Astérisque

EMMANUEL GIROUX

Sur la géométrie et la dynamique des transformations de contact [d'après Y. Eliashberg, L. Polterovich et al.]

Astérisque, tome 332 (2010), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 1004, p. 183-220

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__332__183_0>

© Société mathématique de France, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 2009
61e année, 2008-2009, no 1004, p. 183 à 220

SUR LA GÉOMÉTRIE ET LA DYNAMIQUE DES TRANSFORMATIONS DE CONTACT
[d'après Y. Eliashberg, L. Polterovich *et al.*]

par **Emmanuel GIROUX**

Au commencement étaient les transformations de contact...

Étant donné une variété M, les 1-jets des germes de fonctions $M \to \mathbf{R}$ forment une variété J^1M naturellement fibrée au-dessus de M. Parmi toutes les sections locales de ce fibré, les 1-jets des fonctions f définies sur un ouvert de M sont nommées sections holonomes et constituent une classe élue. Si $M = \mathbf{R}^n$ par exemple, $J^1M = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ fibre par projection sur le premier facteur et une section

$$x \in \mathbf{R}^n \longmapsto \big(x, \varphi(x), f(x)\big) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

est holonome si et seulement si $\varphi = df$. Cette condition traduit en fait une propriété de contact, à savoir que la 1-forme $dt - \varphi$ sur $M \times \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$, s'annule identiquement sur l'espace tangent au graphe de f.

La condition d'holonomie est ainsi l'origine de la géométrie de contact. Lorsque S. Lie introduit les transformations de contact (Berührungstransformationen), c'est pour étudier les symétries des équations différentielles. Or une telle équation (en une variable) ou, plus généralement, une équation aux dérivées partielles du premier ordre sur les fonctions $M \to \mathbf{R}$ s'écrit $\Phi(x, df(x), f(x)) = 0$ et est donc donnée par une hypersurface $\{\Phi = 0\}$ dans l'espace J^1M. Une symétrie de l'équation est une transformation de J^1M qui préserve à la fois l'hypersurface $\{\Phi = 0\}$ et la condition d'holonomie, de manière à envoyer solution sur solution.

Une forme de contact sur J^1M est une 1-forme différentielle non singulière dont le rappel par toute section holonome locale est nul. De fait, il en existe une et une seule à multiplication près par une fonction. Son expression locale, c'est-à-dire pour $M = \mathbf{R}^n$, est

$$u(x, y, t)\Big(dt - \sum_1^n y_i dx_i\Big), \qquad (x, y, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}.$$

Le noyau des formes de contact est donc un champ d'hyperplans ξ bien défini qui admet pour sous-variétés intégrales tous les graphes des sections holonomes locales. Ainsi, une transformation de J^1M préserve la condition d'holonomie si et seulement si elle préserve ce champ ξ des hyperplans dits de contact. Un exemple emblématique est, sur $J^1\mathbf{R}^n$, la transformation de Legendre

$$(x, y, t) \in J^1\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \longmapsto \Big(-y, x, t - \sum_1^n x_j y_j\Big).$$

Ce n'est apparemment que vers 1950, sans doute à l'instigation de S. S. Chern, que le champ d'hyperplans ξ reçoit le nom de structure de contact (étant la structure associée au pseudo-groupe des transformations de contact) et prend peu à peu le pas sur les transformations de contact pour devenir l'objet central de la géométrie de contact.

1. INTRODUCTION

Le travail présenté ici est dû à Yakov Eliashberg et Leonid Polterovich, ainsi qu'à Sang Seon Kim, Mohan Bhupal et Sheila Sandon. Les références en sont [**2, 12, 13, 24**], le dernier de ces articles redémontrant les résultats principaux du second par une méthode différente. L'intérêt majeur de ce travail est, à mes yeux, de mettre en lumière les rapports de force subtils qui existent, en géométrie de contact, entre flexibilité et rigidité.

Bien que la géométrie de contact soit de nos jours clairement identifiée comme une partie de la géométrie symplectique, elle a des particularités très fortes. On connaît par exemple peu d'invariants qui prennent un continuum de valeurs et ils sont de nature dynamique plutôt que géométrique. La raison en est que les variétés symplectiques attachées aux variétés de contact ont un volume et des capacités infinis. Ce caractère discret des invariants de contact apparaît nettement dans la suite, se traduisant en particulier par de brusques changements dans le comportement géométrique des transformations de contact.

A. Géométrie des transformations de contact

Dans $\mathbf{R}^{2n} = T^*\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^n$ muni de sa structure symplectique standard, on considère la boule et le cylindre ouverts d'aire r, à savoir respectivement

$$B(r) = B^{2n}(r) = \{z \in \mathbf{C}^n \mid \pi|z|^2 < r\}$$
$$\text{et} \quad C(r) = C^{2n}(r) = \{z \in \mathbf{C}^n \mid \pi|z_1|^2 < r\}.$$

Pour une simple raison de volume, $B(r_1)$ ne se plonge symplectiquement dans $B(r_2)$ que si $r_1 \leq r_2$. Mieux, le « Non-Squeezing Theorem » de M. Gromov, un des nombreux résultats de [**16**] révélateurs de la rigidité en géométrie symplectique, montre que $B(r_1)$ ne se plonge symplectiquement dans $C(r_2)$ que si $r_1 \leq r_2$.

Ces contraintes n'existent pas dans $\mathbf{R}^{2n+1} = J^1\mathbf{R}^n$ muni de sa structure de contact standard. Pour $r > 0$ petit par exemple, la transformation de contact $(x, y, t) \in \mathbf{R}^{2n+1} \mapsto (\sqrt{r}x, \sqrt{r}y, rt)$ envoie tout compact donné dans une boule arbitrairement petite et une isotopie de contact à support compact peut faire le même travail. Cependant, comme Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich le montrent dans [**12**], la situation est plus subtile dans la variété $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{T})$ des 1-jets (des germes) de fonctions à valeurs dans le cercle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$: on ne peut tasser n'importe quel domaine dans n'importe quel autre par des transformations de contact. Pour énoncer le résultat principal, on précise la terminologie.

DÉFINITION 1.1 ([**12**]). — *Étant donné des domaines (ouverts connexes) U_1 et U_2 dans une variété de contact (V, ξ), on dit qu'on peut* tasser U_1 dans U_2 *si on peut trouver une isotopie de plongements de contact $\psi_s \colon \operatorname{Adh} U_1 \to V$, $s \in [0, 1]$, entre l'inclusion ψ_0 et un plongement ψ_1 qui envoie* $\operatorname{Adh} U_1$ *dans U_2. On dit que le tassement se fait au sein d'un domaine $U_0 \subset V$ si $\psi_s(\operatorname{Adh} U_1) \subset U_0$ pour tout $s \in [0, 1]$. Noter que, si U_1 est relativement compact, toute isotopie qui tasse U_1 dans U_2 au sein de U_0 se prolonge en une isotopie de contact ambiante à support compact dans U_0.*

Pour tout domaine U de $\mathbf{R}^{2n}$, on notera $\widehat{U}$ le produit $U \times \mathbf{T} \subset \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T} = J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{T})$. Le théorème principal qu'on veut démontrer ici est le suivant :

THÉORÈME 1.2 ([**12**]). — (a) *En dimension $2n + 1 > 3$, n'importe quel domaine qui est relativement compact dans $\widehat{C}(1)$ peut être tassé dans $\widehat{B}(d)$ pour tout $d > 0$.*

(b) *Si $r_2 \leq k \leq r_1$ pour un certain entier k, on ne peut pas plonger* $\operatorname{Adh} \widehat{B}(r_1)$ *dans $\widehat{C}(r_2)$ par une transformation de contact ambiante de $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ à support compact et on ne peut donc pas tasser $\widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{C}(r_2)$.*

En dimension $2n + 1 = 3$, si $r_2 < r_1$ (et même si $r_1 < 1$), les résultats de [**9**] (voir aussi [**15**]) montrent qu'on ne peut pas tasser $\widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{B}(r_2)$. En dimension supérieure, par contre, on ne sait pas s'il est possible de tasser $\widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{B}(r_2)$ ou même dans $\widehat{C}(r_2)$ quand $k - 1 < r_2 < r_1 < k$ pour un certain entier $k > 1$.

On peut reformuler en partie l'énoncé précédent en regardant, pour tout domaine borné $U \subset \mathbf{R}^{2n}$, les quantités suivantes :

- $\mathrm{w}_-(U)$, le supremum des nombres r pour lesquels $B(r)$ se plonge symplectiquement dans U ;
- $\mathrm{w}_+(U)$, l'infimum des nombres r tels que U se plonge symplectiquement dans $C(r)$;

– $\widehat{\mathrm{w}}(U)$, l'infimum des nombres r tels que le domaine $r^{-1/2}U \times \mathbf{T} \subset \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ puisse être tassé dans $\widehat{B}(r')$ quel que soit $r' > 0$.

L'encadrement ci-dessous traduit fidèlement le point (b) du théorème 1.2 et l'impossibilité de tasser $\widehat{B}(1)$ dans $\widehat{B}(r)$ pour r arbitrairement petit :

COROLLAIRE 1.3 ([**12**]). — *Pour tout domaine borné $U \subset \mathbf{R}^{2n}$, $n \geq 2$,*

$$\mathrm{w}_-(U) \leq \widehat{\mathrm{w}}(U) \leq \mathrm{w}_+(U).$$

Un autre phénomène intéressant mis à jour par Eliashberg, Kim et Polterovich est que le tassement, quand il est possible, nécessite de la place. Par exemple, si $r_2 \leq 1/m \leq r_1 < 1$ pour un certain entier m, on peut tasser $\widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{B}(r_2)$ (théorème 1.2-(b)) mais pas au sein de $\widehat{B}(1/(m-1))$. De façon plus générale :

THÉORÈME 1.4 ([**12**]). — *Si $r_2 \leq k/m \leq r_1 < k/(m-1)$ pour des entiers k et m, on ne peut pas plonger* $\mathrm{Adh}\,\widehat{B}(r_1)$ *dans $\widehat{B}(r_2)$ par une transformation de contact de $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ qui préserve $\widehat{B}(k/(m-1))$. En particulier, on ne peut pas tasser $\widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{B}(r_2)$ au sein de $\widehat{B}(k/(m-1))$.*

Dans [**12**], pour démontrer les théorèmes 1.2-(b) et 1.4, Eliashberg, Kim et Polterovich élaborent une homologie de Floer généralisée pour les structures hamiltoniennes stables. Cette théorie leur permet d'interpréter l'homologie symplectique convenablement filtrée d'un ouvert étoilé générique $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ [**7, 14, 33**] comme un invariant de contact du domaine $\widehat{U} = U \times \mathbf{T} \subset \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$, invariant du type de ceux issus de la théorie symplectique des champs [**11**].

Dans un article tout récent [**24**], S. Sandon a présenté une approche plus spécifique mais aussi efficace en pratique et bien plus économique. La méthode, fondée sur la théorie des fonctions génératrices, produit également des invariants homologiques ainsi qu'un invariant de type capacité. Crise oblige, c'est cette approche qu'on suivra ici.

B. Ordonnancement des transformations de contact

Le point de départ du travail d'Eliashberg et Polterovich [**12, 13**] est la recherche d'une géométrie sur le groupe des transformations de contact et l'étude d'une relation de préordre naturelle sur le revêtement universel de celui-ci. Une conclusion inattendue de leur travail est que le comportement de ce préordre est intimement lié aux phénomènes de tassement discutés dans la section ci-dessus.

Soit (K, η) une variété de contact, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(K, \eta)$ la composante neutre du groupe $\mathcal{D}_c(K, \eta)$ des transformations de contact de (K, η) à support compact et $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathcal{G}}(K, \eta)$ le revêtement universel de $\mathcal{G}$.

On dit qu'un chemin ϕ_t dans $\mathcal{G}(K, \eta)$ est *positif* (resp. *strictement positif*) si le vecteur $\dot{\phi}_t(q)$, à tout instant t et pour tout point q, est dans le demi-espace positif

fermé (resp. ouvert) de $T_{\phi_t(q)}K$ délimité par l'hyperplan coorienté $\eta_{\phi_t(q)}$. Noter que, si ϕ_t et ψ_t, $t \in [0,1]$, sont deux chemins positifs (resp. strictement positifs), le chemin $\phi_t \circ \psi_t$ est positif (resp. strictement positif).

Étant donné $\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_1 \in \widetilde{\mathcal{G}}(K,\eta)$, on dit que $\widetilde{\phi}_1$ domine $\widetilde{\phi}_0$ et on écrit $\widetilde{\phi}_1 \succeq \widetilde{\phi}_0$ si l'élément $\widetilde{\phi}_1 \circ \widetilde{\phi}_0^{-1}$ se représente par un chemin positif ϕ_t entre ϕ_0 et ϕ_1 dans $\mathcal{G}(K,\eta)$. La relation $\succeq$ est clairement réflexive et transitive mais pas toujours antisymétrique. Elle définit donc en général seulement un préordre sur $\widetilde{\mathcal{G}}$. Ce préordre est par ailleurs invariant au sens où, si $\widetilde{\phi}_1 \succeq \widetilde{\phi}_0$ et $\widetilde{\psi}_1 \succeq \widetilde{\psi}_0$, alors $\widetilde{\phi}_1\widetilde{\psi}_1 \succeq \widetilde{\phi}_0\widetilde{\psi}_0$.

DÉFINITION 1.5 ([**12**]). — *On dit qu'une variété de contact (K,η) est* de type ordonnable *ou* non-ordonnable *selon que la relation $\succeq$ est antisymétrique — et définit donc un ordre partiel sur $\widetilde{\mathcal{G}}(K,\eta)$ — ou pas.*

Le théorème suivant, dont on précise la genèse, dans la remarque 1.7 ci-après, regroupe les principaux résultats connus sur cette notion :

THÉORÈME 1.6 ([**2, 6, 8, 12, 22, 24**]). — (a) *Les espaces de jets $J^1\mathbf{R}^n$ et $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{T})$ sont de type ordonnable.*

(b) *La sphère de contact standard $(\mathbf{S}^{2n-1}, \eta_0)$ de dimension au moins 3 est de type non-ordonnable.*

(c) *L'espace des éléments de contact coorientés sur une variété close M est de type ordonnable.*

Remarque 1.7. — Ce théorème est essentiellement dû à Eliashberg, Kim et Polterovich pour les parties (b) et (c) et à M. Bhupal et S. Sandon — qui en ont traité les deux cas indépendamment — pour la partie (a). Cependant, comme on le verra plus loin, on peut déduire la partie (b) du travail de G. I. Olshanskii [**22**] bien antérieur à [**12**]. En outre, la partie (c) est démontrée dans [**12**] (via l'homologie de Floer pour les structures hamiltoniennes) sous l'hypothèse que le groupe fondamental de M est fini ou contient une infinité de classes de conjugaison. En pratique, cette hypothèse est anodine dans la mesure où on ne connaît aucun groupe de présentation finie qui ne la vérifie pas mais elle semble incongrue. Grâce à la théorie des fonctions génératrices, V. Chernov et S. Nemirovski s'en affranchissent dans [**6**] en regardant comment les isotopies de contact positives opèrent sur les sous-variétés legendriennes, notamment sur les fibres de l'espace des éléments de contact. L'idée d'étudier cette action est en fait due à V. Colin, E. Ferrand et P. Pushkar qui, dans [**8**], prouvent implicitement la partie (c) du théorème 1.6 dans le cas où M est revêtue par un ouvert de l'espace euclidien.

