

Astérisque

Pages préliminaires

Astérisque, tome 348 (2012), p. I-X

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012_348_R1_0>

© Société mathématique de France, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

348

ASTÉRISQUE

2012

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2010/2011
EXPOSÉS 1027-1042

Avec table par noms d'auteurs de 1948/49 à 2009/10

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki.
École normale supérieure,
45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.
URL : <http://www.bourbaki.ens.fr>

Mots-clefs et classification mathématique par sujet (2000)

Exposé n° 1027. — Théorie du contrôle, équations aux dérivées partielles, mécanique des fluides — 93C20, 35Q30, 35Q31.

Exposé n° 1028. — Méthodes de crible, équirépartition, propriété (τ), graphes expanseurs — 11N05, 11N35, 11N36, 20F69, 05C25.

Exposé n° 1029. — Invariant de Kervaire, groupes d'homotopie stable, théorie de l'homotopie stable équivariante, théorie de l'homotopie chromatique, spectres en anneaux structurés — 55Q45.

Exposé n° 1030. — Physique statistique, analyse complexe discrète, invariance conforme, modèle d'Ising — 60K35, 82B20, 52C26, 60J67, 81T40.

Exposé n° 1031. — Programme de Langlands p -adique, $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, cohomologie complétée, compatibilité local-global — 11S37, 11F70, 11F80, 22E55.

Exposé n° 1032. — Conjecture de Zilber-Pink, intersections exceptionnelles, variétés semi-abéliennes, hauteurs, problème de Lehmer, conjecture de Bogomolov — 11G10, 11G50, 14K12, 14K15.

Exposé n° 1033. — Spectral sparsification, approximate John decomposition, dimensionality reduction, restricted invertibility — 65F50, 15A63, 46B85, 52A23, 46B07.

Exposé n° 1034. — Fonctions BV, transport de Brenier, inégalité de Sobolev à trace, asymétrie, corps convexes — 26A45, 53A10, 49Q15, 28A75.

Exposé n° 1035. — Hitchin fibration, fundamental lemma, trace formula, Langlands program, stacks — 11F70.

Exposé n° 1036. — Géométrie algébrique réelle, géométrie symplectique réelle, problèmes énumératifs, invariants de Gromov-Witten, théorie symplectique des champs, courbes pseudo-holomorphes — 14N10, 14N35, 14P99, 53D35, 53D42, 53D45.

Exposé n° 1037. — André-Oort conjecture, o-minimal theories, modular function, complex multiplication, special points, Shimura varieties — 11G18, 03C64.

Exposé n° 1038. — Conjecture de Serre II, obstruction de Brauer, connexité rationnelle — 11E72, 14G05, 14M22.

Exposé n° 1039. — Nonamenable groups, percolation, measured equivalence relations, von Neumann algebras — 37A20, 20E05, 20P05, 46L10.

Exposé n° 1040. — Hyperkähler manifolds, Global Torelli theorem, K3 surfaces — 53C26, 14J28, 32J27.

Exposé n° 1041. — Déterminant jacobien, espaces de Sobolev — 46E35.

Exposé n° 1042. — Existence, asymptotique, diffusion, équation de Schrödinger nonlinéaire — 35Q55, 35B40, 35B44, 35P25.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2010/2011
EXPOSÉS 1027–1042

Résumé. — Comme les précédents volumes de ce séminaire, qui compte maintenant plus de mille exposés, celui-ci contient seize exposés de synthèse sur des sujets d'actualité : trois situés entre analyse et géométrie, trois de géométrie algébrique, deux de géométrie diophantienne, deux liés au programme de Langlands, deux en théorie des groupes, un de topologie algébrique, un sur le modèle d'Ising et deux en physique mathématique.

