L'opérateur D^* a encore un sens pour tout $t \neq t_k$, et on a, si l'intervalle fermé (a, b) ne contient aucune discontinuité t_k,

$$\int_a^b (vDu - uD^*v)dt = |L(u, v)|_a^b,$$

où $L(u, v)$ est défini comme plus haut. Pour éviter toute ambiguïté, posons encore

$$a_\nu^{(i)}(t_k) = a_\nu^{(i)}(t_k - 0) ;$$

alors, si t_k et t_{k+1} sont deux discontinuités consécutives,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (vDu - uD^*v)dt$$
$$= \sum_{p+q=0}^{N-1} (-1)^p \left[\begin{array}{l} u^{(q)}(t_{k+1}) \left\{ a_{p+q+1}(t_{k+1}) v(t_{k+1}) \right\}^{(p)} \\ - u^{(q)}(t_k + 0) \left\{ a_{p+q+1}(t_k + 0) v(t_k + 0) \right\}^{(p)} \end{array} \right],$$

d'où, si l'on suppose $u(t)$ et $v(t)$ continues et pourvues de dérivées continues jusqu'à l'ordre $(N - 1)$,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (vDu - uD^*v)dt = |L(u, v)|_{t_k}^{t_{k+1}}$$
$$- \sum_{p+q=0}^{N-1} (-1)^p u^{(q)}(t_k) \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \delta_{k,p+q+1}^{(i)} v^{(p-i)}(t_k) ;$$

enfin, pour un intervalle quelconque (a, b) on a

$$\int_a^b (vDu - uD^*v)dt = |L(u, v)|_a^b$$
$$- \sum_k \sum_{p+q=0}^{N-1} (-1)^p u^{(q)}(t_k) \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \delta_{k,p+q+1}^{(i)} v^{(p-i)}(t_k),$$

la somme étant étendue aux indices k avec $a \leqslant t_k < b$.

On peut dès lors passer à la définition de la fonction $K^*(t, \tau)$. On la suppose continue en t, ainsi que ses $(N - 1)$ premières dérivées, pour $t \neq t_k$; en outre $D^*K^* = 0$, et

$$K^* = \frac{\partial K^*}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{N-2}K^*}{\partial t^{N-2}} = 0\,; \qquad \frac{\partial^{N-1}K^*}{\partial t^{N-1}} = (-1)^{N-1}$$

si $t = \tau \neq t_k$; enfin

$$\left| \sum_{\nu=0}^{N-p} (-1)^\nu \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} [a_{p+\nu}(t) K^*(t, \tau)] \right|_{t=t_k-0}^{t=t_k+0} = 0 \tag{6}$$

$$p = 1, \ldots, N.$$

On a alors

$$L[K(t, b), K^*(t, a)]_a^b = \sum_k \sum_{q=0}^{N-1} K^{(q)}(t_k, b) \left[a_{q+1} K^* - \frac{\partial}{\partial t}(a_{q+2} K^*) + \cdots \right]_{t_k-0}^{t_k+0}$$

et, puisque la parenthèse crochet est nulle par les conditions (6),

$$L[K(b, b), K^*(b, a)] = L[K(a, b), K^*(a, a)]\,;$$

or on a, comme plus haut,

$$L[K(b, b), K^*(b, a)] = K^*(b, a)$$
$$L[K(a, b), K^*(a, a)] = K(a, b),$$

d'où

$$K(a, b) = K^*(b, a).$$

Ainsi le lemme est encore valable lorsque les coefficients de l'équation (1) présentent les discontinuités envisagées ici, pourvu que l'on définisse la fonction K^* comme il vient d'être fait.

Si, en particulier, les coefficients de l'équation (1) sont constants par intervalle, les relations (6) se simplifient un peu ; si l'on pose

$$\eta_k^{(\nu)} = \left| \frac{\partial^\nu K^*(t, \tau)}{\partial t^\nu} \right|_{t=t_k-0}^{t=t_k+0},$$

il vient, puisque $\eta_q^{(0)} = 0$ par la dernière des relations (6),

$$\sum_{\nu=1}^{N-p} (-1)^\nu (a_{p+\nu} + \delta_{k,\,p+\nu}^{(0)}) \eta_k^{(\nu)} = -\sum_{\nu=0}^{N-p} (-1)^\nu \delta_{k,\,p+\nu}^{(0)} \frac{\partial^\nu K^*}{\partial t^\nu} \tag{7}$$

$$p = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Le systèmes (6) et (7) peuvent se résoudre de proche en proche, en partant de l'équation correspondant à la plus grande valeur de p; on remarque qu'ils ne contiennent pas explicitement le coefficient $a_0(t)$; si ce coefficient est le seul à présenter une discontinuité, la fonction $K^*(t, \tau)$ et ses $(N - 1)$ premières dérivées sont continues en t pour $t = t_k$.

