

Astérisque

AST

**Séminaire Bourbaki volume 2011/2012 exposés
1043-1058 - Pages préliminaires**

Astérisque, tome 352 (2013), p. I-XI

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_2013__352__R1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2013__352__R1_0)

© Société mathématique de France, 2013, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

352

ASTÉRISQUE

2013

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2011/2012
EXPOSÉS 1043-1058

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki.

École normale supérieure,

45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.

URL : <http://www.bourbaki.ens.fr>

Mots-clefs et classification mathématique par sujets (2000)

Exposé n° 1043. — Orbites coadjointes, représentations des groupes de Lie compacts, représentations des groupes algébriques réductifs, théorie géométrique des invariants, variétés de drapeaux — 14L24, 14M15, 17B08, 20G05, 22E46.

Exposé n° 1044. — Vlasov-Poisson, système stellaire auto-gravitant, champ moyen, stabilité orbitale, réarrangement, Hamiltonien, nonlinéaire, équation aux dérivées partielles, concentration-compacité — 35xx, 35Qxx, 35Q83, 37xx, 37Nxx, 37N20, 82xx, 82Cxx, 85xx, 85Axx.

Exposé n° 1045. — Algorithme d'approximation, difficulté d'approximation, plongement métrique, programmation semi-définie, choix social — 05C12, 05C85, 46N10, 68Q17, 68R10, 68W25, 90C22, 91B14.

Exposé n° 1046. — Équations différentielles partielles — 35Qxx.

Exposé n° 1047. — Programme de Ribe, espaces métriques, espaces normés, rigidité — 46B85.

Exposé n° 1048. — Multizêtas, motifs de Tate mixtes, groupe de Galois motivique — 11G99.

Exposé n° 1049. — Courbe elliptique, rang, groupe de Selmer, forme quartique binaire — 11G05, 11E76.

Exposé n° 1050. — Fibré holomorphe plat, fibré de Higgs, métrique harmonique, singularités irrégulières, D-module holonome, théorie de Hodge, théorème de Lefschetz difficile — 14J60, 32C38, 53C07.

Exposé n° 1051. — Relativité générale, trous noirs, équations d'Einstein, surfaces enfermées — 83C57, 83C75, 83C05, 35L67.

Exposé n° 1052. — Formule de KPZ, gravité quantique, cartes planaires, carte brownienne, champ libre gaussien, mesures de Liouville — 60C05, 60F17, 60-02, 05C10, 05C80, 82B20, 82B05, 82B27.

Exposé n° 1053. — Résonances en espace temps, existence globale, équations non-linéaires dispersives, condition nulle — 35B34, 35E20, 35B60, 35Q60, 35Q35.

Exposé n° 1054. — Progression arithmétique, configuration polynomiale, norme d'uniformité, principe de transfert — 11B30, 11N13, 11B25.

Exposé n° 1055. — Mélange exponentiel du fibré des repères, variétés hyperboliques de dimension 3, groupes quasi-fuchsien — 57-99, 30F99, 53-99.

Exposé n° 1056. — Espaces de Berkovich, modération topologique, types stablement dominés — 03C64, 03C65, 03C99, 14G22.

Exposé n° 1057. — Espaces perfectoides, espaces adiques, topologie étale, pureté, monodromie-poids — 11G25, 14F20, 14G20, 14G22.

Exposé n° 1058. — Groupes de Lie, mesures stationnaires, espaces homogènes, marches aléatoires — 22E40, 37D40, 60B99.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2011/2012
EXPOSÉS 1043–1058

Résumé. — Ce 64^e volume du Séminaire Bourbaki regroupe les textes des seize exposés de synthèse sur des sujets d'actualité effectués pendant l'année 2011/2012 : un d'analyse fonctionnelle, un de complexité d'algorithmes, deux d'équations aux dérivées partielles, quatre de géométrie algébrique, un de géométrie différentielle, un de théorie ergodique, trois de théorie des nombres et trois de physique mathématique.

