Astérisque

PIERRE COLMEZ

Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules

Astérisque, tome 330 (2010), p. 281-509

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__330__281_0>

© Société mathématique de France, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
330, 2010, p. 281–509

REPRÉSENTATIONS DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ET (φ,Γ)-MODULES

par

Pierre Colmez

Résumé. — Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Nous construisons une correspondance (de Langlands locale p-adique) associant à toute L-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, irréductible de dimension 2, une représentation $\Pi(V)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, unitaire, admissible, et irréductible. Nous identifions les vecteurs localement analytiques et localement algébriques de $\Pi(V)$, ce qui nous permet de montrer que cette correspondance encode la correspondance de Langlands locale classique (pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

Abstract. — Let L be a finite extension of $\mathbf{Q}_p$. We construct a (p-adic local Langlands) correspondence attaching to any irreducible, 2-dimensional, L-representation of $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, a unitary, admissible, irreducible L-representation $\Pi(V)$ of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. We identify the locally analytic and locally algebraic vectors of $\Pi(V)$, which allows us to show that this correspondence encodes the classical local Langlands correspondence (for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

Introduction

1. Notations. — On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de $\mathbf{Q}_p$. On note $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le *caractère cyclotomique*; il induit un isomorphisme de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$. Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, on note $\sigma_a \in \Gamma$ l'élément défini par $\chi(\sigma_a) = a$. On note $\mathscr{H}$ le noyau de χ et $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$ le groupe de Galois absolu de l'extension abélienne maximale de $\mathbf{Q}_p$. Enfin, soit $\Gamma^{\mathrm{nr}} = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbf{Q}_p)$. Alors $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{H}'$ est l'abélianisé $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, Γ et Γ^{nr} s'identifient naturellement à des sous-groupes de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$, et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} = \Gamma \times \Gamma^{\mathrm{nr}}$.

On fixe aussi une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ (on peut parfois se permettre de remplacer L par une extension finie; L est donc variablement fixe...), et on note $\mathscr{O}_L$ l'anneau de ses entiers, $\mathfrak{m}_L$ son idéal maximal et $k_L = \mathscr{O}_L/\mathfrak{m}_L$ son corps résiduel.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11S**, 11F**.
Mots clefs. — Correspondance de Langlands locale, (φ,Γ)-module, analyse fonctionnelle, théorie d'Iwasawa.

© Astérisque 330, SMF 2010

Si M est un $\mathbf{Z}_p$-module, on note $\mathscr{O}_L \cdot M$ le $\mathscr{O}_L$-module $\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} M$, et si M est un $\mathscr{O}_L$-module ou un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel, on note $L \cdot M$ le L-espace vectoriel $L \otimes_{\mathscr{O}_L} M$ ou $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} M$.

On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ l'anneau des séries de Laurent $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$, à coefficients dans $\mathscr{O}_L$ et vérifiant $\lim_{k \to -\infty} a_k = 0$. On note $k_{\mathscr{E}} = k_L((T))$ le corps résiduel de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}[\frac{1}{p}]$ son corps des fractions. Enfin, on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ le sous-anneau $\mathscr{O}_L[[T]]$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{E}^+$ le sous-anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{1}{p}]$ de $\mathscr{E}$, et $k_{\mathscr{E}}^+ = k_L[[T]]$ l'anneau des entiers de $k_{\mathscr{E}}$.

On munit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, $k_{\mathscr{E}}$, $k_{\mathscr{E}}^+$, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}^+$ d'actions $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de Γ et du frobenius φ, respectant les structures d'anneaux, en envoyant T sur $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Ces actions commutent entre elles.

Si Λ est un anneau topologique, soit $\widehat{\mathscr{T}}(\Lambda)$ l'ensemble des caractères continus $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \Lambda^*$. L'abélianisé $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ du groupe de Weil $W_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p^*$ d'après la théorie locale du corps de classes, ce qui permet de voir un élément de $\widehat{\mathscr{T}}(\Lambda)$ aussi comme un caractère continu de $W_{\mathbf{Q}_p}$. De manière explicite, si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(\Lambda)$, alors $\delta(g)$ est défini par la formule

$$\delta(g) = \delta(p)^{-\deg(g)} \delta(\chi(g)),$$

où $\deg(g)$ est l'entier défini par $g(x) = x^{p^{\deg(g)}}$, si $x \in \overline{\mathbf{F}}_p$. Si $n \to \delta(p^n)$ se prolonge par continuité à $\widehat{\mathbf{Z}}$, alors δ se prolonge par continuité à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui permet aussi de voir δ comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. C'est en particulier le cas si $\Lambda = k_L$ ou si $\Lambda = L$ et si δ est *unitaire* (i.e. si $v_p(\delta(p)) = 0$). En particulier, le caractère $x \mapsto x|x|$ correspond au caractère cyclotomique χ et sa réduction modulo p, notée ω, correspond au caractère de Teichmüller.

2. Cadre général. — Nous nous proposons d'établir une correspondance entre (toutes [1]) les L-représentations absolument irréductibles V de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et (presque [2] toutes) les L-représentations absolument irréductibles unitaires admissibles Π de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ admettant un caractère central.

Cette correspondance repose sur :

– la construction d'un foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ associant une représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (pas forcément de dimension 2) à toute représentation unitaire de longueur finie de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (pas forcément irréductible),

– la construction d'une représentation $\mathbf{D}(V) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à partir de toute représentation V (pas forcément de dimension 2) de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et de tout caractère unitaire $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$.

La représentation $\mathbf{D}(V) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est, topologiquement, l'extension d'un L-banach par le dual d'un L-banach, mais il semble raisonnable de penser qu'il n'existe, en

(1) Cf. note 7 pour des restrictions temporaires.

(2) Les sous-quotients des représentations induites par un caractère unitaire du borel n'apparaissent pas : leur image par le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ est de dimension 1 (ou 0 dans le cas d'un caractère) et pas de dimension 2. Le fait que toutes les autres fournissent des représentations de dimension 2 (au moins si $p \geq 5$) est un résultat récent de Paskunas [**60**].

général, pas de telle décomposition de $\mathbf{D}(V)\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ qui soit $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariante. Par contre, si V est de dimension 2, et si $\delta=(x|x|)^{-1}\delta_V$, où δ_V est le caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ correspondant à la représentation $\det V$ par la théorie locale du corps de classes, alors $\mathbf{D}(V)\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est une extension d'une représentation unitaire admissible $\mathbf{\Pi}(V)$ par son dual (tordu par $\delta\circ\det$). De plus, on a $\mathbf{V}(\mathbf{\Pi}(V))=V$, ce qui montre que les deux constructions sont inverses l'une de l'autre. La correspondance de Langlands locale p-adique $V\mapsto\mathbf{\Pi}(V)$ ainsi construite jouit de propriétés remarquables :

– elle est compatible à la réduction modulo p,

– elle se comporte bien en famille,

– elle encode la correspondance de Langlands locale classique.

Ce dernier résultat était le point de départ de Breuil [**15**] dans sa quête d'une correspondance de Langlands locale p-adique ; Emerton [**39**] et Kisin [**54**] savent en déduire (grâce aux travaux de Khare et Wintenberger [**51, 52**] démontrant la conjecture de Serre pour les représentations modulo p) la conjecture de Fontaine-Mazur pour la plupart des représentations de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$. Le premier point avait été vérifié par Berger [**7**] pour les représentations de la série principale (après semi-simplification).

Dans l'appendice [**55**], Kisin explique comment déduire l'existence de la correspondance à partir de la construction du seul foncteur $\Pi\mapsto\mathbf{V}(\Pi)$ en utilisant les représentations de la série principale unitaire [**8, 30**] de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et l'injectivité de $\mathrm{Ext}^1(\Pi,\Pi)\to\mathrm{Ext}^1(\mathbf{V}(\Pi),\mathbf{V}(\Pi))$ (th. VII.5.2 du présent article). La construction explicite de la représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ semble toutefois incontournable pour l'étude des propriétés fines de la correspondance.

3. Dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique. — Beaucoup des constructions de l'article sont inspirées par le dictionnaire entre anneaux de séries formelles et espaces fonctionnels p-adiques.

Fonctions analytiques sur des couronnes. — En sus des anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E}$ définis plus haut, on dispose en particulier des anneaux suivants :

• l'anneau *de Robba* $\mathscr{R}$ des $f=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_nT^n$ analytiques sur une couronne du type $0<v_p(T)\leq r$, où r dépend de f et les a_n sont des éléments de L,

• le corps $\mathscr{E}^\dagger$, ensemble des éléments bornés de $\mathscr{R}$ (le corps $\mathscr{E}$ est alors le complété de $\mathscr{E}^\dagger$ pour la valuation $v_p(f)=\inf_{n\in\mathbf{Z}}v_p(a_n)$ et $\mathscr{E}^\dagger$ peut aussi être vu comme l'ensemble des éléments *surconvergents* de $\mathscr{E}$),

• $\mathscr{R}^+=\mathscr{R}^\natural=\mathscr{R}\cap L[[T]]$, anneau des fonctions analytiques sur le disque $v_p(T)>0$,

• $\mathscr{E}^+=\mathscr{E}^\natural=\mathscr{E}\cap L[[T]]$, sous-anneau de $\mathscr{R}^+$ des fonctions analytiques bornées sur le disque $v_p(T)>0$.

Espaces fonctionnels et leurs duaux. — Voici un petit échantillon des espaces fonctionnels que l'on peut considérer.

• $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$, espace des $\phi:\mathbf{Z}_p\to L$ continues (c'est un L-banach),

• $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, espace des $\phi:\mathbf{Z}_p\to L$ localement analytiques (limite inductive compacte de L-banach),

• $\mathrm{LP}^{[0,k-1]}(\mathbf{Z}_p)$, espace des $\phi:\mathbf{Z}_p\to L$ localement polynomiales de degré $\leq k-1$,

• $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)=\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)^*$, espace des mesures sur $\mathbf{Z}_p$ (dual de banach),

• $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) = \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)^*$, espace des distributions sur $\mathbf{Z}_p$ (c'est un fréchet).

Le dictionnaire. — A une mesure ou une distribution μ, on associe sa transformée d'Amice A_μ, définie par

$$A_\mu(T) = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \, \mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \mu \Big) T^n,$$

et à un élément f de $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{R}$, on associe la fonction $\phi_f : \mathbf{Z}_p \to L$, définie par

$$\phi_f(x) = \mathrm{rés}_0\big((1+T)^x f \frac{dT}{1+T}\big).$$

Les théorèmes de Mahler et d'Amice décrivant les fonctions continues ou localement analytiques en termes de leur développement de Mahler (cf. [**29**]) permettent de reformuler l'analyse sur $\mathbf{Z}_p$ de manière compacte.

Théorème 0.1. — (i) *L'application $\mu \mapsto A_\mu$ induit des isomorphismes $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p) \cong \mathscr{E}^\natural$ et $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p) \cong \mathscr{R}^\natural$.*

(ii) *L'inclusion $\mathscr{E}^\dagger \subset \mathscr{R}$ induit un isomorphisme $\mathscr{E}^\dagger/\mathscr{E}^\natural \cong \mathscr{R}/\mathscr{R}^\natural$ et l'application $f \mapsto \phi_f$ induit des isomorphismes $\mathscr{E}/\mathscr{E}^\natural \cong \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$ et $\mathscr{E}^\dagger/\mathscr{E}^\natural \cong \mathscr{R}/\mathscr{R}^\natural \cong \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$.*

(iii) *$f \mapsto \phi_f$ induit un isomorphisme $(t^{-k}\mathscr{R}^\natural \cap \mathscr{R})/\mathscr{R}^\natural \cong \mathrm{LP}^{[0,k-1]}(\mathbf{Z}_p)$, où, comme d'habitude, $t = \log(1+T)$.*

(iv) *$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi_f \, \mu = \mathrm{rés}_0\big(A_\mu f \frac{dT}{1+T}\big)$, si $f \in \mathscr{E}$ et $\mu \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$, ou si $f \in \mathscr{R}$ et si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$.*

Remarque 0.2. — On déduit du th. 0.1 les suites exactes suivantes d'espaces vectoriels topologiques :

$$0 \to \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)^* \to \mathscr{E} \to \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p) \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)^* \to \mathscr{R} \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \to 0.$$

4. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et (φ,Γ)-modules.— Nous aurons affaire aux catégories suivantes de représentations de $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$:

• $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules Π, *lisses* (l'action de G est localement constante), *admissibles*[3] (Π^K de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ pour tout sous-groupe ouvert compact K de G), de longueur finie, et admettant un caractère central,

• $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules Π séparés et complets pour la topologie p-adique, sans p-torsion, tels que $\Pi/p^n\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, pour tout n,

• $\mathrm{Rep}_L G$, catégorie des $L[G]$-modules munis d'un réseau appartenant à $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$.

De même, nous rencontrerons les catégories suivantes de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$:

• $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, catégorie des *$\mathscr{O}_L$-représentations de torsion* de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. des $\mathscr{O}_L$-modules de longueur finie, munis d'une action linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$),

• $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, catégorie des *$\mathscr{O}_L$-représentations sans torsion* de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. des $\mathscr{O}_L$-modules V libres et de rang fini, tels que $V/p^nV \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, pour tout n),

• $\mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, catégorie des *$L$-représentations* de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. des L-espaces vectoriels de dimension finie admettant un réseau appartenant à $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$).

[3] D'après [**2, 13**], cette condition est conséquence des autres.

Enfin, la construction de la correspondance reposant sur la classification de Fontaine des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ en termes de (φ,Γ)-modules, nous aurons affaire aux catégories suivantes de (φ,Γ)-modules :

- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, catégorie des (φ,Γ)-modules, étales et de longueur finie sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$,
- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, catégorie des (φ,Γ)-modules, étales et libres de rang fini sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$,
- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, catégorie des (φ,Γ)-modules, étales et de dimension finie sur $\mathscr{E}$,
- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}^\dagger)$, catégorie des (φ,Γ)-modules, étales et de dimension finie sur $\mathscr{E}^\dagger$,
- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$, catégorie des (φ,Γ)-modules, de pente 0, libres et de rang fini sur $\mathscr{R}$.

Un (φ,Γ)-*module étale sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ désigne un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ ou de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$.

Théorème 0.3. — (i) *Les catégories* $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ *et* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ *sont équivalentes.*

(ii) *Les catégories* $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ *et* $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ *sont équivalentes.*

(iii) *Les catégories* $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}^\dagger)$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$ *et* $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ *sont équivalentes.*

Remarque 0.4. — (i) L'équivalence entre $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ et $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, due à Fontaine [**40**], est le point de départ de la théorie. Les équivalences entre $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ et $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et entre $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ et $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ s'en déduisent de manière formelle [**40**] en prenant des limites projectives et en tensorisant par L. Si V est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ ou $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\mathbf{D}(V)$ le (φ,Γ)-module qui lui est attaché. Réciproquement, si D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, on note $\mathbf{V}(D)$ la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui correspond.

(ii) L'équivalence entre $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ et $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}^\dagger)$ (cf. [**9, 20**]) est la seconde étape dans la théorie des (φ,Γ)-modules ; elle s'exprime sous la forme : *tout* (φ,Γ)-*module étale sur* $\mathscr{E}$ *possède des éléments surconvergents.* Descendre de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}^\dagger$ permet de localiser un (φ,Γ)-module en $\zeta-1$, si ζ est une racine primitive p^n-ième de l'unité, pour n assez grand, ce qui établit un pont avec la théorie de Hodge p-adique. Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, on note $D^\dagger$ l'objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}^\dagger)$ qui lui correspond ; c'est l'ensemble des éléments surconvergents de D, et on a $D=\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}D^\dagger$.

(iii) La troisième étape consiste, après avoir descendu les coefficients de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}^\dagger$, à étendre les coefficients de $\mathscr{E}^\dagger$ à $\mathscr{R}$, ce qui introduit des dénominateurs (en p). Si $D^\dagger$ est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}^\dagger)$, alors $D_{\mathrm{rig}}=\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}D^\dagger$ est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$, et $D^\dagger\mapsto D_{\mathrm{rig}}$ réalise l'équivalence entre $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}^\dagger)$ et $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$. Ceci permet [**4, 24**] de retrouver, à partir des (φ,Γ)-modules, tous les invariants fournis par la théorie de Hodge p-adique. Le point délicat dans l'équivalence de catégories ci-dessus est la reconstruction de $D^\dagger$ à partir de D_{rig} ; celle-ci repose sur la théorie des pentes de Kedlaya [**50**]. Elle est à la base de la construction [**28**] des représentations triangulines de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui correspondent [**8, 25, 26**], via la correspondance de Langlands locale p-adique, aux représentations de la série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

(iv) Les équivalences de catégories du théorème permettent d'ignorer les représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et de les remplacer par des (φ,Γ)-modules. L'un des intérêts de ce point de vue est qu'un (φ,Γ)-module est naturellement muni d'une action du semi-groupe $P^+=\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\} & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, via les identifications

$$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\longmapsto 1+T,\quad \left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\longmapsto\varphi,\quad\text{et}\quad \left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\longmapsto\sigma_a\ \text{si}\ a\in\mathbf{Z}_p^*.$$

Il suffit donc de rajouter une action de $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vérifiant certaines compatibilités pour définir une action de G. Le cheminement de l'article consiste à reprendre celui décrit ci-dessus pour la théorie des (φ,Γ)-modules en rajoutant une telle action.

5. La représentation $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de G. — Soit $P = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ le *mirabolique* de $\mathbf{GL}_2$, et donc $P(\mathbf{Q}_p) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $P(\mathbf{Z}_p) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Un $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-module M est un $\mathscr{O}_L$-module muni d'une action de $P(\mathbf{Z}_p)$, et d'un opérateur $\mathscr{O}_L$-linéaire ψ, commutant à l'action de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et tel que, pour tous $b \in \mathbf{Z}_p$ et $z \in M$, on ait $\psi\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)z\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\psi(z)$.

L'exemple le plus simple de tel objet est l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p,\mathscr{O}_L)$ des mesures sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $\mathscr{O}_L$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P(\mathbf{Z}_p)$ sur $\mu \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p,\mathscr{O}_L)$ étant donnée par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot\mu = \int_{\mathbf{Z}_p}\phi(ax+b)\,\mu$, et celle de ψ par $\int_{\mathbf{Z}_p}\phi\,\psi(\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p}\phi(p^{-1}x)\,\mu$ (i.e $\psi = \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\circ \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}$).

Comme il a été mentionné plus haut, un (φ,Γ)-module D est naturellement un $P(\mathbf{Z}_p)$-module et même un P^+-module. Maintenant, si D est étale, tout élément x de D peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i)$. On pose $\psi(x) = x_0$, et l'opérateur $\psi : D \to D$ ainsi défini est un inverse à gauche de φ commutant à l'action de Γ, et qui munit D d'une structure de $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-module. Le sous-module $D^{\psi=1}$ joue un rôle central dans la théorie.

Si M est un $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-module, on définit $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ comme l'ensemble des suites $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de M, telles que $\psi(x^{(n+1)}) = x^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Une telle suite est complètement déterminée par $x^{(n)}$, pour n assez grand, puisqu'on peut récupérer les termes manquant en itérant ψ.

Proposition 0.5. — *Sur $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$, il existe une unique action de $P(\mathbf{Q}_p)$ telle que $g\cdot(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, avec :*

(a) $y^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot x^{(n)}$, *pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *si* $g = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, *où* $a \in \mathbf{Z}_p^*$;

(b) $y^{(n)} = x^{(n+k)}$, *pour tout* $n \geq -k$, *si* $g = \left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, *où* $k \in \mathbf{Z}$;

(c) $y^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot x^{(n)}$, *pour tout* $n \geq -v_p(b)$, *si* $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, *où* $b \in \mathbf{Q}_p$.

Si $M = \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p,\mathscr{O}_L)$, alors $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ n'est autre que $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L)$, muni de l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ donnée par $\int_{\mathbf{Q}_p}\phi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot\mu = \int_{\mathbf{Q}_p}\phi(ax+b)\,\mu$. C'est d'ailleurs à partir de cet exemple que les formules ont été obtenues.

Soit D un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$, et soit $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ un caractère unitaire continu. On construit une représentation $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de G, en traduisant en termes de (φ,Γ)-modules l'action suivante de G sur les mesures sur [4] $\mathbf{P}^1$: on note $B(\delta)$ l'espace des fonctions continues $\phi : \mathbf{Q}_p \to L$, telles que $x \mapsto \delta(x)\phi(1/x)$ soit continue en 0, et on munit $B(\delta)$ d'une action de G définie par $g\cdot\phi = \phi\star g^{-1}$, avec

$$\left(\phi\star\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right)(x) = \delta(cx+d)\phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big), \quad \text{si } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G \text{ et } x \neq \frac{-d}{c},$$

[4] Dans tout l'article, $\mathbf{P}^1$ désigne l'espace $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$.

prolongée par continuité en $\frac{-d}{c}$. Le dual topologique $B(\delta)^*$ de $B(\delta)$ est donc aussi muni d'une action de G. Comme $\mathbf{P}^1$ s'obtient en recollant, via $x \mapsto 1/x$, deux copies de $\mathbf{Z}_p$ le long de $\mathbf{Z}_p^*$, l'application $\mu \mapsto \left(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\mu, \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w\cdot\mu\right)$ induit un isomorphisme d'espaces topologiques de $B(\delta)^*$ sur

$$\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{(\mu_1,\mu_2)\in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)\oplus\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p),\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\mu_2 = w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\mu_1)\},$$

où $w_\delta : \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*) \to \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*)$ est l'involution définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi\, w_\delta(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta(x)\phi(1/x)\,\mu.$$

Maintenant, on peut traduire, via la transformée d'Amice, les opérations élémentaires sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ (restriction à un ouvert compact, multiplication par une fonction continue, changement de variable...) en termes du (φ,Γ)-module $\mathscr{E}^\natural$ (par exemple $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} = \varphi\psi$). L'action de G sur $B(\delta)^*$ donne alors naissance à une action de G sur $\mathscr{E}^\natural\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, et les formules ainsi obtenues ayant un sens pour n'importe quel (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$, cela nous fournit la représentation $D\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ cherchée ainsi que, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$, un module $D\boxtimes U$ et une application $\mathrm{Res}_U : D\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D\boxtimes U$ vérifiant les propriétés suggérées par la notation [5] ; en particulier, $D\boxtimes\mathbf{Z}_p = D$ et, si $z=(z_1,z_2)\in D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, alors $z_1 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z$ et $z_2 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w\cdot z$. Le module $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ n'est, quant à lui, autre que $D^{\psi=0}$. On définit aussi $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} : D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1 \to D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(z) = \left(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

De manière explicite, la représentation $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est définie de la manière suivante. On montre que, si $z\in D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, la suite de terme général

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \delta(i^{-1})(1+T)^i\sigma_{-i^2}(\varphi^n\psi^n((1+T)^{-i^{-1}}z)))$$

a une limite dans $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, d'où une application $w_\delta : D\boxtimes\mathbf{Z}_p^* \to D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ qui se trouve être une involution. Il est à noter que la convergence de la suite définissant w_δ est très mauvaise, ce qui rend la formule ci-dessus à peu près inutilisable pour toute question un peu fine. On définit alors $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ comme l'ensemble des couples $z=(z_1,z_2)$ d'éléments de D vérifiant la condition $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) = w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1))$, et on le munit d'un *squelette d'action de G* en posant, si $z=(z_1,z_2)$:

- $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot z = (z_2,z_1)$.
- Si $a\in\mathbf{Q}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)\cdot z = (\delta(a)z_1,\delta(a)z_2)$.
- Si $a\in\mathbf{Z}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z = \left(\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)z_1, \delta(a)\left(\begin{smallmatrix}a^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)z_2\right)$.
- Si $z' = \left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z$, alors $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z' = \left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z_1$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} wz' = \delta(p)\psi(z_2)$.
- Si $b\in p\mathbf{Z}_p$, et si $z' = \left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z$, alors

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z' = \left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z_1 \ \text{ et } \ \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} wz' = u_b(\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2)),$$

où $u_b = \delta^{-1}(1+b)\left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ w_\delta\circ\left(\begin{smallmatrix}(1+b)^2 & b(1+b)\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ w_\delta\circ\left(\begin{smallmatrix}1 & 1/(1+b)\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ sur $D\boxtimes p\mathbf{Z}_p$.

[5] Si $D=\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$, l'application Res_U est la restriction à U et $D\boxtimes U$ est l'espace des mesures sur U.

Théorème 0.6. — *Les formules ci-dessus définissent une action de G.*

6. Les foncteurs $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ et $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$. — Si D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, on définit les sous-modules suivants de D.

- D^+ est le plus grand sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact de D stable par φ,
- $D^\natural$ est le plus petit sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact de D, engendrant D, stable par ψ,
- $D^\sharp$ est le plus grand sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact de D sur lequel ψ est surjectif.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, on choisit un réseau D_0 de D stable par φ et Γ, et on pose $D^+ = L \cdot D_0^+$, $D^\natural = L \cdot D_0^\natural$ et $D^\sharp = L \cdot D_0^\sharp$. La construction du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ passe par la construction d'objets $D_W^+(\Pi)$ et $D_W^\natural(\Pi)$ jouant les rôles de D^+ et $D^\natural$.

Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, on note $\mathscr{W}(\Pi)$ l'ensemble des $W \subset \Pi$, de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, stables par $K = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, engendrant Π comme $\mathscr{O}_L[G]$-module. Si $W \in \mathscr{W}(\Pi)$, alors Π est le quotient de l'induite à support compact $I(W) = \mathrm{Ind}_{KZ}^G W$, ce qui nous fournit une présentation $\Pi = I(W)/R(W,\Pi)$ de Π. On dit que cette présentation est *standard*, si $R(W,\Pi)$ est engendrée par des relations supportées par des arêtes de l'arbre de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (dont les sommets sont naturellement en bijection avec G/KZ).

Théorème 0.7. — *Tout $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ admet des présentations standard.*

Remarque 0.8. — (i) En caractéristique 0 ou $\ell \neq p$, ce résultat est un cas particulier de résultats généraux de Schneider-Stuhler [**63**] et de Vignéras [**70**].

(ii) Ce résultat a aussi été démontré par Breuil et Paskunas [**17**], Vignéras [**71**] et Ollivier [**57**].

(iii) Les résultats de Breuil et Paskunas suggèrent qu'en caractéristique p le résultat devient faux si $G = \mathbf{GL}_2(L)$, où L est une extension finie non triviale de $\mathbf{Q}_p$.

Soit $W \in \mathscr{W}(\Pi)$ induisant une représentation standard. On note :

- $I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi}(W)$ le sous-$\mathscr{O}_L$-module de Π engendré par les $\left(\begin{smallmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, avec $a + p^n\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Z}_p$,
- $\Pi^\vee = \mathrm{Hom}(\Pi, L/\mathscr{O}_L)$ le dual de Π, avec une action de G définie, comme d'habitude, par $\langle g \cdot \mu, v\rangle = \langle \mu, g^{-1} \cdot v\rangle$,
- $D_W^\natural(\Pi)$ le dual de $I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi}(W)$ (c'est un quotient de $\Pi^\vee$),
- $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W} : \Pi^\vee \to D_W^\natural(\Pi)$ l'application naturelle,
- $D_W^+(\Pi)$ l'ensemble des $\mu \in \Pi^\vee$ identiquement nuls sur $\left(\begin{smallmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, si $a + p^n\mathbf{Z}_p \not\subset \mathbf{Z}_p$.

Alors $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}$ induit une injection de $D_W^+(\Pi)$ dans $D_W^\natural(\Pi)$, dont le conoyau est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$. De plus, $D_W^\natural(\Pi)$ et $D_W^+(\Pi)$ sont munis d'une action de $P(\mathbf{Z}_p)$, ce qui en fait des Γ-modules sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, où T agit par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1$, et σ_a par $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Enfin, $D_W^+(\Pi)$ est stable aussi par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et donc est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, l'action de φ étant celle de $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, tandis que $D_W^\natural(\Pi)$, qui est stable par $\psi_W = \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, est un $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-module. Il en résulte que $\mathbf{D}(\Pi) = \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D_W^+(\Pi)$ est muni d'une structure de (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et que $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{D}(\Pi)$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D_W^\natural(\Pi)$. On note $\beta_{\mathbf{Z}_p} : \Pi^\vee \to \mathbf{D}(\Pi)$ la composée de l'inverse de l'isomorphisme précédent avec l'application $x \mapsto 1 \otimes x$. On vérifie facilement que $\mathbf{D}(\Pi)$ et $\beta_{\mathbf{Z}_p}$ ne dépendent pas du choix de W, ce qui justifie la notation.

Théorème 0.9. — (i) *Si* $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, *alors* $\mathbf{D}(\Pi) \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$.
(ii) *Le foncteur* $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ *est contravariant et exact.*

Le point délicat dans la démonstration de ce théorème est de prouver que $\mathbf{D}(\Pi)$ est de longueur finie. L'exactitude du foncteur $\mathbf{D}$ permet de se ramener au cas où Π est irréductible, et on utilise la classification des représentations irréductibles de Barthel-Livné [**2, 3**] et Breuil [**13**]. Emerton [**38**] en a trouvé une démonstration plus directe.

Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$, on définit $\mathbf{D}(\Pi)$ comme la limite projective des $\mathbf{D}(\Pi/p^n\Pi)$, et si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$, on choisit un réseau Π^0 de Π stable par G, et on pose $\mathbf{D}(\Pi) = L\cdot\mathbf{D}(\Pi^0)$.

Dans tous les cas, on définit $\mathbf{V}(\Pi)$ comme le dual de Tate de $\mathbf{V}(\mathbf{D}(\Pi))$. Le foncteur $\Pi \to \mathbf{V}(\Pi)$ est alors covariant et exact. De plus, on a $\mathbf{V}(\Pi\otimes(\delta\circ\det)) = \mathbf{V}(\Pi)\otimes\delta$, si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu.

7. La représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ attachée à un atome automorphe. — Soit $B = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right) \in G\right\}$ le borel de G. Si δ_1, δ_2 sont des caractères continus de $\mathbf{Q}_p^*$ à valeurs dans k_L^*, on note $\delta_1\otimes\delta_2$ le caractère de B défini par $(\delta_1\otimes\delta_2)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right) = \delta_1(a)\delta_2(d)$. On définit alors une représentation $B(\delta_1,\delta_2)$ de G, dite *de la série principale*, par $B(\delta_1,\delta_2) = \mathrm{Ind}_B^G \delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}$. D'après Barthel et Livné [**3**], la représentation $B(\delta_1,\delta_2)$ est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, de caractère central $\omega^{-1}\delta_1\delta_2$, et est irréductible sauf s'il existe $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$ tel que $\delta_1 = \omega\delta$ et $\delta_2 = \delta$. Dans ce dernier cas, $B(\delta_1,\delta_2)$ est une extension de la représentation irréductible $\mathrm{St}\otimes(\delta\circ\det)$, où St est la *steinberg*, par la k_L-représentation $\delta\circ\det$, de dimension 1.

La classification complète des objets irréductibles de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ a été achevée par Breuil [**13**] : aux représentations ci-dessus, il suffit de rajouter les représentations supersingulières de Barthel et Livné.

Théorème 0.10. — (i) *Si* Π *est de la forme* $\delta\circ\det$, *alors* $\mathbf{V}(\Pi) = 0$.
(ii) *Si* $\Pi = \mathrm{St}\otimes(\delta\circ\det)$, *alors* $\mathbf{V}(\Pi) = k_L(\omega\delta)$.
(iii) *Si* $\Pi = B(\delta_1,\delta_2)$, *alors* $\mathbf{V}(\Pi) = k_L(\delta_1)$.
(iv) *Si* Π *est supersingulière, alors* $\mathbf{V}(\Pi)$ *est irréductible, de dimension* 2 *sur* k_L.

Le lecteur ayant en tête la correspondance de Langlands locale classique sera probablement surpris de constater que la correspondance p-adique envoie les représentations de la série principale de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur des représentations de dimension 1 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ au lieu des représentations de dimension 2 attendues. Le résultat suivant, inspiré par les calculs de réductions modulo p de représentations de la série principale de Berger, Breuil et Mézard [**7, 14, 16**], explique comment la correspondance p-adique se joue de cette apparente incongruité. Particulièrement remarquable est le rôle joué par le petit morceau de dimension 1 dans le (iii) ; ce rôle m'a été expliqué par Emerton et Kisin dans une série de courriels en janvier 2006.

Théorème 0.11. — (i) *Si* $\delta_1 \neq \delta_2, \omega^{\pm1}\delta_2$, *alors* $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_2,\delta_1), B(\delta_1,\delta_2))$ *est un* k_L*-espace vectoriel de dimension* 1, *et si* E *est une extension non triviale de* $B(\delta_2,\delta_1)$ *par* $B(\delta_1,\delta_2)$, *alors* $\mathbf{V}(\Pi)$ *est l'extension non triviale de* $k_L(\delta_2)$ *par* $k_L(\delta_1)$.

(ii) $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},\mathrm{St})$ *s'identifie naturellement à* $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$. *De plus, si* τ *est un élément non nul de* $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$, *et si* E_τ *est l'extension de* $\mathbf{1}$ *par* St *qui lui correspond, alors* $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega),E_\tau)$ *est un* k_L*-espace vectoriel de dimension* 1.

(iii) *Si* Π *est une extension non triviale de* $B(1,\omega)$ *par* E_τ, *alors* $\mathbf{V}(\Pi)$ *est l'extension non triviale de* k_L *par* $k_L(\omega)$ *attachée à l'extension* $\mathbf{Q}_p(\sqrt[p]{\alpha})$, *où* $\alpha\in\mathbf{Q}_p^*/(\mathbf{Q}_p^*)^p$ *engendre la* k_L*-droite d'équation* $\tau(x)=0$.

8. La contragrédiente d'une représentation de G. — On peut se demander comment reconstruire Π à partir de $\mathbf{D}(\Pi)$. C'est l'objet des résultats qui suivent, où l'on a noté D le (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(\Pi)$ et δ le caractère δ_Π^{-1}, où δ_Π est le caractère central de Π. On suppose que $\Pi\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}$ n'a pas de quotient fini. On étend l'action de P sur $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ en une action de B en faisant agir un élément $\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ du centre par multiplication par $\delta(d)$; la représentation de B ainsi obtenue est notée $D\boxtimes_\delta\mathbf{Q}_p$. On rappelle que l'on a défini, juste avant le th. 0.9, une application $\beta_{\mathbf{Z}_p}:\Pi^\vee\to D$.

Proposition 0.12. — (i) *Si* $g\in P(\mathbf{Z}_p)$, *alors* $\beta_{\mathbf{Z}_p}\circ g=g\circ\beta_{\mathbf{Z}_p}$.

(ii) $\beta_{\mathbf{Z}_p}\circ\left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\psi\circ\beta_{\mathbf{Z}_p}$.

(iii) *L'application* $\mu\mapsto\beta_{\mathbf{Q}_p}(\mu)=\left(\beta_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ *est un morphisme* B*-équivariant de* $\Pi^\vee$ *dans* $D\boxtimes_\delta\mathbf{Q}_p$, *de noyau* $(\Pi^\vee)^U$, *d'image incluse dans* $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ *et contenant* $D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$, *avec égalité si* Π *n'a pas de sous-représentation finie.*

Notons $\beta_{\mathbf{P}^1}:\Pi^\vee\to D\times D$ l'application $\mu\mapsto(\beta_{\mathbf{Z}_p}(\mu),\beta_{\mathbf{Z}_p}(w\cdot\mu))$.

Théorème 0.13. — (i) *L'image de* $\Pi^\vee$ *par* $\beta_{\mathbf{P}^1}$ *est incluse dans* $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ *et* $\beta_{\mathbf{P}^1}$ *est* G*-équivariante.*

(ii) $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}\circ\beta_{\mathbf{P}^1}=\beta_{\mathbf{Q}_p}$.

(iii) *L'application* $\beta_{\mathbf{P}^1}$ *est injective et son image est incluse dans l'ensemble des* $z\in D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ *tels que* $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(z)\in D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{Q}_p$.

(iv) *Le sous-espace* $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ *des* $z\in D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ *vérifiant* $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(z)\in D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{Q}_p$ *est stable par* G *et contient l'image de l'orthogonal de* $\Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ *comme sous-module d'indice fini.*

On définit la *représentation contragrédiente* $\check{\Pi}$ de Π par

$$\check{\Pi}=(D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)/\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^\vee).$$

Théorème 0.14. — (i) $\check{\Pi}$ *est un objet de* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ *sans quotient fini.*

(ii) *La contragrédiente* $(\mathbf{D}(\check{\Pi})\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1)/\beta_{\mathbf{P}^1}(\check{\Pi}^\vee)$ *de* $\check{\Pi}$ *est isomorphe à* Π.

Exemples 0.15. — (i) Si $\Pi=B(\delta_1,\delta_2)$, alors $\check{\Pi}\cong B(\delta_2,\delta_1)\otimes\delta_\Pi^{-1}$.

(ii) $\check{\mathrm{St}}$ est une extension non triviale de $B(1,\omega)$ par $\mathbf{1}$.

(iii) Si Π est supersingulière, alors $\check{\Pi}\cong\Pi\otimes\delta_\Pi^{-1}$.

Remarque 0.16. — La restriction à B ne perd pratiquement pas d'information puisque la construction de D n'utilise que l'action du mirabolique, et que la connaissance de D et du caractère central permet de reconstruire Π (à des morceaux finis près dans

certains cas particuliers). Ceci est assez surprenant si on se réfère à ce que l'on sait des représentations lisses de G en caractéristique 0 : la restriction à B d'une supercuspidale est entièrement déterminée par son caractère central (théorie du modèle de Kirillov). Pour des résultats dans la même veine, voir [**7, 58**].

9. La correspondance de Langlands locale p-adique. — On remarque que $\check{\Pi}$ ne diffère de $(D\boxtimes\mathbf{P}^1)/(D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)$ que par des modules finis. Cela suggère la définition ci-dessous de $\mathbf{\Pi}(D)$, le choix du caractère central étant dicté par le désir qu'il soit lié au déterminant de la représentation galoisienne $\mathbf{V}(D)$, comme dans le cas classique.

Dans tout ce qui suit, D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, de dimension 2 sur $\mathscr{E}$. Son déterminant est de la forme $\mathscr{E}\otimes\alpha_D$, pour un certain $\alpha_D : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$, qui n'est autre que le caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ associé, via la théorie locale du corps de classes, à la représentation $\det\mathbf{V}(D)$, et on définit un caractère δ_D par la formule $\delta_D(x) = (x|x|)^{-1}\alpha_D(x)$. Comme on est en dimension 2, on a $\check{D} = D\otimes\delta_D^{-1}$, où $\check{D} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(D, \mathscr{E}\frac{dT}{1+T})$ est le *dual de Tate* de D. On note simplement $D\boxtimes\mathbf{P}^1$ la représentation $D\boxtimes_{\delta_D}\mathbf{P}^1$; son caractère central est δ_D.

Théorème 0.17. — *Soit $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, irréductible, de dimension 2.*

(i) *Le module $D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1 = \{z\in D\boxtimes\mathbf{P}^1,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}z\in D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p\}$ est stable par G.*

(ii) *Le quotient $\mathbf{\Pi}(D)$ de $D\boxtimes\mathbf{P}^1$ par $D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ est un objet irréductible de $\mathrm{Rep}_L G$, et $D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\cong\mathbf{\Pi}(D)^*\otimes\delta_D$, où $\mathbf{\Pi}(D)^*$ est le dual topologique de $\mathbf{\Pi}(D)$; on a donc une suite exacte*

$$0\to\mathbf{\Pi}(D)^*\otimes\delta_D\to D\boxtimes\mathbf{P}^1\to\mathbf{\Pi}(D)\to 0.$$

(iii) $\mathbf{D}(\mathbf{\Pi}(D)) = \check{D}$.

Remarque 0.18. — (o) La correspondance $V\mapsto\mathbf{\Pi}(V)$ s'obtient en composant l'équivalence de catégories $V\mapsto\mathbf{D}(V)$ avec l'application $D\mapsto\mathbf{\Pi}(D)$ ci-dessus.

(i) La construction décrite dans le théorème part d'objets de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, puis s'étend à $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ par limite projective, et finalement à $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ en tensorisant par L. Elle est donc, par nature, compatible à la réduction modulo p (à des petits morceaux de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ près dans certains cas particuliers, essentiellement celui où $\overline{V}$ est, à torsion près par un caractère, une extension non triviale de $k_L(\omega)$ par k_L).

(ii) Comme $\mathscr{E}$ est, topologiquement, l'extension d'un banach par le dual d'un banach, il en est de même de $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, pour tout δ, mais il est probable que δ_D soit le seul caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ pour lequel les morceaux composant cette extension soient stables par G.

(iii) La stabilité de $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ par G se démontre par prolongement analytique [6] à partir, au choix, du cas cristabélin ou du cas triangulin [7]. Une démonstration directe, pour un (φ,Γ)-module de torsion, « de type $\mathbf{GL}_2$ » serait souhaitable.

(iv) L'utilisation du prolongement analytique est rendue possible par le fait que la construction de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est analytique en D et δ : si S est un quotient de $\mathscr{O}_L[[X_1,\dots,X_d]]$, si D est un (φ,Γ)-module étale sur $S\widehat{\otimes}\mathscr{O}_\mathscr{E}$, et si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to S^*$ est un caractère continu, alors $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est une S-représentation de G interpolant les représentations $D_s \otimes_{\delta_s} \mathbf{P}^1$, pour $s \in \mathrm{Spec}(S)$.

10. Vecteurs localement analytiques. — Si Π est une représentation unitaire admissible de G, on dit que $v \in \Pi$ est *localement analytique* si $g \mapsto g \cdot v$ est une fonction localement analytique sur G (à valeurs dans Π). L'ensemble Π^{an} des vecteurs localement analytiques de Π est stable par G, et Schneider et Teitelbaum [**66**] en ont donné une description qui montre en particulier que Π^{an} n'est jamais réduit à 0. Le résultat de Schneider et Teitelbaum fait écho à l'existence d'éléments surconvergents dans tout (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$. Le résultat qui suit montre qu'il ne s'agit pas d'un simple écho.

Théorème 0.19. — (i) *L'ensemble $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$ des $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes \mathbf{P}^1$, avec $z_1, z_2 \in D^\dagger$, est stable par G.*

(ii) *Son image dans $\mathbf{\Pi}(D)$ est égale à $\mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{an}}$.*

(iii) *L'action de G s'étend par continuité à $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, et on a une suite exacte*

$$0 \to (\mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{an}})^* \otimes \delta_D \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{an}} \to 0.$$

Les formules du squelette d'action montrent que, pour prouver le (i), il suffit de vérifier que $D^\dagger \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est stable par w. La piètre convergence de la formule définissant l'action de w en rend impossible (du moins il semble) une démonstration directe. Pour contourner le problème, on utilise le module $\mathscr{C}(D) = (1-\varphi)\cdot D^{\psi=1}$, que Fontaine appelle le *coeur de D*. C'est un $\Lambda[\frac{1}{p}]$-module libre de rang 2 (où $\Lambda = \mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ est l'algèbre d'Iwasawa), inclus dans $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. On note $\mathscr{C}'(D)$ l'image de $\mathscr{C}(\check{D})$ par l'application $x \mapsto x \otimes \delta_D$. La stabilité de $D^\dagger \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ sous l'action de w suit, grâce à l'antilinéarité de w (i.e. $w \circ \sigma_a = \delta_D(a)\sigma_{a^{-1}} \circ w$), des faits suivants [8] :

---

[6] Je dois à Kisin l'idée d'utiliser la topologie de Zariski pour attaquer ce genre de questions.

[7] Pour pouvoir utiliser cet argument, il faut savoir que les représentations en question sont zariski-denses dans l'espace de toutes les représentations, ce qui se vérifie représentation résiduelle par représentation résiduelle. Si $p \geq 5$ ou si $p = 3$ et $\overline{V}$ n'est pas, à torsion près par un caractère, une extension de k_L par $k_L(\omega)$ ou $\mathrm{ind}\,\omega_2^2$, le résultat est démontré dans [**28, 55**]. Dans les deux cas ci-dessus pour $p = 3$, le résultat suit de [**12**]. Si $p = 2$ et si $\overline{V}^{\mathrm{ss}}$ n'est pas la somme de deux caractères égaux, Chenevier a vérifié (communication personnelle) que l'espace des déformations de $\overline{V}$ était la réunion de deux boules de dimension 5, correspondant aux deux valeurs possibles (1 et -1) du déterminant (vu comme caractère de $\mathbf{Q}_p^*$) en -1 ; on en déduit facilement, via les méthodes habituelles, le résultat dans ce cas aussi. Il ne fait aucun doute que le résultat est encore vrai dans le cas où $\overline{V}^{\mathrm{ss}}$ est la somme de deux caractères égaux, mais cela reste à confirmer...

[8] Les anneaux $\mathscr{E}(\Gamma)$, $\mathscr{E}^\dagger(\Gamma)$ et $\mathscr{R}(\Gamma)$ sont obtenus à partir de Λ de la même manière que $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$ sont obtenus à partir de $\mathscr{O}_\mathscr{E}^+$; on remplace juste T par $\gamma - 1$, où γ est un générateur de Γ.

- $w(\mathscr{C}(D)) = \mathscr{C}'(D)$,
- $D^\dagger \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \mathscr{E}^\dagger(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}(D) = \mathscr{E}^\dagger(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}'(D)$.

Notons que l'on a aussi [9] :

- $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \mathscr{E}(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}(D) = \mathscr{E}(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}'(D)$,
- $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \mathscr{R}(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}(D) = \mathscr{R}(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}'(D)$.

11. Correspondances p-adique et classique. — Si Π est une représentation unitaire admissible de G, on dit que $v \in \Pi$ est *localement algébrique* si la fonction $g \mapsto g \cdot v$ est localement polynomiale (en a, b, c, d et $(ad-bc)^{-1}$, à coefficients dans Π) sur G. L'espace Π^{alg} des vecteurs localement algébriques de Π est stable par G mais, contrairement à celui des vecteurs localement analytiques, est nul en général.

Théorème 0.20. — *Si D est un (φ,Γ)-module, étale sur $\mathscr{E}$, irréductible, de dimension 2, alors $\mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{alg}} \neq 0$ si et seulement si D est de Rham à poids de Hodge-Tate distincts $a < b$. De plus, $\mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{alg}} = \mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{lc}} \otimes (\mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det{}^a)$, où $\mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{lc}}$ est une représentation lisse et admissible de G, et Sym^{b-a-1} est la puissance symétrique $(b-a-1)$-ième de la représentation standard de G sur $\mathbf{Q}_p \oplus \mathbf{Q}_p$.*

Le résultat suivant montre que la correspondance de Langlands locale p-adique encode la correspondance classique. Rappelons que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable [10] et donc que si D est de Rham, il lui est associé un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module D_{pst}, muni d'une filtration admissible permettant de reconstruire D. En utilisant φ pour rendre linéaire l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on transforme le module D_{pst} en une représentation du groupe de Weil-Deligne de $\mathbf{Q}_p$, à laquelle la correspondance de Langlands classique associe une représentation $\mathrm{LL}(D_{\mathrm{pst}})$, qui est lisse, admissible, de dimension finie, irréductible en général (dans tous les cas sauf celui où $N = 0$ bien que l'action de $W_{\mathbf{Q}_p}$ rende possible la non nullité de N).

Théorème 0.21. — *On a $\mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{lc}} = \mathrm{LL}(D_{\mathrm{pst}})$.*

Dans le cas où D_{pst} est la somme de deux caractères de $W_{\mathbf{Q}_p}$, ce résultat est inclus dans les travaux de Berger-Breuil [**8**]. On peut aussi le retrouver en décrivant le module de Jacquet de $\mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{lc}}$, ce qui à l'avantage de couvrir aussi le cas où $N \neq 0$ et celui où D_{pst} n'est pas semi-simple comme représentation de $W_{\mathbf{Q}_p}$. Dans les autres cas, on montre que $\mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{lc}}$ est supercuspidale et ne dépend que du $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module D_{pst}, et pas de la filtration, ce qui permet de choisir une filtration correspondant à une forme modulaire et donc d'utiliser les travaux d'Emerton [**36, 39**] pour conclure. La démonstration a donc recours à un argument global que je ne désespère pas de voir disparaître dans un futur proche.

---

[9] Le premier de ces résultats est un des ingrédients permettant de retrouver la formule d'Euler-Poincaré de Tate à partir de la théorie des (φ,Γ)-modules [**46**].

[10] Berger [**4**] a réduit cet énoncé, conjecturé par Fontaine, à la conjecture de monodromie p-adique de Crew démontrée peu après, indépendamment, par André [**1**], Mebkhout [**56**] et Kedlaya [**50**]. On pourra consulter [**24**] pour une présentation d'ensemble de ces travaux ; une autre démonstration peut se trouver dans [**27**].

Remarque 0.22. — La démonstration de l'indépendance de $\mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{lc}}$ par rapport à la filtration donne un résultat un peu plus fort. Soient M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module, et $a < b$ des entiers ; on note $\mathrm{LL}(M,a,b)$ la représentation $\mathrm{LL}(M) \otimes (\mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det^a)$ de G. On suppose que l'ensemble $\mathscr{F}$ des filtrations admissibles à poids a et b que l'on peut mettre sur $M_{\mathrm{dR}} = (\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ est non vide. Alors $\mathscr{F}$ est naturellement paramétré par $\mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ privé de 0, 1 ou 2 points. Si $\mathscr{L} \in \mathscr{F}$, on note $D_{\mathscr{L}}$ le (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$ qui lui correspond via les résultats de [**33**] et l'équivalence de catégories de Fontaine.

Il existe alors une représentation analytique $\Pi(M,a,b)$ de G, dont les vecteurs algébriques $\Pi(M,a,b)^{\mathrm{alg}}$ sont la somme de deux copies de $\mathrm{LL}(M,a,b)$, et dont les $\mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}$ sont des quotients. De manière plus précise, le choix de $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dR}})$ fournit un plongement de $\mathrm{LL}(M,a,b)$ dans $\Pi(M,a,b)^{\mathrm{alg}}$, et $\mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}$ est le quotient de $\Pi(M,a,b)$ par la copie de $\mathrm{LL}(M,a,b)$ correspondant à $\mathscr{L}$. De plus, $\Pi'(M,a,b) = \Pi(M,a,b)/\Pi(M,a,b)^{\mathrm{alg}}$ est une représentation localement analytique de G, et $\mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}$ est une extension de $\Pi'(M,a,b)$ par $\mathrm{LL}(M,a,b)$. En d'autres termes, les composantes de Jordan-Hölder de $\mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}$ ne dépendent pas de la filtration ; celle-ci est encodée dans l'extension entre ces composantes.

12. Théorie d'Iwasawa et vecteurs localement algébriques. — La correspondance de Langlands locale classique est normalisée via les facteurs locaux des fonctions L, alors que la correspondance p-adique, décrite plus haut, repose sur une construction directe. Les facteurs locaux des fonctions L p-adiques jouent toutefois un rôle occulte très important.

On note $\Lambda = \mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa. Si $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et si $D = \mathbf{D}(V)$ et $\Pi = \mathbf{\Pi}(V)$ sont les objets qui lui sont attachés, alors l'application $\mu \mapsto \beta_{\mathbf{Z}_p}(\mu)$ induit un isomorphisme de $\{\mu \in \Pi^*,\ \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu = \mu\}$ sur $D^{\psi=1}$. Or le Λ-module $D^{\psi=1}$ est, d'après un résultat de Fontaine (non publié, mais voir [**21**]), naturellement isomorphe au module[(11)] d'Iwasawa $H^1_{\mathrm{Iw}}(V) = H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes V)$. Si V est cristalline ou semi-stable, on peut décrire $D^{\psi=1}$ en termes de distributions sur $\mathbf{Z}_p$, et on obtient de la sorte une machine (équivalente à celle de Perrin-Riou [**62**]) fabriquant des fonctions L p-adiques à partir d'éléments de $H^1_{\mathrm{Iw}}(V)$ d'origine globale ; en d'autres termes, l'isomorphisme $H^1_{\mathrm{Iw}}(V) \cong D^{\psi=1}$ peut être vu comme un analogue p-adique des facteurs locaux des fonctions L p-adiques. On peut donc espérer que le module $D^{\psi=1}$ va jouer un rôle important dans la correspondance de Langlands locale p-adique. C'est effectivement le cas, et les idées de théorie d'Iwasawa interviennent à plusieurs endroits dans la détermination des vecteurs localement algébriques.

Si D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ de rang d sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, le module $\mathscr{C}(D) = (1-\varphi)D^{\psi=1}$ est, ce qui joue un rôle fondamental dans la théorie d'Iwasawa des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,

(11) Ce module peut se décrire en termes plus traditionnels en choisissant un $\mathscr{O}_L$-réseau V^0 de V stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$: le lemme de Shapiro fournit un isomorphisme $H^1_{\mathrm{Iw}}(V) \cong L \cdot \varprojlim H^1(\mathscr{G}_{F_n}, V^0)$, la limite projective étant relative aux applications de corestriction, et $F_n = \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^n})$ étant le sous-corps de $\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ fixé par $\Gamma_n \cong 1 + p^n \mathbf{Z}_p$.

libre de rang d sur Λ. La démonstration de ce fait repose sur la construction d'un accouplement parfait $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}} : \mathscr{C}(\check{D})\times\mathscr{C}(D)\to\Lambda$, noté ainsi car on peut l'obtenir, via l'isomorphisme $D^{\psi=1}\cong H^1_{\mathrm{Iw}}(V)$, à partir d'un accouplement $H^1_{\mathrm{Iw}}(\check{V})\times H^1_{\mathrm{Iw}}(V)\to\Lambda$ utilisé classiquement en théorie d'Iwasawa (rem. VIII.1.5).

En exprimant en termes de (φ,Γ)-modules la convolution de deux mesures sur $\mathbf{Z}_p^*$, on obtient une formule permettant de définir, à partir de toute application bilinéaire $M : D_1\times D_2\to D_3$ (où D_1, D_2, D_3 sont des (φ,Γ)-modules), commutant aux actions de Γ et φ, une application $M_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1,z_2) : (D_1\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)\times(D_2\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)\to(D_3\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)$. On peut en particulier appliquer ceci à l'accouplement tautologique $\langle\ ,\ \rangle : \check{D}\times D\to\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$, et donc obtenir un accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{Z}_p^*} : (\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)\times(D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)\to\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$.

Théorème 0.23. — *Si $z_1\in\mathscr{C}(\check{D})$, et si $z_2\in\mathscr{C}(D)$, alors*

$$d\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^{\chi(\gamma)}\,\langle z_1,z_2\rangle_{\mathrm{Iw}}\Big)=-\langle w_*z_1,z_2\rangle_{\mathbf{Z}_p^*},$$

où $w_*:\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*\to\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ est l'opération associée au difféomorphisme $x\mapsto 1/x$.

Remarque 0.24. — (i) Si $D=\mathbf{D}(V)$, où V est une représentation cristalline, on peut décrire D en termes du module $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Le membre de droite s'exprime alors au moyen de distributions sur $\mathbf{Z}_p^*$ à valeurs dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\check{V})$, et le membre de gauche, en termes de cohomologie galoisienne, comme il est expliqué plus haut. Un peu de travail montre que l'on retombe alors sur la loi de réciprocité de Perrin-Riou [**61**], telle qu'elle est démontrée dans [**22**].