3. **Théorème 1.** — *Si l'on a, en reprenant les hypothèses faites au n° 2 sur l'équation (1), pour tout* $\tau > 0$,

$$\left|\frac{\partial^\nu K^*(\tau, t)}{\partial \tau^\nu}\right| < A_1 e^{-\rho(t-\tau)}; \quad \rho > 0, \ \nu = 0, 1, \ldots, N - 1, \tag{8}$$

lorsque la variable t *reste dans un intervalle fermé donné* (A_1 pouvant dépendre de cet intervalle), *alors la fonction de* t

$$u(t) = \int_0^\infty K^*(t - \tau, t) \,.\, F(t - \tau) d\tau \tag{9}$$

est une intégrale de l'équation (1).

Démonstration : en remplaçant τ par $t - \tau$, il vient

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^t K^*(\tau, t) \,.\, F(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 K^*(\tau, t) \,.\, F(\tau) d\tau + \int_0^t K^*(\tau, t) \,.\, F(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse faite sur K^*, la première intégrale converge uniforménent en t; en appliquant l'opérateur D à cette fonction de t, il vient, puisqu'il est alors légitime de permuter l'intégration par rapport à τ et la dérivation par rapport à t,

$$D_t \int_{-\infty}^0 K^*(\tau, t) \,.\, F(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 D_t K^*(\tau, t) \,.\, F(\tau) d\tau,$$

et cette intégrale est nulle puisque

$$D_t K^*(\tau, t) = D_t K(t, \tau) = 0.$$

Posons d'autre part

$$u_1(t) = \int_0^t K^*(\tau, t) \,.\, F(\tau) d\tau;$$

on a

$$K^*(\tau, t) \,.\, D u_1(\tau) = \frac{d}{d\tau} L[u_1(\tau), K^*(\tau, t)].$$

or

$$u_1(0) = u_1'(0) = u_1^{(N-1)}(0) = 0,$$

donc

$$\int_0^t K^*(\tau, t) \,.\, Du_1(\tau)d\tau = |L[u_1(\tau), K^*(\tau, t)]|_0^t$$
$$= u_1(t)\,;$$

cette relation ayant lieu pour tout t dans l'intervalle considéré, on a bien

$$Du_1(t) = F(t),$$

et le théorème en résulte sans autre.

4. **Développement limité de $u(t)$.** — Posons, avec $\Re s > -\rho$,

$$Y(s, t) = \int_0^\infty K^*(t-\tau, t) \,.\, e^{-s\tau}d\tau\,; \tag{10}$$

cette intégrale converge uniformément en s, dans tout le demi-plan $\Re s > -\rho + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$; on peut donc dériver par rapport à s, d'où

$$\frac{\partial^r Y}{\partial s^r} = (-1)^r \int_0^\infty \tau^r \,.\, K^*(t-\tau, t) \,.\, e^{-s\tau}d\tau.$$

Introduisons alors la fonction de τ, où t et s joueront le rôle de paramètres,

$$G(\tau) \equiv e^{s\tau} \,.\, F(t-\tau)\,;$$

supposons que $F(t)$ est telle que l'on peut appliquer à $G(\tau)$ la formule du développement limité de Taylor :

$$G(\tau) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\tau^r}{r!} G^{(r)}(0) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^\tau (z-\tau)^n \,.\, G^{(n+1)}(z)dz\,;$$

si l'on écrit, pour abréger,

$$S_n(s, \tau) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^\tau (z-\tau)^n \,.\, G^{(n+1)}(z)dz,$$

il vient

$$u(t) = \int_0^\infty e^{-s\tau} K^*(t-\tau, t) \left[\sum_0^n \frac{G^{(r)}(0)}{r!}\tau^r + S_n(s, \tau)\right] d\tau,$$

ou encore, en tenant compte de la relation (10),

$$u(t) = \sum_0^n \frac{(-1)^r}{r!} \frac{\partial^r Y(s, t)}{\partial s^r} G^{(r)}(0) + R_n(s, t), \qquad (11)$$

avec

$$R_n(s, t) = \int_0^\infty e^{-s\tau} . K^*(t-\tau, t) . S_n(s, \tau) d\tau. \qquad (12)$$