On démontrera ci-après les parties (a) et (b) du résultat ci-dessus mais pas la partie (c).

C. Dynamique des transformations de contact

Eliashberg et Polterovich dégagent dans [**13**] deux notions qui semblent très intéressantes pour l'étude dynamique des transformations de contact et qui permettent de formuler de multiples questions. Ces notions sont celles de *prédominance* et de *nombre de progression relatif*. Avant de les appliquer aux transformations de contact, on les définit dans le cadre abstrait des groupes ordonnés.

Soit $(G, \leq)$ un groupe ordonné, c'est-à-dire un groupe G muni d'un ordre partiel $\leq$ invariant au sens où son cône positif

$$G^+ = \{g \in G \mid g \geq 1\}$$

est stable par produit et invariant par tout automorphisme intérieur. Concrètement, si $g_0 \leq g_1$ et $h_0 \leq h_1$, alors $g_0 h_0 \leq g_1 h_1$.

DÉFINITION 1.8 ([**13**]). — *On dit qu'un élément $g \in G$ est* prédominant *si $g \geq 1$ et si, pour tout $h \in G$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $g^p \geq h$.*

L'ensemble G^{++} des éléments prédominants est une sorte d'intérieur de G^+ (voir la proposition 1.11). Un fait général [**1**] est que $G^+G^{++} = G^{++}G^+ = G^{++}$. En effet, soit $f \in G^+$ et $g \in G^{++}$. Pour tout $h \in G$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $g^p \geq h$ et

$$\begin{aligned} g^p h^{-1} \in G^+ &\Rightarrow g h^{-1} g^{p-1} \in G^+ \Rightarrow f g h^{-1} g^{p-1} \in G^+ \\ &\Rightarrow g^{p-1} f g h^{-1} \in G^+ \Rightarrow g^{p-2} f g f g h^{-1} \in G^+ \Rightarrow (fg)^p h^{-1} \in G^+. \end{aligned}$$

Soit maintenant $g \in G^{++}$ un élément prédominant et $h \in G$ un élément quelconque. On pose

$$\gamma(h/g) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \gamma_k(h/g)$$
$$\text{où} \quad \gamma_k(h/g) = \inf\{p \in \mathbf{Z} \mid g^p \geq h^k\}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Pour voir que la limite existe, on note d'abord que l'infimum $\gamma_k(h/g) = \gamma_k$ est fini. En effet, soit $q \geq 0$ un entier tel que $g^q \geq h^{-1}$. Si $g^p \geq h^k$, alors $h^{-k} \geq g^{-p}$, donc $g^{kq} \geq g^{-p}$, de sorte que $p \geq -kq$. Par suite, $\gamma_k \geq -kq > -\infty$. D'autre part, comme les inégalités $g^{\gamma_k} \geq h^k$ et $g^{\gamma_l} \geq h^l$ entraînent $g^{\gamma_k + \gamma_l} \geq h^{k+l}$, la suite γ_k est sous-additive. Un argument classique garantit alors l'existence de la limite $\gamma(h/g)$.

DÉFINITION 1.9 ([**13**]). — *Le nombre $\gamma(h/g)$ est appelé* nombre de progression de h relatif à g.

Des manipulations simples [**1, 13**] montrent que ce nombre a les propriétés suivantes :

$$\gamma(h/g) = \inf\{p/q \mid g^p \geq h^q,\ p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N}\}, \qquad g \in G^{++},\ h \in G,$$
$$\gamma(g^m/g) = m, \qquad g \in G^{++},\ m \geq 1,$$
$$\gamma(h/g) > 0 \quad \text{et} \quad \gamma(g/h)\gamma(h/g) \geq 1, \qquad g, h \in G^{++}.$$

Exemple 1.10 ([**13**]). — Soit $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbf{T})$ le groupe des difféomorphismes croissants du cercle, la première variété de contact qui soit. Le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ est le groupe des difféomorphismes croissants de $\mathbf{R}$ qui commutent avec la translation $\epsilon\colon x \mapsto x + 1$ et l'ordre $\preceq$ sur $\widetilde{\mathcal{G}}$ est donné par

$$\phi_0 \preceq \phi_1 \quad \text{si et seulement si} \quad \phi_0(x) \leq \phi_1(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Ainsi, ϵ est représenté par le lacet strictement positif $x \mapsto x + t$, $t \in \mathbf{T}$, et est prédominant. L'affirmation qu'on laisse à vérifier au lecteur est que, si

$$\tau(\phi) = \lim_{q \to \infty} \frac{\phi^q(x) - x}{q}$$

désigne le nombre de translation de $\phi \in \widetilde{\mathcal{G}}$, alors

$$\gamma(\phi/\epsilon) = \tau(\phi) = 1/\gamma(\epsilon/\phi),$$

où la première identité vaut pour tout $\phi \in \widetilde{\mathcal{G}}$ et la seconde pour ceux qui sont prédominants.

Dans le cadre de la géométrie de contact, les notions ci-dessus s'appliquent au revêtement universel $\widetilde{\mathcal{G}}$ du groupe $\mathcal{G} = \mathcal{G}(K, \eta)$ lorsque la variété de contact (K, η) est de type ordonnable.

PROPOSITION 1.11 ([**13**]). — *Soit (K, η) une variété de contact close et de type ordonnable. Tous les éléments de $\widetilde{\mathcal{G}}$ qui se représentent par un chemin strictement positif dans $\mathcal{G}$ sont prédominants dans $(\widetilde{\mathcal{G}}, \preceq)$.*

Démonstration. — Soit $\widetilde{\phi} \in \widetilde{\mathcal{G}}$ un élément représenté par un chemin ϕ_t strictement positif. Grâce au lemme 2.4, on peut supposer que le champ de vecteurs qui engendre l'isotopie ϕ_t est 1-périodique en temps, de sorte que ϕ_t est défini pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Soit d'autre part $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\mathcal{G}}$ un élément quelconque représenté par un chemin ψ_t, $t \in [0, 1]$. Pour tout entier m positif assez grand, le chemin $\phi_{mt} \circ \psi_{1-t}$ est strictement positif et représente $\widetilde{\phi}^m \widetilde{\psi}^{-1}$. □

Dans toute variété de contact close et de type ordonnable, on dispose donc d'éléments prédominants par rapport auxquels tout élément de $\widetilde{\mathcal{G}}$ a un nombre de progression bien défini. Cela dit, le calcul de ce nombre semble délicat. Pour la variété des éléments de contact coorientés sur le tore, Eliashberg et Polterovich donnent un résultat [**13**, théorème 1.5.A] grâce à la notion de contour homologique, notion dont le nom vient de [**9**] et l'idée de [**27**]. Plutôt que de présenter ce résultat, on laisse Eliashberg et Polterovich décrire leur motivation :

> C'est une idée classique en théorie des systèmes dynamiques de mesurer la vitesse de rotation des trajectoires d'un flot autour d'un cycle donné dans la variété. Une telle mesure peut être réalisée rigoureusement et s'est avérée utile dans des situations variées comprenant la dynamique hamiltonienne et celle des difféomorphismes du cercle. En particulier, elle est étroitement liée aux propriétés asymptotiques de l'ensemble des périodes de certaines orbites fermées du flot. Nous adoptons un point de vue différent en considérant un flot comme une courbe dans le groupe des difféomorphismes (voir [**23**] pour quelques applications de ce point de vue dans le contexte de la géométrie de Hofer). Notre suggestion est de mesurer la rotation de cette courbe autour d'un cycle dans le groupe ! Grâce à la notion de nombre de progression relatif, nous pouvons mettre en œuvre rigoureusement cette idée pour le groupe des transformations de contact. Comme nous le verrons ci-dessous dans quelques exemples, les résultats des deux mesures (celle que nous suggérons et la mesure classique) ont une grande parenté.

On renvoie le lecteur à [**13**] pour les quelques exemples en question mais on l'invite surtout à en étudier lui-même d'autres.

2. CONSTRUCTIONS

A. Dans une variété de contact quelconque

On précise ici quelques termes et notions de base puis on montre qu'une variété de contact (K, η) est de type non-ordonnable si et seulement si le groupe $\mathcal{G}(K, \eta)$ contient des lacets strictement positifs contractiles et on explique comment utiliser ces lacets pour tasser des domaines dans le « produit de contact » de K par le cercle.

Soit (K, η) une variété de contact, c'est-à-dire une variété munie d'une structure de contact coorientée. L'opération appelée *symplectisation* associe à K une variété symplectique SK munie d'une action conformément symplectique de $\mathbf{R}_+^*$ et à toute transformation de contact $\phi\colon K \to K$ une transformation symplectique $\mathbf{R}_+^*$-équivariante $S\phi\colon SK \to SK$. Par définition, $SK \subset T^*K$ est l'ensemble des covecteurs non nuls $\beta \in T_q^*K$, $q \in K$, ayant pour noyau coorienté η_q. C'est donc un fibré $\mathbf{R}_+^*$-principal au-dessus de K dont les sections sont les équations (de Pfaff) globales de η. Une telle équation β fournit une trivialisation $SK \simeq \mathbf{R}_+^* \times K$. Dans ces coordonnées, la forme λ

induite sur SK par la forme (de Liouville) canonique de T^*K s'écrit $\lambda = r\beta$, $r \in \mathbf{R}_+^*$, d'où il ressort que $d\lambda$ est une forme symplectique. De plus, le champ de vecteurs $d\lambda$-dual de λ est $r\partial_r$ et engendre donc l'action de $\mathbf{R}_+^*$. Enfin, la projection $SK \to K$ envoie le noyau de λ sur la structure de contact η.

Exemple 2.1. — La structure de contact standard η_0 sur $\mathbf{S}^{2n-1}$ est le champ des hyperplans complexes tangents à la sphère unité de $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$. La symplectisation de $(\mathbf{S}^{2n-1}, \eta_0)$ s'identifie à $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ muni de la 1-forme

$$\lambda_0 = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j dy_j - y_j dx_j), \qquad x + iy = z \in \mathbf{C}^n,$$

dont le champ de vecteurs dual est le champ radial

$$\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j \partial_{x_j} + y_j \partial_{y_j}).$$

Dans ce modèle, l'action de $\mathbf{R}_+^*$ est donnée par $r \cdot z = \sqrt{r}z$.

La tautologie suivante sera utilisée constamment :

LEMME 2.2. — *Pour toute variété de contact (K, η), la projection $SK \to K$ induit une bijection entre les transformations de contact de K et les transformations symplectiques $\mathbf{R}_+^*$-équivariantes de SK.*

Démonstration. — Étant donné une transformation de contact ϕ de K, son application cotangente est une transformation symplectique de T^*K linéaire sur les fibres qui préserve SK. Sa restriction à SK est donc une transformation symplectique $\mathbf{R}_+^*$-équivariante. Inversement, toute transformation $\mathbf{R}_+^*$-équivariante $\widetilde{\phi}$ de SK préserve le champ de vecteurs qui engendre l'action. Si elle est symplectique, elle préserve aussi la 1-forme duale, c'est-à-dire λ. Par suite, $\widetilde{\phi}$ descend sur $K = SK/\mathbf{R}_+^*$ en une transformation qui préserve la projection du noyau de λ, à savoir la structure de contact η. □

Soit ϕ_t, $t \in [0,1]$, une isotopie de contact de (K, η). Le champ de vecteurs dépendant du temps X_t qui l'engendre, donné par

$$X_t\big(\phi_t(q)\big) = \dot{\phi}_t(q) = \frac{d}{dt}\phi_t(q)$$

définit une fonction sur SK :

$$H\phi_t \colon SK \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (\beta_q, t) \longmapsto \beta_q\big(X_t(q)\big).$$

Cette fonction $H\phi_t$ est homogène au sens où

$$H\phi_t(r\beta, t) = rH\phi_t(\beta, t).$$

C'est le *hamiltonien de contact* de l'isotopie ϕ_t — et aussi le hamiltonien de l'isotopie symplectique $S\phi_t$. Elle sera parfois notée $H_t\phi_t$ quand on voudra expliciter la variable par rapport à laquelle on prend le hamiltonien. La règle de composition suivante sera très utile :

$$H(\psi_t \circ \phi_t) = H\psi_t + H\phi_t \circ (S\psi_t^{-1} \times \iota)$$
$$\text{donc} \qquad H(\phi_t^{-1}) = -H\phi_t \circ (S\phi_t \times \iota),$$

où ψ_t et ϕ_t, $t \in [0,1]$, sont deux isotopies de contact de (K,η).

PROPOSITION 2.3 ([**13**]). — *Une variété de contact close (K,η) est de type non-ordonnable si et seulement si $\mathcal{G}(K,\eta)$ contient un lacet contractile strictement positif.*

Démonstration. — Les définitions stipulent que (K,η) est de type non-ordonnable si et seulement si $\mathcal{G}(K,\eta)$ contient un lacet contractile positif (ou nul) non constant. Il reste à voir que l'existence d'un tel lacet γ_t, $t \in \mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, implique celle d'un lacet contractile strictement positif. Comme γ_t n'est pas constant, son hamiltonien $H\gamma_t \colon SK \times \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ (qui est partout positif ou nul) est strictement positif en un point (p_0,t_0). Quitte à remplacer γ_t par le lacet $\gamma_{t+t_0} \circ \gamma_{t_0}^{-1}$, on peut supposer que $t_0 = 0$. On note U un ouvert de M tel que $H\gamma_t$ soit strictement positif sur $SU \times \{0\}$.