Abstract (Séminaire Bourbaki, volume 2010/2011, exposés 1027–1042)

As in the preceding volumes of this seminar, which now counts more than one thousand talks, one finds here sixteen survey lectures on topics of current interest : three lectures between analysis and geometry, three about algebraic geometry, three on diophantine geometry, two related to Langlands' program, two about group theory, one on algebraic topology, one related to Ising's model, and two about mathematical physics.

Résumés des exposés	vii
---------------------------	-----

NOVEMBRE 2010

1027 O. GLASS — <i>La méthode du retour en contrôlabilité et ses applications en mécanique des fluides (d'après Coron et al.)</i>	1
1028 E. KOWALSKI — <i>Crible en expansion</i>	17
1029 H. MILLER — <i>Kervaire Invariant One (after M. A. Hill, M. J. Hopkins, and D. C. Ravenel)</i>	65
1030 W. WERNER — <i>Analyticité discrète du modèle d'Ising (d'après Stanislav Smirnov)</i>	99

JANVIER 2011

1031 C. BREUIL — <i>Correspondance de Langlands p-adique, compatibilité local-global et applications (d'après Colmez, Emerton, Kisin, ...)</i>	119
1032 A. CHAMBERT-LOIR — <i>Relations de dépendance et intersections exceptionnelles</i>	149
1033 A. NAOR — <i>Sparse quadratic forms and their geometric applications (following Batson, Spielman and Srivastava)</i>	189
1034 F. SANTAMBROGIO — <i>Inégalités isopérimétriques quantitatives via le transport optimal (d'après A. Figalli, F. Maggi et A. Pratelli)</i>	219

AVRIL 2011

1035 T. C. HALES — <i>The fundamental lemma and the Hitchin fibration (after Ngô Bao Chau)</i>	233
1036 A. OANCEA — <i>Invariants de Welschinger</i>	265
1037 T. SCANLON — <i>A proof of the André-Oort conjecture via mathematical logic (after Pila, Wilkie and Zannier)</i>	299
1038 C. VOISIN — <i>Sections rationnelles de fibrations sur les surfaces et conjecture de Serre (d'après de Jong, He et Starr)</i>	317

JUIN 2011

1039	C. HOUDAYER — <i>Invariant percolation and measured theory of nonamenable groups (after Gaboriau-Lyons, Ioana, Epstein)</i> ...	339
1040	D. HUYBRECHTS — <i>A Global Torelli theorem for hyperkähler manifolds (after M. Verbitsky)</i>	375
1041	P. MIRONESCU — <i>Le déterminant jacobien (d'après Brezis et Nguyen)</i>	405
1042	F. PLANCHON — <i>Existence globale et scattering pour les solutions de masse finie de l'équation de Schrödinger cubique en dimension deux (d'après Benjamin Dodson, Rowan Killip, Terence Tao, Monica Visan et Xiaoyi Zhang)</i>	425
	Table par noms d'auteurs	449

O. GLASS — *La méthode du retour en contrôlabilité et ses applications en mécanique des fluides (d'après Coron et al.)*

Un système de contrôle est une équation d'évolution dépendant d'un paramètre. La théorie du contrôle cherche à déterminer comment l'on peut choisir ce paramètre en fonction du temps afin de modifier la dynamique dans un sens prescrit. Le problème de contrôlabilité s'intéresse en particulier à la possibilité de faire passer l'état du système d'un point de départ à une cible prescrite, celui de stabilisation à la possibilité de rendre un point d'équilibre stable. Dans le cas d'équations non linéaires, l'approche usuelle pour obtenir ce type de propriété est de linéariser le système, puis d'obtenir un résultat sur le linéarisé par des méthodes classiques. Cependant dans de nombreux systèmes d'origine physique, le linéarisé n'est pas nécessairement contrôlable. La méthode du retour introduite par J.-M. Coron permet de contourner cet obstacle. Dans cet exposé, nous nous intéresserons d'abord au problème pour lequel cette méthode a été introduite, qui concerne la stabilisation de certains systèmes de dimension finie ; puis nous illustrerons la méthode par deux exemples issus de la mécanique des fluides incompressibles : l'un, dû à J.-M. Coron, concernant l'équation d'Euler, l'autre, dû à J.-M. Coron et S. Guerrero, concernant l'équation de Navier-Stokes.