5. **Passage à une série.** — Si, pour une valeur déterminée de s, on a $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(s, t) = 0$, pour des valeurs de t dans un intervalle donné, on peut exprimer $u(t)$ par une série. Il vient en effet

$$u(t) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^r}{r!} \frac{\partial_r Y(s, t)}{\partial s^r} . G^{(r)}(0) ; \qquad (13)$$

on peut énoncer en particulier le théorème :

Théorème 2. — *Si* $G(\tau)$ *est indéfiniment dérivable, et si l'on a, pour une valeur de* s, *pour des valeurs de* t *dans un intervalle* (a, b), *pour tout* τ *et pour tout* n,

$$|G^{(n)}(\tau)| < \gamma_n$$

avec

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\gamma_n}{(\Re s + \rho)^n} = 0,$$

alors $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(s, t) = 0$, *et la série (13) a pour somme une intégrale de l'équation (1), valable dans l'intervalle* (a, b).

Démonstration : en effet, si $|G^{(n)}(\tau)| < \gamma_n$, on a

$$|S_n(s, \tau)| \leqslant \frac{1}{n!} \int_0^\tau (z-\tau)^n |G^{(n+1)}(z)| dz < \frac{\gamma_{n+1}}{(n+1)!} \tau^{n+1},$$

d'où

$$|R_n(s, t)| \leqslant \int_0^\infty e^{-\Re s . \tau} |K^*(t-\tau, t)| . |S_n(s, \tau)| d\tau$$
$$< \frac{\gamma_{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty e^{-\Re s . \tau} |K^*(t-\tau, t)| . \tau^{n+1} d\tau ;$$

or

$$|K^*(\tau, t)| < A_1 e^{-\rho(t-\tau)},$$

donc

$$|K^*(t-\tau)| < A_1 . e^{-\rho\tau} ;$$

il vient ainsi

$$|R_n(s, t)| < \frac{A_1\gamma_{n+1}}{(n+1)!}\int_0^{\infty} e^{-(\mathcal{R}s+\rho)\tau}\tau^{n+1}d\tau = \frac{A_1\gamma_{n+1}}{(\mathcal{R}s+\rho)^{n+1}},$$

d'où notre affirmation.

Remarque : l'hypothèse faite revient à supposer qu'il existe un nombre positif $A < \mathcal{R}s + \rho$ tel que $|G^{(n)}(\tau)| < C \cdot A^n$, C étant indépendant de n, mais pouvant dépendre de s et de l'intervalle (a, b).

6. **Évaluation de la fonction** $Y(s, t)$. — Nous supposerons désormais que les coefficients $a_\nu(t)$, ainsi que leurs ν premières dérivées, sont des fonctions continues. On suppose en outre qu'il existe une constante A_2, indépendante de t, avec, pour tout t et pour $\tau > 0$,

$$\sum_0^{N-1} |K^{*(\nu)}(t-\tau, t)| < A_2 \cdot e^{-\rho\tau}. \tag{14}$$

On donnera plus loin (théorème 3) un critère permettant de reconnaître dans certains cas que cette inégalité est satisfaite. On peut remarquer dès maintenant qu'il en est certainement ainsi lorsque les coefficients de l'équation (1) sont constants, les racines de l'équation caractéristique ayant leur partie réelle négative.