Soit $\phi \in \mathcal{G}(K,\eta)$. Le lacet $\phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1}$ est contractile et son hamiltonien vaut $H\gamma_t \circ (S\phi^{-1} \times \iota)$ donc le lacet composé $\gamma_t \circ \phi \circ \gamma_t \circ \phi^{-1}$ a pour hamiltonien

$$H\gamma_t + H\gamma_t \circ (S\phi^{-1} \circ S\gamma_t^{-1} \times \iota)$$

qui, comme $\gamma_0 = \iota$, est strictement positif sur $S(U \cup \phi(U)) \times \{0\}$. Comme K est close et que $\mathcal{G}(K,\eta)$ opère transitivement, une itération de ce procédé donne un lacet contractile noté de nouveau γ_t dont le hamiltonien $H\gamma_t$ est strictement positif sur $SK \times \{0\}$, donc aussi sur $SK \times [-1/m, 1/m]$ pour un certain entier m. Le lacet

$$\gamma_t \circ (\gamma_{t+\frac{1}{m}} \circ \gamma_{\frac{1}{m}}^{-1}) \circ \cdots \circ (\gamma_{t+\frac{m-1}{m}} \circ \gamma_{\frac{m-1}{m}}^{-1})$$

est alors contractile et strictement positif. □

Le lemme suivant a déjà été invoqué pour prouver la proposition 1.11 :

LEMME 2.4 ([**13**]). — *Toute isotopie strictement positive $\phi_t \in \mathcal{G}(K,\eta)$, $t \in [0,1]$, est homotope, à extrémités fixes et parmi les isotopies strictement positives, à une isotopie dont le hamiltonien est 1-périodique en temps.*

Démonstration. — L'idée est de composer une isotopie $\phi_t \circ \psi_t$ qui a les mêmes extrémités que ϕ_t et vérifie

$$H(\phi_t \circ \psi_t)(z,0) = H\phi_t(z,0) + H\phi_t(z,1) = H(\phi_t \circ \psi_t)(z,1).$$

On commence par prolonger l'isotopie ϕ_t au-delà de ses extrémités en une isotopie toujours strictement positive paramétrée par $t \in [-a, 1+a]$, $a > 0$, et on pose $f_t(z) = H\phi_t(z,t)$, $(z,t) \in SK \times [-a, 1+a]$. On considère ensuite, pour $t \in [-a,a] \cup [1-a, 1+a]$, les fonctions $g_t \colon SK \to \mathbf{R}$ définies par

$$g_t = \begin{cases} f_{1+t} \circ S\phi_{1+t} & \text{si } t \in [-a,a], \\ f_{t-1} \circ S\phi_{t-1} & \text{si } t \in [1-a, 1+a]. \end{cases}$$

On désigne par ψ_t^0, $t \in [-a,a]$, et ψ_t^1, $t \in [1-a, 1+a]$, les isotopies de contact engendrées par les hamiltoniens g_t dans les intervalles respectifs et vérifiant $\psi_0^0 = \psi_1^1 = \iota$. On note enfin $\psi_{s,t}$, l'homotopie d'isotopies de contact donnée, pour tout $s \in [0,1]$, par

$$\psi_{s,t} = \begin{cases} \psi^0_{su(t)} & \text{si } t \in [-a,a], \\ \psi^1_{1+su(t-1)} & \text{si } t \in [1-a, 1+a], \\ \iota & \text{si } t \in [a, 1-a], \end{cases}$$

où $u \colon [-a,a] \to [-a,a]$ coïncide avec l'identité près de 0, est nulle près du bord et a une dérivée partout supérieure à $-\varepsilon$. Les hamiltoniens correspondants sont

$$H_t\psi_{s,t}(z,t) = \begin{cases} su'(t)\, g(z, su(t)) & \text{si } t \in [-a,a], \\ su'(t-1)\, g(z, 1+su(t-1)) & \text{si } t \in [1-a, 1+a], \\ 0 & \text{si } t \in [a, 1-a]. \end{cases}$$

On pose maintenant $\phi_{s,t} = \phi_t \circ \psi_{s,t}$, $s \in [0,1]$. Comme $\psi_{s,0} = \psi_{s,1} = \iota$ pour tout $s \in [0,1]$, c'est une homotopie à extrémités fixes qui part de $\phi_{0,t} = \phi_t$. Enfin, les hamiltoniens sont

$$H_t\phi_{s,t}(z,t) = f_t + H_t\psi_{s,t} \circ S\phi_t^{-1}.$$

À partir des expressions des $H_t\psi_{s,t}$, on vérifie sans peine que toutes ces fonctions sont positives si on prend ε assez petit et que

$$H_t\phi_{1,t}(z,t) = \begin{cases} f_t(z) + f_{1+t}(z) & \text{pour } t \text{ proche de } 0, \\ f_t(z) + f_{t-1}(z) & \text{pour } t \text{ proche de } 1 \end{cases}$$

s'étend bien en une fonction 1-périodique en temps. □

On explique maintenant comment utiliser les lacets [1] contractiles strictement positifs dans $\mathcal{G}(K,\eta)$ pour tasser des domaines dans $V = SK \times \mathbf{T}$ muni de la structure de contact d'équation $dt - \lambda = 0$ — de manière plus symétrique, V est le « produit de contact » de K et $\mathbf{T}$, c'est-à-dire le quotient de $SK \times S\mathbf{T}$ par l'action diagonale de $\mathbf{R}_+^*$. On commence par un lemme qui résulte d'un simple calcul :

[1] Tous les lacets considérés dans la suite sont basés en l'identité.

LEMME 2.5 ([**12**]). — *Soit γ_t, $t \in \mathbf{T}$, un lacet dans $\mathcal{G}(K,\eta)$ et soit*

$$W = \{(z,t) \in V \mid H\gamma_t(S\gamma_t(z),t) > -1\}.$$

L'application $\Gamma\colon W \to V$ définie par

$$\Gamma(z,t) = \big(S\gamma_t(u_t(z)\cdot z),t\big), \quad \text{où} \quad u_t(z) = \frac{1}{1+H\gamma_t\big(S\gamma_t(z),t\big)},$$

est un plongement de contact.

Soit ϕ_s, $s \in [0,1]$, une homotopie de chemins strictement positifs $\phi_{s,t} \in \mathcal{G}(K,\eta)$, $t \in [0,1]$. On suppose que les chemins partent tous de $\phi_{s,0} = \iota$, aboutissent tous en un même point $\phi_{s,1} = \phi$ et que les hamiltoniens $H_t\phi_{s,t}$ sont 1-périodiques. On pose

$$W_s = \{(z,t) \in V \mid H_t\phi_{s,t}(z,t) < 1\}$$

$$\text{et} \qquad \gamma_{s,t} = \phi_{s,t} \circ \phi_{0,t}^{-1}, \qquad s,t \in [0,1].$$

Le lecteur pourra vérifier que les plongements Γ_s, $s \in [0,1]$, associés par le lemme ci-dessus aux lacets γ_s sont définis sur W_0 et l'envoient sur W_s.

Pour toute équation β de η, on note K_β son graphe dans SK et $SK_{<\beta}$ la moitié inférieure de SK délimitée par K_β :

$$SK_{<\beta} = \{(z,t) \in SK \mid z = r\beta(q),\ q \in K,\ 0 < r < 1\}.$$

On dira qu'un domaine U de SK est étoilé s'il est du type $SK_{<\beta}$ pour une certaine équation β. De même, un domaine W dans V est étoilé s'il est du type

$$V_{<\beta_t} = \{(z,t) \in V \mid z \in SK_{<\beta_t}\}$$

où β_t, $t \in \mathbf{T}$, est un lacet d'équations de η.

THÉORÈME 2.6 ([**12**]). — *Soit γ_s, $s \in [0,1]$, une homotopie de lacets $\gamma_{s,t} \in \mathcal{G}(K,\eta)$, $t \in \mathbf{T}$, entre le lacet constant $\gamma_{0,t} = \iota$ et un lacet strictement positif $\gamma_{1,t} = \gamma_t$. Si β est une équation de η telle que*

$$(H_t\gamma_{s,t})\,|_{K_\beta \times \mathbf{T}} > -1 \quad \textit{pour tout} \quad s \in [0,1],$$

alors, pour tout $r < 1$:

(a) *on peut tasser $V_{<r\beta}$ dans $V_{<r'\beta}$ où $r' = r/(1+cr)$, le nombre $c > 0$ ne dépendant pas de r ;*

(b) *on peut tasser $V_{<r\beta}$ dans lui-même au sein de $V_{<r_0\beta}$ si on prend $r_0 > r/(1-r)$.*

De plus, dans les deux cas, le tassement se fait parmi les domaines étoilés.

Autrement dit, l'homotopie de lacets γ_s permet de tasser les domaines étoilés dont le bord est en dessous du niveau -1 de tous les hamiltoniens $H_t\gamma_{s,t}$.

Démonstration. — Soit $r < 1$ et ψ_t le flot de Reeb de β, de sorte que $K_\beta \times \mathbf{T}$ est le niveau 1 de $H\psi_t$. Le hamiltonien du chemin $\phi_t = \psi_{t/r}$ vaut alors $H\phi_t = r^{-1}H\psi_t$. On déforme, à extrémités fixes, le chemin ϕ_t, $t \in [0,1]$, par l'homotopie

$$\phi_{s,t} = \phi_t \circ \gamma_{s,t}, \quad s,t \in [0,1].$$

D'après la règle de composition des hamiltoniens,

$$H_t\phi_{s,t}(z,t) = H\phi_t(z) + H_t\gamma_{s,t}\big(S\phi_{-t}(z),t\big).$$

Par hypothèse, $H_t\gamma_{s,t} > -H\psi_t$ donc

$$H_t\phi_{s,t}(z,t) > r^{-1}H\psi_t(z) - H\psi_t\big(\psi_{-t/r}(z)\big).$$

Comme ψ_t est un flot, $H\psi_t$ est constant sur les orbites et

$$H_t\phi_{s,t}(z,t) > (r^{-1}-1)H\psi_t(z) > r_0^{-1}H\psi_t(z).$$

Grâce à un petit reparamétrage des chemins $\phi_{s,t}$ et à une version paramétrique du lemme 2.4, on peut faire en sorte que les hamiltoniens $H_t\phi_{s,t}$ soient en outre 1-périodiques en temps. Si on pose

$$W_s = \big\{(z,t) \in V \mid H_t\phi_{s,t}(z,t) < 1\big\},$$

on a donc $W_s \subset V_{<r_0\beta}$. De plus, le lemme 2.5 et le commentaire qui le suit donnent une isotopie de contact de V qui envoie $W_0 = V_{<r\beta}$ sur W_s, donc l'adhérence de W_0 dans $W_1 \subset W_0$ car le lacet γ_1 est strictement positif. On a ainsi tassé $V_{<r\beta}$ dans lui-même au sein de $V_{<r_0\beta}$, ce qui démontre le point (b). Soit maintenant $c > 0$ tel que $H\gamma_{1,t} > cH\phi_t$. Les estimations ci-dessus disent que

$$H\phi_{1,t}(z,t) > r^{-1}H\psi_t(z) + cH\psi_t(z) = \frac{1+cr}{r}H\psi_t(z)$$

et donc que $W_1 \subset V_{<r'\beta}$ où $r' = r/(1+cr)$. Ceci démontre le point (a). □

B. Dans la sphère de contact standard

On commence par une incursion dans l'espace hyperbolique complexe. On considère sur $\mathbf{C}^{n+1}$ la forme pseudohermitienne de signature $(n,1)$ donnée par

$$\langle z', z''\rangle = -\overline{z}'_0 z''_0 + \sum_{j=1}^{n} \overline{z}'_j z''_j, \qquad z', z'' \in \mathbf{C}^{n+1}.$$

Par définition, l'espace hyperbolique complexe $\mathbf{CH}^n$ est l'image dans l'espace projectif $\mathbf{CP}^n$ de l'ouvert $\{z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \langle z,z\rangle < 0\}$. Dans la carte affine $\{z_0 = 1\}$, il apparaît ainsi comme la boule unité ouverte de $\mathbf{C}^n$,

$$\mathbf{CH}^n = \big\{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbf{C}^n \mid -1 + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 < 0\big\},$$

et a pour bord naturel la sphère $\mathbf{S}^{2n-1}$, projection dans $\mathbf{CP}^n$ du cône isotrope $Q_0 = \{z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \langle z, z\rangle = 0,\ z \neq 0\}$.

De manière équivalente, $\mathbf{CH}^n$ est le quotient de la quadrique affine (au sens réel) $Q = \{z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \langle z, z\rangle = -1\}$ par l'action du cercle $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}^*$, action qui préserve la forme $\langle .,. \rangle$. Comme cette forme est définie positive sur l'orthogonal des orbites de $\mathbf{S}^1$, elle induit sur $\mathbf{CH}^n$ une métrique hermitienne, qui est même kählérienne puisque la partie imaginaire de la forme $\langle .,. \rangle$ est la forme symplectique

$$\omega = -dx_0 \wedge dy_0 + \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j, \qquad x + iy \in \mathbf{C}^{n+1}.$$

Les isométries de $\mathbf{CH}^n$ sont les transformations projectives de $\mathbf{CP}^n$ issues du groupe $\mathrm{U}(n,1)$ des applications linéaires de $\mathbf{C}^{n+1}$ qui préservent la forme $\langle .,. \rangle$. Elles composent le groupe $\mathrm{PU}(n,1) = \mathrm{U}(n,1)/\mathbf{S}^1$ où le cercle $\mathbf{S}^1$ est le sous-groupe des homothéties. Comme ces isométries sont des transformations holomorphes de $\mathbf{CP}^n$ et préservent la sphère $\mathbf{S}^{2n-1} = Q_0/\mathbf{C}^*$, elles préservent aussi sur $\mathbf{S}^{2n-1}$ le champ des hyperplans complexes tangents, c'est-à-dire la structure de contact standard η_0. Autrement dit, $\mathrm{PU}(n,1)$ se plonge naturellement dans le groupe $\mathcal{D}(\mathbf{S}^{2n-1}, \eta_0)$ des transformations de contact de $\mathbf{S}^{2n-1}$.

Pour comprendre les transformations de contact, il est utile de connaître leur action sur la symplectisation. Dans le cas des éléments de $\mathrm{U}(n)$ (qui est un sous-groupe de $\mathrm{PU}(n,1)$ via l'inclusion $\mathrm{U}(n) \to \mathrm{U}(n,1)$, $\phi \mapsto \iota \times \phi$), cette action est celle de la transformation linéaire en dehors de l'origine. Dans le cas des éléments de $\mathrm{PU}(n,1)$, il convient d'identifier la symplectisation de $\mathbf{S}^{2n-1}$ comme le saturé de $\mathbf{S}^{2n-1} = Q_0 \cap \{z_0 = 1\}$ par le flot de Liouville radial, ou encore comme le quotient de Q_0 par l'action de $\mathbf{S}^1$.

Exemple 2.7. — Pour $t \in \mathbf{R}$, soit $\widetilde{\tau}_t \in \mathrm{U}(n,1)$ la transformation de $\mathbf{C}^{n+1}$ associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}.$$

L'élément de $\mathrm{PU}(n,1)$ correspondant est la transformation projective τ_t qui, dans la carte $\{z_0 = 1\}$, s'écrit

$$\tau_t(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t\, z_1}(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t\, z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Géométriquement, τ_t, $t \in \mathbf{R}$, est le flot des translations de $\mathbf{CH}^n$ le long de la géodésique entre les points $(-1, 0, \ldots, 0)$ et $(1, 0, \ldots, 0)$.

Quant à la transformation $S\tau_t$ sur la symplectisation de $\mathbf{S}^{2n-1}$ vue comme $\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$, elle est donnée par

$$S\tau_t(z_1,z_2,\dots,z_n)=\frac{|\operatorname{ch} t\,|z|+\operatorname{sh} t\,z_1|}{\operatorname{ch} t\,|z|+\operatorname{sh} t\,z_1}\big(\operatorname{sh} t\,|z|+\operatorname{ch} t\,z_1,z_2,\dots,z_n\big).$$

Pour compléter le tableau succinct, on décrit le préordre sur $\mathrm{PU}(n,1)$ induit par $\mathcal{D}(\mathbf{S}^{2n-1},\eta_0)$ et, pour commencer, on explique comment calculer le hamiltonien de contact d'un chemin dans $\mathrm{PU}(n,1)$.

Toute transformation linéaire $\phi\in\mathrm{U}(n,1)$ préserve la forme symplectique ω et, mieux, sa primitive obtenue par produit intérieur avec le champ radial. Du coup, tout chemin $\widetilde{\phi}_t$ dans $\mathrm{U}(n,1)$, $t\in[0,1]$, définit une isotopie hamiltonienne de $(\mathbf{C}^{n+1},\omega)$. Celle-ci est engendrée par une unique fonction hamiltonienne homogène de degré 2

$$\widetilde{f}=\widetilde{H}\widetilde{\phi}_t\colon \mathbf{C}^{n+1}\times[0,1]\longrightarrow\mathbf{R}$$

où la condition d'homogénéité s'écrit

$$\widetilde{f}(uz,t)=|u|^2\widetilde{f}(z,t),\qquad u\in\mathbf{C},\ z\in\mathbf{C}^{n+1},\ t\in[0,1].$$

Par exemple, si $\widetilde{\phi}_t(z)=e^{2i\pi t}z$, alors $\widetilde{H}\widetilde{\phi}_t(z,t)=\pi\langle z,z\rangle$ est une fonction qui s'annule sur le cône isotrope Q_0.

