Astérisque

AST

Sur les conjectures de Gross et Prasad. II - Pages préliminaires

Astérisque, tome 347 (2012), p. III-X

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__347__R1_0>

© Société mathématique de France, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

347

ASTÉRISQUE

2012

SUR LES CONJECTURES DE GROSS ET PRASAD. II

C. MŒGLIN & J.-L. WALDSPURGER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Colette Mœglin
Institut de Mathématiques de Jussieu-CNRS, 2, place Jussieu, 75005 Paris
moeglin@math.jussieu.fr

Jean-Loup Waldspurger
Institut de Mathématiques de Jussieu-CNRS, 2 place Jussieu, 75005 Paris, France
waldspur@math.jussieu.fr

SUR LES CONJECTURES DE GROSS ET PRASAD. II

Colette MŒGLIN & Jean-Loup WALDSPURGER

Résumé. — La conjecture de Gross et Prasad détermine, sous certaines conditions, la restriction d'une représentation admissible et irréductible d'un groupe $G = SO(n)$ sur un corps local à un sous-groupe de la forme $G' = SO(n-1)$. Pour deux L-paquets génériques (étendus à la mode de Vogan), l'un de G, l'autre de G', la conjecture affirme qu'il existe une unique paire (π, π') dans le produit de ces deux L-paquets telle que π' apparaisse dans la restriction de π. De plus, les paramètres de π et π' (dans le paramétrage usuel des L-paquets) sont calculés par une formule explicite où apparaissent des facteurs ϵ. Ce volume, qui est le deuxième numéro d'*Astérisque* consacré à la conjecture, contient la preuve de celle-ci sur un corps de base non-archimédien. Dans un premier article, pour une représentation admissible irréductible et auto-duale d'un groupe $GL(N)$, on exprime la valeur au centre de symétrie de son facteur ϵ à l'aide d'une formule intégrale faisant intervenir le caractère d'un prolongement de la représentation au groupe $GL(N)$ tordu. Le deuxième article démontre la conjecture pour les représentations tempérées. Celle-ci résulte de la stabilisation, au sens de la théorie de l'endoscopie, des deux formules intégrales obtenues dans l'article précédent et dans celui publié dans le volume 346 d'*Astérisque*. Signalons que l'on utilise quelques propriétés des L-paquets qui sont encore conjecturales mais qui ne le seront plus quand Arthur aura achevé son monumental travail en cours. Enfin, dans le dernier article, commun avec C. Mœglin, on étend le résultat aux paquets génériques non tempérés, en prouvant que ceux-ci sont formés d'induites irréductibles de représentations tempérées.

***Abstract* (On the conjectures of Gross and Prasad.)** The conjecture of Gross and Prasad determines, under some assumptions, the restriction of an irreducible admissible representation of a group $G = SO(n)$ over a local field to a subgroup of the form $G' = SO(n-1)$. For two generic L-paquets (more precisely two generic Vogan's L-packets), the first for G, the second for G', the conjecture states that there is a unique pair (π, π') in the product of the two packets such that π' appears in the restriction of π. Moreover, the parametrization of π and π' (in the usual parametrization of L-packets) is given by an explicit formula involving some ϵ-factors. In this second volume of *Astérisque* devoted to the conjecture, we give its proof when the

© Astérisque 347, SMF 2012

base field is non-archimedean. In a first paper, we consider an irreducible admissible and self-dual representation of a group $GL(N)$. We prove that the value at the center of symmetry of its ϵ-factor is given by an integral formula who appears the character of an extension of the representation to the twisted $GL(N)$. The second paper proves the conjecture for tempered representations. It is a consequence of the stabilization, in the sense of endoscopy theory, of the two integral formulas proved in the first paper above and in the volume 346. Here we use some properties of L-packets that are still conjectural, but were probably proved by Arthur in a next future. In the last paper with Moeglin, we extend the result to non-tempered generic L-packets. It follows from the following fact that we prove: the elements in these L-packets are irreducible induced representations from tempered representations.

TABLE DES MATIÈRES

Jean-Loup Waldspurger — ***Calcul d'une valeur d'un facteur ε par une formule intégrale*** 1

