

# Astérisque

AST

**Représentations  $p$ -adiques de groupes  $p$ -adiques  
II : Représentations de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $(\varphi, \Gamma)$ -modules  
- Pages préliminaires**

*Astérisque*, tome 330 (2010), p. I-XVII

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_2010\\_\\_330\\_\\_R1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__330__R1_0)

© Société mathématique de France, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

330

ASTÉRISQUE

2010

REPRÉSENTATIONS  $p$ -ADIQUES  
DE GROUPES  $p$ -ADIQUES II :  
REPRÉSENTATIONS DE  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$   
ET  $(\varphi, \Gamma)$ -MODULES

Laurent BERGER, Christophe BREUIL & Pierre COLMEZ, éditeurs

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Laurent Berger*

Université de Lyon, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France  
laurent.berger@umpa.ens-lyon.fr

*Christophe Breuil*

CNRS & IHÉS, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France  
breuil@ihes.fr

*Pierre Colmez*

CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France  
colmez@math.jussieu.fr

---

*Classification mathématique par sujet (2000).* — 11F\*\*, 11S\*\*.

*Mots-clefs.* — Correspondance de Langlands locale,  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, anneaux de Fontaine, représentations unitaires.

**REPRÉSENTATIONS  $p$ -ADIQUES  
DE GROUPES  $p$ -ADIQUES II :  
REPRÉSENTATIONS DE  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$   
ET  $(\varphi, \Gamma)$ -MODULES**

Laurent BERGER, Christophe BREUIL & Pierre COLMEZ, éditeurs

**Résumé.** — Ce second volume est consacré aux applications de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de Fontaine à celle des représentations  $p$ -adiques unitaires de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ , en vue de l'établissement d'une correspondance (de Langlands locale  $p$ -adique) entre ces représentations et les représentations  $p$ -adiques de dimension 2 du groupe de Galois absolu de  $\mathbf{Q}_p$ . Le lecteur y trouvera un exposé de l'analyse fonctionnelle  $p$ -adique classique, divers aspects de la série principale unitaire de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  et la construction de foncteurs permettant de passer du monde des représentations galoisiennes à celui des représentations de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  et de son sous-groupe mirabolique.

**Abstract ( $p$ -adic representations of  $p$ -adic groups II : Representations of  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  and  $(\varphi, \Gamma)$ -modules)**

This second volume is devoted to applications of Fontaine's theory of  $(\varphi, \Gamma)$ -modules to that of  $p$ -adic unitary representations of  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ , whose aim is to construct a ( $p$ -adic local Langlands) correspondence between these representations and 2-dimensional  $p$ -adic representations of the absolute Galois group of  $\mathbf{Q}_p$ . The reader will find in it an overview of classical  $p$ -adic functional analysis, diverse features of the unitary principal series of  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ , and the construction of functors building bridges between the world of Galois representations and that of representations of  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  and its mirabolic subgroup.



## TABLE DES MATIÈRES

<b>Pierre Colmez — <i>Introduction</i></b> .....	xix
Fonctions $L$ $p$ -adiques et représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	xix
La série principale .....	xx
Les foncteurs $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ et $V \mapsto \Pi(V)$ .....	xx
Références .....	xxii
<b>Marie-France Vigneras — <i>Banach <math>\ell</math>-adic representations of <math>p</math>-adic groups</i></b> .....	1
<b>Pierre Colmez — <i>Fonctions d'une variable <math>p</math>-adique</i></b> .....	13
Introduction .....	13
I. Espaces fonctionnels $p$ -adiques .....	14
I.1. Espaces de Banach $p$ -adiques .....	14
1. $L$ -banach .....	14
2. Bases orthonormales et bases de Banach .....	15
3. Le dual d'un $L$ -banach .....	16
4. Produit tensoriel de $L$ -banach .....	17
I.2. Fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$ .....	18
1. Polynômes binomiaux .....	18
2. Coefficients de Mahler des fonctions continues .....	19
I.3. Décomposition en ondelettes des fonctions continues .....	20
1. Fonctions localement constantes et fonctions continues .....	20
2. Coefficients de Mahler des fonctions localement constantes .....	21
3. Coefficients d'amplitude des fonctions localement constantes .....	23
I.4. Fonctions localement analytiques .....	24
1. Fonctions analytiques sur un disque fermé .....	24
2. Fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$ .....	25
3. Coefficients de Mahler des fonctions localement analytiques .....	26
4. Démonstration du lemme I.4.9 .....	28
I.5. Fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ .....	29
1. Fonctions dérivables et fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ .....	29