(ii) Si D est de rang 2, alors $x\mapsto x\otimes\delta_D^{-1}$ induit un isomorphisme de D sur $\check{D}$. Il est alors assez facile de voir que, si D est irréductible, $x\mapsto(w\cdot x)\otimes\delta_D^{-1}$ induit un isomorphisme de $\mathscr{C}(D)$ sur $\mathscr{C}(\check{D})$, et le théorème permet de montrer que l'accouplement $(x,y)\mapsto\langle(w\cdot x)\otimes\delta_D^{-1},y\rangle_{\mathrm{Iw}}$ est Λ-bilinéaire et, ce qui est fondamental, *antisymétrique.*

La manière dont ce résultat est utilisé pour faire la chasse aux vecteurs localement algébriques repose sur une extension, à une représentation arbitraire, de la loi de réciprocité explicite de Kato [**49**] (dualité entre l'*exponentielle de Bloch-Kato* et l'*exponentielle duale de Kato*). On suppose dans la discussion qui suit que D est presque de Rham à poids 0 et $k\geq 1$ (comme les poids sont distincts, cela implique que D est Hodge-Tate).

Soit $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}(D)$ l'image de $D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ par $(\varphi-1)$ (comme on a supposé D irréductible, $\varphi-1$ induit un isomorphisme de $D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ sur $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}(D)$). On déduit des isomorphismes (où $\mathscr{D}(\Gamma)=\mathscr{R}^+(\Gamma)$ est l'algèbre des distributions sur Γ)

$$D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}=\mathscr{D}(\Gamma)\otimes_\Lambda D^{\psi=1}\cong\mathscr{D}(\Gamma)\otimes_\Lambda H^1_{\mathrm{Iw}}(V)\cong H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\mathscr{D}(\Gamma)\otimes_L V),$$

que $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}(D)\cong H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\mathscr{D}(\Gamma)\otimes_L V)$. De même, $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}(\check{D})\cong H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\mathscr{D}(\Gamma)\otimes_L\check{V})$. Par ailleurs, on dispose, pour tous $n\in\mathbf{N}$ et $i\in\mathbf{Z}$, d'une application $\mu\mapsto\int_{\Gamma_n}\chi^i\mu$ de $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\mathscr{D}(\Gamma)\otimes_L V)$ dans $H^1(\mathscr{G}_{F_n},V\otimes\chi^i)$. On note $c_{i,n}(z)$ l'image d'un élément z de $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}(D)\cong H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\mathscr{D}(\Gamma)\otimes_L V)$ par cette application. Enfin, on dispose, pour toute

représentation W de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de sous-espaces $H^1_{\mathrm{e}}(\mathscr{G}_{F_n}, W)$ (image de l'exponentielle de Bloch-Kato [**11**]) et $H^1_{\mathrm{p-e}}(\mathscr{G}_{F_n}, W)$ (noyau de l'exponentielle duale de Kato [**49**]) de $H^1(\mathscr{G}_{F_n}, W)$. Ceci nous permet, si D est presque de Rham à poids de Hode-Tate 0 et $k \geq 1$, de définir les sous-espaces suivants de $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}(D)$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}(\check{D})$:

$$\mathscr{C}_{\mathrm{e}}(D) = \{z \in \mathscr{C}_{\mathrm{rig}}(D),\ c_{i,n}(z) \in H^1_{\mathrm{e}}(\mathscr{G}_{F_n}, V \otimes \chi^i),\ \text{pour tous } 0 \leq i \leq k-1 \text{ et } n \in \mathbf{N}\},$$

$$\mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}(\check{D}) = \{z \in \mathscr{C}_{\mathrm{rig}}(\check{D}),\ c_{i,n}(z) \in H^1_{\mathrm{p-e}}(\mathscr{G}_{F_n}, \check{V} \otimes \chi^i),\ \text{pour tous } 0 \leq i \leq k-1 \text{ et } n \in \mathbf{N}\}.$$

On note enfin $\mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}(D)$ l'image de $\mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}(\check{D})$ par $x \mapsto x \otimes \delta_D$. Le résultat crucial est alors le suivant.

Théorème 0.25. — $w(\mathscr{C}_{\mathrm{e}}(D)) = \mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}(D)$.

La différence entre le cas de Rham et le cas non de Rham est que, dans le cas de Rham, l'image de l'exponentielle de Bloch-Kato est égale au noyau de l'exponentielle duale, alors que dans le cas non de Rham, ces deux espaces sont supplémentaires. Ceci permet de traduire le théorème de la manière suivante.

Proposition 0.26. — *Si D est de Rham, le sous-$\mathscr{R}(\Gamma)$-modules $\mathscr{R}(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}_{\mathrm{e}}(D)$ de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est stable par w, alors que si D n'est pas de Rham, il ne l'est pas.*

Un vecteur localement algébrique pour l'action de G l'est en particulier pour celle de $P(\mathbf{Q}_p)$. Traduit en termes d'actions de T et Γ, ceci permet de montrer que l'image de Π^{alg} par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ est incluse dans $\mathscr{R}(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}_{\mathrm{e}}(D)$ et, avec l'aide de la théorie du modèle de Kirillov, que si $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$, cette image engendre $\mathscr{R}(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}_{\mathrm{e}}(D)$. La proposition permet donc de montrer que, si D n'est pas de Rham, il n'y a pas de vecteurs localement algébriques, et avec un peu de travail supplémentaire, que $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$, si D est de Rham.

13. Genèse de l'article

1. La conférence de Montréal. — La correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations triangulines [**8, 25, 26**], de dimension 2, de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, présentait un aspect très encourageant, comparée à la correspondance de Langlands locale classique : si V est une telle représentation, si Π est la représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui lui correspond, et si D est le (φ, Γ)-module qui lui est attaché par l'équivalence de catégories de Fontaine [**40**], alors le dual topologique Π^* de Π peut se décrire directement à partir de D. De manière précise, on a un isomorphisme de $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $\Pi^* \cong D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. La démonstration consiste à expliciter les deux membres et n'est pas particulièrement éclairante... Par contre, l'isomorphisme ci-dessus rendait plausible l'existence d'une correspondance pour *toutes* les représentations de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et pas seulement pour les représentations géométriques (i.e. potentiellement semi-stables).

Il est un peu difficile d'extraire le (φ, Γ)-module D du $P(\mathbf{Q}_p)$-module $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$, mais en cherchant à le faire, je me suis aperçu que l'on obtenait de la sorte un foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ de la catégorie des L-représentations unitaires (admettant un caractère

central), admissibles, de longueur finie, de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dans celle des L-représentations de dimension finie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, avec $\Pi^* \cong \mathbf{D}(\check{\mathbf{V}}(\Pi)) \boxtimes \mathbf{Q}_p$, en tant que représentation de $P(\mathbf{Q}_p)$. La représentation $\mathbf{V}(\Pi)$ n'a aucune raison d'être de dimension 2 (ce qui est un peu gênant pour une correspondance de Langlands), mais si Π est *superadmissible*, c'est-à-dire si la réduction $\overline{\Pi}$ de Π modulo $\mathfrak{m}_L$ est un *atome automorphe* (i.e. est la réduction d'une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ attachée à une représentation trianguline irréductible de dimension 2), alors $\mathbf{V}(\Pi)$ est de dimension 2. J'ai annoncé ces résultats lors de la conférence de Montréal de septembre 2005, en terminant mon exposé par trois questions.

(Q1) Est-ce-que $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ est injective, ou plutôt, est-ce-qu'une représentation superadmissible de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est déterminée par sa restriction au borel ?

(Q2) Quelle est l'image de $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$? Elle contient les triangulines, mais obtient-on tout ?

(Q3) Est-ce-que $\dim \mathbf{V}(\Pi) \leq 2$, si Π est irréductible et admissible ?

Si (Q3) a une réponse négative [12], cela suggère qu'il existe des extensions entre k_L-représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ autres que celles fournies par les atomes automorphes (dont les semi-simplifiés ont été déterminés par Berger [**7**], en utilisant des calculs de réductions modulo p de Breuil [**14**] et de Breuil-Mézard [**16**]). Emerton a alors vérifié, pendant la conférence, que les seules extensions entre séries principales modulo p sont celles sortant des calculs de Breuil et Mézard, et qu'il n'y a pas d'extension non triviale du type $0 \to \Pi_1 \to E \to \Pi_2 \to 0$, où Π_1 est supersingulière et Π_2 est de la série principale.

2. La première version de cet article. — Peu de temps après la conférence, Kisin m'a envoyé un courriel expliquant comment une réponse positive (et même quelque chose de beaucoup plus faible) à (Q1) impliquerait une réponse positive à (Q1) et (Q2) en utilisant la zariski-densité [13] des triangulines dans l'espace des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. L'argument de Kisin est le suivant [**55**]. Si $\overline{\Pi}$ est un atome automorphe, le foncteur $\mathbf{V}$ induit un morphisme $\mathbf{V}_{\overline{\Pi}}$ de l'espace des déformations [14] de $\overline{\Pi}$ dans celui des déformations de $\mathbf{V}(\overline{\Pi})$. Si $\mathbf{V}$ induit une injection de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}(\overline{\Pi},\overline{\Pi})$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\mathbf{V}(\overline{\Pi}),\mathbf{V}(\overline{\Pi}))$, alors $\mathbf{V}_{\overline{\Pi}}$ est une immersion fermée, et comme son image contient les triangulines qui sont zariski-denses, $\mathbf{V}_{\overline{\Pi}}$ est un isomorphisme.

Avant de recevoir le courriel de Kisin, j'étais en train d'essayer de construire directement la représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ à partir du (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(V)$, par la méthode expliquée plus haut. Je me suis aperçu, à mon grand effroi, que si ce que je cherchais

[12] Paskunas [**60**] a récemment prouvé que (Q3) admet une réponse positive, au moins si $p \geq 5$.

[13] Cette densité peut se vérifier [**28, 55**] par un argument adapté de la « fougère infinie » de Gouvêa et Mazur [**43**], qui ont utilisé cet argument pour démontrer un résultat du même type, mais global (i.e. pour démontrer la zariski-densité des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ attachées aux formes modulaires surconvergentes ; ces représentations sont précisément celles dont la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline [**53**]).

[14] Comme Paskunas l'a fait remarquer, il faut, pour faire marcher l'argument, fixer un caractère δ de $\mathbf{Q}_p^*$ et regarder les déformations de $\overline{\Pi}$ de caractère central $((x|x|)^{-1}\delta) \circ \det$, et les déformations de $\mathbf{V}_{\overline{\Pi}}$ de déterminant δ.

à faire marchait, on pouvait construire une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à partir de n'importe quel (φ,Γ)-module (de toute dimension), ce qui était clairement absurde. De plus, les ingrédients topologiques nécessaires pour vérifier que la construction redonnait ce que l'on voulait dans le cas cristallin étaient un peu plus subtils que ce que je pensais, d'où un échec qui a achevé de me persuader que je faisais fausse route. Je me suis donc rabattu sur la stratégie de Kisin, ce qui a abouti à la première version [**31**] de cet article, qui contenait ce qu'il fallait pour faire marcher cette approche (à quelques cas près en caractéristiques résiduelles 2 et 3), à savoir :

– Une construction du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ (bien simplifiée par rapport à celle présentée à la conférence de Montréal).

– Une classification des atomes automorphes (à quelques exceptions près si $p = 2$ ou $p = 3$).

– Une preuve de l'injectivité de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}(\overline{\Pi},\overline{\Pi}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\mathbf{V}(\overline{\Pi}),\mathbf{V}(\overline{\Pi}))$ pour les atomes automorphes dans la liste obtenue ci-dessus.

– Quelques calculs, utilisant le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ de $\mathrm{Ext}^1(\Pi_1,\Pi_2)$, pour des k_L-représentations irréductibles Π_1,Π_2 de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Emerton [**37**] a obtenu des résultats similaires par une autre méthode. Depuis la première version de cet article, ces résultats ont été complétés par Paskunas [**59**].

3. L'étude de la correspondance. — Une fois l'existence d'une correspondance établie, on peut chercher à comprendre ce qu'elle cache (un de mes fantasmes récurrents est d'arriver à décrire, de manière purement locale, à partir des (φ,Γ)-modules, la correspondance de Langlands locale classique [**44, 45**], l'espoir étant qu'un (φ,Γ)-module encodant toutes les informations concernant la représentation galoisienne qui lui est attachée, il doit être possible d'y lire aussi la représentation de $\mathbf{GL}_n$ correspondant, dans les bons cas, à cette représentation galoisienne). Pour cette étude, je disposais d'un certain nombre de points d'appui comme le dictionnaire reliant analyse fonctionnelle p-adique et anneaux de Fontaine (dont on peut, en particulier, tirer le fait qu'un (φ,Γ)-module « vit sur $\mathbf{Z}_p$ », et donc qu'il faut le dupliquer pour obtenir un objet vivant sur $\mathbf{P}^1$ et sur lequel G a une chance d'agir), la similitude entre le théorème de Schneider-Teitelbaum sur l'existence de vecteurs localement analytiques et l'existence d'éléments surconvergents dans n'importe que (φ,Γ)-module étale, ou la conviction que le triangle constitué des $D^{\psi=1}$, de H^1_{Iw} et de $(\Pi^*)^{\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1}$ devait jouer un rôle important. Le fait que w envoie $D^{\psi=1}$ dans $\check{D}^{\psi=1}$ et le lien assez transparent entre exponentielle de Bloch-Kato et algébricité pour le mirabolique (vecteurs P-algébriques) suggéraient fortement que la stabilité des vecteurs P-algébriques sous l'action de w devait être liée à l'équation fonctionnelle de la fonction L classique (pour une représentation provenant d'une forme modulaire). Comme celle-ci est équivalente à celle de la fonction L p-adique, qui découle de la loi de réciprocité explicite de Perrin-Riou, il semblait raisonnable de penser qu'on devait pouvoir étendre celle-ci par prolongement analytique à toute représentation, et que ceci devrait être la clef de l'étude des vecteurs localement algébriques. Ceci s'est révélé être le cas, mais par des chemins plus tortueux que ceux que j'espérais.

14. Organisation de l'article. — J'ai essayé, autant que possible, de minimiser la dépendance entre les chapitres. Les constructions des foncteurs $D \mapsto \mathbf{\Pi}(D)$ et $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ sont complètement indépendantes. Celle de $D \mapsto \mathbf{\Pi}(D)$, à laquelle le chap. II est consacrée, s'appuie de manière essentielle sur les résultats de [**32**] ; ceux-ci sont, pour le confort du lecteur, résumés dans les §§ I.2, I.3 et I.4. La construction (chap. IV) du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ est nettement plus élémentaire que celle du foncteur $D \mapsto \mathbf{\Pi}(D)$; elle n'utilise le chap. I que comme inspiration et s'appuie un peu sur les résultats généraux du chap. III portant sur les représentations lisses de $\mathbf{GL}_2$ d'un corps local. Par contre, la vérification du fait que les deux foncteurs sont inverses l'un de l'autre (§ IV.4) utilise pleinement les résultats des chap. I, II et IV.

Le chap. V, consacré à l'étude des vecteurs localement analytiques de $\mathbf{\Pi}(D)$, est un prolongement du chap. II, et est totalement indépendant des chap. III et IV ; il n'utilise que le § I.1 du chap. I. Par contre, il repose sur des résultats assez lourds concernant la surconvergence ou l'existence de vecteurs localement analytiques qui ne sont rappelés que succinctement.

Le chap. VI, consacré à l'étude des vecteurs localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(D)$, est indépendant du chap. III et dans une large mesure du chap. IV (dont il n'utilise que la prop. IV.4.10 pour établir l'indépendance de $\mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{alg}}$ par rapport à la filtration (n° 9 du § VI.6)). Par contre, il utilise largement les résultats des autres chapitres ainsi que la théorie classique du modèle de Kirillov [**48**] et les résultats « à la Sen » de [**41**].

Le chap. VII est un prolongement du chap. IV et est totalement indépendant des chap. II, V et VI.

Enfin, le chap. VIII est un appendice faisant le lien entre certaines des constructions de l'article et des résultats classiques concernant la cohomologie galoisienne des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

15. Remerciements. — Comme l'introduction le montre amplement, le rôle joué par Emerton et Kisin dans la genèse de cet article a été très important. Les travaux de Berger, Breuil, Mézard, Schneider et Teitelbaum ont servi de fil conducteur pour beaucoup de résultats de cet article. Je voudrais aussi remercier A. Iovita et H. Darmon et le CRM de Montréal, ainsi que J. Schwermer et l'Institut Erwin Shrödinger de Vienne, pour leur hospitalité ; les exposés que j'ai donnés lors des conférences à ces deux endroits, en septembre 2005 et janvier 2006, m'ont grandement aidé à mettre mes idées au clair.

Cet article a été rédigé par petits bouts dans des endroits variés (pour une raison que j'ai du mal à cerner, on ne travaille jamais mieux que quand on n'est pas dans son bureau...). Il a en particulier bénéficié de séjours à l'université de Keio en octobre-novembre 2007 et au CMI de Madras en janvier 2008. Je remercie aussi les organisateurs du CEMRACS 2008 pour leur hospitalité au CIRM lors du sprint final. Une première révision de cet article a été faite lors de séjours au Morningside center de Pékin et au Tata Institute de Bombay en octobre-décembre 2008, et je remercie le programme CEFIPRA 3701-2 d'avoir financé ce séjour à Bombay où j'ai achevé le travail commencé sous le programme 3501-1, près de 5 ans plus tôt. Je remercie aussi

M. Emerton pour les échanges que nous avons eus en octobre 2009 à Chicago, et qui sont à l'origine de certains ajouts tardifs.

Enfin, je remercie les rapporteurs dont les commentaires m'ont grandement aidé à améliorer la rédaction, G. Henniart qui a coordonné leurs interventions, ainsi que G. Chenevier et G. Dospinescu pour leurs doutes au sujet de certaines de mes affirmations.

I. Généralités sur les (φ,Γ)-modules

Ce chapitre est consacré à l'établissement d'un dictionnaire permettant de transférer aux (φ,Γ)-modules les structures dont on dispose pour les mesures sur $\mathbf{Z}_p$. Il se termine par une loi de réciprocité générale (th. I.5.5), qui étend celle conjecturée par Perrin-Riou [**61**] dans le cas cristallin, et qui joue un rôle crucial dans l'étude des vecteurs algébriques des représentations de G attachées aux (φ,Γ)-modules.

I.1. Dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique

1. Le corps $\mathscr{E}$. — Le corps $\mathscr{E}$ défini dans l'introduction est l'ensemble des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$, avec $a_k \in L$, telles que la suite $(v_p(a_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ soit minorée et vérifie $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty$. Le corps $\mathscr{E}$ est complet pour la la valuation discrète $v^{\{0\}}$ définie par $v^{\{0\}}(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k) = \inf_{k\in\mathbf{Z}} v_p(a_k)$. L'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ des entiers de $\mathscr{E}$ est l'anneau des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$, avec $a_k \in \mathscr{O}_L$, telles que la suite $v_p(a_k)$ vérifie $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty$. Le corps résiduel $k_{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{E}$ est $k_L((T))$.

On rappelle que l'on a noté $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ le sous-anneau $\mathscr{O}_L[[T]]$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{E}^+$ le sous-anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{1}{p}]$ de $\mathscr{E}$ et $k_{\mathscr{E}}^+ = k_L[[T]]$ l'anneau des entiers de $k_{\mathscr{E}}$. Les anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, $\mathscr{E}^+$ et $k_{\mathscr{E}}^+$ sont aussi parfois notés $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\natural$, $\mathscr{E}^\natural$ et $k_{\mathscr{E}}^\natural$ suivant le contexte.

La topologie naturelle sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ n'est pas celle définie par la valuation $v^{\{0\}}$ (*topologie forte*) : c'est la *topologie faible* qui est la topologie d'anneau la plus faible rendant continue la réduction $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \to k_{\mathscr{E}}$ modulo $\mathfrak{m}_L$, si $k_{\mathscr{E}}$ est muni de la topologie induite par la valuation v_T ; cette topologie est obtenue en munissant $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ de la base de voisinages de 0 donnée par les $p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}} + T^n\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, pour $k,n \in \mathbf{N}$. On munit alors $\mathscr{E} = \cup_{m\in\mathbf{N}} p^{-m}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ de la topologie de la limite inductive ($\mathscr{O}_L$-linéaire).

2. Fonctions analytiques sur des couronnes. — Si h est un entier ≥ 1, on pose $n_h = (p-1)p^{h-1}$ et $r_h = \frac{1}{n_h}$ de telle sorte que $v_p(\zeta-1) = r_h$, si ζ est une racine primitive p^h-ième de l'unité.

On définit, à partir de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, les anneaux suivants.

– Si $b \geq 1$, on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$ le complété de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{p}{T^{n_b}}]$ pour la topologie p-adique ; c'est l'ensemble des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$, où $a_k \in \mathscr{O}_L$ vérifie [15] $[v_p(a_k)] + kr_b \geq 0$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, et $v_p(a_k) + kr_b \to +\infty$ quand $k \to -\infty$. Cet anneau est aussi complet pour la *topologie faible* (i.e. T-adique) qui est moins fine que la topologie p-adique et qui est celle que nous considérerons dans la suite.

[15] $[v_p(a_k)]$ désigne la partie entière de $v_p(a_k)$.

– Si $b \geq 1$, on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}$ l'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}[\frac{1}{T}]$. On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger}$ la réunion (croissante) des $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}$ et $\mathscr{E}^{\dagger}$ le corps $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger}[\frac{1}{p}]$.

– Si $a \geq b \geq 1$, on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}$ le complété de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+}[\frac{T^{n_a}}{p}, \frac{p}{T^{n_b}}]$ pour la topologie p-adique, et $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}$ l'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}[\frac{1}{p}]$.

– Si $b \geq 1$, on note $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$ l'intersection des $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}$, pour $a \geq b$.

– Enfin, on note $\mathscr{R}$ l'*anneau de Robba*, réunion croissante des $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$, pour $b \geq 1$, et on note $\mathscr{R}^{+}$ ou $\mathscr{R}^{\natural}$ l'intersection de $\mathscr{R}$ et $L[[T]]$.

Ces anneaux s'interprètent en termes de fonctions analytiques sur des couronnes :

• $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$ est obtenu en tensorisant par $\mathscr{O}_L$ l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $0 < v_p(T) \leq r_b$ qui sont définies sur $\mathbf{Q}_p$ et à valeurs entières.

• $\mathscr{E}^{\dagger}$ est l'ensemble des éléments surconvergents de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire les éléments f de $\mathscr{E}$ tels qu'il existe une couronne $0 < v_p(T) \leq r$ sur laquelle f converge.

• $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}$ est l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $r_a \leq v_p(T) \leq r_b$.

• $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$ est l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $0 < v_p(T) \leq r_b$.

• $\mathscr{R}^{+} = \mathscr{R}^{\natural}$ est l'anneau des fonctions analytiques sur le disque unité et $\mathscr{R}$ est l'anneau des fonctions f telles qu'il existe une couronne $0 < v_p(T) \leq r$ sur laquelle f est analytique.

On déduit de la description de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$ en termes de fonctions analytiques le résultat suivant.

Lemme I.1.1. — *Si $m < n$, alors $T^{-p^m}\varphi^m(T)$ est une unité de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}$.*

3. L'action de Γ, les opérateurs φ et ψ. — On munit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ d'actions $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de φ et Γ, respectant la structure d'anneau, par

$$\varphi(T) = (1+T)^p - 1 \quad \text{et} \quad \sigma_a(T) = (1+T)^a - 1, \text{ si } a \in \mathbf{Z}_p^*.$$

Ces actions commutent entre elles, s'étendent par $\mathbf{Q}_p$-linéarité à $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}[\frac{1}{p}]$, laissent stables le sous-corps $\mathscr{E}^{\dagger}$ de $\mathscr{E}$, et s'étendent par continuité à $\mathscr{R}$. Par contre, φ ne laisse pas stable les anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}$ et $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$; il les envoie respectivement dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b+1}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_{b+1}]}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_{a+1},r_{b+1}]}$ et $\mathscr{E}^{]0,r_{b+1}]}$. Ces anneaux sont, en revanche, stables sous l'action de Γ.

Le corps $\mathscr{E}$ est une extension de degré p de $\varphi(\mathscr{E})$, ce qui permet de définir un inverse à gauche ψ de φ par la formule $\psi(f) = p^{-1}\varphi^{-1}(\mathrm{Tr}_{\mathscr{E}/\varphi(\mathscr{E})}f)$. Alors ψ laisse stable $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E}^{\dagger}$, s'étend par continuité à $\mathscr{R}$, et envoie les anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b+1}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_{b+1}]}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_{a+1},r_{b+1}]}$ et $\mathscr{E}^{]0,r_{b+1}]}$ dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}$ et $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$ respectivement. De plus,

• ψ commute à Γ,

• $\psi(f\varphi(g)) = g\psi(f)$, pour tous f, g dans un des anneaux considérés,

• $\psi\big(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(f_i)\big) = f_0$,

• $\psi(f)\big((1+T)^p - 1\big) = \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1} f\big((1+T)\zeta - 1\big)$, si $f \in \mathscr{E}^{]0,r_1]}$.

4. Résidus. — Si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ est un élément de $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{R}$, on définit le résidu de la forme différentielle $\omega = f\,dT$ par la formule $\text{rés}_0(\omega) = a_{-1}$. Un petit calcul montre (cf. [**47**] ou [**32**, prop. I.2.2]) que l'on a le résultat suivant.

Proposition I.1.2. — *Si $f \in \mathscr{E}$ ou si $f \in \mathscr{R}$, alors :*
(i) $\text{rés}_0(\sigma_a(f)\frac{dT}{1+T}) = a^{-1}\text{rés}_0(f\frac{dT}{1+T})$, *pour tout* $a \in \mathbf{Z}_p^*$,
(ii) $\text{rés}_0(\varphi(f)\frac{dT}{1+T}) = \text{rés}_0(\psi(f)\frac{dT}{1+T}) = \text{rés}_0(f\frac{dT}{1+T})$.

L'application rés_0 induit des dualités parfaites sur $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$ (cf. rem. I.1.5).

Enfin, remarquons que l'application rés_0 envoie $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$ dans $\mathscr{O}_L$; elle induit donc une application $\text{rés}_0 : \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T} \to L/\mathscr{O}_L$.

5. Espaces fonctionnels et séries de Laurent. — Si M est un $\mathscr{O}_L$-module topologique, on note $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, M)$ l'espace des fonctions continues de $\mathbf{Z}_p$ dans M. Si $M = L$, cet espace est noté simplement $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$. On note $\text{LA}(\mathbf{Z}_p)$ l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$. On renvoie à [**29**], par exemple, pour la démonstration du résultat classique suivant.

Théorème I.1.3. — (i) *Les* $\binom{x}{n}$, *pour* $n \in \mathbf{N}$, *forment une base orthonormale de* $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$; *en particulier,* $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L)$ *si et seulement si le développement* $\phi = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n(\phi)\binom{x}{n}$ *de* ϕ *dans cette base est tel que* $a_n(\phi) \in \mathscr{O}_L$ *pour tout* n *et* $a_n(\phi) \to 0$.
(ii) $\phi \in \text{LA}(\mathbf{Z}_p)$ *si et seulement si il existe* $r > 0$ *tel que* $v_p(a_n(\phi)) - rn \to +\infty$ *quand* $n \to +\infty$.

On note $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, M)$ l'espace des mesures sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans M, c'est-à-dire l'espace des applications linéaires de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L)$ dans M. Si M est un L-espace vectoriel, alors $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, M)$ est aussi l'espace des applications linéaires continues de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$ dans M. Si $M = L$, l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, M)$ est simplement noté $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$.

On note $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ le dual topologique de $\text{LA}(\mathbf{Z}_p)$; c'est l'espace des distributions sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans L. Comme une fonction localement analytique est *a fortiori* continue, on a une application naturelle de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ dans $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$, et cette application est injective.

Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$, on définit sa transformée d'Amice A_μ par la formule

$$A_\mu(T) = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x\,\mu = \sum_{n\in\mathbf{N}} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n}\mu\Big) T^n \in L[[T]].$$

Si $f \in \mathscr{R}$ ou si $f \in \mathscr{E}$, on définit $\phi_f : \mathbf{Z}_p \to L$ par la formule

$$\phi_f(x) = \text{rés}_0\big((1+T)^x f(T)\,\frac{dT}{1+T}\big).$$

Théorème I.1.4. — (i) *L'application* $\mu \mapsto A_\mu(T)$ *induit des isomorphismes de* $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L)$ *sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\natural}$, *de* $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ *sur* $\mathscr{E}^{\natural}$ *et de* $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ *sur* $\mathscr{R}^{\natural}$.
(ii) *L'application* $f \mapsto \phi_f$ *induit des isomorphismes de* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\natural}$ *sur* $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L)$, *de* $\mathscr{E}/\mathscr{E}^{\natural}$ *sur* $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$, *et de* $\mathscr{E}^{\dagger}/\mathscr{E}^{\natural} \cong \mathscr{R}/\mathscr{R}^{\natural}$ *sur* $\text{LA}(\mathbf{Z}_p)$.

(iii) $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi_f\,\mu = \text{rés}_0\big(A_\mu f\,\frac{dT}{1+T}\big)$, *si* $\mu \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ *et* $f \in \mathscr{E}$, *ou si* $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ *et* $f \in \mathscr{R}$.

Démonstration. — Le (i) se déduit du th. I.1.3 par dualité (cf. [**29**] pour une démonstration détaillée). Pour démontrer le (ii), considérons $\psi_f(x) = \text{rés}_0\big((1+T)^x f(T)dT\big)$, si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ appartient à $\mathscr{O}_\mathscr{E}$, $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{R}$. Comme $(1+T)^x = \sum_{k\in\mathbf{N}} \binom{x}{k} T^k$, on a $\psi_f(x) = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_{-1-k}\binom{x}{k}$. On en déduit, en utilisant la définition de $\mathscr{O}_\mathscr{E}$, $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{R}$, et le th. I.1.3, que $f \mapsto \psi_f$ induit des isomorphismes de $\mathscr{O}_\mathscr{E}/\mathscr{O}_\mathscr{E}^\natural$ sur $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L)$, de $\mathscr{E}/\mathscr{E}^\natural$ sur $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$, et de $\mathscr{E}^\dagger/\mathscr{E}^\natural \cong \mathscr{R}/\mathscr{R}^\natural$ sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$. Comme $\phi_f(x) = \psi_f(x-1)$, cela démontre le (ii). Le (iii) peut se réécrire sous la forme

$$\text{rés}_0\Big(\big(f(T)\int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\,\mu\big)\,\frac{dT}{1+T}\Big) = \int_{\mathbf{Z}_p} \text{rés}_0\Big(f(T)(1+T)^x\,\frac{dT}{1+T}\Big)\,\mu,$$

ce qui suit formellement de la linéarité de $\int_{\mathbf{Z}_p}$ et de rés_0.

Remarque I.1.5. — (i) On déduit des th. I.1.3 et I.1.4 des suites exactes d'espaces vectoriels topologiques

$$0 \to \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)^* \to \mathscr{E} \to \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p) \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)^* \to \mathscr{R} \to \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \to 0.$$

La topologie induite sur $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)^*$ par celle de $\mathscr{E}$ est la topologie faible pour laquelle la boule unité, qui correspond à $\mathscr{O}_\mathscr{E}^\natural = \mathscr{O}_L[[T]]$, est compacte. Comme le dual topologique du dual faible d'un L-banach B est B lui-même, on déduit du (iii) du th. I.1.4 que $(f,g) \mapsto \text{rés}_0\big(fg\,\frac{dT}{1+T}\big)$ identifie $\mathscr{E}$ à son dual topologique.

De même, la topologie induite par $\mathscr{R}$ sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)^*$, qui correspond à $\mathscr{R}^\natural$, est la topologie de Fréchet naturelle de $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)^*$, et comme un Fréchet est réflexif, l'accouplement $(f,g) \mapsto \text{rés}_0\big(fg\,\frac{dT}{1+T}\big)$ identifie $\mathscr{R}$ à son dual topologique.

On déduit de ce qui précède que si D est un $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{R}$-module libre de rang fini, alors le dual topologique D^* de D est un $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{R}$-module libre de même rang.

(ii) Comme les L-banach, leurs duaux faibles, les limites inductives compactes de L-banach et les fréchet vérifient le théorème de Hahn-Banach, il en est de même de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$. Il en résulte que si M est un sous-L-espace vectoriel fermé de $A = \mathscr{E}, \mathscr{R}$, et si $M^\perp$ désigne l'orthogonal de M dans A, alors $M^\perp$ est le dual topologique de A/M et M est celui de $A/M^\perp$, et $(M^\perp)^\perp = M$. Ceci s'étend à un module libre de rang fini sur $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{R}$.

Proposition I.1.6. — (i) *L'application* $f \mapsto \phi_f$ *induit un isomorphisme de* $\frac{1}{\varphi^n(T)^k}\mathscr{E}^\natural/\mathscr{E}^\natural$ *sur l'espace* $\mathrm{LP}_n^{[0,k-1]}(\mathbf{Z}_p)$ *des fonctions localement polynomiales de degré* $\le k-1$ *sur* $\mathbf{Z}_p$, *polynomiales sur* $a + p^n\mathbf{Z}_p$ *pour tout* $a \in \mathbf{Z}_p$.

(ii) $f \mapsto \phi_f$ *induit un isomorphisme de* $(t^{-k}\mathscr{R}^\natural \cap \mathscr{R})/\mathscr{R}^\natural$, *où* $t = \log(1+T)$, *sur l'espace* $\mathrm{LP}^{[0,k-1]}(\mathbf{Z}_p)$ *des fonctions localement polynomiales de degré* $\le k-1$ *sur* $\mathbf{Z}_p$.

Démonstration. — Les deux espaces ont la même dimension kp^n sur L, et comme $f \mapsto \phi_f$ est injective, il suffit de prouver que l'image est incluse dans $\mathrm{LP}_n^{[0,k-1]}(\mathbf{Z}_p)$, et

pour cela, il suffit de le vérifier pour $f = \frac{(1+T)^i}{\varphi^n(T)^k}$, pour $i \in \mathbf{N}$ (il suffirait de considérer $i \leq kp^n - 1$). On a alors

$$\phi_f(x) = \text{rés}_0\Big(\frac{(1+T)^{x+i}}{\varphi^n(T)^k}\,\frac{dT}{1+T}\Big) = \text{rés}_0\Big(\psi^n\Big(\frac{(1+T)^{x+i}}{\varphi^n(T)^k}\Big)\frac{dT}{1+T}\Big)$$
$$= \begin{cases} \text{rés}_0\big(\frac{(1+T)^{(x+i)/p^n}}{T^k}\,\frac{dT}{1+T}\big) & \text{si } x \in -i + p^n\mathbf{Z}_p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On conclut la démonstration du (i) en remarquant que $\text{rés}_0\big(\frac{(1+T)^{(x+i)/p^n}}{T^k}\,\frac{dT}{1+T}\big)$ est un polynôme de degré $\leq k-1$ en x (de manière explicite, c'est $\binom{y}{k-1}$, avec $y = \frac{x+i}{p^n} - 1$).

Maintenant, si $f \in \mathscr{R}^\natural$ et $t^{-k}f \in \mathscr{R}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $t^{-k}f$ soit analytique pour $0 < v_p(T) \leq r_{n+1}$, ce qui implique que f est divisible par $\varphi^n(T)^{-k}t^k$ dans $\mathscr{R}^\natural$. On en déduit que $(t^{-k}\mathscr{R}^\natural \cap \mathscr{R})/\mathscr{R}^\natural$ est la réunion (croissante) des $\frac{1}{\varphi^n(T)^k}\mathscr{R}^\natural/\mathscr{R}^\natural$, et comme $\frac{1}{\varphi^n(T)^k}\mathscr{R}^\natural/\mathscr{R}^\natural \cong \frac{1}{\varphi^n(T)^k}\mathscr{E}^\natural/\mathscr{E}^\natural$, le (ii) est une conséquence du (i).

Ceci permet de conclure.

6. Extension du dictionnaire à $\mathbf{Q}_p$. — Soit $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ l'ensemble des $f \in \mathscr{O}_\mathscr{E}$ à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$. Le corps résiduel $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ n'est autre que $\mathbf{F}_p((T))$, et on note $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ le complété de sa clôture radicielle ; celui-ci est naturellement muni d'actions continues de Γ et φ, commutant entre elles et coïncidant avec celles précédemment définies sur $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} \subset k_\mathscr{E}$.

On note $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p} = W(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$; comme $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ est parfait tout élément de $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$, où les x_k sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ et $[x]$ désigne le représentant de Teichmüller de x dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$, si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$. Les actions de Γ et φ sur $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ s'étendent de manière unique à $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$, l'action de φ devenant bijective, et $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ (muni des actions de φ et Γ) s'identifie naturellement au sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$ engendré topologiquement par $[1+T]-1$ (que l'on identifie à $T \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$) et son inverse.

On note $\widetilde{\mathscr{O}}_\mathscr{E}$ l'anneau $\mathscr{O}_L \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$ auquel on étend par $\mathscr{O}_L$-linéarité les actions de φ et Γ.

Soient $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\mathbf{Q}_p}$ l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}_{\mathbf{Q}_p}$ son idéal maximal. Soient encore

$$\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p} = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\mathbf{Q}_p}),\ \widetilde{\mathbf{A}}^{++}_{\mathbf{Q}_p} = W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}_{\mathbf{Q}_p}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathscr{O}}^+_\mathscr{E} = \mathscr{O}_L \cdot \widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p},\ \widetilde{\mathscr{O}}^{++}_\mathscr{E} = \mathscr{O}_L \cdot \widetilde{\mathbf{A}}^{++}_{\mathbf{Q}_p}.$$

Alors $\widetilde{\mathscr{O}}^+_\mathscr{E}$ est un sous-anneau de $\widetilde{\mathscr{O}}_\mathscr{E}$ stable par φ, φ^{-1} et Γ ; c'est aussi l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathscr{O}}_\mathscr{E}$ tels que $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\widetilde{\mathscr{O}}_\mathscr{E}$. De même, $\widetilde{\mathscr{O}}^{++}_\mathscr{E}$ est un idéal de $\widetilde{\mathscr{O}}^+_\mathscr{E}$ (le quotient est $\mathscr{O}_L$), stable par φ, φ^{-1} et Γ ; c'est aussi l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathscr{O}}_\mathscr{E}$ tels que $\varphi^n(x) \to 0$, quand $n \to +\infty$.

On dispose [**22**, p. 526] d'un [16] analogue p-adique $x \mapsto [(1+T)^x]$ de $x \mapsto e^{2i\pi x}$: si $p^n x \in \mathbf{Z}_p$, alors

$$[(1+T)^x] = \varphi^{-n}((1+T)^{p^n x}) = \varphi^{-n}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p^n x}{k} T^k\Big).$$

Comme on a identifié $[1+T]-1$ à T, on a $[(1+T)^x] = (1+T)^x$, si $x \in \mathbf{Z}_p$. On fera attention au fait que ce n'est pas le cas si $x \notin \mathbf{Z}_p$: la série définissant $(1+T)^x$ ne converge pas dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}$, et si on complète $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}[\frac{1}{p}]$ pour obtenir un anneau dans lequel cette série converge, on tombe sur la fonction $x \mapsto e^{tx}$ de la note de bas de page.

L'application $\mathrm{rés}_0$ a une extension naturelle à $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T}$ qui est continue et [17] :

Proposition I.1.7. — *L'application* $\mathrm{rés}_0 : \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T} \to \mathscr{O}_L$ *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\mathrm{rés}_0(\varphi(z)\frac{dT}{1+T}) = \mathrm{rés}_0(z\frac{dT}{1+T})$ *et* $\mathrm{rés}_0(\sigma_a(z)\frac{dT}{1+T}) = a^{-1}\,\mathrm{rés}_0(z\frac{dT}{1+T})$, *si* $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

(ii) $\mathrm{rés}_0$ *est identiquement nul sur* [18] $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T} \boxtimes U$, *si* U *est un ouvert compact de* $\mathbf{Q}_p^*$.

Proposition I.1.8. — (i) *La transformée de Fourier* $\mu \mapsto \int_{\mathbf{Q}_p}[(1+T)^x]\,\mu$ *induit un isomorphisme de l'espace* $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L)_{\mathrm{pc}}$ *des mesure sur* $\mathbf{Q}_p$ *nulles à l'infini sur* $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$.

(ii) *L'application* $z \mapsto \phi_z$ *définie par* $\phi_z(x) = \mathrm{rés}_0([(1+T)^x]z\frac{dT}{1+T})$ *induit un isomorphisme de* $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}/\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$ *sur l'espace* $\mathscr{C}^0(\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L)_0$ *des fonctions continues sur* $\mathbf{Q}_p$ *tendant vers* 0 *à l'infini.*

I.2. (φ,Γ)-modules étales

1. Catégories de (φ,Γ)*-modules.* — Si A est un anneau topologique muni d'actions continues de φ et Γ commutant entre elles, un (φ,Γ)-*module* D sur A est un A-module de type fini muni d'actions semi-linéaires continues de φ et Γ commutant entre elles.

Ce qui précède s'applique en particulier à $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E}$.

– Un (φ,Γ)-module D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est *étale* si $\varphi(D)$ engendre D comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module ; l'action de φ est alors injective.

– Un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}$ est *étale* s'il possède un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau stable par φ et Γ qui est étale.

Nous aurons besoin des catégories suivantes :

- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, catégorie des (φ,Γ)-modules étales, de torsion sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$,
- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, catégorie des (φ,Γ)-modules étales, libres sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$,
- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}$.

---

[16] On a en fait trois tels analogues : en sus de $x \mapsto [(1+T)^x]$, on peut considérer $x \mapsto e^{tx}$, où $t = \log(1+T)$ est le $2i\pi$ p-adique de Fontaine, ainsi que $x \mapsto \varepsilon(x) = e^{-tx}[(1+T)^x]$ qui est à valeurs dans $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$.

[17] La prop. I.1.7, dont le (i) suffit à caractériser $\mathrm{rés}_0$, correspond à la prop. IV.3.3 de [**32**], et les (i) et (ii) de la prop. I.1.8 aux prop. IV.3.1 et IV.3.4 de [**32**].

[18] Cf. n° 4 du § I.3 pour la signification de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T} \boxtimes U$.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, alors $D/p^kD \in \Phi\Gamma^{\text{et}}_{\text{tors}}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, et D est la limite projective des D/p^kD. Par ailleurs, si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{E})$, alors D possède un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau qui est un objet de $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$. Dans la suite du texte,

– *un* (φ,Γ)*-module étale sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ désigne un objet de $\Phi\Gamma^{\text{et}}_{\text{tors}}$ ou de $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$,

– *un* (φ,Γ)*-module étale* désigne un objet de $\Phi\Gamma^{\text{et}}_{\text{tors}}$, de $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ ou de $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{E})$.

Un objet de $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{E})$ est *irréductible* s'il ne possède pas de sous-$\mathscr{E}$-espace vectoriel strict, stable par φ et Γ. Un objet D de $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ est *irréductible* si $L\cdot D$ est irréductible comme objet de $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{E})$.

Si D est un (φ,Γ)-module étale, tout élément x de D peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i)$. On définit un opérateur $\mathscr{O}_L$-linéaire $\psi : D \to D$, par la formule

$$\psi\Big(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i)\Big) = x_0.$$

Dans le cas $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on retombe sur l'opérateur défini précédemment. Cet opérateur commute à l'action de Γ et est un inverse à gauche de φ. De plus, $\psi(\varphi(a)x) = a\psi(x)$, et $\psi(a\varphi(x)) = \psi(a)x$, si $a \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $x \in D$.

2. Le dual de Tate d'un (φ,Γ)*-module.* — Le module $\Omega^1_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}$ des $\mathscr{O}_L$-différentielles continues de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est libre de rang 1 engendré, au choix, par dT ou par $\frac{dT}{1+T}$. On le munit d'une structure de (φ,Γ)-module étale en faisant agir Γ et φ sur $\frac{dT}{1+T}$ par [19]

$$\sigma_a\Big(\frac{dT}{1+T}\Big) = a\frac{dT}{1+T}, \quad \text{si } a \in \mathbf{Z}_p^*, \quad \text{et} \quad \varphi\Big(\frac{dT}{1+T}\Big) = \frac{dT}{1+T}.$$

A partir de maintenant, on note :

- $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$ le (φ,Γ)-module étale $\Omega^1_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}$,
- $\mathscr{E}\frac{dT}{1+T}$ l'objet $L\cdot\Omega^1_{\mathscr{E}}$ de $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{E})$
- $\mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$ le quotient de $\mathscr{E}\frac{dT}{1+T}$ par $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$; c'est la réunion croissante des $p^{-k}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$ qui sont des objets de $\Phi\Gamma^{\text{et}}_{\text{tors}}$.

On définit le *dual de Tate* $\check{D}$ d'un (φ,Γ)-module étale D par :

- $\check{D} = \text{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D, \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T})$, si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}_{\text{tors}}$,
- $\check{D} = \text{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D, \mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T})$, si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$,
- $\check{D} = \text{Hom}_{\mathscr{E}}(D, \mathscr{E}\frac{dT}{1+T})$, si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{E})$.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, et si $D_k = D/p^kD$, alors $\text{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D, \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T})$ est la limite inductive des $\check{D}_k$, et $\check{D}$ est le module de Tate de $\text{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D, \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T})$ (l'isomorphisme implicite dans cet énoncé est celui qui envoie $\mu \in \check{D}$ sur $(\mu_k)_{k\in\mathbf{N}}$, où $\mu_k(x)$ est l'image de $p^{-k}\mu(x)$ modulo $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$).

L'accouplement naturel sur $\check{D}\times D$ est noté $\langle\ ,\ \rangle$. On munit $\check{D}$ d'actions de Γ et φ en imposant que

$$\langle\gamma(x),\gamma(y)\rangle = \gamma(\langle x,y\rangle), \quad \text{si } \gamma\in\Gamma, \quad \text{et} \quad \langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \varphi(\langle x,y\rangle).$$

[19] La formule $\varphi\big(\frac{dT}{1+T}\big) = p\frac{dT}{1+T}$, qui semblerait naturelle, ne fournit pas un (φ,Γ)-module étale.

(La condition « D étale » est précisément ce qu'il faut pour garantir l'existence et l'unicité d'un tel φ sur $\check{D}$, si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.) Alors $\check{D}$ est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ (resp. $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, resp. $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$), si D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ (resp. $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, resp. $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$).

Dans tous les cas, le dual de Tate de $\check{D}$ est naturellement isomorphe, en tant que (φ,Γ)-module, à D.

3. Dual de Tate et dual topologique. — La formule

$$\{x,y\} = \mathrm{rés}_0\big(\langle\sigma_{-1}\cdot x, y\rangle\big)$$

définit un accouplement $\mathscr{O}_L$-bilinéaire sur $\check{D}\times D$ à valeurs dans $L/\mathscr{O}_L$ (resp. $\mathscr{O}_L$, resp. L), si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ (resp. $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, resp. $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$).

Proposition I.2.1. — *Si $x\in\check{D}$ et $y\in D$, alors*[20]

$$\{\varphi(x),\varphi(y)\}=\{x,y\},\quad \{x,\varphi(y)\}=\{\psi(x),y\},\quad \{\varphi(x),y\}=\{x,\psi(y)\},$$
$$\{(1+T)^b x,(1+T)^b y\}=\{x,y\},\ \textit{si } b\in\mathbf{Z}_p,\quad\text{et}\quad \{\gamma(x),\gamma(y)\}=\{x,y\},\ \textit{si } \gamma\in\Gamma.$$

Si M est un $\mathscr{O}_L$-module topologique, on note $M^\vee$ le dual de Pontryagin de M, ensemble des applications $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de M dans $L/\mathscr{O}_L$.

Si M est un $\mathscr{O}_L$-module topologique, sans élément p-divisible, on note M^* le $\mathscr{O}_L$-dual de M, ensemble des applications $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de M dans $\mathscr{O}_L$. Alors M^* est le module de Tate de $M^\vee$.

Si M est un L-espace vectoriel topologique, on note M^* son *dual topologique*, ensemble des applications L-linéaires continues de M dans L. Si M_0 est un $\mathscr{O}_L$-réseau de M, on a $M^* = L\cdot M_0^*$.

On munit ces duaux de la topologie faible ($\mu_n\to\mu$ si et seulement si $\mu_n(v)\to\mu(v)$ pour tout $v\in M$).

Si D est un (φ,Γ)-module, et si $x\in\check{D}$, on note $\iota(x)$ la forme linéaire $y\mapsto\{x,y\}$ sur D.

Proposition I.2.2. — *Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ (resp. $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, resp. $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$), alors*[21] *$\iota$ induit un isomorphisme de $\check{D}$ sur $D^\vee$ (resp. sur D^*, resp. sur D^*).*

I.3. (φ,Γ)-modules et représentations du mirabolique

1. L'équivalence de catégories de Fontaine. — Si A est un anneau topologique, une représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur A est un A-module de type fini muni d'une action A-linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Notons :

- $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ la catégorie des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$,
- $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ la catégorie des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, libres sur $\mathscr{O}_L$,
- $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ la catégorie des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur L.

[20] C'est la conjonction de la prop. I.2.3 et du cor. II.3.3 de [**32**].
[21] C'est la prop. I.2.5 de [**32**].

Si V est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors V/p^kV est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ pour tout k, et V est la limite projective des V/p^kV. Si V est un objet de $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors V possède des $\mathscr{O}_L$-réseaux stables par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (par compacité de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$), et si V_0 est un de ces réseaux, on a $V = L \cdot V_0$.

Dans la suite,

– une *$\mathscr{O}_L$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$* désigne un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ ou $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,

– une *représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$* désigne un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ ou $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Les (φ,Γ)-modules étales ont été introduits par Fontaine [**40**] qui a montré qu'ils sont en équivalence de catégories avec les représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. De manière plus précise, le complété [(22)] $\mathbf{A}$, pour la topologie p-adique, de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$, est muni d'une action de φ étendant celle existant sur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ et, grâce à la théorie du corps des normes [**42, 72**], d'une action continue (pour la topologie faible) de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ commutant à celle de φ. De plus, $(\mathscr{O}_L \cdot \mathbf{A})^{\varphi=1} = \mathscr{O}_L$ et $(\mathscr{O}_L \cdot \mathbf{A})^{\mathscr{H}} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, l'action résiduelle de $\Gamma = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{H}$ étant celle déjà définie.

Théorème I.3.1. — (Fontaine)

(i) *Si D est un (φ,Γ)-module étale, $\mathbf{V}(D) = ((\mathscr{O}_L \cdot \mathbf{A}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D)^{\varphi=1}$, est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.*

(ii) *Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$ est un (φ,Γ)-module étale.*

(iii) *Les foncteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{D}$ sont exacts, inverses l'un de l'autre, et induisent des équivalences de catégories*

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}, \quad \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}).$$

On rappelle que χ désigne le caractère cyclotomique. On définit le *dual de Tate* $\check{V}$ d'une représentation p-adique V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par :

- $\check{V} = \mathrm{Hom}(V, (L/\mathscr{O}_L) \otimes \chi)$, si $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,
- $\check{V} = \mathrm{Hom}(V, \mathscr{O}_L \otimes \chi)$, si $V \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,
- $\check{V} = \mathrm{Hom}(V, L \otimes \chi)$, si $V \in \mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Si D est un (φ,Γ)-module étale, et si $V = \mathbf{V}(D)$, alors $\mathbf{V}(\check{D}) = \check{V}$.

2. Les modules D^{nr}, D^{++}, D^{+}, $D^{\natural}$, $D^{\sharp}$, $\widetilde{D}$, $\widetilde{D}^{+}$ et $\widetilde{D}^{++}$

∗ *Les modules D^{nr}, D^{++}, D^{+}, $D^{\natural}$ et $D^{\sharp}$.* — Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on définit les sous-$\mathscr{O}_L$-modules suivants de D (on renvoie à [**32**, Chap. II], pour l'existence de $D^{\natural}$ et $D^{\sharp}$) :

- $D^{+} = \{z \in D,\ (\varphi^n(z))_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée dans } D\}$,
- $D^{++} = \{z \in D,\ \varphi^n(z) \to 0,\ \text{quand } n \to +\infty\}$,
- D^{nr} l'intersection des $\varphi^n(D)$, pour $n \in \mathbf{N}$,
- $D^{\natural}$ le plus petit sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+}$-module compact de D stable par ψ et engendrant D,

(22) Voir [**24, 27**], par exemple, pour les principales propriétés de cet anneau que Fontaine note $\widehat{\mathscr{O}_{\mathscr{E}^{\mathrm{nr}}}}$.

• $D^\sharp$ le plus grand sous-$\mathscr{O}_\mathscr{E}^+$-module compact de D stable par ψ, sur lequel ψ est surjectif.

Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$, on choisit un $\mathscr{O}_\mathscr{E}$-réseau Δ de D stable par φ et Γ, et on pose $D^+ = L\cdot\Delta^+$, $D^{++} = L\cdot\Delta^{++}$, $D^{\mathrm{nr}} = L\cdot\Delta^{\mathrm{nr}}$, $D^\sharp = L\cdot\Delta^\sharp$ et $D^\natural = L\cdot\Delta^\natural$.

∗ *Exemple*[23]. — Si $D = \mathscr{E}$, on a $D^+ = D^\natural = \mathscr{E}^+$, $D^{++} = T\mathscr{E}^+$, $D^{\mathrm{nr}} = L$ et $D^\sharp = T^{-1}\mathscr{E}^+$. Comme $\mathscr{E}^+$ et $\mathscr{E}/\mathscr{E}^+$ s'identifient respectivement aux espaces $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$ des mesures sur $\mathbf{Z}_p$ et $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$, on voit que D^+ et $D/D^\natural$ sont en dualité dans le cas du module trivial.

∗ *Principales propriétés.* — L'opérateur φ a tendance à augmenter les dénominateurs en T et son inverse à gauche ψ a tendance à les diminuer, ce qui explique pas mal des propriétés des modules définis ci-dessus.

– On a les inclusions $D^{++}\subset D^+\subset D^\natural\subset D^\sharp$ ([**32**, prop. II.5.14]).

– On a $D^+ = D^{\mathrm{nr}}\oplus D^{++}$ ([**32**, prop. II.2.2 (ii)]).

– Si D est de torsion sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$, alors (cf. [**32**, prop. II.2.2 (iii)]) D^{++}, D^+, $D^\natural$ et $D^\sharp$ sont ouverts dans D, mais si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$ ou si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, alors D^{++} et D^+ sont, en général, nuls[24], tandis que $D^\natural$ et $D^\sharp$ sont assez gros pour engendrer D.

Les foncteurs $D\mapsto D^\natural$ et $D\mapsto D^\sharp$ sont très loin d'être exacts, mais on a le résultat suivant[25].

Proposition I.3.2. — *Si $f : D\mapsto D_1$ est un morphisme surjectif de (φ,Γ)-modules étales alors f induit des surjections de $D^\natural$ sur $D_1^\natural$ et de $D^\sharp$ sur $D_1^\sharp$.*

Les résultats suivants[26], dans lesquels $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$, Γ et Γ^{nr} sont les groupes définis dans l'introduction, montrent que D^{nr} est petit et que $D^\sharp$ et $D^\natural$ sont presque égaux.

