

Astérisque

JEAN-LOUP WALDSPURGER

**Une variante d'un résultat de Aizenbud, Gourevitch,
Rallis et Schiffmann**

Astérisque, tome 346 (2012), p. 313-318

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__346__313_0>

© Société mathématique de France, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE VARIANTE D'UN RÉSULTAT DE AIZENBUD, GOUREVITCH, RALLIS ET SCHIFFMANN

par

Jean-Loup Waldspurger

Résumé. — Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann ont prouvé un théorème de multiplicité 1 pour les restrictions des représentations irréductibles de certains groupes classiques p -adiques. Leur théorème s'applique aux groupes orthogonaux. En utilisant une variante de leur méthode, nous prouvons le même théorème pour les groupes p -adiques spéciaux orthogonaux.

Abstract (A variant of a result by Aizenbud, Gourevitch, Rallis and Schiffmann)

Aizenbud, Gourevitch, Rallis and Schiffmann have proved a multiplicity one theorem for restrictions of irreducible representations of certain p -adic classical groups. Their theorem applies to orthogonal groups. Using a variant of their method, we prove the same theorem for p -adic special orthogonal groups.

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, W un espace vectoriel sur F de dimension finie ≥ 1 , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée sur W , $W = V \oplus U$ une décomposition orthogonale où U est une droite. On note M , resp. G , le groupe orthogonal de W , resp. V , et M^0 , resp. G^0 , le sous-groupe spécial orthogonal (plus exactement, on note ainsi les groupes de points sur F de ces groupes algébriques). Le groupe G s'identifie au sous-groupe des éléments de M qui fixent U point par point. On veut prouver le théorème suivant.

Théorème 1. — Soient π , resp. ρ , une représentation admissible irréductible de M^0 , resp. G^0 . Alors $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G^0}(\pi|_{G^0}, \rho)) \leq 1$.

Dans l'article [1], les auteurs démontrent plusieurs résultats de ce genre et en particulier l'analogie du théorème ci-dessus où les groupes spéciaux orthogonaux sont remplacés par les groupes orthogonaux. Le cas des groupes spéciaux orthogonaux a une certaine importance, en particulier si l'on s'intéresse à la conjecture locale de Gross-Prasad ([2], conjecture 10.7). La preuve du théorème 1 que l'on présente ci-dessous est une simple variante de celle de [1]. On n'en détaillera que les parties qui diffèrent sensiblement de celle-là. Je remercie vivement G. Henniart pour m'avoir

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E50.

Mots clefs. — Groupes spéciaux orthogonaux, multiplicité 1.

signalé le problème et pour des remarques pertinentes sur une première version de l'article. Je remercie également le referee pour sa lecture soigneuse.

On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G^0 . Posons $\tilde{G} = G \times \{\pm 1\}$. Ce groupe agit sur G^0 , $\mathfrak{g}$ et V par

$$(g, \varepsilon)x = gx^\varepsilon g^{-1}, \quad (g, \varepsilon)X = \varepsilon gXg^{-1}, \quad (g, \varepsilon)v = \varepsilon gv,$$

pour $(g, \varepsilon) \in \tilde{G}$, $x \in G^0$, $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. On construit de même un groupe $\tilde{M}$. Par l'inclusion évidente $\tilde{G} \subset \tilde{M}$, le groupe $\tilde{G}$ agit sur M^0 . Notons $e(V)$ la partie entière de $(\dim(V) + 1)/2$ (seule importera la parité de ce nombre). Notons $\bar{G}$ le sous-groupe des éléments $(g, \varepsilon) \in \tilde{G}$ tels que $\det(g) = \varepsilon^{e(V)}$. Notons χ le caractère $(g, \varepsilon) \mapsto \varepsilon$ de $\bar{G}$ et, pour tout espace vectoriel complexe $\mathcal{V}$ sur lequel $\bar{G}$ agit, notons $\mathcal{V}^{\bar{G}, \chi}$ le sous-espace des éléments qui se transforment sous l'action de $\bar{G}$ selon le caractère χ . Pour tout espace topologique X localement compact et totalement discontinu, on note $\mathcal{V}(X)$ l'espace des fonctions sur X à valeurs complexes, localement constantes et à support compact, et $\mathcal{V}'(X)$ l'espace vectoriel dual. On a