2. Propriétés locales des fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ .....	30
3. Fonctions localement analytiques et fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ .....	31
4. Coefficients d'amplitude des fonctions localement polynomiales .....	32
5. Décomposition en vaguelettes des fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ .....	34
6. Coefficients de Mahler des fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ .....	36
I.6. Propriétés locales des caractères de $\mathbf{Q}_p^*$ .....	38
II. Duaux .....	40
II.1. L'anneau $\mathcal{R}^+$ et certains de ses sous-espaces .....	40
II.2. Distributions continues .....	41
II.3. Distributions tempérées et mesures .....	42
1. Transformées d'Amice des distributions tempérées .....	42
2. Mesures .....	43
3. Distributions tempérées et sommes de Riemann .....	43
4. Autres valuations naturelles sur $\mathcal{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$ .....	45
II.4. Opérations sur les distributions .....	46
1. Masses de Dirac .....	46
2. Multiplication par une fonction .....	46
3. Restriction à un ouvert compact .....	46
4. Dérivée d'une distribution .....	47
5. Actions de $\mathbf{Z}_p^*$ , $\varphi$ et $\psi$ .....	47
6. Convolution des distributions .....	48
7. Distributions à support ponctuel .....	49
II.5. Distributions sur $\mathbf{Q}_p$ .....	50
1. Distributions sur $\mathbf{Q}_p$ et familles de distributions sur $\mathbf{Z}_p$ .....	50
2. Action du sous-groupe mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	50
3. Distributions tempérées sur $\mathbf{Q}_p$ .....	51
4. Vecteurs propres pour l'action de $\psi$ .....	51
II.6. Distributions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ .....	52
1. Conditions de croissance à l'infini .....	52
2. Estimées préliminaires .....	53
3. Prolongement à $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ de distributions sur $\mathbf{Q}_p$ .....	54
4. Restriction à $\mathbf{Q}_p$ de distributions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ .....	55
Références .....	58
<b>Pierre Colmez</b> — <i><math>(\varphi, \Gamma)</math>-modules et représentations du mirabolique de <math>\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)</math></i> .....	61
Introduction .....	61
Notations générales .....	61
Cadre général .....	62
Les foncteurs $D \mapsto D^{\natural}$ et $D \mapsto D^{\sharp}$ .....	62
Construction de représentations du mirabolique .....	65
Un quasi-inverse du foncteur $D \mapsto D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	66