Proposition I.3.3. — (i) *Si $V = \mathbf{V}(D)$, alors*

$$D^{\mathrm{nr}} = (W(\overline{\mathbf{F}}_p)\otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}} = (W(\overline{\mathbf{F}}_p)\otimes_{\mathbf{Z}_p} V^{\mathscr{H}'})^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}.$$

En particulier, si[27] $V^{\mathscr{H}'} = 0$, *alors* $D^{\mathrm{nr}} = 0$.

(ii) *Si M est un sous-$\mathscr{O}_L$-module de type fini de D stable par φ ou par Γ, alors $M\subset D^{\mathrm{nr}}$.*

Proposition I.3.4. — *Soit $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$.*

(i) *Dans la dualité entre $\check{D}$ et D induite par $\{\ ,\ \}$, l'orthogonal de $D^\natural$ est $\check{D}^+$ et celui de $D^\sharp$ est $\check{D}^{++}$.*

(ii) *$D^\sharp$, $D^\natural$ et $D^\sharp/D^\natural$ sont les duaux respectifs de $\check{D}/\check{D}^{++}$, $\check{D}/\check{D}^+$ et $\check{D}^{\mathrm{nr}}$.*

---

[23] C'est la conjonction des ex. II.4.5 et II.5.16 de [**32**].

[24] Si D^+ engendre D, on dit que D *est de hauteur finie.*

[25] Conjonction des prop. II.4.6 et II.5.17 de [**32**].

[26] Le (i) de la prop. I.3.3 correspond au (ii) de la rem. II.2.4 de [**32**], le (ii) est la conjonction des prop. II.2.2 (i) et III.4.8 de [**32**], tandis que la prop. I.3.4 correspond à la prop. II.5.19 de [**32**].

[27] C'est par exemple le cas, si D est irréductible, de dimension ≥ 2 sur $\mathscr{E}$.

* *Les modules $\widetilde{D}$, $\widetilde{D}^+$ et $\widetilde{D}^{++}$.* — Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, soit $\widetilde{D} = \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D$. C'est un (φ,Γ)-module sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$. Comme φ est bijectif sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$ et D est étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, l'action de φ est bijective sur $\widetilde{D}$. On note :

- $\widetilde{D}^+$ l'ensemble des $z \in \widetilde{D}$ tels que la suite $(\varphi^n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée dans $\widetilde{D}$,
- $\widetilde{D}^{++}$ l'ensemble des $z \in \widetilde{D}$ tels que la suite $(\varphi^n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ tende vers 0 dans $\widetilde{D}$.

Alors $\widetilde{D}^{++} \subset \widetilde{D}^+$ sont des sous-$\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$-modules de $\widetilde{D}$ stables par Γ, φ et φ^{-1}.

Remarque I.3.5. — (i) Les foncteurs $D \mapsto \widetilde{D}$ et $D \mapsto \widetilde{D}^{++}$ sont exacts, mais pas $D \mapsto \widetilde{D}^+$ ([**32**, rem. IV.2.1]).

(ii) Les modules D^{++} et D^+, $\widetilde{D}$, $\widetilde{D}^{++}$ et $\widetilde{D}^+$ peuvent se décrire via les anneaux de Fontaine.

– Le corps résiduel $\mathbf{E}$ de $\mathbf{A}$ est une clôture séparable de $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{F}_p((T))$. On note $\widetilde{\mathbf{E}}$ le complété de sa clôture radicielle et $\widetilde{\mathbf{A}}$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}$. Alors $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}$ sont munis d'actions de φ et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ commutant entre elles, l'action de φ étant bijective. De plus, $\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathscr{H}} = \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{\mathscr{H}} = \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^{\varphi=1} = \mathbf{F}_p$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{\varphi=1} = \mathbf{Z}_p$.

– Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ est muni d'une valuation $v_{\mathbf{E}}$, et on note [28] $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'anneau de ses entiers et $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ l'idéal maximal de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. Comme $v_{\mathbf{E}}(\varphi(x)) = p\,v_{\mathbf{E}}(x)$, $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$) est aussi l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{E}}$ tels que $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée (resp. $\varphi^n(x) \to 0$).

– On note $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$ l'idéal $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++})$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, ce qui fait de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$) l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{A}}$ tels que $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée (resp. $\varphi^n(x) \to 0$). Comme $\widetilde{\mathbf{E}}^+ = \overline{\mathbf{F}}_p \oplus \widetilde{\mathbf{E}}^{++}$, on a de même $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\overline{\mathbf{F}}_p) \oplus \widetilde{\mathbf{A}}^{++}$.

– Enfin, on pose $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^+$ et $\mathbf{A}^{++} = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{++}$, ce qui fait de $\mathbf{A}^+$ (resp. $\mathbf{A}^{++}$) l'ensemble des $x \in \mathbf{A}$ tels que $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée (resp. $\varphi^n(x) \to 0$). On a $\mathbf{A}^+ = W(\overline{\mathbf{F}}_p) \oplus \mathbf{A}^{++}$.

Si $V = \mathbf{V}(D)$ de telle sorte que $D = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$, alors $\widetilde{D} = (\widetilde{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$,

$$\widetilde{D}^+ = (\widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}, \quad \widetilde{D}^{++} = (\widetilde{\mathbf{A}}^{++} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}} \quad \text{et} \quad \widetilde{D}^+ = D^{\mathrm{nr}} \oplus \widetilde{D}^{++},$$

$$D^+ = (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}, \quad D^{++} = (\mathbf{A}^{++} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}} \quad \text{et} \quad D^+ = D^{\mathrm{nr}} \oplus D^{++}.$$

3. Construction de représentations du mirabolique

* *$(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-modules et représentations de $P(\mathbf{Q}_p)$.* — On note $P = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ le *sous-groupe mirabolique* de $\mathbf{GL}_2$. Si A est un anneau, on note $P(A) \subset \mathbf{GL}_2(A)$ le groupe des éléments de P à coefficients dans A. On a donc, en particulier, $P(\mathbf{Q}_p) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $P(\mathbf{Z}_p) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Le groupe $P(\mathbf{Q}_p)$ agit sur $\mathbf{Q}_p$ par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x = ax + b$; cette action permute les ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$.

---

[28] $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ s'identifie à l'anneau des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}/p$, vérifiant $x_{n+1}^p = x_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $\widetilde{\mathbf{E}}$ est son corps des fractions (Fontaine note ces deux anneaux R et $\mathrm{Fr}\,R$ respectivement) ; dans cette identification, T devient $\varepsilon - 1$, où $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et ε_n est (l'image d')une racine primitive p^n-ième de l'unité.

Un $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-*module* M est un $\mathscr{O}_L$-module topologique muni d'une action continue de $P(\mathbf{Z}_p)$ et d'un opérateur ψ, surjectif, $\mathscr{O}_L$-linéaire, continu, commutant à l'action de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et tel que $\psi\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & pb\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)z\right)=\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\psi(z)$, si $b\in\mathbf{Z}_p$ et $z\in M$.

Si M est un $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-module, on définit $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$ comme l'ensemble des suites $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de M, telles que $\psi(x^{(n+1)})=x^{(n)}$, pour tout $n\in\mathbf{N}$. On a alors ([**32**, prop. III.2.1]) :

Proposition I.3.6. — *Sur $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$, il existe une unique action de $P(\mathbf{Q}_p)$ telle que $g\cdot(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}=(y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, avec :*

(a) $y^{(n)}=\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x^{(n)}$, *pour tout* $n\in\mathbf{N}$, *si* $g=\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, *où* $a\in\mathbf{Z}_p^*$;

(b) $y^{(n)}=x^{(n+k)}$, *pour tout* $n\geq -k$, *si* $g=\left(\begin{smallmatrix}p^k & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, *où* $k\in\mathbf{Z}$;

(c) $y^{(n)}=\left(\begin{smallmatrix}1 & p^nb\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x^{(n)}$, *pour tout* $n\geq -v_p(b)$, *si* $g=\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, *où* $b\in\mathbf{Q}_p$.

On munit $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$ de la topologie induite par la topologie produit sur $M^{\mathbf{N}}$. On note $(M\boxtimes\mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ l'ensemble des éléments z de $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$ *nuls à l'infini*, c'est-à-dire tels que $\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z\to 0$ dans $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$ quand $b\to\infty$ dans $\mathbf{Q}_p$; c'est un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module de $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$.

* $(P(\mathbf{Z}_p),\varphi,\psi)$*-modules et restriction à un ouvert compact.* — Un $(P(\mathbf{Z}_p),\varphi,\psi)$-module est un $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-module muni en plus d'un opérateur φ, injectif, $\mathscr{O}_L$-linéaire, continu, vérifiant les conditions suivantes :

- $\varphi\circ\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1 & pb\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi$, si $b\in\mathbf{Z}_p$, et $\varphi\circ\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi$, si $a\in\mathbf{Z}_p^*$;
- $\psi\circ\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi=0$, si $b\in\mathbf{Z}_p^*$ et $\psi\circ\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi=\left(\begin{smallmatrix}1 & p^{-1}b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, si $b\in p\mathbf{Z}_p$;
- $\sum_{i=0}^{p-1}\left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi\circ\psi\circ\left(\begin{smallmatrix}1 & -i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}$.

Notons que les conditions $\varphi\circ\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1 & pb\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi$ et $\varphi\circ\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi$ sont équivalentes à ce que l'action de $P(\mathbf{Z}_p)$ se prolonge en une action du semi-groupe $P^+=\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\} & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ étant définie par $\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z=\varphi(z)$.

Si M est un $(P(\mathbf{Z}_p),\varphi,\psi)$-module, et si $x\in M$, alors $\iota(x)=(\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}\in M\boxtimes\mathbf{Q}_p$. On note $M\boxtimes\mathbf{Z}_p\subset M\boxtimes\mathbf{Q}_p$ l'image de ι de telle sorte que ι devient un isomorphisme de M sur $M\boxtimes\mathbf{Z}_p$. On dispose alors d'un projecteur $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}:M\boxtimes\mathbf{Q}_p\to M\boxtimes\mathbf{Z}_p$ qui envoie $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ sur $\iota(x^{(0)})$.

Plus, généralement, si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, on définit un sous-module $M\boxtimes U$ de $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et un projecteur $\mathrm{Res}_U:M\boxtimes\mathbf{Q}_p\to M\boxtimes U$ qui, dans le cas $U=\mathbf{Z}_p$, sont les objets définis ci-dessus. La proposition suivante[(29)] résume les propriétés principales de ces objets.

Proposition I.3.7. — (i) *Si U et V sont des ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$, alors*

$$\mathrm{Res}_U+\mathrm{Res}_V=\mathrm{Res}_{U\cup V}+\mathrm{Res}_{U\cap V}\quad\text{et}\quad\mathrm{Res}_U\circ\mathrm{Res}_V=\mathrm{Res}_V\circ\mathrm{Res}_U=\mathrm{Res}_{U\cap V}.$$

(ii) *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, et si les U_j, pour $j\in J$, forment une partition de U par des ouverts compacts, alors $M\boxtimes U=\oplus_{j\in J}M\boxtimes U_j$.*

(iii) *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, et si $g\in P(\mathbf{Q}_p)$, alors $g\circ\mathrm{Res}_U=\mathrm{Res}_{gU}\circ g$.*

(29) C'est la prop. III.1.9 de [**32**].

Remarque I.3.8. — (i) Il est facile de vérifier que les propriétés de Res_U et $D \boxtimes U$ ci-dessus les déterminent de manière unique à partir de $M \boxtimes \mathbf{Z}_p$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$.

(ii) Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, alors $M \boxtimes U$, qui est un sous-module de $M \boxtimes \mathbf{Z}_p$, s'identifie à un sous-module de M. Via cette identification, on a

- $\mathrm{Res}_{a+p^k\mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k \circ \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, si $a \in \mathbf{Z}_p$ et $k \in \mathbf{N}$ ([**32**, cor. III.1.4]),
- en particulier, $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} = \varphi \circ \psi$ et $M \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = M^{\psi=0}$.

(iii) L'opérateur $\psi : M \to M$ est relié à l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$: on a

$$\psi \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \circ \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

(iv) Via l'identification de $M \boxtimes \mathbf{Z}_p$ et M, on a $x^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} x = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x\right)$, si $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ est un élément de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et si $n \in \mathbf{Z}$.

On dit que $x \in M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est *à support dans* U, si $x \in M \boxtimes U$. On note $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ l'ensemble des éléments de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ *à support compact* dans $\mathbf{Q}_p$ (c'est la réunion des $M \boxtimes p^{-k}\mathbf{Z}_p$, pour $k \in \mathbf{N}$). Alors $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ est un sous-module de $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$. De plus, si $x \in M \boxtimes \mathbf{Q}_p$, alors x est la limite de $\mathrm{Res}_{p^{-k}\mathbf{Z}_p} x$ quand $k \to +\infty$; en particulier, $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ est dense dans $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Comme $g \in P(\mathbf{Q}_p)$ envoie $M \boxtimes U$ dans $M \boxtimes gU$, d'après le (iii) de la prop. I.3.7, le sous-module $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est stable par $P(\mathbf{Q}_p)$.

4. Les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$

* *Définition.*— Si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$, alors D et ses sous-modules $D^\sharp$ et $D^\natural$ sont naturellement des $(P(\mathbf{Z}_p), \psi)$-modules, l'action de ψ étant celle définie plus haut, et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in P(\mathbf{Z}_p)$ agissant par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = (1+T)^b \sigma_a(z)$. On peut donc considérer le $P(\mathbf{Q}_p)$-module $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et ses sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-modules $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Les formules de la prop. I.3.6 peuvent se traduire en termes de (φ, Γ)-modules : si $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, alors

$\left(\left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right)^{(n)} = z^{(n+k)}$ si $k \in \mathbf{Z}$, en particulier, $\left(\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right)^{(0)} = z^{(-1)} = \psi(z^{(0)})$;

$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right)^{(n)} = \sigma_a(z^{(n)})$ si $a \in \mathbf{Z}_p^*$;

$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right)^{(n)} = (1+T)^{bp^n} z^{(n)}$ si $b \in \mathbf{Q}_p$ et $n \geq -v_p(b)$.

D est aussi muni d'une structure de $(P(\mathbf{Z}_p), \varphi, \psi)$-module ; on dispose donc, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$, d'un sous-$\mathscr{O}_L$-module $D \boxtimes U$ de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et d'un projecteur $\mathrm{Res}_U : D \boxtimes \mathbf{Q}_p \to D \boxtimes U$, et d'un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module $(D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

* *Lien entre $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$.* — Les modules $D^\sharp$ et $D^\natural$ étant compacts, il en est de même de $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ qui, rappelons le, sont munis de la topologie induite par la topologie produit. Les résultats qui suivent [30] facilitent grandement l'étude de ces modules.

Théorème I.3.9. — *Le foncteur $D \mapsto D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est exact.*

[30] Le th. I.3.9, la prop. I.3.10 et le cor. I.3.11 correspondent au th. III.3.5, à la prop. III.3.1 et au cor. III.3.3 de [**32**].

Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$, on définit des sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-modules $(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$, $(D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ et $(D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ de $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$, $D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ respectivement, par

$$(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b = L\cdot(D_0\boxtimes\mathbf{Q}_p),\ \ (D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b = L\cdot(D_0^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)\ \text{ et }\ (D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b = L\cdot(D_0^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p),$$

où D_0 est n'importe quel réseau de D stable par φ et Γ. On munit ces espaces de la topologie de la limite inductive, ce qui fait de $(D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ un L-espace vectoriel complet pour une topologie localement convexe et localement compacte.

Proposition I.3.10. — *Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$ (resp. si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$), l'application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ induit un isomorphisme de $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p/D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ (resp. $(D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b/(D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$) sur $D^\sharp/D^\natural$.*

Corollaire I.3.11. — (i) *$D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p/D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est fini, si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$ est irréductible, de rang ≥ 2.*

(ii) *$(D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b=(D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$, si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est irréductible, de dimension ≥ 2.*

* *Sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-modules de $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$.* — La série de résultats [31] ci-dessous est consacrée à l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$.

Proposition I.3.12. — *Soit D un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$. Si M est un sous-$\mathscr{O}_L$-module compact de $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, alors $M\subset D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$.*

Théorème I.3.13. — *Soit D un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}$). Si M est un sous-$\mathscr{O}_L$-module (resp. L-espace vectoriel) fermé de $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ (resp. $(D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$), stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, alors il existe un sous-(φ,Γ)-module D_1 de D tel que*

$$D_1^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p\subset M\subset D_1^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p\quad(\text{resp. }\ (D_1^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b\subset M\subset(D_1^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b\ ).$$

Corollaire I.3.14. — *Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est irréductible, alors $(D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ est un $P(\mathbf{Q}_p)$-module topologiquement irréductible.*

Théorème I.3.15. — (i) *Si D_1,D_2 sont des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ tels que les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $D_1^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $D_2^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ soient topologiquement isomorphes, alors $D_1\cong D_2$.*

(ii) *Si $D_1,D_2\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ sont tels que les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $(D_1^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ et $(D_2^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ soient topologiquement isomorphes, alors $D_1\cong D_2$.*

Proposition I.3.16. — *Soit $P\in\mathscr{O}_L[X]$ non nul modulo $\mathfrak{m}_L$.*

(i) *Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}$), alors $P\big(\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{-1}\big)$ est surjectif sur $D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ (resp. $(D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$).*

(ii) *Si $z\in D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ (resp. $z\in(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$) et si $P\big(\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{-1}\big)\cdot z$ appartient à $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ (resp. $(D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$), alors z appartient à $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ (resp. $(D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$).*

---

[31] La prop. I.3.12 correspond à la rem. III.3.7 de [**32**], le th. I.3.13 au th. III.3.8, le cor. I.3.14 au cor. III.3.9, le th. I.3.15 au th. IV.0.1 et les (i) et (ii) de la prop. I.3.16 aux prop. III.3.13 et III.3.14.

* *Dualité.* — Si $x \in (\check{D} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ et $y \in (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$x_n = \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x \in \check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p = \check{D} \quad \text{et} \quad y_n = \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot y \in D \boxtimes \mathbf{Z}_p = D.$$

Comme $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ et $y_{n+1} = \varphi(y_n)$, il résulte de la prop. I.2.1 que la quantité $\{x_n, y_n\}$ ne dépend pas du choix de n comme ci-dessus. Ceci nous fournit un accouplement sur $(\check{D} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c \times (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ à valeurs dans $L/\mathscr{O}_L$ (resp. $\mathscr{O}_L$, resp. L), si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}_{\text{tors}}$ (resp. $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, resp. $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{E})$). On le note $\{\ ,\ \}_{\mathbf{Q}_p}$; sa restriction à $\check{D} \times D = (\check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p) \times (D \boxtimes \mathbf{Z}_p)$ est l'accouplement $\{\ ,\ \}$ défini précédemment.

Proposition I.3.17. — (i) *Si U, V sont des ouverts compacts disjoints de $\mathbf{Q}_p$, et si $x \in \check{D} \boxtimes U$ et $y \in D \boxtimes V$, alors $\{x, y\}_{\mathbf{Q}_p} = 0$.*

(ii) *Si $g \in P(\mathbf{Q}_p)$, alors $\{g \cdot x, g \cdot y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$.*

Remarque I.3.18. — Le (i) de la proposition [32] allié à la prop. I.2.2 admet les conséquences suivantes pour un ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$.

• Si $U = \coprod_{i \in I} U_i$ est une partition de U en ouverts compacts, et si $x \in \check{D} \boxtimes U$ et $y \in D \boxtimes U$, alors

$$\{x, y\}_{\mathbf{Q}_p} = \sum_{i \in I} \{\mathrm{Res}_{U_i} x, \mathrm{Res}_{U_i} y\}_{\mathbf{Q}_p}.$$

• $\check{D} \boxtimes U$ est le dual de $D \boxtimes U$ (de Pontryagin, $\mathscr{O}_L$-dual ou topologique, suivant les cas).

* *$\widetilde{D}$ vu comme sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$.* — L'action de φ sur $\widetilde{D}$ étant bijective, cela permet de munir $\widetilde{D}$ d'une action de $P(\mathbf{Q}_p)$ en posant :

$$\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = [(1+T)^b] \varphi^k(\sigma_a(z)), \quad \text{si } a \in \mathbf{Z}_p^*,\ b \in \mathbf{Q}_p \text{ et } k \in \mathbf{Z}.$$

Fixons un système $I \subset \mathbf{Q}_p$ de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, Si $n \in \mathbf{N}$, on note I_n l'intersection de I et $p^{-n}\mathbf{Z}_p$, et donc I est la réunion croissante des I_n.

Lemme I.3.19. — (i) *Tout élément z de $\widetilde{D}$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $z = \sum_{i \in I} [(1+T)^i]\, z_i$, où $z_i \in D$ tend vers 0 quand $i \to \infty$ dans $\mathbf{Q}_p$.*

(ii) *Si $z = \sum_{i \in I} [(1+T)^i] z_i \in \widetilde{D}$, alors $(\sum_{i \in I_n} [(1+T)^{p^n i}] \varphi^n(z_i))_{n \in \mathbf{N}}$ est un élément de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, et l'application de $\widetilde{D}$ dans $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ ainsi définie ne dépend pas du choix de I et est $P(\mathbf{Q}_p)$-équivariante.*

Ce lemme [33] permet d'identifier $\widetilde{D}$ à un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$. La description de l'image est un peu délicate car $\widetilde{D}$ est dense dans $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$. On remarquera quand-même que, si $z = \sum_{i \in I} [(1+T)^i] z_i \in \widetilde{D}$, alors :

• $\mathrm{Res}_{i+\mathbf{Z}_p} z = [(1+T)^i] z_i$, si $i \in I$,

• $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} z = \sum_{i \in I_n} [(1+T)^i] z_i$, si $n \in \mathbf{N}$, et $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z = \sum_{i \in I_n - I_{n-1}} [(1+T)^i] z_i$, si $n \geq 1$

---

[32] Elle correspond à la prop. III.2.3 de [**32**].

[33] Le (i) est le lemme IV.1.2 de [**32**], le (ii) est le lemme IV.1.3 ; les (i) et (ii) de la prop. I.3.20 correspondent au cor. IV.1.5 et à la prop. IV.2.3 de [**32**].

- z est la limite des $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} z$ dans $\widetilde{D}$ (le même énoncé pour $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est immédiat),
- $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z \to 0$ dans $\widetilde{D}$ et donc $\varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z) \to 0$ dans D.
- Réciproquement, si $z \in D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est tel que $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z \to 0$ dans $\widetilde{D}$, alors $z \in \widetilde{D}$.

Proposition I.3.20. — (i) *$\widetilde{D}$ est le sous-module $(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ de $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$.*

(ii) *$\widetilde{D}^+$ est le sous-module $(D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ de $D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$; en particulier,* $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z \in D^\natural$, *si $z\in\widetilde{D}^+$.*

* *Le $P(\mathbf{Q}_p)$-module $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$.* — Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, alors $\widetilde{D}^+$ est un ouvert de $\widetilde{D}$, et donc $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est un module discret. Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, alors $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est séparé et complet pour la topologie p-adique. Par ailleurs, ce module est sans p-torsion ; c'est donc naturellement la boule unité d'un L-banach. Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, alors $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est un L-banach. Les résultats suivants [34] s'intéressent à l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$.

Proposition I.3.21. — (i) *Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, alors $\check{D}^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est le dual (de Pontryagin) de $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$.*

(ii) *Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, alors $\check{D}^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est le $\mathscr{O}_L$-dual de $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$.*

(iii) *Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, alors $(\check{D}^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ est le dual topologique de $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$.*

Corollaire I.3.22. — (i) *Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, alors $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est un $\mathscr{O}_L[P(\mathbf{Q}_p)]$-module de longueur finie.*

(ii) *Si D est un (φ,Γ)-module irréductible sur $\mathscr{E}$, alors $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est un $P(\mathbf{Q}_p)$-module topologiquement irréductible.*

Enfin, on dispose d'une application $\mathrm{rés}_0 : D\boxtimes\mathbf{Q}_p \to D^\sharp/D^\natural$ qui commute à l'action [35] de $\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, si $a\in\mathbf{Q}_p^*$, et qui vérifie :

Proposition I.3.23. — *Si $z\in D\boxtimes\mathbf{Q}_p$, alors $\mathrm{rés}_0(z)=0$ si et seulement si il existe $x\in\widetilde{D}^+$ tel que $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}(z-x)$ tende p-adiquement vers 0 quand $n\to+\infty$.*

I.4. Opérations analytiques sur les (φ,Γ)-modules. — Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, et si n est assez grand, la notation $I_n(U)$ désigne un système de représentants de U modulo $p^n\mathbf{Z}_p$.

Si D est de torsion, on dit qu'une suite de familles $a_{x,n}$, pour $x\in X_n$, d'éléments de D, *tend uniformément vers* 0, s'il existe une suite décroissante $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de treillis de D vérifiant $\cap_{n\in\mathbf{N}} M_n=0$, telle que $a_{x,n}\in M_n$ pour tout $x\in X_n$.

Si D n'est pas de torsion, on dit qu'une suite de familles $a_{x,n}$, pour $x\in X_n$, d'éléments de D, tend uniformément vers 0, si elle tend uniformément vers 0 modulo p^k, pour tout $k\in\mathbf{N}$.

* *Image directe par un difféomorphisme local.* — Si U,V sont deux ouverts de $\mathbf{Q}_p$, alors $f : U\to V$ est un *difféomorphisme local* si f est (uniformément) de classe $\mathscr{C}^1$

[34] La prop. I.3.21 est la prop. IV.5.4 de [**32**], le cor. I.3.22 est le cor. IV.5.6 et la prop. I.3.23 est la prop. IV.5.7.

[35] L'isomorphisme $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p/D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p\cong D^\sharp/D^\natural$ munit $D^\sharp/D^\natural$ d'une action de $P(\mathbf{Q}_p)$.

(ce qui signifie que $f(x+y)-f(x)-yf'(x)=y\varepsilon(x,y)$, où $\varepsilon(x,y)\to 0$ quand $y\to 0$, uniformément (en x) sur tout ouvert compact de U) et si f' ne s'annule pas sur U. En traduisant en termes de (φ,Γ)-modules les formules définissant l'image directe $f_*\mu$ d'une mesure μ par un difféomorphisme local f, on aboutit au résultat suivant [36].

Proposition I.4.1. — *Soient U,V deux ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$ et $f : U \to V$, un difféomorphisme local. Alors si $z \in D\boxtimes U$, la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{i\in I_n(U)} \left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right)$$

converge dans $(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_c$ vers une limite f_*z appartenant à $D\boxtimes V$ et ne dépendant pas du choix des $I_n(U)$. L'application $f_* : D\boxtimes U \to D\boxtimes V$ ainsi définie est $\mathscr{O}_L$-linéaire continue. De plus, $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(f_*z-u_n)$, pour $i\in I_n(U)$, tend uniformément vers 0, quand $n\to+\infty$.

* *Multiplication par une fonction continue.* — En exprimant de même la multiplication $m_\alpha(\mu)$ d'une mesure μ par une fonction continue α, on obtient [37] :

Proposition I.4.2. — *Soient U un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ et $\alpha\in\mathscr{C}^0(U,\mathscr{O}_L)$. Alors, si $z\in D\boxtimes U$, la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{i\in I_n(U)} \alpha(i)\,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z)$$

tend [38] vers une limite $m_\alpha(z)\in D\boxtimes U$ qui ne dépend pas du choix des $I_n(U)$, et l'application $m_\alpha : D\boxtimes U\to D\boxtimes U$ ainsi définie est $\mathscr{O}_L$-linéaire continue.

**Propriétés.* — Ces opérations vérifient les propriétés que l'on est en droit d'espérer par analogie avec le cas des mesures, à savoir [39] :

Proposition I.4.3. — (i) *Si U, V, W sont des ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$, et si $f : U\to V$ et $g : V\to W$ sont des difféomorphismes locaux, alors*

$$(g\circ f)_* = g_*\circ f_*.$$

(ii) *Si $\alpha,\beta\in\mathscr{C}^0(U,\mathscr{O}_L)$, alors*

$$m_\alpha\circ m_\beta = m_\beta\circ m_\alpha = m_{\alpha\beta}.$$

(iii) *Soient U,V des ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$. Si $f : U\to V$ est un difféomorphisme local, et si $\alpha\in\mathscr{C}(V,\mathscr{O}_L)$, alors*

$$f_*\circ m_{\alpha\circ f} = m_\alpha\circ f_*.$$

---

[36] C'est la prop. V.1.3 de [**32**].

[37] C'est la prop. V.2.1 de [**32**].

[38] Si D est de torsion, la suite est stationnaire et $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}m_\alpha(z)=\alpha(i)\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}$, pour tous $i\in U$ et n assez grand.

[39] Les (i), (ii) et (iii) correspondent aux prop. V.1.6, V.2.3 et V.2.4 de [**32**].

Remarque I.4.4. — Un cas particulier intéressant est celui où $\alpha = \mathbf{1}_{U'}$, auquel cas $m_\alpha = \mathrm{Res}_{U'}$. On obtient alors les résultats suivants, si $U' \subset U$ et V sont des ouverts compact de $\mathbf{Q}_p$.

(i) Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme local, alors $\mathrm{Res}_{f(U')} \circ f_* = f_* \circ \mathrm{Res}_{U'}$.

(ii) Si $\alpha \in \mathscr{C}^0(U, \mathscr{O}_L)$, alors $m_\alpha \circ \mathrm{Res}_{U'} = \mathrm{Res}_{U'} \circ m_\alpha$.

* *Dualité.* — Le résultat qui suit [40] est une vaste généralisation de la prop. I.3.17.

Proposition I.4.5. — (i) *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, si $\alpha \in \mathscr{C}^0(U, \mathscr{O}_L^*)$, et si $x \in \check{D} \boxtimes U$ et $y \in D \boxtimes U$, alors $\{m_\alpha(x), m_{\alpha^{-1}}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$.*

(ii) *Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme entre deux ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$, et si $x \in \check{D} \boxtimes U$ et $y \in D \boxtimes U$, alors $\{f_* x, f_* y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$.*

* *Convolution multiplicative.* — En traduisant en termes de (φ,Γ)-modules les formules définissant la convolution de deux mesures sur $\mathbf{Z}_p^*$, on est conduit à l'énoncé suivant [41].

Proposition I.4.6. — *Soient D_1, D_2, D_3 des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$, et $M : D_1 \times D_2 \to D_3$ une application $\mathscr{O}_\mathscr{E}$-bilinéaire commutant [42] à φ et Γ.*

(i) *Si $x \in D_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et $x \in D_2 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{i,j \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} (1+T)^{ij} \varphi^n\big(M\big(\sigma_i \cdot \psi^n((1+T)^{-j}x),\, \sigma_j \cdot \psi^n((1+T)^{-i}y)\big)\big)$$

converge dans D_3 vers un élément $M_{\mathbf{Z}_p^*}(x,y) \in D_3 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ qui ne dépend pas du choix des systèmes de représentants de $\mathbf{Z}_p^*$ modulo p^n.

(ii) *L'application $M_{\mathbf{Z}_p^*} : (D_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \times (D_2 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \to D_3 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ ainsi définie est $\mathscr{O}_\mathscr{E}(\Gamma)$-bilinéaire.*

(iii) *Si $D_1 = D_2$, et si M est symétrique ou antisymétrique, il en est de même de $M_{\mathbf{Z}_p^*}$.*

* *Torsion par un caractère* [43]. — Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$, et si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu, on définit un (φ,Γ)-module $D \otimes \delta$, isomorphe à D en tant que $\mathscr{O}_\mathscr{E}$-module (on note $x \mapsto x \otimes \delta$ l'isomorphisme de D sur $D \otimes \delta$), en tordant les actions de φ et Γ par δ, c'est-à-dire en posant :

$$\sigma_a(x \otimes \delta) = (\delta(a)\,\sigma_a(x)) \otimes \delta \quad \text{et} \quad \varphi(x \otimes \delta) = (\delta(p)\,\varphi(x)) \otimes \delta.$$

Lemme I.4.7. — (i) $g \cdot (z \otimes \delta) = (\delta(a) g \cdot z) \otimes \delta$, *pour tous* $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P(\mathbf{Q}_p)$ *et* $z \in D \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

---

[40] [**32**, prop. V.3.1]

[41] C'est la prop. V.4.1 de [**32**].

[42] $\varphi(M(x,y)) = M(\varphi(x), \varphi(y))$ et $\sigma_a(M(x,y)) = M(\sigma_a(x), \sigma_a(y))$, pour tous $x \in D_1$, $y \in D_2$ et $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

[43] Les lemmes I.4.7, I.4.8 et I.4.9 correspondent respectivement au lemme V.5.1, au cor. V.5.2 et au lemme V.5.3 de [**32**].

(ii) *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, alors* $\mathrm{Res}_U(z\otimes\delta)=(\mathrm{Res}_U z)\otimes\delta$, *pour tout* $z\in D\boxtimes\mathbf{Q}_p$.

(iii) *Si $z\in D\boxtimes U$ et si $\alpha\in\mathscr{C}^0(U,\mathscr{O}_L)$, alors* $m_\alpha(z\otimes\delta)=m_\alpha(z)\otimes\delta$.

(iv) *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, si $f:U\to\mathbf{Q}_p$ est un difféomorphisme local, et si $z\in D\boxtimes U$, alors* $f_*(z\otimes\delta)=\bigl(f_*\circ m_{\delta\circ f'}(z)\bigr)\otimes\delta$.

Corollaire I.4.8. — *Si $w:\mathbf{Z}_p^*\to\mathbf{Z}_p^*$ est le difféomorphisme $x\mapsto x^{-1}$, alors*

$$w_*(z\otimes\delta)=(\delta(-1)\ m_{\delta^2}\circ w_*(z))\otimes\delta.$$

Si $M:D_1\times D_2\to D_3$ est une application $\mathscr{O}_\mathscr{E}$-bilinéaire, commutant aux actions de φ et Γ comme dans la prop. I.4.6, alors M induit une application bilinéaire

$$M:(D_1\otimes\delta_1)\times(D_2\otimes\delta_2)\to D_3\otimes\delta_1\delta_2,\quad\text{avec } M(x\otimes\delta_1,y\otimes\delta_2)=M(x,y)\otimes\delta_1\delta_2,$$

qui commute aussi aux actions de φ et Γ.

Lemme I.4.9. — *Si $x\in D_1\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ et si $y\in D_2\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, alors*

$$M_{\mathbf{Z}_p^*}\bigl(m_{\delta_1}(x)\otimes\delta_1,m_{\delta_2}(y)\otimes\delta_2\bigr)=m_{\delta_1\delta_2}\bigl(M_{\mathbf{Z}_p^*}(x,y)\bigr)\otimes\delta_1\delta_2.$$

I.5. (φ,Γ)-modules et lois de réciprocité explicites

1. L'action de Γ sur $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$. — [44] Soit $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, tué par p^ℓ, et soit M un treillis de D. Soient $c,c'\in\mathbf{N}$ tels que $D^\sharp\subset T^{-c}D^+$ et $D^+\subset T^{-c'}M$.

Proposition I.5.1. — (i) $\gamma-1$ *est inversible sur $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, d'inverse continu pour la topologie faible, si $\gamma\in\Gamma$ est d'ordre infini.*

(ii) *Plus précisément, il existe $n_1(M)\in\mathbf{N}$ tel que, si $n\geq n_1(M)$, si $m\in\mathbf{Z}$, si $a\in\mathbf{Z}_p^*$, et si $x\in D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ vérifie $(\sigma_{1+p^na}-1)x\in T^{mp^{n+\ell}}M$, alors x appartient à $\frac{1}{T^{c'}\varphi^n(T)^c\varphi^{n+v_p(a)}(T)}T^{mp^{n+\ell}}M$.*

Si $n\geq 1$ (ou $n\geq 2$, si $p=2$), le morphisme de groupes $\tau_n:\Gamma\to\mathbf{Q}_p$, défini par $\tau_n(\sigma_a)=p^{-n}\log a$, induit un isomorphisme de $\Gamma_n=\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^n}))$ sur $\mathbf{Z}_p$. Le choix d'un générateur topologique γ_n de Γ_n fournit un isomorphisme de $\mathscr{O}_\mathscr{E}^+$ sur l'algèbre de groupe complétée Λ_{Γ_n} de Γ_n, en envoyant T sur γ_n-1. L'anneau $\Lambda_{\Gamma_n}[(\gamma_n-1)^{-1}]$ ne dépend pas du choix de γ_n ; on note $\mathscr{O}_\mathscr{E}(\Gamma_n)$ son séparé complété pour la topologie p-adique ; l'isomorphisme $\mathscr{O}_\mathscr{E}^+\cong\Lambda_{\Gamma_n}$ ci-dessus se prolonge en un isomorphisme $\mathscr{O}_\mathscr{E}\cong\mathscr{O}_\mathscr{E}(\Gamma_n)$ d'anneaux. Si $n\geq m$, l'application $\lambda\otimes f\mapsto\lambda f$ induit un isomorphisme de $\Lambda_{\Gamma_m}\otimes_{\Lambda_{\Gamma_n}}\mathscr{O}_\mathscr{E}(\Gamma_n)$ sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}(\Gamma_m)$; il en résulte que l'anneau $\Lambda\otimes_{\Lambda_{\Gamma_n}}\mathscr{O}_\mathscr{E}(\Gamma_n)$, où $\Lambda=\Lambda_\Gamma$ est l'algèbre d'Iwasawa, ne dépend pas du choix de n ; on le note $\mathscr{O}_\mathscr{E}(\Gamma)$.

[44] Le (i) de la prop. I.5.1 est le (ii) de la rem. III.4.5 de [**32**], le (ii) est la prop. III.4.4, et le th. I.5.2 est le cor. VI.1.3.

Théorème I.5.2. — *Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, de rang d, et soit $\mathscr{C} = (1-\varphi)D^{\psi=1}$.*

(i) *$\mathscr{C}$ est un sous-Λ-module de $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, libre de rang d.*

(ii) *L'application naturelle $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C} \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est un isomorphisme ; en particulier, $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-module libre de rang d.*

2. L'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$. — [45] Soient $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ et $\check{\mathscr{C}} = (1-\varphi)\check{D}^{\psi=1}$.

Proposition I.5.3. — (i) *Si $x \in \check{\mathscr{C}}$, si $y \in \mathscr{C}$, et si $n \in \mathbf{N}$, alors, modulo $(\gamma_n - 1)\Lambda$,*

$$v_n = \sum_{i \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \Big\{ \frac{\tau_n(\gamma_n)\,\sigma_i}{\gamma_n - 1} \cdot x, y \Big\}\, \sigma_i$$

ne dépend ni du choix de γ_n ni de celui du système de représentants de $\mathbf{Z}_p^*$ modulo p^n.

(ii) *On a $v_{n+1} = v_n$ modulo $\gamma_n - 1$; la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définit donc un élément $\langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$ de Λ.*

(iii) *Si $\sigma \in \Gamma$, alors $\langle \sigma \cdot x, y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \sigma^{-1} \cdot \langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$ et $\langle x, \sigma \cdot y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \sigma \cdot \langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$, pour tous $x \in \check{\mathscr{C}}$ et $y \in \mathscr{C}$.*

(iv) *L'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$ identifie $\check{\mathscr{C}}$ à $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathscr{C}, \Lambda)$.*

Si $\eta : \Gamma \to \mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu, on peut considérer le (φ,Γ)-module $D \otimes \eta$ dont le dual de Tate est $\check{D} \otimes \eta^{-1}$. Comme l'action de φ ne change pas par torsion par η, l'application $x \mapsto x \otimes \eta$ induit un isomorphisme de $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}(D \otimes \eta)$ et l'application $x \mapsto x \otimes \eta^{-1}$ induit un isomorphisme de $\check{\mathscr{C}}$ sur $\mathscr{C}(\check{D} \otimes \eta^{-1})$. On peut donc, si $x \in \check{\mathscr{C}}$ et $y \in \mathscr{C}$, considérer $\langle x \otimes \eta^{-1}, y \otimes \eta\rangle_{\mathrm{Iw}} \in \Lambda$.

Proposition I.5.4. — (i) *On a $\langle x \otimes \eta^{-1}, y \otimes \eta\rangle_{\mathrm{Iw}} = \eta^{-1}\langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$.*

(ii) *Si $n \in \mathbf{N}$, alors*

$$\int_{\Gamma_n} \eta^{-1}\langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \Big\{ x, \frac{-\tau_n(\gamma_n)}{\eta(\gamma_n)\gamma_n - 1} \cdot y \Big\}.$$

On note $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{Z}_p^*} : (\check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \times (D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ l'accouplement $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-bilinéaire obtenu par convolution multiplicative (prop. I.4.6) à partir de l'accouplement tautologique $\langle\ ,\ \rangle : \check{D} \times D \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T}$.

On étend, grâce aux isomorphismes $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}$ et $\check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma) \otimes_\Lambda \check{\mathscr{C}}$, l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$ en un accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}} : (\check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \times (D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$, antilinéaire en la première variable et linéaire en la seconde.

On identifie $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$ à $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ en étendant, par linéarité, l'isomorphisme Γ-équivariant de $\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ défini par $\mu \mapsto \int_\Gamma (1+T)^{\chi(\gamma)}\,\mu$.

On remarque que $f \mapsto df$ induit un isomorphisme Γ-équivariant de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.

Enfin, on note $w : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{Z}_p^*$ le difféomorphisme $x \mapsto 1/x$.

---

[45] La prop. I.5.3 est la prop. VI.1.2 de [**32**], les (i) et (ii) de la prop. I.5.4 sont la prop. VI.1.4 et le cor. VI.1.5, et le th. I.5.5 est la rem. VI.2.2.

Théorème I.5.5. — *Si $x \in \check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, si $y \in D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, alors*

$$d(\langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}) = -\langle w_* x, y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*}.$$

II. La correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Dans ce chapitre, on définit la correspondance de Langlands locale p-adique pour $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$; celle-ci associe à un objet de $\mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, irréductible et de dimension 2, une représentation unitaire $\mathbf{\Pi}(V)$ de G. L'équivalence de catégories de Fontaine permet de remplacer les représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par des (φ, Γ)-modules étales, et on commence par construire (th. II.1.4) une représentation $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de G à partir de n'importe quel (φ, Γ)-module D et de n'importe quel caractère unitaire continu δ de $\mathbf{Q}_p^*$. Cette représentation de G n'a aucune raison d'avoir de bonnes propriétés en général, mais on montre par prolongement analytique à partir du cas cristabélin que si D est irréductible de rang 2 (sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ ou $\mathscr{E}$) et si δ est judicieusement choisi, alors $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ vit dans une suite exacte

$$0 \to \mathbf{\Pi}(D)^* \otimes \delta \to D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \mathbf{\Pi}(D) \to 0,$$

de représentations de G, où $\mathbf{\Pi}(D)$ est une représentation unitaire de G. La correspondance cherchée est alors $D \mapsto \mathbf{\Pi}(D)$.

On note :

• $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$ la catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules lisses, admissibles, de longueur finie, admettant un caractère central,

• $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ la catégorie des $\mathscr{O}_L$-modules Π, sans torsion, séparés et complets pour la topologie p-adique, munis d'une action $\mathscr{O}_L$-linéaire de G telle que $\Pi/p^k\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$ pour tout $k \in \mathbf{N}$,

• $\mathrm{Rep}_L G$ la catégorie des L-banach Π munis d'une action de G et d'un $\mathscr{O}_L$-réseau stable par G qui est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ (une telle représentation est dite *unitaire*).

Dans la suite de l'article,

– une *$\mathscr{O}_L$-représentation de G* désigne un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$ ou de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$,

– une *représentation p-adique de G* désigne un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ ou $\mathrm{Rep}_L G$.

Si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu, on note respectivement $\mathrm{Rep}^\delta_{\mathrm{tors}} G$, $\mathrm{Rep}^\delta_{\mathscr{O}_L} G$ et $\mathrm{Rep}^\delta_L G$ les sous-catégories de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ et $\mathrm{Rep}_L G$ constituées des objets sur lesquels $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \in Z$ agit par multiplication par $\delta(a)$.

Remarque II.0.6. — (i) Un $\mathscr{O}_L[G]$-module lisse, de longueur finie, admettant un caractère central, est automatiquement admissible [**2**].

(ii) Emerton [**37**] a montré que « de longueur finie » était équivalent à « engendré par un nombre fini d'éléments » pour un $\mathscr{O}_L[G]$-module de $\mathscr{O}_L$-torsion, lisse, admissible et admettant un caractère central.

II.1. La représentation $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de G. — Soient D un (φ,Γ)-module étale et $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ un caractère continu. On dispose d'une action de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur le module $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (resp. $(D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$) ; on la prolonge en une action de B en faisant agir un élément $\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ du centre par multiplication par $\delta(d)$. La représentation de B ainsi obtenue est notée $D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ (resp. $(D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_b$).

Remarque II.1.1. — (i) En partant de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$, l'action de B que l'on obtient sur $(\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p) \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_b = \mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p)$ est celle définie par

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \phi(x) \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu = \int_{\mathbf{Q}_p} \delta(d)\, \phi\Big(\frac{ax+b}{d}\Big)\, \mu.$$

(ii) Soit $\Pi(\delta)$ l'espace des fonctions continues $\phi : \mathbf{Q}_p \to L$, telles que la fonction $x \mapsto \delta(x)\phi(1/x)$ se prolonge par continuité en 0. On munit $\Pi(\delta)$ d'une action de G, avec $g \cdot \phi = \phi \star g^{-1}$, et

$$\big(\phi \star \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big)(x) = \delta(cx+d)\phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big).$$

Si $\mu \in \Pi(\delta)^*$, soient $\mu_1 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\mu$ et $\mu_2 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\mu$ les éléments de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ définis par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\, \mu_1 = \langle \mu, \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\phi \rangle \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\, \mu_2 = \big\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\mu, \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\phi \big\rangle.$$

Comme $\mathbf{P}^1$ s'obtient en recollant, via $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)x$, deux copies de $\mathbf{Z}_p$ le long de $\mathbf{Z}_p^*$, l'application $\mu \mapsto (\mu_1, \mu_2)$ induit un isomorphisme de $\Pi(\delta)^*$ sur

$$\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{(\mu_1,\mu_2) \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p) \times \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p),\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_2) = w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_1))\},$$

avec $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi\, w_\delta(\lambda) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta(x)\phi(1/x)\,\lambda$. On dispose de plus de l'application B-équivariante

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} : \Pi(\delta)^* \cong \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p) \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p,$$

envoyant μ sur $(\mu^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, où $\mu^{(n)}$ est défini par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\,\mu^{(n)} = \big\langle \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mu, \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\phi \big\rangle$.

Nous allons imiter cette description de $\Pi(\delta)^*$ à partir de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ pour construire une représentation $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de G, et une application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} : D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$, B-équivariante, dont l'image est incluse dans $(D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_b$, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$.

1. Construction. — Si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$, et si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ ne contenant pas $-\frac{d}{c}$, on note $\alpha_g \in \mathscr{C}^0(U, \mathscr{O}_L)$ la fonction définie par $\alpha_g(x) = \delta(cx+d)$. Comme g induit un difféomorphisme de U sur gU qui est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ puisque U ne contient pas $-\frac{c}{d}$, on dispose des opérateurs $m_{\alpha_g} : D \boxtimes U \to D \boxtimes U$ et $g_* : D \boxtimes U \to D \boxtimes gU$ et on note $H_g : D \boxtimes U \to D \boxtimes gU$ l'opérateur $g_* \circ m_{\alpha_g}$.

Lemme II.1.2. — (i) *Si $g = \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$, alors H_g est la multiplication par $\delta(d)$.*

(ii) *Si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$, et si $z \in D \boxtimes U$, alors*

$$H_g(z) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \delta(ci+d) \left(\begin{smallmatrix} g'(i) & g(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\Big).$$

Démonstration. — Le (i) est immédiat. Si D est de torsion, et si n est assez grand, on a $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} m_{\alpha_g}(z) = \delta(ci+d)\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} z$, d'après la note 38 ; la formule du (ii) s'en déduit en revenant à la définition de g_*. Le cas général en résultant par limite projective, cela permet de conclure.

Soit $w_\delta : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ la restriction de H_w, et soit

$$D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \big\{z = (z_1, z_2) \in D \times D,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) = w_\delta\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1)\big)\big\}.$$

Remarque II.1.3. — (i) Il résulte du lemme II.1.2 que $w_\delta : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est donné par la formule suivante :

$$w_\delta(z) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \delta(i)\left(\begin{smallmatrix} -i^{-2} & i^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)z\right).$$

(ii) On peut aussi utiliser la formule $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}$ et le fait que la multiplication par $\delta(i)$ coïncide avec l'action de $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$, pour obtenir :

$$w_\delta(z) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \left(\begin{smallmatrix} -i^{-1} & 2 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z).$$

(iii) On peut enfin traduire la première formule purement en termes de (φ,Γ)-modules ; on obtient (en ayant fait le changement de variable $i \mapsto i^{-1}$) :

$$w_\delta(z) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \delta(i^{-1})(1+T)^i \sigma_{-i^2} \cdot \varphi^n\psi^n((1+T)^{-i^{-1}}z) = m_{\delta^{-1}} \circ w_*(z).$$

Les trois expressions ci-dessus ont chacune leur utilité.

Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, et si $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, on définit $\mathrm{Res}_U(z) \in D \boxtimes U$, par :

$$\mathrm{Res}_U(z) = \mathrm{Res}_{U\cap\mathbf{Z}_p}(z_1) + H_w\big(\mathrm{Res}_{wU\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\big) = \mathrm{Res}_{U\cap p\mathbf{Z}_p}(z_1) + H_w\big(\mathrm{Res}_{wU\cap\mathbf{Z}_p}(z_2)\big),$$

l'égalité des deux expressions résultant de la condition $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) = w_\delta\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1)\big)$.

Théorème II.1.4. — *Il existe sur $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ une unique action $(g,z) \mapsto g\cdot z$ de G telle que*

$$\mathrm{Res}_U(g\cdot z) = H_g\big(\mathrm{Res}_{g^{-1}U\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\big) + H_{gw}\big(\mathrm{Res}_{(gw)^{-1}U\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\big),$$

pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$.

Démonstration. — En appliquant la formule ci-dessus pour $U = \mathbf{Z}_p$ et $g = \mathrm{id}$, on voit que l'on doit avoir $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z) = z_1$, et en faisant de même pour $U = \mathbf{Z}_p$ et $g = w$, on obtient

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w\cdot z) = H_w(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1)) + \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2) = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) + \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2) = z_2.$$

On en déduit l'unicité car $g\cdot z$ doit être égal à

$$(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g\cdot z), \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w\cdot(g\cdot z))) = (\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g\cdot z), \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wg\cdot z))),$$

si on veut une action de groupe, et que l'on a imposé

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g\cdot z)=H_g\big(\mathrm{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\big)+H_{gw}\big(\mathrm{Res}_{(gw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\big)\,,$$
$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wg\cdot z)=H_{wg}\big(\mathrm{Res}_{(wg)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\big)+H_{wgw}\big(\mathrm{Res}_{(wgw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\big)\,.$$

Vérifions que ceci définit bien une action de groupe. Nous aurons besoin des lemmes suivants.

Lemme II.1.5. — *Si $g_1,g_2\in G$, alors $H_{g_1g_2}:D\boxtimes U\to D\boxtimes g_1g_2U$ est égal à $H_{g_1}\circ H_{g_2}$, si ni g_2U, ni g_1g_2U, ne contiennent ∞.*

Démonstration. — En utilisant les (i), (ii) et (iii) de la prop. I.4.3, on obtient

$$H_{g_1}\circ H_{g_2}=(g_1)_*\circ m_{\alpha_{g_1}}\circ(g_2)_*\circ m_{\alpha_{g_2}}=(g_1\circ g_2)_*\circ m_{(\alpha_{g_1}\circ g_2)\alpha_{g_2}},$$

et un calcul immédiat montre que $g_1\circ g_2=g_1g_2$ et $(\alpha_{g_1}\circ g_2)\alpha_{g_2}=\alpha_{g_1g_2}$, ce qui permet de conclure.

Lemme II.1.6. — *Si $g^{-1}U$ ne contient pas ∞, alors* $\mathrm{Res}_U\circ H_g=H_g\circ\mathrm{Res}_{g^{-1}U}$.

Démonstration. — On a $\mathrm{Res}_U\circ H_g=\mathrm{Res}_U\circ g_*\circ m_{\alpha_g}$ et, d'après la prop. I.4.4,

$$\mathrm{Res}_U\circ g_*\circ m_{\alpha_g}=g_*\circ\mathrm{Res}_{g^{-1}U}\circ m_{\alpha_g}=g_*\circ m_{\alpha_g}\circ\mathrm{Res}_{g^{-1}U}=H_g\circ\mathrm{Res}_{g^{-1}U}.$$

Revenons à la démonstration du théorème. Soient donc $z=(z_1,z_2)\in D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, $g,h\in G$ et $h\cdot z=(x_1,x_2)\in D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$. D'après ce qui précède, on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g\cdot(h\cdot z))=H_g\big(\mathrm{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(x_1)\big)+H_{gw}\big(\mathrm{Res}_{(gw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(x_2)\big).$$

Comme

$$x_1=H_h\big(\mathrm{Res}_{h^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\big)+H_{hw}\big(\mathrm{Res}_{(hw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\big)$$
$$x_2=H_{wh}\big(\mathrm{Res}_{(wh)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\big)+H_{whw}\big(\mathrm{Res}_{(whw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\big)$$

le terme $H_g\big(\mathrm{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(x_1)\big)$ peut se réécrire en utilisant les lemmes II.1.6 et II.1.5, sous la forme

$$H_g\Big(\mathrm{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}\Big(H_h\big(\mathrm{Res}_{h^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\big)+H_{hw}\big(\mathrm{Res}_{(hw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\big)\Big)\Big)$$
$$=\ H_{gh}\big(\mathrm{Res}_{(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap h^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\big)+H_{ghw}\big(\mathrm{Res}_{(ghw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap(hw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\big)$$

Il faut faire attention en appliquant ces lemmes car il ne faut pas tomber sur ∞ en cours de route ; la formule

$$H_g\circ\mathrm{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}\circ H_h\circ\mathrm{Res}_{h^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}=H_{gh}\circ\mathrm{Res}_{(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap h^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}$$

qui fournit la moitié de la formule ci-dessus s'obtient via le calcul suivant, où l'on a appliqué successivement le lemme II.1.6, la formule $\mathrm{Res}_U\circ\mathrm{Res}_V=\mathrm{Res}_{U\cap V}$, le lemme II.1.6, et le lemme II.1.5 :

$$\begin{aligned}H_g\circ\mathrm{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}\circ H_h\circ\mathrm{Res}_{h^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}&=\ H_g\circ\mathrm{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}\circ\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p\cap h\mathbf{Z}_p}\circ H_h\\&=\ H_g\circ\mathrm{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p\cap h\mathbf{Z}_p}\circ H_h=H_{gh}\circ\mathrm{Res}_{(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap h^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}\end{aligned}$$

De même, $H_{gw}\bigl(\mathrm{Res}_{(gw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(x_2)\bigr)$ peut se réécrire sous la forme

$$H_{gw}\Bigl(\mathrm{Res}_{(gw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}\Bigl(H_{wh}\bigl(\mathrm{Res}_{(wh)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\bigr)+H_{whw}\bigl(\mathrm{Res}_{(whw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\bigr)\Bigr)\Bigr)$$
$$= H_{gh}\bigl(\mathrm{Res}_{(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap(wh)^{-1}p\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\bigr)+H_{ghw}\bigl(\mathrm{Res}_{(ghw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap(whw)^{-1}p\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\bigr)$$

Or $(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap h^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p$ et $(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap(wh)^{-1}p\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p$ forment une partition de $(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p$, ce qui fait que la somme des deux termes faisant intervenir z_1 est égale à $H_{gh}\bigl(\mathrm{Res}_{(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\bigr)$. De même, la somme des deux termes faisant intervenir z_2 est égale à $H_{ghw}\bigl(\mathrm{Res}_{(ghw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\bigr)$, ce qui montre que l'on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g\cdot(h\cdot z))=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(gh\cdot z).$$

En appliquant ceci au triplet $(w,g,h\cdot z)$ au lieu du triplet (g,h,z), on en déduit que

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w\cdot(g\cdot(h\cdot z)))=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wg\cdot(h\cdot z))),$$

et en faisant de même avec les triplets (wg,h,z), puis (w,gh,z), on obtient

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w\cdot(g\cdot(h\cdot z)))=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wgh\cdot z)=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w\cdot(gh\cdot z)).$$

Comme on a déjà démontré plus haut que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g\cdot(h\cdot z))=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(gh\cdot z)$, on en déduit l'égalité de $g\cdot(h\cdot z)$ et $gh\cdot z$, ce qui prouve que l'on a bien défini une action de groupe.