Soit $h(\tau, t)$ la fonction qui satisfait, en τ, à l'équation différentielle obtenue en remplaçant dans l'opérateur D^* les coefficients par la valeur qu'ils prennent pour la valeur $\tau = t$ de la variable, la fonction $h(\tau, t)$ et ses N premières dérivées par rapport à τ étant, pour $\tau = t$, égales à $K^*(\tau, t)$ et à ses dérivées ; il suffit du reste que ces égalités aient lieu pour les $(N-1)$ premières dérivées. On pose encore

$$J(s, t) = \int_0^{\infty} h(t-\tau, t) \cdot e^{-s\tau}d\tau. \tag{15}$$

Appelons $c_\nu(t)$ les coefficients de D^*, c'est-à-dire que

$$\sum c_\nu(t)v^{(\nu)}(t) \equiv \sum(-1)^\nu(a_\nu v)^{(\nu)},$$

avec $c_N(t) = (-1)^N$. On a ainsi

$$\sum c_\nu(t-\tau) \cdot K^{*(\nu)}(t-\tau, t) = 0, \tag{16}$$

$$\sum c_\nu(t) \cdot h^{(\nu)}(t-\tau, t) = 0, \tag{17}$$

étant entendu que l'indice supérieur (ν) représente toujours la ν^{ieme} dérivée par rapport à la première variable, remplacée ici ensuite par $t-\tau$.

Reprenons l'expression de $Y(s, t)$ et faisons une intégration par parties, légitime dès que s est tel que l'intégrale converge absolument. Il vient ainsi

$$Y(s, t)=-\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-s\tau}K^{*\prime}(t-\tau, t)d\tau,$$

puis, pour $0\leqslant\nu<N$,

$$s^\nu Y(s, t)=(-1)^\nu\int_0^\infty e^{-s\tau}K^{*(\nu)}(t-\tau, t)d\tau,$$

et enfin

$$s^N . Y(s, t)=(-1)^N\int_0^\infty e^{-s\tau}K^{*(N)}(t-\tau, t)d\tau+1,$$

en tenant compte des conditions fixant $K^*(\tau, t)$ pour $\tau=t$. On a des relations analogues en remplaçant K^* par h et Y par J. On en tire, après multiplication par $(-1)^\nu . c_\nu(t)$ et sommation par rapport à l'indice ν,

$$J(s, t) . \sum_{\nu=0}^{N}(-1)^\nu c_\nu(t)s^\nu=\int_0^\infty e^{-s\tau}\sum_{\nu=0}^{N}c_\nu(t) . h^{(\nu)}(t-\tau, t)d\tau+1,$$

d'où, en tenant compte de la définition de la fonction h,

$$J(s, t)=\frac{1}{\sum_{\nu=0}^{N}(-1)^\nu c_\nu(t)s^\nu}. \tag{18}$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned}\left[Y(s, t)-J(s, t)\right] . \sum_{\nu=0}^{N}(-1)^\nu c_\nu(t)s^\nu \\ =\int_0^\infty e^{-s\tau}\sum_{\nu=0}^{N}c_\nu(t)\left[K^{*(\nu)}(t-\tau, t)-h^{(\nu)}(t-\tau, t)\right]d\tau \\ =\int_0^\infty e^{-s\tau}\sum_{\nu=0}^{N}c_\nu(t)K^{*(\nu)}(t-\tau, t)d\tau,\end{aligned}$$

puis, en tenant compte des relations (16) et (18),

$$\boxed{\frac{Y(s, t)-J(s, t)}{J(s, t)}=\int_0^\infty e^{-s\tau}\sum_{\nu=0}^{N-1}\left[c_\nu(t)-c_\nu(t-\tau)\right]K^{*(\nu)}(t-\tau, t)d\tau} \tag{19}$$

où l'indice ν varie maintenant de o à (N — 1) puisque c_N est constant par hypothèse.

Si alors nous introduisons l'inégalité (14), et si nous supposons de plus que

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} |c'_\nu(t)| < A_3, \tag{20}$$

il vient alors

$$\left| \sum_{\nu=0}^{N-1} [(c_\nu t) - c_\nu(t-\tau)] \, . \, K^{*(\nu)}(t-\tau, t) \right| < A_2 A_3 \tau e^{-\rho\tau},$$

d'où

$$\left| \frac{Y(s, t) - J(s, t)}{J(s, t)} \right| < A_2 A_3 \int_0^\infty e^{-\mathcal{R}s \cdot \tau} \tau e^{-\rho\tau} d\tau = \frac{A_2 A_3}{(\mathcal{R}s + \rho)^2} \cdot \tag{21}$$