Opérations analytiques sur les $(\varphi, \Gamma)$ -modules et lois de réciprocité explicites .....	68
I. $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	69
I.1. $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ -modules de type fini .....	69
1. Réseaux et treillis .....	69
2. Morphismes de $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ -modules .....	71
I.2. $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales .....	72
1. Catégories de $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	72
2. Le dual de Tate d'un $(\varphi, \Gamma)$ -module .....	73
3. Résidus .....	74
4. Dual de Tate et dual topologique .....	75
5. Orthogonalité et treillis .....	76
II. Les foncteurs $D \mapsto D^{\sharp}$ et $D \mapsto D^{\natural}$ .....	77
II.1. L'équivalence de catégories de Fontaine .....	78
II.2. L'action de $\varphi$ .....	79
1. Les modules $D^+$ , $D^{++}$ et $D^{\text{nr}}$ .....	79
2. Polynômes en $\varphi$ .....	82
II.3. L'opérateur $\psi$ .....	83
1. Définition .....	83
2. $\psi$ comme adjoint de $\varphi$ .....	83
3. $(\varphi, \Gamma)$ -modules et $(\psi, \Gamma)$ -modules .....	84
II.4. Le module $D^{\sharp}$ .....	85
II.5. Le module $D^{\natural}$ .....	88
1. La dualité entre $D/P(\psi)D$ et $\check{D}^{P(\varphi)=0}$ .....	88
2. Le foncteur $D \mapsto D^{\natural}$ .....	91
3. Dualité .....	94
4. L'application rés <sub>0</sub> : $D \rightarrow D^{\sharp}/D^{\natural}$ .....	95
II.6. Une autre construction de $D^{\natural}$ et $D^{\sharp}$ .....	96
II.7. Surconvergence de $D^{\sharp}$ .....	98
III. Les foncteurs $D \mapsto D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	100
III.1. Construction de représentations du mirabolique .....	100
1. $(P(\mathbf{Z}_p), \psi)$ -modules et représentations de $P(\mathbf{Q}_p)$ .....	100
2. $(P(\mathbf{Z}_p), \varphi, \psi)$ -modules et restriction à un ouvert compact .....	102
3. Les applications $\text{Res}_U$ sur $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et les modules $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ et $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\text{pc}}$ .....	105
III.2. Les $P(\mathbf{Q}_p)$ -modules $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ , $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	106
1. Définition .....	106
2. Dualité .....	108
III.3. Le foncteur $D \mapsto D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	109
1. Lien entre $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	109
2. Exactitude du foncteur $D \mapsto D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	109
3. Les sous- $P(\mathbf{Q}_p)$ -modules de $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	110
III.4. Le $\Gamma$ -module $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ .....	112

1. Action de $\Gamma$ sur $D$ .....	112
2. L'action de $\Gamma$ sur $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ .....	114
IV. Un quasi-inverse du foncteur $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	117
IV.1. Le foncteur $D \mapsto \widetilde{D}$ .....	117
1. Une variante de l'équivalence de catégories de Fontaine .....	117
2. $\widetilde{D}$ vu comme sous- $P(\mathbf{Q}_p)$ -module de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ . .....	119
IV.2. Le foncteur $D \mapsto \widetilde{D}^+$ .....	120
1. Les sous-modules $\widetilde{D}^+$ et $\widetilde{D}^{++}$ de $\widetilde{D}$ .....	121
2. L'inclusion de $\widetilde{D}^+$ dans $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	122
3. Caractérisation algébrique du sous- $P(\mathbf{Q}_p)$ -module $\widetilde{D}^+$ de $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	122
IV.3. Extension du dictionnaire d'analyse fonctionnelle à $\mathbf{Q}_p$ .....	124
1. Mesures nulles à l'infini .....	124
2. Dualité .....	125
IV.4. Le foncteur $M \mapsto M_{\text{apc}}$ .....	126
1. $\mathcal{O}_L[P(\mathbf{Q}_p)]$ -modules compacts et $\mathcal{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathcal{O}_L)_{\text{pc}}$ -modules. ....	126
2. $\mathcal{O}_L[P(\mathbf{Q}_p)]$ -modules admissibles .....	126
IV.5. Le $P(\mathbf{Q}_p)$ -module $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ et son dual .....	128
1. Considérations topologiques .....	128
2. Dualité .....	129
3. L'application rés <sub>0</sub> : $D \boxtimes \mathbf{Q}_p \rightarrow D^\natural/D^\natural$ .....	130
V. Opérations analytiques sur les $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	131
V.1. Image directe par un difféomorphisme local .....	131
1. Le théorème d'inversion locale .....	131
2. Le cas d'un difféomorphisme local de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Z}_p$ .....	132
3. Le cas général .....	134
4. L'image directe d'une composée .....	136
V.2. Multiplication par une fonction continue .....	137
1. Généralités .....	137
2. Multiplication par $x$ et dérivation .....	139
V.3. Dualité .....	141
V.4. Convolution multiplicative .....	142
V.5. Torsion par un caractère .....	144
VI. $(\varphi, \Gamma)$ -modules et lois de réciprocité .....	146
VI.1. L'accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Iw}}$ .....	146
VI.2. Une loi de réciprocité générale .....	149
Références .....	152

**Laurent Berger & Christophe Breuil — *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de  $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$***  .....