Il reste à vérifier que $\mathrm{Res}_U(g\cdot z)$ est bien donné par la formule annoncée. Compte-tenu de ce que $g\cdot z=(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g\cdot z),\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wg\cdot z))$, des formules ci-dessus pour $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g\cdot z)$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wg\cdot z)$, et de la définition de Res_U précédant le th. II.1.4, on obtient :

$$\mathrm{Res}_U(g\cdot z)=\ \mathrm{Res}_{U\cap\mathbf{Z}_p}\Bigl(H_g\bigl(\mathrm{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\bigr)\bigr)+H_{gw}\bigl(\mathrm{Res}_{(gw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\bigr)\Bigr)$$
$$+H_w\circ\mathrm{Res}_{wU\cap p\mathbf{Z}_p}\Bigl(H_{wg}\bigl(\mathrm{Res}_{(wg)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\bigr)+H_{wgw}\bigl(\mathrm{Res}_{(wgw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\bigr)\Bigr)$$

Comme $\mathrm{Res}_{U\cap\mathbf{Z}_p}\circ H_g\circ\mathrm{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}=\mathrm{Res}_{U\cap\mathbf{Z}_p\cap g\mathbf{Z}_p}\circ H_g=H_g\circ\mathrm{Res}_{g^{-1}U\cap g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}$, le premier des quatre termes de cette somme est $H_g\bigl(\mathrm{Res}_{g^{-1}U\cap g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\bigr)$. Pour les mêmes raisons, les trois autres termes sont $H_{gw}\bigl(\mathrm{Res}_{(gw)^{-1}U\cap(gw)^{-1}\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\bigr)$, $H_g\bigl(\mathrm{Res}_{g^{-1}U\cap(wg)^{-1}p\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\bigr)$ et $H_{gw}\bigl(\mathrm{Res}_{(gw)^{-1}U\cap(wgw)^{-1}p\mathbf{Z}_p\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\bigr)$. Comme $g^{-1}U\cap g^{-1}\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p$ et $g^{-1}U\cap(wg)^{-1}p\mathbf{Z}_p\cap\mathbf{Z}_p$ forment une partition de $g^{-1}U\cap\mathbf{Z}_p$, la somme des termes faisant intervenir z_1 est $H_g\bigl(\mathrm{Res}_{g^{-1}U\cap\mathbf{Z}_p}(z_1)\bigr)$. De même, celle des termes faisant intervenir z_2 est $H_{gw}\bigl(\mathrm{Res}_{(gw)^{-1}U\cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)\bigr)$.

Ceci permet de conclure.

Remarque II.1.7. — (i) On a établi en cours de route que si $z=(z_1,z_2)\in D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, alors $z_1=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}z$ et $z_2=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}w\cdot z$.

(ii) Si U,V sont des ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$ tels que U et wV forment une partition de $\mathbf{P}^1$, avec U contenant 0, l'application $z\mapsto(\mathrm{Res}_U(z),\mathrm{Res}_V(wz))$ induit un isomorphisme de $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ sur $(D\boxtimes U)\oplus(D\boxtimes V)$, l'isomorphisme réciproque étant

$$(y_1,y_2)\mapsto\bigl(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p\cap U}y_1+H_w(\mathrm{Res}_{w\mathbf{Z}_p\cap V}y_2),\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p\cap V}y_2+H_w(\mathrm{Res}_{w\mathbf{Z}_p\cap U}y_1)\bigr).$$

Ceci s'applique à $U = \mathbf{Z}_p$ et $V = p\mathbf{Z}_p$, ou à $U = p\mathbf{Z}_p$ et $V = \mathbf{Z}_p$; en particulier, la connaissance de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z$ et $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} wz$, ou celle de $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} wz$, détermine z.

(iii) Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, soit $\iota_U : D \boxtimes U \mapsto D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, envoyant z sur $(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p \cap U} z, H_w(\mathrm{Res}_{w\mathbf{Z}_p \cap U} z))$. On a $\mathrm{Res}_U \circ \iota_U = \mathrm{id}$ sur $D \boxtimes U$, ce qui fait que $\mathrm{Res}'_U = \iota_U \circ \mathrm{Res}_U$ est un projecteur de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ sur $\iota_U(D \boxtimes U)$. Par construction de l'action de G, on a $\iota_U \circ H_g = g \circ \iota_{g^{-1}U}$ sur $D \boxtimes g^{-1}U$, si $g^{-1}U$ ne contient pas ∞. Le lemme II.1.6 devient donc : $\mathrm{Res}'_U \circ g = g \circ \mathrm{Res}'_{g^{-1}U}$, *si* $g^{-1}U$ *ne contient pas* ∞.

(iv) On a $\mathrm{Res}'_U(g \cdot z) = g \cdot \mathrm{Res}'_{g^{-1}U \cap V_1} z + gw \cdot \mathrm{Res}'_{(gw)^{-1}U \cap V_2} w \cdot z$, si V_1 et wV_2 forment une partition de $\mathbf{P}^1$.

Dorénavant, on identifie $D \boxtimes U$ et $\iota_U(D \boxtimes U)$, et on note simplement Res_U l'application Res'_U de la rem. II.1.7. Alors, via ces identifications, H_g devient simplement l'action de g sur $D \boxtimes_\delta U$, si gU ne contient par ∞.

2. Squelette de l'action de G. — Si $\iota : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est une involution, soit

$$D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D \times D,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} z_2 = \iota(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} z_1)\}.$$

Si $z = (z_1, z_2)$, on définit $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z$ par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z = z_1$. On remarquera qu'un élément (z_1, z_2) de $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ est entièrement déterminé par la donnée de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z_1$ et $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_2$, ou celle de $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_1$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z_2$.

On définit un *squelette d'action de* G sur $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ en posant, si $z = (z_1, z_2)$:

- $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = (z_2, z_1)$.
- Si $a \in \mathbf{Q}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \cdot z = (\delta(a) z_1, \delta(a) z_2)$.
- Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = (\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z_1, \delta(a) \left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z_2)$.
- Si $z' = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z$, alors $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z' = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z_1$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} wz' = \delta(p)\psi(z_2)$.
- Si $b \in p\mathbf{Z}_p$, et si $z' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z$, alors

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} wz' = u_b(\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2)),$$

où $u_b = \delta^{-1}(1+b) \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \iota \circ \left(\begin{smallmatrix} (1+b)^2 & b(1+b) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \iota \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1/(1+b) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $D \boxtimes p\mathbf{Z}_p$.

Il n'y a aucune raison pour que ceci définisse une action de G (une telle action serait unique puisque G est engendré par w, le centre, les $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pour $a \in \mathbf{Z}_p^*$, $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et les $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pour $b \in p\mathbf{Z}_p$, mais pour obtenir une action de G, il faudrait que les relations entre ces générateurs soient respectées). De fait, il ressort de la prop. IV.4.10 que la seule involution ι fournissant une action intéressante de G est $\iota = w_\delta$. Nous allons commencer par vérifier que $\iota = w_\delta$ donne bien naissance à une action de G. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition II.1.8. — *Si* $\iota = w_\delta$, *les* $\mathscr{O}_L$*-modules* $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1 \cong D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ *sont munis du même squelette d'action de* G. *En particulier, le squelette d'action sur* $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ *supporte une action de* G.

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que l'action de G sur $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est bien donnée par les formules ci-dessus avec $\iota = w_\delta$.

Les deux premières formules sont des évidences.

La troisième suit de ce que $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ commute à $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, ce qui nous donne $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z_1$, et de ce que $w\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w$, donc

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = \delta(a)\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot wz = \delta(a)\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} wz = \delta(a)\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z_2.$$

Pour la quatrième, on remarque que $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z_1$, et comme $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \psi \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$, on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w\left(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right) = \delta(p)\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) wz = \delta(p)\psi\left(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} wz\right) = \delta(p)\psi(z_2).$$

Enfin, pour démontrer la dernière, on remarque que, si $b \in p\mathbf{Z}_p$, alors $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ laisse stable $\mathbf{Z}_p$ et $w(p\mathbf{Z}_p)$. On a donc $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z_1$, et

$$\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} w\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z = \left(w\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w\right)\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} wz = \left(w\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w\right)\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_2.$$

Or

$$w\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w = \left(\begin{smallmatrix} (b+1)^{-1} & 0 \\ 0 & (b+1)^{-1} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w\left(\begin{smallmatrix} (b+1)^2 & b(b+1) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w\left(\begin{smallmatrix} 1 & (b+1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

De plus, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & (b+1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ envoie $p\mathbf{Z}_p$ dans $1 + p\mathbf{Z}_p$, et w et $\left(\begin{smallmatrix} (b+1)^2 & b(b+1) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ laissent stables l'ouvert $1+p\mathbf{Z}_p$. L'action de w se fait donc à travers w_δ chaque fois que w apparaît dans la formule ci-dessus pour $w\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w$. On tombe donc bien sur la formule définissant u_b, ce qui permet de conclure.

Proposition II.1.9. — *Si M est un sous-P^+-module de D stable par ψ, et si $M \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est stable par w_δ, alors $M \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1,\ z_1, z_2 \in M\}$ est stable par G.*

Démonstration. — C'est évident sur les formules du squelette d'action.

Lemme II.1.10. — *Soit M un $(\varphi, \psi, P(\mathbf{Z}_p))$-module et $\iota : M \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to M \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ une involution telle que le squelette d'action sur $M \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ supporte une action de G. Soient $M_0 \supset M_1$ des sous-$\mathscr{O}_L$-modules de M vérifiant :*

- *M_0 et M_1 sont stables par $P(\mathbf{Z}_p)$,*
- *M_0 et M_1 sont stables par $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}$ et $\psi(M_0) \subset M_1$, $\varphi(M_1) \subset M_0$,*
- *$M_0 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et $M_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ sont stables par ι.*

Alors $M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in M \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1,\ z_1, z_2 \in M_0\}$ est stable par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

Démonstration. — Il est clair sur les formules du squelette d'action que $M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par w et $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; il suffit donc de vérifier la stabilité par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Soient donc $b \in \mathbf{Z}_p$ et $z = (z_1, z_2) \in M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1$. On a aussi $z = z_1 + w\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_2$ et donc $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z_1 + \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \psi(z_2)$. Maintenant, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z_1 = (1+T)^b z_1$ appartient à $M_0 = M_0 \boxtimes \mathbf{Z}_p \subset M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1$. Il suffit donc de considérer le second terme qui se réécrit sous la forme $w\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w\left(\begin{smallmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot (y_1 + y_2)$, où $y_1 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\psi(z_2)) \in M_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et $y_2 = \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(\psi(z_2)) \in M_1 \boxtimes p\mathbf{Z}_p$. Il résulte alors des hypothèses sur M_1 que l'on a $w\left(\begin{smallmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot y_1 \in M_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. On en déduit que $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w\left(\begin{smallmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot y_1 \in M_0 \boxtimes p\mathbf{Z}_p$, puis que $w\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w\left(\begin{smallmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot y_1 \in M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1$. Enfin, on déduit de la formule du squelette d'action pour $\left(\begin{smallmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ agissant sur $D \boxtimes w(p\mathbf{Z}_p)$ l'appartenance de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot y_2$ à $M_1 \boxtimes w(p\mathbf{Z}_p)$,

et donc celle de $w\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w\left(\begin{smallmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot y_2$ à $M_0 \boxtimes w(p\mathbf{Z}_p) \subset M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1$. Ceci permet de conclure.

3. Torsion par un caractère

Proposition II.1.11. — *Si η, δ sont deux caractères continus de $\mathbf{Q}_p^*$, alors*

$$D(\eta) \boxtimes_{\delta\eta^2} \mathbf{P}^1 = (D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \otimes (\eta \circ \det).$$

Démonstration. — Si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$, on note $\alpha_{\eta,g}$ la fonction $x \mapsto \eta(cx+d)$ au lieu de α_g. Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, et si $z \in D \boxtimes U$, une application successive des (iii), (iv) du lemme I.4.7 et du (iii) de la prop. I.4.3, nous donne :

$$\begin{aligned} H_{\delta\eta^2,g}(z \otimes \eta) &= g_*\big(m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}}(z \otimes \eta)\big) = g_*\big(m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}}(z) \otimes \eta\big) \\ &= m_{\eta\circ g'\circ g^{-1}} \circ g_*\big(m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}}(z)\big) \otimes \eta = g_* \circ m_{\eta\circ g'}\big(m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}}(z)\big) \otimes \eta. \end{aligned}$$

Comme $g'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, on a

$$(\eta \circ g'(x))\, m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}}(x) = \frac{\eta(ad-bc)}{\eta^2(cx+d)} \delta\eta^2(cx+d) = \eta(ad-bc)\delta(cx+d),$$

et donc $m_{\eta\circ g'} \circ m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}} = m_{(\eta\circ g')\alpha_{\delta\eta^2,g}} = \eta(ad-bc) m_{\alpha_{\delta,g}}$. Ceci permet de conclure.

4. Dualité

Lemme II.1.12. — (i) *Si $h \in G$, si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ tel que hU ne contient pas ∞, et si $x \in \check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ et $y \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, alors*

$$\{\mathrm{Res}_{hU}(h \cdot x), \mathrm{Res}_{hU}(h \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} = \{\mathrm{Res}_U(x), \mathrm{Res}_U(y)\}_{\mathbf{Q}_p}.$$

(ii) *Soit $\big(\coprod_{i\in I} U_i\big) \coprod \big(\coprod_{j\in J} V_j\big)$ une partition finie de $\mathbf{P}^1$ en ouverts compacts tels que ∞ n'appartienne à aucun des U_i et 0 n'appartienne à aucun des V_j. Alors, si $x \in \check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ et $y \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, la somme*

$$\sum_{i\in I} \{\mathrm{Res}_{U_i}(x), \mathrm{Res}_{U_i}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} + \sum_{j\in J} \{\mathrm{Res}_{wV_j}(w \cdot x), \mathrm{Res}_{wV_j}(w \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p}$$

ne dépend que de x et y et pas de la partition de $\mathbf{P}^1$.

Démonstration. — On a (cf. (iii) de la rem. II.1.7 pour la première égalité) :

$$\begin{aligned} \{\mathrm{Res}_{hU}(h \cdot x), \mathrm{Res}_{hU}(h \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} &= \{h \cdot \mathrm{Res}_U(x), h \cdot \mathrm{Res}_U(y)\}_{\mathbf{Q}_p} \\ &= \{h_*(m_{\alpha_h^{-1}}(\mathrm{Res}_U(x))), h_*(m_{\alpha_h}(\mathrm{Res}_U(y)))\}_{\mathbf{Q}_p} = \{\mathrm{Res}_U(x), \mathrm{Res}_U(y)\}_{\mathbf{Q}_p}, \end{aligned}$$

la dernière égalité s'obtenant en appliquant le (ii) puis le (i) de la prop. I.4.5. Ceci démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), il suffit de prouver que le résultat reste inchangé si on raffine la partition, ce qui suit du (i) de la rem. I.3.18, et qu'il reste aussi inchangé si on transforme un U_i en V_j, ce qui suit du (i) appliqué à $h = w$.

On note $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ l'accouplement sur $(\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1) \times (D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$ dont le (ii) du lemme précédent affirme l'existence (il est à valeurs dans $L/\mathscr{O}_L$, $\mathscr{O}_L$ ou L suivant que D est

un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$). En partant de la partition $\mathbf{Z}_p \coprod w(p\mathbf{Z}_p)$ de $\mathbf{P}^1$, on obtient la formule

$$\{(z_1,z_2),(z_1',z_2')\}_{\mathbf{P}^1} = \{z_1,z_1'\} + \{\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_2, \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_2'\} = \{z_1,z_1'\} + \{\psi(z_2),\psi(z_2')\},$$

la dernière égalité venant de ce que $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} = \varphi\psi$ et $\{\varphi(z),\varphi(z')\} = \{z,z'\}$.

Théorème II.1.13. — *L'accouplement* $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ *est parfait et* G*-équivariant.*

Démonstration. — $\{x,y\}_{\mathbf{P}^1} = \{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(x), \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(y)\} + \{\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(w\cdot x), \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(w\cdot y)\}$. On déduit la perfection de $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ sur $(\check{D}\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1)\times(D\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$ de celle de $\{\ ,\ \}$ sur $(\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p)\times(D\boxtimes\mathbf{Z}_p)$ et sur $(\check{D}\boxtimes p\mathbf{Z}_p)\times(D\boxtimes p\mathbf{Z}_p)$ (rem. I.3.18).

Pour montrer que $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ est G-équivariant, on peut, si $g\in G$, partitionner $\mathbf{P}^1$ sous la forme $U_1\coprod U_2\coprod U_3\coprod U_4$ de telle sorte que :

- U_1 ne contienne pas ∞ et gU_1 ne contienne pas ∞,
- U_2 ne contienne pas ∞ et gU_2 ne contienne pas 0,
- U_3 ne contienne pas 0 et gU_3 ne contienne pas ∞,
- U_4 ne contienne pas 0 et gU_4 ne contienne pas 0.

Alors $\{g\cdot x, g\cdot y\}_{\mathbf{P}^1}$ est égal à

$$\{\mathrm{Res}_{gU_1}(g\cdot x),\mathrm{Res}_{gU_1}(g\cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} + \{\mathrm{Res}_{wgU_2}(wg\cdot x),\mathrm{Res}_{wgU_2}(wg\cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p}$$
$$+\{\mathrm{Res}_{gU_3}(g\cdot x),\mathrm{Res}_{gU_3}(g\cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} + \{\mathrm{Res}_{wgU_4}(wg\cdot x),\mathrm{Res}_{wgU_4}(wg\cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p},$$

et en appliquant le (i) du lemme II.1.12 à $h=g$ pour U_1, $h=wg$ pour U_2, $h=gw$ pour U_3 et $h=wgw$ pour U_4, on obtient que $\{g\cdot x, g\cdot y\}_{\mathbf{P}^1}$ est aussi égal à

$$\{\mathrm{Res}_{U_1}(x),\mathrm{Res}_{U_1}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} + \{\mathrm{Res}_{U_2}(x),\mathrm{Res}_{U_2}(y)\}_{\mathbf{Q}_p}$$
$$+\{\mathrm{Res}_{wU_3}(w\cdot x),\mathrm{Res}_{wU_3}(w\cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} + \{\mathrm{Res}_{wU_4}(w\cdot x),\mathrm{Res}_{wU_4}(w\cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p},$$

c'est-à-dire à $\{x,y\}_{\mathbf{P}^1}$. Ceci permet de conclure.

5. Lien entre $D\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ *et* $D\boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$. — Soit $\iota : D\boxtimes\mathbf{Z}_p^* \to D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ une involution. *On suppose que les formules du squelette d'action définissent une action de* G sur $D\boxtimes_{\delta,\iota}\mathbf{P}^1$ (c'est, d'après la prop. II.1.8, le cas si $\iota = w_\delta$, et donc ce qui suit s'applique à $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$).

Proposition II.1.14. — (i) *Si* $z\in D\boxtimes_{\delta,\iota}\mathbf{P}^1$, *alors* $\left(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)z\right)_{n\in\mathbf{N}}$ *appartient à* $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$.

(ii) *L'application* $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} : D\boxtimes_{\delta,\iota}\mathbf{P}^1 \to D\boxtimes_\delta\mathbf{Q}_p$ *ainsi définie est* B*-équivariante.*

(iii) *Si* U *est un ouvert compact de* $\mathbf{Q}_p$, *alors* $\mathrm{Res}_U\circ\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Res}_U$.

(iv) *Le noyau de* $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ *est* $(0,D^{\mathrm{nr}}) = \{(0,\alpha),\ \alpha\in D^{\mathrm{nr}}\}$.

Démonstration. — En revenant aux formules du squelette d'action pour l'action de $\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, on obtient que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z\right)$ est égal à

$$\delta(p)^{-1}\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(w\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot wz\right) = \delta(p)^{-1}(\delta(p)\psi(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}w\cdot wz)) = \psi(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}z).$$

Autrement dit, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\circ\left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \psi\circ\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$, ce qui permet de démontrer le (i). La commutation de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ à l'action de $g\in B$ suit alors formellement des formules du

squelette d'action et de ce que, par hypothèse, ces formules définissent une action de G. Le (iii) est immédiat sur la définition, si $U \subset \mathbf{Z}_p$; le cas général s'en déduit en utilisant le (ii). Enfin, si $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$, les propriétés suivantes sont équivalentes (la dernière équivalence suit de la définition de D^{nr}) :

- $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} z = 0$;
- $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z = 0$ et $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p - p\mathbf{Z}_p} z = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- $z_1 = 0$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p - p^n\mathbf{Z}_p} z_2 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p - p^n\mathbf{Z}_p} w \cdot z = w(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p - p\mathbf{Z}_p} z) = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- $z_1 = 0$ et $z_2 = \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} z_2 \in \varphi^n(D)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- $z_1 = 0$ et $z_2 \in D^{\mathrm{nr}}$.

Ceci permet de conclure.

Remarque II.1.15. — Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, l'image de $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est incluse dans $(D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_b$.

Le module $(D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_c$ s'identifie naturellement à un sous-B-module de $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ (si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ et $z \in D \boxtimes U$, alors $\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p \cap U} z, \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p \cap wUw \cdot z}\big)$ est un élément bien défini de $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$). Il n'en est pas de même de $D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ (il y a une condition à l'infini). Le résultat suivant permet de considérer $\widetilde{D} = (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ comme un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module de $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$, ce que nous ferons sans plus de commentaires.

Lemme II.1.16. — (i) *Si $z \in \widetilde{D}$, alors $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(z)$ a une limite dans $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$.*

(ii) *L'application $\iota_{\mathbf{Q}_p} : \widetilde{D} \to D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ qui s'en déduit est $P(\mathbf{Q}_p)$-équivariante.*

(iii) *On a $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} \circ \iota_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{id}$ sur $\widetilde{D}$.*

Démonstration. — $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} z - \mathrm{Res}_{p^{1-n}\mathbf{Z}_p} z = \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z$ s'écrit, dans $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$, sous la forme

$$\big(0, w \cdot \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z\big) = \big(0, w\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\big) = \big(0, \delta(p)^{-n} \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \iota\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\big)\big).$$

Or $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z = \varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z)$ tend vers 0 dans D (cf. les remarques suivant le lemme I.3.19). On en déduit que $\delta(p)^{-n} \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \iota\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\big)$, qui est égal à $\delta(p)^{-n} \varphi^n\big(\iota\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\big)\big)$, tend aussi vers 0 dans D, et $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} z - \mathrm{Res}_{p^{1-n}\mathbf{Z}_p} z$ tend vers 0 dans $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$. Ceci permet de démontrer le (i). Le reste suit, par continuité, de la prop. II.1.14.

Lemme II.1.17. — *Si $z \in \widetilde{D}$ est tel que $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} z \to 0$ pour la topologie p-adique quand $n \to +\infty$, alors $w \cdot z \in \widetilde{D}$.*

Démonstration. — Écrivons z sous la forme $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$. Si $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} z \to 0$ pour la topologie p-adique, alors $w \cdot z$ est somme de la série $z_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \delta(p)^n \varphi^{-n}(\iota(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\varphi^{-n} \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} z_1)))$, qui est une série convergeant dans $\widetilde{D}$ car son terme général tend p-adiquement vers 0.

II.2. Les sous-modules $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$

1. Propriétés conditionnées à la stabilité par G. — Si D est un (φ,Γ)-module étale et si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(\mathscr{O}_L)$, soit

$$D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} z \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p\}.$$

Remarque II.2.1. — (i) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$, alors $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est la limite projective des $D_k^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$, où $D_k = D/p^k D$, et donc $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est la limite projective des $D_k^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$; si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, alors $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = L \cdot (D_0^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$, pour tout $\mathscr{O}_\mathscr{E}$-réseau D_0 de D stable par φ et Γ.

(ii) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$, alors $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est un sous-$\mathscr{O}_L$-module saturé de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et donc $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est un sous-$\mathscr{O}_L$-module saturé de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. (La saturation de $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ suit de ce que $D \mapsto D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est un foncteur exact (th. I.3.9) ; le module $D^\sharp$ n'est, en général, pas saturé dans D.)

On définit le sous-$\mathscr{O}_L$-module $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de manière un peu différente suivant que D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$:
– si D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, on pose

$$D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} z \in D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p\},$$

– si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$, le sous-$\mathscr{O}_L$-module

$$(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}} = \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} z \in D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p\}$$

de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ n'est pas forcément saturé ; on note $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ son *saturé*[46] (i.e. l'ensemble des $z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ tels que $p^k z \in (D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ pour tout k assez grand).

Remarque II.2.2. — (i) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$, alors $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ est la limite projective des $(D/p^k D)^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est l'intersection de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ avec $(L \cdot D)^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

(ii) Dans tous les cas, $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est un sous-$\mathscr{O}_L$-module de $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ (c'est clair si D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$; si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$, cela suit de ce que $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est saturé dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$). De plus, $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ contient (cf. prop. I.3.20) le sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module $\widetilde{D}^+ \cong (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ de $\widetilde{D} \cong (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$.

(iii) Le module $(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$ s'injecte dans $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)/(D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p) \cong D^\sharp/D^\natural$ (resp. dans son quotient par son sous-$\mathscr{O}_L$-module de torsion) si D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ (resp. si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$). Il en résulte que $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ si D est irréductible de rang ≥ 2 sur $\mathscr{E}$ ou sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$.

(iv) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$, alors $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ s'injecte dans le sous-$\mathscr{O}_L$-module de torsion de $D^\sharp/D^\natural$; c'est donc un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie.

Comme $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est B-équivariante, $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ sont stables par B, mais pas, *a priori*, par G.

---

[46] La raison pour saturer $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est que l'on veut que $\mathbf{\Pi}(D) = (D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$ soit un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, et donc soit sans p-torsion. Il n'est pas sûr que ce soit la manière la plus intelligente de procéder.

Remarque II.2.3. — Soit D un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

(i) Si $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ sont stables par G, alors ils sont compacts. En effet, ils sont fermés dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ (si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, cela suit de la continuité de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$; dans le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, il faut de plus utiliser le (iv) de la rem. II.2.2), et si $X \in \{D^\sharp, D^\natural\}$, alors $X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est inclus dans $\{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z \in X \text{ et } \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot z \in X\}$ qui est compact. On en déduit que $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est le plus grand sous-$\mathscr{O}_L$-module compact de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ stable par G : en effet, l'image d'un tel ensemble par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est compacte et stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, et donc est incluse dans $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (cf. prop. I.3.12).

(ii) Sous la même hypothèse, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ induit une surjection de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ (resp. de $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$) sur $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. En effet, l'image est compacte et donc fermée et elle contient $\widetilde{D}^+$ qui est dense dans $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (cela suit du th. I.3.13). Par contre, $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ n'a aucune raison, en général, de se surjecter sur $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

(iii) On déduit du lemme II.2.5 ci-dessous que si $0 \to D_1 \to D \to D_2 \to 0$ est une suite exacte d'objets de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ et si $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G, il en est de même de $D_1^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $D_2^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. La réciproque est, en général, fausse.

(iv) Le foncteur $D \mapsto D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est exact. On déduit donc des points ci-dessus et de la prop. II.1.14 que, si $0 \to D_1 \to D \to D_2 \to 0$ est une suite exacte d'objets de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ tels que $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ soit stable par G, alors $D_1^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est d'indice fini dans le noyau de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D_2^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et le conoyau de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D_2^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est fini. On en déduit que la suite $0 \to D_1^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D_2^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to 0$ est exacte si aucune des représentations de G ci-dessus n'admet de morceau fini dans sa décomposition de Jordan-Hölder (ce qui est le cas général, mais nous renvoyons le lecteur au n° 7 du § VII.4 pour des contrexemples).

Lemme II.2.4. — *Soient $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ et $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$, un caractère continu. Si M est un sous-$\mathscr{O}_L$-module ouvert compact de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, stable par G et contenant $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, alors son orthogonal $M^\perp$ est un sous-$\mathscr{O}_L$-module ouvert compact de $\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, stable par G et contenu dans $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$.*

Démonstration. — $M^\perp$ est stable par G et fermé car $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ est continu et G-équivariant. De plus, $M \subset D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ d'après le (i) de la rem. II.2.3, et donc $M^\perp$ contient $D^{++} \boxtimes \mathbf{Z}_p$. Comme il est stable par G, il contient aussi $D^{++} \boxtimes \mathbf{Z}_p + w \cdot (D^{++} \boxtimes \mathbf{Z}_p)$, ce qui prouve que $M^\perp$ est ouvert. Il ne reste donc plus qu'à prouver qu'il est contenu dans $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. Or M contient $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ qui contient $D^+ \boxtimes \mathbf{Z}_p$, ce qui implique que tout élément z de $M^\perp$ vérifie $\{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z, x\} = 0$, pour tout $x \in D^+$. Cette dernière condition équivaut à $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z \in \check{D}^\natural$ d'après la prop. I.3.4, et $M^\perp$ étant stable par G, on a $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z \in \check{D}^\natural$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et donc $z \in \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. Ceci permet de conclure.

Lemme II.2.5. — *Soient $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ et $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$, un caractère continu. Si $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ possède un sous-$\mathscr{O}_L$-module ouvert compact M stable par G, alors $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que l'image M' de M par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est compacte et stable par $P(\mathbf{Q}_p)$ puisque M l'est. Comme de plus, M est ouvert dans $D\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, son image par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ engendre D. Il en résulte, d'après le th. I.3.13, que M' contient $D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$. Maintenant $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est, par construction, stable par $P(\mathbf{Q}_p)$; il en est donc de même de $M+(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)$. Soit alors $z\in D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$. Il existe $y\in M$ tel que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(z-y)=0$, ce qui signifie, d'après le (iv) de la prop. II.1.14, que $z-y$ est de la forme $(0,\alpha)$, avec $\alpha\in D^{\mathrm{nr}}$. On a alors $w\cdot z=(\alpha,0)+w\cdot y$, et comme $(\alpha,0)\in D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, on en déduit que $M+(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)$ est stable par w, et donc aussi par G. Son orthogonal M' est alors un sous-$\mathscr{O}_L$-module ouvert compact de $\check{D}\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$, qui est stable par G et inclus dans $\check{D}^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$ d'après le lemme II.2.4. On déduit donc de ce qui précède, appliqué à M' et $\check{D}$ au lieu de M et D, que $\check{D}^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$ est un sous-$\mathscr{O}_L$-module ouvert compact de $\check{D}\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$, stable par G. En réitérant le raisonnement en partant de l'orthogonal de $\check{D}^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$ (inclus dans $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ d'après le lemme II.2.4), on en déduit que $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est un sous-$\mathscr{O}_L$-module ouvert compact de $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, stable par G.

Proposition II.2.6. — *$D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est stable par G si et seulement si $D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ l'est.*

Démonstration. — Le cas $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ se déduit du cas $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$ en tensorisant par L ; on suppose donc que D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ dans ce qui suit.

Commençons par supposer que $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est stable par G et montrons que $D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ l'est. Il suffit de vérifier que $D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est stable par w. Soit $P\in\mathscr{O}_L[X]$, unitaire, tel que $P(\psi)$ tue $D^\sharp/D^\natural$. Si $\alpha=\left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, alors $P(\alpha)$ envoie $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ dans $D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$, et donc aussi $D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ dans $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$. Soit $z\in D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$. D'après ce qui précède, on a $P(\alpha)\cdot z\in D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, et comme $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est, par hypothèse, stable par w, on a $w\cdot P(\alpha)\cdot z\in D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$. Maintenant $w\cdot P(\alpha)=Q(\alpha^{-1})\cdot w$, où $Q(X)=P(\delta(p)X)$ est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathscr{O}_L$, et on a $Q(\alpha^{-1})\cdot(w\cdot z)\in D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$. D'après la prop. I.3.16, cela implique $w\cdot z\in D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, ce qui permet de conclure.

Supposons maintenant que $D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est stable par G. Si $k\in\mathbf{N}$, soit $D_k=D/p^kD$. L'image de $D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ dans $D_k\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est stable par G pour tout k. Or cette image est compacte puisque $D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ l'est (rem. II.2.3) et ouverte car $D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ contient $\widetilde{D}^{++}$ qui se surjecte sur $\widetilde{D}_k^{++}$, ce qui fait qu'elle contient $(D_k^{++}\boxtimes\mathbf{Z}_p)+w\cdot(D_k^{++}\boxtimes\mathbf{Z}_p)$. On est donc dans les conditions d'applications du lemme II.2.5 ; on en déduit la stabilité de $D_k^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ par G et, en passant à la limite projective (si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$), celle de $(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ et de son saturé $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$.

Ceci permet de conclure.

2. La représentation conditionnelle $\mathbf{\Pi}(D)$ de G. — *On suppose que $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est stable par G*, et on note $\mathbf{\Pi}(D)$ le quotient de $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ par $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$. On renvoie au (iv) de la rem. II.2.3 pour des commentaires sur la (non)-exactitude de $D\mapsto\mathbf{\Pi}(D)$, étant entendu que le foncteur $D\mapsto D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est, quant-à-lui, trivialement exact.

On rappelle que l'on dispose d'une application $\mathrm{rés}_0 : D\boxtimes\mathbf{Q}_p\to D^\sharp/D^\natural$.

Lemme II.2.7. — *Si $z \in \widetilde{D}$ vérifie $\text{rés}_0(z) = 0$, alors il existe $x \in \widetilde{D}^+$ et $y \in \widetilde{D}$ tels que $z = x + w \cdot y$.*

Démonstration. — D'après la prop. I.3.23, on peut écrire z sous la forme $x + y'$, avec $x \in \widetilde{D}^+$ et $y' \in \widetilde{D}$ vérifiant $\text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} y' \to 0$ p-adiquement, quand $n \to +\infty$. D'après le lemme II.1.17, il existe $y \in \widetilde{D}$ tel que $y' = w \cdot y$. Ceci permet de conclure.

On définit $\text{rés}_\infty : D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D^\sharp/D^\natural$ par $\text{rés}_\infty(z) = \text{rés}_0(\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}(w \cdot z))$.

Corollaire II.2.8. — (i) *Tout élément de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans le noyau de rés_∞ peut s'écrire sous la forme $z = x + w \cdot y$, avec $x \in \widetilde{D}$, et $y \in \widetilde{D}^+$.*

(ii) $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \widetilde{D}^+ + w \cdot \widetilde{D}^+$ *[resp. $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}} = \widetilde{D}^+ + w \cdot \widetilde{D}^+$ si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$]*.

Démonstration. — On peut écrire z sous la forme $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z + w \cdot \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot z$. La condition $\text{rés}_\infty(z) = 0$ équivaut à $\text{rés}_0(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot z) = 0$, ce qui permet d'utiliser le lemme II.2.7 pour écrire $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot z \in D \subset \widetilde{D}$ sous la forme $x_0 + w \cdot y_0$, avec $x_0 \in \widetilde{D}^+$ et $y_0 \in \widetilde{D}$. Il suffit donc de poser $y = x_0$ et $x = y_0 + \text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z$ pour démontrer le (i).

Pour démontrer le (ii), on commence par remarquer que l'on peut écrire tout élément $z = (z_1, z_2)$ de [47] $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, sous la forme $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_1) + w \cdot z_2$, et comme $z_2 \in D^\natural$, on a $\text{rés}_\infty(z) = 0$. Il résulte alors du (i) qu'il existe $y \in \widetilde{D}^+$ tel que $x = z - w \cdot y \in \widetilde{D}$. Par ailleurs, $\widetilde{D}^+ \subset D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, et donc $w \cdot \widetilde{D}^+ \subset D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. On en déduit l'appartenance de x à $\widetilde{D} \cap (D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) = \widetilde{D}^+$, ce qui permet de conclure.

Corollaire II.2.9. — (i) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}_{\text{tors}}$, l'application rés_∞ est identiquement nulle sur $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et induit la suite exacte suivante de B-modules :*

$$0 \to \widetilde{D}/\widetilde{D}^+ \to \mathbf{\Pi}(D) \to D^\sharp/D^\natural \to 0.$$

(ii) *Si D est irréductible de rang ≥ 2 sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ ou $\mathscr{E}$, alors l'injection naturelle de $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ dans $\mathbf{\Pi}(D)$ est un isomorphisme de $P(\mathbf{Q}_p)$-modules.*

Démonstration. — Le (i) suit directement du cor. II.2.8. Le (ii) est une conséquence du cor. II.2.8, de ce que $D^\sharp/D^\natural$ est de torsion (resp. nul) si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$ [resp. si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{E})$] est irréductible de rang ≥ 2, et de ce que $\widetilde{D}$ est saturé dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

Lemme II.2.10. — (i) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}_{\text{tors}}$, alors $\mathbf{\Pi}(D) \in \text{Rep}_{\text{tors}} G$.*

(ii) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$, alors $\mathbf{\Pi}(D) \in \text{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$.*

(iii) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{E})$, alors $\mathbf{\Pi}(D) \in \text{Rep}_L G$.*

Démonstration. — Compte-tenu du (i) de la rem. II.0.6, la seule chose qui n'ait pas déjà été vérifiée pour le (i) est que $\mathbf{\Pi}(D)$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L[G]$. Or il est déjà de longueur finie sur $\mathscr{O}_L[P(\mathbf{Q}_p)]$ d'après le cor. I.3.22 et le cor. II.2.9.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$, alors $\mathbf{\Pi}(D)$ est le quotient de $(D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$, qui est la limite projective des $\mathbf{\Pi}(D/p^k D)$, par son sous-$\mathscr{O}_L$-module de torsion, ce qui permet

[47] Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$, il faut remplacer $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ par $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$ dans tout ce qui suit.

de déduire le (ii) du (i). Le (iii) s'en déduisant en tensorisant par L, cela permet de conclure.

3. Dualité. — On suppose encore que $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G.

Théorème II.2.11. — *$D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ sont les orthogonaux l'un de l'autre pour $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$.*

Démonstration. — Notons simplement $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ les espaces $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$.

Commençons par supposer que $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$. Comme $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par w et que $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ est équivariant sous l'action de w, il suffit, compte-tenu du (ii) du cor. II.2.8, de prouver que $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est orthogonal à $\widetilde{D}^+$, pour démontrer l'orthogonalité de $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$. Soit donc $x = (x_1, x_2) \in \check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, et soit $y \in \widetilde{D}^+$. On peut décomposer y sous la forme $y_0 + y^+$, avec $y_0 \in D^{\mathrm{nr}}$ et $y^+ \in \widetilde{D}^{++}$. On a alors $\{x, y_0\}_{\mathbf{P}^1} = \{x_1, y_0\} = 0$ puisque $y_0 \in D^{\mathrm{nr}} \subset D^+$, et $x_1 \in \check{D}^\natural$ (cf. (i) de la prop. I.3.4).

Par ailleurs, y^+ est la limite de $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} y^+$ dans $D \boxtimes \mathbf{P}^1$. On en déduit que $\{x, y^+\}_{\mathbf{P}^1}$ est la limite, quand $n \to +\infty$, de

$$\begin{aligned}\{x, \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} y^+\}_{\mathbf{Q}_p} &= \{\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} x, \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} y^+\}_{\mathbf{Q}_p} \\ &= \{\varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} x), \varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} y^+)\} = \{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) x\right), \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \varphi^n(y^+)\},\end{aligned}$$

et comme $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) x\right)$ varie dans $\check{D}^\natural$ qui est compact, tandis que $\varphi^n(y^+)$ tend vers 0, un passage à la limite montre que $\{x, y^+\}_{\mathbf{P}^1} = 0$. On en déduit l'orthogonalité de $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ dans le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$.

Les mêmes arguments montrent que $(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ et $(\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ sont orthogonaux, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$; par linéarité, il en est de même de $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$. Enfin, on peut déduire cette orthogonalité dans le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ de celle du cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ en tensorisant par L.

Maintenant, si D est de torsion, l'inclusion de $(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)^\perp$ dans $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ a déjà été démontrée (lemme II.2.4), ce qui permet de conclure, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$.

Supposons maintenant $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, et posons $D_k = D/p^k D$ si $k \in \mathbf{N}$. Alors dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D^{\mathrm{nr}} & \longrightarrow & (D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}} & \longrightarrow & D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D_k^{\mathrm{nr}} & \longrightarrow & D_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 & \longrightarrow & D_k^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

– les lignes horizontales sont exactes (par le (ii) de la rem. II.2.3),
– la flèche verticale de droite est surjective,
– il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que p^c tue le conoyau de $D^{\mathrm{nr}} \to D_k^{\mathrm{nr}}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

On en déduit que l'image de $(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ contient $p^c(D_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)$, et donc que si $z \in \check{D} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est orthogonal à $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ (ce qui équivaut à ce que z soit orthogonal à $(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ qui est la limite projective des $D_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$), alors $p^c z$ est orthogonal à

$D_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, pour tout $k \in \mathbf{N}$. Il résulte donc du cas de torsion que, modulo p^k, on a $p^c z \in \check{D}_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, et donc que $p^c z \in \varprojlim \check{D}_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 = (\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ et $z \in \check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$. D'où le résultat si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$; le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ s'en déduisant en tensorisant par L, cela permet de conclure.

Corollaire II.2.12. — *$\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ est stable par G, et si $\check{\Pi} = \check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 / \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, alors $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est le dual de $\check{\Pi}$ tandis que $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ est le dual de $\Pi = \mathbf{\Pi}(D)$.*

Remarque II.2.13. — Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, la représentation $\check{\Pi}$ de G apparaissant dans le corollaire est la contragrédiente de Π (cf. prop. IV.4.16).

4. Résultats en famille. — Soit S une $\mathscr{O}_L$-algèbre quotient de $\mathscr{O}_L[[X_1,\dots,X_d]]$, sans p-torsion et de corps résiduel k_L. On note $\mathfrak{m}_S$ l'idéal maximal de S. Alors S est la limite projective des $S_n = S/\mathfrak{m}_S^n$ et S_n est une $\mathscr{O}_L$-algèbre finie pour tout n. On note $\mathscr{X}$ l'espace analytique sous-jacent au spectre formel de S : si M est une extension finie de L, alors $\mathscr{X}(\mathscr{O}_M)$ est l'ensemble des morphismes continus $s : S \to \mathscr{O}_M$ de $\mathscr{O}_L$-algèbres. Si $s \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, on note $\mathfrak{m}_s$ l'idéal premier de S lui correspondant.

On note $S\widehat{\otimes}\mathscr{O}_\mathscr{E}$ la limite projective des $S_n \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_\mathscr{E}$, que l'on munit d'actions S-linéaires de φ et Γ, en faisant agir φ par $1\otimes\varphi$ et $\gamma \in \Gamma$ par $1\otimes\gamma$ sur chaque $S_n \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_\mathscr{E}$.

Un (φ,Γ)-module étale sur $S\widehat{\otimes}\mathscr{O}_\mathscr{E}$ est un $(S\widehat{\otimes}\mathscr{O}_\mathscr{E})$-module libre[(48)] de rang fini, muni d'actions semi-linéaires commutant entre elles de φ et Γ, telles que $\varphi(D)$ engendre D sur $S\widehat{\otimes}\mathscr{O}_\mathscr{E}$. Un tel module peut être vu comme une famille de (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ variant analytiquement sur $\mathscr{X}$: si $s \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, alors $D_s = D \otimes_S (S/\mathfrak{m}_s)$ est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$.

Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $S\widehat{\otimes}\mathscr{O}_\mathscr{E}$ et si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(S)$, on définit le $S[G]$-module $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ par les formules du § II.1, et alors $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est la limite projective des $(S_n \otimes_S D) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, ce qui en fournit une définition alternative, les $S_n \otimes_S D$ pouvant être vus comme des objets de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ en oubliant l'action de S_n.

On définit $D^\natural \subset D^\sharp \subset D$ comme les limites projectives des $(S_n \otimes_S D)^\natural$ et $(S_n \otimes_S D)^\sharp$. L'action de ψ passant à la limite, on dispose des $S[P(\mathbf{Q}_p)]$-modules $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$. On définit $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ et $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ comme les images inverses dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$; si $s \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, la réduction modulo $\mathfrak{m}_s$ envoie $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ et $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans $(D_s^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ et $D_s^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ respectivement.

On définit $\widetilde{D}$ comme la limite projective des $\widetilde{\mathscr{O}}_\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_\mathscr{E}} (S_n \otimes_S D)$, et on note $\widetilde{D}^{++}$ l'ensemble des $x \in \widetilde{D}$ tels que $\varphi^n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Lemme II.2.14. — *La réduction modulo $\mathfrak{m}_s$ induit des surjections*

$$D^\sharp \to D_s^\sharp, \quad D^\natural \to D_s^\natural \quad \text{et} \quad \widetilde{D}^{++} \to \widetilde{D}_s^{++}.$$

Démonstration. — Cela suit de la prop. I.3.2 et de l'exactitude du foncteur $D \mapsto \widetilde{D}^{++}$ (rem. I.3.5(i)).

(48) La théorie marche aussi bien [**34**] avec « de type fini » au lieu de « libre de rang fini », mais nous n'en aurons pas besoin. De même, l'hypothèse « S sans p-torsion » n'est pas vraiment nécessaire.

Soient D un (φ,Γ)-module étale sur $S\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to S^*$ un caractère continu. **On suppose que** $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ **est stable par** G, et on note $\mathbf{\Pi}(D)$ le $S[G]$-module $(D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$.

Proposition II.2.15. — *Si $s \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, alors $D_s^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G, et l'application naturelle $\mathbf{\Pi}(D) \to \mathbf{\Pi}(D_s)$ est surjective, où $\mathbf{\Pi}(D_s) = (D_s \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D_s^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$.*

Démonstration. — Si A est un quotient fini de S et si $D_A = A \otimes_S D$, l'image de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans $D_A \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est compacte, stable par G, et contient $M = D_A^{++}$ puisque $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ contient $\widetilde{D}^{++}$ et que l'application naturelle $\widetilde{D}^{++} \to \widetilde{D}_A^{++}$ est surjective. Comme $M + w\cdot M$ est un ouvert de $D_A \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, on est dans les conditions d'application du lemme II.2.5, ce qui permet d'en déduire la stabilité de $D_A^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

Si $s \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, si $A = S/\mathfrak{m}_s$ (et donc $A \cong \mathscr{O}_L$), et si $A_n = S_n \otimes_S A$, alors A_n est fini pour tout n et A est la limite projective des A_n. Comme le module $(D_s^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ est la limite projective des $D_{A_n}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, il est stable par G ; il en est donc de même de $D_s^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

Enfin, l'application $z \mapsto \big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z, \varphi^{-1}(\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} w\cdot z)\big)$ est un isomorphisme de S-modules de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ sur $D \oplus D$. On en déduit la surjectivité de $(D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \to (D_s \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$, et donc celle de $\mathbf{\Pi}(D) \to \mathbf{\Pi}(D_s)$.

Lemme II.2.16. — *Si $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G, il en est de même de $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$.*

Démonstration. — Il résulte de la démonstration de la prop. II.2.15 que $D_{S_n}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G, pour tout n. Il en est donc de même de la limite projective des $D_{S_n}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ qui n'est autre que $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$. D'où le résultat.

II.3. (φ,Γ)-modules de rang 2 et représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

1. La représentation $\mathbf{\Pi}(D)$ attachée à un (φ,Γ)-module de rang 2. — Si D est un (φ,Γ)-module libre de rang 2 sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, le module $\wedge^2 D$ est libre de rang 1 et donc de la forme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes \alpha_D$, où α_D est un caractère continu de $\mathbf{Q}_p^*$ dans $\mathscr{O}_L^*$. On note :

- δ_D le caractère défini par $\delta_D(x) = (x|x|)^{-1}\alpha_D(x)$ (le choix d'un isomorphisme $\wedge^2 D \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes \delta'_D$ fournit des isomorphismes $x \mapsto x \otimes \delta_D^{-1}$ de D sur $\check{D}$ et $x \mapsto x \otimes \delta_D$ de $\check{D}$ sur D),
- $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ le G-module $D \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1$; son caractère central est donc δ_D,
- $w_D : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ l'involution w_{δ_D}.

Comme on est en dimension 2, l'irréductibilité de D équivaut à ce que $H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(D)) = 0$, ou à ce que $D^{\mathrm{nr}} = 0$, ou encore à ce que $D^\sharp/D^\natural$ soit de torsion sur $\mathscr{O}_L$; elle implique que $D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1 = D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Théorème II.3.1. — (i) *Le sous-module $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ de $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par G.*

(ii) *La représentation* $\mathbf{\Pi}(D) = (D \boxtimes \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)$ *est un objet de* $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, *et* $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ *est isomorphe*[49] *à* $\mathbf{\Pi}(D)^* \otimes \delta_D$. *On a donc une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathbf{\Pi}(D)^* \otimes \delta_D \longrightarrow D \boxtimes \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{\Pi}(D) \longrightarrow 0.$$

Remarque II.3.2. — (i) Le (i) du théorème implique les points (ii) et (iii) d'après le cor. II.2.12, à l'exception de l'isomorphisme $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 \cong \mathbf{\Pi}(D)^* \otimes \delta_D$. Celui-ci suit de ce que $\check{D} \cong D \otimes \delta_D^{-1}$, et donc que $\check{\mathbf{\Pi}}(D)^* \cong \mathbf{\Pi}(D)^* \otimes \delta_D$.

(ii) La démonstration du (i) du théorème se fait par prolongement analytique à partir, au choix, du cas cristallin ou du cas triangulin (cf. note 7 pour les limites de cet argument) ; cela demande de montrer que la correspondance $D \mapsto \mathbf{\Pi}(D)$ se comporte bien en famille. C'est l'objet du th. II.3.3 ci-dessous.

On reprend les notations du n° 4 du § II.2, et on suppose, dans toute la suite de ce §, que D est un (φ,Γ)-module étale de rang 2 sur $S\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Le module $\wedge^2 D$ est libre de rang 1 et donc de la forme $(S\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}) \otimes \alpha_D$, où $\alpha_D \in \widehat{\mathscr{T}}(S)$. On note, comme d'habitude, δ_D l'élément de $\widehat{\mathscr{T}}(S)$ défini par $\delta_D(x) = (x|x|)^{-1}\alpha_D(x)$ et $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ le $S[G]$-module $D \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1$.

Théorème II.3.3. — (i) *Le sous-module* $(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ *de* $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ *est stable par* G.

(ii) *Si* $s \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, *alors* $D_s^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ *est stable par* G, $\mathbf{\Pi}(D_s) = (D_s \boxtimes \mathbf{P}^1)/(D_s^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)$ *est un objet de* $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ *et l'application naturelle* $\mathbf{\Pi}(D) \to \mathbf{\Pi}(D_s)$ *est surjective.*

Démonstration. — On remarque que le (i) implique le reste en vertu de la prop. II.2.15. La démonstration du (i) se fait en trois étapes.

– On commence par démontrer (n° 2) que si $\mathscr{X}$ contient une suite zariski-dense $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de $\mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$ telle que le (i) soit vrai pour D_{s_n} pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors le (i) est vrai pour D et pour D_s, pour tout $s \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$.

– On vérifie (n° 3), en utilisant les résultats de [**8**], que le (i) est vrai pour un (φ,Γ)-module cristallin (et même cristabélin). (Les calculs permettant d'établir ce résultat sont un peu délicats ; ils peuvent être évités en utilisant les résultats du chap. IV (cf. cor. IV.4.13 où le résultat est étendu au cas triangulin grâce aux travaux de [**8, 26, 32**]).)

– On montre (n° 4), en utilisant les résultats de [**28, 55**], que l'on peut incorporer n'importe[50] quel (φ,Γ)-module de rang 2 dans une famille analytique comportant une sous-suite zariski-dense de points cristallins.

2. Réduction à une famille zariski-dense. — Dans tout ce qui suit, $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de points de $\mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, zariski-dense dans $\mathscr{X}$, et si $n \in \mathbf{N}$, alors $I_n = \mathfrak{m}_{s_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{s_n}$. On suppose que le (i) du théorème est vrai pour D_{s_n}, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, et notre but est de montrer qu'alors il est vrai pour D et, quel que soit $s \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, pour D_s.

(49) L'isomorphisme dépend du choix de $\wedge^2 D \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes \delta'_D$ ci-dessus.

(50) Cf. note 7 pour des restrictions temporaires

Lemme II.3.4. — *La suite d'idéaux $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 : quel que soit $k\in\mathbf{N}$, il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que $I_n\subset\mathfrak{m}_S^k$, si $n\geq N$.*

Démonstration. — Supposons le contraire. Comme la suite I_n est décroissante, cela signifie qu'il existe $k\in\mathbf{N}$ tel que $I_n\not\subset\mathfrak{m}_S^{k+1}$, quel que soit $n\in\mathbf{N}$. Soit donc, si $n\in\mathbf{N}$, un élément f_n de I_n n'appartenant pas à $\mathfrak{m}_S^{k+1}$. Comme S est compacte, quitte à extraire une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on peut supposer que cette suite a une limite f dans S. De plus, la topologie de $S/\mathfrak{m}_S^{k+1}$ étant discrète, la suite f_n est stationnaire modulo $\mathfrak{m}_S^{k+1}$ et f n'appartient pas à $\mathfrak{m}_S^{k+1}$; en particulier, $f\neq 0$. Maintenant, par construction, $f_n(s_i)=0$ si $i\leq n$, et donc, par passage à la limite, $f(s_i)=0$ quel que soit $i\in\mathbf{N}$, ce qui est contraire à la zariski-densité de $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Ceci permet de conclure.

Lemme II.3.5. — *Si $(x^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}\in D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est tel que $(x^{(k)}(s_n))_{k\in\mathbf{N}}\in D^\sharp_{s_n}\boxtimes\mathbf{Q}_p$, quel que soit $n\in\mathbf{N}$, alors $(x^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}\in D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$.*

Démonstration. — Commençons par démontrer, par récurrence sur n, qu'il existe $(a_n^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}\in D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $(b_n^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}\in(I_n\cdot D)\boxtimes\mathbf{Q}_p$, tels que $x^{(k)}=a_n^{(k)}+b_n^{(k)}$, quel que soit $n\in\mathbf{N}$.

– Pour $n=0$, cela résulte de la surjectivité de $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p\to D^\sharp_{s_0}\boxtimes\mathbf{Q}_p$.