Vu la règle de composition pour les hamiltoniens (qui s'adapte immédiatement), cet exemple montre que, si ϕ_t est un chemin dans $\mathrm{PU}(n,1)$ et $\widetilde{\phi}_t$ un relèvement de ce chemin dans $\mathrm{U}(n,1)$, la restriction au cône Q_0 de la fonction $\widetilde{H}\widetilde{\phi}_t$ ne dépend pas du relèvement choisi. D'autre part, la condition d'homogénéité assure que cette restriction est invariante par l'action du cercle et descend donc en une fonction $H\phi_t$ sur $Q_0/\mathbf{S}^1$ qui, comme on l'a dit plus haut, est la symplectisation de $\mathbf{S}^{2n-1}$. La fonction $H\phi_t$ ainsi obtenue est bien sûr le hamiltonien de contact du chemin ϕ_t.

Dorénavant, les groupes $\mathrm{SU}(n)\subset\mathrm{U}(n)\subset\mathrm{PU}(n,1)$ seront regardés comme des sous-groupes du groupe $\mathcal{D}(\mathbf{S}^{2n-1},\eta_0)$ des transformations de contact de la sphère. Pour tout chemin ϕ_t dans l'un d'eux, $S\phi_t$ désigne ainsi son relèvement à la symplectisation de $\mathbf{S}^{2n-1}$, identifiée à $\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$, et $H\phi_t$ une fonction sur $\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$ qui dépend *a priori* du temps t.

Le théorème suivant peut être déduit des résultats généraux de G. I. Olshanskii [**22**] sur les ordres invariants dans les groupes de Lie (voir aussi [**18**]). On en donne ci-après une preuve totalement explicite et élémentaire en exhibant un lacet contractile strictement positif.

THÉORÈME 2.8 ([**12, 22**]). — *Pour $a,t\in\mathbf{R}$, soit*

$$\gamma_t=\phi_{2t}\circ[\rho_{-t},\tau_{-a}]=\phi_{2t}\circ\rho_{-t}\circ\tau_{-a}\circ\rho_t\circ\tau_a\in\mathrm{PU}(n,1),$$

où $\phi_t \in \mathrm{SU}(n)$, $\rho_t \in \mathrm{U}(n)$ *et* $\tau_a \in \mathrm{PU}(n,1)$ *sont les transformations de* $\mathbf{S}^{2n-1}$ *définies par*

$$\phi_t(z_1, z_2, \dots, z_n) = \big(e^{2i\pi(n-1)t} z_1, e^{-2i\pi t} z_2, \dots, e^{-2i\pi t} z_n\big),$$
$$\rho_t(z_1, z_2, \dots, z_n) = e^{2i\pi t}(z_1, z_2, \dots, z_n),$$
$$\tau_a(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a\, z_1}(\operatorname{sh} a + \operatorname{ch} a\, z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Le lacet γ_t, $t \in \mathbf{T}$, *est contractile et positif pour peu que* a *soit assez grand.*

COROLLAIRE 2.9 ([**12**]). — *La sphère de contact standard de dimension* $2n-1$ *est de type non-ordonnable.*

La démonstration qui suit recourt, pour $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, aux notations suivantes :

$$r_j(z) = \pi |z_j|^2,\ 1 \le j \le n, \quad r(z) = \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r'(z) = \sum_{j=2}^{n} r_j(z).$$

Démonstration. — Le lacet γ_t est contractile parce que les lacets $[\rho_{-t}, \tau_{-a}]$ et ϕ_t le sont. Comme le hamiltonien du flot ρ_t est $H\rho_t = r$ et ne dépend pas de t, celui du lacet $[\rho_{-t}, \tau_{-a}]$ vaut

$$H[\rho_{-t}, \tau_{-a}] = H\rho_{-t} + H\rho_t \circ S\tau_a \circ S\rho_t = -H\rho_t \circ S\rho_t + H\rho_t \circ S\tau_a \circ S\rho_t = (-r + r \circ S\tau_a) \circ S\rho_t.$$

Comme on l'a vu, pour $z = (z_1, \dots, z_n)$,

$$S\tau_a(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{\big|\operatorname{ch} a\,|z| + \operatorname{sh} a\, z_1\big|}{\operatorname{ch} a\,|z| + \operatorname{sh} a\, z_1}\big(\operatorname{sh} a\,|z| + \operatorname{ch} a\, z_1, z_2, \dots, z_n\big),$$

donc $r' \circ S\tau_a = r'$ (mieux, $r_j \circ S\tau_a = r_j$ pour $j \ge 2$) et

$$r_1 \circ S\tau_a(z) = \pi\big|\operatorname{sh} a\,|z| + \operatorname{ch} a\, z_1\big|^2$$
$$= \operatorname{ch} a\, r(z)\big|\operatorname{th} a + z_1/|z|\big|^2 = \operatorname{ch} a\, r(z)\big|(\operatorname{th} a - 1) + (1 + z_1/|z|)\big|^2.$$

Soit $W_\varepsilon = \{r' \ge \varepsilon r_1\} \subset \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, avec $\varepsilon > 0$: c'est un cône invariant par $\mathbf{C}^*$ et évitant un voisinage de la demi-droite réelle engendrée par $(-1, 0, \dots, 0)$. Dès que $a > 0$ est assez grand (voir la figure 1), ε étant donné,

$$r_1 \circ S\tau_a(z) \ge 3r(z) \quad \text{pour tout} \quad z \in W_\varepsilon$$

et, comme W_ε est invariant par $S\rho_t$,

$$H[\rho_{-t}, \tau_{-a}] = (-r + r \circ S\tau_a) \circ S\rho_t = (-r_1 + r_1 \circ S\tau_a) \circ S\rho_t \ge (-r_1 + 3r) \circ S\rho_t \ge r' + 2r > 0.$$

Ainsi, le hamiltonien du lacet $[\rho_{-t}, \tau_{-a}]$ est positif partout sauf peut-être dans la région $r' < \varepsilon r_1$ complémentaire de W_ε, région où le hamiltonien du flot ϕ_t, à savoir

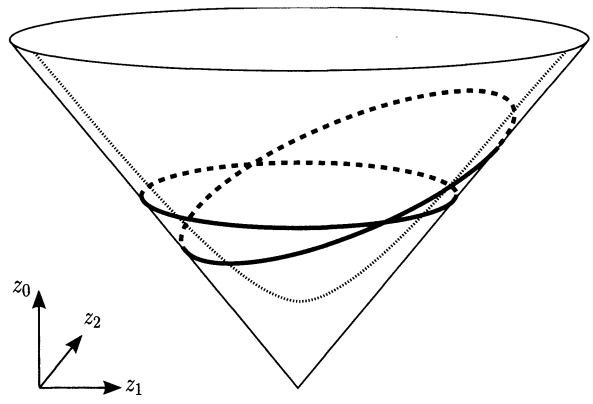

FIGURE 1. Image de la sphère par la translation hyperbolique.

$H\phi_t = (n-1)r_1 - r'$, est positif. Pour voir que la composition par ϕ_{2t} apporte la compensation nécessaire, on écrit

$$\begin{aligned} H\gamma_t(z,t) &= H\phi_{2t}(z) + H[\rho_{-t}, \tau_{-a}](S\phi_{-2t}(z), t) \\ &= 2(n-1)r_1(z) - 2r'(z) + (-r_1 + r_1 \circ S\tau_a) \circ S\rho_t \circ S\phi_{-2t}(z). \end{aligned}$$

Comme les fonctions r_1 et r' sont invariantes par les flots $S\phi_t$ et $S\rho_t$, il reste à vérifier en tout point que

$$2(n-1)r_1 - 2r' - r_1 + r_1 \circ S\tau_a = (2n-3)r_1 - 2r' + r_1 \circ S\tau_a > 0.$$

Or, dans W_ε, l'estimation $r_1 \circ S\tau_a \geq 3r$ donne

$$(2n-3)r_1 - 2r' + r_1 \circ S\tau_a \geq (2n-3)r_1 - 2r' + 3r = r + (2n-1)r_1 > 0$$

et, dans le complémentaire, $r_1 > \varepsilon r'$ donc $r_1 > 0$ et

$$(2n-3)r_1 - 2r' + r_1 \circ S\tau_a \geq (2n-3-2\varepsilon)r_1 > 0,$$

ce qui conclut. □

Remarque 2.10. — On peut se demander s'il n'y a pas, dans $\mathcal{D}(\mathbf{S}^{2n-1}, \eta_0)$, un lacet positif contractile plus simple que dans $\mathrm{PU}(n,1)$ et par exemple si le lacet ρ_t, $t \in \mathbf{T}$, n'est pas contractile. C'est peu probable mais je n'en ai pas la preuve. Ce lacet n'est pas contractile dans $\mathrm{U}(n)$ mais, pour n pair, il l'est dans $\mathrm{SO}(2n)$ et donc dans $\mathcal{D}(\mathbf{S}^{2n-1})$. Pour $n = 2$ cependant, les résultats de Y. Eliashberg [**10**] sur l'espace des structures de contact tendues de $\mathbf{S}^3$ et le théorème de A. Hatcher [**17**] (voir aussi [**20**]) qui confirme la conjecture de Smale sur les difféomorphismes de $\mathbf{S}^3$ s'articulent pour montrer que l'inclusion de $\mathrm{U}(2)$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{S}^3, \eta_0)$ est une équivalence d'homotopie faible.

Les deux énoncés qui suivent serviront pour démontrer le théorème 1.2-(a).

PROPOSITION 2.11 ([**12**]). — *On peut relier dans* $\mathrm{PU}(n,1)$ *le lacet constant* $\gamma_{0,t} = \iota$ *au lacet* $\gamma_{3,t} = \gamma_t$, $t \in \mathbf{T}$, *par une homotopie* $\gamma_{s,t}$, $s \in [0,3]$, *de lacets dont les hamiltoniens*

$$g_s = H_t\gamma_{s,t} \colon \big(\mathbf{C}^n \setminus \{0\}\big) \times \mathbf{T} \to \mathbf{R}, \quad (z,t) \mapsto g_s(z,t) = g_{s,t}(z),$$

vérifient

$$g_{s,t} \geq -r \quad \textit{pour tous} \quad t \in \mathbf{T},\ s \in [0,3]\,.$$

LEMME 2.12 ([**12**]). — *On peut relier dans* $\mathrm{SU}(n)$ *le lacet constant* $\phi_{0,t} = \iota$ *au lacet* $\phi_{1,t} = \phi_t$, $t \in \mathbf{T}$, *par une homotopie* $\phi_{s,t}$, $s \in [0,1]$, *de lacets dont les hamiltoniens*

$$f_s = H_t\phi_{s,t} \colon \big(\mathbf{C}^n \setminus \{0\}\big) \times \mathbf{T} \to \mathbf{R}, \quad (z,t) \mapsto f_s(z,t) = f_{s,t}(z),$$

vérifient

$$f_{s,t} \circ S\phi_{s,t} \geq -r' \quad \textit{pour tous} \quad t \in \mathbf{T},\ s \in [0,1].$$

Démonstration du lemme. — On commence par le cas $n = 2$. On considère les transformations unitaires

$$\delta_t(z_1,z_2) = \big(z_1, e^{2i\pi t}z_2\big), \qquad t \in \mathbf{T},$$
$$\chi_s(z_1,z_2) = \big(\cos(\pi s/2)\, z_1 - \sin(\pi s/2)\, z_2, \sin(\pi s/2)\, z_1 + \cos(\pi s/2)\, z_2\big), \qquad s \in [0,1]$$

et on pose

$$\phi_{s,t} = [\chi_s, \delta_t] = \chi_s \circ \delta_t \circ \chi_{-s} \circ \delta_{-t}.$$

Ceci est une homotopie entre le lacet constant $\phi_{0,t} = \iota$ et le lacet $\phi_{1,t} = \phi_t$. Pour estimer $f_{s,t} \circ S\phi_{s,t}$, on note d'abord que cette fonction n'est autre que $-H_t(\phi_{s,t}^{-1})$. Comme

$$\phi_{s,t}^{-1} = [\delta_t, \chi_s] = \delta_t \circ \chi_s \circ \delta_{-t} \circ \chi_{-s}$$

et que le hamiltonien de δ_t est $H\delta_t = r_2 = r'$, la règle de composition pour les hamiltoniens donne

$$f_{s,t}\circ S\phi_{s,t} = -H\delta_t - H\delta_{-t}\circ S\chi_{-s}\circ S\delta_{-t} = -H\delta_t + H\delta_t\circ S\delta_t\circ S\chi_{-s}\circ S\delta_{-t} \geq -H\delta_t = -r',$$

comme voulu.

Dans le cas $n > 2$, on écrit

$$\phi_t = \phi_t^{(2)} \circ \cdots \circ \phi_t^{(n)}$$

où chaque $\phi_t^{(j)} \in \mathrm{SU}(n)$ opère diagonalement en multipliant les coordonnées z_1 et z_j par $e^{2i\pi t}$ et $e^{-2i\pi t}$, respectivement, et en fixant les autres. La solution du cas $n = 2$ fournit, pour tout j, une homotopie $\phi_{s,t}^{(j)}$, $s \in [0,1]$, entre le lacet constant et le lacet $\phi_t^{(j)}$. La règle de composition pour les hamiltoniens montre que le produit

$$\phi_{s,t} = \phi_{s,t}^{(2)} \circ \cdots \circ \phi_{s,t}^{(n)}, \qquad s \in [0,1],$$

est une homotopie qui convient. □

Démonstration de la proposition. — Avec les notations du lemme 2.12, on pose

$$\gamma_{s,t} = \begin{cases} [\rho_{-t}, \tau_{-sa}] & s \in [0,1], \\ \phi_{s-1,t} \circ [\rho_{-t}, \tau_{-a}] & s \in [1,2], \\ \phi_{s-2,t} \circ \phi_t \circ [\rho_{-t}, \tau_{-a}] & s \in [2,3]. \end{cases}$$

Comme $\phi_{2t} = \phi_t \circ \phi_t$, c'est bien une homotopie entre le lacet constant $\gamma_{0,t} = \iota$ et le lacet $\gamma_{3,t} = \gamma_t$.

Pour $s \in [0,1]$, moyennant les calculs de la démonstration du théorème 2.8,

$$g_{s,t} = (-r_1 + r_1 \circ \tau_{-sa}) \circ S\rho_t \geq -r_1 \circ S\rho_t = -r_1 \geq -r.$$

Pour $s \in [1,2]$, en utilisant l'estimation du lemme 2.12,

$$g_{s,t} \circ S\phi_{s-1,t} = f_{s-1,t} \circ S\phi_{s-1,t} + (-r_1 + r_1 \circ S\tau_{-a}) \circ S\rho_t \geq -r' - r_1 \circ S\rho_t = -r$$

et, comme $S\phi_{s-1,t}$ préserve r (toute l'homotopie se fait dans $\mathrm{U}(n)$), on a bien $g_{s,t} \geq -r$.