E. KOWALSKI — *Crible en expansion*

Récemment, particulièrement sous l'impulsion de J. Bourgain, A. Gamburd et P. Sarnak, les méthodes de crible, bien connues en théorie analytique des nombres, ont été introduites dans l'étude de problèmes concernant des objets arithmétiques liés à l'action de groupes discrets à croissance exponentielle (par exemple, les points d'une orbite d'un tel groupe agissant sur un espace affine). Dans ce type de contexte, l'application du crible s'avère dépendre crucialement de propriétés d'expansion de familles de graphes associés à des quotients finis du groupe considéré. De nombreux travaux ont ainsi été consacrés à l'extension de ces propriétés à de nouvelles situations : on peut citer les travaux de Kontorovich-Oh concernant la théorie spectrale de certaines surfaces ou variétés hyperboliques de volume infini, et ceux de Helfgott, Bourgain-Gamburd-Sarnak, Breuillard-Green-Tao, Pyber-Szabó, Varju et d'autres, concernant les propriétés d'expansion des sous-groupes Zariski-denses de groupes linéaires. L'exposé présentera ces nouveaux aspects du crible, en essayant de mettre en valeur les principes généraux et certaines des applications les plus élégantes, ainsi que diverses questions encore ouvertes.

H. MILLER — *Kervaire Invariant One (after M. A. Hill, M. J. Hopkins, and D. C. Ravenel)*

The question of when the Kervaire invariant is nontrivial was the only question left unresolved by Kervaire and Milnor in their 1963 study of the relationship between groups of homotopy spheres and stable homotopy groups. Last year, Hill, Hopkins and Ravenel resolved this question except in one dimension, by a highly innovative attack using large amounts of equivariant stable homotopy theory and small amounts of computation.

W. WERNER — *Analyticité discrète du modèle d'Ising (d'après Stanislav Smirnov)*

Nous essaierons de présenter des idées et des résultats récents de Stanislav Smirnov (dont certains en collaboration avec ses étudiants et post-doctorants, Dmitry Chelkak, Antti Kemppainen, Clément Hongler ou Hugo Duminil-Copin, et reliés à des travaux de Richard Kenyon) concernant l'analyticité discrète de certaines fonctions définies à partir de modèles sur réseau issus de la physique statistique, comme le modèle d'Ising, et leurs conséquences sur le comportement asymptotique de ces systèmes à grande échelle.

C. BREUIL — *Correspondance de Langlands p-adique, compatibilité local-global et applications (d'après Colmez, Emerton, Kisin, ...)*

Emerton vient de montrer que la correspondance de Langlands locale p -adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ se réalise dans la cohomologie étale p -adique « complétée » de la tour des courbes modulaires. Combiné avec des travaux de Colmez et de Kisin (et d'autres), ainsi qu'avec la preuve de la conjecture de modularité de Serre (Khare-Wintenberger), ce résultat a plusieurs conséquences : conjecture de Fontaine-Mazur décrivant les représentations galoisiennes provenant des formes modulaires, conjecture de Kisin sur l'analogue surconvergent, compatibilité entre correspondance de Langlands p -adique et correspondance classique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, conjecture sur les multiplicités modulaires de Breuil-Mézard...

A. CHAMBERT-LOIR — *Relations de dépendance et intersections exceptionnelles*

L'exposé sera consacré au résultat suivant, issu des travaux de Bombieri, Masser, Zannier et Maurin : Soit C une courbe algébrique (irréductible) complexe et considérons n fonctions rationnelles f_1, \dots, f_n non identiquement nulles et multiplicativement indépendantes sur C . Les points x de C où leurs valeurs $f_1(x), \dots, f_n(x)$ vérifient au moins deux relations de dépendance multiplicatives indépendantes forment un ensemble fini.