– Si le résultat est vrai pour $n-1$, on a par hypothèse $(b_{n-1}^{(k)}(s_n))_{k\in\mathbf{N}}\in D^\sharp_{s_n}\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $b_{n-1}^{(k)}\in I_{n-1}\cdot D$, pour tout $k\in\mathbf{N}$. Soit $f_0\in I_{n-1}$ tel que $v_p(f_0(s_n))$ réalise le minimum de $v_p(f(s_n))$, pour $f\in I_{n-1}$. Alors $(b_{n-1}^{(k)}(s_n))_{k\in\mathbf{N}}$ appartient à la fois à $(D^\sharp_{s_n}\boxtimes\mathbf{Q}_p)$ et à $(f_0(s_n)D_{s_n}\boxtimes\mathbf{Q}_p)$, et donc à $f_0(s_n)(D^\sharp_{s_n}\boxtimes\mathbf{Q}_p)$ puisque $D\mapsto D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est un foncteur exact (th. I.3.9). Maintenant, la surjectivité de $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p\to D^\sharp_{s_n}\boxtimes\mathbf{Q}_p$ nous fournit $(y^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}\in D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ tel que $f_0(s_n)y_n^{(k)}(s_n)=b_{n-1}^{(k)}(s_n)$, pour tout $k\in\mathbf{N}$. En posant $b_n^{(k)}=b_{n-1}^{(k)}-f_0y_n^{(k)}$, on a

$$(b_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}\in((I_{n-1}\cdot D)\boxtimes\mathbf{Q}_p)\cap((\mathfrak{m}_{s_n}\cdot D)\boxtimes\mathbf{Q}_p)=((I_n\cdot D)\boxtimes\mathbf{Q}_p).$$

On obtient la décomposition voulue à l'ordre n, en posant $a_n^{(k)}=a_{n-1}^{(k)}+f_0y_n^{(k)}$, quel que soit $k\in\mathbf{N}$.

Maintenant, il résulte du lemme II.3.4 que $b_n^{(k)}$ tend vers 0 dans D quand n tend vers $+\infty$; on a donc $(x^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}=\lim_{n\to+\infty}(a_n^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ dans $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$, et le résultat suit de ce que $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est fermé dans $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ car compact.

Lemme II.3.6. — $(D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ *est stable par G.*

Démonstration. — D'après le lemme II.2.16, il suffit de prouver que $D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est stable par G. Soit donc $z\in D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ et soit $g\in G$. On a $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}z(s_n)\in D^\sharp_{s_n}\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $z(s_n)\in D^\sharp_{s_n}\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, pour tout $n\in\mathbf{N}$. Comme $D^\natural_{s_n}\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est, par hypothèse, stable par G, il en est de même de $D^\sharp_{s_n}\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ d'après la prop. II.2.6. On en déduit que $g\cdot z(s_n)\in D^\sharp_{s_n}\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(g\cdot z(s_n))\in D^\sharp_{s_n}\boxtimes\mathbf{Q}_p$, pour tout $n\in\mathbf{N}$. D'après le

lemme II.3.5, cela implique l'appartenance de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} g\cdot z$ à $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$, et donc celle de $g\cdot z$ à $D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$. Ceci permet de conclure.

3. Représentations cristallines. — On peut éviter le recours aux calculs explicites de ce numéro en utilisant les résultats du chap. IV (cf. cor. IV.4.13). D'un autre côté, il est assez rassurant de pouvoir mener ces calculs à bien...

Soit k un entier ≥ 2. Soient $\alpha_1,\alpha_2\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ des caractères localement constants vérifiant $\alpha_1\alpha_2^{-1}\notin\{1,\ |x|,|x|^{-1}\}$, et tels que $-r_i=v_p(\alpha_i(p))<0$, si $i=1,2$, et $r_1+r_2=k-1$. On note D_{α_1,α_2}, le (φ,N,G)-module filtré $L\cdot e_1\oplus L\cdot e_2$, avec

$$\begin{cases}\varphi(e_1)=\alpha_1(p)e_1,\\ \varphi(e_2)=\alpha_2(p)e_2,\end{cases}\quad\begin{cases}Ne_1=0,\\ Ne_2=0,\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}g(e_1)=\alpha_1(\chi(g))e_1,\\ g(e_2)=\alpha_2(\chi(g))e_2\end{cases}\quad\text{si } g\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},$$

$$\mathrm{Fil}^i D_{\alpha_1,\alpha_2}=\begin{cases}D_{\alpha_1,\alpha_2} & \text{si } i\leq 1-k,\\ L\cdot(G(\alpha_1)e_1+G(\alpha_2)e_2) & \text{si } 1-k<i\leq 0,\\ 0 & \text{si } i>0.\end{cases}$$

Dans la formule ci-dessus pour la filtration, $G(\alpha_1)$ et $G(\alpha_2)$ sont des sommes de Gauss : si on a fixé un système compatible $(\zeta_{p^N})_{n\in\mathbf{N}}$ de racines primitives p^N-ième de l'unité, et si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}$, alors $G(\delta)$ ne dépend que de la restriction de δ à $\mathbf{Z}_p^*$, et on a $G(\delta)=1$ si cette restriction est triviale, et, si δ est de conducteur p^N, avec $N\geq 1$, alors $G(\delta)=\sum_{x\in(\mathbf{Z}_p/p^N\mathbf{Z}_p)^*}\delta(x)\zeta_{p^N}^x$. En particulier, on a $g(G(\delta))=\delta^{-1}(\chi(g))G(\delta)$ si $g\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui fait que la filtration est bien stable sous l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Le $(\varphi,N,\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré est admissible et irréductible grâce aux conditions mises sur $r_1=-v_p(\alpha_1(p))$ et $r_2=-v_p(\alpha_2(p))$. Il existe donc $V_{\alpha_1,\alpha_2}\in\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ telle que $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V_{\alpha_1,\alpha_2})=D_{\alpha_1,\alpha_2}$, et le déterminant de V_{α_1,α_2} est $x^{k-1}\alpha_1\alpha_2$. On note $\Delta_{\alpha_1,\alpha_2}$ et $\Delta^\dagger_{\alpha_1,\alpha_2}$ respectivement les (φ,Γ)-modules $\mathbf{D}(V_{\alpha_1,\alpha_2})$ et $\mathbf{D}^\dagger(V_{\alpha_1,\alpha_2})$. On a donc $\Delta_{\alpha_1,\alpha_2}=\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\Delta^\dagger_{\alpha_1,\alpha_2}$, et on peut décrire $\Delta^\dagger_{\alpha_1,\alpha_2}$ comme un sous-$\mathscr{E}^\dagger$-module de $\mathscr{R}e_1\oplus\mathscr{R}e_2$; de manière précise, si $x_1,x_2\in\mathscr{R}$, alors $x_1e_1+x_2e_2\in\Delta^\dagger_{\alpha_1,\alpha_2}$ si et seulement si :

- x_1 est d'ordre r_1 et x_2 est d'ordre r_2 ;
- $G(\alpha_1)\alpha_1(p)^{-n}\varphi^{-n}(x_1)-G(\alpha_2)\alpha_2(p)^{-n}\varphi^{-n}(x_2)\in t^{k-1}L_n[[t]]$, pour $n\gg 0$.

En particulier, si μ_1 et μ_2 sont des distributions sur $\mathbf{Z}_p$, alors

$$\Big(\int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\mu_1\Big)e_1+\Big(\int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\mu_2\Big)e_2\in\Delta^\dagger_{\alpha_1,\alpha_2}$$

si et seulement si μ_1 est d'ordre r_1, μ_2 est d'ordre r_2, et si

$$G(\alpha_1)\alpha_1(p)^{-n}\int_{\mathbf{Z}_p}\zeta_{p^n}^x x^i\,\mu_1=G(\alpha_2)\alpha_2(p)^{-n}\int_{\mathbf{Z}_p}\zeta_{p^n}^x x^i\,\mu_2,$$

pour tous $i\in\{0,\dots,k-2\}$, et $n\in\mathbf{N}$ assez grand.

Soient

$$\begin{cases}\delta_{1,\alpha_1}=x^{k-1}\alpha_2,\\ \delta_{1,\alpha_2}=x^{k-1}\alpha_1,\end{cases}\quad\begin{cases}\delta_{2,\alpha_1}=\alpha_1,\\ \delta_{2,\alpha_2}=\alpha_2,\end{cases}\quad\begin{cases}\delta_{\alpha_1}=\delta_{1,\alpha_1}\delta_{2,\alpha_1}^{-1}(x|x|)^{-1}=x^{k-2}\alpha_2\alpha_1^{-1}|x|^{-1},\\ \delta_{\alpha_2}=\delta_{1,\alpha_2}\delta_{2,\alpha_2}^{-1}(x|x|)^{-1}=x^{k-2}\alpha_1\alpha_2^{-1}|x|^{-1}.\end{cases}$$

Si $i \in \{1,2\}$, notons $\Pi(\alpha_i)$ la représentation $\Pi(\delta_{1,\alpha_i},\delta_{2,\alpha_i},\infty)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dans les notations de [**26**]. Rappelons que $\Pi(\alpha_i)$ est un quotient de l'espace des fonctions ϕ de classe $\mathscr{C}^{r_i}$ sur $\mathbf{Q}_p$, telles que $x \mapsto \delta_{\alpha_i}(x)\phi(1/x)$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathscr{C}^{r_i}$, muni de l'action à droite de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ définie par

$$\phi \star \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \chi_i^{-1}(ad-bc)\delta_{\alpha_i}(cx+d)\phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big), \quad \text{où } \chi_i = (x|x|)^{-1}\delta_{1,\alpha_i}.$$

On note $\Pi(\alpha_i)^*$ le dual topologique de $\Pi(\alpha_i)$ que l'on munit de l'action à gauche définie par $\langle g\cdot\mu,\phi\rangle = \langle \mu, \phi\star g\rangle$.

Soit $\delta_0 = (x|x|)^{-1}\det V_{\alpha_1,\alpha_2} = (x|x|)^{-1}x^{k-1}\alpha_1\alpha_2$. Les caractères centraux de $\Pi(\alpha_1)^*$ et $\Pi(\alpha_2)^*$ sont tous deux égaux à δ_0^{-1}.

Le théorème principal de [**8**] peut se reformuler de la manière suivante.

Théorème II.3.7. — *Si $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ est un élément de $(\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2}\otimes\delta_0^{-1})\boxtimes\mathbf{Q}_p$, il existe $\mu_{z,1}\in\Pi(\alpha_1)^*$ et $\mu_{z,2}\in\Pi(\alpha_2)^*$ telles que, quel que soit $n\in\mathbf{Z}$, on ait*

$$z^{(n)} = \Big(\alpha_1(p)^n\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(1+T)^{p^n x}\,\mu_{z,1}\Big)e_1 + \Big(\alpha_2(p)^n\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(1+T)^{p^n x}\,\mu_{z,2}\Big)e_2.$$

De plus, $z\mapsto\mu_{z,1}$ et $z\mapsto\mu_{z,2}$ sont des isomorphismes de $(\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2}\otimes\delta_0^{-1})\boxtimes_{\delta_0^{-1}}\mathbf{Q}_p$ sur $\Pi(\alpha_1)^*$ et $\Pi(\alpha_2)^*$ qui sont B-équivariants, et l'application composée $\mu_{z,1}\mapsto z\mapsto\mu_{z,2}$ est un isomorphisme G-équivariant de $\Pi(\alpha_1)^*$ sur $\Pi(\alpha_2)^*$.

Proposition II.3.8. — (i) *Le sous-module $\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2}\boxtimes_{\delta_0}\mathbf{P}^1$ de $\Delta_{\alpha_1,\alpha_2}\boxtimes_{\delta_0}\mathbf{P}^1$ est stable par G.*

(ii) *$(\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2}\otimes\delta_0^{-1})\boxtimes_{\delta_0^{-1}}\mathbf{P}^1$ est isomorphe, en tant que G-module, à $\Pi(\alpha_1)^*$ et $\Pi(\alpha_2)^*$.*

Démonstration. — Le (i) se déduit du (ii) car les G-modules $(\Delta_{\alpha_1,\alpha_2}\otimes\delta_0^{-1})\boxtimes_{\delta_0^{-1}}\mathbf{P}^1$ et $(\Delta_{\alpha_1,\alpha_2}\boxtimes_{\delta_0}\mathbf{P}^1)\otimes\delta_0^{-1}$ sont isomorphes (cf. prop. II.1.11). Pour démontrer le (ii), il suffit, compte-tenu du th. II.3.7, de vérifier que w agit de la même manière des deux côtés, et les formules du squelette d'action montrent qu'il suffit de le vérifier sur $\mathbf{Z}_p^*$. L'isomorphisme ci-dessus nous ramène, d'après le (i) de la rem. II.1.3, à démontrer le lemme II.3.13 ci-dessous.

La démonstration de ce lemme demandant de jongler un peu avec les espaces fonctionnels, nous allons commencer par faire quelques rappels et démontrer un certain nombre de résultats techniques.

– On note LA_0 l'espace des fonctions analytiques sur $\mathbf{Z}_p$. Un élément ϕ de LA_0 est donc de la forme $\phi(x) = \sum_{k\in\mathbf{N}}a_k x^k$, où $a_k\in L$ tend vers 0 quand $k\to+\infty$. Si ϕ est comme ci-dessus, on pose $v_{\mathrm{LA}_0}(\phi) = \inf_{k\in\mathbf{N}}v_p(a_k)$.

– Si $u\geq 0$, on note $\mathscr{C}^u$ l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^u$ sur $\mathbf{Z}_p$; c'est un L-banach pour une valuation $v_{\mathscr{C}^u}$. De plus, $\mathrm{LA}_0\subset\mathscr{C}^u$ et il existe une constante $C_0(u)$ telle que $v_{\mathscr{C}^u}(\phi)\geq v_{\mathrm{LA}_0}(\phi)+C_0(u)$, si $\phi\in\mathrm{LA}_0$.

– Si $r \in \mathbf{Q}_+^*$, et si $f = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k T^k \in \mathscr{R}^+$, on pose $v^{\{r\}}(f) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) + rk$; on a aussi $v^{\{r\}}(f) = \inf_{x\in\mathbf{C}_p,\, v_p(x)=r} v_p(f(x))$ et donc $v^{\{r\}}(fg) \geq v^{\{r\}}(f) + v^{\{r\}}(g)$. On remarquera que $r \mapsto v^{\{r\}}(f)$ est une fonction croissante.

– Si $u > 0$, on note $\mathscr{R}_u^+$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{R}^+$ d'ordre u; muni de la valuation $v_u(f) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) + u\frac{\log(1+k)}{\log p}$, c'est un L-banach, et la transformée d'Amice induit un isomorphisme de L-banach de $\mathscr{D}_u(\mathbf{Z}_p)$ sur $\mathscr{R}_u^+$. En particulier, il existe une constante $C_1(u)$ telle que $v_p(\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\,\mu) \geq v_u(A_\mu) + v_{\mathscr{C}^u}(\phi) + C_1(\phi)$.

Lemme II.3.9. — *Soit $w \in L$. Si ϕ est analytique sur $\mathbf{Z}_p$, si $n \geq \frac{1}{p-1} - \inf(0, v_p(w))$ et si $i \in \mathbf{Z}_p^*$, alors $x \mapsto (1+p^n x i^{-1})^w \phi(\frac{x}{1+p^n x i^{-1}}) \in \mathrm{LA}_0$, et on a*

$$v_{\mathrm{LA}_0}\Big((1+p^n x i^{-1})^w \phi\big(\frac{x}{1+p^n x i^{-1}}\big) - \phi(x)\Big) \geq v_{\mathrm{LA}_0}(\phi) + n - \frac{1}{p-1} + \inf(0, v_p(w)),$$

pour tous $n \geq \frac{1}{p-1} - \inf(0, v_p(w))$ et $i \in \mathbf{Z}_p^*$.

Démonstration. — Il suffit de prouver le résultat pour $\phi(x) = x^k$, auquel cas on a

$$(1+p^n x i^{-1})^w \phi\big(\frac{x}{1+p^n x i^{-1}}\big) - \phi(x) = (1+p^n x i^{-1})^{w-k} x^k - x^k = \sum_{j=1}^{+\infty} \binom{w-k}{j} p^{nj} i^{-j} x^{j+k},$$

et le résultat suit de la minoration

$$v_p\Big(\binom{w-k}{j}\Big) \geq -v_p(j!) - \sum_{a=0}^{j-1} v_p(w-a) \geq -j\big(\frac{1}{p-1} - \inf(0, v_p(w))\big).$$

Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ et $w_1, w_2 \in L$ tels que $\delta_{\alpha_j}(1+x) = (1+x)^{w_j}$, si $x \in p^{n_0}\mathbf{Z}_p$, et si $j = 1, 2$.

Corollaire II.3.10. — *Si $j = 1, 2$ et si $\ell \in \mathbf{N}$, il existe une constante $C_j(\ell)$ telle que, pour tous $n \geq n_0$ et $i \in \mathbf{Z}_p^*$,*

$$v_{\mathscr{C}^{r_j}}(\phi_{j,n,i,\ell}) \geq n + C_j(\ell), \quad \text{où } \phi_{j,n,i,\ell}(x) = \delta_{\alpha_j}(1+p^n x i^{-1})\binom{ix(i+p^n x)^{-1}}{\ell} - \binom{x}{\ell}.$$

Lemme II.3.11. — *Soit $f \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$. Si $v^{\{r\}}(f) \geq 2M$, pour tout $r \geq M^{-1}$, alors $f \in (p^M, T^{M^2})\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$.*

Démonstration. — Si $f = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k T^k$, on a en particulier, $v_p(a_k) + M^{-1}k \geq 2M$, pour tout k, et donc $v_p(a_k) \geq M$, si $k \leq M^2$. Ceci permet de conclure.

Lemme II.3.12. — *Il existe une constante $M(u,C)$ telle que, si $M \geq M(u,C)$, et si $f = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k T^k \in \mathscr{R}_u^+$ est telle que $v_u(f) \geq C$ et $v_p(a_k) \geq 4M^2$ pour tout $k \leq M^2$, alors $v^{\{r\}}(f) \geq 2M$, pour tout $r \geq M^{-1}$.*

Démonstration. — L'hypothèse $v_u(f) \geq C$ implique $v_p(a_k) + rk \geq C + rk - u\frac{\log(1+k)}{\log p}$. L'expression ci-dessus est une fonction croissante de k, pour $k \geq \frac{u}{r \log p}$. Donc, si $r \geq M^{-1}$ et $k \geq 4M^2$, on a $v_p(a_k) + rk \geq C + 4M - u\frac{\log(1+4M^2)}{\log p} \geq 2M$, si M est assez grand.

Rappelons que $\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2}$, qui est égal à $\Delta^{\sharp}_{\alpha_1,\alpha_2}$ puisque $\Delta_{\alpha_1,\alpha_2}$ est irréductible, est inclus dans $\mathscr{R}^+e_1 \oplus \mathscr{R}^+e_2$. D'autre part, il existe m tel que $((1+T)^{p^m}-1)^{k-1}\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2}$ soit inclus (cf. [8]) dans le sous-module $\Delta^{+}_{\alpha_1,\alpha_2}$ qui se trouve être un $\mathscr{E}^+$-module de rang 2 car une représentation cristabéline de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est de hauteur finie. Il en résulte que $\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2}$ est aussi libre de rang 2 sur $\mathscr{E}^+$.

Lemme II.3.13. — *Si $z \in \Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, la suite de terme général*[51]

$$\sum_{i \in (\mathbf{Z}_p/p^n\mathbf{Z}_p)^*} z_{n,i}, \quad \text{où } z_{n,i} = \delta_0(-i^{-1})(1+T)^i \sigma_{-i^2} \cdot \varphi^n\psi^n((1+T)^{-i^{-1}}z),$$

converge dans $\Delta_{\alpha_1,\alpha_2}$ vers $z' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot z$.

Démonstration. — Il existe des distributions $\mu_j \in \mathscr{D}_{r_j}(\mathbf{Z}_p, L)$, pour $j = 1, 2$, telles que $z = \int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x \sum_{j=1}^2 \mu_j e_j$. Par ailleurs, on a $z' \in \Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, image de $\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2}$ par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ [en effet, $z \mapsto \mu_{z,1}$ induit un isomorphisme de $\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ sur $\Pi(\alpha_1)^*$, et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ induit une surjection de $\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ sur $\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$; cela permet de relever z en un élément $\tilde{z}$ de $\Pi(\alpha_1)^*$ et z' n'est alors autre que la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \tilde{z} \in \Pi(\alpha_1)^*$ (identifié à $\Delta^{\natural}_{\alpha_1,\alpha_2} \boxtimes \mathbf{Q}_p$)], et $z' = \int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x \sum_{j=1}^2 \lambda_j e_j$, où λ_j est, si $j = 1, 2$, la distribution définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x)\,\lambda_j = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \chi_j(-1)\delta_{\alpha_j}(x)\phi(1/x)\,\mu_j.$$

Si $i \in \mathbf{Z}_p^*$ et $n \geq 1$, soit $z'_{n,i} = (1+T)^i\varphi^n\psi^n((1+T)^{-i}z')$ de telle sorte que l'on ait $z' = \sum_{i \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} z'_{n,i}$. Il existe des distributions $\lambda_{j,n,i} \in \mathscr{D}_{r_j}(\mathbf{Z}_p, L)$, pour $j = 1, 2$, telles que [52]

$$\psi^n((1+T)^{-i}z') = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \sum_{j=1}^2 \lambda_{j,n,i} e_j \quad \text{et donc } \psi^n((\mathrm{Dir}_{-i} * \lambda_j)e_j) = \lambda_{j,n,i}e_j.$$

Soit D un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau de $\Delta_{\alpha_1,\alpha_2}$, stable par φ et Γ, contenant z et z'. La stabilité de D par φ fait que $\psi^n((1+T)^{-i}z') \in D^{\sharp}$, et comme $D^{\sharp}$ est compact, il existe $C_j \in \mathbf{R}$, pour $j = 1, 2$, tel que $v_{\mathscr{D}_{r_j}}(\lambda_{j,n,i}) \geq C_j$, pour tous $n \geq 1$ et $i \in \mathbf{Z}_p^*$.

---

[51] On a $\delta_0(-i^{-1})$ au lieu de $\delta_0(i^{-1})$ à cause de la torsion par δ_0^{-1} (ne pas oublier que $\det w = -1$).
[52] Dir_{-i} est la masse de Dirac en $-i$; convoler avec Dir_{-i} correspond à multiplier par $(1+T)^{-i}$.

Maintenant, comme $\sigma_{-i^2}(e_j)=\alpha_j(-i^2)e_j$, on a

$$z_{n,i}=\delta_0(-i^{-1})(1+T)^i\sum_{j=1}^{2}\sigma_{-i^2}\Big(\int_{p^n\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\ \mathrm{Dir}_{-i^{-1}}*\mu_j\Big)\alpha_j(-i^2)e_j,$$

et comme $\delta_0(-i^{-1})\alpha_j(-i^2)=\chi_j(-1)\delta_{\alpha_j}(i^{-1})$, on obtient

$$\begin{aligned}
z_{n,i}&=(1+T)^i\int_{i^{-1}+p^n\mathbf{Z}_p}(1+T)^{-i^2(x-i^{-1})}\sum_{j=1}^{2}\chi_j(-1)\delta_{\alpha_j}(i^{-1})\mu_j e_j\\
&=(1+T)^i\int_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(1+T)^{-i^2(x^{-1}-i^{-1})}\sum_{j=1}^{2}\delta_{\alpha_j}(xi^{-1})\lambda_j e_j\\
&=(1+T)^i\int_{p^n\mathbf{Z}_p}(1+T)^{ix(i+x)^{-1}}\sum_{j=1}^{2}\delta_{\alpha_j}(1+xi^{-1})(\mathrm{Dir}_{-i}*\lambda_j)e_j\\
&=(1+T)^i\varphi^n\Big(\int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^{ix(i+p^nx)^{-1}}\sum_{j=1}^{2}\delta_{\alpha_j}(1+p^nxi^{-1})\psi^n((\mathrm{Dir}_{-i}*\lambda_j)e_j)\Big)\\
&=(1+T)^i\varphi^n\Big(\int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^{ix(i+p^nx)^{-1}}\sum_{j=1}^{2}\delta_{\alpha_j}(1+p^nxi^{-1})\lambda_{j,n,i}e_j\Big)
\end{aligned}$$

Notre problème est de montrer que $\sum_{i\in\mathbf{Z}_p^*\bmod p^n}(z_{n,i}-z'_{n,i})$ tend vers 0 dans $\Delta_{\alpha_1,\alpha_2}$ quand n tend vers $+\infty$. Or on peut écrire $z_{n,i}-z'_{n,i}$ sous la forme $(1+T)^i\varphi^n(y_{n,i})$, et l'on a d'une part,

$$y_{n,i}=\delta_0(-i^{-1})\left(\begin{smallmatrix}i^2&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\psi^n((1+T)^{i^{-1}}z)-\psi^n((1+T)^{-i}z')\in D^\sharp,$$

et d'autre part,

$$y_{n,i}=\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbf{Z}_p}\left(\delta_{\alpha_j}(1+p^nxi^{-1})(1+T)^{ix(i+p^nx)^{-1}}-(1+T)^x\right)\lambda_{j,n,i}e_j.$$

Écrivons $y_{n,i}$ sous la forme $\sum_{j=1}^2F_{j,n,i}e_j$, avec $F_{j,n,i}=\sum_{k\in\mathbf{N}}a_{j,n,i,k}T^k\in\mathscr{R}^+_{r_j}$, si $j=1,2$. L'appartenance de $y_{n,i}$ à $D^\sharp$ implique que $v_{r_j}(F_{j,n,i})\geq C_j$, pour tous $i\in\mathbf{Z}_p^*$ et $n\geq 1$. Par ailleurs, on a $a_{j,n,i,k}=\int_{\mathbf{Z}_p}\phi_{j,n,i,k}\,\lambda_{j,n,i}$, où $\phi_{j,n,i,k}$ est la fonction apparaissant dans le cor. II.3.10. On déduit de ce corollaire la minoration $v_p(a_{j,n,i,k})\geq n+C_j(k)+C_j+C_1(r_j)$, pour tous $n\geq n_0$ et $i\in\mathbf{Z}_p^*$. Il en résulte, d'après le lemme II.3.12 que, pour tout $M\in\mathbf{N}$, il existe $n(M)\in\mathbf{N}$ tel que $v^{\{r\}}(F_{j,n,i})\geq 2M^2$ pour tous $r\geq M^{-1}$ et $i\in\mathbf{Z}_p^*$, si $n\geq n(M)$.

Soit maintenant f_1,f_2 une base de $\Delta^\sharp_{\alpha_1,\alpha_2}$ sur $\mathscr{E}^+$ choisie de sorte à être aussi une base de D sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$. On peut donc écrire $y_{n,i}$ sous la forme $a_{n,i}f_1+b_{n,i}f_2$, avec $a_{n,i},b_{n,i}\in\mathscr{O}^+_\mathscr{E}$. Par ailleurs, il existe des éléments c_1,c_2,c_3,c_4 de $\mathrm{Frac}(\mathscr{R}^+)$ tels que l'on ait $f_1=c_1e_1+c_2e_2$ et $f_2=c_3e_1+c_4e_2$. On a donc $a_{n,i}=c_1F_{1,n,i}+c_3F_{2,n,i}$ et $b_{n,i}=c_2F_{1,n,i}+c_4F_{2,n,i}$. Soit $r\in\mathbf{Q}_+^*$ tel que c_1,c_2,c_3,c_4 n'aient pas de pôle sur le cercle $v_p(T)=M^{-1}$; alors $v^{\{r\}}(c_k)=\inf_{x\in\mathbf{C}_p,\,v_p(x)=r}v_p(c_k(x))$ est fini, et si on note

$C_r \in \mathbf{R}$ le minimum des $v^{\{r\}}(c_k)$, pour $k \in \{1,2,3,4\}$, on a $v^{\{r\}}(a_{n,i}) \geq C_r + 2M^2$ pour tout $i \in \mathbf{Z}_p^*$, si $M \geq r^{-1}$ et si $n \geq n(M)$. Choisissons r de la forme N^{-1}, et prenons M assez grand pour que $C_r + 2M^2 \geq 2N^2$. Alors, d'après le lemme II.3.11, on a $a_{n,i}, b_{n,i} \in (p^{N^2}, T^N)\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, si $n \geq n(M)$. On en déduit la convergence vers 0 de $y_{n,i}$ dans $D^\sharp$, uniformément pour $i \in \mathbf{Z}_p^*$, et donc aussi celle de $(1+T)^i\varphi^n(y_{n,i})$ dans D.

Ceci permet de conclure.

4. Déformation d'un (φ,Γ)-module. — Soit D_0 un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et soit $V_0 = \mathbf{V}(D_0)$. Fixons une base e_1, e_2 de la représentation V_0 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui nous fournit un morphisme $\rho_0 : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{GL}_2(\mathscr{O}_L)$. On note $\overline{\rho} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{GL}_2(k_L)$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}_L$. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ des générateurs topologiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et soit $(a_{i,j,k})_{1\leq i,j\leq 2}$, pour $k \leq r$, la matrice de σ_k dans la base e_1, e_2. Si $\rho : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{GL}_2(\mathscr{O}_L)$ a pour réduction $\overline{\rho}$ modulo $\mathfrak{m}_L$, il existe des $x_{i,j,k} \in \mathfrak{m}_L$ tels que, pour $k \leq r$, on ait $\rho(\sigma_k) = (a_{i,j,k} + x_{i,j,k})_{1\leq i,j\leq 2}$. Ceci permet de voir l'ensemble de ces représentations comme un sous-espace de $\mathfrak{m}^{4r}$. Plus précisément, si on note S le quotient de $\mathscr{O}_L[[X_{i,j,k}]]$ par l'idéal engendré par les relations entre les $\rho(\sigma_k)$, et $\mathscr{X}$ le spectre de S, alors l'espace de ces représentations s'identifie aux points $\mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$ de $\mathscr{X}$ définis sur $\mathscr{O}_L$.

Par construction, on dispose d'une S-représentation V de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ munie d'une base e_1, e_2 dans laquelle la matrice de σ_k est $(a_{i,j,k} + X_{i,j,k})_{1\leq i,j\leq 2}$, si $1 \leq k \leq r$. Si $s \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, on note $\mathfrak{m}_s$ l'idéal de S correspondant et V_s la réduction de V modulo $\mathfrak{m}_s$; c'est une $\mathscr{O}_L$-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et on obtient de cette manière toutes les $\mathscr{O}_L$-représentations de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ ayant pour réduction $\overline{\rho}$ (comme on a fixé une base de V_s, l'espace que l'on a construit est un fibré au-dessus du champs des représentations à isomorphisme près). On dit que $s \in \mathscr{X}$ est cristallin (resp. semi-stable, resp. cristabélin, resp. triangulin) si V_s est cristalline (resp. semi-stable, resp. cristabéline, resp. trianguline), et on note $\mathscr{X}^{\mathrm{cris}}$ et $\mathscr{X}^{\mathrm{tr}}$ respectivement l'ensemble des points cristallins et celui des points triangulins de $\mathscr{X}$; ce sont [**28, 55**] des sous-ensembles zariski-denses de $\mathscr{X}$ (sauf peut-être dans des cas très spéciaux ; cf. note 7 pour des commentaires sur les cas non couverts par la littérature).

Soit $\mathfrak{m}_S$ l'idéal maximal de S. Alors S est la limite projective des $S_n = S/\mathfrak{m}_S^n$, et S_n est une $\mathscr{O}_L$-algèbre finie pour tout n. Soit $D = \mathbf{D}(V)$. Alors D est la limite projective des $\mathbf{D}(S_n \otimes_S V)$, et est un $S\widehat{\otimes}\mathscr{O}_{\mathscr{E}} = \varprojlim S_n \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module libre de rang 2.

Si $s \in \mathscr{X}$, la réduction D_s de D modulo $\mathfrak{m}_s$ s'identifie à $D(V_s)$. On déduit de la prop. II.3.8 que $D_s^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par G si s est cristallin. Comme l'ensemble des points cristallins est zariski-dense dans $\mathscr{X}$, cela implique, d'après le lemme II.3.6, que $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par G. La prop. II.2.15 permet alors d'en déduire que $D_0^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par G, et D_0 étant quelconque, cela termine la démonstration du th. II.3.1. Le th. II.3.3 s'en déduit alors en utilisant le lemme II.3.6.

III. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Ce chapitre rassemble un certain nombre de résultats de base concernant les représentations de $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Le lecteur y trouvera en particulier une démonstration de l'existence d'une présentation standard pour les objets de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, et deux descriptions du dual d'une telle représentation, qui serviront de modèles pour la construction du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ du chap. IV.

III.1. Représentations lisses de $\mathbf{GL}_2(F)$. — Ce § contient des résultats assez standard concernant les représentations localement constantes (plus couramment appelées lisses) de $\mathbf{GL}_2(F)$, où F est un corps local non archimédien.

1. $\mathbf{GL}_2(F)$ *et ses sous-groupes.* — Soit F un corps complet pour une valuation discrète v_F, soient $\mathscr{O}_F$ l'anneau des entiers de F, π une uniformisante de F et $k_F = \mathscr{O}_F/\pi\mathscr{O}_F$ le corps résiduel de F.

Soit $G = \mathbf{GL}_2(F)$. On note

- Z le centre de G ; c'est l'ensemble des $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, avec $a \in F^*$;
- B le borel standard de G ; c'est l'ensemble des $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$, avec $a, d \in F^*$, $b \in F$;
- $P = \left(\begin{smallmatrix} F^* & F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ le sous-groupe mirabolique, et P^+ le monoïde $\left(\begin{smallmatrix} \mathscr{O}_F - \{0\} & \mathscr{O}_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures, $U^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ F & 1 \end{smallmatrix}\right)$ le sous-groupe des matrices unipotentes inférieures ; si $n \in \mathbf{Z}$, on note $U(\pi^n\mathscr{O}_F)$ et $U^-(\pi^n\mathscr{O}_F)$ les sous-groupes $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \pi^n\mathscr{O}_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \pi^n\mathscr{O}_F & 1 \end{smallmatrix}\right)$;
- A le sous-groupe des matrices diagonales, et $A^+ = \left(\begin{smallmatrix} F^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $A^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F^* \end{smallmatrix}\right)$;
- w la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$;
- Δ le groupe diédral engendré par A et w ;
- $K = \mathbf{GL}_2(\mathscr{O}_F)$ le sous-groupe compact maximal standard de G. Plus généralement, si $n \in \mathbf{N}$, on note K_n le sous-groupe de K des matrices congrues à 1 mod p^n (on a donc $K_0 = K$).
- Si $n \geq 1$, on note I_n le sous-groupe de K des matrices triangulaires inférieures modulo π^n.

Proposition III.1.1. — (i) *Le sous-groupe de G engendré par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathscr{O}_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathscr{O}_F & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est $\mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$.*

(ii) *Le sous-groupe de G engendré par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathscr{O}_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{-1}\mathscr{O}_F & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est $\mathbf{SL}_2(F)$.*

Démonstration. — C'est un résultat parfaitement classique. Soit H le sous-groupe de G engendré par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathscr{O}_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathscr{O}_F & 1 \end{smallmatrix}\right)$. C'est un sous-groupe de $\mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$. Par ailleurs, si $b \in \mathscr{O}_F^*$, si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$, si $y = b$, si $x = b^{-1}(d-1)$ et si $z = b^{-1}(a-1)$, on a $x, y, z \in \mathscr{O}_F$ et

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1+yz & y \\ x+z+xyz & xy+1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right).$$

On en déduit que H contient l'ensemble X des $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$ vérifiant $b \in \mathscr{O}_F^*$. En particulier, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in H$, et comme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$ implique $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in X$ ou $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in X$, cela démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), on peut utiliser le (i) et l'identité

$$\left(\begin{smallmatrix}1 & -\pi\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \pi^{-1} & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & \pi^{-1}\end{smallmatrix}\right),$$

pour en déduire le fait que le sous-groupe H' de G engendré par $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \pi^{-1}\mathscr{O}_F & 1\end{smallmatrix}\right)$ contient $\mathbf{SL}_2(\mathscr{O}_F)$ et $\left\{\left(\begin{smallmatrix}\pi^n & 0\\ 0 & \pi^{-n}\end{smallmatrix}\right),\ n\in\mathbf{Z}\right\}$. La théorie des diviseurs élémentaires permet alors de prouver que H' contient $\mathbf{SL}_2(F)$, ce qui permet de conclure.

2. L'arbre de $\mathbf{PGL}_2(F)$. — Le groupe G agit sur F^2 ; notons e_1, e_2 sa base canonique. On a alors $g\cdot e_1 = ae_1+ce_2$, $g\cdot e_2 = be_1+de_2$, si $g=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in G$. L'action induite sur $\mathbf{P}^1(F)$ envoie la droite de base ze_1+e_2 sur celle de base $\frac{az+b}{cz+d}e_1+e_2$. En identifiant $\mathbf{P}^1(F)$ à $F\cup\{\infty\}$, cette action devient $g(z)=\frac{az+b}{cz+d}$.

Un *ouvert élémentaire* de $\mathbf{P}^1(F)$ est un ouvert de la forme $D(a,n)=a+\pi^n\mathscr{O}_F$, avec $a\in F$, $n\in\mathbf{Z}$, ou son complémentaire. Si $n\in\mathbf{Z}$, on note $D(\infty,n)$ l'ouvert complémentaire de $D(0,1-n)$; c'est l'image de $D(0,n)$ par $w=\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

Lemme III.1.2. — *Si* $g=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in G$, *si* $u\in F$ *et si* $n\in\mathbf{Z}$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $v_F\left(\frac{\pi^n c}{cu+d}\right)>0$;

(ii) $g(u+\pi^n\mathscr{O}_F)$ *ne contient pas* ∞ ;

(iii) $g(u+\pi^n\mathscr{O}_F) = g(u)+\pi^n g'(u)\mathscr{O}_F$, *où* g' *est la dérivée de* g (agissant sur $F\cup\{\infty\}$) ;

(iv) $g\left(\begin{smallmatrix}\pi^n & u\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)IZ = \left(\begin{smallmatrix}\pi^m & v\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)IZ$, *avec* $v=g(u)$ *et* $m=n+v_F(g'(u))$.

Démonstration. — La condition $v_F\left(\frac{\pi^n c}{cu+d}\right)>0$ équivaut à ce que $cu+d+\pi^n cy$ ne s'annule pas pour $y\in\mathscr{O}_F$, où encore à ce que $cx+d$ ne s'annule pas pour $x\in u+\pi^n\mathscr{O}_F$. On en déduit l'équivalence entre (i) et (ii).

Maintenant, l'équation $g(u+\pi^n x)=g(u)+\pi^n g'(u)y$ équivaut à $y=h(x)$, où

$$h=\left(\begin{smallmatrix}\pi^n g'(u) & g(u)\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1} g\left(\begin{smallmatrix}\pi^n & u\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-n} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}g'(u)^{-1} & -g'(u)^{-1}g(u)\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) g\left(\begin{smallmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right).$$

Or $g(u)=\frac{au+b}{cu+d}$ et $g'(u)=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} h &= \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-n} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\frac{(cu+d)^2}{ad-bc} & \frac{-(au+b)(cu+d)}{ad-bc}\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a & au+b\\ c & cu+d\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\\ &= \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-n} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}cu+d & 0\\ c & cu+d\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}cu+d & 0\\ 0 & cu+d\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \frac{\pi^n c}{cu+d} & 1\end{smallmatrix}\right)\end{aligned}$$

La condition (iii) étant équivalente à ce que $h(\mathscr{O}_F)=\mathscr{O}_F$, l'équivalence entre les conditions (i) et (iii) suit de l'expression ci-dessus pour h. Enfin, la condition (iv) est équivalente à l'appartenance de $h_1=\left(\begin{smallmatrix}\pi^m & v\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1} g\left(\begin{smallmatrix}\pi^n & u\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ à IZ. Or $h_1=\left(\begin{smallmatrix}\pi^{v_F(g'(u))}g'(u)^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)h$, et l'appartenance de h_1 à IZ est équivalente à celle de h, et donc à $v_F\left(\frac{\pi^n c}{cu+d}\right)>0$, c'est-à-dire à la condition (i). Ceci permet de conclure.

Si f_1, f_2 forment une base de F^2, on note (f_1,f_2) le $\mathscr{O}_F$-réseau $\mathscr{O}_F f_1\oplus\mathscr{O}_F f_2$ de F^2. Le groupe G agit sur l'ensemble des réseaux de F^2 : si $\Lambda=(f_1,f_2)$ est un tel réseau et $g\in G$, alors $g\cdot\Lambda=(g\cdot f_1, g\cdot f_2)$. Il agit aussi sur l'ensemble $\mathscr{S}$ des classes d'homothétie de réseaux de F^2. Comme le stabilisateur de (e_1,e_2) est K, et comme G

agit transitivement sur l'ensemble des bases de F^2, l'ensemble des réseaux de F^2 est isomorphe, en tant que G-ensemble, à G/K, et l'ensemble des classes d'homothétie est isomorphe à G/KZ.

Soit $\mathscr{T}$ l'*arbre* de $\mathbf{PGL}_2(F)$. Les *sommets* de $\mathscr{T}$ sont les classes d'homothétie de réseaux de F^2, et les arêtes orientées sont les paires $[s,s']$, avec $d(s,s')=1$. On note $\mathscr{S}\cong G/KZ$ l'ensemble des sommets de $\mathscr{T}$.

Soient $s,s'\in\mathscr{S}$. Si on choisit un réseau Λ dans la classe d'homothétie s, il existe Λ', unique dans la classe d'homothétie s', tel que $\Lambda'\subset\Lambda$ et Λ/Λ' soit un $\mathscr{O}_F$-module cyclique. Il existe alors $n=d(s,s')\in\mathbf{N}$ unique tel que $\Lambda/\Lambda'\cong\mathscr{O}_F/\pi^n\mathscr{O}_F$, et $d(s,s')$ est *la distance de s à s'*.

On note σ_0 la classe du réseau (e_1,e_2), et, si $n\in\mathbf{Z}$, on note σ_n celle du réseau $\left(\begin{smallmatrix}\pi^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\sigma_0=(\pi^n e_1,e_2)$. On a $d(\sigma_n,\sigma_{n+1})=1$ quel que soit $n\in\mathbf{Z}$.

Si $s,s'\in\mathscr{S}$, il existe un unique *segment orienté* $[s,s']$ d'extrémités s et s'. Si Λ et Λ' sont des représentants de s et s' tels que $\Lambda'\subset\Lambda$ et $\Lambda/\Lambda'\cong\mathscr{O}_F/\pi^n\mathscr{O}_F$, alors les sommets de $\mathscr{T}$ contenus dans $[s,s']$ sont $s_0=s,s_1,\dots,s_n=s'$, où s_i est la classe du réseau $\Lambda'+\pi^i\Lambda$. Si $I=[s,s']$ est un segment orienté de $\mathscr{T}$, on définit sa *longueur* $\ell(I)$ par $\ell(I)=d(s,s')$.

Le groupe G agit sur les segments orientés de $\mathscr{T}$, et préserve la longueur. Par ailleurs, d'après la théorie des diviseurs élémentaires, si Λ et Λ' sont des réseaux de F^2 vérifiant $\Lambda'\subset\Lambda$ et $\Lambda/\Lambda'\cong\mathscr{O}_F/\pi^n\mathscr{O}_F$, alors il existe une base f_1,f_2 de F^2 telle que $\Lambda=(f_1,f_2)$ et $\Lambda'=(\pi^n f_1,f_2)$. L'action de G sur les segments orientés de $\mathscr{T}$ de longueur n est donc transitive, et comme le stabilisateur de la paire $((e_1,e_2),(\pi^n e_1,e_2))$ de réseaux est I_n, l'ensemble des segments de longueur n est isomorphe, en tant que G-ensemble, à G/I_nZ.

Soit $s\in\mathscr{S}$. Il existe un unique réseau Λ_s dans la classe de s tel que la projection de Λ_s sur Fe_2 parallèlement à Fe_1 soit $\mathscr{O}_F e_2$. Si $\Lambda_s\cap Fe_1=\pi^n\mathscr{O}_F e_1$, une base de Λ_s sur $\mathscr{O}_F$ est alors $\pi^n e_1, e_2+be_1$, et b est uniquement déterminé modulo $\pi^n\mathscr{O}_F$. Un choix de b étant fait, les arêtes $[s,s_x]$ partant de s sont paramétrées par $x\in\mathbf{P}^1(k_F)$. Si $x=\infty$, alors s_x est la classe du réseau $(\pi^{n-1}e_1,e_2+be_1)$; si $x\in k_F$, et si $\hat{x}\in\mathscr{O}_F$ relève x, alors s_x est la classe du réseau $(\pi^{n+1}e_1,e_2+(b+\pi^n\hat{x})e_1)$. À une arête $[s,s']$, on associe un ouvert élémentaire $D_{[s,s']}$ de $\mathbf{P}^1(F)$ grâce à la recette suivante suivante : si $s'=s_\infty$, alors $D_{[s,s']}$ est le complémentaire de $b+\pi^n\mathscr{O}_F$; si $s=s_x$, avec $x\in k_F$, alors $D_{[s,s']}=b+\pi^n\hat{x}+\pi^{n+1}\mathscr{O}_F$, et $D_{[s,s']}$ ne dépend d'aucun des choix que l'on a faits. On obtient de la sorte une bijection entre l'ensemble des arêtes orientées de $\mathscr{T}$ et l'ensemble des ouverts élémentaires de $\mathbf{P}^1(F)$. De plus, si on fixe s, alors $\mathbf{P}^1(F)$ est la réunion disjointe des $D_{[s,s']}$, où $[s,s']$ décrit les arêtes orientées d'origine s.

Si $[s_0,s_1]$ est une arête de $\mathscr{T}$, on note $\mathscr{T}_{]s_0,s_1)}$ le sous-arbre de $\mathscr{T}$ issu de $[s_0,s_1]$. Ses sommets sont les sommets s de $\mathscr{T}$ tels que $s_1\in[s_0,s]$. Si U est un ouvert élémentaire de $\mathbf{P}^1(F)$, et si $[s_0,s_1]$ est l'arête de $\mathscr{T}$ qui lui correspond, on note aussi $\mathscr{T}_U$ le sous-arbre $\mathscr{T}_{]s_0,s_1)}$ de $\mathscr{T}$. On a donc $\mathscr{T}_{D_{[s_0,s_1]}}=\mathscr{T}_{]s_0,s_1)}$, si $[s_0,s_1]$ est une arête de $\mathscr{T}$.

Si $\mathscr{A}$ est un sous-arbre de $\mathscr{T}$, un sommet s de $\mathscr{A}$ est *extrémal* si $\mathscr{A}-\{s\}$ est encore un arbre ou est vide ; une arête $[s_0,s_1]$ de $\mathscr{A}$ est *une extrémité* de $\mathscr{A}$ si $\mathscr{A}-\{s_0\}$

est inclus dans $\mathscr{T}_{]s_0,s_1)}$. Si $[s_0,s_1]$ est une extrémité de $\mathscr{A}$, alors s_0 est un sommet extrémal de $\mathscr{A}$, et si $|\mathscr{A}| \geq 2$, de tout sommet extrémal s_0 part une extrémité $[s_0,s_1]$ et une seule (si $|\mathscr{A}| \leq 1$, il n'y a pas d'extrémité, mais « tous » les sommets sont extrémaux).

Si $s \in \mathscr{T}$, une *demi-droite d'origine* s est un sous-arbre de $\mathscr{T}$, réunion croissante de segments J_n d'origine s, avec $\ell(J_n) \to +\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Si Δ est une demi-droite d'origine s, ses sommets sont de la forme s_n, pour $n \in \mathbf{N}$, avec $s_0 = s$ et $d(s_n,s_m) = |n-m|$, si $n,m \in \mathbf{N}$. La suite d'ouverts $D_{[s_n,s_{n+1}]}$ est alors une suite d'ouverts emboités dont l'intersection est un point de l'ouvert $D_{[s_0,s_1]}$. On obtient de la sorte une bijection entre l'ensemble des demi-droites d'extrémité $[s_0,s_1]$ et l'ouvert $D_{[s_0,s_1]}$ de $\mathbf{P}^1(F)$, et donc aussi entre l'ensemble des demi-droites d'origine s_0 et $\mathbf{P}^1(F)$.

Si $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont des sous-arbres de $\mathscr{T}$, on définit la distance $d(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2)$ comme le minimum des distances $d(s_1,s_2)$, où s_1 (resp. s_2) parcourt les sommets de $\mathscr{A}_1$ (resp. $\mathscr{A}_2$). Alors $d(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2) = 0$ si et seulement si $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 \neq \varnothing$, et si $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 = \varnothing$, il existe un unique couple (s_1,s_2), avec $s_1 \in \mathscr{A}_1$ et $s_2 \in \mathscr{A}_2$, tel que $d(s_1,s_2) = d(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2)$.

3. Représentations de G. — Soit Λ un anneau commutatif. Une Λ-représentation Π de G est un Λ-module muni d'une action Λ-linéaire à gauche de G. On dit que :

- Π est de *caractère central* δ_Π, où $\delta_\Pi : Z \to \Lambda^*$ est un caractère, si $g \in Z$ agit par multiplication par $\delta_\Pi(g)$. (Si Π est tué par p^n, on peut multiplier δ_Π par un caractère à valeurs dans $1+p^n\mathbf{Z}_p$; il n'y a donc pas unicité du caractère central dans le cas de torsion.)
- Π est *localement constante* (ou lisse), si le stabilisateur de tout élément v de Π est ouvert dans G ;
- Π est *admissible* si Π^{K_n} est de type fini sur Λ quel que soit $n \in \mathbf{N}$;

On note $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ la catégorie des $\mathscr{O}_L$-représentations de G admettant un caractère central, localement constantes, admissibles, de longueur finie. Si $\delta : F^* \to \mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu, on note $\mathrm{Rep}^{\delta}_{\mathrm{tors}}G$ la sous-catégorie de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ des représentations sur lesquelles $g \in Z$ agit par multiplication par $\delta(g)$.

Remarque III.1.3. — Si $F = \mathbf{Q}_p$, l'admissibilité est une conséquence des autres conditions [**2, 13**].

Lemme III.1.4. — *Si M est un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie muni d'une action continue de U, alors U agit trivialement sur M.*

Démonstration. — Si $n \in \mathbf{Z}$, comme $U(\pi^n\mathscr{O}_F)$ est un pro-p-groupe, l'action de $U(\pi^n\mathscr{O}_F)$ sur M est unipotente. Ceci implique que, si ℓ est la longueur de M sur $\mathscr{O}_L$, alors $(u-1)^\ell = 0$ sur M quel que soit $u \in U(\pi^n\mathscr{O}_F)$. Soit k le plus petit entier vérifiant $p^k \geq \ell$. On a alors $p^k M = 0$, et

$$u^{p^{2k}} - 1 = \sum_{i=1}^{p^{2k}} \binom{p^{2k}}{i} (u-1)^i = 0,$$

car $v_p\left(\binom{p^{2k}}{i}\right) \geq k$ si $i \leq p^k$, et $(u-1)^i = 0$ si $i \geq p^k$. On en déduit que $U(\pi^{n+2k}\mathscr{O}_F)$ agit trivialement sur M quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, ce qui permet de conclure.

Lemme III.1.5. — *Soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$. Si $M \subset \Pi$ est un sous-$\mathscr{O}_L$-module de longueur finie stable par le sous-groupe diédral Δ, alors M est stable par G et fixe par $\mathbf{SL}_2(F)$.*

Démonstration. — Comme M est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que M soit fixe par $U(\pi^k\mathscr{O}_F)$. Maintenant, comme M est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ et stable par $\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, on a $M = \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot M$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, et M est fixe par $\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) U(\pi^k\mathscr{O}_F) \left(\begin{smallmatrix} p^{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = U(\pi^{k-n}\mathscr{O}_F)$, quel que soit $n \in \mathbf{Z}$. On en déduit que M est fixe par U. Comme G est engendré par U et Δ, cela montre que M est stable par G et fixe par le sous-groupe distingué de G engendré par U, c'est-à-dire par $\mathbf{SL}_2(F)$. Ceci permet de conclure.

4. Présentation d'une représentation de G

Lemme III.1.6. — *Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, il existe $W \subset \Pi$ de type fini sur $\mathscr{O}_L$, stable par KZ, engendrant Π comme G-module.*

Démonstration. — Comme Π est localement constante et de longueur finie, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que Π soit engendrée par Π^{K_n}. Comme K_n est distingué dans KZ, cela implique que Π^{K_n} est stable par KZ, et comme Π est admissible, cela implique que Π^{K_n} est de type fini sur $\mathscr{O}_L$. On peut donc prendre $W = \Pi^{K_n}$, pour $n \gg 0$.

Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, on note $\mathscr{W}(\Pi)$ l'ensemble des sous-$\mathscr{O}_L$-modules W de type fini de Π, stables par KZ, engendrant Π comme G-module. Si $W \in \mathscr{W}(\Pi)$, on note $I(W)$ l'*induite compacte* $\mathrm{c-Ind}_{KZ}^{G} W$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $\phi : G \to W$, à support fini modulo KZ, telles que $\phi(kh) = k \cdot \phi(h)$ si $k \in KZ$ et $h \in G$, sur lequel on fait agir $g \in \mathscr{G}$ par translation à droite sur la variable (i.e. $(g \cdot \phi)(h) = \phi(hg)$). On dispose alors d'une application G-équivariante surjective de $I(W)$ sur Π, envoyant ϕ sur $\sum_{g \in G/KZ} g \cdot \phi(g^{-1})$, et on note $R(W,\Pi)$ la sous-représentation de G noyau de cette application. On a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow R(W,\Pi) \longrightarrow I(W) \longrightarrow \Pi \longrightarrow 0, \quad \text{quel que soit } W \in \mathscr{W}(\Pi).$$

Si $v \in W$ et $g \in G$, on note $[g,v]$ l'élément de $I(W)$ défini par

$$[g,v](h) = \begin{cases} hg \cdot v & \text{si } hg \in KZ, \\ 0 & \text{si } hg \notin KZ. \end{cases}$$

On a $[g,v] = g \cdot [1,v]$, et l'image de $[g,v]$ dans Π est $g \cdot v$. Si $g \in G$, on note $[g,W]$ l'ensemble des $[g,v]$, pour $v \in W$. C'est un sous-$\mathscr{O}_L$-module de $I(W)$ qui ne dépend que de la classe de g dans $G/KZ \cong \mathscr{T}$. Son image dans Π est le translaté $g \cdot W$ de W par g.

Comme $[g,W]$ ne dépend que de la classe de g dans $G/KZ = \mathscr{S}$, cela permet de donner un sens à $[s,W]$, si $s \in \mathscr{T}$ (on identifie l'arbre à l'ensemble de ses sommets). On a alors $I(W) = \oplus_{s \in \mathscr{T}} [s,W]$. Si $\mathscr{A}$ est un sous-arbre de $\mathscr{T}$, et si $x \in I(W)$, on dit que $x = \sum_{s \in \mathscr{T}} x_s$, avec $x_s \in [s,W]$, est *à support dans $\mathscr{A}$*, si on a $x_s = 0$ quel

que soit $s \notin \mathscr{A}$. On définit *le support de* x comme le plus petit sous-arbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{T}$ tel que x soit à support dans $\mathscr{A}$ (c'est l'enveloppe convexe de ce qui est généralement appelé le support).