Abstract (Séminaire Bourbaki, volume 2011/2012, exposés 1043–1058)

This 64th volume of the Bourbaki Seminar contains the texts of the sixteen survey lectures done during the year 2011/2012: one about functional analysis, one about complexity of algorithms, two on partial differential equations, four on algebraic geometry, one about differential geometry, one about ergodic theory, three on number theory and three other lectures on mathematical physics.

Résumés des exposés	vii
---------------------------	-----

NOVEMBRE 2011

1043	M. BRION — <i>Restriction de représentations et projections d'orbites coadjointes (d'après Belkale, Kumar et Ressayre)</i>	1
1044	C. MOUHOT — <i>Stabilité orbitale pour le système de Vlasov-Poisson gravitationnel (d'après Lemou-Méhats-Raphaël, Guo, Lin, Rein et al.)</i>	35
1045	P. PANSU — <i>Difficulté d'approximation (d'après Khot, Kindler, Mossel, O'Donnell,...)</i>	83
1046	P. RAPHAËL — <i>Concentration compacité à la Kenig-Merle</i>	121

JANVIER 2012

1047	K. BALL — <i>The Ribe Programme</i>	147
1048	P. DELIGNE — <i>Multizêtas, d'après Francis Brown</i>	161
1049	B. POONEN — <i>Average rank of elliptic curves (after Manjul Bhargava and Arul Shankar)</i>	187
1050	C. SABBABH — <i>Théorie de Hodge et correspondance de Hitchin-Kobayashi sauvages (d'après T. Mochizuki)</i>	205

MARS 2012

1051	M. DAFERMOS — <i>The formation of black holes in general relativity (after D. Christodoulou)</i>	243
1052	C. GARBAN — <i>Quantum gravity and the KPZ formula (after Duplantier-Sheffield)</i>	315
1053	D. LANNES — <i>Space time resonances (after Germain, Masmoudi, Shatah)</i>	355
1054	J. WOLF — <i>Arithmetic and polynomial progressions in the primes (after Gowers, Green, Tao and Ziegler)</i>	389

JUIN 2012

1055	N. BERGERON — <i>La conjecture des sous-groupes de surfaces (d'après Jeremy Kahn et Vladimir Markovic)</i>	429
1056	A. DUCROS — <i>Les espaces de Berkovich sont modérés (d'après Ehud Hrushovski et François Loeser)</i>	459
1057	J.-M. FONTAINE — <i>Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze)</i>	509
1058	F. LEDRAPPIER — <i>Mesures stationnaires sur les espaces homogènes (d'après Yves Benoist et Jean-François Quint)</i>	535

M. BRION — *Restriction de représentations et projections d'orbites coadjointes (d'après Belkale, Kumar et Ressayre)*

Étant donné un groupe de Lie compact connexe K et un sous-groupe fermé connexe L , quelles sont les représentations irréductibles de L qui apparaissent dans la restriction d'une représentation irréductible de K ? Comment une orbite de K dans la duale de sa représentation adjointe se projette-t-elle sur la représentation co-adjointe de L ? L'exposé présentera des progrès récents dans ces deux problèmes classiques, dus principalement à Belkale, Kumar et Ressayre à la suite de travaux de Klyachko, Berenstein-Sjamaar, Knutson-Tao-Woodward... Ils mettent en œuvre de nouveaux développements du calcul de Schubert et de la théorie géométrique des invariants.

C. MOUHOT — *Stabilité orbitale pour le système de Vlasov-Poisson gravitationnel (d'après Lemou-Méhats-Raphaël, Guo, Lin, Rein et al.)*

Le système de Vlasov-Poisson gravitationnel est le principal modèle pour décrire les systèmes stellaires auto-gravitants. C'est un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaire réversible en temps où l'interaction est décrite par le champ de gravitation moyen entre les étoiles. Il était conjecturé depuis longtemps que certaines solutions stationnaires, qui sont des fonctions monotones de l'énergie microscopique, sont non-linéairement stables. Le caractère « orbital » de cette stabilité provient de l'invariance par translation en espace de l'équation. La preuve au niveau linéaire était connue depuis les travaux fondateurs d'Antonov dans les années 1960, mais le problème restait ouvert au niveau non-linéaire. Dans une série d'articles récents, Lemou, Méhats et Raphaël résolvent cette conjecture. Nous évoquerons également les avancées précédentes sur ce problème, et en particulier les travaux de Guo et Rein (ainsi que ceux de Dolbeault, Lin, Sánchez, Schaeffer, Soler, Wolansky...).