Nous discuterons les généralisations conjecturales de ce théorème (Bombieri, Masser, Zannier ; Zilber ; Pink) concernant la finitude des points d'une sous-variété X de dimension d d'une variété semi-abélienne A qui appartiennent à un sous-groupe algébrique de codimension $> d$ dans A , leurs relations avec les théorèmes de type Mordell–Lang ou Manin–Mumford et, dans le cas arithmétique, les résultats récents (Habegger ; Rémond) concernant la hauteur des points appartenant à un sous-groupe algébrique de codimension d .

A. NAOR — *Sparse quadratic forms and their geometric applications (following Batson, Spielman and Srivastava)*

Let (a_{ij}) be a symmetric matrix with nonnegative entries. Batson, Spielman and Srivastava proved that for every $\epsilon > 0$ there exist $c = c(\epsilon) > 0$ and a symmetric matrix (b_{ij}) whose entries are nonnegative and at most cn of them are nonzero, such that for all $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ we have

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - x_j)^2 \leq \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x_i - x_j)^2 \leq (1 + \epsilon) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - x_j)^2.$$

We describe the beautiful proof of this theorem, as well as some of its geometric applications, including a new proof of the Bourgain-Tzafriri restricted invertibility phenomenon, improved approximate John decompositions for convex bodies, and dimensionality reduction in L_p spaces.

F. SANTAMBROGIO — *Inégalités isopérimétriques quantitatives via le transport optimal (d'après A. Figalli, F. Maggi et A. Pratelli)*

L'inégalité isopérimétrique classique établit le volume maximal d'un corps dans \mathbb{R}^n à périmètre fixé. L'optimum étant la boule B , elle donne $P(E) \geq n|E|^{1-\frac{1}{n}}|B|^{\frac{1}{n}}$ pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$. Sa version anisotrope concerne le K -périmètre P_K , défini à partir d'un corps convexe $K \subset \mathbb{R}^n$, et s'écrit $P_K(E) \geq n|E|^{1-\frac{1}{n}}|K|^{\frac{1}{n}}$ et l'optimum est réalisé par K . Une version quantitative de ces inégalités revient à estimer l'écart $P(E) - n|E|^{1-\frac{1}{n}}|B|^{\frac{1}{n}}$ en termes de « combien E est différent de B ». La version quantitative optimale de l'inégalité classique a été prouvée en 2008 par Fusco, Maggi et Pratelli par des méthodes de symétrisation, spécifiques au cas isotrope. Les travaux que je présenterai ont permis, grâce à l'application du transport de Brenier, de faire de même dans le cas anisotrope.

T. C. HALES — *The fundamental lemma and the Hitchin fibration (after Ngô Bao Châu)*

About thirty years ago, R. P. Langlands conjectured a collection of identities to hold among integrals over conjugacy classes in reductive groups. Ngô Bao Châu has proved these identities (collectively called the fundamental lemma) by interpreting the integrals in terms of the cohomology of the fibers of the Hitchin fibration. The fundamental lemma has profound consequences for the theory of automorphic representations. Significant recent theorems in number theory use the fundamental lemma as an ingredient in their proofs.

A. OANCEA — *Invariants de Welschinger*

Le problème de l'énumération des courbes contenues dans une variété projective donnée et soumises à des conditions d'incidence génériques est classique. En complexe, l'outil adapté est la théorie des invariants de Gromov-Witten. En réel, la situation a été débloquée en 2003 lorsque Welschinger a inventé de nouveaux invariants adaptés aux courbes rationnelles et aux variétés de dimension 2 ou 3. Nous présenterons la construction de Welschinger et nous donnerons un panorama des résultats qu'elle a rendus possibles.