1. Introduction .....	155
1.1. Introduction .....	155
1.2. Notations .....	157

2. Représentations $p$ -adiques .....	158
2.1. Quelques anneaux de séries formelles .....	158
2.2. Représentations $p$ -adiques et $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	160
2.3. Topologie faible et treillis .....	163
2.4. Théorie de Hodge $p$ -adique .....	166
2.5. Théorie de Hodge $p$ -adique et $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	169
3. Représentations cristabellines .....	170
3.1. Modules de Wach .....	170
3.2. De $N(V)$ à $D_{\text{cris}}(V)$ .....	172
3.3. Une autre construction de $N(V)$ .....	176
3.4. Représentations cristabellines de dimension 2 et représentations du Borel .....	180
4. Représentations cristabellines irréductibles de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	184
4.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ et distributions d'ordre $r$ .....	184
4.2. Définition de $B(V)$ .....	187
4.3. Une autre description de $B(V)$ .....	191
5. Représentations de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	196
5.1. Deux lemmes .....	196
5.2. D'un monde à l'autre .....	201
5.3. Irréductibilité et admissibilité .....	206
5.4. Le cas non générique .....	208
Références .....	210
<b>Pierre Colmez — <i>La série principale unitaire de <math>\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)</math></i></b> .....	213
Introduction .....	213
0.1. Notations .....	213
0.2. L'espace des paramètres $\mathcal{S}_{\text{irr}}$ .....	214
0.3. Représentations de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	215
0.4. Représentations triangulines de dimension 2 .....	216
0.5. Remerciements .....	219
I. L'anneau de Robba et ses sous-objets .....	219
I.1. Séries de Laurent .....	220
1. Le corps $\mathcal{E}$ .....	220
2. Fonctions analytiques sur des couronnes .....	220
3. L'anneau de Robba .....	220
4. Éléments d'ordre fini .....	221
I.2. Les opérateurs $\varphi$ et $\psi$ , et l'action de $\Gamma$ .....	223
1. Estimées préliminaires .....	224
2. Amélioration de la convergence par $\psi$ .....	225
3. Action de $\psi$ sur les éléments surconvergens .....	226
4. Action de $\psi$ sur les éléments d'ordre fini .....	227
I.3. L'anneau $\mathcal{R}[\log_{\varphi} T]$ .....	228
II. Objets attachés aux caractères continus de $\mathbf{Q}_p^*$ .....	229

II.1. Rappels sur les distributions .....	229
II.2. La distribution de Kubota-Leopoldt .....	230
II.3. La formule de Leopoldt .....	231
II.4. La distribution $\mu_{\alpha,\lambda}$ .....	233
II.5. Les éléments $A_{\alpha,\lambda}$ , $B_{\alpha,\lambda}$ et $C_{\alpha,\lambda}$ .....	235
III. L'entrelacement fantôme .....	238
III.1. Rappels sur les $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	238
III.2. Le module $D(s)$ dans les cas semi-stable et non géométrique .....	239
III.3. La distribution $\ell_h(\mu)$ sur $\text{LP}_c^{[0,k]}(\mathbf{Q}_p)_0$ .....	240
III.4. Le module $(D(s)^\# \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ .....	241
III.5. Propriétés algébriques de l'entrelacement fantôme .....	244
IV. Continuité de l'entrelacement fantôme .....	246
IV.1. Énoncé des résultats .....	246
IV.2. Découpage de la démonstration du th. IV.2 .....	248
IV.3. Un peu d'analyse fonctionnelle $p$ -adique .....	249
IV.4. La fonction $g_{h,j}$ .....	251
IV.5. Existence et propriétés de la distribution $\ell_h(\mu)$ .....	252
V. Application aux représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	253
V.1. La représentation $\Pi(s)$ .....	253
1. Action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\text{LA}(\mathbf{P}^1(\delta))$ .....	253
2. La représentation $B(s)$ .....	254
3. Les sous- $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -modules $M(s)$ et $\widehat{M}(s)$ de $B(s)$ .....	254
4. La représentation $\Pi(s)$ .....	254
V.2. Le dual de $\Pi(s)$ .....	255
V.3. Le cas $s \in \mathcal{S}_+^{\text{ncI}}$ .....	256
VI. Compléments .....	257
VI.1. Zéros supplémentaires des fonctions $L$ $p$ -adiques .....	257
VI.2. La formule de Stevens .....	259
Références .....	260