P. PANSU — *Difficulté d'approximation (d'après Khot, Kindler, Mossel, O'Donnell,...)*

Du point de vue de la complexité algorithmique, de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire (comme MAX 3SAT, MAX CUT, SPARSEST CUT) sont équivalents à première vue : ils sont NP-complets. Dans certains cas, même des versions approchées, où on se contente d'une solution qui réalise une fraction donnée de l'optimum, restent NP-complètes. C'est l'essence du théorème PCP (1992). Depuis peu, pour MAX CUT, on conjecture la valeur exacte du seuil d'approximabilité. Cela fait intervenir de la géométrie et de l'analyse harmonique discrète.

P. RAPHAËL — *Concentration compacité à la Kenig-Merle*

Dans leur article de référence de 2006 [C.E. Kenig, F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. 166 (2006), 645-675], Kenig et Merle obtiennent la première démonstration critique de classification de l'onde solitaire pour une équation dispersive non-linéaire critique : cette onde exceptionnelle est le *premier* objet nonlinéaire, car c'est la *plus petite dynamique compacte* aux symétries du flot près. Je tenterai de tracer l'histoire et de montrer quelques ramifications de ce théorème fondamental qui s'inscrit au sein d'une activité internationale très importante, et d'illustrer l'influence de plusieurs domaines de l'analyse, et entre autre une idée simple et profonde issue des techniques variationnelles des années 1980 : la méthode de concentration compacité de P.-L. Lions.

K. BALL — *The Ribe Programme*

Following a remarkable rigidity principle discovered by M. Ribe, Bourgain proposed a programme to transfer the subtle geometric theory of finite-dimensional normed spaces to the class of general metric spaces: a programme which has had some striking successes and a number of intriguing applications to the theory of algorithms. This lecture will describe the most successful part of the programme, from the original work of Bourgain to recent developments by Mendel and Naor.

P. DELIGNE — *Multizêtas, d'après Francis Brown*

Les nombres multizêtas $\zeta(s_1, \dots, s_k)$ (s_i entiers ≥ 1), définis par Euler comme sommes infinies, sont aussi des « périodes ». Ils déterminent la structure de Hodge mixte du groupe fondamental rendu unipotent de $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. On s'attend à ce que les relations $\mathbb{Q}$ -linéaires entre eux reflètent des structures provenant de la géométrie algébrique sur ce π_1 .

Nous expliquerons comment F. Brown utilise ces idées pour définir une notion de « bonne » relation $\mathbb{Q}$ -linéaire entre multizêtas (on espère que toute relation $\mathbb{Q}$ -linéaire est bonne), pour montrer qu'entre les $\zeta(s_1, \dots, s_k)$, avec $s_i \in \{2, 3\}$, il n'y a pas de bonne relation $\mathbb{Q}$ -linéaire non triviale, et pour en déduire que tout nombre multizêta est combinaison linéaire de ces nombres multizêtas particuliers, et que le π_1 ci-dessus engendre la catégorie tannakienne de motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{Z}$.

B. POONEN — *Average rank of elliptic curves (after Manjul Bhargava and Arul Shankar)*

Bhargava and Shankar prove that as E varies over all elliptic curves over $\mathbb{Q}$, the average rank of the finitely generated abelian group $E(\mathbb{Q})$ is bounded. This result follows from an exact formula for the average size of the 2-Selmer group, which in turn follows from an asymptotic formula for the number of binary quartic forms over $\mathbb{Z}$ with bounded invariants. We explain their proof, as well as other arithmetic applications.