Théorème 1'. — *L'espace $\mathcal{V}'(M^0)^{\bar{G}, \chi}$ est nul.*

Prouvons que ce théorème entraîne le théorème 1. On fixe $g \in G$ tel que $g^2 = 1$ et $\det(g) = (-1)^{e(V)}$. On note σ l'anti-involution $x \mapsto gx^{-1}g^{-1}$ de M^0 . Le théorème 1' implique que toute distribution sur M^0 invariante par conjugaison par G^0 est invariante par σ . Le corollaire 1.1 de [1] s'applique: pour π et ρ comme dans le théorème 1, on a

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G^0}(\pi|_{G^0}, \rho^*)) \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G^0}((\pi^*)|_{G^0}, \rho)) \leq 1.$$

Il reste à prouver que

$$(1) \quad \mathrm{Hom}_{G^0}(\pi|_{G^0}, \rho^*) \simeq \mathrm{Hom}_{G^0}(\pi|_{G^0}, \rho) \simeq \mathrm{Hom}_{G^0}((\pi^*)|_{G^0}, \rho).$$

Pour $\delta \in M$ tel que $\det(\delta) = -1$, définissons la représentation π^δ de M^0 par $\pi^\delta(x) = \pi(\delta x \delta^{-1})$. Sa classe d'isomorphie ne dépend pas de δ . On sait que toute représentation de M est auto-duale ([3], chapitre IV, théorème II.1). Il en résulte aisément que π^* est isomorphe à π ou à π^δ . Dans le cas où $\dim(W)$ est impaire, on peut choisir δ central, d'où $\pi^* \simeq \pi \simeq \pi^\delta$. Des propriétés analogues valent en remplaçant W et π par V et ρ . De plus, on peut choisir un même élément $\delta \in G$ pour définir π^δ et ρ^δ . L'égalité suivante est alors immédiate:

$$\mathrm{Hom}_{G^0}(\pi|_{G^0}^\delta, \rho^\delta) = \mathrm{Hom}_{G^0}(\pi|_{G^0}, \rho).$$

La relation (1) s'ensuit. □

Prouvons le théorème 1'. On définit le groupe $\bar{M}$ comme on a défini $\bar{G}$. Remarquons que, si $e(V) \neq e(W)$, $\bar{G}$ n'est pas un sous-groupe de $\bar{M}$. On a:

Proposition. — *Supposons que $\mathcal{V}'(M^0 \times W)^{\bar{M}, \chi} = \{0\}$. Alors $\mathcal{V}'(M^0)^{\bar{G}, \chi} = \{0\}$.*

Démonstration. — Fixons un élément non nul $e \in U$. Par descente de Frobenius (cf. [1] preuve de la proposition 5.1), l'hypothèse implique que $\mathcal{J}'(M^0)^{\bar{M}_e, \chi} = \{0\}$, où $\bar{M}_e$ est le fixateur de e dans $\bar{M}$. Ce fixateur est l'ensemble des $(m, \varepsilon) \in \bar{M}$ tels que $m = g \oplus \varepsilon$ conformément à la décomposition $W = V \oplus U$, avec $g \in G$. Notons ε_M l'homothétie dans W de rapport ε . C'est un élément central dans M , et on a aussi $m = \varepsilon_M(g \oplus 1)$, avec un autre g . La condition $(m, \varepsilon) \in \bar{M}$ signifie que $\det(g) = \varepsilon^{\dim(W)+e(W)}$. Or $\dim(W) + e(W) \equiv e(V) \pmod{2\mathbb{Z}}$. Donc $\bar{M}_e$ est l'ensemble des $(\varepsilon_M, 1)(g, \varepsilon)$, avec $(g, \varepsilon) \in \bar{G}$. Puisque $(\varepsilon_M, 1)$ agit trivialement sur M^0 , on en déduit $\mathcal{J}'(M^0)^{\bar{G}, \chi} = \{0\}$. $\square$