Pour $s \in [2,3]$,

$$\begin{aligned} g_{s,t} \circ S\phi_{s-2,t} &= f_{s-2,t} \circ S\phi_{s-2,t} + (n-1)r_1 - r' + (-r_1 + r_1 \circ S\tau_{-a}) \circ S\rho_t \circ S\phi_{-t} \\ &\geq (n-1)r_1 - 2r' + (-r_1 + r_1 \circ S\tau_{-a}) \circ S\rho_t \circ S\phi_{-t} \\ &= (n-2)r_1 - 2r' + r_1 \circ S\tau_{-a} \circ S\rho_t \circ S\phi_{-t}. \end{aligned}$$

On observe alors que le domaine $W_\varepsilon = \{r' \geq \varepsilon r_1\}$ est invariant non seulement par $S\rho_t$ mais aussi par $S\phi_t$ (voir la démonstration du théorème 2.8). Or, dans W_ε, l'estimation $r_1 \circ S\tau_a \geq 3r$ donne

$$(n-2)r_1 - 2r' + r_1 \circ S\tau_{-a} \circ S\rho_t \circ S\phi_{-t} \geq (n-2)r_1 - 2r' + 3r = r + nr_1 > 0$$

et, dans le complémentaire, $r_1 > \varepsilon r'$ donc $r_1 > 0$ et

$$(n-2)r_1 - 2r' + r_1 \circ S\tau_{-a} \circ S\rho_t \circ S\phi_{-t} \geq (n-2-2\varepsilon)r_1 \geq -r_1 \geq -r,$$

ce qui conclut puisque $S\phi_{s-2,t}$ préserve r. □

On termine cette partie par la :

Démonstration du théorème 1.2-(a). — On rappelle qu'il faut prouver que, pour tout compact $A \subset C(1) \times \mathbf{T}$ et tout nombre $d > 0$, il existe une isotopie de contact de V qui envoie A dans $B(d) \times \mathbf{T}$. Avec les mêmes notations que précédemment, $C = C(1)$ désigne ici le cylindre $\{r_2 < 1\} \subset \mathbf{C}^n$. On pose d'autre part

$$D = \{r' < 1/n\}, \qquad E = \{r_2 - r - 1 + nr' < 1\}$$

et on considère les lacets dans $\mathrm{SU}(n)$ donnés par

$$\phi_t(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \big(e^{2i\pi(n-1)t} z_1, e^{-2i\pi t} z_2, \ldots, e^{-2i\pi t} z_n\big),$$
$$\psi_t(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \big(e^{2i\pi t} z_1, e^{-2i\pi t} z_2, z_3, \ldots, z_n\big).$$

Ces lacets ont pour hamiltoniens $H\phi_t = (n-1)r_1 - r'$ et $H\psi_t = r_1 - r_2$. En outre, le lemme 2.5 leur associe les plongements de contact (d'un ouvert) de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{T}$ dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{T}$ définis par

$$\Phi(z,t) = \frac{S\phi_t(z)}{\sqrt{1 + H\phi_t(z)}}$$
$$\text{et} \quad \Psi(z,t) = \frac{S\psi_t(z)}{\sqrt{1 + H\psi_t(z)}}.$$

(On rappelle que l'action de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ vu comme symplectisation de la sphère est donnée par $c \cdot z = \sqrt{c} z$.)

D'après le lemme 2.12, le lacet ϕ_t est contractile parmi les lacets de hamiltoniens minorés par $-r'$. Le plongement Φ est donc bien défini sur $D \times \mathbf{T}$ et isotope à l'inclusion parmi les plongements de contact.

De même, le lacet ψ_t est contractile parmi les lacets de hamiltoniens minorés par $-r_2$ de sorte que Ψ est bien défini sur $C \times \mathbf{T}$ et isotope à l'inclusion parmi les plongements de contact.

Soit $A \subset C$ un compact. Pour $a > 0$ assez grand, la translation hyperbolique τ_a envoie A dans $E \cap C$. Or, pour $z \in E \cap C$ et $(w,t) = \Psi(z,t)$,

$$r'(w) = \frac{r'(z)}{1 + r_1(z) - r_2(z)} < \frac{1}{n}$$

donc $\Psi \circ (\tau_a \times \iota)(A) \subset D$. D'autre part, pour $z \in D$ et $(w,t) = \Phi(z,t)$,

$$r(w) = \frac{r_1(z) + r'(z)}{1 + (n-1)r_1(z) - r'(z)} \leq \frac{r_1(z) + 1/n}{1 + (n-1)r_1(z) - 1/n} = \frac{1}{n-1}$$

donc

$$\Phi \circ \Psi \circ (\tau_a \times \iota)(A) \subset B\big(1/(n-1)\big) \times \mathbf{T}.$$

On utilise maintenant le lacet contractile strictement positif dans $\mathrm{PU}(n,1)$. Grâce à la proposition 2.11, le théorème 2.6-(a) permet, pour tout $s < 1$, de tasser $B(s) \times \mathbf{T}$ dans $B\big(s/(1+cs)\big)$ où $c > 0$ est indépendant de s. En itérant cette opération, on tasse $B(s) \times \mathbf{T}$ dans $B(d) \times \mathbf{T}$ avec d arbitrairement petit. □

3. OBSTRUCTIONS

A. Fonctions génératrices

Soit M une variété et $f\colon M \to \mathbf{R}$ une fonction. Le graphe de $j^1 f$ est une sous-variété legendrienne M_f de J^1M et sa projection dans T^*M, à savoir le graphe M_{df} de df, une sous-variété lagrangienne exacte (c'est-à-dire sur laquelle la 1-forme canonique de Liouville induit une forme exacte). La fonction f renseigne beaucoup sur la géométrie de ces sous-variétés. Typiquement, les points critiques de f sont les points d'intersection de M_{df} avec la section nulle M_0 et ses valeurs critiques sont les altitudes des relèvements de ces points dans $M_f \subset J^1M$, la fonction hauteur étant la projection $J^1M \to \mathbf{R}$. Malheureusement, rares sont les sous-variétés du type M_f ou M_{df} : ce sont uniquement les sous-variétés legendriennes de J^1M ou lagrangiennes exactes de T^*M qui se projettent difféomorphiquement sur la base M.

La théorie des fonctions génératrices permet de décrire beaucoup plus de sous-variétés legendriennes dans J^1M et lagrangiennes exactes dans T^*M par des fonctions. Cependant, ces fonctions sont définies non plus sur M mais sur un fibré au-dessus de M. Ce mode de représentation a été inventé par L. Hörmander [**19**].

Une *fonction génératrice* est une fonction

$$S\colon E \to \mathbf{R}, \quad (x,u) \mapsto S(x,u)$$

définie sur un fibré vectoriel E au-dessus de M (dont les éléments sont notés (x,u) avec u dans la fibre de $x \in M$) et dont la dérivée partielle $\partial_u S$ s'annule transversalement. Une telle fonction engendre deux sous-variétés (*a priori* seulement immergées), l'une legendrienne dans J^1M et l'autre lagrangienne exacte dans T^*M (la projection de la première), à savoir

$$L_S = \big\{(x, \partial_x S(x,u), S(x,u)) \in J^1M \mid \partial_u S(x,u) = 0\big\}$$
$$\text{et} \quad L_{dS} = \big\{(x, \partial_x S(x,u)) \in T^*M \mid \partial_u S(x,u) = 0\big\}.$$

Une sous-variété L, legendrienne dans J^1M ou lagrangienne exacte dans T^*M, est dite représentée par la fonction génératrice S si $L = L_S$ ou $L = L_{dS}$. Comme plus haut, les points critiques de S sont alors les points d'intersection de L_{dS} avec la section nulle M_0 et ses valeurs critiques sont les altitudes des relèvements de ces points dans $L_S \subset J^1M$. Cela dit, même si M est une variété close, S est définie sur un espace E non compact et peut très bien n'avoir aucun point critique. On coupe court à cette éventualité en se restreignant à des fonctions qui coïncident à l'infini avec une forme quadratique non-dégénérée et sont ainsi passibles d'un avatar de la théorie de Morse.

On appellera *fonction quadratrice* de L toute fonction génératrice S de L qui, en dehors d'un compact de E, est de la forme $S(x,u) = Q(x,u) + c$ où $c \in \mathbf{R}$ est une

constante et $Q\colon E \to \mathbf{R}$ une (fonction dont la restriction à chaque fibre est une) forme quadratique non dégénérée.

Pour énoncer le théorème fondamental des fonctions génératrices, on a encore besoin d'une notion d'équivalence. Étant donné des fonctions $S\colon E \to \mathbf{R}$ et $T\colon F \to \mathbf{R}$ sur des fibrés vectoriels de même base M, on note $S \oplus T\colon E \oplus F \to \mathbf{R}$ la fonction $(x,u,v) \mapsto S(x,u) + T(x,v)$. On dit que deux fonctions quadratrices $S_1\colon E_1 \to \mathbf{R}$ et $S_2\colon E_2 \to \mathbf{R}$ sont équivalentes s'il existe des formes quadratiques non dégénérées $Q_i\colon F_i \to \mathbf{R}$, $i \in \{1,2\}$, et un difféomorphisme fibré $\Phi\colon E_2 \oplus F_2 \to E_1 \oplus F_1$ tels que $S_2 \oplus Q_2 = (S_1 \oplus Q_1) \circ \Phi$.

Remarque 3.1. — L'opération de somme directe employée ici sur les fonctions quadratrices est liée à une opération géométrique sur les sous-variétés [**30**]. Pour toutes sous-variétés legendriennes L_1 et L_2 de J^1M, on pose

$$L_1 + L_2 = \big\{(x, y_1+y_2, z_1+z_2) \in J^1M \mid (x,y_1,z_1) \in L_1,\ (x,y_2,z_2) \in L_2\big\}.$$

Sous une hypothèse de transversalité *ad hoc*, $L_1 + L_2$ est une sous-variété automatiquement legendrienne. De plus, si L_1 et L_2 ont des fonctions quadratrices respectives S_1 et S_2, alors $S_1 \oplus S_2$ est une fonction quadratrice de $L_1 + L_2$.

Dans le prolongement, pour toute sous-variété legendrienne L de J^1M, on note $-L$ la sous-variété

$$-L = \big\{(x,-y,-z) \in J^1M \mid (x,y,z) \in L\big\},$$

dont les fonctions quadratrices sont opposées à celles de L. Noter que $L-L = L+(-L)$ n'est la section nulle M_0 que si L se projette sur M par difféomorphisme.

Le théorème ci-dessous est principalement dû à J.-C. Sikorav et à C. Viterbo qui ont établi respectivement l'existence de fonctions quadratrices et leur unicité à équivalence près dans le cas lagrangien. Les extensions au cas legendrien sont dues respectivement à Y. Chekanov et D. Théret.

THÉORÈME 3.2 ([**5, 26, 28, 30**]). — *Soit M une variété close.*

(a) *Dans T^*M, toute isotopie L_t de sous-variétés lagrangiennes exactes partant de la section nulle est représentée par un chemin de fonctions quadratrices $S_t\colon E \to \mathbf{R}$. De plus, toute fonction quadratrice de L_t est équivalente à $S_t + c$ pour une certaine constante c.*

(b) *Dans J^1M, toute isotopie L_t de sous-variétés legendriennes partant de la section nulle est représentée par un chemin de fonctions quadratrices $S_t\colon E \to \mathbf{R}$. De plus, toute fonction quadratrice de L_t est équivalente à S_t.*

Quelques mots sur la construction des fonctions quadratrices seront utiles par la suite. On commence par une observation sur le cas lagrangien due à A. Weinstein. Soit E l'espace des chemins $u\colon [0,1] \to T^*M$ dont l'origine $u(0)$ est sur la section nulle M_0,

espace fibré au-dessus de M (supposée close) par l'application $u \mapsto u(1)$. Soit d'autre part H_t, $t \in [0,1]$, un hamiltonien dépendant du temps sur T^*M et M_t l'image de M_0 à l'instant t par l'isotopie hamiltonienne engendrée par H_t. L'observation est que la fonctionnelle d'action $S\colon E \to \mathbf{R}$ donnée par

$$S(u) = \int_0^1 u^*\lambda - H_t\big(u(t)\big)\,dt$$

est formellement une fonction génératrice de M_1 définie sur un fibré non vectoriel et de dimension infinie.

C'est M. Chaperon [**3**] qui a eu l'idée d'approximer E par un espace de dimension finie formé de « géodésiques brisées », idée développée par la suite dans [**21, 25**] avant d'aboutir dans [**26**] à l'existence de fonctions quadratrices.

En suivant [**4**] à travers [**24**], on décrit maintenant une construction de fonctions quadratrices pour une isotopie legendrienne L_t à support compact dans $J^1\mathbf{R}^n$ (le schéma général de toutes les constructions connues est le même).

Soit $f\colon J^1\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la fonction $(x,y,z) \mapsto xy+z$ qu'on regarde comme une famille $f_{y,z}$ de fonctions sur $\mathbf{R}^n$. Les sections

$$j^1 f_{y,z}\colon \mathbf{R}^n \to J^1\mathbf{R}^n, \quad x \mapsto (x,y,xy+z), \qquad (y,z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R},$$

sont des plongements legendriens dont les images $F_{y,z}$ feuillettent $J^1\mathbf{R}^n$.

Si $\psi \in \mathcal{G}(J^1\mathbf{R}^n)$ est une transformation de contact $\mathcal{C}^1$-proche de l'identité, chaque sous-variété $\psi(F_{y,z})$ reste le graphe d'une section $j^1 g_{y,z}\colon \mathbf{R}^n \to J^1\mathbf{R}^n$, où $g_{y,z} = g(.,y,z)$ est une fonction sur $\mathbf{R}^n$. On appellera ci-dessous fonction de transition associée à ψ la fonction

$$G\colon J^1\mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \quad G(x,y,z) = g(x,y,z) - f(x,y,z),$$

qui vérifie notamment $G = 0$ si et seulement si $\psi = \iota$.

LEMME 3.3. — *Soit L une sous-variété legendrienne de $J^1\mathbf{R}^n$ ayant une fonction quadratrice $S\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$. Soit d'autre part $\psi_t \in \mathcal{G}(J^1\mathbf{R}^n)$, $t \in [0,1]$, une isotopie de contact $\mathcal{C}^1$-petite, G_t les fonctions de transition associées et X_t le champ de vecteurs qui l'engendre.*

(a) *Chaque sous-variété $\psi_t(L)$ a pour fonction quadratrice la fonction*

$$S_t\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}, \quad S_t(x,u,v,w) = G_t\big(x,w,S(v,u) - vw\big).$$

(b) *Pour tout $(x,y,z) \in J^1\mathbf{R}^n$,*

$$\frac{d}{dt} G_t(x_t,y,z) = h_t(x_t,y_t,z_t')$$

où $(x_t,y_t,z_t') = \psi_t(x,y,z+xy)$ et $h_t = \alpha(X_t)$ est le hamiltonien de contact vu comme fonction sur $J^1\mathbf{R}^n$ grâce à la forme de contact canonique $\alpha = dz - y\,dx$.

Noter que la fonction quadratrice S_0 fournie par le (a) du lemme ne coïncide pas avec S. Elle s'écrit $S_0(x,u,v,w) = S(v,u) + w(x-v)$ et doit être vue comme une stabilisation de S.

On renvoie à [**4**] pour la preuve de ce lemme et on explique comment en déduire des fonctions quadratrices pour les images L_t de la section nulle par une isotopie de contact $\psi_t \in \mathcal{G}(J^1\mathbf{R}^n)$, $t \in [0,1]$. On prend un entier k assez grand pour que toutes les transformations

$$\psi_t \circ \psi_{i/k}^{-1}, \qquad t \in [i/k, (i+1)/k],\ 0 \leq i \leq k-1,$$

soient suffisamment $\mathcal{C}^1$-proches de l'identité pour définir des fonctions de transition G_t. Pour $t \in [0, 1/k]$, le lemme s'applique avec $S = 0$ et fournit une fonction quadratrice S_t^1 de L_t variant continûment avec t. Pour $t \in [1/k, 2/k]$, le lemme s'applique avec $S = S_{1/k}^1$ et donne une fonction quadratrice S_t^2 de L_t. De plus, le chemin S_t^2, $t \in [1/k, 2/k]$, se raccorde au chemin S_t^2, $t \in [0, 1/k]$, des stabilisations des fonctions S_t^1. En répétant le procédé, on obtient un chemin $S_t = S_t^k$ de fonctions quadratrices pour toutes les sous-variétés L_t, $t \in [0,1]$.