**Laurent Berger — Représentations modulaires de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et représentations galoisiennes de dimension 2** .....

263

Introduction .....	263
1. Rappels et compléments .....	265
1.1. Représentations galoisiennes et $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	265
1.2. Construction de représentations de $\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)$ .....	267
1.3. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	270
2. Etude de certaines représentations de $\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)$ .....	272
2.1. Induites paraboliques .....	272
2.2. Supersingulières .....	274
2.3. Applications aux représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	275
3. Correspondances continues et modulo $p$ .....	276

3.1. Démonstration de la conjecture de Breuil .....	276
3.2. Réduction modulo $p$ de quelques représentations galoisiennes .....	277
Références .....	278
<b>Pierre Colmez — Représentations de <math>\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)</math> et <math>(\varphi, \Gamma)</math>-modules ..</b>	<b>281</b>
Introduction .....	281
1. Notations .....	281
2. Cadre général .....	282
3. Dictionnaire d'analyse fonctionnelle $p$ -adique .....	283
4. Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et $(\varphi, \Gamma)$ -modules. ....	284
5. La représentation $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de $G$ .....	286
6. Les foncteurs $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ et $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ .....	288
7. La représentation de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ attachée à un atome automorphe .....	289
8. La contragrédiente d'une représentation de $G$ .....	290
9. La correspondance de Langlands locale $p$ -adique .....	291
10. Vecteurs localement analytiques .....	292
11. Correspondances $p$ -adique et classique .....	293
12. Théorie d'Iwasawa et vecteurs localement algébriques .....	294
13. Genèse de l'article .....	296
1. La conférence de Montréal .....	296
2. La première version de cet article .....	297
3. L'étude de la correspondance .....	298
14. Organisation de l'article .....	299
15. Remerciements .....	299
I. Généralités sur les $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	300
I.1. Dictionnaire d'analyse fonctionnelle $p$ -adique .....	300
1. Le corps $\mathcal{E}$ .....	300
2. Fonctions analytiques sur des couronnes .....	300
3. L'action de $\Gamma$ , les opérateurs $\varphi$ et $\psi$ .....	301
4. Résidus .....	302
5. Espaces fonctionnels et séries de Laurent .....	302
6. Extension du dictionnaire à $\mathbf{Q}_p$ .....	304
I.2. $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales .....	305
1. Catégories de $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	305
2. Le dual de Tate d'un $(\varphi, \Gamma)$ -module .....	306
3. Dual de Tate et dual topologique .....	307
I.3. $(\varphi, \Gamma)$ -modules et représentations du mirabolique .....	307
1. L'équivalence de catégories de Fontaine .....	307
2. Les modules $D^{\mathrm{nr}}$ , $D^{++}$ , $D^+$ , $D^{\natural}$ , $D^{\sharp}$ , $\widetilde{D}$ , $\widetilde{D}^+$ et $\widetilde{D}^{++}$ .....	308
3. Construction de représentations du mirabolique .....	310
4. Les $P(\mathbf{Q}_p)$ -modules $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ , $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	312
I.4. Opérations analytiques sur les $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	315
I.5. $(\varphi, \Gamma)$ -modules et lois de réciprocité explicites .....	318