Désormais, on oublie M et W et on va prouver $\mathcal{J}'(G^0 \times V)^{\bar{G}, \chi} = \{0\}$. On prouve simultanément $\mathcal{J}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G}, \chi} = \{0\}$. On raisonne par récurrence sur $d = \dim(V)$. On vérifie immédiatement les deux assertions pour $d = 1$. Pour $d = 2$, les actions de $\bar{G}$ sur G^0 et $\mathfrak{g}$ sont triviales. D'après le principe de localisation ([1] théorème 2.1), on doit montrer que $\mathcal{J}'(V)^{\bar{G}, \chi} = \{0\}$. Pour $\alpha \in F$, notons Γ_α l'ensemble des $v \in V$ tels que $\langle v, v \rangle = \alpha$. D'après le même principe de localisation, et parce que l'action de $\bar{G}$ respecte la forme quadratique, il suffit de montrer que $\mathcal{J}'(\Gamma_\alpha)^{\bar{G}, \chi} = \{0\}$ pour tout $\alpha \in F$. Si $\alpha \neq 0$, Γ_α est une seule orbite pour l'action de G^0 et la nullité cherchée s'ensuit. Reste l'ensemble Γ_0 . Si la forme quadratique est anisotrope, il est réduit au point 0 et le résultat est clair. Sinon, dans une base convenable, Γ_0 est l'ensemble des (x, y) tels que $xy = 0$. Sur $\Gamma_0 \setminus \{0\}$, on voit qu'un élément $T \in \mathcal{J}'(V)^{\bar{G}, \chi}$ est forcément multiple de la distribution

$$f \mapsto \int_{F^\times} f(x, 0) d^*x - \int_{F^\times} f(0, y) d^*y,$$

avec des mesures de Haar pour la multiplication. Or cette distribution ne se prolonge pas à Γ_0 tout entier en une distribution G^0 -invariante (c'est l'exemple donné dans l'introduction de [1]). Donc T est nulle sur $\Gamma_0 \setminus \{0\}$. Et, comme précédemment, T ne peut pas avoir pour support le seul point 0. Donc $T = 0$. Désormais, on suppose $d \geq 3$, donc le centre Z de G^0 a au plus deux éléments.

Lemme 1. — Soit $T \in \mathcal{J}'(G^0 \times V)^{\bar{G}, \chi}$, resp. $T \in \mathcal{J}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G}, \chi}$. Alors le support de T est contenu dans $Z\mathcal{U} \times V$, resp. $\mathcal{N} \times V$.

Prouvons l'assertion relative à $\mathcal{J}'(G^0 \times V)^{\bar{G}, \chi}$, en se référant à [1], lemme 5.1, dont on utilise les notations. Soit $a \in G^0$ semi-simple non central. On peut décomposer V en somme orthogonale $V = V_+ \oplus V_- \oplus \bigoplus_{i \in I} V_i$. Pour tout $i \in I$, on a une suite d'extensions $F_i/F_{\pm i}/F$, où $[F_i : F_{\pm i}] = 2$. On admet formellement le cas où $F_i/F_{\pm i}$ est une algèbre quadratique "déployée", c'est-à-dire $F_i = F_{\pm i} \oplus F_{\pm i}$, l'involution échangeant les deux facteurs. L'espace V_i a une structure de F_i -espace vectoriel et est muni d'une forme hermitienne non dégénérée, relativement à l'extension $F_i/F_{\pm i}$. L'élément a agit par multiplication par 1 sur V_+ , -1 sur V_- et a_i sur V_i , où a_i est un élément de $F_i^\times$ tel que $a_i \neq \pm 1$ et $\text{Norm}_{F_i/F_{\pm i}}(a_i) = 1$. La composante neutre du commutant de a dans G^0 est $G_+^0 \times G_-^0 \times \prod_{i \in I} G_i$, où les G_i sont des groupes unitaires (en un