La proposition suivante servira plus loin :

PROPOSITION 3.4 ([**24, 29**]). — *Soit $L_0 \subset J^1\mathbf{R}^n$ une sous-variété legendrienne ayant une fonction quadratrice $S\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ et $\psi_t \in \mathcal{G}(J^1\mathbf{R}^n)$, $t \in [0,1]$, une isotopie positive. Alors L_0 et $L_1 = \psi_1(L_0)$ ont des fonctions quadratrices $S_0, S_1\colon E \to \mathbf{R}$ telles que $S_0 \leq S_1$.*

Démonstration. — On suppose d'abord que l'isotopie ψ_t est $\mathcal{C}^1$-petite et définit donc des fonctions de transition G_t. D'après le lemme 3.3-(b), la fonction dG_t/dt est partout positive. D'autre part, le lemme 3.3-(a) dit que $L_t = \psi_t(L_0)$ a pour fonction quadratrice $S_t(x,u,v,w) = G_t\big(x,w,S(v,u)-vw\big)$. Par suite $dS_t/dt \geq 0$ donc $S_1 \geq S_0$. Le cas d'une grande isotopie se traite par l'argument de subdivision et de recomposition décrit plus haut. □

B. Invariants des sous-variétés

L'application principale du théorème de Sikorav sur l'existence de fonctions quadratrices est une minoration par la théorie de Morse du nombre de points d'intersection entre la section nulle de T^*M et son image par toute isotopie hamiltonienne, minoration qui confirme une conjecture d'Arnold. La motivation du théorème de Viterbo sur l'unicité de ces fonctions est leur utilisation systématique pour fabriquer des invariants capables de détecter la rigidité symplectique. L'extension des constructions de Viterbo au cadre de la géométrie de contact est due à Bhupal [**2**].

Soit M une variété close orientable et $\mathcal{L} = \mathcal{G}M_0$ l'ensemble des sous-variétés legendriennes de J^1M images de la section nulle M_0 par une transformation de contact de

$\mathcal{G} = \mathcal{G}(J^1M)$. D'après le théorème 3.2, toute sous-variété $L \in \mathcal{L}$ admet une fonction quadratrice $S\colon E \to \mathbf{R}$ et l'ensemble des valeurs critiques de S ne dépend que de L : c'est le spectre de L. On explique ci-dessous comment Viterbo associe un point de ce spectre à toute classe de cohomologie $\nu \in \mathrm{H}^*(M)$.

Soit $L \in \mathcal{L}$ et $S\colon E \to \mathbf{R}$ une fonction quadratrice de L. On note Q la forme quadratique sur E telle que $S - Q$ soit constante à l'infini et E_- un sous-fibré vectoriel maximal sur lequel Q est définie négative, donc de rang égal à l'indice i de Q. On note aussi E^a, $a \in \mathbf{R}$, le sous-niveau $\{S \leq a\}$ dans E et $E^{-\infty}$ un sous-niveau E^a pour $a < 0$ très grand (en dessous d'un certain seuil, le type topologique ne change plus). La cohomologie en vigueur ci-après est à coefficients dans un corps. Par excision,

$$\mathrm{H}^*\big(E, E^{-\infty}\big) \cong \mathrm{H}^*\big(\mathrm{B}(E_-), \partial\mathrm{B}(E_-)\big)$$

où $\mathrm{B}(E_-)$ est le fibré en boules de E_-. D'autre part, le rappel par la projection $\pi\colon E_- \to M$ et le *cup*-produit avec la classe de Thom $\tau \in \mathrm{H}^i\big(\mathrm{B}(E_-), \partial\mathrm{B}(E_-)\big)$ (classe Poincaré duale de la section nulle de E_-) donnent l'isomorphisme de Thom

$$\mathrm{H}^*(M) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+*}\big(\mathrm{B}(E_-), \partial\mathrm{B}(E_-)\big), \quad \nu \longmapsto \tau \smile \pi^*\nu.$$

Par composition, l'inclusion $E^a \to E$ induit, pour tout $a \in \mathbf{R}$, un homomorphisme

$$\theta_a\colon \mathrm{H}^*(M) \longrightarrow \mathrm{H}^*\big(\mathrm{B}(E_-), \partial\mathrm{B}(E_-)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^*(E, E^{-\infty}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(E^a, E^{-\infty}).$$

Pour tout $\nu \in \mathrm{H}^*(M)$, on pose alors

$$\mathrm{c}(\nu, L) = \inf\big\{a \in \mathbf{R} \mid \theta_a(\nu) \neq 0\big\}.$$

Le nombre $\mathrm{c}(\nu, L)$ est clairement un point du spectre de L si $\nu \neq 0$. En voici quelques propriétés (les arguments passent mot pour mot du cas lagrangien traité dans [**30**] au cas legendrien) :

PROPOSITION 3.5 ([**30**]). — (a) *Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ ont des fonctions quadratrices $S_1, S_2\colon E \to \mathbf{R}$ vérifiant $\|S_1 - S_2\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon$, alors*

$$|\mathrm{c}(\nu, L_1) - \mathrm{c}(\nu, L_2)| \leq \varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad \nu \in \mathrm{H}^*(M).$$

(b) *Pour tous $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ et tous $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{H}^*(M)$,*

$$\mathrm{c}(\nu_1 \smile \nu_2, L_1 + L_2) \geq \mathrm{c}(\nu_1, L_1) + \mathrm{c}(\nu_2, L_2).$$

(c) *Soit $1, \mu$ des générateurs respectifs de $\mathrm{H}^0(M)$ et $\mathrm{H}^n(M)$. Pour tout $L \in \mathcal{L}$,*

$$\mathrm{c}(\mu, -L) = -\mathrm{c}(1, L).$$

De plus, si L rencontre la section nulle M_0,

$$\mathrm{c}(\mu, L) - \mathrm{c}(1, L) = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad L = M_0.$$

Démonstration. — On renvoie à [**30**] pour (b) et (c) mais on explique le point facile (a) qui servira ci-dessous. Pour $j \in \{1,2\}$ et $a \in \mathbf{R}$, soit E_j^a le sous-niveau $\{S_j \leq a\}$ et $\theta_{j,a}$ l'homomorphisme $\mathrm{H}^*(M) \to \mathrm{H}^{i_j+*}(E_j^a, E_j^{-\infty})$ associé à S_j. L'hypothèse $\|S_1 - S_2\|_{\mathscr{C}^0} \leq \varepsilon$ garantit que

$$E_2^{a-\varepsilon} \subset E_1^a \subset E_2^{a+\varepsilon}$$

et ces sous-niveaux ont le même type topologique si $|a|$ est assez grand. Pour $a < \mathrm{c}(\nu, L_1)$, la classe $\theta_{1,a}(\nu)$ est nulle donc aussi la classe $\theta_{2,a-\varepsilon}(\nu)$ à cause de l'inclusion ci-dessus. Par suite, $\mathrm{c}(\nu, L_1) - \mathrm{c}(\nu, L_2) \leq \varepsilon$. De même, $\mathrm{c}(\nu, L_2) - \mathrm{c}(\nu, L_1) \leq \varepsilon$, d'où le résultat. □

Dans la proposition ci-dessous, $\mathbf{R}$ — donc aussi $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ — opère sur J^1M par les translations (de contact) $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + c)$, $c \in \mathbf{R}$. On considère ainsi, en plus du groupe $\mathscr{G} = \mathscr{G}(J^1M)$, les deux groupes suivants :

- $\mathscr{G}' = \mathscr{G}'(J^1M)$ est la composante neutre du groupe des transformations de contact $\mathbf{Z}$-équivariantes dont le support se projette sur un compact de T^*M ;
- $\mathscr{H} = \mathscr{H}(J^1M)$ est la composante neutre du groupe des transformations de contact $\mathbf{R}$-équivariantes dont le support se projette sur un compact de T^*M — ces transformations sont les relèvements des transformations hamiltoniennes de T^*M à support compact.

PROPOSITION 3.6 ([**2, 24, 30**]). — *Soit $\nu \in \mathrm{H}^*(M)$ une classe non nulle, $L \in \mathscr{L}$ une sous-variété legendrienne et ψ une transformation de contact. Alors*

$$\mathrm{c}\big(\nu, \psi(L)\big) = \mathrm{c}\big(\nu, L - \psi^{-1}(M_0)\big)$$

dans les trois cas suivants :

1. $\psi \in \mathscr{G}$ *et* $\mathrm{c}(\nu, \psi(L)) = 0$;
2. $\psi \in \mathscr{G}'$ *et* $\mathrm{c}(\nu, \psi(L)) \in \mathbf{Z}$;
3. $\psi \in \mathscr{H}$.

Démonstration. — On relie $\psi = \psi_1$ à l'identité $\iota = \psi_0$ par un chemin ψ_t dans $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}'$ ou $\mathscr{H}$ selon le cas. On pose

$$c_t = \mathrm{c}(\nu, L_t) \quad \text{où} \quad L_t = \psi_t^{-1}\big(\psi(L)\big) - \psi_t^{-1}(M_0)$$

et on note $S_t \colon E \to \mathbf{R}$ un chemin de fonctions quadratrices pour les L_t, $t \in [0,1]$. La proposition 3.5-(a) assure que la valeur critique c_t de S_t varie continûment. Par ailleurs,

$$L_0 = \psi(L) - M_0 = \psi(L) \quad \text{et} \quad L_1 = L - \psi^{-1}(M_0)$$

donc il suffit de montrer que le chemin c_t est forcément constant dans les trois cas envisagés.

L'affirmation clé est que, dans ces trois cas, ψ_t^{-1} induit une bijection entre les points critiques de S_0 de valeur c_0 et ceux de S_t de même valeur c_0. Pour le vérifier, on observe d'abord que les points critiques de S_t de valeur $c \in \mathbf{R}$ paramètrent $L_t \cap M_c$ où $M_c = \tau_c(M_0)$ et $\tau_c \colon J^1M \to J^1M$ est la translation $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + c)$. On distingue ensuite les trois cas.

Cas 1. L'ensemble $L_t \cap M_0$ est en bijection évidente avec

$$\psi_t^{-1}\big(\psi(L)\big) \cap \psi_t^{-1}(M_0) = \psi_t^{-1}\big(\psi(L) \cap M_0\big) = \psi_t^{-1}(L_0 \cap M_0).$$

Cas 2. Comme τ_k commute avec ψ_t, l'ensemble $L_t \cap M_k$ est en bijection avec

$$\psi_t^{-1}\big(\psi(L)\big) \cap \tau_k\big(\psi_t^{-1}(M_0)\big) = \psi_t^{-1}\big(\psi(L) \cap \tau_k(M_0)\big) = \psi_t^{-1}(L_0 \cap M_k).$$

Cas 3. Comme τ_c commute avec ψ_t, l'ensemble $L_t \cap M_c$ est en bijection avec

$$\psi_t^{-1}\big(\psi(L)\big) \cap \tau_c\big(\psi_t^{-1}(M_0)\big) = \psi_t^{-1}\big(\psi(L) \cap \tau_c(M_0)\big) = \psi_t^{-1}(L_0 \cap M_c).$$

Pour conclure, on suppose d'abord que les points critiques de S_0 sont non dégénérés, c'est-à-dire que $\psi(L) = L_0$ est transversale à $M_0 \times \mathbf{R} \subset J^1M$. Il est facile de voir que les sous-variétés L_t (legendriennes) sont alors toutes transversales à $M_0 \times \mathbf{R}$ de sorte que les points critiques des fonctions S_t sont eux aussi non dégénérés. Ils forment donc des arcs paramétrés par $t \in [0, 1]$ et seuls ceux qui restent constamment à l'altitude c_0 passent par l'altitude c_0. Dans le cas général, la proposition 3.5-(a) permet de se ramener au cas particulier par perturbation. □

COROLLAIRE 3.7. — *Soit $\nu \in \mathrm{H}^*(M)$ une classe non nulle, $L \in \mathcal{L}$ une sous-variété legendrienne et ψ une transformation de contact. Les nombres*

$$\mathrm{c}\big(\nu, \psi(L)\big) \quad \textit{et} \quad \mathrm{c}\big(\nu, L - \psi^{-1}(M_0)\big)$$

ont le même signe si $\psi \in \mathcal{G}$ et la même partie entière si $\psi \in \mathcal{G}'$.

C. Invariants des transformations

On décrit ici les invariants associés aux transformations hamiltoniennes de $\mathbf{R}^{2n}$ par Viterbo [**30**] et étendus aux transformations de contact de $\mathbf{R}^{2n+1}$ et $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ respectivement par Bhupal [**2**] et Sandon [**24**]. Pour se placer dans un cadre unique, on tient compte des actions de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{R}^{2n+1} = J^1\mathbf{R}^n$ par les translations (entières dans le cas de $\mathbf{Z}$) sur le dernier facteur. On travaille alors avec les trois groupes $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{H}$ intervenant déjà dans la proposition 3.6. On a d'autre part besoin de quelques constructions qu'on présente tout de suite.

Étant donné des variétés F et K munies respectivement d'une structure symplectique ω et d'une structure de contact η, on note $\overline{F}$ et $\overline{K}$ les mêmes variétés munies des

structures $-\omega$ et $-\eta$ (le même champ d'hyperplans avec la coorientation opposée). Toute transformation symplectique $\phi\colon F \to F$ définit un plongement lagrangien

$$G\phi\colon F \longrightarrow \overline{F} \times F, \quad p \longmapsto \big(p, \phi(p)\big),$$

donc toute transformation de contact $\psi\colon K \to K$ détermine le plongement lagrangien

$$GS\psi\colon SK \longrightarrow \overline{S}K \times SK, \quad p \longmapsto \big(p, S\psi(p)\big).$$

Ce plongement est $\mathbf{R}_+^*$-équivariant pour les actions normale à gauche et diagonale à droite et le quotient de $\overline{S}K \times SK$ par cette dernière action est une variété de contact (à regarder comme le produit de contact de $\overline{K}$ et K) qu'on notera $\overline{K} \boxtimes K$. Par passage au quotient, ψ définit un plongement legendrien de K dans $\overline{K} \boxtimes K$ qu'on désigne par $G\psi$.

D'autre part, il existe un difféomorphisme symplectique $\delta\colon \overline{\mathbf{R}}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n} \to T^*\mathbf{R}^{2n}$ qui envoie la diagonale sur la section nulle. On peut prendre par exemple

$$\delta(x', y', x'', y'') = ((x' + x'')/2, (y' + y'')/2, y' - y'', x'' - x').$$

Noter que δ conjugue l'involution $(x', y', x'', y'') \mapsto (x'', y'', x', y')$ à la symétrie $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

On laisse au lecteur le soin de construire l'analogue de δ pour les 1-jets, à savoir un plongement de contact $\widehat{\delta}\colon \overline{\mathbf{R}}^{2n+1} \boxtimes \mathbf{R}^{2n+1} \to J^1\mathbf{R}^{2n+1}$ ayant les propriétés suivantes :

- $\widehat{\delta}$ envoie la « diagonale » sur la section nulle ;
- $\widehat{\delta}$ est équivariant pour les actions de $\mathbf{Z}$ respectivement diagonale à gauche et horizontale à droite (autrement dit relevée de la base) ;
- $\widehat{\delta}$ est équivariant pour les actions de $\mathbf{R}$ respectivement verticale à gauche (c'est-à-dire induite par l'action sur le second facteur) et normale à droite.