On a ainsi, dès que les inégalités (14) et (20) sont vérifiées,

$$Y(s, t) = J(s, t) \, . \, (1 + \varphi), \tag{22}$$

avec

$$|\varphi| < \frac{A_2 A_3}{(\mathcal{R}s + \rho)^2} \cdot \tag{23}$$

Supposons, par exemple, que $F(t) = e^{st}$; alors

$$G(\tau) = e^{st}; \qquad G'(\tau) = \ldots = 0,$$

et on a simplement, d'après (13),

$$u(t) = e^{st} \, . \, Y(s, t) = e^{st} \, . \, J(s, t) \, . \, (1 + \varphi).$$

On se trouve dans ce cas si l'on cherche le courant dans un circuit électrique à caractéristiques variables, soumis à une tension alternative de pulsation ω ; on a ainsi, avec $s = i\omega$,

$$u(t) = e^{i\omega t} Y(i\omega, t) = e^{i\omega t} \, . \, J(i\omega, t) \, . \, (1 + \varphi),$$

avec

$$|\varphi| < \frac{A_2 A_3}{\rho^2}; \tag{24}$$

la quantité $Y(i\omega, t)$ que l'on peut appeler l'*admittance instantanée*, diffère de la quantité $J(i\omega, t)$ qui est l'admittance d'un circuit à caractéristiques constantes coïncidant à l'instant t avec le circuit donné; la différence relative entre ces deux grandeurs est la quantité φ qui satisfait à l'inégalité (24); on voit que cette inégalité ne fait pas intervenir la pulsation : cette différence relative est d'autant plus petite que l'amortissement est plus grand et que la variation des caractéristiques est plus lente, ce que l'on pouvait attendre.

7. **Sur le comportement asymptotique des intégrales de l'équation homogène.** — On connaît déjà de nombreux critères permettant d'indiquer le comportement asymptotique des intégrales d'une équation différentielle linéaire [2]. Ces critères concernent le plus souvent l'ensemble des intégrales, et ne peuvent donc préciser que l'ordre exponentiel de ce comportement. Nous allons établir ici un critère conduisant à une égalité du genre de l'inégalité (14) introduite au n° 6. Il s'agit d'un critère de comparaison. On considère une équation donnée

$$u^{(N)} + b_{N-1}(t)u^{(N-1)} + \ldots + b_0(t)u = 0, \tag{25}$$

et une autre équation

$$x^{(N)} + B_{N-1}(t) \cdot x^{(N-1)} + \ldots + B_0(t)x = 0\,; \tag{26}$$

on fait sur l'équation (26) les hypothèses suivantes :

1° l'équation (26) possède, pour $t > t_1$, une adjointe; soit $\omega(t, t_0)$ l'intégrale de cette adjointe définie pour $t_0 \geqslant t \geqslant t_1$, avec

$$\omega(t, t_0) = \frac{\partial\omega}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{N-2}\omega}{\partial t^{N-2}} = 0\,; \qquad \frac{\partial^{N-1}\omega}{\partial t^{N-1}} = (-1)^{N-1}$$

pour $t = t_0$;

2° de plus, si on pose

$$\Omega(\tau, t) = \sum_0^{N-1} \left| \frac{\partial^\nu \omega(\tau, t)}{\partial t^\nu} \right|,$$

il existe deux constantes ρ et A_4 avec, pour tout t et tout τ tels que $t \geqslant \tau \geqslant t_1$,

$$\Omega(\tau, t) < A_4 \cdot e^{-\rho(t-\tau)}\,; \tag{27}$$

(2) Voir, par exemple : KAMKE, *Differentialgleichungen I*, Leipzig, 1942, p. 101-102, ou encore, parmi les ouvrages originaux : O. PERRON, J. für Math., *143* (1913), p. 25-50 ; Math. Zeitschrift, *1* (1918), p. 27-43 ; L. CESARI, Annali Pisa (2), *9* (1940), fasc. III, p. 1-24.

3° soit $\psi(t, t_0)$ une intégrale de (26) satisfaisant pour $t = t_0$ à des conditions données

$$\psi(t, t_0) = \alpha_0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \alpha_1, \ \ldots, \qquad \frac{\partial^{N-1}\psi}{\partial t^{N-1}} = \alpha_{N-1};$$

on pose

$$\Psi(t, t_0) = \sum_0^{N-1} \left| \frac{\partial^\nu \psi(t, t_0)}{\partial t^\nu} \right|,$$

et on suppose qu'il existe une constante A_5 telle que, pour $t \geqslant t_0 \geqslant t_1$,

$$\Psi(t, t_0) < A_5 \,.\, e^{-\rho(t-t_0)}. \tag{28}$$

Écrivons encore

$$g(t) = \sum_0^{N-1} |b_\nu(t) - B_\nu(t)|;$$

nous pouvons alors énoncer le théorème de comparaison :