sens approprié si $F_i = F_{\pm i} \oplus F_{\pm i}$). Les éléments de G^0 de partie semi-simple a sont produits de a et d'éléments de ce groupe. L'argument de [1] nous ramène à construire un élément $(g, -1) \in \bar{G}$, fixant a , et vérifiant la propriété suivante. Considérons $T_+ \in \mathcal{J}'(G_+^0 \times V_+)^{G_+^0}$, $T_- \in \mathcal{J}'(G_-^0 \times V_-)^{G_-^0}$ et, pour tout $i \in I$, $T_i \in \mathcal{J}'(G_i \times V_i)^{G_i}$. Alors $T = T_+ \otimes T_- \otimes_{i \in I} T_i$ est fixe par l'action de $(g, -1)$. On prend $g_+ \in G_+$ tel que $(g_+, -1) \in \bar{G}_+$, $g_- \in G_-$ tel que $(g_-, -1) \in \bar{G}_-$ et, pour tout $i \in I$, un automorphisme antilinéaire de V_i (relativement à l'extension $F_i/F_{\pm i}$) préservant la forme hermitienne. On prend $g = g_+ \times g_- \times \prod_{i \in I} g_i$. D'après les résultats de [1] pour les groupes unitaires ou linéaires, et d'après l'hypothèse de récurrence, l'élément $(g, -1)$ fixe T . Il fixe a . Il suffit de vérifier que $(g, -1)$ appartient à $\bar{G}$. Pour tout $i \in I$, $\dim_F(V_i)$ est paire et $\det(g_i) = (-1)^{\dim_F(V_i)/2}$. Parce que $a \in G^0$, $\dim(V_-)$ est paire et $\det(g_-) = (-1)^{e(V_-)} = (-1)^{\dim(V_-)/2}$. On a $\det(g_+) = (-1)^{e(V_+)}$. Donc $\det(g) = (-1)^e$, où $e = e(V_+) + \frac{\dim(V_-) - \dim(V_+)}{2}$. Or $e \equiv e(V) \pmod{2\mathbb{Z}}$.

La preuve de l'assertion relative à $\mathcal{J}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G}, \chi}$ est similaire: l'élément a est remplacé par un élément $X \in \mathfrak{g}$ non nul; l'espace $V_+ \oplus V_-$ est remplacé par un unique espace V_0 qui est annulé par X ; les éléments a_i sont remplacés par des $X_i \in F_i$ de trace nulle. $\square$

Tout élément de Z étant invariant par $\bar{G}$, on est ramené aux distributions sur $\mathcal{U} \times V$, que l'on descend par l'application de Cayley aux distributions sur $\mathcal{N} \times V$. Cela nous ramène au problème sur l'algèbre de Lie. Notons Γ l'ensemble des $v \in V$ tels que $\langle v, v \rangle = 0$.

Lemme 2. — Soit $T \in \mathcal{J}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G}, \chi}$. Alors le support de T est contenu dans $\mathfrak{g} \times \Gamma$.

Cf. [1] prop. 5.2. On fixe $v \in V$ avec $\langle v, v \rangle \neq 0$, on va montrer que $\mathcal{J}'(\mathfrak{g})^{\bar{G}_v, \chi} = \{0\}$, où $\bar{G}_v$ est le fixateur de v . Notons V_1 l'orthogonal de v dans V et G_1 le groupe orthogonal de V_1 . Comme dans la preuve de la proposition ci-dessus, l'application $(g_1, \varepsilon) \mapsto (\varepsilon_G, 1)(g_1, \varepsilon)$ est un isomorphisme de $\bar{G}_1$ sur $\bar{G}_v$. On a aussi $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus V_1$. Via ces deux isomorphismes, l'action de $\bar{G}_1$ sur $\mathfrak{g}_1 \oplus V_1$ est "la bonne", c'est-à-dire celle définie avant l'énoncé du théorème 1'. Le lemme résulte de l'hypothèse de récurrence. $\square$

