Astérisque

AST

Représentations p-adiques de groupes p-adiques III : méthodes globales et géométriques - Pages préliminaires

Astérisque, tome 331 (2010), p. I-XI

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__331__R1_0>

© Société mathématique de France, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

331

ASTÉRISQUE

2010

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES DE GROUPES p-ADIQUES III : MÉTHODES GLOBALES ET GÉOMÉTRIQUES

Laurent BERGER, Christophe BREUIL & Pierre COLMEZ, éditeurs

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Laurent Berger
Université de Lyon, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France
laurent.berger@umpa.ens-lyon.fr

Christophe Breuil
CNRS & IHÉS, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
breuil@ihes.fr

Pierre Colmez
CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
colmez@math.jussieu.fr

***Classification mathématique par sujet* (2000).** — 11F**, 11S**.

Mots-clefs. — Correspondance de Langlands locale, (φ, Γ)-modules, anneaux de Fontaine, représentations unitaires.

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES DE GROUPES p-ADIQUES III : MÉTHODES GLOBALES ET GÉOMÉTRIQUES

Laurent BERGER, Christophe BREUIL & Pierre COLMEZ, éditeurs

Résumé. — Dans ce dernier volume sur la correspondance locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sont rassemblés des articles qui, pour la plupart, n'utilisent pas de façon directe la théorie des (ϕ, Γ)-modules. Les méthodes et résultats sont souvent soit géométriques (théorèmes de comparaison p-adiques, cohomologie de de Rham du demi-plan de Drinfeld), soit globaux (compatibilité local-global avec la cohomologie étale complétée). On y trouve aussi des articles de théorie de Hodge p-adique sur l'invariant $\mathscr{L}$ et des résultats locaux importants sur les extensions entre certaines représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Abstract **(p-adic representations of p-adic groups III : Global and geometrical methods)**
In this last volume on the local p-adic correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, we have gathered papers which, mostly, do not use directly the (ϕ, Γ)-module theory. The methods and results are often geometric (p-adic comparison theorems, de Rham cohomology of the Drinfeld half-plane), or global (local-glocal compatibility with étale completed cohomology). There are also papers on p-adic Hodge theory and the $\mathscr{L}$-invariant and important local results on extensions between certain representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

© Astérisque 331, SMF 2010

TABLE DES MATIÈRES

Glenn Stevens — ***Coleman's $\mathscr{L}$-invariant and families of modular forms*** 1

Statement of results 1
1. The Gauss-Manin connection with Frobenius structure 3
2. Coleman's $\mathscr{L}$-invariant. 4
3. Families of modular forms 6
4. Some Pairings 8
5. Proof of Theorem B 9
References 11

Pierre Colmez — ***Invariants $\mathscr{L}$ et dérivées de valeurs propres de Frobenius*** 13

Introduction 13
0.1. Invariants $\mathscr{L}$ de formes modulaires 13
0.2. Familles analytiques de représentations galoisiennes de dimension 2 . 15
1. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine 17
1.1. Anneaux de Fontaine 17
1.2. Cohomologie galoisienne 17
1.3. Le module U_1 et son H^1 17
2. E-(φ, N)-modules filtrés 18
2.1. Définitions et rappels 18
1. E-(φ, N)-modules 18
2. Filtrations 18
3. E-(φ, N)-modules filtrés 19
3. La représentation $W_{\mathscr{L},i}$ 19
3.1. E-(φ, N)-modules filtrés admissibles de dimension 2 19
3.2. Le E-(φ, N)-module filtré $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ 20
3.3. Le module $\mathrm{Hom}(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$ 20
4. La représentation $W_{\mathscr{L},1}$ et sa cohomologie galoisienne 21
4.1. Éléments de théorie du corps de classes locale 21
4.2. La représentation $W_{\mathscr{L},1}$ 22

5. Cohomologie galoisienne de $W_{\mathscr{L},i}$ 23
6. Démonstration du résultat principal 24
Références 26

Massimo Bertolini, Henri Darmon & Adrian Iovita — ***Families of automorphic forms on definite quaternion algebras and Teitelbaum's conjecture*** 29