Théorème 3. — *Soit* $\varphi\ (t, t_0)$ *l'intégrale de l'équation* (25) *qui satisfait pour* $t = t_0$ *aux mêmes conditions que* $\psi(t, t_0)$; *posons*

$$\Phi(t, t_0) = \sum_0^{N-1} \left| \frac{\partial^\nu \varphi}{\partial t^\nu} \right|;$$

alors si

$$\int_{t_1}^{\infty} g(t)dt < \frac{1}{A_4} < \infty, \tag{29}$$

la fonction $\Phi(t, t_0)$ *satisfait à une même inégalité que* $\Psi(t, t_0)$; *plus précisément, on a, pour tout* $\lambda > 1$, *et* $t > t_0 > t_3$,

$$\Phi(t, t_0) < \lambda A_5 e^{-\rho(t-t_0)} \tag{30}$$

où $t_3 = \max.\ (t_1, t_2)$, t_2 *étant tel que* $\displaystyle\int_{t_2}^{\infty} g(\tau)d\tau = \frac{\lambda - 1}{\lambda A_4}$.

Démonstration : posons, pour abréger l'écriture

$$\zeta(t, t_0) = \varphi(t, t_0) - \psi(t, t_0);$$

on a

$$\zeta(t, t_0) = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \cdots = \frac{\partial^{N-1}\zeta}{\partial t^{N-1}} = 0 \quad \text{pour} \quad t = t_0,$$

et en outre

$$\sum_0^N B_\nu(t)\frac{\partial^\nu\zeta}{\partial t^\nu}=\sum_0^N B_\nu(t)\frac{\partial^\nu\varphi}{\partial t^\nu}=\sum_0^{N-1}[B_\nu(t)-b_\nu(t)]\frac{\partial^\nu\varphi}{\partial t^\nu};$$

écrivons

$$\sum_0^{N-1}[B_\nu(t)-b_\nu(t)]\frac{\partial^\nu\varphi}{\partial t^\nu}=\mu(t,\ t_0);$$

on a alors

$$\zeta(t,\ t_0)=\int_{t_0}^t\omega(\tau,\ t)\mu(\tau,\ t_0)d\tau,$$

et, puisque l'intégrale converge uniformément en t,

$$\frac{\partial^\nu\zeta}{\partial t^\nu}=\int_{t_0}^t\frac{\partial^\nu\omega}{\partial t^\nu}\cdot\mu(\tau,\ t_0)d\tau,$$

donc

$$\frac{\partial^\nu\varphi}{\partial t^\nu}=\frac{\partial^\nu\psi}{\partial t^\nu}+\int_{t_0}^t\frac{\partial^\nu\omega}{\partial t^\nu}\cdot\mu(\tau,\ t_0)d\tau$$

ou encore

$$\left|\frac{\partial^\nu\varphi}{\partial t^\nu}\right|\leqslant\left|\frac{\partial^\nu\psi}{\partial t^\nu}\right|+\int_{t_0}^t\left|\frac{\partial^\nu\omega}{\partial t^\nu}\right|\cdot|\mu(\tau,\ t_0)|d\tau$$
$$<\left|\frac{\partial^\nu\psi}{\partial t^\nu}\right|+\int_{t_0}^t\left|\frac{\partial^\nu\omega}{\partial t^\nu}\right|\cdot g(\tau)\cdot\Omega(\tau,\ t_0)d\tau;$$

si nous sommons par rapport à ν, de zéro à $N-1$, il vient

$$\Phi(t,\ t_0)<\Psi(t,\ t_0)+\int_{t_0}^t\Omega(\tau,\ t)\cdot g(\tau)\varphi(\tau,\ t_0)d\tau,$$

ou, en tenant compte des inégalités (27) et (28),

$$\Phi(t,\ t_0)<A_5e^{-\rho(t-t_0)}+A_4e^{-\rho t}\int_{t_0}^t e^{\rho\tau}\cdot g(\tau)\Omega(\tau,\ t_0)d\tau.$$