On utilise maintenant l'argument de [1] lemme 4.3 et remarque avant le lemme 4.4. Munissons $\mathfrak{g}$ de la forme bilinéaire symétrique $(X, Y) \mapsto \text{trace}(XY)$. On définit deux transformations de Fourier partielles $T \mapsto \mathcal{F}_{\mathfrak{g}} T$ et $T \mapsto \mathcal{F}_V T$ sur $\mathcal{J}'(\mathfrak{g} \times V)$, la première en la variable dans $\mathfrak{g}$ (relativement à la forme ci-dessus), la seconde en la variable dans V , relativement à la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Elles conservent l'espace $\mathcal{J}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G}, \chi}$. On a aussi deux représentations de Weil du groupe métaplectique $\tilde{SL}_2$, pour chacune de ces formes quadratiques. Soit $T \in \mathcal{J}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G}, \chi}$. D'après le lemme 1, T est à support dans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}} T$ l'est aussi. Donc T est invariante par la première représentation de Weil. De même, grâce au lemme 2, T est invariante par la seconde représentation de Weil. En dimension impaire, une représentation de Weil ne se descend pas au groupe SL_2 , l'élément du noyau de la projection de $\tilde{SL}_2$ sur SL_2 agit par multiplication par -1 et tout invariant est nul. Donc T est nulle si $\dim(\mathfrak{g})$ est impaire ou si $\dim(V)$ est

impaire. On a posé $d = \dim(V)$. On a $\dim(\mathfrak{g}) = d(d-1)/2$. Donc T est nulle si d est impaire ou si $d \equiv 2 \pmod{4\mathbb{Z}}$. On suppose maintenant $d \equiv 0 \pmod{4\mathbb{Z}}$. On utilise la preuve de [1] paragraphe 6. Elle montre que le support de nos distributions est contenu dans l'ensemble des (X, v) , $X \in \mathcal{N}$ et $v \in Q(X)$ (l'ensemble $Q(X)$ est défini en loc.cit.). Elle montre aussi qu'il suffit de fixer X nilpotent et, en notant $\tilde{G}_X$ son fixateur dans $\tilde{G}$, de prouver le lemme suivant. On note $T \mapsto \hat{T}$ la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(V)$, similaire à $T \mapsto \mathcal{F}_V(T)$.

Lemme 3. — On suppose $d \equiv 0 \pmod{4\mathbb{Z}}$. Soit $T \in \mathcal{S}'(V)^{\tilde{G}_X, \chi}$. Supposons T et $\hat{T}$ à support dans $Q(X)$. Alors $T = 0$.

Pour démontrer cette assertion, on doit se débarrasser de l'hypothèse sur d . On définit le sous-groupe $\underline{G} \subset \tilde{G}$ formé des $(g, \varepsilon) \in \tilde{G}$ tels que $\det(g) = \varepsilon^d$. Remarquons que $\underline{G} = \tilde{G}$ si $d \equiv 0 \pmod{4\mathbb{Z}}$. Le lemme se généralise sous la forme

Lemme 4. — Soit $T \in \mathcal{S}'(V)^{\underline{G}_X, \chi}$. Supposons T et $\hat{T}$ à support dans $Q(X)$. Alors $T = 0$.

Démonstration. — Le lemme 6.3 de [1] reste valable, en remarquant que, pour des décompositions $V = V_1 \oplus V_2$, $X = X_1 \oplus X_2$, si $(g_1, -1) \in \underline{G}_{1, X_1}$ et $(g_2, -1) \in \underline{G}_{2, X_2}$ (avec des notations évidentes), alors $(g_1 g_2, -1)$ appartient à $\underline{G}_X$. Cela nous ramène au cas où le couple (V, X) est de l'un des types suivants.