1. L'action de $\Gamma$ sur $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ .....	318
2. L'accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Iw}}$ .....	319
II. La correspondance de Langlands locale $p$ -adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	320
II.1. La représentation $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de $G$ .....	321
1. Construction .....	321
2. Squelette de l'action de $G$ .....	325
3. Torsion par un caractère .....	327
4. Dualité .....	327
5. Lien entre $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ .....	328
II.2. Les sous-modules $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ .....	330
1. Propriétés conditionnées à la stabilité par $G$ .....	330
2. La représentation conditionnelle $\Pi(D)$ de $G$ .....	332
3. Dualité .....	334
4. Résultats en famille .....	335
II.3. $(\varphi, \Gamma)$ -modules de rang 2 et représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	336
1. La représentation $\Pi(D)$ attachée à un $(\varphi, \Gamma)$ -module de rang 2 ....	336
2. Réduction à une famille zariski-dense .....	337
3. Représentations cristallines .....	339
4. Déformation d'un $(\varphi, \Gamma)$ -module .....	344
III. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	345
III.1. Représentations lisses de $\mathbf{GL}_2(F)$ .....	345
1. $\mathbf{GL}_2(F)$ et ses sous-groupes .....	345
2. L'arbre de $\mathbf{PGL}_2(F)$ .....	346
3. Représentations de $G$ .....	348
4. Présentation d'une représentation de $G$ .....	349
5. Construction de représentations admettant une présentation standard .....	350
6. Quelques propriétés des présentations standard .....	352
7. Stabilité par extensions et sous-quotients .....	353
III.2. Dualité .....	355
1. Le dual $\Pi^{\vee}$ d'une $\mathcal{O}_L$ -représentation $\Pi$ de $G$ .....	355
2. L'isomorphisme $\Pi^{\vee} \cong D_W^{\natural}(\Pi) \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ .....	356
3. L'isomorphisme $\Pi^{\vee} \cong D_W^{\natural}(\Pi) \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ .....	357
III.3. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	358
1. Les objets irréductibles de $\text{Rep}_{\text{tors}} G$ .....	359
2. Quelques représentations de $B$ .....	360
3. La série principale en caractéristique $p$ .....	361
4. La steinberg .....	363
5. Les supersingulières .....	363
IV. Le $(\varphi, \Gamma)$ -module attaché à une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	366
IV.1. Le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ .....	367
1. $P^+$ -modules et $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	367