C. SABBAAH — *Théorie de Hodge et correspondance de Hitchin-Kobayashi sauvages (d'après T. Mochizuki)*

T. Mochizuki construit une théorie de variations de structure de Hodge « sauvage » pour laquelle la connexion holomorphe plate sous-jacente peut avoir des singularités irrégulières à l'infini. Il propose ainsi une généralisation de la correspondance de Corlette et Simpson entre fibrés plats irréductibles et fibrés de Higgs stables, qui admet des objets à singularités irrégulières. Une application en est la démonstration d'une conjecture de M. Kashiwara sur la validité du théorème de Lefschetz difficile lorsque les coefficients sont le complexe de de Rham d'un D-module holonome simple sur une variété projective lisse complexe.

M. DAFERMOS — *The formation of black holes in general relativity (after D. Christodoulou)*

Black holes are one of the most fascinating predictions of General Relativity. Although the most basic explicit solutions (Schwarzschild, Kerr) of the Einstein Vacuum Equations already describe black hole geometries, it remained an open question to understand whether black holes emerge in evolution from the collapse of initially arbitrarily dispersed pure gravitational waves. This talk will describe a recent landmark result of Christodoulou, who proved that this is indeed the case.

C. GARBAN — *Quantum gravity and the KPZ formula (after Duplantier-Sheffield)*

The study of statistical physics models in two dimensions ($d = 2$) at their *critical point* is in general a significantly hard problem (not to mention the $d = 3$ case). In the eighties, three physicists, Knizhnik, Polyakov and Zamolodchikov (KPZ) came up with a novel and far-reaching approach in order to understand the critical behavior of these models. Among these, one finds for example random walks, percolation as well as the Ising model. The main underlying idea of their approach is to study these models along a two-step procedure as follows:

- First of all, instead of considering the model on some regular lattice of the plane (such as $\mathbb{Z}^2$ for example), one defines it instead on a well-chosen “random planar lattice”. Doing so corresponds to studying the model in its *quantum gravity* form. In the case of percolation, the appropriate choice of random lattice matches with the so-called *planar maps* which are currently the subject of an intense activity (for example the recent works by Le Gall and Miermont).
- Then it remains to get back to the actual *Euclidean* setup. This is done thanks to the celebrated *KPZ formula* which gives a very precise correspondence between the geometric properties of models in their quantum gravity formulation and their analogs in the Euclidean case.

The nature and the origin of such a powerful correspondence remained rather mysterious for a long time. In fact, the KPZ formula is still not rigorously established and remains a conjectural correspondence. The purpose of this survey is to explain how the recent work of Duplantier and Sheffield enables to explain some of the mystery hidden behind this KPZ formula. To summarize their contribution in one sentence, their work implies a beautiful interpretation of the KPZ correspondence through a uniformization of the random lattice, seen as a Riemann surface.

D. LANNES — *Space time resonances (after Germain, Masmoudi, Shatah)*

Germain, Masmoudi and Shatah recently proved several global existence results for nonlinear dispersive equations with small data. To prove these results, they introduce the notion of space time resonance. We will link this new tool to other concepts developed in Fritz John’s program aiming at proving global existence for small data for many nonlinear partial differential equations: Shatah’s normal forms, Klainerman’s vector fields method and null condition, etc. It is known that Klainerman’s null condition on the nonlinearities plays a central role for global existence of the solutions. In the presentation of the three methods mentioned above, we will point out other structural conditions on the nonlinearities. We will in particular mention compatible and transparent nonlinearities, this latter coming from works of Joly, Métivier and Rauch in nonlinear optics. We will explain how these notions are related to the null condition and mention other examples of application where they are relevant. Finally, we will explain how Germain, Masmoudi and Shatah used the space time resonance approach to obtain a global existence result for 2 dimensional surface water waves (a result that has to be related to a theorem by S. Wu obtained with different methods).