Remarque III.1.7. — Si $W \subset \Pi$ est stable par K, et si $n \in \mathbf{N}$, notons $W^{[n]}$ le $\mathscr{O}_L$-module $\sum_{d(s,\sigma_0)\leq n} s \cdot W$. Comme σ_0 est fixe par K, et comme G préserve la distance, $W^{[n]}$ est stable par K. De plus, $(W^{[n_1]})^{[n_2]} = W^{[n_1+n_2]}$ quels que soient n_1, $n_2 \in \mathbf{N}$.

On dit que $I(W)/R(W,\Pi)$ est *une présentation standard de* Π, si $R(W,\Pi)$ est engendré, comme $\mathscr{O}_L[G]$-module, par l'inclusion de $W \cap \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$ dans W et $\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$. Autrement dit, $I(W)/R(W,\Pi)$ est une présentation standard de Π si et seulement si $R(W,\Pi)$ est engendré, comme $\mathscr{O}_L[G]$-module, par

$$R^{(0)}(W,\Pi) = \left\{[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), x] - [\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), y],\ \text{avec } y \in W \cap \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W \text{ et } x = \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot y\right\}.$$

Les représentations admettant une présentation standard sont stables par sous-quotient et par extension, comme nous le verrons plus loin (prop. III.1.16).

5. Construction de représentations admettant une présentation standard

Lemme III.1.8. — *Soient* $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, $W \in \mathscr{W}(\Pi)$ *et* $W' = W \cap \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$. *Alors*

(i) $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot W' = \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W'$; *en particulier,* $\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W'$ *est inclus dans* W.

(ii) W' *est stable par* $I^+(1) = \left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F^* & \mathscr{O}_F\\ \pi\mathscr{O}_F & \mathscr{O}_F^*\end{smallmatrix}\right)$ *et par* $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ \pi & 0\end{smallmatrix}\right)$.

Démonstration. — Comme W est stable par $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ et par Z, on a

$$\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot W' = W \cap \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot W = W \cap \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \pi^{-1}\end{smallmatrix}\right)\cdot W = W \cap \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W = \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W'.$$

Ceci démontre le (i). On en déduit la stabilité de W' par $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ \pi & 0\end{smallmatrix}\right)$. Enfin, W' est stable par $K \cap \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)K\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et $\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathbf{M}_2(\mathscr{O}_F)\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F & \pi^{-1}\mathscr{O}_F\\ \pi\mathscr{O}_F & \mathscr{O}_F\end{smallmatrix}\right)$, ce qui fait que le groupe $K \cap \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)K\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ est constitué des matrices $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ de K avec c divisible par p, c'est-à-dire $I^+(1)$. Ceci permet de conclure.

Soit $\iota : W \to \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$ défini par $\iota(v) = \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot v$. D'après le lemme III.1.8, ι induit un isomorphisme de W' sur $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot W'$, et un petit calcul montre que, pour tous $x \in W'$ et $g \in I^+(1)$, on a $\iota(g\cdot x) = \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)g\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\iota(x)$, et $\iota(\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot\iota(v)) = \left(\begin{smallmatrix}0 & \pi\\ \pi & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot v$, pour tout $v \in W'$. De plus, $R^{(0)}(W,\Pi)$ est l'ensemble des $[\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), v] - [\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \iota(v)]$, pour $v \in W'$, ce qui fait que $I(W)/R(W,\Pi)$ est une présentation standard de Π si et seulement si le $\mathscr{O}_L[G]$-module $R(W,\Pi)$ est engendré par les $[\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), v] - [\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \iota(v)]$, pour $v \in W'$. Ce qui précède admet une réciproque sous la forme de la proposition suivante.

Proposition III.1.9. — *Soient :*

- *un* $\mathscr{O}_L$*-module de type fini* W *muni d'une action de* KZ,
- *un sous-*$\mathscr{O}_L$*-module* W' *de* W *stable par* $I^+(1) = \left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F^* & \mathscr{O}_F\\ \pi\mathscr{O}_F & \mathscr{O}_F^*\end{smallmatrix}\right)$ *et par* $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ \pi & 0\end{smallmatrix}\right)$,
- *un isomorphisme* $\iota : W' \to \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot W'$ *tel que* $\iota(g\cdot x) = \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)g\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\iota(x)$ *quels que soient* $x \in W'$ *et* $g \in I^+(1)$, *et* $\iota(\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot\iota(v)) = \left(\begin{smallmatrix}0 & \pi\\ \pi & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot v$ *quel que soit* $v \in W'$,

• $R(W,W',\iota)$ *le sous-*$\mathscr{O}_L[G]$*-module de* $I(W)$ *engendré par* $[\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),v]-[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\iota(v)]$, *pour* $v\in W'$,

• $\Pi = I(W)/R(W,W',\iota)$,

• $\overline{W}$ *et* $\overline{W}'$ *les images respectives de* W *et* W' *dans* Π.

Alors $I(\overline{W})/R(\overline{W},\Pi)$ *est une présentation standard de* Π, *et* $\overline{W}' = \overline{W}\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\overline{W}$.

Démonstration. — La surjection $W\to\overline{W}$ induit une surjection $I(W)\to I(\overline{W})$, et la surjection naturelle $I(W)\to\Pi$ se factorise à travers $I(\overline{W})$, et donc nous fournit une surjection $I(\overline{W})\to\Pi$. Comme l'image de $R(W,W',\iota)$ dans $I(\overline{W})$ n'est autre que $R(\overline{W},\overline{W}',\iota)$, on a aussi $\Pi = I(\overline{W})/R(\overline{W},\overline{W}',\iota)$. Autrement dit, on peut remplacer W et W' par $\overline{W}$ et $\overline{W}'$, et donc imposer à W d'être inclus dans Π ; c'est alors un élément de $\mathscr{W}(\Pi)$ et $R(W,\Pi) = R(W,W',\iota)$.

Pour démontrer la proposition, il suffit alors de prouver que $W' = W\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$. En effet, si ceci est le cas, $R(W,W',\iota)$ n'est autre que le $\mathscr{O}_L[G]$-module engendré par $R^{(0)}(W,\Pi)$.

L'inclusion $W'\subset W\cap\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$ est immédiate. Pour démontrer l'autre, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme III.1.10. — *Soit* H *le sous-groupe de* G *engendré par* Z, $I^-(1) = \left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F^*&\pi\mathscr{O}_F\\\mathscr{O}_F&\mathscr{O}_F^*\end{smallmatrix}\right)$ *et la matrice* $\left(\begin{smallmatrix}0&\pi\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. *Si un système de représentants de* G/H *dans* G *est fixé, alors tout élément* R *de* $R(W,W',\iota)$ *peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une somme finie du type*

$$R = \sum_{g\in G/H} g\cdot\left([\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),v_g]-[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\iota(v_g)]\right).$$

Démonstration. — Remarquons que H est le stabilisateur de l'arête non orientée $[\sigma_0,\sigma_1]$ de $\mathscr{T}$ (car $ZI^-(1)$ est le stabilisateur de l'arête orientée et $\left(\begin{smallmatrix}0&\pi\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ échange ses deux sommets). Si $g\in I^-(1)$, et si $v\in W'$, on a

$$g\cdot\left([\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),v]-[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\iota(v)]\right) = [\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)g\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v]-[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\iota(\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)g\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v)].$$

Donc $R(W,W',\iota)$ est stable par le sous-groupe $I^-(1)$ de G. De même,

$$\left(\begin{smallmatrix}0&\pi\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\left([\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),v]-[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\iota(v)]\right) = [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&\pi\\\pi&0\end{smallmatrix}\right)\cdot v]-[\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\iota(v)],$$

et comme $\iota(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\iota(v)) = \left(\begin{smallmatrix}0&\pi\\\pi&0\end{smallmatrix}\right)\cdot v$, cela montre que $R(W,W',\iota)$ est stable par H. Cela permet d'écrire tout élément R de $R(W,W',\iota)$ sous la forme voulue. Il reste à montrer qu'une telle écriture est unique et, par linéarité, il suffit de prouver que si

$$\sum_{g\in G/H} g\cdot\left([\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),v_g]-[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\iota(v_g)]\right) = 0,\ \text{où } v_g\in W,$$

alors $v_g = 0$ quel que soit $g\in G/H$. Si tel n'est pas le cas, on peut choisir, parmi les sommets $g\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ ou g, pour $g\in G/H$ avec $v_g\neq 0$, un sommet s à distance maximale de σ_0. Mais alors, H étant le stabilisateur de l'arête non orientée $[\sigma_0,\sigma_1]$ de $\mathscr{T}$, la projection de la somme ci-dessus sur $[s,W]$ est réduite (suivant les cas) à $[g\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),v_g]$

ou à $[g, \iota(v_g)]$. Comme on a supposé $v_g \neq 0$, cela prouve que cette projection n'est pas nulle, ce qui conduit à une contradiction. On en déduit le résultat.

Revenons à la démonstration de la prop. III.1.9. L'unicité de l'écriture dans le lemme III.1.10 implique, en particulier, que si $[\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), v] - [\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), v'] \in R(W, W', \iota)$, alors $v \in W'$ et $v' = \iota(v)$. Ceci permet de conclure.

Remarque III.1.11. — On peut voir la proposition ci-dessus comme un procédé de construction de représentations de G admettant une présentation standard à partir d'objets « finis ».

6. Quelques propriétés des présentations standard. — On note $\mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$ le sous-ensemble de $\mathscr{W}(\Pi)$ des W tels que $I(W)/R(W, \Pi)$ soit une présentation standard de Π.

Lemme III.1.12. — *Si $W \in \mathscr{W}(\Pi)$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$;

(ii) *pour tout sous-arbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{T}$, toute extrémité $[s_0, s_1]$ de $\mathscr{A}$ et toute relation $R = \sum_{s \in \mathscr{A}} [s, x_s] \in R(W, \Pi)$, de support inclus dans $\mathscr{A}$, on a $s_1 \cdot x_{s_1} \in s_0 \cdot W$ dans Π.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que la décomposition de R sous la forme $R = \sum_{s \in \mathscr{A}} [s, x_s]$ suppose que l'on a choisi un système de représentants de $\mathscr{A} \subset \mathscr{T} \cong G/KZ$ dans G. Par contre la condition $s_1 \cdot x_{s_1} \in s_0 \cdot W$ ne dépend pas du système de représentants choisis, ce qui fait que l'on peut supposer que $s_1 = s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Si maintenant, $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, alors d'après le lemme III.1.10, le choix d'un système de représentants de G/H dans G permet d'écrire R, de manière unique, sous la forme

$$R = \sum_{g \in G/H} g \cdot \left([\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), v_g] - [\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot v_g]\right),$$

avec $v_g \in W \cap \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W$. On peut imposer à s_0 de faire partie du système de représentants de G/H dans G, auquel cas, on a $x_{s_1} = v_{s_1} \in W \cap \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W$, et donc $s_1 \cdot x_{s_1} \in s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W = s_0 \cdot W$. On en déduit l'implication (i)⇒(ii).

Passons à la démonstration de (ii)⇒(i). Soit $R \in R(W, \Pi)$, et soient $\mathscr{A}$ le support de R, et $[s_0, s_1]$ une extrémité de $\mathscr{A}$. On peut, comme ci-dessus, supposer que $s_1 = s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. On peut alors écrire R sous la forme $R = \sum_{s \in \mathscr{A}} [s, v_s]$, et comme $s_1 \cdot x_{s_1} \in s_0 \cdot W$ dans Π, cela implique que $x_{s_1} \in W \cap \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W$. Mais alors $R_0 = [\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), x_{s_1}] - [\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot x_{s_1}] \in R^{(0)}(W, \Pi)$, et $R - R_0$ est à support dans $\mathscr{A} - \{s_1\}$. Comme une relation de support de cardinal ≤ 1 est nulle, une récurrence immédiate sur le cardinal du support de R permet alors de prouver que $R \in R^{(0)}(W, \Pi)$, et donc que $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$. Ceci permet de conclure.

Si $\mathscr{A}$ est un sous-arbre de $\mathscr{T}$, soit $I_{\mathscr{A}}(W, \Pi) = \sum_{s \in \mathscr{A}} s \cdot W \subset \Pi$.

Lemme III.1.13. — *Soient $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ des sous-arbres de $\mathscr{T}$.*

(i) *Si $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 \neq \varnothing$, alors $I_{\mathscr{A}_1}(W, \Pi) \cap I_{\mathscr{A}_2}(W, \Pi) = I_{\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2}(W, \Pi)$.*

(ii) *Si* $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 = \varnothing$, *alors* $I_{\mathscr{A}_1}(W,\Pi) \cap I_{\mathscr{A}_2}(W,\Pi) = s_1 \cdot W \cap s_2 \cdot W$, *où* (s_1,s_2) *est l'unique couple de* $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ *vérifiant* $d(s_1,s_2) = d(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2)$.

Démonstration. — Soit $x \in I_{\mathscr{A}_1}(W,\Pi) \cap I_{\mathscr{A}_2}(W,\Pi)$. On a donc une relation du type $x = \sum_{s\in\mathscr{A}_1} s\cdot v_s = \sum_{t\in\mathscr{A}_2} t\cdot v_t$. Soit $\mathscr{A}$ le support de cette relation. Soit $[r_0,r_1]$ une extrémité de $\mathscr{A}$, telle que $r_0 \notin I_{\mathscr{A}_1\cap\mathscr{A}_2}(W,\Pi)$; il existe donc $i=1,2$, bien déterminé, tel que $r_0 \in \mathscr{A}_i$ (les sommets de $\mathscr{A}$ ne sont pas forcément tous inclus dans $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$, si $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 = \varnothing$, mais les extrémités le sont). Supposons que $[r_0,r_1] \subset \mathscr{A}_i$: c'est automatique si $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 \neq \varnothing$ (en effet, si $e \in \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$, le segment $[r_0,e]$ est inclus dans $\mathscr{A}_i$ et contient l'extrémité $[r_0,r_1]$ de $\mathscr{A}_i$) ; si $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 = \varnothing$, c'est le cas sauf si r_0 est le sommet de $\mathscr{A}_i$ le plus proche de $\mathscr{A}_{3-i}$. Comme $W \in \mathscr{W}^{(0)}$, il résulte du lemme III.1.12, qu'il existe $w_{r_1} \in W$ tel que $r_0 \cdot v_{r_0} = r_1 \cdot w_{r_1}$. En supprimant, dans la somme du côté de $\mathscr{A}_i$, le terme correspondant à r_0 et en remplaçant celui correspondant à r_1 par $r_1 \cdot (v_{r_1} + w_{r_1})$, on obtient une égalité entre deux écritures de x dont le support est strictement inclus dans $\mathscr{A}$. Une récurrence immédiate permet d'en déduire les (i) et (ii).

7. Stabilité par extensions et sous-quotients

Lemme III.1.14. — *Si* $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, *alors* $W^{[1]} \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$.

Démonstration. — Soit $R \in R(W^{[1]},\Pi)$, et soit $\mathscr{A}$ le support de R. On peut donc écrire R de manière unique sous la forme $R = \sum_{s\in\mathscr{A}} [s,x_s]$, avec $x_s \in W^{[1]}$. Si $|\mathscr{A}| \leq 1$, alors $R=0$, et si $|\mathscr{A}| = 2$, il existe $g \in G$ tel que $g\cdot\mathscr{A} = \{\sigma_0,\sigma_1\}$, ce qui implique $R \in R^{(0)}(W^{[1]},\Pi)$.

On veut écrire R sous la forme $\sum_{g\in G} g\cdot([\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),x_g]-[\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),y_g])$, avec $x_g,y_g \in W^{[1]}$, nul pour presque tout $g \in \mathscr{G}$. Ceci va se faire par récurrence sur le cardinal de $\mathscr{A}$, et d'après ce qui précède, il suffit de considérer le cas $|\mathscr{A}| \geq 3$. L'arbre $\mathscr{A}$ contient alors un segment $[s_0,s_1,s_2]$, de longueur 2, tel que $[s_0,s_1]$ soit une extrémité de $\mathscr{A}$, et, quitte à changer les représentants s_0,s_1,s_2, on peut supposer que $s_1 = s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $s_2 = s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi^2&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.

Maintenant, on peut écrire x_s, pour $s \in \mathscr{A}$, de manière non unique, sous la forme

$$x_s = s\cdot w_s + \sum_{i\in\mathbf{P}^1(k_F)} sg_i \cdot v_{s,i},$$

avec $w_s, v_{s,i} \in W$, si $i \in \mathbf{P}^1(k_F)$, où $g_\infty = \left(\begin{smallmatrix}\pi^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $g_i = \left(\begin{smallmatrix}\pi&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, où l'on a choisi un relèvement de i dans $\mathscr{O}_F$, si $i \in k_F$. Mais alors

$$R' = \sum_{s\in\mathscr{A}} \Big([s,w_s] + \sum_{i\in\mathbf{P}^1(k_F)} [sg_i, v_{s,i}]\Big)$$

est un élément de $R(W,\Pi)$ de support inclus dans $\mathscr{A}' = \{s \in \mathscr{T},\ d(s,\mathscr{A}) \leq 1\}$. Comme $[s_0,s_1]$ est une extrémité de $\mathscr{A}$ et $s_1 = s_0 g_0$, cela implique que les $[s_0 g_i, s_0]$, pour $i \in \mathbf{P}^1(k_F) - \{0\}$, sont des extrémités de $\mathscr{A}'$. De plus, si $i \in \mathbf{P}^1(k_F) - \{0\}$, on a $g_i s_0 = g_j s$, avec $s \in \mathscr{A}$ si et seulement si $s = s_0$ et $i = j$. Ceci implique, que si on écrit R' sous la forme $R' = \sum_{s\in\mathscr{A}'} x'_s$, avec $x'_s \in [s,W]$, on a $x_{s_0 g_i} = [s_0 g_i, x_{s_0,i}]$ si

$i \in \mathbf{P}^1(k_F)-\{0\}$. Il résulte donc du lemme III.1.12, que $s_0 g_i \cdot x_{s_0,i} \in s_0 g_i \cdot W \subset s_0 \cdot W^{[1]}$, si $i \in \mathbf{P}^1(k_F)-\{0\}$, et on peut donc écrire x_{s_0} sous la forme $s_0 \cdot w'_{s_0} + s_0 g_0 \cdot x_{s_0,0}$, avec $w'_{s_0} \in W$. Or $w'_{s_0} = g_0 g_\infty \cdot w'_{s_0} \in g_0 \cdot W^{[1]}$, ce qui prouve que x_{s_0} peut s'écrire sous la forme $s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot y_{s_0}$, avec $y_{s_0} \in W^{[1]}$. La relation $R'' = R' - [s_0, x_0] + [s_0\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), y_{s_0}]$ a un support inclus dans l'arbre $\mathscr{A} - \{s_0\}$, ce qui permet, par récurrence, de conclure.

Corollaire III.1.15. — *Si* Π *admet une présentation standard, alors quel que soit* $W' \in \mathscr{W}(\Pi)$, *il existe* $W'' \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$ *contenant* W'.

Démonstration. — Soit $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$. Comme $W^{[n+1]} = (W^{[n]})^{[1]}$ et comme $W^{[n]}$ contient W' si n est assez grand, le lemme précédent permet de conclure.

Proposition III.1.16. — *Soit* $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ *une suite exacte d'éléments de* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$.

(i) *Si* Π *admet une présentation standard, il en est de même de* Π_1 *et* Π_2.

(ii) *Si* Π_1 *et* Π_2 *admettent des présentations standard, il en est de même de* Π.

Démonstration. — (i) Soit $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, et soit $W_2 \subset \Pi_2$ l'image de W. Alors $R(W_2, \Pi_2)$ est l'image de $R(W, \Pi)$ dans $I(W_2)$, et on peut prendre pour générateurs de $R(W_2, \Pi_2)$ les images d'une famille de générateurs de $R(\Pi, W)$. Ceci permet de montrer que $I(W_2)/R(W_2, \Pi_2)$ est une présentation standard de Π_2. Maintenant, soit $W_1 = W \cap \Pi_1$, et soit $R \in R(W_1, \Pi_1)$. Soit $\mathscr{A}$ le support de R. On peut alors écrire R, de manière unique, sous la forme $\sum_{s \in \mathscr{A}} x_s$, avec $x_s \in [s, W_1]$. Soit $[s_0, s_1]$ une extrémité de $\mathscr{A}$. Comme $R(W_1, \Pi_1) \subset R(W, \Pi)$, et comme $I(W)/R(W, \Pi)$ est une présentation standard de Π, on a $s_0 \cdot x_{s_0} \in s_1 \cdot W$. Comme par ailleurs, $s_0 \cdot x_{s_0} \in \Pi_1$, et $s_1^{-1} \cdot \Pi_1 = \Pi_1$, on a $s_0 \cdot x_{s_0} \in s_1 \cdot W_1$. Le lemme III.1.12 permet d'en conclure que $I(W_1)/R(W_1, \Pi_1)$ est une présentation standard de Π_1, ce qui termine la démonstration du (i).

(ii) Soit $W_2 \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi_2)$. Soient v_i, $i \in I$ fini, des générateurs de W_2 sur $\mathscr{O}_L$, et soient $[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), x_j] - [\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), y_j]$, $j \in J$ fini, $x_j, y_j \in W_2$, des générateurs de $R(W_2, \Pi_2)$. Soient $\tilde{v}_i$, $i \in I$ et $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_j$, $j \in J$, des relèvements de v_i, $i \in I$ et x_j, y_j, $j \in J$ dans Π, et, si $j \in J$, soit $z_j = \tilde{x}_j - \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \tilde{y}_j$. Soit alors W' le sous K-module de Π engendré par les $\tilde{v}_i$, $i \in I$, les $\tilde{x}_j$, $\tilde{y}_j$, $j \in J$, et les z_j, $j \in J$. La surjection de Π sur Π_2 induit une surjection de W' sur W_2, et on note W'_1 le noyau de cette surjection. D'après le cor. III.1.15, on peut trouver $W_1 \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi_1)$, contenant W'_1. Soit $W = W' + W_1$. Par construction, $W \in \mathscr{W}(\Pi)$, et la suite $0 \to W_1 \to W \to W_2 \to 0$ est exacte. Il en est donc de même de la suite $0 \to R(W_1, \Pi_1) \to R(W, \Pi) \to R(W_2, \Pi_2) \to 0$, et $R(W, \Pi)$ est engendré par les $[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \tilde{x}_j - z_j] - [\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \tilde{y}_j]$, $j \in J$, et par $R(W_1, \Pi_1)$. Comme $I(W_1)/R(W_1, \Pi_1)$ est une présentation standard de Π_1, cela implique que $R(W, \Pi)$ admet une famille de générateurs de la forme $[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), x] - [\left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), y]$, avec $x, y \in W$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque III.1.17. — On a construit en passant $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, $W_1 \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi_1)$ et $W_2 \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi_2)$ tels que la suite $0 \to W_1 \to W \to W_2 \to 0$ soit exacte. De plus, il

résulte de la démonstration que $R^{(0)}(W,\Pi)$ se surjecte sur $R^{(0)}(W_2,\Pi_2)$ et donc que la suite $0 \to R^{(0)}(W_1,\Pi_1) \to R^{(0)}(W,\Pi) \to R^{(0)}(W_2,\Pi_2) \to 0$ est exacte.

III.2. Duaux

1. Le dual $\Pi^\vee$ d'une $\mathscr{O}_L$-représentation Π de G. — Si Π est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, soit $\Pi^\vee = \mathrm{Hom}(\Pi, L/\mathscr{O}_L)$, le dual de Pontryagin de Π. Si $\mu \in \Pi^\vee$ et $v \in \Pi$, on note $\langle \mu, v\rangle$ la valeur de μ sur v. On fait agir G sur $\Pi^\vee$ à gauche, en envoyant μ sur $g\cdot\mu$ défini par $\langle g\cdot\mu, v\rangle = \langle \mu, g^{-1}\cdot v\rangle$.

On munit $\Pi^\vee$ de la topologie de la convergence faible, ce qui en fait un $\mathscr{O}_L$-module compact. Si Π est de la forme $I(W)$, où W est un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie muni d'une action de KZ, alors $\Pi^\vee$ est le produit des $[s,W]^\vee$, pour $s \in \mathscr{T}$, et la topologie de la convergence faible n'est autre que la topologie produit.

On suppose dans tout ce qui suit que Π admet une présentation standard et que $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$. On pose $G\cdot R^{(0)}(W,\Pi) = \{g\cdot v,\ g\in G,\ v \in R^{(0)}(W,\Pi)\}$; ce n'est pas un $\mathscr{O}_L$-module : le $\mathscr{O}_L$-module engendré par $G\cdot R^{(0)}(W,\Pi)$ n'est autre que $R(W,\Pi)$.

Si $\mathscr{A}$ est un sous-arbre de $\mathscr{T}$, on définit $\Gamma(\mathscr{A}, \mathscr{F}(W,\Pi))$ comme étant l'ensemble des $\mu \in \prod_{s\in\mathscr{A}}[s,W]^\vee$ tels que $\langle \mu, x\rangle = 0$ pour tout $x \in G\cdot R^{(0)}(W,\Pi)$ de support dans $\mathscr{A}$. Comme $G\cdot R^{(0)}(W,\Pi)$ engendre $R(W,\Pi)$, on a $\Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{F}(W,\Pi)) = \Pi^\vee$. On obtient donc de la sorte, pour tout $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, une description de $\Pi^\vee$ comme les sections globales sur $\mathscr{T}$ d'un certain faisceau $\mathscr{F}(W,\Pi)$.

Lemme III.2.1. — *Si $\mathscr{A}$ est un sous-arbre de $\mathscr{T}$, alors*

$$I_{\mathscr{A}}(W,\Pi)^\vee = \Gamma(\mathscr{A}, \mathscr{F}(W,\Pi)).$$

Démonstration. — On a la suite exacte

$$0 \to R(W,\Pi) \cap \Big(\oplus_{s\in\mathscr{A}}\,[s,W]\Big) \to \oplus_{s\in\mathscr{A}}[s,W] \to \sum_{s\in\mathscr{A}} s\cdot W \to 0.$$

Donc $I_{\mathscr{A}}(W,\Pi)^\vee = \big(\sum_{s\in\mathscr{A}} s\cdot W\big)^\vee$ est l'ensemble des éléments de $\prod_{s\in\mathscr{A}}[s,W]^\vee$ annulant l'ensemble des éléments de $R(W,\Pi)$ à support dans $\mathscr{A}$. Comme cet ensemble est engendré par les éléments de $G\cdot R^{(0)}(W,\Pi)$ à support dans $\mathscr{A}$ (cela résulte du (ii) du lemme III.1.12), cela permet de conclure, au vu de la définition de $\Gamma(\mathscr{A}, \mathscr{F}(W,\Pi))$.

Lemme III.2.2. — *Soient $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ des sous-arbres de $\mathscr{T}$, et soit $\mu_i \in I_{\mathscr{A}_i}(W,\Pi)^\vee$, pour $i = 1,2$.*

(i) *Si $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 \neq \varnothing$, et si μ_1 et μ_2 ont même restriction à $I_{\mathscr{A}_1\cap\mathscr{A}_2}(W,\Pi)$, il existe $\mu \in I_{\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2}(W,\Pi)^\vee$* (unique) *dont les restrictions à $I_{\mathscr{A}_1}(W,\Pi)$ et $I_{\mathscr{A}_2}(W,\Pi)$ sont respectivement μ_1 et μ_2.*

(ii) *Si $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 = \varnothing$, si $s_1 \in \mathscr{A}_1$, $s_2 \in \mathscr{A}_2$ sont les sommets à distance minimale, et si $\mathscr{A}$ est le plus petit arbre contenant $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$, alors il existe $\mu \in I_{\mathscr{A}}(W,\Pi)^\vee$ dont les restrictions à $I_{\mathscr{A}_1}(W,\Pi)$ et $I_{\mathscr{A}_2}(W,\Pi)$ sont respectivement μ_1 et μ_2, si et seulement si μ_1 et μ_2 coïncident sur $s_1\cdot W \cap s_2\cdot W$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme III.1.13.

Lemme III.2.3. — *Soient $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2$ des sous-arbres de $\mathscr{T}$. Si $\mu \in I_{\mathscr{A}_1}(W,\Pi)^\vee$ s'annule sur $s\cdot W$ pour tout sommet extrémal s de $\mathscr{A}_1$, alors μ se prolonge de manière unique en $\tilde{\mu} \in I_{\mathscr{A}_2}(W,\Pi)^\vee$ nul sur $s\cdot W$, pour tout $s \in \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1$.*

Démonstration. — Cela suit du (ii) du lemme III.2.2 en décomposant $\mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1$ en composantes connexes.

2. L'isomorphisme $\Pi^\vee \cong D_W^\natural(\Pi) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. — On suppose dorénavant $F = \mathbf{Q}_p$. (Les résultats s'étendent sans problème au cas général à condition de choisir une uniformisante de F.)

Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, soit $I_U(W)$ le sous-$\mathscr{O}_L$-module de $I(W)$ engendré par les $[\left(\begin{smallmatrix} p^n & a \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), W]$, avec $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$ tels que $a + p^n\mathbf{Z}_p \subset U$, et soit $\mathrm{I}_U^\Pi(W)$ l'image de $I_U(W)$ dans Π. Si U est un ouvert standard, on a $I_U^\Pi(W) = I_{\mathscr{T}_U}(W,\Pi)$ et $I_U^\Pi(W)^\vee = \Gamma(\mathscr{T}_U, \mathscr{F}(W,\Pi)))$.

On note $\mathrm{R}_{U,W} : \Pi^\vee \to \mathrm{I}_U^\Pi(W)^\vee$ l'application naturelle (de restriction).

Lemme III.2.4. — *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, et si $g \in G$ est tel que gU ne contienne pas ∞, alors :*

(i) $g(\mathrm{I}_U^\Pi(W)) = \mathrm{I}_{gU}^\Pi(W)$;

(ii) *l'application $g : \mathrm{I}_U^\Pi(W)^\vee \to \mathrm{I}_{gU}^\Pi(W)^\vee$ définie par $\langle g\cdot\mu, v\rangle = \langle \mu, g^{-1}\cdot v\rangle$ est un isomorphisme rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Pi^\vee & \xrightarrow{\ g\ } & \Pi^\vee \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{R}_{U,W}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{R}_{gU,W}} \\ \mathrm{I}_U^\Pi(W)^\vee & \xrightarrow{\ g\ } & \mathrm{I}_{gU}^\Pi(W)^\vee \end{array}$$

Démonstration. — Le (i) suit de l'équivalence entre les (iii) et (iv) du lemme III.1.2, et de ce que $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$ est stable par KZ et donc aussi, *a fortiori*, par IZ. Le (ii) est immédiat.

Le module $\mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)^\vee$, qui va jouer un rôle important dans la suite, est noté $D_W^\natural(\Pi)$. On note R' l'application de restriction à $J^\Pi(W) = \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p^*}^\Pi(W) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$. Comme W, $\mathscr{T}_{\mathbf{Z}_p^*}$ et σ_0 sont stables par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ sur $\Pi^\vee$ induit une action sur $J^\Pi(W)$ et sur son dual.

Proposition III.2.5. — *L'application $\mu \mapsto \left(\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}(\mu), \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu\right)\right)$ induit un isomorphisme de $\Pi^\vee$ sur l'ensemble $D_W^\natural(\Pi)\boxtimes\mathbf{P}^1$ des couples (μ_1,μ_2) de $D_W^\natural(\Pi)$ vérifiant $R'(\mu_2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot R'(\mu_1)$.*

Démonstration. — On a $\mathscr{T}_{\mathbf{Z}_p} \cup \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathscr{T}_{\mathbf{Z}_p} = \mathscr{T}$ et $\mathscr{T}_{\mathbf{Z}_p} \cap \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathscr{T}_{\mathbf{Z}_p} = \sigma_0 \cup \mathscr{T}_{\mathbf{Z}_p^*}$. Ceci nous fournit, grâce au lemme III.1.13, une suite exacte

$$0 \to J^\Pi(W) \to \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W) \oplus \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W) \to \Pi \to 0,$$

la première flèche étant $v \mapsto (v, -\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)v)$ et la seconde $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)v_2$. Le résultat s'en déduit par dualité.

3. L'isomorphisme $\Pi^\vee \cong D_W^\natural(\Pi) \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$. — Comme $\mathbf{Z}_p$ est stable par le groupe $P(\mathbf{Z}_p) = \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, il résulte du lemme III.2.4 que $D_W^\natural(\Pi)$ est naturellement muni d'une structure de $P(\mathbf{Z}_p)$-module. Comme de plus, $\mathbf{Z}_p$ est stable par $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, cela munit $D_W^\natural(\Pi)$ d'une action d'un opérateur ψ_W induite par celle de $\left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ sur $\Pi^\vee$. Cette action commute à celle de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^*&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$

Lemme III.2.6. — $\psi_W : D_W^\natural(\Pi) \to D_W^\natural(\Pi)$ *est surjectif.*

Démonstration. — Par définition, on a $\langle \psi_W(\mu), v\rangle = \langle \mu, \left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\rangle$, et comme $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W) \subset \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)$, l'application naturelle de $D_W^\natural(\Pi) = (\mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W))^\vee$ sur $\left(\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)\right)^\vee$ est surjective. On en déduit que, si $\lambda \in D_W^\natural(\Pi)$, il existe $\mu \in D_W^\natural(\Pi)$ dont la restriction à $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)$ est donnée par $\langle \psi_W, v\rangle = \langle \lambda, \left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\rangle$. On a alors $\psi_W(\mu) = \lambda$, ce qui permet de conclure.

L'algèbre de groupe complétée de $\left(\begin{smallmatrix}1&p\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ agit continûment sur Π et $\Pi^\vee$. Par ailleurs, $g \mapsto \left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)g\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ induit un isomorphisme de $\left(\begin{smallmatrix}1&p\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ sur $\left(\begin{smallmatrix}1&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, isomorphisme qui se prolonge naturellement en un isomorphisme entre les algèbres de groupe complétées.

Lemme III.2.7. — $\psi_W(\lambda\cdot\mu) = \left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\lambda\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\psi_W(\mu)$, *pour tous* $\mu \in D_W^\natural(\Pi)$, *et* $\lambda \in \mathscr{O}_L[[\left(\begin{smallmatrix}1&p\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)]]$.

Démonstration. — Il suffit de prouver que $\psi_W\left(\left(\begin{smallmatrix}1&p\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\psi_W(\mu)$ puisque $\left(\begin{smallmatrix}1&p\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ est topologiquement engendré par $\left(\begin{smallmatrix}1&p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&p\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Or on a, si $v \in \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)$,

$$\begin{aligned}\left\langle \psi_W\left(\left(\begin{smallmatrix}1&p\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu\right), v\right\rangle &= \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1&p\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu, \left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\right\rangle = \left\langle \mu, \left(\begin{smallmatrix}1&-p\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\right\rangle \\ &= \left\langle \mu, \left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\right\rangle = \left\langle \psi_W(\mu), \left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\right\rangle = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\psi_W(\mu), v\right\rangle\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

Lemme III.2.8. — *On a* $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}\circ\left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \psi_W\circ\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}$.

Démonstration. — Si $\mu \in \Pi^\vee$, et si $v \in \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)$, alors

$$\left\langle \psi_W\circ\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}(\mu), v\right\rangle = \left\langle \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}(\mu), \left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)v\right\rangle = \left\langle \mu, \left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)v\right\rangle, \text{ puisque } \left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)v \in \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W),$$
$$\left\langle \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}\circ\left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\mu, v\right\rangle = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\mu, v\right\rangle = \left\langle \mu, \left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)v\right\rangle.$$

Ceci permet de conclure.

Il résulte du lemme III.2.7 que $D_W^\natural(\Pi)$ est un $(P(\mathbf{Z}_p), \psi)$-module (pour $\psi = \psi_W$), ce qui permet de construire, pour tout caractère δ de $\mathbf{Q}_p^*$, le B-module $D_W^\natural(\Pi)\boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$.

Proposition III.2.9. — *Si $\delta = \delta_\Pi^{-1}$, l'application $\mu \mapsto \iota(\mu) = \big(\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}\big(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mu\big)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est un isomorphisme B-équivariant de $\Pi^\vee$ sur $D_W^\natural(\Pi) \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$.*

Démonstration. — Soit $\mu \in \Pi^\vee$, et si $n \in \mathbf{N}$, soit $\mu^{(n)} = \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}\big(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mu\big)$. Alors, d'après le lemme III.2.8, on a

$$\psi_W(\mu^{(n+1)}) = \big(\psi_W \circ \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) \cdot \mu = \big(\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) \cdot \mu = \mu^{(n)},$$

ce qui prouve que ι est à valeurs dans $D_W^\natural(\Pi) \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Maintenant, on a :

- $\big(\left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu\big)^{(n)} = \mu^{(n+k)}$, si $k \in \mathbf{Z}$ et $n \geq -k$ (évident sur la définition) ;
- $\big(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu\big)^{(n)} = \delta(a)\mu^{(n)}$, si $a \in \mathbf{Q}_p^*$ (immédiat) ;
- $\big(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu\big)^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu^{(n)}$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, (car $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}$ et $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ commutent à $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$) ;
- $\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu\big)^{(n)} = \big(\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) \cdot \mu = \big(\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) \cdot \mu = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu^{(n)}$, si $n + v_p(b) \geq 0$ (car alors $\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ commute à $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}$).

Il suffit de comparer les formules ci-dessus avec celles de la prop. I.3.6 pour conclure à la B-équivariance de ι. Maintenant, si $\mu \in \mathrm{Ker}\,\iota$, alors $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu$ est nulle sur $\mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)$, et donc μ est nulle sur $\mathrm{I}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme la réunion des $\mathrm{I}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)$, pour $n \in \mathbf{N}$, est Π tout entier, cela prouve que $\mu = 0$. On en déduit l'injectivité de ι. Enfin, si $(\mu^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in D_W^\natural(\Pi) \boxtimes \mathbf{Q}_p$, si $v \in \Pi$, et si $n \in \mathbf{N}$ est assez grand pour que $v \in \mathrm{I}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)$, alors $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v$ et $\left(\begin{smallmatrix} p^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v$ appartiennent à $\mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)$, et on a :

$$\big\langle \mu^{(n+1)}, \left(\begin{smallmatrix} p^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \big\rangle = \big\langle \psi_W(\mu^{(n+1)}), \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \big\rangle = \big\langle \mu^{(n)}, \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \big\rangle.$$

Ceci montre que $\big\langle \mu^{(n)}, \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \big\rangle$ est indépendant de n assez grand. On note μ l'élément de $\Pi^\vee$ ainsi défini. Si $v \in \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)$, on a, par construction de μ,

$$\big\langle \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu, v \big\rangle = \big\langle \mu, \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \big\rangle = \langle \mu^{(n)}, v \rangle.$$

Ceci prouve que $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}\big(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu\big) = \mu^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. On en déduit la surjectivité de ι, ce qui permet de conclure.

III.3. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. —

Le but de ce § est de démontrer le résultat suivant.

Théorème III.3.1. — *Toute objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ admet une présentation standard.*

Démonstration. — D'après la prop. III.1.16, il suffit de prouver que, si Π est irréductible, alors Π admet une présentation standard. Or d'après le th. III.3.2 et la rem. III.3.4 ci dessous, qui regroupent des résultats de Barthel-Livné [**2, 3**] et Breuil [**13**], une représentation irréductible est, soit supersingulière, soit un sous-objet d'une série principale, et il suffit donc de montrer que ces deux types de représentations admettent une présentation standard. Pour les supersingulières, cela fait l'objet de la prop. III.3.12, et la série principale est traitée dans la prop. III.3.8.

1. Les objets irréductibles de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$. — Les objets irréductibles de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ ont été classifiés par Barthel-Livné [**2, 3**] et Breuil [**13**].

Si $0 \leq r \leq p-1$, et si $\chi : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$ est un caractère, on note $W_{r,\chi}$ le KZ-module $(\mathrm{Sym}^r k_L^2) \otimes (\chi \circ \det)$, où K agit à travers son quotient $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$. C'est un KZ-module irréductible.

On identifiera $\mathrm{Sym}^r k_L^2$ au sous-espace de $k_L[X]$ des polynômes de degré $\leq r$, muni de l'action à gauche de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ donnée par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot P(X) = (a+cX)^r P(\frac{b+dX}{a+cX})$. Le module $W_{r,\chi}$ admet alors comme base les polynômes

$$X^r, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot X^r = (X+1)^r, \ldots, \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot X^r = (X+r)^r,$$

et l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ est décrite par les relations :

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^r \cdot X^r = \chi(-1) r! \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot X^r,$$
$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot X^r = \chi(a) X^r, \text{ si } a \in \mathbf{Z}_p^*.$$

Si P est un élément de $W_{r,\chi}$, on définit $P(\infty) \in k_L$ comme le coefficient de X^r dans P. Si $0 \leq r \leq p-1$, et si $\chi : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$, Barthel et Livné ont montré l'existence d'un opérateur $T_p : I(W_{r,\chi}) \to I(W_{r,\chi})$, commutant à l'action de G, et tel que, si $g \in G$ et $P \in W_{r,\chi}$, l'on ait

$$T_p([g,P]) = \sum_{i=0}^{p-1} P(-i)[g\left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1] + P(\infty)[g\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right), X^r].$$

Si $\lambda \in k_L$, soit $\Pi(r,\lambda,\chi) = I(W_{r,\chi})/(T_p - \lambda) \cdot I(W_{r,\chi})$ et, si $\lambda \in k_L^*$, soit $\mu_\lambda \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ le caractère défini par $\mu_\lambda(x) = \lambda^{v_p(x)}$.

Théorème III.3.2. — (i) *La représentation* $\Pi(r,\lambda,\chi)$ *est irréductible à part dans les cas suivants :*

- $r = 0$ *et* $\lambda = \pm 1$, *auquel cas* $\Pi(r,\lambda,\chi)$ *est une extension d'une représentation* $\mathrm{St} \otimes (\chi\mu_\lambda \circ \det)$ *irréductible, de dimension infinie, par le caractère* $\chi\mu_\lambda \circ \det$,
- $r = p-1$ *et* $\lambda = \pm 1$, *auquel cas* $\Pi(r,\lambda,\chi)$ *est une extension de* $\chi\mu_\lambda \circ \det$ *par* $\mathrm{St} \otimes (\chi\mu_\lambda \circ \det)$.

(ii) *Tout objet absolument*[(53)] *irréductible de* $\mathrm{Rep}_{k_L}G$ *est isomorphe à un constituant de Jordan-Hölder d'une représentation* $\Pi(r,\lambda,\chi)$.

Soit A un anneau. Si W est un A-module muni d'une action localement constante de B, soit $\mathrm{Ind}_B^G W$ l'ensemble des fonctions localement constantes sur G, telles que $\phi(bx) = b \cdot \phi(g)$ si $x \in G$ et $b \in B$. On fait agir G (à gauche) sur $\mathrm{Ind}_B^G W$ par translation à droite sur la variable.

Si $v \in \mathrm{Ind}_B^G W$, on définit $\phi_v : \mathbf{Q}_p \to W$ par la formule $\phi_v(x) = v\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{smallmatrix}\right)\right)$. On obtient de la sorte un isomorphisme de $\mathrm{Ind}_B^G W$ sur l'ensemble des $\phi : \mathbf{Q}_p \to W$,

(53) Π est dite absolument irréductible, si $\overline{k}_L \otimes_{k_L} \Pi$ est irréductible (sur $\overline{k}_L[G]$).

localement constantes, telles que $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x^{-1} & -1 \\ 0 & -x \end{smallmatrix}\right) \cdot \phi(x^{-1})$ se prolonge en une fonction constante sur un voisinage de 0. Les formules $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ et

$$\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} -c & a \\ -cx-d & ax+b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1/(cx+d) & c/(ad-bc) \\ 0 & (cx+d)/(ad-bc) \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (ax+b)/(cx+d) \end{smallmatrix}\right)$$

fournissent le résultat suivant.

Lemme III.3.3. — *L'action de G sur $\mathrm{Ind}_B^G W$, identifié à un sous-espace de fonctions $\phi : \mathbf{Q}_p \to W$, est donnée par $g \cdot \phi = \phi \star g^{-1}$, avec*

$$\left(\phi \star \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right)(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1/(cx+d) & c/(ad-bc) \\ 0 & (cx+d)/(ad-bc) \end{smallmatrix}\right) \cdot \phi\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right).$$

Remarque III.3.4. — Si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $\delta_1 \otimes \delta_2$ le caractère de B défini par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \to \delta_1(a)\delta_2(d)$, que l'on voit aussi comme une k_L-représentation de dimension 1 de B (à gauche). Une représentation de G de la forme $\mathrm{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2$, avec $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, est dite *de la série principale.* Barthel et Livné ont démontré que $\Pi(r, \lambda, \chi)$ a même semi-simplifiée que $\mathrm{Ind}_B^G(\chi\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \chi\mu_\lambda\omega^r)$, si $\lambda \neq 0$. Donc toute représentation irréductible de G qui n'est pas de la forme $\Pi(r, 0, \chi)$ est un sous-objet d'une représentation de la série principale. Les $\Pi(r, 0, \chi)$ sont dites *supersingulières.* Nous verrons plus loin (discussion précédant la prop. III.3.7) une description plus explicite des séries principales.

Proposition III.3.5. — (i) *Les seuls entrelacements entre supersingulières sont*

$$\Pi(r, 0, \chi) \cong \Pi(r, 0, \chi\mu_{-1}) \cong \Pi(p-1-r, 0, \chi\omega^r) \cong \Pi(p-1-r, 0, \chi\omega^r\mu_{-1}).$$

(ii) *Il n'y a pas d'entrelacements entre les supersingulières et les sous-objets des séries principales, ni entre les composantes de Jordan-Holder de $\mathrm{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2$ et de $\mathrm{Ind}_B^G \delta_1' \otimes \delta_2'$, si $(\delta_1, \delta_2) \neq (\delta_1', \delta_2')$.*

2. Quelques représentations de B. — On note $\mathrm{LC}_c(\delta_1 \otimes \delta_2)$ l'espace $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$ des fonctions localement constantes, à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ et à valeurs dans k_L, muni de l'action de B (à gauche) donnée par

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot_{\delta_1 \otimes \delta_2} \phi\right)(x) = \delta_1(a)\delta_2(d)\phi\left(\frac{dx-b}{a}\right),$$

et l'action à droite correspondante étant donnée par

$$\left(\phi \star_{\delta_1 \otimes \delta_2} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\right)(x) = \delta_1^{-1}(a)\delta_2^{-1}(d)\phi\left(\frac{ax+b}{d}\right).$$

Si $i \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$, soit $\phi_i = \mathbf{1}_{i+p\mathbf{Z}_p} \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$. Soit $Y(\delta_1, \delta_2)$ le k_L-espace vectoriel $\oplus_{i \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} k_L \cdot \phi_i$, muni de l'action de $ZB(\mathbf{Z}_p)$ obtenue par restriction de celle sur $\mathrm{LC}_c(\delta_1 \otimes \delta_2)$.

Proposition III.3.6. — $\mathrm{LC}_c(\delta_1\otimes\delta_2)$ *est le quotient de* $\mathrm{Ind}_{ZB(\mathbf{Z}_p)}^{B}Y(\delta_1,\delta_2)$ *par le sous-*$k_L[B]$*-module engendré par* $R_{\delta_1,\delta_2,0}$*, avec*

$$R_{\delta_1,\delta_2,0}=[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\phi_0]-\sum_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p}[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\delta_1(p)^{-1}\phi_i].$$

Démonstration. — Soit J un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Q}_p$.

- Les $\left(\begin{smallmatrix}p^n&p^nc\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, avec $n\in\mathbf{Z}$, $c\in J$, forment une famille de représentants de G/KZ.
- $\left(\begin{smallmatrix}p^n&p^nc\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i=\delta_1(p)^n\mathbf{1}_{p^n(i+c)+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}$.
- Les $p^n(i+c)$, avec $c\in J$ et $i\in\{0,1,\cdots,p-1\}$ forment un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/p^{n+1}\mathbf{Z}_p$.
- En tant que k_L-espace vectoriel, $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)$ est égal à

$$\Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\bigoplus_{b\in\mathbf{Q}_p/p^{n+1}\mathbf{Z}_p}k_L\cdot\mathbf{1}_{b+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}\Big)/\Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}\bigoplus_{b\in\mathbf{Q}_p/p^{n}\mathbf{Z}_p}k_L\cdot(\mathbf{1}_{b+p^{n}\mathbf{Z}_p}-\sum_{i=0}^{p-1}\mathbf{1}_{b+p^ni+p^{n+1}\mathbf{Z}_p})\Big).$$

- $\mathbf{1}_{b+p^n\mathbf{Z}_p}-\sum_{i=0}^{p-1}\mathbf{1}_{b+p^ni+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}=\delta_1(p)^{1-n}\left(\begin{smallmatrix}p^{n-1}&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot R_{\delta_1,\delta_2,0}$.

Ceci permet de conclure.

3. La série principale en caractéristique p. — Remarquons que, k_L^* étant d'ordre premier à p, et $1+p\mathbf{Z}_p$ étant un pro-p-groupe, on a $\delta(x)=1$ si $x\in 1+p\mathbf{Z}_p$ et $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$. Soit $\omega:\mathbf{Q}_p^*\to\mathbf{F}_p^*$ la réduction modulo p du caractère $x\mapsto x|x|$. On a donc $\omega(p)=1$. Si $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $B(\delta_1,\delta_2)$ l'espace des fonctions ϕ, à valeurs dans k_L, localement constantes sur $\mathbf{Q}_p$, telles que $x\mapsto(\omega^{-1}\delta_1\delta_2^{-1})(x)\cdot\phi(1/x)$ se prolonge en 0 en une fonction localement constante sur $\mathbf{Q}_p$. Si ϕ_∞ est la fonction définie sur $\mathbf{Q}_p$ par

$$\phi_\infty(x)=\begin{cases}(\omega^{-1}\delta_1\delta_2^{-1})(x) & \text{si } x\notin\mathbf{Z}_p,\\ 0 & \text{si } x\in\mathbf{Z}_p,\end{cases}$$

alors $B(\delta_1,\delta_2)=\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)\oplus k_L\cdot\phi_\infty$. On munit $B(\delta_1,\delta_2)$ d'une action $\star_{\delta_1,\delta_2}$ de G à droite, définie par,

$$(\phi\star_{\delta_1,\delta_2}\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right))(x)=(\omega\delta_1^{-1})(ad-bc)(\omega^{-1}\delta_1\delta_2^{-1})(cx+d)\phi(\frac{ax+b}{cx+d}).$$

Comme d'habitude, cela permet de munir $B(\delta_1,\delta_2)$ d'une action à gauche $\cdot_{\delta_1,\delta_2}$ de G définie par $g\cdot_{\delta_1,\delta_2}\phi=\phi\star_{\delta_1,\delta_2}g^{-1}$.

Si $v\in\mathrm{Ind}_B^G\delta_1\otimes\delta_2$, on définit $\phi_v:\mathbf{Q}_p\to k_L$ par la formule $\phi_v(x)=v(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&x\end{smallmatrix}\right))$. Le lemme III.3.3 montre que ceci définit un isomorphisme G-équivariant de $\mathrm{Ind}_B^G\delta_1\otimes\delta_2$ sur $B(\delta_2\omega,\delta_1)$ (et donc $B(\delta_1,\delta_2)\cong\mathrm{Ind}_B^G\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}$). Par ailleurs, l'évaluation en $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ fournit une application B-équivariante surjective $\mathrm{Ind}_B^G\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}\to\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}$. Traduit en termes de l'isomorphisme $B(\delta_1,\delta_2)\cong\mathrm{Ind}_B^G\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}$, il est facile de voir que le noyau n'est autre que $\mathrm{LC}_c(\delta_1\omega^{-1}\otimes\delta_2)$. On en déduit les résultats suivants.

Proposition III.3.7. — (i) $B(\delta_1,\delta_2)$ *est un objet de* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$*; son caractère central est* $\omega^{-1}\delta_1\delta_2$.

(ii) $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$ *est stable sous l'action du borel* B, *et on a une suite exacte de* $k_L[B]$*-modules*

$$0 \to \mathrm{LC}_c(\delta_1\omega^{-1} \otimes \delta_2) \to B(\delta_1, \delta_2) \to \delta_2 \otimes \delta_1\omega^{-1} \to 0.$$

Proposition III.3.8. — *Si* $i \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$, *soit* $\phi_i = \mathbf{1}_{i+p\mathbf{Z}_p}$, *et soit* $W(\delta_1, \delta_2)$ *le sous-*k_L*-espace vectoriel de* $B(\delta_1, \delta_2)$ *engendré par* ϕ_∞ *et les* ϕ_i, *pour* $i \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$. *Alors* $W(\delta_1, \delta_2) \in \mathscr{W}(B(\delta_1, \delta_2))$, *et* $R(W(\delta_1, \delta_2), B(\delta_1, \delta_2))$ *est engendré, comme* $\mathscr{O}_L[G]$*-module, par*

$$R_{\delta_1,\delta_2,0} = [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \phi_0] - \sum_{i \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} [\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \delta_1(p)^{-1}\phi_i]$$

$$R_{\delta_1,\delta_2,\infty} = [\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \delta_1(p)^{-1}\phi_\infty] - [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \phi_\infty] - \sum_{i \in (\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p)^*} [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), (\omega^{-1}\delta_1\delta_2^{-1})(i)\phi_i].$$

Corollaire III.3.9. — $I(W(\delta_1, \delta_2))/R(W(\delta_1, \delta_2), B(\delta_1, \delta_2))$ *est une présentation standard de* $B(\delta_1, \delta_2)$.

Démonstration. — Pour déduire le corollaire de la proposition, il suffit d'utiliser la prop. III.1.9.

Passons à la démonstration de la prop. III.3.8. Pour simplifier les notations, posons $\Pi = B(\delta_1, \delta_2)$, $W = W(\delta_1, \delta_2)$ et $\delta = \omega^{-1}\delta_1\delta_2^{-1}$, et notons $\cdot$ au lieu de $\cdot_{\delta_1,\delta_2}$ l'action de G sur Π.

Des calculs immédiats montrent que

$$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) \cdot \phi_i = \phi_{i+1} \quad \text{si } i \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p,$$

$$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) \cdot \phi_\infty(x) = \begin{cases} \delta(x-1) = \delta(x)\delta(1-x^{-1}) = \delta(x) & \text{si } x \notin \mathbf{Z}_p, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{Z}_p, \end{cases} = \phi_\infty(x),$$

$$\text{si } a \in (\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p)^*, \text{ alors } \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \cdot \phi_i = \omega^{-1}(a)\delta_1(a)\phi_{ai} & \text{si } i \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p, \\ \left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \cdot \phi_\infty = \delta_2(a)\phi_\infty \end{cases}$$

$$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) \cdot \phi_i = \delta_1(-1)\delta(i)^{-1}\phi_{i^{-1}} \text{ si } i \in (\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p)^*, \ \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) \cdot \phi_0 = \phi_\infty, \ \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) \cdot \phi_\infty = \phi_0.$$

On en déduit la stabilité de W par KZ.