Introduction 29
1. Automorphic forms on quaternion algebras 33
2. Teitelbaum's L-invariant 36
3. Families of automorphic forms on B 39
4. A geometric interpretation of p-adic families of automorphic forms 44
5. Orton's $\mathscr{L}$-invariant 53
6. Distribution-valued modular symbols 58
References 63

Christophe Breuil — ***Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée*** 65

1. Introduction et notations 65
   1.1. Introduction 65
   Remerciements 71
   1.2. Notations 71
2. Cohomologies étales complétées, Banach p-adiques et symboles modulaires 73
   2.1. Cohomologies étales complétées 73
   2.2. Les Banach $\widehat{\pi}_p(f)$ 75
   2.3. Cohomologie et symboles modulaires 78
   2.4. Banach p-adiques et symboles modulaires 83
3. Espaces de distributions, invariant $\mathscr{L}$ et Banach p-adiques 86
   3.1. Rappels sur les espaces $O(k)^{\mathrm{b}}$, $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ de [4] et les Banach associés 86
   3.2. Une formulation plus concrète de $O(k)^{\mathrm{b}}$ et $B(k)$ 88
   3.3. Une formulation plus concrète de $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ et $B(k,\mathscr{L})$ 92
4. Arbre de Bruhat-Tits, symboles modulaires et invariant $\mathscr{L}$ 96
   4.1. Quelques rappels classiques 96
   4.2. Arbre de Bruhat-Tits et symboles modulaires 98
   4.3. Espaces de distributions et symboles modulaires 101
   4.4. 1-cocycles et symboles modulaires 102
   4.5. Invariant $\mathscr{L}$ et symboles modulaires 104
5. Applications 107
   5.1. Applications à la cohomologie étale complétée 107
   5.2. Applications aux distributions p-adiques de Mazur, Tate et Teitelbaum 110
Références 114

Christophe Breuil & Ariane Mézard — *Représentations semi-stables de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, *demi-plan p-adique et réduction modulo p* 117

1. Introduction et notations 117
   1.1. Introduction 117
   1.2. Notations 120
2. Préliminaires 122
   2.1. Rappels sur les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentations $B(k)^*$ et $B(k,\mathscr{L})^*$ 122
   2.2. Rappels sur le modèle formel semi-stable de $\mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$ 123
   2.3. Rappels sur les résultats de Teitelbaum 124
3. Définition des faisceaux 127
   3.1. Les faisceaux $\omega(k,\mathscr{L})$ et $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})$ 127
   3.2. Les faisceaux $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C$ et $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P$ 133
4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ pour $\mathrm{val}(\mathscr{L})\geq 0$ 134
   4.1. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $\sigma(n_k,1)$ 135
   4.2. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_{\mathbb{P}^1})$ 136
   4.3. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^1(\mathbb{P}^1,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_{\mathbb{P}^1})$ 139
   4.4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ 142
5. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$ pour $\mathrm{val}(\mathscr{L})\geq 0$ 147
   5.1. Cohomologie de Čech 147
   5.2. Modifications de sections 148
   5.3. Défauts de recollement 152
   5.4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$ 155

Appendice A. Calculs de sections 159
   A.1. Calculs combinatoires 159
   A.2. Calculs de sections modulo p 160
   A.3. Calculs de sections modulo p^2 168

Appendice B. Calculs de Čech 173
   B.1. Calculs de résidus 173
   B.2. Calculs de classes de cohomologie 174

Références 177

Robert Coleman & Adrian Iovita — *Hidden structures on semistable curves* 179

1. Introduction 179
   Acknowledgements 183
2. Definitions of the operators 184
   2.1. The definition via degeneration 184
   2.2. The definition via p-adic integration 186
3. F-Isocrystals 189
   3.1. Formal schemes, rigid analytic spaces and weak completions 189
      3.1.1. The functor rig 189