J. WOLF — *Arithmetic and polynomial progressions in the primes (after Gowers, Green, Tao and Ziegler)*

In a celebrated theorem from 2004, Green and Tao showed that there exist arbitrarily long arithmetic progressions in the primes. A few years later Tao and Ziegler extended this result to establish the existence of arbitrary polynomial progressions in the primes: given

polynomials $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{Z}[m]$ such that $P_1(0) = \dots = P_k(0) = 0$, there exist infinitely many integers x, m such that $x + P_1(m), \dots, x + P_k(m)$ are simultaneously prime. In this talk we outline the general strategy of proof that allows one to make structural statements about dense subsets of the integers and the primes, and detail the specific ingredients that are necessary to deal with polynomial configurations.

N. BERGERON — *La conjecture des sous-groupes de surfaces (d'après Jeremy Kahn et Vladimir Markovic)*

Suite aux travaux de William Thurston et Grigori Perelman, la compréhension des variétés compactes de dimension 3 se ramène essentiellement à la compréhension de celles d'entre elles qui peuvent être munies d'une structure hyperbolique, c'est-à-dire d'une métrique riemannienne de courbure sectionnelle constante égale à -1. La topologie de ces dernières restait mystérieuse jusqu'à tout récemment. La situation a commencé à changer avec la démonstration, par Jeremy Kahn et Vladimir Markovic, du fait que le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte de dimension 3 contient toujours le groupe fondamental d'une surface de genre supérieur à 2. Dans cet exposé, j'expliquerai les grandes idées de cette démonstration. Puis je relierai ce résultat aux travaux de Dani Wise et Ian Agol sur la « conjecture virtuellement Haken » et aux travaux de Kahn et Markovic sur la « conjecture d'Ehrenpreis ».

A. DUCROS — *Les espaces de Berkovich sont modérés (d'après Ehud Hrushovski et François Loeser)*

Jusqu'à récemment, l'étude homotopique des espaces de Berkovich se fondait sur des théorèmes profonds et difficiles de géométrie arithmétique. Dans cet exposé, nous en présenterons une approche radicalement nouvelle due à Hrushovski et Loeser. Elle repose sur la théorie des modèles des corps valués et a notamment permis de prouver le résultat suivant : si X est une variété algébrique quasi-projective sur un corps ultramétrique complet k , toute partie semi-algébrique de l'espace de Berkovich associé à X est localement contractile, et a le type d'homotopie d'un polyèdre compact.

J.-M. FONTAINE — *Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze)*

En théorie de Hodge p -adique, on utilise de façon cruciale le fait que la théorie de Galois d'une extension algébrique suffisamment ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ (par exemple une $\mathbb{Z}_p$ -extension ramifiée) s'identifie à la théorie de Galois d'un corps valué complet de caractéristique p . En utilisant une vaste généralisation de cette construction, Scholze introduit certains espaces analytiques ultramétriques, les *espaces perfectoïdes*. À tout espace perfectoïde X sur un corps perfectoïde K , il associe un espace perfectoïde X^b sur le corps perfectoïde K^b de caractéristique p et cette construction est une équivalence de catégories. En outre, le site étale de X s'identifie à celui de X^b .

Ceci permet à Scholze de donner une preuve simple du théorème de presque pureté de Faltings et de ramener la conjecture monodromie-poids pour les intersections complètes dans les variétés toriques en caractéristique mixte au théorème de Deligne en égale caractéristique.

F. LEDRAPPIER — *Mesures stationnaires sur les espaces homogènes (d'après Yves Benoist et Jean-François Quint)*

Soient G un groupe de Lie réel, Λ un sous-groupe discret tel que le quotient G/Λ a un volume fini, μ une mesure de probabilité sur G à support compact et Γ_μ le sous-groupe de G engendré par le support de μ . On suppose que l'adhérence de Zariski de $\text{Ad}(\Gamma)$ est un groupe semi-simple sans facteur compact. Yves Benoist et Jean-François Quint ont classifié

les mesures de probabilité sur G/Γ qui sont extrémales parmi les probabilités stationnaires sous l'action de μ : ce ne peuvent être que des volumes (normalisés) sur des orbites fermées, de volume fini, de sous-groupes de G . L'exemple de deux matrices de $GL(d, \mathbb{Z})$ agissant sur $\mathbb{T}^d$ entre souvent dans ce cadre et est déjà significatif.