Soit maintenant $W(t,\ t_0)=\Phi(t,\ t_0)\cdot e^{\rho(t-t_0)}$; on a

$$W(t,\ t_0)<A_5+A_4e^{-\rho t_0}\int_{t_0}^t e^{\rho\tau}g(\tau)W(\tau,\ t_0)e^{-(t-t_0)}d\tau,$$

ou encore

$$W(t,\ t_0)<A_5+A_4\int_{t_0}^t g(\tau)\cdot W(\tau,\ t_0)d\tau; \tag{31}$$

supposons que $W(t, t_0)$ ne soit pas bornée en t, t_0 étant donné; soit un nombre $M \geqslant \alpha_{N-1}$; il existerait alors un nombre $t_4(t_0)$ tel que

$$\begin{aligned} &W(t_4, t_0) = M \\ &W(t, t_0) < M, \qquad \text{si} \qquad t_4 > t > t_0; \end{aligned}$$

on aurait ainsi, par (31),

$$M < A_5 + MA_4 \int_{t_0}^{t_4} g(\tau) d\tau,$$

ou encore

$$\int_{t_0}^{t_4} g(\tau) d\tau > \frac{M - A_5}{MA_4},$$

donc, puisque la fonction $g(t)$ est toujours positive,

$$\int_{t_0}^{\infty} g(\tau) d\tau > \frac{M - A_5}{MA_4};$$

soit alors $M = \lambda A_5$, avec $\lambda > 1$, et soit t_2 tel que

$$\int_{t_2}^{\infty} g(\tau) d\tau = \frac{\lambda - 1}{\lambda A_4}.$$

On doit nécessairement avoir $t_0 < t_2$, donc si $t_0 > t_2$, la fonction $W(t, t_0)$ ne dépasse pas, pour $t > t_0$, la valeur λA_5. Comme toutes les hypothèses ont été faites pour $t > t_1$, on peut donc affirmer que W ne dépasse pas λA_5 pour $t > t_0 > t_3 = \max\ (t_1, t_2)$; il en résulte alors l'inégalité

$$\Phi(t, t_0) < \lambda A_5 e^{-\rho(t-t_0)}$$

et le théorème est ainsi démontré.

Corollaire. — Si les conditions du théorème 3 sont satisfaites avec $t_1 = -\infty$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = A_6 < \frac{1}{A_4},$$

on a, pour tout t_0,

$$\Phi(t, t_0) < A_7 \,.\, e^{-\rho(t-t_0)},$$

avec

$$A_7 = \frac{A_5}{1 - A_4 A_6}.$$

Ce corollaire constitue le critère annoncé au n° 6, pour reconnaître si l'inégalité (14) a lieu. La fonction K^* satisfait, on le voit, à une équation différentielle de la forme (25).

Remarques.

1. Nous n'avons pas eu besoin de supposer que les coefficients de l'équation (25) sont continus. Il n'est pas nécessaire non plus que l'on ait

$$\lim_{t \to \infty} |b_\nu(t) - B_\nu(t)| = 0 ;$$

la seule hypothèse faite sur l'équation (25) elle-même est qu'elle possède une intégrale satisfaisant aux conditions imposées.

2. Les inégalités (27) et (28) ne sont pas contradictoires. Elles sont même liées et, dans certains cas, l'une entraîne l'autre. En effet, si les conditions pour $\psi(t, t_0)$ sont

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{N-2} = 0, \qquad \alpha_{N-1} = 1,$$

on a

$$\omega(\tau, t) = \psi(t, \tau),$$

d'où

$$\Omega(\tau, t) \equiv \Phi(t, \tau)$$

et les deux inégalités considérées sont identiques, avec $A_4 = A_5$; d'une façon plus générale, les fonctions de t

$$\omega(\tau, t) \qquad \text{et} \qquad \psi(t, \tau)$$

sont l'une et l'autre des intégrales de l'équation (26) ; sauf circonstances exceptionnelles relatives aux données α_ν, si l'une des inégalités considérées est satisfaite, l'autre l'est également, avec une constante convenable.

3. Si, en particulier, les coefficients de l'équation (26) sont constants, il suffit de supposer que les racines de son équation caractéristique ont toutes leur partie réelle négative ; toutes les hypothèses faites en résultent ; si les coefficients sont périodiques, il suffit d'examiner ce qui se passe dans une période.

École polytechnique de l'Université de Lausanne (Suisse).