2. Le $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ -module $\mathbf{D}(\Pi)$ .....	367
3. La structure de $(\varphi, \Gamma)$ -module sur $\mathbf{D}(\Pi)$ .....	368
4. Le morphisme $\beta_{\mathbf{Z}_p} : \Pi^{\vee} \rightarrow \mathbf{D}(\Pi)$ .....	369
5. L'opérateur $\psi$ sur $\mathbf{D}(\Pi)$ .....	369
IV.2. Propriétés de finitude du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ .....	371
1. Calcul des $(\varphi, \Gamma)$ -modules attachés aux irréductibles de $\text{Rep}_{\text{tors}} G$ ..	371
2. Exactitude du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ .....	376
3. Le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ .....	377
IV.3. Compléments .....	377
1. Le morphisme $\beta_{\mathbf{Q}_p} : \Pi^{\vee} \rightarrow \mathbf{D}(\Pi) \boxtimes \mathbf{Q}_p$ .....	377
2. L'application $\beta_U : \Pi^{\vee} \rightarrow \mathbf{D}(\Pi) \boxtimes U$ .....	378
IV.4. La contragrédiente d'une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	380
1. L'action de $w$ sur $\mathbf{D}(\Pi) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ .....	380
2. Le morphisme $\beta_{\mathbf{P}^1} : \Pi^{\vee} \rightarrow \mathbf{D}(\Pi) \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ .....	383
3. Unicité de $w_{\delta}$ .....	385
4. Série principale et $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins .....	385
5. La contragrédiente .....	386
6. Exemples .....	387
V. Surconvergence et analyticité locale .....	389
V.1. Surconvergence .....	389
1. $(\varphi, \Gamma)$ -modules surconvergens .....	389
2. Le module $\widetilde{D}_{\text{rig}}^+$ .....	391
3. L'anneau $\mathcal{R}(\Gamma)$ et ses sous-anneaux .....	394
4. Le $\Gamma$ -module $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ .....	395
5. $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur $\mathcal{R}$ .....	398
V.2. Vecteurs localement analytiques .....	398
1. L'action de $w_D$ sur $D^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$ .....	398
2. Le $G$ -module $D_{\text{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ .....	401
3. Caractérisation des vecteurs localement analytiques .....	402
4. Estimées préliminaires .....	403
5. L'injection de $(\widetilde{\Pi}^{\text{an}})^*$ dans $D_{\text{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ .....	404
6. Description des vecteurs localement analytiques de $\mathbf{\Pi}(D)$ .....	407
VI. Correspondances de Langlands $p$ -adique et classique .....	408
VI.1. Préliminaires .....	409
1. Notations .....	409
2. Transformée de Fourier .....	409
3. Transformées de Fourier et de Mellin, et résidus .....	411
VI.2. Représentations localement algébriques .....	412
1. Caractérisation .....	413
2. Vecteurs localement algébriques .....	414
3. L'action du mirabolique sur les fonctions localement polynomiales ..	415
4. Modèle de Kirillov d'une représentation lisse .....	416

5. Modèle de Kirillov d'une représentation localement algébrique . . . . .	419
VI.3. $(\varphi, \Gamma)$ -modules et théorie de Hodge $p$ -adique . . . . .	420
1. Les modules $D_{\text{dR}}$ , $D_{\text{Sen}}$ , $D_{\text{dR}}^*$ . . . . .	421
2. $(\varphi, \Gamma)$ -modules presque de Rham . . . . .	422
3. Le cas de la dimension 2 . . . . .	423
4. Résidus et dualité . . . . .	424
5. Un calcul de résidu . . . . .	424
VI.4. $(\varphi, \Gamma)$ -modules presque de Rham de dimension 2 . . . . .	428
1. Compléments sur l'action de $\Gamma$ . . . . .	428
2. Les $\Gamma$ -modules $X^+ \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $X^- \boxtimes \mathbf{Q}_p$ . . . . .	430
3. Le module $N_{\text{rig}}$ . . . . .	432
4. Le module $\widetilde{N}_{\text{rig}}^+$ . . . . .	434
5. Le module $N_{\text{rig}}^{\psi=1}$ . . . . .	435
6. Dualité . . . . .	437
VI.5. Irréductibilité de $\Pi^{\text{alg}}$ . . . . .	438
1. Une condition d'existence de vecteurs localement algébriques . . . . .	438
2. Le modèle de Kirillov de $\Pi^{\text{alg}}$ . . . . .	439
3. Vecteurs $P$ -algébriques à support compact . . . . .	441
4. Compléments sur les vecteurs localement analytiques . . . . .	444
VI.6. Détermination des vecteurs localement algébriques . . . . .	445
1. L'accouplement antisymétrique $[\ , \ ]_{\text{Iw}}$ . . . . .	445
2. Action de $w_D$ sur $D_{\text{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et ses sous-modules . . . . .	446
3. Une condition nécessaire pour la non nullité de $\Pi^{\text{alg}}$ . . . . .	449
4. Dévissage du module $D_{\text{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ . . . . .	450
5. Existence de vecteurs localement algébriques . . . . .	451
6. Description des vecteurs localement algébriques . . . . .	453
7. Le module de Jacquet de $\Pi^{\text{alg}}$ . . . . .	455
8. Une seconde copie des vecteurs localement algébriques . . . . .	458
9. Indépendance par rapport à la filtration . . . . .	460
10. Décomposition des vecteurs localement analytiques . . . . .	463
11. Lien avec la correspondance classique . . . . .	465
VII. Extensions de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . . . . .	466
VII.1. Le foncteur de Jacquet et ses variantes . . . . .	466
1. Le foncteur de Jacquet $\Pi \mapsto J(\Pi)$ . . . . .	466
2. Compléments sur le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ . . . . .	469
3. Le module $\widetilde{J}^{\vee}(\Pi)$ . . . . .	470
VII.2. Extensions de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . . . . .	472
VII.3. Les atomes galoisiens et leurs $(\varphi, \Gamma)$ -modules . . . . .	478
1. Atomes galoisiens . . . . .	478
2. Les $(\varphi, \Gamma)$ -modules attachés aux atomes galoisiens . . . . .	479
VII.4. Classification des atomes automorphes . . . . .	483
1. Atomes irréductibles . . . . .	483