T. SCANLON — *A proof of the André-Oort conjecture via mathematical logic (after Pila, Wilkie and Zannier)*

Following a strategy proposed by Zannier, Pila has proven a version of the André-Oort conjecture by playing lower bounds on the size of Galois orbits of special points against upper bounds provided by a remarkable theorem of Pila and Wilkie on the number of rational points in transcendental sets definable in o-minimal structures. We explain the ideas behind the counting theorem and the proof of the André-Oort conjecture, and then discuss some other theorems in diophantine geometry which have been proven with this method.

C. VOISIN — *Sections rationnelles de fibrations sur les surfaces et conjecture de Serre (d'après de Jong, He et Starr)*

Cet exposé est consacré aux résultats de de Jong, He et Starr concernant l'existence d'une section rationnelle pour les familles de variétés projectives paramétrées par une surface, lorsque les fibres satisfont certaines conditions portant essentiellement sur la géométrie de leur variété des droites. Ces conditions sont satisfaites par les variétés homogènes G/P , ce qui leur permet de compléter la preuve d'une conjecture de Serre sur la trivialité des G -torseurs sur les corps de fonctions de surfaces définies sur un corps algébriquement clos, lorsque le groupe G est connexe, semi-simple et simplement connexe.

C. HOUDAYER — *Invariant percolation and measured theory of nonamenable groups (after Gaboriau-Lyons, Ioana, Epstein)*

Using percolation techniques, Gaboriau and Lyons recently proved that every countable, discrete, nonamenable group Γ contains measurably the free group \mathbf{F}_2 on two generators: there exists a probability measure-preserving, essentially free, ergodic action of \mathbf{F}_2 on $([0, 1]^\Gamma, \lambda^\Gamma)$ such that almost every Γ -orbit of the Bernoulli shift splits into \mathbf{F}_2 -orbits. A combination of this result and works of Ioana and Epstein shows that every countable, discrete, nonamenable group admits uncountably many non-orbit equivalent actions.

D. HUYBRECHTS — *A Global Torelli theorem for hyperkähler manifolds (after M. Verbitsky)*

The Global Torelli theorem asserts that two K3 surfaces are isomorphic if and only if their weight-two Hodge structures $H^2(S, \mathbb{Z})$ are isometric. In other words, the period map for K3 surfaces is injective. The higher-dimensional version of this theorem for compact hyperkähler manifolds is known to fail. The talk will discuss a result of Verbitsky which proves that the period map is injective when restricted to connected components of the moduli space. It is, therefore, the existence of various connected components of the moduli space that is behind this failure.

P. MIRONESCU — *Le déterminant jacobien (d'après Brezis et Nguyen)*

Le déterminant jacobien $j(u)$ d'une application $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bien défini si, par exemple, $u \in C^1$. La théorie de l'élasticité non-linéaire (Ball, 1977) et celle des cristaux liquides (Brezis, Coron, Lieb, 1986) font intervenir $j(u)$ pour des u moins régulières. C'est une identité de Morrey (1966) qui permet d'aller au-delà de C^1 . Je présenterai une brève histoire de $j(u)$, du théorème de compacité de Reshetnyak (1968) aux résultats récents de Brezis et Nguyen (2010) caractérisant les espaces fonctionnels dans lesquels $j(u)$ est bien défini.

F. PLANCHON — *Existence globale et scattering pour les solutions de masse finie de l'équation de Schrödinger cubique en dimension deux*

L'équation de Schrödinger à non-linéarité cubique admet des solutions locales en temps pour des données de masse finie. Il était conjecturé depuis longtemps que sous cette seule hypothèse (dans le cas défocalisant), les solutions étaient en fait globales et proches de solutions linéaires à grand temps (scattering). Nous donnerons les éléments principaux de la preuve, qui suit une stratégie initiée par Kenig-Merle sur des problèmes du même type : existence de solutions minimales niant la conjecture (Tao-Višan-Zhang), et leur exclusion par l'utilisation judicieuse de formules de monotonie liées à la dispersion, en particulier dans le cas non radial où la contribution récente de Dodson donne finalement la preuve complète de la conjecture.