Pour $n = 0$ — et $J^1\mathbf{R}^0 = \mathbf{R}$ —, un exemple de tel plongement (sous sa forme symplectisée) est

$$S\widehat{\delta}(z', s', z'', s'') = (z', s'/s'' - 1, z'' - z', s'').$$

Les transformations symplectiques $\phi\colon \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ et de contact $\psi\colon \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^{2n+1}$ définissent ainsi des plongements respectivement lagrangiens et legendriens

$$L\phi = \delta \circ G\phi\colon \mathbf{R}^{2n} \longrightarrow T^*\mathbf{R}^{2n}$$

$$\text{et} \quad L\psi = \widehat{\delta} \circ G\psi\colon \mathbf{R}^{2n+1} \longrightarrow J^1\mathbf{R}^{2n+1}.$$

Les conditions de support permettent en outre de compactifier ces plongements :

- en un plongement lagrangien exact $L\phi\colon \mathbf{S}^{2n} \to T^*\mathbf{S}^{2n}$ si $\phi \in \mathscr{H}$, plongement qu'on peut aussi voir comme projection d'un plongement legendrien $L\phi\colon \mathbf{S}^{2n} \to J^1\mathbf{S}^{2n}$;
- en un plongement legendrien $L\psi\colon \mathbf{S}^{2n+1} \to J^1\mathbf{S}^{2n+1}$ si $\psi \in \mathscr{G}$;
- en un plongement legendrien $L\psi\colon \mathbf{S}^{2n} \times \mathbf{T} \to J^1(\mathbf{S}^{2n} \times \mathbf{T})$ si $\psi \in \mathscr{G}'$.

Dans la suite, $L\phi$ et $L\psi$ désignent aussi bien ces plongements que leurs images. On observe que $L(\phi^{-1}) = -L\phi$ et $L(\psi^{-1}) = -L\psi$ (au sens des opérations dans $T^*\mathbf{R}^{2n}$ et $J^1\mathbf{R}^{2n+1}$).

Remarque 3.8. — Pour $\phi \in \mathcal{H}$, on dispose en fait de deux plongements legendriens $L\phi$ différents. D'une part, la transformation hamiltonienne de $\mathbf{R}^{2n}$ fournit un plongement lagrangien exact dans $T^*\mathbf{R}^{2n}$, sa compactification dans $T^*\mathbf{S}^{2n}$ et son relèvement legendrien dans $J^1\mathbf{S}^{2n}$. D'autre part, la transformation de contact équivariante de $\mathbf{R}^{2n+1}$ donne un élément de $\mathcal{G}'$, d'où un plongement legendrien dans $J^1(\mathbf{S}^{2n} \times \mathbf{T})$. Ces deux plongements conduisent aux mêmes invariants pour la raison suivante : si $S\colon E \to \mathbf{R}$ est une fonction quadratrice du premier, une fonction quadratrice du second est simplement la fonction $E \times \mathbf{T} \to \mathbf{R}$, $(x, u, z) \mapsto S(x, u)$. Dans la suite, c'est le second point de vue qu'on adopte parce qu'il permet de traiter ensemble les trois groupes $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{H}$.

Pour toute transformation ϕ dans $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ ou $\mathcal{H}$, on pose

$$\mathrm{c}(\phi) = \mathrm{c}(\mu, L\phi)$$

où μ est la classe fondamentale de $\mathbf{S}^{2n+1}$, $\mathbf{S}^{2n} \times \mathbf{T}$ (ou même éventuellement $\mathbf{S}^{2n}$), selon le cas.

Ce nombre est donc une valeur critique d'une quelconque fonction quadratrice S de $L\phi$. Il est utile d'avoir une interprétation géométrique des points et des valeurs critiques de S. Vu l'équivariance de $\widehat{\delta}$ par rapport aux actions verticale et normale de $\mathbf{R}$, les points critiques paramètrent les points q de $\mathbf{R}^{2n+1}$ que ϕ translate parallèlement à l'axe des z avec une dérivée $\partial_z\phi(q)$ égale à 1. La quantité dont q est translaté donne la valeur critique correspondante. On appellera ces points les points translatés par ϕ. Noter que, si $\phi \in \mathcal{H}$, la dérivée $\partial_z\phi$ vaut partout 1.

La proposition qui suit résume les propriétés principales de $\mathrm{c}(\phi)$.

PROPOSITION 3.9 ([**2, 24, 30**]). — *Pour tous ϕ et ψ dans $\mathcal{G}$, dans $\mathcal{G}'$ ou dans $\mathcal{H}$:*

(a) $\mathrm{c}(\phi) \geq 0$.

(b) $\mathrm{c}(\phi) = \mathrm{c}(\phi^{-1}) = 0$ *si et seulement si* $\phi = \iota$.

(c) $\mathrm{c}(\psi \circ \phi) \leq \mathrm{c}(\phi) + \mathrm{c}(\psi)$ *dans les cas suivants :*

- $\phi, \psi \in \mathcal{G}$ *et* $\mathrm{c}(\phi) = 0$ *;*
- $\phi, \psi \in \mathcal{G}'$ *et* $\mathrm{c}(\phi) \in \mathbf{Z}$ *;*
- $\phi, \psi \in \mathcal{H}$.

(d) $\mathrm{c}(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}) = \mathrm{c}(\phi)$ *dans les trois mêmes cas que ci-dessus.*

(e) $\mathrm{c}(\psi) \leq \mathrm{c}(\phi)$ *si on peut aller de ψ à ϕ par un chemin positif — dans $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ ou $\mathcal{H}$ selon le cas.*

Démonstration. — (a) On traite le cas de $\mathcal{G}$ mais les autres sont identiques aux notations près. D'après la proposition 3.5-(c),

$$c(\phi) = c(\mu, L\phi) = -c(1, -L\phi)$$

donc il revient au même de montrer que $c(1, -L\phi) \leq 0$.

Soit $S\colon E \to \mathbf{R}$ une fonction quadratrice de $-L\phi$, où E est un fibré sur $\mathbf{S}^{2n+1} = \mathbf{R}^{2n+1} \cup \{q\}$. On note E_q la fibre au-dessus de q et on contemple le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathbf{S}^{2n}) & \longrightarrow & H^*(\{q\}) \\ {\scriptstyle \theta_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ H^*(E^0, E^{-\infty}) & \longrightarrow & H^*(E_q^0, E_o^{-\infty}) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales proviennent des inclusions. Comme q est hors du support de ϕ, la sous-variété $-L\phi$ coïncide avec la section nulle au-dessus d'un voisinage de q et $S \mid_{E_q}$ est une forme quadratique non dégénérée. Par suite, la flèche verticale de droite est un isomorphisme. Comme la flèche horizontale du haut envoie 1 sur 1, la classe $\theta_0(1)$ est non nulle donc $c(1, -L\phi) \leq 0$.

(b) Comme $L(\phi^{-1}) = -L\phi$, la propriété résulte directement de la proposition 3.5-(c).

(c) Dans les trois cas, la proposition 3.6 dit que, pour toute classe ν non nulle,

$$c(\nu, L\phi) = c(\nu, L(\psi \circ \phi) - L\psi).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} c(\phi) = c(\mu, L\phi) &= c(\mu \smile 1, L(\psi \circ \phi) - L\psi) \geq c(\mu, L(\psi \circ \phi)) + c(1, -L\psi) \\ &= c(\mu, L(\psi \circ \phi)) - c(\mu, L\psi) = c(\psi \circ \phi) - c(\phi) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(d) L'argument est le même que pour démontrer la proposition 3.6.

(e) Cette propriété découle directement de la proposition 3.4. □

Une conséquence des points (c) et (d) de cette proposition (voir le corollaire 3.7) est :

COROLLAIRE 3.10 ([**24**]). — *Pour tous $\phi, \psi \in \mathcal{G}'$,*

$$\lfloor c(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}) \rfloor = \lfloor c(\phi) \rfloor$$

$$\textit{et} \qquad \lfloor c(\psi \circ \phi) \rfloor \leq \lfloor c(\phi) \rfloor + \lfloor c(\psi) \rfloor + 1.$$

Une autre conséquence immédiate de la proposition ci-dessus est :

COROLLAIRE 3.11 ([**2, 30**]). — *Les groupes $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{H}$ ne contiennent aucun lacet positif non constant.*

Démonstration. — Sur un lacet positif (basé en ι), toute transformation ϕ est, de même que son inverse ϕ^{-1}, accessible depuis l'identité par un chemin négatif. Par suite, $\mathrm{c}(\phi) \leq 0$ et $\mathrm{c}(\phi^{-1}) \leq 0$. Comme ce sont des nombres positifs, $\mathrm{c}(\phi) = \mathrm{c}(\phi^{-1}) = 0$ et $\phi = \iota$. □

Ce corollaire assure que la relation $\preceq$ induit des ordres partiels sur $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{H}$. En fait, comme Viterbo et Bhupal l'ont vu, la proposition 3.9 permet de vérifier que la relation

$$\phi_0 \leqslant \phi_1 \quad \text{si et seulement si} \quad \mathrm{c}(\phi_0 \circ \phi_1^{-1}) = 0$$

définit des ordres partiels invariants (au sens de 1.C) sur $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{H}$.

On définit maintenant les groupes d'homologie associés par L. Traynor [**29**] aux transformations de $\mathcal{H}$ et par Sandon aux transformations de $\mathcal{G}'$.

Pour toute transformation ϕ dans $\mathcal{H}$ ou dans $\mathcal{G}'$, on note $\Sigma\phi$ l'ensemble des valeurs critiques des fonctions quadratrices de $L\phi$. On choisit une telle fonction quadratrice $S\colon E \to \mathbf{R}$, on note i l'indice de sa partie quadratique (à l'infini) et, pour $a < b \in]-\infty, \infty] \setminus \Sigma\phi$, on pose

$$\mathrm{SGH}^k(\phi; a, b) = \mathrm{H}_{k+i}(E^b, E^a) \qquad \text{si} \quad \phi \in \mathcal{H}$$

$$\text{et} \quad \mathrm{CGH}^k(\phi; a, b) = \mathrm{H}_{k+i}(E^b, E^a) \qquad \text{si} \quad \phi \in \mathcal{G}'.$$

Il résulte du théorème fondamental des fonctions quadratrices que ces groupes sont définis et ne dépendent pas du choix de S.

Le lecteur attentif pourra se demander pourquoi on introduit deux notations alors que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}'$ et que, d'après la remarque 3.8, les deux interprétations qu'on peut faire de la définition ci-dessus pour $\phi \in \mathcal{H}$ donnent le même résultat. La raison est dans la proposition suivante :

PROPOSITION 3.12 ([**24, 29**]). — *Soit $a < b \in]-\infty, \infty] \setminus \Sigma\phi$.*

(a) *Si $\phi \in \mathcal{H}$, toute transformation $\psi \in \mathcal{H}$ induit un isomorphisme*

$$\psi^*\colon \mathrm{SGH}^*(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}; a, b) \longrightarrow \mathrm{SGH}^*(\phi; a, b).$$

(b) *Si $\phi \in \mathcal{G}'$ et si a et b sont entiers, toute transformation $\psi \in \mathcal{G}'$ induit un isomorphisme*

$$\psi^*\colon \mathrm{CGH}^*(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}; a, b) \longrightarrow \mathrm{CGH}^*(\phi; a, b).$$

Démonstration. — Soit ψ_t, $t \in [0, 1]$, un chemin dans $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{G}'$ selon le cas entre $\psi_0 = \iota$ et $\psi = \psi_1$. On pose $\phi_t = \psi_t \circ \phi \circ \psi_t^{-1}$ et on se donne un chemin de fonctions quadratrices $S_t\colon E \to \mathbf{R}$ pour les plongements legendriens $L\phi_t$.

(a) Comme ψ_t est $\mathbf{R}$-équivariante, elle envoie les points translatés par ϕ sur les points translatés de la même quantité par ϕ_t donc le spectre $\Sigma\phi_t$ ne varie pas. D'autre part, comme les niveaux $\{S_t = a\}$ et $\{S_t = b\}$ sont réguliers à tout instant et ne

changent pas hors d'un compact, ils se déforment par isotopie et toute isotopie ambiante de E qui prolonge celle de ces niveaux induit le même isomorphisme

$$\mathrm{SGH}^*(\phi; a, b) = \mathrm{H}_{*+i}(E_0^b, E_0^a) \longrightarrow \mathrm{H}_{*+i}(E_1^b, E_1^a) = \mathrm{SGH}^*(\psi \circ \phi \circ \psi^{-1}; a, b),$$

à savoir l'inverse de l'isomorphisme ψ^* cherché.

(b) L'observation clé est la suivante : si $a \in \mathbf{Z}$ est une valeur régulière entière de $S = S_0$, c'est une valeur régulière de S_t pour tout t.

On suppose que a est valeur critique de S_{t_0} pour un certain $t_0 > 0$. Comme ϕ et ψ_t sont $\mathbf{Z}$-équivariants, ψ_t envoie tout point translaté d'un entier k par ϕ sur un point translaté de k par ϕ_t. La valeur critique a de $S - t_0$ détecte un point $\psi_{t_0}(q)$ translaté de a par ϕ_{t_0} et $\psi_t(q)$ est donc, pour tout t, un point translaté de a par ϕ_t. En particulier, q est translaté de a par ϕ donc a est valeur critique de S_0. □

D. Invariants des domaines

Le premier invariant qu'on décrit est la capacité de Viterbo [**30**] pour les domaines de $\mathbf{R}^{2n}$ et sa généralisation due à Sandon [**24**] pour les domaines de $\mathbf{R}^{2n+1} \times \mathbf{T}$.

Pour tout ouvert $U \subset \mathbf{R}^{2n}$, on note $\mathcal{H}(U)$ la composante neutre du sous-groupe de $\mathcal{H}$ formé des transformations dont le support se projette dans U. Les chemins dans $\mathcal{H}(U)$ relèvent ainsi les isotopies de $\mathbf{R}^{2n}$ engendrées par les hamiltoniens à support compact dans U. On pose alors

$$\mathrm{c}_v(U) = \sup\{\mathrm{c}(\phi),\ \phi \in \mathcal{H}(U)\}.$$

De même, pour tout ouvert $U \subset \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$, on note $\mathcal{G}'(U)$ la composante neutre du sous-groupe de $\mathcal{G}'$ formé des transformations dont le support se projette dans U et on pose

$$\mathrm{c}_s(U) = \sup\{\mathrm{c}(\phi),\ \phi \in \mathcal{G}'(U)\}.$$

Le lemme suivant montre que ces quantités sont finies sur les ouverts bornés :

LEMME 3.13. — (a) *Soit $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ un ouvert borné, $\phi \in \mathcal{H}(U)$ et $\psi \in \mathcal{H}$. Si $\psi(U)$ est disjoint de U,*

$$\mathrm{c}(\phi) \leq \mathrm{c}(\psi) + \mathrm{c}(\psi^{-1}).$$

(b) *Soit $U \subset \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ un ouvert borné, $\phi \in \mathcal{G}'(U)$ et $\psi \in \mathcal{G}'$. Si $\psi(U)$ est disjoint de U,*

$$\lfloor \mathrm{c}(\phi) \rfloor \leq \lfloor \mathrm{c}(\psi) \rfloor + \lfloor \mathrm{c}(\psi) \rfloor + 1.$$

Dans ce qui suit, on identifie parfois subrepticement U à sa préimage dans $\mathbf{R}^{2n+1}$.