3.1.2. Formal models 190
3.1.3. Fibrations and rigid analytic Poincaré lemmas 193
3.1.4. Weakly Complete Algebras 194
3.2. The geometry of the family 198
3.3. Isocrystals 201
3.4. Cohomology of an F-isocrystal 204
3.4.1. 204
3.4.2. 204
3.4.3. 205
3.4.4. 207
3.4.5. 207
3.5. Hypercocycles and Mayer-Vietoris exact sequences 208
3.5.1. 3.5.1Coverings and Graphs 208
3.5.2. Hypercocycles and Mayer-Vietoris exact sequences attached to a covering 209
3.5.3. Examples of coverings in our setting 210
3.5.4. Changing coverings 211
4. The Monodromy Operators 216
4.1. The global residue 216
4.2. The proof of the equality of the monodromy operators 220
5. Frobenii 222
5.1. Frobenius and K_0-structures on $H^{i,j}(\mathscr{C}_s, \mathscr{E}_s)$ 222
5.2. F-isocrystals 227
5.3. Lifts of Frobenius 231
The description of the Frobenius $\Phi_1^f : \psi^* \mathbb{H}_{B^2} \longrightarrow \mathbb{H}_{B^1}$ 234
5.4. Integration 235
5.5. The Frobenius Operators 236
6. Logarithmic F-isocrystals 243
6.1. Convergent log F-isocrystals 246
7. Applications 249
7.1. The proof of Theorem 1.1 249
7.2. Gysin sequences 251
References 253

Christophe Breuil & Matthew Emerton — ***Représentations p-adiques ordinaires de*** $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ***et compatibilité local-global*** . 255

1. Introduction et notations 255
2. Représentations ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 261
3. La conjecture de compatibilité local-global 270
4. Formes compagnons surconvergentes 279
5. Les résultats principaux 292
Appendice A. Preuve de la proposition 2.1.4 306

Références 313

Vytautas Paškūnas — ***Extensions for supersingular representations of*** $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 317
1. Introduction 317
Acknowledgements 320
2. Notation 320
3. Irreducible representations of K 321
4. Irreducible representations of G 322
4.1. Supersingular representations 323
5. Extensions 326
6. Exact sequence 328
7. Computing $H^1(I_1/Z_1, \pi)$ 331
7.1. $p = 3$ 334
7.2. 336
8. Extensions and central characters 338
9. Hecke Algebra 339
10. Main result 343
11. Non-supersingular representations 347
Appendix A. Lower bound on $\dim \mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)$ 349
References 352

Matthew Emerton — ***Ordinary parts of admissible representations of*** p***-adic reductive groups I. Definition and first properties*** 355
1. Introduction 355
1.1. Arrangement of the paper 356
1.2. Notation and terminology 356
1.3. Acknowledgments 357
2. Representations of p-adic analytic groups 357
2.1. Augmented G-representations 357
2.2. Smooth G-representations 359
2.3. Some finiteness conditions 363
2.4. ϖ-adically admissible G-representations 366
3. Ordinary parts 370
3.1. The definition of Ord_P 370
3.2. Some elementary properties of Ord_P 376
3.3. Preservation of admissibility 378
3.4. Extension to the case of ϖ-adically complete representations 380
4. Adjunction formulas 383
4.1. Parabolic induction 383
4.2. A simple adjunction formula 388
4.3. Ordinary parts of parabolically induced representations 390
4.4. The main adjunction formula 392

Appendix A. Functional analysis 397
References 401

Matthew Emerton — ***Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups II. Derived functors*** 403
1. Introduction 403
   1.1. Arrangement of the paper 404
   1.2. Notation and terminology 404
   Acknowledgments 404
2. Injective and acyclic objects 405
   2.1. Injective objects 405
   2.2. Continuous cohomology as derived functors 408
3. The δ-functor $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$ 410
   3.1. Some properties of Z_M 410
   3.2. A review of the functor Ord_P 412
   3.3. The definition of $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$ 414
   3.4. The main theorem 416
   3.5. Some properties of $H^\bullet(N_0, -)$ 421
   3.6. An application to Jacquet modules 426
   3.7. The relation to derived functors 429
4. The case of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 431
   4.1. Absolutely irreducible representations 431
   4.2. Computations of $H^\bullet \mathrm{Ord}_P(V)$ 435
   4.3. Extension computations 438
Appendix A. 449
   A.1. 450
   A.2. 456
References 458

Matthew Emerton & Vytautas Paškūnas — ***On the effaceability of certain δ-functors*** 461
1. Introduction 461
2. Injectives 462
3. Main result 464
References 469

Nous dédions ces trois volumes de
représentations p-adiques de groupes p-adiques
à Jean-Marc Fontaine.
Son œuvre a inspiré la plupart
des questions qui y sont abordées.

Les éditeurs : Laurent Berger, Christophe Breuil et Pierre Colmez.