Maintenant, on a $\delta_1(p)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \cdot \phi_i = \mathbf{1}_{pi+p^2\mathbf{Z}_p}$, et

$$\delta_1(p)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \cdot \phi_\infty(x) = \phi_\infty(x/p) = \begin{cases} \delta(x), & \text{si } x \notin p\mathbf{Z}_p, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbf{Z}_p, \end{cases} = \phi_\infty(x) + \sum_{i \in (\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p)^*} \delta(i)\phi_i(x).$$

On en déduit l'appartenance de $R_0 = R_{\delta_1,\delta_2,0}$ et $R_\infty = R_{\delta_1,\delta_2,\infty}$ à $R(W, \Pi)$.

En tant que B-module, Π est, modulo $\mathrm{LC}_c(\delta_1\omega^{-1} \otimes \delta_2)$, engendré par l'image $\overline{\phi}_\infty$ de ϕ_∞, et R_∞ devient $[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \delta_1(p)^{-1}\overline{\phi}_\infty] - [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \overline{\phi}_\infty]$. Soit $R'(W, \Pi)$ le sous-$k_L[B]$-module de $R(W, \Pi)$ engendré par R_0 et R_∞. Le quotient de $I(W)$ par $R'(W, \Pi)$ peut, grâce à la prop. III.3.6, se dévisser par la suite exacte de $k_L[B]$-modules

$$0 \to \mathrm{LC}_c(\delta_1\omega^{-1} \otimes \delta_2) \to I(W)/R'(W, \Pi) \to k_L \cdot \overline{\phi}_\infty \to 0.$$

Comme $\Pi = I(W)/R(W,\Pi)$ est un quotient de $I(W)/R'(W,\Pi)$ qui, d'après la prop. III.3.7, s'inscrit dans la même suite exacte de $k_L[B]$-modules, on en déduit que l'application naturelle de $I(W)/R'(W,\Pi)$ sur Π est un isomorphisme, et donc que $W \in \mathscr{W}(\Pi)$ et $R(W,\Pi) = R'(W,\Pi)$. Ceci permet de conclure.

Remarque III.3.10. — Soit $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ l'espace des fonctions localement constantes sur $\mathbf{Q}_p$, à valeurs dans k_L et à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$. C'est un sous-k_L-espace vectoriel de codimension 1 de $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$, stable par le sous-groupe diédral Δ de G. Le quotient $B(\delta_1,\delta_2)/\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est donc une représentation de Δ, de dimension 2, engendrée par les images $\overline{\phi}_\infty$ et $\overline{\phi}_0$ de ϕ_∞ et ϕ_0 qui sont échangées par $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. Par ailleurs $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ agit par multiplication par $\delta_1\omega^{-1}(a)\delta_2(d)$ sur $\overline{\phi}_0$ et par multiplication par $\delta_1\omega^{-1}(d)\delta_2(a)$ sur $\overline{\phi}_\infty$. On en déduit, qu'en tant que $k_L[\Delta]$-module,

$$B(\delta_1,\delta_2)/\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, k_L) \cong \mathrm{Ind}_A^\Delta\, \delta_1\omega^{-1} \otimes \delta_2,$$

où l'on a noté $\delta_1\omega^{-1}\otimes\delta_2$ le caractère $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right) \mapsto \delta_1\omega^{-1}(a)\delta_2(d)$ de A. En particulier, si $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$, ce $k_L[\Delta]$-module est irréductible, ce qui nous sera utile plus loin.

4. La steinberg. — Si $\delta_1 = \omega$ et $\delta_2 = 1$, on a $\phi_\infty = \mathbf{1}_{\mathbf{P}^1 - \mathbf{Z}_p}$, et $B(\omega,1)$ est l'espace $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1, k_L)$ des fonctions localement constantes sur $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, muni de l'action à gauche de G définie par $g\cdot\phi = \phi\star g^{-1}$, où l'action $\star$ à droite de G est donnée par $\left(\phi\star\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\right)(x) = \phi(\frac{ax+b}{cx+d})$. Le sous-espace des fonctions constantes est stable par G, et on note St le quotient : c'est *la steinberg*. Comme $\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1} = \phi_\infty + \sum_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p}\phi_i \in W(\omega,1)$, on peut définir le KZ-module $W_0(\omega,1) = W(\omega,1)/k_L\cdot\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1}$. De manière explicite, on a $W_0(\omega,1) = \oplus_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} k_L\cdot\phi_i$, avec action triviale de Z et

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i = \phi_{i+1} \quad \text{si } i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p,\\
&\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i = \phi_{ai} \quad \text{si } a\in\mathbf{Z}_p^* \text{ et si } i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p,\\
&\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i = \phi_{i^{-1}} \quad \text{si } i\in(\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p)^*, \quad \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_0 = -\sum_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p}\phi_i.
\end{aligned}$$

On déduit de la prop. III.3.8 le résultat suivant.

Proposition III.3.11. — *La représentation* St *admet une présentation standard et, plus précisément,* $W_0(\omega,1) \in \mathscr{W}^{(0)}(\mathrm{St})$ *et* $R(W_0(\omega,1),\mathrm{St})$ *est engendré par* $[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\phi_0] - \sum_{i=0}^{p-1}[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\phi_i]$.

5. Les supersingulières. — Le but de ce numéro est de démontrer que les représentations supersingulières de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ admettent une présentation standard (ceci a aussi été démontré par Breuil et Paskunas [**17**], par Vignéras [**71**], et par Ollivier [**57**]). De manière précise, on a le résultat suivant.

Proposition III.3.12. — *Si* $0\le r\le p-1$, *et si* $\chi : \mathbf{Q}_p^* \to k_L^*$, *on a des isomorphismes*

$$\Pi(r,0,\chi) \cong \frac{I(W_{r,\chi})\oplus I(W_{p-1-r,\chi\omega^r})}{(R_0,R_1)} \cong \Pi(p-1-r,0,\chi\omega^r),$$

de $k_L[G]$-modules, avec

$$R_0 = [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,Y^{p-1-r})] - [\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(1,0)]$$
$$R_1 = [\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)] - (-1)^r\chi(p)^2[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(X^r,0)]$$

Démonstration. — La démonstration de la proposition va demander un peu de préparation.

Lemme III.3.13. — *Soit $0 \leq r \leq p-1$, et soit $P_r(X) = \frac{(-X+1)\cdots(-X+r)}{r!}$. Alors, dans $\mathbf{F}_p$, on a $P_r(\infty) = \frac{(-1)^r}{r!}$ et*

$$P_r(-i) = \begin{cases} (-1)^i\binom{p-1-r}{i} & \text{si } 0 \leq i \leq p-1-r, \\ 0 & \text{si } p-r \leq i \leq p-1. \end{cases}$$

Démonstration. — Le résultat est clair si $p-r \leq i \leq p-1$ ou si $i = \infty$. Maintenant, modulo p, on a, si $0 \leq i \leq p-1-r$,

$$\binom{p-1-r}{i} = \frac{(p-1-r)\cdots(p-i-r)}{i!} = (-1)^i\frac{(r+1)\cdots(r+i)}{i!} = (-1)^i\frac{(r+i)!}{r!\cdot i!} = (-1)^iP_r(-i).$$

Ceci permet de conclure.

Lemme III.3.14. — *Soit $f(r,\chi) = \left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1 \in \Pi(r,0,\chi)$. Alors le sous-$KZ$-module de $\Pi(r,0,\chi)$ engendré par $f(r,\chi)$ est isomorphe à $W_{p-1-r,\chi\omega^r}$.*

Démonstration. — Comme $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1$ est invariant par $\left(\begin{smallmatrix}1+p\mathbf{Z}_p & \mathbf{Z}_p\\ p\mathbf{Z}_p & 1+p\mathbf{Z}_p\end{smallmatrix}\right)$, le vecteur $f(r,\chi)$ est invariant par $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1+p\mathbf{Z}_p & \mathbf{Z}_p\\ p\mathbf{Z}_p & 1+p\mathbf{Z}_p\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ qui contient $\left(\begin{smallmatrix}1+p\mathbf{Z}_p & p\mathbf{Z}_p\\ p\mathbf{Z}_p & 1+p\mathbf{Z}_p\end{smallmatrix}\right)$. De plus,

$$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot f(r,\chi) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot 1 = \chi(-1)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r$$
$$\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot f(r,\chi) = \left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1 = \chi(a)a^rf(r,\chi) = (\chi\omega^r(a))f(r,\chi)$$
$$\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)^{p-1-r}\cdot f(r,\chi) = \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{p-1-r-i}\binom{p-1-r}{i}\left(\begin{smallmatrix}p&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1$$
$$= (-1)^{p-1-r}\sum_{i=0}^{p-1}P_r(-i)\left(\begin{smallmatrix}p&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1$$
$$= -(-1)^{p-1-r}P_r(\infty)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r = -\frac{1}{r!}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r = (-1)^r(p-1-r)!\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r,$$

la dernière égalité venant de ce que, d'après le théorème de Wilson,

$$r!(p-1-r)! = (-1)^{p-1-r}(p-1)! = -(-1)^{p-1-r} = -(-1)^r.$$

(On remarquera que la formule $(-1)^{p-1} = 1$ est aussi valable pour $p = 2$.) On peut réécrire la dernière relation sous la forme

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)^{p-1-r}\cdot f(r,\chi) = \chi(-1)(-1)^r(p-1-r)!\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot f(r,\chi).$$

Il n'y a plus qu'à comparer les formules ci-dessus avec celles pour $W_{p-1-r,\chi\omega^r}$ pour conclure.

Soit alors $W = W_{r,\chi} \oplus W_{p-1-r,\chi\omega^r}$. On peut représenter un élément de W sous la forme (P,Q), où P est un polynôme de degré $\leq r$ en X et Q est un polynôme de degré $\leq p-1-r$ en Y. D'après ce qui précède, on dispose d'une application G-équivariante de $I(W)$ dans $\Pi(r,0,\chi)$ envoyant $[g,(X^r,0)]$ sur $g\cdot X^r$ et $[g,(0,Y^{p-1-r})]$ sur $g\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot 1$.

Lemme III.3.15. — *L'espace $R(W,\Pi(r,0,\chi))$ contient les relations R_0 et R_1 de la prop. III.3.12.*

Démonstration. — Pour $R_0 = [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),(0,Y^{p-1-r})] - [\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),(1,0)]$, le résultat est évident. Par ailleurs, dans $I(W)$, on a

$$[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),(0,1)] = [\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\cdot(0,1)] = \chi(-1)(-1)^r\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\cdot[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),(0,Y^{p-1-r})].$$

Le membre de droite a pour image $\chi(-1)(-1)^r\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot 1 = (-1)^r\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)\cdot X^r$ dans $\Pi(r,0,\chi)$. On en déduit le fait que $R(W,\Pi(r,0,\chi))$ contient aussi

$$R_1' = [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),(0,1)] - (-1)^r[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right),(X^r,0)].$$

Emfin, en multipliant la relation ci-dessus par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on voit que $R(W,\Pi(r,0,\chi))$ contient

$$R_1 = [\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),(0,1)] - (-1)^r\chi(p)^2[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),(X^r,0)].$$

Lemme III.3.16. — *Le $\mathscr{O}_L[G]$-module engendré par les relations R_0, R_1 contient le sous-$\mathscr{O}_L[G]$-module $(T_p\cdot I(W_{r,\chi}),0)\oplus(0,T_p\cdot I(W_{p-1-r,\chi\omega^r}))$ comme sous-module strict.*

Démonstration. — Si P est un polynôme de degré $\leq r$, on a

$$\sum_{i=0}^{p-1} P(-i)\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot R_0 = \sum_{i=0}^{p-1}\Big(P(-i)[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot(0,Y^{p-1-r})] - P(-i)[\left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),(1,0)]\Big).$$

On a de plus

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} P(-i)[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot(0,Y^{p-1-r})] &= [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\sum_{i=0}^{p-1} P(-i)(0,(Y+i)^{p-1-r})] \\ &= -(-1)^r P(\infty)[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),(0,1)],\end{aligned}$$

la dernière identité venant de ce que le polynôme $i \mapsto P(-i)(Y+i)^{p-r-1}$ est de degré $\leq p-1$, de terme de degré $p-1$ égal à $(-1)^r P(\infty)$, car P est de degré $\leq r$, et de ce que $\sum_{i=0}^{p-1} i^k = 0$ si $0 \leq k \leq p-2$, et $\sum_{i=0}^{p-1} i^{p-1} = -1$. On en déduit l'identité

$$\begin{aligned}(-1)^r P(\infty)R_1' + \sum_{i=0}^{p-1} P(-i)\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot R_0 &= -\Big(\sum_{i=0}^{p-1} P(-i)[\left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),(1,0)] + P(\infty)[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right),(X^r,0)]\Big) \\ &= -(T_p([\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),P]),0).\end{aligned}$$

De même, $R_0' = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\cdot R_0 = [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right),(0,Y^{p-1-r})] - \chi(p)^2[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(1,0)]$ appartient à (R_0,R_1), et un calcul similaire à celui effectué ci-dessus montre que, si Q est un polynôme de degré $\leq p-1-r$, alors

$$\sum_{i=0}^{p-1} Q(-i)\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot R_1 + Q(\infty)R_0' = \sum_{i=0}^{p-1} Q(-i)[\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)] + Q(\infty)[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right),(0,Y^{p-r-1})]$$
$$= (0, T_p([\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),Q])).$$

On en déduit que les $k_L[G]$-modules $\big(T_p\cdot I(W_{r,\chi}),0\big)$ et $\big(0,T_p\cdot I(W_{p-1-r,\chi\omega^r})\big)$ sont inclus dans (R_0,R_1) et la somme directe de ces deux modules est un sous-module strict de (R_0,R_1) car ni R_0 ni R_1 n'en sont éléments. Ceci permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition III.3.12. On déduit du lemme III.3.15 l'existence d'une application G-équivariante *non injective*

$$f : \frac{I(W_{r,\chi})\oplus I(W_{p-1-r,\chi\omega^r})}{(T_p\cdot I(W_{r,\chi}),0)\oplus(0,T_p\cdot I(W_{p-1-r,\chi\omega^r}))} \to \frac{I(W_{r,\chi})\oplus I(W_{p-1-r,\chi\omega^r})}{(R_0,R_1)}.$$

Le membre de gauche n'est autre que $\Pi(r,0,\chi)\oplus\Pi(r-1,0,\chi,\omega^r)$. Comme par ailleurs $R(W_{r,\chi}\oplus W_{p-1-r,\chi\omega^r},\Pi(r,0,\chi))$ contient (R_0,R_1), on en déduit l'existence d'une application G-équivariante surjective

$$g : \frac{I(W_{r,\chi})\oplus I(W_{p-1-r,\chi\omega^r})}{(R_0,R_1)} \to \Pi(r,0,\chi)$$

telle que la composée $g\circ f$ soit l'identité de $\Pi(r,0,\chi)$, et induise une application non nulle de $\Pi(r-1,0,\chi,\omega^r)$ sur $\Pi(r,0,\chi)$ (l'image de $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot Y^{p-1-r}$ est $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1\neq 0$). Comme $\Pi(r-1,0,\chi,\omega^r)$ et $\Pi(r,0,\chi)$ sont irréductibles, cela implique que

- $g\circ f$ induit un isomorphisme de $\Pi(r-1,0,\chi,\omega^r)$ sur $\Pi(r,0,\chi)$;
- le noyau de f est isomorphe à $\Pi(r-1,0,\chi,\omega^r)\cong\Pi(r,0,\chi)$;
- g est un isomorphisme ;
- $R(W_{r,\chi}\oplus W_{p-1-r,\chi\omega^r},\Pi(r,0,\chi)) = (R_0,R_1)$.

Ceci permet de conclure.

IV. Le (φ,Γ)-module attaché à une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Ce § contient la définition du (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(\Pi)$ attaché à une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. La définition est *en définitive* très simple (elle correspond à couper l'arbre de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$ au milieu de l'arête correspondant à $\mathbf{Z}_p$), et se généralise (moins simplement [**68**]) à d'autres groupes que $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Il faut quand-même vérifier que le foncteur $\Pi\mapsto\mathbf{D}(\Pi)$ ainsi obtenu donne bien les résultats voulus ; c'est l'objet du th. IV.2.1 qui fournit des résultats de finitude et du th. IV.4.1 et du cor. IV.4.11 qui montrent que les foncteurs $\Pi\mapsto\mathbf{D}(\Pi)$ et $D\mapsto\mathbf{\Pi}(D)$ sont essentiellement inverses l'un de l'autre.

IV.1. Le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$

1. P^+-modules et (φ,Γ)-modules. — Notons P^+ le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\} & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Si M est un $\mathscr{O}_L$-module topologique (sous-entendu complet) muni d'une action continue de P^+, alors M est aussi muni d'une action continue de l'algèbre de groupe complétée $\mathscr{O}_L[[\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]]$ de $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Comme l'application $\lambda \mapsto A_\lambda = \int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\,\lambda(\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right))$ induit un isomorphisme de $\mathscr{O}_L[[\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]]$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, on peut aussi voir M comme un module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ ou, de manière pédante, on peut considérer le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module $\mathbf{D}_{\mathrm{ped}}(M)$ défini par

$$\mathbf{D}_{\mathrm{ped}}(M) = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \otimes_{\mathscr{O}_L[[\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]]} M.$$

Les $\mathscr{O}_L$-modules M et $\mathbf{D}_{\mathrm{ped}}(M)$ sont naturellement isomorphes ; notons cet isomorphisme $\iota : M \to \mathbf{D}_{\mathrm{ped}}(M)$. Il existe un opérateur $\varphi : \mathbf{D}_{\mathrm{ped}}(M) \to \mathbf{D}_{\mathrm{ped}}(M)$, et si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, un opérateur $\sigma_a : \mathbf{D}_{\mathrm{ped}}(M) \to \mathbf{D}_{\mathrm{ped}}(M)$, vérifiant, si $v \in M$, les relations suivantes :

$$\varphi(\iota(v)) = \iota\left(\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\right) \quad \text{et} \quad \sigma_a(\iota(v)) = \iota\left(\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\right).$$

Rappelons par ailleurs que l'on a muni $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ d'une action de φ et Γ, avec

$$\varphi(T) = (1+T)^p - 1 \quad \text{et} \quad \sigma_a(T) = (1+T)^a - 1.$$

Lemme IV.1.1. — *Si $\lambda \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, et si $x \in M$, alors*

$$\varphi(\lambda\iota(v)) = \varphi(\lambda)\iota(v) \quad \text{et} \quad \sigma_a(\lambda\iota(v)) = \sigma_a(\lambda)\iota(v), \ \textit{si } a \in \mathbf{Z}_p^*,$$

et les actions de φ et Γ commutent entre elles. Autrement dit, $\mathbf{D}_{\mathrm{ped}}(M)$ est muni d'une structure de (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$.

Démonstration. — C'est une simple traduction de l'identité $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & ax\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et de la commutativité de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

2. Le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module $\mathbf{D}(\Pi)$. — Soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, et soit $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$. On rappelle que, si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, on note $\mathrm{I}_U(W)$ le sous-$\mathscr{O}_L$-module de $I(W)$ engendré par les $[\left(\begin{smallmatrix}p^n & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), W]$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$ vérifiant $a + p^n\mathbf{Z}_p \subset U$, et que l'on note $\mathrm{I}_U^\Pi(W)$ l'image de $\mathrm{I}_U(W)$ dans Π. Le module $\mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)^\vee$, qui va jouer un rôle fondamental dans la suite, est le plus souvent noté $D_W^\natural(\Pi)$.

Lemme IV.1.2. — *Soient $W_2 \subset W_1$ des éléments de $\mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$.*

(i) *$\mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W_2)$ est un sous-$\mathscr{O}_L$-module d'indice fini de $\mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W_1)$.*

(ii) *L'application naturelle (de restriction) $p_{W_1,W_2} : D_{W_1}^\natural(\Pi) \to D_{W_2}^\natural(\Pi)$ est surjective et son noyau est fini.*

Démonstration. — Comme $W_1 \subset W_2^{[n]}$ si $n \gg 0$, et comme $W^{[n+1]} = (W^{[n]})^{[1]}$, il suffit de vérifier le résultat pour $W_1 = W_2^{[1]}$. Mais alors, $W_1 \subset \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W_2) + \left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W_2$, et $\left(\begin{smallmatrix}p^n & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}p^{n-1} & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in P^+$ si $n \geq 1$, ce qui prouve que $\mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W_1)/\mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W_2)$ est un quotient de $\left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W_2$. Ceci démontre le (i). Le (ii) s'en déduit par dualité.

Il résulte du (ii) du lemme IV.1.2 que p_{W_1,W_2} induit un isomorphisme

$$p_{W_1,W_2} : \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D^\natural_{W_1}(\Pi) \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D^\natural_{W_2}(\Pi)$$

de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules. On définit $\mathbf{D}(\Pi)$ comme la limite projective des $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D^\natural_W(\Pi)$, pour $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, relativement aux isomorphismes p_{W_1,W_2}.

3. La structure de (φ,Γ)-module sur $\mathbf{D}(\Pi)$. — Soit $\mathrm{I}^\Pi_U(W)^\vee_0$ l'ensemble des $\mu \in \Pi^\vee$ nuls sur $\left(\begin{smallmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, pour tous $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$ tels que $a + p^n\mathbf{Z}_p \not\subset U$. On remarquera que si $U \subset V$, alors $\mathrm{I}^\Pi_U(W)^\vee_0 \subset \mathrm{I}^\Pi_V(W)^\vee_0$. Le module $\mathrm{I}^\Pi_{\mathbf{Z}_p}(W)^\vee_0$ est le plus souvent noté $D^+_W(\Pi)$. Le résultat suivant, complément du lemme III.2.4, est immédiat.

Lemme IV.1.3. — *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, et si $g \in G$ est tel que gU ne contienne pas ∞, alors $g(\mathrm{I}^\Pi_U(W)^\vee_0) = \mathrm{I}^\Pi_{gU}(W)^\vee_0$.*

En particulier, $\mathbf{Z}_p$ étant stable par $P(\mathbf{Z}_p)$, le module $D^+_W(\Pi)$ est muni d'une action de $P(\mathbf{Z}_p)$. Comme de plus, $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathbf{Z}_p = p\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Z}_p$, le module $D^+_W(\Pi)$ est un P^+-module ; il est donc muni naturellement d'une structure de (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}$.

L'application naturelle $\mathrm{R}_{U,W} : \Pi^\vee \to \mathrm{I}^\Pi_U(W)^\vee$ induit une injection de $\mathrm{I}^\Pi_U(W)^\vee_0$ dans $\mathrm{I}^\Pi_U(W)^\vee$ (un élément de $\mathrm{I}^\Pi_U(W)^\vee_0$ est nul sur $\left(\begin{smallmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, si $a + p^n\mathbf{Z}_p \not\subset U$, et un élément du noyau est aussi nul sur $\left(\begin{smallmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, si $a + p^n\mathbf{Z}_p \subset U$, et donc est identiquement nul). En particulier, $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}$ induit une injection de $D^+_W(\Pi)$ dans $D^\natural_W(\Pi)$.

Lemme IV.1.4. — *L'image de $D^+_W(\Pi)$ par $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}$ est d'indice fini dans $D^\natural_W(\Pi)$.*

Démonstration. — Si $\mu \in D^\natural_W(\Pi)$ est nul sur $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, alors μ peut, d'après le lemme III.2.3, s'étendre en un élément de $D^+_W(\Pi)$. Ceci implique que l'image de $D^+_W(\Pi)$ dans $D^\natural_W(\Pi)$ contient tous les μ nuls sur $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, et donc est d'indice inférieur ou égal à la longueur de W sur $\mathscr{O}_L$. Ceci permet de conclure.

Lemme IV.1.5. — *L'application naturelle $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D^+_W(\Pi) \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D^\natural_W(\Pi)$ est un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme IV.1.4.

Comme $D^+_W(\Pi)$ est muni d'une structure de (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}$, cela permet de munir le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module $\mathbf{D}(\Pi)$ d'une structure de (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

Remarque IV.1.6. — Si $W_1 \subset W_2$, alors $D^+_{W_2}(\Pi)$ est d'indice fini dans $D^+_{W_1}(\Pi)$, d'où un isomorphisme $\iota_{W_2,W_1} : \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D^+_{W_2}(\Pi) \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D^+_{W_1}(\Pi)$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules commutant à l'action de P^+. Comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D^+_W(\Pi) \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D^\natural_W(\Pi)$, on aurait pu définir le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module $\mathbf{D}(\Pi)$, avec sa structure de (φ,Γ)-module, comme la limite inductive des $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D^+_W(\Pi)$ relativement aux isomorphismes ι_{W_2,W_1}.

4. Le morphisme $\beta_{\mathbf{Z}_p} : \Pi^\vee \to \mathbf{D}(\Pi)$. — On dispose pour tout $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$ d'une application naturelle

$$\alpha_{\mathbf{Z}_p,W} : D_W^\natural(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi) = \mathscr{O}_\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_\mathscr{E}^+} D_W^\natural(\Pi),$$

envoyant x sur $1 \otimes x$, et la composée $\alpha_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W} : \Pi^\vee \to \mathbf{D}(\Pi)$ ne dépend, par définition de $\mathbf{D}(\Pi)$, pas du choix de W. On note cette application $\beta_{\mathbf{Z}_p}$.

On note simplement D le (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(\Pi)$. Il est muni (cf. n° 4 du § I.3) d'une action de $P(\mathbf{Z}_p)$ définie par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = (1+T)^b \sigma_a(z)$.

Proposition IV.1.7. — *On a $\beta_{\mathbf{Z}_p} \circ g = g \circ \beta_{\mathbf{Z}_p}$, si $g \in P(\mathbf{Z}_p)$.*

Démonstration. — Notons $\alpha^0_{\mathbf{Z}_p,W} : D_W^+(\Pi) \to D = \mathscr{O}_\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_\mathscr{E}^+} D_W^+(\Pi)$, l'application $x \mapsto 1 \otimes x$. Par définition de la structure de (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_\mathscr{E}^+} D_W^+(\Pi)$, on a $g \circ \alpha^0_{\mathbf{Z}_p,W} = \alpha^0_{\mathbf{Z}_p,W} \circ g$, si $g \in P^+$, et donc, *a fortiori*, si $g \in P(\mathbf{Z}_p)$. De plus, $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W} : D_W^+(\Pi) \to D_W^\natural(\Pi)$ induit un isomorphisme

$$\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathbf{Z}_p,W} : \mathscr{O}_\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_\mathscr{E}^+} D_W^+(\Pi) \cong \mathscr{O}_\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_\mathscr{E}^+} D_W^\natural(\Pi),$$

et on a $\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \alpha^0_{\mathbf{Z}_p,W} = \alpha_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}$ sur $D_W^+(\Pi)$. Enfin, $g \circ \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathbf{Z}_p,W} = \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathbf{Z}_p,W} \circ g$, pour tout $g \in P(\mathbf{Z}_p)$, par définition.

Maintenant, soient $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P(\mathbf{Z}_p)$ et $\mu \in \Pi^\vee$. Si $b \in \mathbf{Z}_p$, soit $\nu(b) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1$. Alors, si n est assez grand, $\nu(ap^n) \circ \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}(\mu)$ est dans l'image de $D_W^+(\Pi)$. Or on a $\nu(ap^n) = g\nu(p^n)g^{-1}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\nu(ap^n) \circ g \circ \beta_{\mathbf{Z}_p}(\mu) &= g \circ \nu(p^n) \circ \alpha_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}(\mu) \\
&= g \circ \alpha_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \nu(p^n) \circ \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}(\mu) \\
&= g \circ \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \alpha^0_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \mathrm{R}^{-1}_{\mathbf{Z}_p,W}(\nu(p^n) \circ \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}(\mu)) \\
&= \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \alpha^0_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \mathrm{R}^{-1}_{\mathbf{Z}_p,W}\big(g\nu(p^n)g^{-1} \circ \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}(g \cdot \mu)\big) \\
&= \nu(ap^n) \circ \alpha_{\mathbf{Z}_p,W} \circ \mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}(g \cdot \mu) = \nu(ap^n) \circ \beta_{\mathbf{Z}_p}(g \cdot \mu)
\end{aligned}$$

On a donc démontré que $\nu(ap^n) \circ g \circ \beta_{\mathbf{Z}_p}(\mu) = \nu(ap^n) \circ \beta_{\mathbf{Z}_p}(g \cdot \mu)$ dans D. On conclut en utilisant le fait que $\nu(ap^n)$ agit par multiplication par $(1+T)^{ap^n} - 1$ sur D, et que $(1+T)^{ap^n} - 1$ est inversible dans $\mathscr{O}_\mathscr{E}$.

5. L'opérateur ψ sur $\mathbf{D}(\Pi)$

Lemme IV.1.8. — *L'application $(\mu_0,\dots,\mu_{p-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i$ de $(\Pi^\vee)^p$ dans $\Pi^\vee$ induit une injection de $(D_W^+(\Pi))^p$ dans $D_W^+(\Pi)$, et le conoyau est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$.*

Démonstration. — L'image de $D_W^+(\Pi)$ par $\mu \mapsto \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu$ est $\mathrm{I}^\Pi_{i+p\mathbf{Z}_p}(W)^\vee_0$, et l'injectivité de la restriction de $(\mu_0,\dots,\mu_{p-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i$ à $(D_W^+(\Pi))^p$ suit de ce que les $i + p\mathbf{Z}_p$ sont disjoints deux à deux.

Maintenant, d'après le lemme III.2.3, si $\mu \in I^{\Pi}_{i+p\mathbf{Z}_p}(W)^\vee$ est nul sur $[\left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), W]$, alors μ peut se prolonger par 0 en un élément λ_i de $\Pi^\vee$, auquel cas $\lambda_i = \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i$, avec $\mu_i \in D^+_W(\Pi)$. On en déduit le fait que l'image de $(\mu_0, \dots, \mu_{p-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i$ contient les $\mu \in D^+_W(\Pi)$ nuls sur W et $\left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$ pour $0 \leq i \leq p-1$. Le conoyau de l'application est donc un quotient de $W + \sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, et par suite est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition IV.1.9. — $\mathbf{D}(\Pi)$ *est un* (φ, Γ)*-module étale.*

Démonstration. — Le lemme IV.1.8 se traduit, après tensorisation par $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, par le fait que l'application $(x_0, \dots, x_{p-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(x_i)$ est un isomorphisme de $\mathbf{D}(\Pi)^p$ sur $\mathbf{D}(\Pi)$, ce qui permet de conclure.

Rappelons que l'on a défini un opérateur $\psi_W : D^\natural_W(\Pi) \to D^\natural_W(\Pi)$. Par ailleurs, le (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(\Pi)$ étant étale, il est muni d'un opérateur ψ. La prop. IV.1.11 ci-dessous permet de relier ces deux opérateurs, ce qui nous permettra (prop. IV.3.2) de donner une description de $\Pi^\vee$ en termes de $\mathbf{D}(\Pi)$.

Soit $M \subset D^+_W(\Pi)$ l'image de $(D^+_W(\Pi))^p$ par $(\mu_0, \dots, \mu_{p-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i$.

Lemme IV.1.10. — *Si* $\mu \in M$, *alors* $\alpha_{\mathbf{Z}_p, W}(\psi_W(\mu)) = \psi(\alpha_{\mathbf{Z}_p, W}(\mu))$.

Démonstration. — Si $v \in I^W_{\mathbf{Z}_p}(\Pi)$, alors

$$\Big\langle \psi_W\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i\Big), v \Big\rangle = \sum_{i=0}^{p-1} \Big\langle \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i, \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \Big\rangle = \sum_{i=0}^{p-1} \Big\langle \mu_i, \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i/p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \Big\rangle.$$

Or μ_i est identiquement nul sur $\mathrm{I}^{\Pi}_{\frac{-i}{p}+\mathbf{Z}_p}(W)$, si $i \in \mathbf{Z}_p^*$. On en déduit que tous les termes de la somme ci-dessus sont nuls, sauf celui correspondant à $i = 0$ qui vaut $\langle \mu_0, v \rangle$; on a donc

$$\psi_W\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i\Big) = \mu_0.$$

Par ailleurs, par définition de la structure de (φ, Γ)-module sur $\mathbf{D}(\Pi)$, on a

$$\alpha_{\mathbf{Z}_p, W}\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i\Big) = \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(\alpha_{\mathbf{Z}_p, W}(\mu_i)),$$

et donc

$$\psi\Big(\alpha_{\mathbf{Z}_p, W}\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i\Big)\Big) = \alpha_{\mathbf{Z}_p, W}(\mu_0) = \alpha_{\mathbf{Z}_p, W}\Big(\psi_W\Big(\sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_i\Big)\Big).$$

Ceci permet de conclure.

Proposition IV.1.11. — *Si* $\mu \in D^\natural_W(\Pi)$, *alors* $\alpha_{\mathbf{Z}_p, W}(\psi_W(\mu)) = \psi(\alpha_{\mathbf{Z}_p, W}(\mu))$.

Démonstration. — D'après le lemme IV.1.8, le module $D^\natural_W(\Pi)/M$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$. Il existe donc $n \in \mathbf{N}$ tel que $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & p^n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)D^\natural_W(\Pi) \subset M$. Soit alors $\mu \in D^\natural_W(\Pi)$. En utilisant la définition de la structure de (φ,Γ)-module sur $D(\Pi)$, puis le lemme III.2.7, puis le lemme IV.1.10, et de nouveau la définition de la structure de (φ,Γ)-module sur $D(\Pi)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left((1+T)^{p^{n-1}}-1\right)\alpha_{\mathbf{Z}_p,W}(\psi_W(\mu)) &= \alpha_{\mathbf{Z}_p,W}\left(\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & p^{n-1}\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\psi_W(\mu)\right)\\ &= \alpha_{\mathbf{Z}_p,W}\left(\psi_W\left(\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & p^n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\mu\right)\right) = \psi\left(\alpha_{\mathbf{Z}_p,W}\left(\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & p^n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\mu\right)\right)\\ &= \psi(((1+T)^{p^n}-1)\alpha_{\mathbf{Z}_p,W}(\mu)) = \left((1+T)^{p^{n-1}}-1\right)\psi(\alpha_{\mathbf{Z}_p,W}(\mu))\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

Proposition IV.1.12. — *On a* $\beta_{\mathbf{Z}_p}\circ\left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \psi\circ\beta_{\mathbf{Z}_p}$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme III.2.8 et de la prop. IV.1.11.

IV.2. Propriétés de finitude du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$

1. Calcul des (φ,Γ)-modules attachés aux irréductibles de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$. — Si $\lambda \in k_L$, et si $0 \leq r \leq p-1$, on pose $\Pi(r,\lambda) = \Pi(r,\lambda,1)$. D'après les résultats de Barthel-Livné et Breuil rappelés au n° 1 du § III.3, toute k_L-représentation absolument irréductible de dimension infinie de G est isomorphe (à un espace près de dimension au plus 1) à une tordue d'une $\Pi(r,\lambda)$ pour un choix convenable de r et λ.

Théorème IV.2.1. — *Si $0 \leq r \leq p-1$, et si $\lambda \in k_L$, alors en tant que $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}$-modules, on a*

$$D^\natural_{W_r}(\Pi(r,\lambda)) \cong \begin{cases} k^+_{\mathscr{E}} \oplus k^+_{\mathscr{E}} & \text{si } \lambda = 0,\\ k^+_{\mathscr{E}} \oplus k^+_{\mathscr{E}}/T & \text{si } \lambda \neq 0.\end{cases}$$

Démonstration. — Le module $D^\natural_{W_r}(\Pi(r,\lambda))$ étant un $k^+_{\mathscr{E}}$-module compact, l'énoncé ci-dessus est équivalent à

$$\dim_{k_L} D^\natural_{W_r}(\Pi(r,\lambda))/T = 2 \quad\text{et}\quad \dim_{k_L}\mathrm{Ker}\,T^p_{\big|D^\natural_{W_r}(\Pi(r,\lambda))} = \begin{cases}0 & \text{si } \lambda = 0,\\ 1 & \text{si } \lambda \neq 0.\end{cases}$$

Comme $T = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1$, cet énoncé est aussi équivalent, par dualité, à

$$\dim_{k_L} I^{\Pi(r,\lambda)}_{\mathbf{Z}_p}(W_r)^{\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1} = 2 \quad\text{et}\quad \dim_{k_L} I^{\Pi(r,\lambda)}_{\mathbf{Z}_p}(W_r)/\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)^p = \begin{cases}0 & \text{si } \lambda = 0,\\ 1 & \text{si } \lambda \neq 0.\end{cases}$$

Le calcul de la dimension du premier (resp. second) de ces espaces fait l'objet du cor. IV.2.9 (resp. IV.2.11). L'ingrédient principal est l'étude des invariants et des co-invariants de l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ sur les deux premiers termes de la suite exacte

$$0 \to Y_{r,\lambda} \to I_{\mathbf{Z}_p}(W_r) \to I^{\Pi(r,\lambda)}_{\mathbf{Z}_p}(W_r) \to 0,$$

où si $\lambda \in k_L$, on a noté $Y_{r,\lambda} = I_{\mathbf{Z}_p}(W_r) \cap (T_p - \lambda) \cdot I(W_r)$ le noyau de l'application naturelle de $I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$ dans $\Pi(r, \lambda)$.

Remarque IV.2.2. — (i) La démonstration qui suit traite sur le même pied les séries principales et les supersingulières. Dans le cas des séries principales, il y a une démonstration nettement plus directe (cf. prop. IV.4.17).

(ii) Les calculs ne sont pas sans rappeler ceux de Breuil [**13**] menant à l'irréductibilité de $\Pi(r, 0, \chi)$.

(iii) Le théorème ne dit rien sur les actions de φ et Γ ; ceci fait l'objet des prop. VII.4.2 et IV.4.17. (Cf. aussi [**6**].)

Lemme IV.2.3. — *Si* $0 \leq r \leq p-1$, *alors* $W_r^{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1}$ *est le* k_L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par* 1, *et* $W_r/(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1)$ *est un* k_L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par l'image de* X^r.

Démonstration. — On a $(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) - 1) \cdot X^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$, et comme $\binom{k}{j}$ n'est pas nul modulo p si $k \leq r \leq p-1$, cela permet de conclure.

Comme l'intersection du semi-groupe P^+ avec K est $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, et comme

$$P^+/\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \coprod_{n\in\mathbf{N}} \left\{\left(\begin{smallmatrix}p^n & i\\0&1\end{smallmatrix}\right), \text{ avec } 0 \leq i \leq p^n - 1\right\},$$

on a une décomposition naturelle de $I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$ sous la forme

$$I_{\mathbf{Z}_p}(W_r) = \oplus_{n\in\mathbf{N}} I^{(n)}(W_r), \quad \text{avec } I^{(n)}(W_r) = \oplus_{i=0}^{p^n-1} [\left(\begin{smallmatrix}p^n & i\\0&1\end{smallmatrix}\right), W_r],$$

et, si $n \in \mathbf{N}$, on note $\pi_n : I_{\mathbf{Z}_p}(W_r) \to I^{(n)}(W_r)$ la projection naturelle.

Lemme IV.2.4. — *Si* $n \geq 1$, *alors* $I^{(n)}(W_r)^{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1}$ *est le* k_L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par* $f_n = \sum_{i=0}^{p^n-1} [\left(\begin{smallmatrix}p^n & i\\0&1\end{smallmatrix}\right), 1]$, *et* $I^{(n)}(W_r)/(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) - 1)$ *est un* k_L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par l'image de* $[\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\0&1\end{smallmatrix}\right), X^r]$.

Démonstration. — Le $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$-module $I^{(n)}(W_r)$ étant induit à partir de W_r, on peut, comme me l'a fait remarquer le rapporteur, utiliser le lemme de Shapiro pour déduire le résultat du lemme précédent. On peut aussi procéder directement comme suit. Comme $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p^n & i\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}p^n & i+1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, cela implique que $\phi = \sum_{i=0}^{p^n-1} [\left(\begin{smallmatrix}p^n & i\\0&1\end{smallmatrix}\right), P_i]$ est fixe par $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ si et seulement si $P_{i+1} = P_i$ si $0 \leq i \leq p^{n-2}$, et si $[\left(\begin{smallmatrix}p^n & p^n\\0&1\end{smallmatrix}\right), P_0] = [\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\0&1\end{smallmatrix}\right), P_0]$. En faisant agir $\left(\begin{smallmatrix}p^{-n} & 0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ sur cette dernière égalité, on voit qu'elle est équivalente à $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) \cdot P_0 = P_0$ dans W_r. D'après le lemme IV.2.3, cela implique que P_0 est constant. On en déduit que $I^{(n)}(W_r)^{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1}$ est le k_L-espace vectoriel de dimension 1 engendré par f_n, et, $I^{(n)}(W_r)$ étant de dimension finie, que $I^{(n)}(W_r)/(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) - 1)$ est un

k_L-espace vectoriel de dimension 1. Pour conclure, il suffit donc de prouver que $[\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), x^r]$ n'est pas dans l'image de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1$. Or

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot \Big(\sum_{i=0}^{p^n-1} [\left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), P_i] \Big) = [\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), X^r]$$

équivaut à $P_{i+1} = P_i$ si $0 \leq i \leq p^{n-2}$, et $[\left(\begin{smallmatrix} p^n & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), P_0] - [\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), P_0] = [\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), X^r]$. Cette dernière relation est équivalente à $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot P_0 = X^r$ dans W_r, et ceci n'est pas possible, d'après le lemme IV.2.3. Ceci permet de conclure.

Lemme IV.2.5. — *Si $0 \leq r \leq p-1$, et si $\lambda \in k_L$, alors*

$$Y_{r,\lambda}^{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1} = \begin{cases} \oplus_{n=0}^{+\infty} k_L \cdot (f_{n+1} - \lambda f_n) & \text{si } r \neq 0, \\ \oplus_{n=1}^{+\infty} k_L \cdot (f_{n+1} - \lambda f_n + f_{n-1}) & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

Démonstration. — L'argument est un peu différent suivant que r est nul ou pas.

• Si $r \neq 0$, on a $(T_p - \lambda) \cdot f_n = f_{n+1} - \lambda f_n$, et on est donc ramené à prouver que $f_0 \notin (T_p - \lambda) \cdot I(W_r)$, ce qui est clair car un élément de $(T_p - \lambda) \cdot I(W_r)$ a au moins deux composantes non nulles.

• Si $r = 0$, alors $(T_p - \lambda) \cdot f_n = f_{n+1} - \lambda f_n + f_{n-1}$, si $n \geq 1$. On est donc ramené à prouver que $(k_L \cdot f_0 \oplus k_L \cdot f_1) \cap ((T_p - \lambda) \cdot I(W_r)) = 0$. Or,

$$af_0 + bf_1 = -b[(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right), 1] + (a + \lambda b)[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1] + (T_p - \lambda) \cdot f_0,$$

et comme un élément de $(T_p - \lambda) \cdot I(W_r)$ a au moins deux composantes non nulles à distance ≥ 2, l'appartenance de $af_0 + bf_1$ à $(T_p - \lambda) \cdot I(W_r)$ implique $b = a + \lambda b = 0$, ce qui permet de conclure.

Corollaire IV.2.6. — *Si $0 \leq r \leq p-1$, et si $\lambda \in k_L$, alors*

$$\dim_{k_L} \Big((I_{\mathbf{Z}_p}(W_r))^{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1} / Y_{r,\lambda}^{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1} \Big) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \neq 0, \\ 2 & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

Lemme IV.2.7. — (i) $\pi_{n+1}(T_p(\phi)) \in \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^{p^n} \cdot I^{(n+1)}(W_r)$, *si* $\phi \in I^{(n)}(W_r)$.

(ii) *Si $n \geq 1$, si $\phi \in I^{(n)}(W_r)$, et si $\pi_{n-1}(T_p(\phi)) \in \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I^{(n-1)}(W_r)$, alors $\phi \in \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I^{(n)}(W_r)$.*

Démonstration. — Pour démontrer le (i), il suffit, par linéarité, il suffit de traiter le cas de $\phi = [\left(\begin{smallmatrix} p^n & j \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), P]$, et on a alors

$$\pi_{n+1}(T_p(\phi)) = \sum_{i=0}^{p-1} P(-i)[\left(\begin{smallmatrix} p^n & j \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1] = \sum_{i=0}^{p-1} P(-i)[\left(\begin{smallmatrix} p^{n+1} & j+p^n i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), 1].$$

Il y a alors deux cas.

• Si $r \neq 0$, alors $1 = \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot X$, et donc

$$[\left(\begin{smallmatrix}p^{n+1} & j+p^n i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),1] = [\left(\begin{smallmatrix}p^{n+1} & j+p^n i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot X]$$
$$= \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & p^{n+1}\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot [\left(\begin{smallmatrix}p^{n+1} & j+p^n i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), X] \in \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right)^{p^{n+1}} \cdot I^{(n+1)}(W_r).$$

• Si $r = 0$, alors P est constant et

$$\sum_{i=0}^{p-1} [\left(\begin{smallmatrix}p^{n+1} & j+p^n i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), 1] = -\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & p^n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{p-1} i[\left(\begin{smallmatrix}p^{n+1} & j+p^n i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), 1]\right) \in \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right)^{p^n} \cdot I^{(n+1)}(W_r).$$

Ceci termine la preuve du (i). Passons à celle du (ii). L'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ commute à celles de T_p et π_{n-1}. L'énoncé à démontrer est donc équivalent à l'injectivité de

$$\pi_{n-1} \circ T_p : I^{(n)}(W_r)/\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \to I^{(n-1)}(W_r)/\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right),$$

et comme les deux espaces sont de dimension 1 sur k_L (cf. lemme IV.2.4), cette énoncé est aussi équivalent à la surjectivité de $\pi_{n-1} \circ T_p$. Or on a

$$\pi_{n-1}(T_p[\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), X^r]) = [\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right), X^r] = [\left(\begin{smallmatrix}p^{n-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), X^r],$$

ce qui permet, grâce au lemme IV.2.4, de conclure.

Lemme IV.2.8. — *Si $0 \leq r \leq p-1$, et si $\lambda \in k_L$, alors*

$$\dim_{k_L}\left(\left(Y_{r,\lambda} \cap \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)\right)/\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot Y_{r,\lambda}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \neq 0, \\ 0 & \text{si } r = 0, \end{cases}$$

et l'espace ci-dessus est engendré par $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot (T_p - \lambda) \cdot ([\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), X^r])$ dans tous les cas.

Démonstration. — Une comparaison des supports de ϕ et $T_p \cdot \phi$ montre que l'application $\phi \mapsto (T_p - \lambda) \cdot \phi$ est injective, et que $(T_p - \lambda) \cdot \phi \in I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$ si et seulement si $\phi \in I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$ et $\pi_0(\phi) = [\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), P]$, avec $P(\infty) = 0$.

Soit $\phi \in I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$. Si $\ell \in \mathbf{N}$, soit $\phi_\ell = \pi_\ell(\phi)$. Il existe alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $\phi = \sum_{\ell=0}^{n} \phi_\ell$. Supposons dorénavant $\phi \in Y_{r,\lambda} \cap \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$, ce qui implique $\pi_\ell((T_p - \lambda) \cdot \phi) \in \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I^{(\ell)}(W_r)$ quel que soit $\ell \in \mathbf{N}$. Il y a deux cas.

– Si $\lambda \neq 0$, on peut écrire ϕ_n sous la forme

$$\phi_n = -\lambda^{-1}\Big(\pi_n((T_p - \lambda) \cdot \phi) - \pi_n(T_p \cdot \phi)\Big),$$

et le (i) du lemme IV.2.7 permet d'en déduire que $\phi_n \in \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I^{(n)}(W_r)$, et, grâce à une récurrence descendante immédiate, que $\phi \in \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$.

– Si $\lambda = 0$, on a $\pi_\ell(T_p \cdot \phi) \in \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I^{(\ell)}(W_r)$ quel que soit $\ell \in \mathbf{N}$. On en déduit, grâce au (i) du lemme IV.2.7, l'appartenance de

$$\pi_{n-1}(T_p \cdot \phi_n) = \pi_{n-1}(T_p \cdot \phi) - \pi_{n-1}(T_p \cdot \phi_{n-2})$$

à $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I^{(n-1)}(W_r)$, et donc, grâce au (ii) du lemme IV.2.7, celles de ϕ_n à $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I^{(n)}(W_r)$ et de ϕ à $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$.

En conclusion, dans tous les cas

$$Y_{r,\lambda} \cap \left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r) = \left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot (T_p-\lambda)\cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r).$$

Comme $(T_p-\lambda)\cdot[1,X^r]$ est un supplémentaire de $Y_{r,\lambda}$ dans $(T_p-\lambda)\cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$, l'espace qui nous intéresse est donc engendré par

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot(T_p-\lambda)\cdot\left[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),X^r\right] = (T_p-\lambda)\cdot\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\left[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),X^r\right],$$

et sa dimension est donc 0 ou 1 suivant que $(T_p-\lambda)\cdot\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\left[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),X^r\right]$ appartient ou pas à $\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot Y_{r,\lambda}$.

– Si $r=0$, on a $(T_p-\lambda)\cdot\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\left[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),X^r\right]=0$, et cette dimension est nulle.

– Si $r\neq 0$, l'appartenance de $(T_p-\lambda)\cdot\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\left[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),X^r\right]$ à $\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot Y_{r,\lambda}$ est équivalente, car $T_p-\lambda$ est injectif, à l'existence de $\phi\in I_{\mathbf{Z}_p}(W)$ tel que l'on ait $\pi_0(\phi)=\left[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),P\right]$, avec $P(\infty)=0$, et tel que $\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\left(\phi-\left[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),X^r\right]\right)=0$. Ceci est impossible car, en appliquant π_0 à cette relation, on tombe sur la relation $\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot(P-X^r)=0$ dans W_r, et celle-ci implique $P-X^r$ constant, en contradiction avec l'hypothèse $P(\infty)=0$.

Ceci permet de conclure.

Corollaire IV.2.9. — *Le k_L-espace vectoriel $I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi(r,\lambda)}(W_r)^{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1}$ est de dimension 2, engendré par $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1$ et $\lambda\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r-\sum_{i=0}^{p-1}(-i)^r\left(\begin{smallmatrix}p&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r$, si $0\leq r\leq p-1$ et si $\lambda\in k_L$.*

Démonstration. — La suite exacte

$$0\to Y_{r,\lambda}\to I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)\to I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi(r,\lambda)}(W_r)\to 0$$

induit, en prenant les invariants et les co-invariants sous l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, la suite exacte

$$0\to\frac{(I_{\mathbf{Z}_p}(W_r))^{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1}}{Y_{r,\lambda}^{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1}}\to I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi(r,\lambda)}(W_r)^{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)=1}\to\mathrm{Ker}\left(\frac{Y_{r,\lambda}}{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1}\to\frac{I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)}{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1}\right)\to 0.$$

On conclut en utilisant le cor. IV.2.6 et le lemme IV.2.8 et l'isomorphisme

$$\mathrm{Ker}\left(\frac{Y_{r,\lambda}}{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1}\to\frac{I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)}{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1}\right)\cong\left(Y_{r,\lambda}\cap\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)\right)/\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot Y_{r,\lambda}).$$

Lemme IV.2.10. — *Si $0\leq r\leq p-1$ et $\lambda\in k_L$, alors*

$$\dim_{k_L}\left(I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)/\left(Y_{r,\lambda}+\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)^p\cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)\right)\right)=\begin{cases}1 & \text{si } \lambda\neq 0,\\ 0 & \text{si } \lambda=0.\end{cases}$$

Démonstration. — Commençons par traiter le cas $\lambda=0$. Soit $\phi=\left[\left(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),X^j\right]$, avec $0\leq j\leq r$, $n\in\mathbf{N}$ et $0\leq i\leq p^n-1$. Si $j\leq r-1$, il existe Q de degré $j+1\leq r$ tel que $Q(X+1)-Q(X)=X^j$. On a alors

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)^{p^n}\cdot\left[\left(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),Q\right]=\left(\left(\begin{smallmatrix}1&p^n\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot\left[\left(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),Q\right]=\left[\left(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)Q\right]=\left[\left(\begin{smallmatrix}p^n&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),X^j\right],$$

ce qui prouve que $[\left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), X^j] \in Y_{r,0} + \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r))$. Par ailleurs,

$$[\left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), X^r] = T_p \cdot [\left(\begin{smallmatrix} p^{n+1} & pi \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), X^r] - \pi_{n+2}\big(T_p \cdot [\left(\begin{smallmatrix} p^{n+1} & pi \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), X^r]\big),$$

et le lemme IV.2.7 permet de montrer que $[\left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), X^r] \in Y_{r,0} + \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r))$. Ceci permet de conclure dans le cas $\lambda = 0$.

Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. Considérons la forme linéaire sur $I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$ envoyant $[\left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), P]$ sur $\lambda^{-n} P(\infty)$. Un calcul immédiat montre que cette forme linéaire est identiquement nulle sur $Y_{r,\lambda} + \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$, et donc que la dimension de $I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)/\big(Y_{r,\lambda} + \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^p \cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)\big)$ est ≥ 1. Par ailleurs, si $\phi \in I^{(n)}(W_r)$ et si $n \geq 1$, alors, d'après le (i) du lemme IV.2.7,

$$\pi_{n+1}(T_p \cdot \phi) = (T_p - \lambda) \cdot \phi - \pi_{n-1}(T_p \cdot \phi) + \lambda\phi \in \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^p \cdot I^{(n+1)}(W_r).$$

On en déduit que, modulo $Y_{r,\lambda} + \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^p \cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)$, on a $\phi = \lambda^{-1}\pi_{n-1}(T_p \cdot \phi)$, ce qui prouve que $I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)/(Y_{r,\lambda} + \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^p \cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r))$ est un quotient de $k_L \cdot [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), X^r]$. Ceci permet de conclure.

Corollaire IV.2.11. — *Si $0 \leq r \leq p-1$ et $\lambda \in k_L$, alors*

$$\dim_{k_L} \left(I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi(r,\lambda)}(W_r)/\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^p\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \neq 0, \\ 0 & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit d'utiliser le lemme précédent et l'isomorphisme

$$I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi(r,\lambda)}(W_r)/\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^p \cong I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)/\big(Y_{r,\lambda} + \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^p \cdot I_{\mathbf{Z}_p}(W_r)\big).$$

2. Exactitude du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$

Proposition IV.2.12. — *Si $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ est une suite exacte d'éléments de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, alors la suite*

$$0 \to \mathbf{D}(\Pi_2) \to \mathbf{D}(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi_1) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. — Comme Π_1, Π_2 ont des présentations standard, la rem. III.1.17 nous fournit $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, $W_1 \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi_1)$ et $W_2 \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi_2)$ tels que les suites

$$0 \to W_1 \to W \to W_2 \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to R^{(0)}(W_1, \Pi_1) \to R^{(0)}(W, \Pi) \to R^{(0)}(W_2, \Pi_2) \to 0$$

soient exactes.

Soit $R^+(W, \Pi)$ le noyau de $I_{\mathbf{Z}_p}(W) \to I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi}(W)$. D'après le lemme III.1.10, $R^+(W, \Pi)$ est la somme directe des $h \cdot R^{(0)}(W, \Pi)$, pour $h \in P^+/(KZ \cap P^+)$, et donc la suite

$$0 \to R^+(W_1, \Pi_1) \to R^+(W, \Pi) \to R^+(W_2, \Pi_2) \to 0$$

est exacte. La suite $0 \to I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi_1}(W_1) \to I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi}(W) \to I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi_2}(W_2) \to 0$ est elle-aussi exacte. Par dualité, il en est de même de la suite $0 \to D_{W_2}^{\natural}(\Pi_2) \to D_W^{\natural}(\Pi) \to D_{W_1}^{\natural}(\Pi_1) \to 0$. Pour conclure à l'exactitude de la suite $0 \to \mathbf{D}(\Pi_2) \to \mathbf{D}(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi_1) \to 0$, il suffit de remarquer que $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est plat au-dessus de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ en tant que complété d'un localisé.