Démonstration. — (a) Comme, d'après la proposition 3.9-(c),

$$\mathrm{c}(\phi) \leq \mathrm{c}(\psi \circ \phi) + \mathrm{c}(\psi^{-1}),$$

il suffit de montrer que $\mathrm{c}(\psi \circ \phi) = \mathrm{c}(\psi)$.

Soit $\phi_t \in \mathcal{H}(U)$ un chemin de $\phi_0 = \iota$ à $\phi_1 = \phi$ et q_t un point translaté par $\psi \circ \phi_t$ d'une quantité égale à la valeur critique $c_t = \mathrm{c}(\psi \circ \phi_t)$. Comme $\psi \circ \phi_t(U) \subset \psi(U)$ est disjoint de U, le point q_t n'est pas dans U. Par suite, q_t est un point fixe de ϕ_t (hors support) donc un point translaté par ψ. Il en résulte que c_t est, pour tout t, valeur critique des fonctions quadratrices de $L\psi$. Comme cet ensemble est totalement discontinu et que c_t varie continûment, $\mathrm{c}(\psi \circ \phi) = c_1 = c_0 = \mathrm{c}(\psi)$.

(b) Comme, d'après le corollaire 3.10,

$$\lfloor \mathrm{c}(\phi) \rfloor \leq \lfloor \mathrm{c}(\psi \circ \phi) \rfloor + \lfloor \mathrm{c}(\psi^{-1}) \rfloor,$$

il suffit de montrer encore que $\mathrm{c}(\psi \circ \phi) = \mathrm{c}(\psi)$ et l'argument est le même que plus haut. □

On admettra le résultat suivant (dont les deux premiers points sont évidents) qui dit que la fonction c_v définit une capacité au sens de Ekeland et Hofer pour les ouverts de $\mathbf{R}^{2n}$:

THÉORÈME 3.14 ([**30**]). — *La fonction* c_v *sur les ouverts de* $\mathbf{R}^{2n}$ *a les propriétés suivantes :*

- $\mathrm{c}_v(U) \leq \mathrm{c}_v(V)$ *si* $U \subset V$ *;*
- $\mathrm{c}_v\big(\psi(U)\big) = \lambda \mathrm{c}_v(U)$ *pour toute transformation* ψ *de* $\mathbf{R}^{2n}$ *qui dilate la forme symplectique par* λ *;*
- $\mathrm{c}_v\big(B^{2n}(1)\big) = \mathrm{c}_v\big(C^{2n}(1)\big) = 1$.

Le pendant de ce théorème pour les ouverts de $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ est :

THÉORÈME 3.15 ([**24**]). — *La fonction* c_s *sur les ouverts de* $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ *a les propriétés suivantes :*

- $\mathrm{c}_s(U) \leq \mathrm{c}_s(V)$ *si* $U \subset V$ *;*
- $\mathrm{c}_s\big(\psi(U)\big) = \mathrm{c}_s(U)$ *pour toute transformation de contact* ψ *de* $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ *;*
- $\mathrm{c}_s(U \times \mathbf{T}) = \lfloor \mathrm{c}_v(U) \rfloor$ *pour tout ouvert* U *de* $\mathbf{R}^{2n}$.

Démonstration. — La première propriété est évidente et la deuxième découle du corollaire 3.10. Quant à la troisième, elle résulte d'une part de l'inclusion de $\mathcal{H}(U)$ dans $\mathcal{G}'(U \times \mathbf{T})$ et d'autre part du point (e) de la proposition 3.9. □

Le théorème de Sandon ci-dessus implique immédiatement le théorème 1.2-(b) :

COROLLAIRE 3.16 ([**12, 24**]). — *Si* $r_2 \leq k \leq r_1$ *pour un certain entier* k*, aucune transformation de contact de* $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ *n'envoie* $\operatorname{Adh} B(r_1) \times \mathbf{T}$ *dans* $B(r_2) \times \mathbf{T}$.

Pour finir, on explique comment Traynor [**29**] et Sandon [**24**] associent des groupes de cohomologie pour les domaines respectivement de $\mathbf{R}^{2n}$ et $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$.

Pour tout domaine $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ et tous $a < b \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, soit $\mathcal{H}(U; a, b)$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}(U)$ composé des transformations dont les fonctions quadratrices ont a et b comme valeurs régulières. Pour $\phi_0, \phi_1 \in \mathcal{H}(U; a, b)$ tels que $\phi_0 \preceq \phi_1$, la proposition 3.4 montre que les plongements legendriens $L\phi_0, L\phi_1$ ont des fonctions quadratrices respectives $S_0, S_1 \colon E \to \mathbf{R}$ vérifiant $S_0 \leq S_1$. Il en résulte des inclusions entre les sous-niveaux — à savoir que $E_1^a \subset E_0^a$ et $E_1^b \subset E_0^b$ — et un homomorphisme

$$\mathrm{SGH}^*(\phi_1; a, b) \longrightarrow \mathrm{SGH}^*(\phi_0; a, b).$$

Les homomorphismes de ce type ont une fonctorialité manifeste qui fait des groupes $\mathrm{SGH}^*(\phi; a, b)$, $\phi \in \big(\mathcal{H}(U; a, b), \preceq\big)$ un système projectif. On définit alors $\mathrm{SGH}^*(U; a, b)$ comme la limite projective de ce système :

$$\mathrm{SGH}^*(U; a, b) = \varprojlim_{\phi} \mathrm{SGH}^*(\phi; a, b).$$

Clairement, toute transformation hamiltonienne ψ de $\mathbf{R}^{2n}$ induit un isomorphisme

$$\psi^* \colon \mathrm{SGH}^*(\psi(U); a, b) \longrightarrow \mathrm{SGH}^*(U; a, b),$$

tout sous-domaine $U' \subset U$ hérite d'un homomorphisme

$$\mathrm{SGH}^*(U; a, b) \longrightarrow \mathrm{SGH}^*(U'; a, b)$$

et tous ces morphismes se comportent fonctoriellement.

Pour tout domaine $U \subset \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ et tous $a < b \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$, le même discours fournit un système projectif de groupes $\mathrm{CGH}^*(\phi; a, b)$, $\phi \in \big(\mathcal{G}(U; a, b), \preceq\big)$, et un groupe

$$\mathrm{CGH}^*(U; a, b) = \varprojlim_{\phi} \mathrm{CGH}^*(\phi; a, b).$$

Toute transformation ψ de $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ qui est le temps 1 d'une isotopie de contact induit un isomorphisme

$$\psi^* \colon \mathrm{CGH}^*(\psi(U); a, b) \longrightarrow \mathrm{CGH}^*(U; a, b),$$

tout sous-domaine $U' \subset U$ hérite d'un homomorphisme

$$\mathrm{CGH}^*(U; a, b) \longrightarrow \mathrm{CGH}^*(U'; a, b)$$

et ces morphismes se comportent à nouveau fonctoriellement. En outre :

PROPOSITION 3.17 ([**24**]). — *Soit $a < b \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$. Pour tout domaine U de $\mathbf{R}^{2n}$, il y a un isomorphisme*

$$\mathrm{CGH}(U \times \mathbf{T}; a, b) \longrightarrow \mathrm{SGH}^*(U; a, b)$$

qui se comporte fonctoriellement vis-à-vis des morphismes induits par les inclusions et les transformations hamiltoniennes.

Exemple 3.18 ([**29**]). — Traynor a calculé les groupes SGH^* à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$ pour les ellipsoïdes de $\mathbf{R}^{2n}$. Pour $a > 0$ et $j = 2mn$, $m \geq 1$, elle obtient par exemple :

$$\mathrm{SGH}^j(B(r); a, \infty) = \begin{cases} \mathbf{Z}_2 & \text{si } a/m < r < a/(m-1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier,

$$\mathrm{SGH}^{2n}(B(r); a, \infty) = \begin{cases} \mathbf{Z}_2 & \text{si } r > a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour toutes les autres valeurs de j, le groupe $\mathrm{SGH}^j(B(r); a, \infty)$ est nul. En outre, pour $a/m < r_2 < r_1 \leq a/(m-1)$, l'homomorphisme

$$\mathrm{SGH}^j(B(r_1); a, \infty) \longrightarrow \mathrm{SGH}^j(B(r_2); a, \infty)$$

induit par l'inclusion $B(r_2) \subset B(r_1)$ est un isomorphisme.

Pour terminer, on démontre le théorème 1.4 en suivant [**24**].

Démonstration. — Soit $r_0, r_1, r_2 > 0$ tels que $r_2 \leq k/m < r_1 < r_0 < k/(m-1)$. On suppose qu'il existe une transformation de contact ϕ de $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{T}$ qui envoie $\widehat{B}(r_1)$ dans $\widehat{B}(r_2)$ et qui préserve $\widehat{B}(r_0)$. On regarde alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{CGH}^j(\widehat{B}(r_0); k, \infty) & \longrightarrow & \mathrm{CGH}^j(\widehat{B}(r_1); k, \infty) & & \\ \uparrow{\scriptstyle \phi^*} & & & \nwarrow{\scriptstyle \phi^*} & \\ \mathrm{CGH}^j(\widehat{B}(r_0); k, \infty) & \longrightarrow & \mathrm{CGH}^j(\widehat{B}(r_2); k, \infty) & \longrightarrow & \mathrm{CGH}^j(\phi(\widehat{B}(r_1)); k, \infty). \end{array}$$

Comme dans l'exemple ci-dessus, on regarde la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}_2$ en degré $j = 2mn$.

$$\mathrm{CGH}^j(\widehat{B}(r_2); k, \infty) = 0, \quad \mathrm{CGH}^j(\widehat{B}(r_1); k, \infty) = \mathrm{CGH}^j(\widehat{B}(r_0); k, \infty) = \mathbf{Z}_2$$

et la flèche horizontale du haut est un isomorphisme. Le diagramme donne alors la contradiction voulue. □

Remerciements

Je remercie Hélène Eynard-Bontemps, Patrick Massot et Jean-Yves Welschinger pour leur relecture attentive de ce texte. Je remercie le second aussi pour avoir réalisé la figure et m'avoir signalé promptement la parution sur arXiv du joli article de Sheila Sandon, à qui j'exprime d'ailleurs ma gratitude dans la mesure où elle a facilité ma tâche.

RÉFÉRENCES

[1] G. BEN SIMON & T. HARTNICK – Reconstructing quasimorphisms from the associated partial order and a question of Polterovich, prépublication arXiv:0811.2608, 2008.

[2] M. BHUPAL – A partial order on the group of contactomorphisms of $\mathbb{R}^{2n+1}$ via generating functions, *Turkish J. Math.* **25** (2001), p. 125–135.

[3] M. CHAPERON – Une idée du type « géodésiques brisées » pour les systèmes hamiltoniens, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **298** (1984), p. 293–296.

[4] ———, On generating families, in *The Floer memorial volume*, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, 1995, p. 283–296.

[5] Y. V. CHEKANOV – Critical points of quasifunctions, and generating families of Legendrian manifolds, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **30** (1996), p. 56–69; traduction anglaise : *Funct. Anal. Appl.* **30** (1996), p. 118–128.

[6] V. CHERNOV & S. NEMIROVSKI – Non-negative Legendrian isotopy in ST^*M, prépublication arXiv:0905.0983.

[7] K. CIELIEBAK, A. FLOER & H. HOFER – Symplectic homology. II. A general construction, *Math. Z.* **218** (1995), p. 103–122.

[8] V. COLIN, E. FERRAND & P. PUSHKAR – Positive isotopies of Legendrian submanifolds, texte non publié.

[9] Y. ELIASHBERG – New invariants of open symplectic and contact manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), p. 513–520.

[10] ———, Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **42** (1992), p. 165–192.

[11] Y. ELIASHBERG, A. GIVENTAL & H. HOFER – Introduction to symplectic field theory, *Geom. Funct. Anal.* Special Volume, Part II (2000), p. 560–673.

[12] Y. ELIASHBERG, S. S. KIM & L. POLTEROVICH – Geometry of contact transformations and domains : orderability versus squeezing, *Geom. Topol.* **10** (2006), p. 1635–1747.

[13] Y. ELIASHBERG & L. POLTEROVICH – Partially ordered groups and geometry of contact transformations, *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), p. 1448–1476.

[14] A. FLOER & H. HOFER – Symplectic homology. I. Open sets in $\mathbf{C}^n$, *Math. Z.* **215** (1994), p. 37–88.

[15] E. GIROUX – Topologie de contact en dimension 3 (autour des travaux de Yakov Eliashberg), Séminaire Bourbaki, vol. 1992/93, exposé n° 760, *Astérisque* **216** (1993), p. 7–33.

[16] M. GROMOV – Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985), p. 307–347.

[17] A. E. HATCHER – A proof of the Smale conjecture, $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq \mathrm{O}(4)$, *Ann. of Math.* **117** (1983), p. 553–607.

[18] J. HILGERT & K.-H. NEEB – *Lie semigroups and their applications*, Lecture Notes in Math., vol. 1552, Springer, 1993.

[19] L. HÖRMANDER – Fourier integral operators. I, *Acta Math.* **127** (1971), p. 79–183.

[20] F. LAUDENBACH – Les 2-sphères de $\mathbb{R}^3$ vues par A. Hatcher et la conjecture de Smale $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^3) \sim \mathrm{O}(4)$, Séminaire Bourbaki, vol. 1983/84, exposé n° 629, *Astérisque* **121-122** (1985), p. 279–293.

[21] F. LAUDENBACH & J.-C. SIKORAV – Persistance d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent, *Invent. Math.* **82** (1985), p. 349–357.

[22] G. I. OL'SHANSKIĬ – Invariant orderings in simple Lie groups. Solution of a problem of È. B. Vinberg, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **16** (1982), p. 80–81 ; traduction anglaise : *Funct. Anal. Appl.* **16** (1982), p. 311–315.

[23] L. POLTEROVICH – Geometry on the group of Hamiltonian diffeomorphisms, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin 1998)*, vol. II, 1998, p. 401–410.

[24] S. SANDON – Contact homology, capacity and non-squeezing in $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{S}^1$ via generating functions, prépublication arXiv:0901.3112, 2009.

[25] J.-C. SIKORAV – Sur les immersions lagrangiennes dans un fibré cotangent admettant une phase génératrice globale, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **302** (1986), p. 119–122.

[26] ———, Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne, *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), p. 62–73.

[27] ———, Rigidité symplectique dans le cotangent de T^n, *Duke Math. J.* **59** (1989), p. 759–763.

[28] D. THÉRET – A complete proof of Viterbo's uniqueness theorem on generating functions, *Topology Appl.* **96** (1999), p. 249–266.

[29] L. TRAYNOR – Symplectic homology via generating functions, *Geom. Funct. Anal.* **4** (1994), p. 718–748.

[30] C. VITERBO – Symplectic topology as the geometry of generating functions, *Math. Ann.* **292** (1992), p. 685–710.

[31] ———, Generating functions, symplectic geometry, and applications, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994)*, Birkhäuser, 1995, p. 537–547.

[32] ———, Functors and computations in Floer homology with applications. II, prépublication, 1996.

[33] ———, Functors and computations in Floer homology with applications. I, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), p. 985–1033.

Emmanuel GIROUX

École normale supérieure de Lyon
UMPA – UMR CNRS 5669
46, allée d'Italie
F–69364 LYON Cedex 07
E-mail : Emmanuel.Giroux@umpa.ens-lyon.fr