2. Réduction modulo $p$ d'éléments irréductibles de $\text{Rep}_L G$ .....	484
3. Atomes de longueur 2 .....	485
4. Extensions de la représentation triviale par la steinberg .....	488
5. Atomes de longueur 3 .....	491
6. Atomes de longueur 4 .....	493
7. Non exactitude du foncteur $D \mapsto D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ .....	493
VII.5. Extensions d'atomes automorphes .....	495
1. Injectivité de $\text{Ext}^1(\Pi, \Pi) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathbf{V}(\Pi), \mathbf{V}(\Pi))$ .....	495
2. Calculs de groupes d'extensions de représentations de $G$ .....	497
VIII. Annexe : $(\varphi, \Gamma)$ -modules et cohomologie galoisienne .....	498
VIII.1. Compléments de théorie d'Iwasawa .....	498
1. Cohomologie d'Iwasawa .....	498
2. Théorie d'Iwasawa .....	500
3. Théorie d'Iwasawa et $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	501
VIII.2. La loi de réciprocité explicite de Kato .....	502
Index .....	504
Références .....	506
<b>Mark Kisin — <i>Deformations of <math>G_{\mathbb{Q}_p}</math> and <math>\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)</math> representations</i></b> .....	511
Introduction .....	511
1. Density of crystalline representations .....	514
2. Deformation theory .....	521
References .....	527
<b>Gebhard Böckle — <i>Deformation rings for some mod 3 Galois representations of the absolute Galois group of <math>\mathbb{Q}_3</math></i></b> .....	529
1. Introduction .....	529
Acknowledgements .....	532
2. A functor of equivariant homomorphisms .....	532
3. Demuškin groups with group actions .....	534
4. Proof of the main theorem in the residually reducible case .....	537
Case (a) .....	538
Case (b) .....	539
Case (c) .....	539
5. Proof of the main theorem for the residually dihedral case .....	540
References .....	541
<b>Fabrizio Andreatta &amp; Adrian Iovita — <i>Erratum to the article: Global applications to relative <math>(\varphi, \Gamma)</math>-modules, I (Astérisque 319, p. 339–419)</i></b> .....	543
1. The errors to be corrected .....	543
2. Faltings's topology .....	543
The formal case .....	547

3. Geometric points of $\mathfrak{X}_M$ .....	547
Geometric points of $\mathfrak{X}_M$ .....	547
Morphisms of topoi .....	550
3.1. Explicit description of $R^i v_*$ .....	551
References .....	554

*Nous dédions ces trois volumes de  
représentations  $p$ -adiques de groupes  $p$ -adiques  
à Jean-Marc Fontaine.  
Son œuvre a inspiré la plupart  
des questions qui y sont abordées.*

Les éditeurs : Laurent Berger, Christophe Breuil et Pierre Colmez.