1^{er} cas. d est impair, V est muni d'une base $(e_i)_{i=1, \dots, d}$, avec $\langle e_i, e_j \rangle = \nu(-1)^i \delta_{i, d+1-j}$ où ν est un élément non nul de F , $Xe_i = e_{i-1}$ pour $i \geq 2$, $Xe_1 = 0$. On décompose $V = V_1 \oplus V_0 \oplus V_2$, où V_1 est engendré par les e_i pour $i \leq (d-1)/2$, V_0 est la droite portée par $e_{(d+1)/2}$ et V_2 est engendré par les e_i pour $i \geq (d+3)/2$. Introduisons l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'(V) &\rightarrow \mathcal{S}'(V_0) \\ f &\mapsto f_0 \end{aligned}$$

définie par

$$f_0(v_0) = \int_{V_1} f(v_1 + v_0) dv_1.$$

Dans [1] paragraphe 6, les auteurs prouvent qu'il existe $R \in \mathcal{S}'(V_0)$ telle que $T(f) = R(f_0)$ pour tout $f \in \mathcal{S}'(V)$. Il y a un élément $a \in G^0$, appartenant au tore diagonal (c'est-à-dire conservant chaque droite Fe_i), tel que $aXa^{-1} = -X$. Posons $g = -a$. On a $(g, -1) \in \underline{G}_X$. Faisons agir trivialement cet élément sur V_0 . L'application ci-dessus est alors équivariante pour l'action de $(g, -1)$. Donc T est invariante par cet élément, ce qui entraîne $T = 0$.

2^e cas. $d \equiv 0 \pmod{4\mathbb{Z}}$, V est muni d'une base $(e_i)_{i=1, \dots, d/2} \cup (f_i)_{i=1, \dots, d/2}$, chaque sous-famille engendrant des lagrangiens, on a $\langle e_i, f_j \rangle = (-1)^i \delta_{i, d/2+1-j}$, $Xe_i = e_{i-1}$, $Xf_i = f_{i-1}$ pour $i \geq 2$ et $Xe_1 = Xf_1 = 0$. On décompose $V = V_1 \oplus V_2$, où V_1 est engendré par les e_i et f_i pour $i \leq d/4$ et V_2 est engendré par les e_i et f_i pour

$i \geq d/4 + 1$. Dans [1], les auteurs prouvent que T est multiple de la distribution

$$f \mapsto \int_{V_1} f(v_1) dv_1.$$

Il y a un élément $g \in G^0$, appartenant au tore diagonal, tel que $gXg^{-1} = -X$. L'élément $(g, -1)$ appartient à $\underline{G}_X$ et fixe la distribution ci-dessus. Donc T est invariante par cet élément, ce qui entraîne $T = 0$. $\square$

Remarque. — Dans [1], les auteurs considèrent aussi le deuxième cas avec $d \equiv 2 \pmod{4\mathbb{Z}}$. C'est inutile. Par un changement de base (remplacer e_i et f_i par $e_i + f_i$ et $e_i - f_i$), ce cas se ramène à une somme orthogonale de deux couples du premier cas.

Cela achève la preuve du théorème 1'.

Remarque. — On a supposé la caractéristique de F nulle. Selon un travail récent de Henniart, la démonstration doit s'étendre au cas où la caractéristique de F est différente de 2.

Références

- [1] A. AIZENBUD, D. GOUREVITCH, S. RALLIS & G. SCHIFFMANN – Multiplicity one theorems, *Ann. of Math.* **172** (2010), p. 1407–1434.
- [2] B. H. GROSS & D. PRASAD – On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1} , *Canad. J. Math.* **44** (1992), p. 974–1002.
- [3] C. MœGLIN, M.-F. VIGNÉRAS & J.-L. WALDSPURGER – *Correspondances de Howe sur un corps p -adique*, Lecture Notes in Math., vol. 1291, Springer, 1987.

J.-L. WALDSPURGER, Institut de Mathématiques de Jussieu-CNRS, 2 place Jussieu, 75005 Paris, France • E-mail : waldspur@math.jussieu.fr