Introduction 1

Remarque sur la notation 6

1. Notations, groupes tordus 6

1.1. Notations générales 6

1.2. Groupes tordus 6

1.3. Les espaces $\mathcal{C}_{\tilde{M}}$ 9

1.4. Mesures 10

1.5. Intégrales orbitales pondérées 11

1.6. Quasi-caractères 11

1.7. Fonctions très cuspidales 12

1.8. Distributions locales associées à une fonction très cuspidale 12

1.9. Représentations de groupes tordus 14

1.10. Intégrales orbitales pondérées invariantes 15

1.11. Un lemme d'annulation 16

1.12. Induction de quasi-caractères 18

1.13. Propriétés des fonctions très cuspidales 19

2. Le groupe GL_d tordu 19

2.1. Description du groupe tordu 19

2.2. Modèle de Whittaker 20

2.3. Représentations induites 21

2.4. Représentations elliptiques des groupes linéaires tordus 23

2.5. Facteurs ε 23

3. La partie géométrique de la formule intégrale 24

3.1. Plongements de groupes linéaires tordus 24

3.2. Les ingrédients de la formule géométrique 25

3.3. La formule géométrique 26

3.4. Localisation 27

3.5. Une première expression de $J_{\tilde{x},\omega,N}(\Theta,\tilde{f})$ 34

3.6. Changement de fonction de troncature 35

3.7. Apparition des intégrales orbitales pondérées 40
3.8. Preuve du théorème 3.2 42
4. Majorations 43
4.1. Les résultats 43
4.2. Choix d'une base 44
4.3. Comparaison de Ξ^H et Ξ^G 45
4.4. Majorations d'intégrales unipotentes 45
4.5. Majoration d'une intégrale de fonctions d'Harish-Chandra 49
4.6. Preuve (sic !) des majorations de 4.1 53
5. Produits bilinéaires et facteurs ε 53
5.1. Modèles de Whittaker 53
5.2. Entrelacements 54
5.3. Entrelacements et modèles de Whittaker 54
5.4. Non-nullité des entrelacements 60
5.5. Entrelacements et groupes tordus 60
5.6. Entrelacements et induction 62
6. La partie spectrale de la formule intégrale 63
6.1. Enoncé du théorème 63
6.2. Utilisation de la formule de Plancherel 63
6.3. Apparition des entrelacements 64
6.4. Une première approximation 68
6.5. Changement de fonction de troncature 69
6.6. Un résultat extrait de la formule des traces locale tordue 82
6.7. Utilisation de la formule des traces locale tordue 84
6.8. Simplification de $\Phi(g')$ 86
6.9. Évaluation d'une limite 88
6.10. Preuve du théorème 6.1 90
7. Une formule intégrale calculant une valeur d'un facteur ε 92
7.1. Énoncé du théorème 92
7.2. Terme géométrique et induction 92
7.3. Début de la preuve : le cas des représentations induites 98
7.4. Le cas elliptique 99
Références 102

Jean-Loup Waldspurger — ***La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux*** 103
Introduction 103
1. Paramétrages 108
1.1. Notations générales 108
1.2. Mesures 108
1.3. Espace de paramètres 110
1.4. Paramétrage des classes de conjugaison 112
1.5. Définition de fonctions sur l'ensemble de paramètres 115

1.6. Endoscopie 116
1.7. Endoscopie pour les groupes spéciaux orthogonaux 118
1.8. Endoscopie pour les groupes linéaires tordus 121
2. Quelques formules revisitées 122
2.1. Multiplicités pour les groupes spéciaux orthogonaux 122
2.2. Reformulation de $m_{\text{géom}}(\sigma, \sigma')$ 124
2.3. Facteurs ε de paires 127
2.4. Reformulation de $\varepsilon_{\text{géom},\nu_1}(\pi, \pi')$ 128
3. Endoscopie 130
3.1. Rappels sur le calcul des fonctions $c_{\sigma,\mathcal{O}}$ 130
3.2. Définition d'une multiplicité stable 132
3.3. Transfert de multiplicités 133
3.4. Transfert de valeurs de facteurs ε 143
3.5. Une première conséquence 149
4. Preuve du théorème principal 150
4.1. Représentations du groupe de Weil-Deligne 150
4.2. Conjectures pour les groupes spéciaux orthogonaux impairs 152
4.3. Conjectures pour les groupes spéciaux orthogonaux pairs 153
4.4. Version faible des conjectures pour les groupes spéciaux orthogonaux pairs 155
4.5. Remarques sur les conjectures 155
4.6. Remarques sur les constantes 156
4.7. Caractère central 157
4.8. Détermination des constantes 159
4.9. Le théorème 159
4.10. Utilisation des résultats antérieurs 161
4.11. La preuve dans le cas G' déployé 162
4.12. Le cas G' non déployé 163
Références 165

Colette Mœglin & Jean-Loup Waldspurger — ***La conjecture locale de Gross-Prasad pour les groupes spéciaux orthogonaux : le cas général*** 167
Introduction 167
1. Induction et multiplicités 171
1.1. Notations 171
1.2. Définition des multiplicités 172
1.3. Induction 173
1.4. Une première inégalité 174
1.5. Rappel d'un résultat de Gan, Gross et Prasad 178
1.6. L'inégalité $m(\sigma, \check{\sigma}') \leq m(\sigma_0, \sigma_0')$ 178
1.7. Produit multilinéaire 180
1.8. Prolongement méromorphe du produit multilinéaire 185
1.9. Preuve de l'inégalité $m(\sigma_0, \sigma_0') \leq m(\sigma, \check{\sigma}')$ 186

2. Irréductibilité et représentations génériques 187
2.1. Rappels sur les paramétrages 187
Notation 189
2.2. Induction et modules de Jacquet 189
2.3. Support cuspidal étendu 191
2.4. Support cuspidal étendu et induction dans le cas tempéré 193
2.5. Un lemme technique 194
2.6. Induction et L-paquets tempérés 195
2.7. Propriété des représentations tempérées ayant un modèle de Whittaker 196
2.8. Définition des points de réductibilité possible pour une représentation tempérée 201
2.9. Réductibilité et généricité 202
2.10. La notion de liaison 203
2.11. Un résultat d'irréductibilité 204
2.12. Un second résultat d'irréductibilité 207
2.13. Critère d'irréductibilité 207
2.14. Irréductibilité et L-paquets génériques 208
2.15. Le cas des groupes spéciaux orthogonaux pairs 209
3. Preuve du théorème 211
4. Existence et unicité des représentations génériques dans un paquet tempéré 213
Références 215