Théorème IV.2.13. — *L'application* $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ *est un foncteur exact contravariant de* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ *dans* $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$.

Démonstration. — Étant données les prop. IV.1.9 et IV.2.12, il suffit de prouver que $\mathbf{D}(\Pi)$ est de longueur finie, si Π est irréductible. Cela résulte du th. IV.2.1.

On étend le foncteur $\mathbf{D}$ aux objets de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$ et $\mathrm{Rep}_L G$ de la manière suivante :
- si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$, alors $\mathbf{D}(\Pi)$ est la limite projective des $\mathbf{D}(\Pi/p^k\Pi)$,
- si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$, et si $\Pi_0 \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$ est un $\mathscr{O}_L$-réseau de Π, alors $\mathbf{D}(\Pi) = L\cdot\mathbf{D}(\Pi_0)$.

On obtient ainsi des foncteurs exacts contravariants de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$ dans $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ et $\mathrm{Rep}_L G$ dans $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. De plus, en passant au module de Tate (si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$) et en tensorisant par L (si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$), on obtient une application $\beta_{\mathbf{Z}_p} : \Pi^* \to \mathbf{D}(\Pi)$ vérifiant les propriétés de commutation des prop. IV.1.7 et IV.1.12.

3. Le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$. — On définit $\mathbf{V}(\Pi)$ comme le dual de Tate de $\mathbf{V}(\mathbf{D}(\Pi))$. Ce qui précède se traduit alors, grâce à l'équivalence de catégories de Fontaine, en l'énoncé suivant.

Théorème IV.2.14. — *L'application* $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ *est un foncteur exact covariant*
- *de* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ *dans* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,
- *de* $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$ *dans* $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,
- *de* $\mathrm{Rep}_L G$ *dans* $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

IV.3. Compléments

1. Le morphisme $\beta_{\mathbf{Q}_p} : \Pi^\vee \to \mathbf{D}(\Pi)\boxtimes\mathbf{Q}_p$. — Soient $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ et $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$. L'application $\alpha_{\mathbf{Z}_p,W}(x)$ de $D^\natural_W(\Pi)$ dans $\mathbf{D}(\Pi)$ n'est pas, en général, injective (son noyau est le sous-$\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}$-module de torsion de $D^\natural_W(\Pi)$), mais on a le résultat suivant.

Lemme IV.3.1. — *Le noyau de* $\alpha_{\mathbf{Z}_p,W} : D^\natural_W(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi)$ *est un* $\mathscr{O}_L$*-module de longueur finie.*

Démonstration. — Il suit du lemme IV.1.2 que, si $W \subset W'$, alors $\mathrm{Ker}\,\alpha_{\mathbf{Z}_p,W}$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\,\alpha_{\mathbf{Z}_p,W'}$ l'est. On en déduit la stabilité de la propriété « $\mathrm{Ker}\,\alpha_{\mathbf{Z}_p,W}$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ » par extensions ; le th. IV.2.1 permet alors de conclure puisqu'il montre que le T-module de torsion de $D^\natural_W(\Pi)$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, si Π est irréductible.

On note $J^\vee(\Pi)$ le $\mathscr{O}_L[A]$-module $(\Pi^\vee)^U$; c'est le dual du *module de Jacquet* $J(\Pi)$ introduit au § 1 du § VII.1

Proposition IV.3.2. — *Soient* $\delta = \delta_\Pi^{-1}$ *et* $D = \mathbf{D}(\Pi)$.

(i) *L'application* $\mu \mapsto \beta_{\mathbf{Q}_p}(\mu) = \left(\left(\beta_{\mathbf{Z}_p}\circ\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right)\cdot\mu\right)_{n\in\mathbf{N}}$ *définit un morphisme* B*-équivariant de* $\Pi^\vee$ *dans* $D\boxtimes_\delta\mathbf{Q}_p$.

(ii) *Le noyau de* $\beta_{\mathbf{Q}_p}$ *est* $J^\vee(\Pi)$ *et est de longueur finie sur* $\mathscr{O}_L$.

(iii) *L'image de $\beta_{\mathbf{Q}_p}$ est incluse dans $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$, contient $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ qui est l'image par $\beta_{\mathbf{Q}_p}$ de l'orthogonal de $\Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$.*

Démonstration. — Le (i) est une conséquence des prop. IV.1.7 et IV.1.12.

On a $(D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)^U = 0$ car D est sans T-torsion ; d'où l'inclusion $J^\vee(\Pi) \subset \mathrm{Ker}\, \beta_{\mathbf{Q}_p}$. Par ailleurs, le noyau de $D_W^\natural(\Pi) \to D$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ d'après le lemme IV.3.1. Cela implique que

$$\mathrm{Ker}\,\big(\Pi^\vee \to D \boxtimes \mathbf{Q}_p\big) = \mathrm{Ker}\,\big((D_W^\natural(\Pi) \boxtimes \mathbf{Q}_p) \to (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)\big) \cong \mathrm{Ker}\,\big(D_W^\natural(\Pi) \to D\big)$$

est, lui-aussi, de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$. Comme il est stable par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, le lemme III.1.4 montre que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ agit trivialement, ce qui démontre le (ii).

Passons à la démonstration du (iii). Comme $\Pi^\vee$ est compact, son image par $\beta_{\mathbf{Z}_p}$ est bornée et donc l'image de $\beta_{\mathbf{Q}_p}$ est constituée de suites bornées ; elle est donc incluse dans $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$, et comme elle est stable par B, elle contient $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ d'après le th. I.3.13 puisque $\alpha_{\mathbf{Z}_p,W}(D_W^\natural(\Pi))$ est un treillis de D par construction, et donc engendre D. De plus, $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ est d'indice fini dans $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$. Soit $M \subset \Pi^\vee$ l'image inverse de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ dans $\Pi^\vee$. C'est un sous-module d'indice fini de $\Pi^\vee$ stable par B. L'orthogonal $M^\perp$ de M est donc un sous-$\mathscr{O}_L$-module de longueur finie de Π stable par B, et est fixe par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ d'après le lemme III.1.4. Par ailleurs, comme $M^\perp$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $M^\perp$ soit fixe par $1 + p^n \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p)$. Comme le sous-groupe de G engendré par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $1 + p^n \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p)$ contient $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, on en déduit l'inclusion $M^\perp \subset \Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ et celle de l'image de l'orthogonal de $\Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ dans $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$.

Pour montrer l'inclusion inverse, constatons que $\Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ étant de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, il existe $P \in \mathscr{O}_L[X]$ non nul modulo p, tel que $P\left(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ annule $\Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$. Ceci implique que $\langle P\left(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}\right) \cdot \mu, v\rangle = 0$ pour tout $v \in \Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ et tout $\mu \in \Pi^\vee$. On en déduit que l'image de l'orthogonal de $\Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ contient celle de $P\left(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}\right)\Pi^\vee$. On conclut en utilisant le fait que $\beta_{\mathbf{Q}_p}$ commute à $P\left(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}\right)$ et que $P\left(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}\right)$ induit une surjection de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ sur lui-même (prop. I.3.16).

Remarque IV.3.3. — La définition de $\beta_{\mathbf{Q}_p}$ s'étend telle quelle aux cas $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ et $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$; on obtient de la sorte un morphisme B-équivariant de Π^* dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ (et même dans $(D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_b$, si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$).

2. L'application $\beta_U : \Pi^\vee \to \mathbf{D}(\Pi) \boxtimes U$. — Si $a \in \mathbf{Q}_p$, et si $k \in \mathbf{N}$, on définit $\beta_{a,k} : \Pi^\vee \to D \boxtimes (a + p^k \mathbf{Z}_p)$ par

$$\beta_{a,k} = \left(\begin{smallmatrix} p^k & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \beta_{\mathbf{Z}_p} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^k & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}.$$

Lemme IV.3.4. — *Si $\ell \geq k \geq 0$, et si $b \in \mathbf{Q}_p$, alors*

$$\mathrm{Res}_{b+p^\ell \mathbf{Z}_p} \circ \beta_{a,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } b + p^\ell \mathbf{Z}_p \not\subset a + p^k \mathbf{Z}_p, \\ \beta_{b,\ell} & \text{si } b + p^\ell \mathbf{Z}_p \subset a + p^k \mathbf{Z}_p. \end{cases}$$

Démonstration. — Comme l'image de $\beta_{a,k}$ est incluse dans $D\boxtimes(a+p^k\mathbf{Z}_p)$ qui est tué par $\mathrm{Res}_{b+p^\ell\mathbf{Z}_p}$, si $(b+p^\ell\mathbf{Z}_p)\cap(a+p^k\mathbf{Z}_p)=\varnothing$, et comme $\ell\geq k$, on a $\mathrm{Res}_{b+p^\ell\mathbf{Z}_p}\circ\beta_{a,k}=0$ si $b+p^\ell\mathbf{Z}_p\not\subset a+p^k\mathbf{Z}_p$.

Si $b+p^\ell\mathbf{Z}_p\subset a+p^k\mathbf{Z}_p$, on peut écrire b sous la forme $a+p^kc$. En partant de la formule

$$\mathrm{Res}_{b+p^\ell\mathbf{Z}_p}=\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi^\ell\circ\psi^\ell\circ\left(\begin{smallmatrix}1&-b\\0&1\end{smallmatrix}\right),$$

on obtient

$$\mathrm{Res}_{b+p^\ell\mathbf{Z}_p}\circ\beta_{a,k}=\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi^\ell\circ\psi^\ell\circ\left(\begin{smallmatrix}p^k&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\left(\begin{smallmatrix}1&c\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\beta_{\mathbf{Z}_p}\circ\left(\begin{smallmatrix}p^k&a\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{-1}.$$

Maintenant, d'après les prop. IV.1.7 et IV.1.12, on a

$$\left(\begin{smallmatrix}1&c\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\beta_{\mathbf{Z}_p}=\beta_{\mathbf{Z}_p}\circ\left(\begin{smallmatrix}1&c\\0&1\end{smallmatrix}\right),\ \psi^{\ell-k}\circ\beta_{\mathbf{Z}_p}=\beta_{\mathbf{Z}_p}\circ\left(\begin{smallmatrix}p^{k-\ell}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\ \psi^\ell\circ\left(\begin{smallmatrix}p^k&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\psi^{\ell-k},\ \varphi^\ell=\left(\begin{smallmatrix}p^\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{b+p^\ell\mathbf{Z}_p}\circ\beta_{a,k}&=\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\left(\begin{smallmatrix}p^\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\beta_{\mathbf{Z}_p}\circ\left(\begin{smallmatrix}p^{k-\ell}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\left(\begin{smallmatrix}1&p^{-k}(a-b)\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}p^k&a\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{-1}\\&=\left(\begin{smallmatrix}p^\ell&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\beta_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix}p^\ell&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{-1}=\beta_{b,\ell}\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

Corollaire IV.3.5. — *On a $\beta_{a,k}=\beta_{b,k}$, si $a+p^k\mathbf{Z}_p=b+p^k\mathbf{Z}_p$.*

Démonstration. — On a $\beta_{a,k}=\mathrm{Res}_{a+p^k\mathbf{Z}_p}\circ\beta_{a,k}=\mathrm{Res}_{b+p^k\mathbf{Z}_p}\circ\beta_{a,k}=\beta_{b,k}$.

Ce corollaire permet de définir $\beta_{a+p^k\mathbf{Z}_p}:\Pi^\vee\to D\boxtimes(a+p^k\mathbf{Z}_p)$ par la formule $\beta_{a+p^k\mathbf{Z}_p}=\beta_{b,k}$ pour n'importe quel $b\in a+p^k\mathbf{Z}_p$. Le lemme IV.3.4 se reformule alors de manière plus parlante sous la forme :

Lemme IV.3.6. — *Si $\ell\geq k\geq 0$, et si $b\in\mathbf{Q}_p$, alors*

$$\mathrm{Res}_{b+p^\ell\mathbf{Z}_p}\circ\beta_{a+p^k\mathbf{Z}_p}=\begin{cases}0&\text{si } b+p^\ell\mathbf{Z}_p\not\subset a+p^k\mathbf{Z}_p,\\ \beta_{b+p^\ell\mathbf{Z}_p}&\text{si } b+p^\ell\mathbf{Z}_p\subset a+p^k\mathbf{Z}_p.\end{cases}$$

Corollaire IV.3.7. — *Si $a\in\mathbf{Q}_p$ et si $k\in\mathbf{N}$, alors $\sum_{i=0}^{p-1}\beta_{a+ip^k+p^{k+1}\mathbf{Z}_p}=\beta_{a+p^k\mathbf{Z}_p}$.*

Démonstration. — On a $\sum_{i=0}^{p-1}\mathrm{Res}_{a+ip^k+p^{k+1}\mathbf{Z}_p}=\mathrm{Res}_{a+p^k\mathbf{Z}_p}$; on en déduit le résultat en composant avec $\beta_{a+p^k\mathbf{Z}_p}$.

Soit U un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, soit $k\in\mathbf{N}$ assez grand pour que U soit stable par translation par $p^k\mathbf{Z}_p$, et soit $i+p^k\mathbf{Z}_p$, pour $i\in I$ (fini), une partition de U. Le cor. IV.3.7 montre que $\sum_{i\in I}\beta_{i+p^k\mathbf{Z}_p}$ ne dépend pas des choix de k et de I. On note $\beta_U:\Pi^\vee\to D\boxtimes U$ l'application ainsi obtenue ; $\beta_{\mathbf{Z}_p}$ est l'application dont on est parti pour faire toutes nos constructions.

Lemme IV.3.8. — *Soient U, V des ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$.*
(i) $\mathrm{Res}_U \circ \beta_V = \mathrm{Res}_V \circ \beta_U = \beta_{U\cap V}$.
(ii) $\beta_U + \beta_V = \beta_{U\cup V} + \beta_{U\cap V}$.
(iii) $\beta_U \circ g = g \circ \beta_{g^{-1}U}$, *si* $g \in P(\mathbf{Q}_p)$.

Démonstration. — Les deux premiers points se démontrent par linéarité, en prenant k assez grand pour que U et V soient invariants par translation par $p^k\mathbf{Z}_p$, et en prenant des partitions de U et V par des translatés de $p^k\mathbf{Z}_p$. Pour le dernier, il suffit, par linéarité, de le démontrer pour $U = a + p^k\mathbf{Z}_p$ et k assez grand. On peut en particulier supposer que $k \geq 0$ et que, si $g^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} p^i & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, alors $i + k \geq 0$. Alors $g^{-1}(a + p^k\mathbf{Z}_p) = b + p^i a + p^{i+k}\mathbf{Z}_p$, et

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ \beta_{a+p^k\mathbf{Z}_p} \circ g &= g^{-1} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^k & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \beta_{\mathbf{Z}_p} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^k & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \circ g \\ &= \left(\begin{smallmatrix} p^{i+k} & b+p^i a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \beta_{\mathbf{Z}_p} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{i+k} & b+p^i a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \beta_{g^{-1}(a+p^k\mathbf{Z}_p)}. \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

IV.4. La contragrédiente d'une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. — Notre but est de reconstruire la représentation Π à partir de $\mathbf{D}(\Pi)$. Pour énoncer le résultat, remarquons que les opérations suivantes ne changent par $\mathbf{D}(\Pi)$:

– prendre une sous-représentation d'indice fini de Π ou faire une extension d'une représentation finie par Π,

– prendre un quotient ou faire une extension de Π par une représentation finie.

On dit que Π et Π' sont *équivalentes* si on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations du type ci-dessus ; on a donc $\mathbf{D}(\Pi) = \mathbf{D}(\Pi')$ si Π et Π' sont équivalentes.

Dans toute la suite de ce §, on fixe $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ de caractère central δ, et on pose $D = \mathbf{D}(\Pi)$. L'énoncé suivant, destiné à illustrer les résultats de ce §, est une version affaiblie du th. IV.4.7.

Théorème IV.4.1. — *Soit $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} z \in D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p\}$. Alors $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est un ouvert compact de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, stable par G, et dont le dual est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ équivalent à Π.*

1. L'action de w sur $\mathbf{D}(\Pi) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. — On a défini ci-dessus, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$, un morphisme $\beta_U : \Pi^\vee \to D \boxtimes U$. Le résultat suivant est le point crucial de la reconstruction du G-module $\Pi^\vee$ à partir de D.

Proposition IV.4.2. — *On a $\beta_{\mathbf{Z}_p^*} \circ w = w_\delta \circ \beta_{\mathbf{Z}_p^*}$.*

Démonstration. — Nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes préparatoires. On note $M \subset D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ le treillis engendré par les $\left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) D^+$, pour $1 \leq i \leq p-1$. On fixe aussi $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$.

Lemme IV.4.3. — *Soit $n \geq 1$. Si $\mu \in \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p^*}^{\Pi}(W)_0^\vee$ est nulle sur $\left(\begin{smallmatrix} p^r & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, pour tout $r \leq n$ et tout $b \in \mathbf{Z}_p^*$, alors μ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\mu = \sum_{i \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \mu_i$, où $\mu_i \in \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p^*}^{\Pi}(W)_0^\vee$ est à support dans $i + p^n\mathbf{Z}_p$.*

Démonstration. — L'unicité suit de ce que les supports des μ_i sont disjoints deux à deux. Maintenant, la restriction de μ à $\mathrm{I}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}^{\Pi}(W)$ s'annule, par hypothèse, en l'extrémité $\left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathscr{T}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}$; elle se prolonge donc de manière unique en un élément μ_i de $\mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p^*}^{\Pi}(W)_0^\vee$ à support dans $i + p^n\mathbf{Z}_p$ (lemme III.2.3). Il est alors immédiat que l'on a $\mu = \sum_{i \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \mu_i$ sur $\mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p^*}^{\Pi}(W)$ tout entier car les deux membres sont nuls sur $\left(\begin{smallmatrix} p^r & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, si $r \leq n$. Ceci permet de conclure.

Lemme IV.4.4. — *Il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que, si $\mu \in D_W^\natural(\Pi)$ est nul sur $\left(\begin{smallmatrix} p^j & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$ pour tous $j \leq k_0$ et $a \in \mathbf{Z}_p$, alors $\mu \in \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) D_W^+(\Pi)$.*

Démonstration. — Soit U_k l'ensemble des $\mu \in D_W^\natural(\Pi)$ nuls sur $\left(\begin{smallmatrix} p^j & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$ pour tous $j \leq k$ et $a \in \mathbf{Z}_p$. Par définition de la topologie faible, les U_k forment une base décroissante de voisinages de 0 dans $D_W^\natural(\Pi)$. Or $X = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) D_W^+(\Pi)$ est d'indice fini dans $D_W^\natural(\Pi)$ [sa longueur sur $\mathscr{O}_L$ est inférieure ou égale à la somme des longueurs de $\operatorname{Ker}\beta_{\mathbf{Z}_p}$, de $D_W^\natural(\Pi)/D_W^+(\Pi)$ et de $\beta_{\mathbf{Z}_p}(D_W^+(\Pi))/T\beta_{\mathbf{Z}_p}(D_W^+(\Pi))$]. Son orthogonal $X^\perp$ dans $I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi}(W)$ est donc de longueur finie. Comme l'application $\mu \mapsto \langle \mu, v \rangle$ est continue pour tout $v \in X$ par définition de la topologie faible, et comme l'ensemble des valeurs de $\langle \mu, v \rangle$ est discret, l'orthogonal $v^\perp$ de v est ouvert dans $D_W^\natural(\Pi)$; il en est donc de même de $X = (X^\perp)^\perp$ puisque $(X^\perp)^\perp$ est l'intersection des $v_i^\perp$ pour toute famille génératrice de $X^\perp$, et que l'on peut choisir une telle famille finie. On en déduit que X contient U_k, pour k assez grand. Ceci permet de conclure.

Lemme IV.4.5. — *Il existe $k_0 \in \mathbf{N}$, tel que si $\mu \in \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p^*}^{\Pi}(W)_0^\vee$ est nul sur $\left(\begin{smallmatrix} p^j & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$ pour tous $j \in \{1, \ldots, n + k_0\}$ et $a \in \mathbf{Z}_p^*$, alors $\beta_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu) \in \varphi^n(T)M$.*

Démonstration. — Il résulte du lemme IV.4.3 que l'on peut écrire μ sous la forme $\mu = \sum_{i \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \mu_i$, avec μ_i de la forme $\left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\lambda_i$, où $\lambda_i \in D_W^+(\Pi)$ est nul sur $\left(\begin{smallmatrix} p^j & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, pour tous $j \leq k_0$ et $a \in \mathbf{Z}_p$. D'après le lemme IV.4.4, cela implique que $\lambda_i \in \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) D_W^+(\Pi)$, et donc que $\beta_{\mathbf{Z}_p^*}(\lambda_i) \in D^+$ et $\left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\beta_{\mathbf{Z}_p^*}(\lambda_i) \in M$. L'identité

$$\beta_{\mathbf{Z}_p^*} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) = \beta_{\mathbf{Z}_p^*} \circ \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \varphi^n(T) \left(\begin{smallmatrix} p^n & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \beta_{\mathbf{Z}_p^*}$$

permet de conclure.

Lemme IV.4.6. — *Il existe $b : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, telle que, pour tout $i \in \mathbf{Z}_p^*$ et tout $z \in M$, on ait*

$$\mathrm{Res}_{i^{-1}+p^n\mathbf{Z}_p}(w_\delta(z)) - \left(\begin{smallmatrix} -1/i & 2 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z) \in \varphi^{n+b(n)}(T)M.$$

Démonstration. — C'est, modulo le (ii) de la rem. II.1.3, une conséquence de la prop. I.4.1.

Revenons à la démonstration de la prop. IV.4.2. Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que K_m agisse trivialement sur W. Si $\mu \in \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p^*}^{\Pi}(W)^\vee$, et si $n \in \mathbf{N}$, soit

$$\mu_n = \alpha\Big(\frac{-p^{n+m}}{1+p^{n+m}}\Big)\cdot\mu, \quad \text{où } \alpha(u) = \left(\begin{smallmatrix}1+u & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1, \text{ si } u \in p\mathbf{Z}_p.$$

Si $v \in \Pi$, si $b \in \mathbf{Z}_p^*$ et si $r \geq 1$, on a

$$\Big\langle \mu_n, \left(\begin{smallmatrix}p^r & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\Big\rangle = \Big\langle \mu, \Big(\left(\begin{smallmatrix}1+p^{n+m} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\Big)\left(\begin{smallmatrix}p^r & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\Big\rangle = \Big\langle \mu, \left(\begin{smallmatrix}p^r & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\Big(\left(\begin{smallmatrix}1+p^{n+m} & p^{m+n-r}b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\Big)\cdot v\Big\rangle.$$

Comme $\Big(\left(\begin{smallmatrix}1+p^{n+m} & p^{m+n-r}b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\Big)\cdot v = 0$, si $r \leq n$ et si $v \in W$, on en déduit que μ_n est nulle sur $\left(\begin{smallmatrix}p^r & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$, si $r \leq n$. Il résulte du lemme IV.4.3 que l'on peut écrire μ_n, de manière unique, sous la forme $\mu_n = \sum_{i\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \mu_{n,i}$, avec $\mu_{n,i} \in \mathrm{I}_{\mathbf{Z}_p^*}^{\Pi}(W)_0^\vee$ à support dans $i + p^n\mathbf{Z}_p$. On a alors

$$\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(\beta_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_n)) = \beta_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_{n,i}) \text{ et } \mathrm{Res}_{i^{-1}+p^n\mathbf{Z}_p}\big(\beta_{\mathbf{Z}_p^*}\circ w(\mu_n)\big) = \beta_{\mathbf{Z}_p^*}\circ w(\mu_{n,i}).$$

On déduit de la première identité, en utilisant le lemme IV.4.6, que

$$\mathrm{Res}_{i^{-1}+p^n\mathbf{Z}_p}(w_\delta\circ\beta_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_n)) - \left(\begin{smallmatrix}-1/i & 2\\ 0 & i\end{smallmatrix}\right)\beta_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_{n,i}) \in \varphi^{n+b(n)}(T)M,$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}_p^*$.

Si $g = \left(\begin{smallmatrix}p^k & i^{-1}+p^n b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, soient

$$g_1 = \left(\begin{smallmatrix}-1/i & 2\\ 0 & i\end{smallmatrix}\right)^{-1} g = \left(\begin{smallmatrix}-p^k i & 1-p^n ib\\ 0 & 1/i\end{smallmatrix}\right), \qquad g_2 = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)^{-1} g = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ p^k & i^{-1}+p^n b\end{smallmatrix}\right),$$

$$h = g_1^{-1}g_2 = \left(\begin{smallmatrix}-i^{-1}p^{-k} & p^{-k}(1-p^n ib)\\ 0 & i\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ p^k & i^{-1}+p^n b\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1-p^n ib & -p^{2n-k}ib^2\\ p^k i & 1+p^n ib\end{smallmatrix}\right).$$

Soit $\lambda_{n,i} = \Big(\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}-1/i & 2\\ 0 & i\end{smallmatrix}\right)\Big)\cdot\mu_{n,i}$. Si $v \in W$, on a

$$\big\langle \lambda_{n,i},\, g\cdot v\big\rangle = \big\langle \mu_{n,i},\, (g_2 - g_1)\cdot v\big\rangle = \big\langle \mu_{n,i},\, g_1(h-1)\cdot v\big\rangle = 0,$$

si $k \geq m$ et $2n - k \geq m$, car $h \in K_m$ et donc $(h-1)\cdot v = 0$. Par ailleurs, $\lambda_{n,i}$ est à support dans $i^{-1} + p^n\mathbf{Z}_p$ puisque $\mu_{n,i}$ est à support dans $i + p^n\mathbf{Z}_p$ et que $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}-1/i & 2\\ 0 & i\end{smallmatrix}\right)$ envoient $i + p^n\mathbf{Z}_p$ dans $i^{-1} + p^n\mathbf{Z}_p$. Donc $\lambda_{n,i}$ est nulle sur $\left(\begin{smallmatrix}p^k & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$, si $k \leq n-1$ ou si $a \notin i^{-1} + p^n\mathbf{Z}_p$. Il en résulte que $\lambda_{n,i}$ est nulle sur $\left(\begin{smallmatrix}p^k & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot W$, si $k \leq 2n - m$. D'après le lemme IV.4.5, cela implique $\beta_{\mathbf{Z}_p^*}(\lambda_{n,i}) \in \varphi^{2n-m-k_0}(T)M$. On en déduit que

$$\beta_{\mathbf{Z}_p^*}\Big(\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu_{n,i} - \left(\begin{smallmatrix}-1/i & 2\\ 0 & i\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu_{n,i}\Big) \in \varphi^{n+b(n)}(T)M, \quad \text{si } n \text{ est assez grand.}$$

Ce résultat, couplé avec le lemme IV.4.6 (ou, plus exactement, le résultat qui en découle ci-dessus), implique que

$$\mathrm{Res}_{i^{-1}+p^n\mathbf{Z}_p}\big((w_\delta\circ\beta_{\mathbf{Z}_p^*} - \beta_{\mathbf{Z}_p^*}\circ w)\cdot\mu_n\big) \in \varphi^{n+b(n)}(T)M, \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}_p^*.$$

Or l'opérateur $\alpha(u)$ commute à $\mathrm{Res}_{i-1+p^n\mathbf{Z}_p}$ et à $\beta_{\mathbf{Z}_p^*}$, si $u \in p^n\mathbf{Z}_p$. Si de plus n est assez grand pour que $\delta(1+u)-1$ tue D, cet opérateur vérifie en outre les relations $\alpha(u)\circ w = w\circ\alpha(\frac{-u}{1+u})$ et $\alpha(u)\circ w_\delta = w_\delta\circ\alpha(\frac{-u}{1+u})$. On en déduit que

$$\alpha(p^{n+m})\cdot\mathrm{Res}_{i-1+p^n\mathbf{Z}_p}\big((w_\delta\circ\beta_{\mathbf{Z}_p^*}-\beta_{\mathbf{Z}_p^*}\circ w)\cdot\mu\big)\in\varphi^{n+b(n)}(T)M,\ \text{pour tout } i\in\mathbf{Z}_p^*,$$

si n est assez grand. D'après la prop. I.5.1, cela implique que, si n est asez grand,

$$\mathrm{Res}_{i-1+p^n\mathbf{Z}_p}\big((w_\delta\circ\beta_{\mathbf{Z}_p^*}-\beta_{\mathbf{Z}_p^*}\circ w)\cdot\mu\big)\in\frac{\varphi^{n+b(n)}(T)}{T^{c'}\varphi^n(T)^c\varphi^{n+m}(T)}M,\ \text{pour tout } i\in\mathbf{Z}_p^*,$$

où $c,c'\in\mathbf{N}$ ne dépendent que de M. Il en résulte que, pour tout n assez grand, $(w_\delta\circ\beta_{\mathbf{Z}_p^*}-\beta_{\mathbf{Z}_p^*}\circ w)\cdot\mu\in\frac{\varphi^{n+b(n)}(T)}{T^{c'}\varphi^n(T)^c\varphi^{n+m}(T)}M$. Soit $\ell\in\mathbf{N}$ tel que Π (et donc aussi D) soit tué par p^ℓ. Comme $b(n)\to+\infty$, on a $\frac{\varphi^{n+b(n)}(T)}{T^{c'}\varphi^n(T)^c\varphi^{n+m}(T)}\to 0$ dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/p^\ell$ et comme M est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact, cela implique que $(w_\delta\circ\beta_{\mathbf{Z}_p^*}-\beta_{\mathbf{Z}_p^*}\circ w)\cdot\mu=0$, ce que l'on cherchait à démontrer.

2. Le morphisme $\beta_{\mathbf{P}^1}:\Pi^\vee\to\mathbf{D}(\Pi)\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$. — On note $\beta_{\mathbf{P}^1}:\Pi^\vee\to D\oplus D$ l'application définie par

$$\beta_{\mathbf{P}^1}(\mu)=\big(\beta_{\mathbf{Z}_p}(\mu),\beta_{\mathbf{Z}_p}(w\cdot\mu)\big).$$

Théorème IV.4.7. — (i) *L'image de $\Pi^\vee$ par $\beta_{\mathbf{P}^1}$ est incluse dans $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, et $\beta_{\mathbf{P}^1}:\Pi^\vee\to D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est G-équivariante.*

(ii) *L'application composée $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}\circ\beta_{\mathbf{P}^1}$ coïncide avec $\beta_{\mathbf{Q}_p}$.*

(iii) *Le noyau de $\beta_{\mathbf{P}^1}$ est $(\Pi^\vee)^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$.*

(iv) *$D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ et $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ sont stables par G et contiennent respectivement les images par $\beta_{\mathbf{P}^1}$ de $\Pi^\vee$ et de l'orthogonal de $\Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$.*

Démonstration. — L'inclusion $\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^\vee)\subset D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ suit de ce que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\circ\beta_{\mathbf{Z}_p}=\beta_{\mathbf{Z}_p^*}$ (lemme IV.3.8) et de ce que $\beta_{\mathbf{Z}_p^*}\circ w=w_\delta\circ\beta_{\mathbf{Z}_p^*}$ (prop. IV.4.2). La G-équivariance de $\beta_{\mathbf{P}^1}$ suit formellement (cf. ci-dessous) des formules du squelette d'action, et des propriétés suivantes :

(a) $\beta_U\circ g=g\circ\beta_{g^{-1}U}$, si $g\in B$, et si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ (cf. (iii) du lemme IV.3.8) ;

(b) $\mathrm{Res}_U\circ\beta_V=\beta_{U\cap V}$, si U et V sont des ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$ (cf. (i) du lemme IV.3.8) ;

(c) $\beta_{\mathbf{Z}_p}\circ\left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\psi\circ\beta_{\mathbf{Z}_p}$ (prop. IV.1.12) ;

(d) $\beta_{\mathbf{Z}_p^*}\circ w=w_\delta\circ\beta_{\mathbf{Z}_p^*}$ et $\beta_{1+p\mathbf{Z}_p}\circ w=w_\delta\circ\beta_{1+p\mathbf{Z}_p}$;

La première identité de (d) est la prop. IV.4.2 ; la seconde s'en déduit en lui appliquant $\mathrm{Res}_{1+p\mathbf{Z}_p}$, et en utilisant le fait que $\mathrm{Res}_{1+p\mathbf{Z}_p}$ et w_δ commutent (cf. rem. I.4.4).

– Si $g=w$ ou si $g=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)$, avec $a\in\mathbf{Q}_p^*$, on a $\beta_{\mathbf{P}^1}\circ g=g\circ\beta_{\mathbf{P}^1}$ de manière évidente.

– Si $g=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, avec $a\in\mathbf{Z}_p^*$, pour démontrer $\beta_{\mathbf{P}^1}\circ g=g\circ\beta_{\mathbf{P}^1}$, il s'agit de vérifier que $\beta_{\mathbf{Z}_p}(g\mu)=g\beta_{\mathbf{Z}_p}(\mu)$, ce qui suit du (a), et que $\beta_{\mathbf{Z}_p}(wg\cdot\mu)=\delta(a)\left(\begin{smallmatrix}a^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\beta_{\mathbf{Z}_p}(\mu)$, ce qui suit de l'identité $gw=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)w$ et du (a).

– Pour démontrer que $\beta_{\mathbf{P}^1} \circ g = g \circ \beta_{\mathbf{P}^1}$, si $g = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, il s'agit de vérifier que

$$\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(\beta_{\mathbf{Z}_p}(g \cdot \mu)) = g \cdot \beta_{\mathbf{Z}_p}(\mu) \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w(\beta_{\mathbf{P}^1} \circ g(\mu)) = \delta(p)\psi(\beta_{\mathbf{Z}_p}(w\mu)).$$

La première égalité suit des (b) et (a), et la seconde suit de la commutation de w et $\beta_{\mathbf{P}^1}$, de la formule $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \beta_{\mathbf{P}^1} = \beta_{\mathbf{Z}_p}$, de l'identité $gw = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w$ et du (c).

– Pour démontrer que $\beta_{\mathbf{P}^1} \circ g = g \circ \beta_{\mathbf{P}^1}$, si $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et si $b \in p\mathbf{Z}_p$, il s'agit de vérifier que $\beta_{\mathbf{Z}_p}(g \cdot \mu) = g \cdot \beta_{\mathbf{Z}_p}(\mu)$ et que $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(\beta_{\mathbf{Z}_p}(wg \cdot \mu)) = u_b(\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(\beta_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot \mu)))$. La première égalité suit du (a). Pour démontrer la seconde, rappelons que

$$wg = \left(\begin{smallmatrix} (1+b)^{-1} & 0 \\ 0 & (1+b)^{-1} \end{smallmatrix}\right) b_1 w b_2 w b_3 w \quad \text{et} \quad u_b = \lambda\, b_1 \circ w_\delta \circ b_2 \circ w_\delta \circ b_3,$$

$$\text{avec } \lambda = \delta(1+b)^{-1},\ b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ b_2 = \left(\begin{smallmatrix} (1+b)^2 & b(1+b) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \text{ et } b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & (1+b)^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Comme $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} \circ \beta_{\mathbf{Z}_p} = \beta_{p\mathbf{Z}_p}$ d'après la propriété (b), on est ramené à comparer $h = \beta_{p\mathbf{Z}_p} \circ \left(\left(\begin{smallmatrix} (1+b)^{-1} & 0 \\ 0 & (1+b)^{-1} \end{smallmatrix}\right) b_1 w b_2 w b_3\right)$ et $u_b \circ \beta_{p\mathbf{Z}_p}$. Or on a

$$\begin{aligned}
h &= \lambda\, \beta_{p\mathbf{Z}_p} \circ (b_1 w b_2 w b_3) \\
&= \lambda\, b_1 \circ \beta_{1+p\mathbf{Z}_p} \circ (w b_2 w b_3), \text{ d'après le (a), car } b_1^{-1}(p\mathbf{Z}_p) = 1 + p\mathbf{Z}_p, \\
&= \lambda\, b_1 \circ w_\delta \circ \beta_{1+p\mathbf{Z}_p} \circ (b_2 w b_3), \text{ d'après le (d)}, \\
&= \lambda\, b_1 \circ w_\delta \circ b_2 \circ \beta_{1+p\mathbf{Z}_p} \circ (w b_3), \text{ d'après le (a), car } b_2^{-1}(1 + p\mathbf{Z}_p) = 1 + p\mathbf{Z}_p, \\
&= \lambda\, b_1 \circ w_\delta \circ b_2 \circ w_\delta \circ \beta_{1+p\mathbf{Z}_p} \circ b_3, \text{ d'après le (d)}, \\
&= \lambda\, b_1 \circ w_\delta \circ b_2 \circ w_\delta \circ b_3 \circ \beta_{p\mathbf{Z}_p}, \text{ d'après le (a), car } b_3^{-1}(1 + p\mathbf{Z}_p) = p\mathbf{Z}_p.
\end{aligned}$$

Comme la dernière expression est égale à $u_b \circ \beta_{p\mathbf{Z}_p}$, cela termine la preuve du (i).

Comme $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} \circ \beta_{\mathbf{P}^1} = \beta_{\mathbf{Q}_p}$, le noyau de $\beta_{\mathbf{P}^1}$ est inclus dans celui de $\beta_{\mathbf{Q}_p}$, à savoir $(\Pi^\vee)^U$. Par ailleurs, il est apparent sur la définition de $\beta_{\mathbf{P}^1}$ que $\beta_{\mathbf{P}^1}(\mu) = 0$ implique $\beta_{\mathbf{P}^1}(w \cdot \mu) = 0$. On en déduit l'inclusion du noyau de $\beta_{\mathbf{P}^1}$ dans celui de $\beta_{\mathbf{Q}_p} \circ w$ qui n'est autre que $(\Pi^\vee)^{wUw}$. Comme U et wUw engendrent $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, cela démontre le (iii).

Reste le (iv) à démontrer. L'inclusion de $\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^\vee)$ dans $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ suit juste de ce que l'image de $\Pi^\vee$ par $\beta_{\mathbf{Q}_p}$ est incluse dans $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$, et comme celle de l'orthogonal M de $\Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ est $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$, cela prouve que $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ contient $\beta_{\mathbf{P}^1}(M)$. La stabilité de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ par G suit alors, grâce au lemme II.2.5, de ce que $\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^\vee)$ est un sous-$\mathscr{O}_L$-module ouvert compact de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ qui est stable par G.

Ceci conclut la démonstration du th. IV.4.7.

Remarque IV.4.8. — Si Π n'a pas de quotient fini, alors $\beta_{\mathbf{P}^1}$ est injective d'après le (iii) du th. IV.4.7, et $\Pi^\vee$ s'identifie à un sous-$\mathscr{O}_L$-module compact de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

Remarque IV.4.9. — (i) On définit de même un morphisme G-équivariant $\beta_{\mathbf{P}^1} : \Pi^* \to D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ ou si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$.

(ii) Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$, on déduit du (iv) du th. IV.4.7 appliqué à $\Pi/p^k\Pi$, pour $k \in \mathbf{N}$, que $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ sont stables par G. Ce résultat s'étend à $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$ en inversant p.

3. Unicité de w_δ. — Soient $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ et $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ un caractère continu. Soit $\iota : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ une involution continue. On suppose que le squelette d'action (cf. n° 2 du § II.1) définit une action de G sur $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$, et que $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ possède un sous-module ouvert compact M stable par G. Notre but est de prouver que cela détermine ι, ce qui interviendra de manière cruciale pour démontrer que les vecteurs algébriques ne dépendent pas de la filtration (cf. démonstration de la prop. VI.6.41).

Proposition IV.4.10. — *Sous les hypothèses précédentes, on a :*
(i) $\Pi = (D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1)/M$ *est un objet de* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, *de caractère central* δ.
(ii) $\mathbf{D}(\Pi)$ *est naturellement isomorphe à* $\check{D}$ *en tant que* (φ,Γ)*-module.*
(iii) $\iota = w_\delta$, *et donc* $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1 = D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

Démonstration. — Comme M est ouvert dans $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$, l'action de G sur Π est localement constante ; il suffit donc de vérifier que Π est admissible. Pour cela, choisissons une famille génératrice finie $v_1, \dots, v_r$ de D sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$. Si k est assez grand, les $\varphi^n(T^{-k}v_i)$, pour $n \in \mathbf{N}$ et $1 \leq i \leq r$, engendrent D vu comme $\mathscr{O}_\mathscr{E}^+$-module. Il existe donc $k \in \mathbf{N}$ tel que les $T^{-k}v_i$ engendrent topologiquement le P^+-module D, et comme $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1 = D + w \cdot D$, cela montre que $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ est de longueur finie comme G-module topologique. On en déduit le (i).

Soit $W \in \mathscr{W}(\Pi)$ et soit $\tilde{W} \in D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ se projetant surjectivement sur W modulo M. Quitte à augmenter W et $\tilde{W}$, on peut supposer que $\tilde{W}$ contient les $T^{-k}v_i$ ci-dessus. Alors le sous-P^+-module $I_{\mathbf{Z}_p}(\tilde{W})$, topologiquement engendré par $\tilde{W}$, contient $D = D \boxtimes \mathbf{Z}_p$. Comme M est ouvert et stable par B, il se surjecte sur $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (th. I.3.13), et comme le noyau de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est $(0, D^{\mathrm{nr}})$ (prop. II.1.14) qui, de même que $D^\sharp/D^\natural$, est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, il résulte du cor. II.2.9 que $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est d'indice fini dans Π. Comme $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est la réunion des $\varphi^{-n}(D)/\varphi^{-n}(D^+)$, cela implique que $I_{\mathbf{Z}_p}(\tilde{W})/D$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$. On en déduit l'existence d'une suite exacte $0 \to (I_{\mathbf{Z}_p}(\tilde{W}) \cap M) \to X \oplus (D \boxtimes \mathbf{Z}_p) \to I^\Pi_{\mathbf{Z}_p}(W) \to 0$, où $X = I_{\mathbf{Z}_p}(\tilde{W}) \cap w(D \boxtimes p\mathbf{Z}_p)$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$.

Par ailleurs, le dual de $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ est naturellement $\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1},\iota'} \mathbf{P}^1$, où l'involution $\iota' : \check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to \check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est la transposée de ι. Le dual $D^\natural_W(\Pi)$ de $I^\Pi_{\mathbf{Z}_p}(W)$ s'identifie donc à un treillis de $\check{D} \oplus X^\vee$, et comme $X^\vee$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, tensoriser par $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ le fait disparaître, ce qui montre que $\mathbf{D}(\Pi)$ s'identifie naturellement à $\check{D}$. On en déduit, en utilisant la prop. IV.4.2, que $\iota' = w_{\delta^{-1}}$, et donc que $\iota = w_\delta$, ce qui termine la démonstration de la proposition.

Corollaire IV.4.11. — *Si* $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_\mathscr{E})$ *est libre de rang* 2, *alors* $\mathbf{D}(\mathbf{\Pi}(D)) = \check{D}$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la prop. IV.4.10 à $M_k = (D/p^kD)^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ et de passer à la limite projective.

4. Série principale et (φ,Γ)-modules triangulins. — Rappelons [**28, 30**] que l'on a défini un espace $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$ paramétrant les représentations triangulines irréductibles de

dimension 2, et attaché à tout élément s de $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$ un (φ,Γ)-module $\Delta(s)$, étale de rang 2 sur $\mathscr{E}$, et une représentation unitaire admissible $\Pi(s)$ de G.

Théorème IV.4.12. — (i) *Les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules topologiques $\Pi(s)^*$ et $(\check{\Delta}(s)^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ sont naturellement isomorphes.*

(ii) *Les (φ,Γ)-modules $\mathbf{D}(\Pi(s))$ et $\check{\Delta}(s)$ sont naturellement isomorphes.*

(iii) *$\check{\Delta}(s)^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ est stable par G et les G-modules $\Pi(s)^*$ et $\check{\Delta}(s)^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ sont naturellement isomorphes.*

(iv) *On a une suite exacte naturelle de G-modules*

$$0\longrightarrow\Delta(s)^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\longrightarrow\Delta(s)\boxtimes\mathbf{P}^1\longrightarrow\Pi(s)\longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Le (i) est une traduction de [**30**, th. 0.6]. On en déduit, en passant à la limite projective et en inversant p dans la prop. IV.3.2, que les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $(\mathbf{D}(\Pi(s))^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ et $(\check{\Delta}(s)^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ sont topologiquement isomorphes et donc, d'après le th. I.3.15, que les (φ,Γ)-modules $\mathbf{D}(\Pi(s))$ et $\check{\Delta}(s)$ sont isomorphes. Le (iii) se déduit alors du (ii) de la rem. IV.4.9 et le (iv) du cor. II.2.12.

Corollaire IV.4.13. — *Si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ est tel que $L\cdot D$ est triangulin* (de dimension 2)*, alors $D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ est stable par G.*

Démonstration. — $D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ est l'intersection de $D\boxtimes\mathbf{P}^1$ et de $(L\cdot D)^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ qui sont tous deux stables par G (c'est évident pour le premier, et pour le second cela suit du (iii) du th. IV.4.12).

5. La contragrédiente. — Si $\Pi\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ est de caractère central δ, la *contragrédiente* de Π est la représentation $\check{\Pi}$ de G définie par

$$\check{\Pi}=(\mathbf{D}(\Pi)\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1)/\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^\vee).$$

Remarque IV.4.14. — (i) La contragrédiente de $\Pi\otimes\delta$ est $\check{\Pi}\otimes\delta^{-1}$.

(ii) Comme ni $\mathbf{D}(\Pi)$, ni $\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^\vee)$ ne changent si on remplace Π par son plus grand sous-objet d'indice fini, il est naturel de ne considérer que des Π n'ayant pas de quotient fini.

(iii) On a une suite exacte $0\to(\Pi^\vee)^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}\to\Pi^\vee\to\mathbf{D}(\Pi)\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1\to\check{\Pi}\to 0$, et le lemme du serpent montre que, si $0\to\Pi_1\to\Pi\to\Pi_2\to 0$ est une suite exacte dans $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, où Π_1 n'a pas de quotient fini, alors $0\to\check{\Pi}_2\to\check{\Pi}\to\check{\Pi}_1\to 0$ est exacte.

Théorème IV.4.15. — *Soit $\Pi\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, sans quotient fini, de caractère central δ, et soit $D=\mathbf{D}(\Pi)$.*

(i) *$\check{\Pi}$ est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ sans quotient fini, de caractère central δ^{-1}.*

(ii) *$\mathbf{D}(\check{\Pi})$ s'identifie naturellement à $\check{D}$ en tant que (φ,Γ)-module.*

(iii) *$\check{\Pi}^\vee$ est l'orthogonal de $\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^\vee)$ dans $\check{D}\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$.*

(iv) *La contragrédiente de $\check{\Pi}$ est naturellement isomorphe à Π.*

Démonstration. — Les (i) et (ii) sont des conséquences directes de la prop. IV.4.10 à part le fait que $\check{\Pi}$ n'a pas de quotient fini, mais comme un quotient fini de $\check{\Pi}$ est

aussi un quotient fini de $D\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$, ce dernier fait découle, par dualité, de ce que $\check{D}\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ n'a pas de sous-module fini stable par G. (Un tel sous-module serait inclus dans le noyau $(0,\check{D}^{\mathrm{nr}})$ de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ car $\check{D}\boxtimes\mathbf{Q}_p$ n'a pas de sous-module fini stable par B, ni même par U. On conclut en remarquant que $(0,\check{D}^{\mathrm{nr}})\cap w\cdot(0,\check{D}^{\mathrm{nr}})=0$.) Le reste s'en déduit en utilisant la dualité entre $\check{D}\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ et $D\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$.

Proposition IV.4.16. — *Soient $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ et $\delta:\mathbf{Q}_p^*\to\mathscr{O}_L^*$, un caractère continu. Si $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est stable par G, alors $\Pi=(D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)/(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)$ est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ et $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ est le dual de $\check{\Pi}$. De plus, on a la suite exacte suivante de G-modules :*

$$0\to\check{D}^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1\to\check{D}\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1\to\check{\Pi}\to 0.$$

Démonstration. — Il résulte de la prop. IV.4.10 que $\Pi\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ et que $\mathbf{D}(\Pi)$ est naturellement isomorphe à $\check{D}$. L'image de $\Pi^\vee$ par $\beta_{\mathbf{P}^1}$ est donc l'orthogonal de $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, c'est-à-dire $\check{D}^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$, d'après le th. II.2.11. On en déduit que $\check{\Pi}$ est le quotient de $\check{D}\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$ par $\check{D}^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$, et que son dual est $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, ce qui permet de conclure.

6. Exemples

Proposition IV.4.17. — *Si δ_1,δ_2 sont des caractères continus de $\mathbf{Q}_p^*$ à valeurs dans k_L, alors $\mathbf{D}(B(\delta_1,\delta_2))$ s'identifie naturellement à $k_{\mathscr{E}}(\omega\delta_1^{-1})$, et $\beta_{\mathbf{P}^1}$ induit un isomorphisme G-équivariant de $B(\delta_1,\delta_2)^\vee$ sur $k_{\mathscr{E}}(\omega\delta_1^{-1})^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$, où $\delta=\omega^{-1}\delta_1\delta_2$ est le caractère central de $B(\delta_1,\delta_2)$.*

Démonstration. — On reprend les notations de la prop. III.3.8. Soient $\Pi=B(\delta_1,\delta_2)$ et $W=W(\delta_1,\delta_2)$, et notons $\cdot$ et $\star$ les actions $\cdot_{\delta_1,\delta_2}$ et $\star_{\delta_1,\delta_2}$ de G. On note $\mathrm{Dir}_0\in\Pi^\vee$ la masse de Dirac en 0, et $\mathrm{Dir}_\infty=w\cdot\mathrm{Dir}_0$ la masse de Dirac en ∞ ; c'est l'élément de $\Pi^\vee$ dont le noyau est $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)\subset\Pi$ et qui vaut $\omega\delta_1^{-1}(-1)$ sur ϕ_∞.

Soient $n\in\mathbf{N}$ et $a\in\mathbf{Z}_p$. Si $i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$, alors

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}p^n & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i\right)(x)=\left(\phi_i\star\left(\begin{smallmatrix}p^{-n} & -p^{-n}a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right)(x)=(\delta_1\omega^{-1})(p^n)\,\mathbf{1}_{i+p\mathbf{Z}_p}(p^{-n}(x-a)).$$

On en déduit la formule

$$\left(\begin{smallmatrix}p^n & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_i=(\delta_1\omega^{-1})(p^n)\,\mathbf{1}_{a+p^ni+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}.$$

Le même calcul montre que

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}p^n & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_\infty\right)(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in a+p^n\mathbf{Z}_p,\\ (\delta_1\omega^{-1})(p^n)\,(\delta_1\delta_2^{-1}\omega^{-1})(p^{-n}(x-a)) & \text{si } x\notin a+p^n\mathbf{Z}_p.\end{cases}$$

On a l'identité $(\delta_1\omega^{-1})(p^n)\,(\delta_1\delta_2^{-1}\omega^{-1})(p^{-n}(x-a))=\delta_2(p^n)\,(\delta_1\delta_2^{-1}\omega^{-1})(x-a)$. Or $\frac{x-a}{x}\in 1+p\mathbf{Z}_p$, si $x\notin\mathbf{Z}_p$, et comme $\delta_1\delta_2^{-1}\omega^{-1}$ est trivial sur $1+p\mathbf{Z}_p$, on a $(\delta_1\delta_2^{-1}\omega^{-1})(x-a)=(\delta_1\delta_2^{-1}\omega^{-1})(x)=\phi_\infty(x)$, si $x\notin\mathbf{Z}_p$. On en déduit que $\left(\begin{smallmatrix}p^n & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi_\infty=\delta_2(p^n)\phi_\infty$ modulo $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p,k_L)$. Comme le k_L-module engendré par

les $\mathbf{1}_{a+p^n i+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}$, pour $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{Z}_p$ et $i \in \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$, est $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, k_L)$, cela nous fournit une suite exacte de P^+-modules

$$0 \to \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, k_L) \to I_{\mathbf{Z}_p}^{\Pi}(W) \to k_L\phi_\infty \to 0,$$

dont on déduit, par dualité, une suite exacte

$$0 \to k_L\mathrm{Dir}_\infty \to D_W^\natural(\Pi) \to \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L) \to 0.$$

En fait, si on ne s'intéresse qu'à l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, les suites exactes ci-dessus se scindent, et on a $D_W^\natural(\Pi) = \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L) \oplus k_L\mathrm{Dir}_\infty$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ sur Dir_∞ étant triviale, et celle sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L)$ donnée par la formule $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi \left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x+b)\,\mu$ habituelle .

Par ailleurs, $D_W^+(\Pi) = \left\{\mu \in D_W^\natural(\Pi) \text{ nuls sur } \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W \cap \left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W\right\}$. Or le k_L-module $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W \cap \left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot W$ est décrit par les relations $\left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot R_{\delta_1,\delta_2,0}$ et $\left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot R_{\delta_1,\delta_2,\infty}$ de la prop. III.3.8. On en déduit que $\mu \in D_W^\natural(\Pi)$ appartient à $D_W^+(\Pi)$ si et seulement si μ annule ϕ_∞ (seconde relation) et $\sum_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p} \phi_i = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$ (première relation). Autrement dit

$$D_W^+(\Pi) = \{\mu \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L),\ \int_{\mathbf{Z}_p} \mu = 0\}.$$

Or $\mu \mapsto A_\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x\,\mu$ induit un isomorphisme de $k_L[[\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]]$-modules de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L)$ sur $k_{\mathscr{E}}^+$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L)$ étant celle définie ci-dessus, et celle sur $k_{\mathscr{E}}^+$ étant la multiplication par $(1+T)^b$. L'application $\mu \mapsto A_\mu$ induit donc un isomorphisme de $k_L[[\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]] \cong k_{\mathscr{E}}^+$-modules de $D_W^+(\Pi)$ sur $Tk_{\mathscr{E}}^+ = k_{\mathscr{E}}^{+,+}$, et la structure de $k_{\mathscr{E}}^+$-(φ,Γ)-module que l'on obtient sur $Tk_{\mathscr{E}}^+$ est donnée par

$$\varphi(A_\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (\omega\delta_1^{-1})(p)\,(1+T)^{px}\,\mu = (\omega\delta_1^{-1})(p)\,A_\mu((1+T)^p - 1),$$

$$\sigma_a(A_\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (\omega\delta_1^{-1})(a)\,(1+T)^{ax}\,\mu = (\omega\delta_1^{-1})(a)\,A_\mu((1+T)^a - 1).$$

On en déduit que l'application $\mu \mapsto A_\mu$ induit un isomorphisme de (φ,Γ)-modules de $D_W^+(\Pi)$ sur $(k_{\mathscr{E}}(\omega\delta_1^{-1}))^{++}$, ce qui implique que $\mathbf{D}(\Pi) \cong k_{\mathscr{E}}(\omega\delta_1^{-1})$.

L'application $\alpha_{\mathbf{Z}_p,W} : D_W^\natural(\Pi) \to k_{\mathscr{E}}(\omega\delta_1^{-1})$ a pour noyau $k_L\mathrm{Dir}_\infty$ et coïncide avec la transformée d'Amice $\mu \mapsto A_\mu$ sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L)$. L'application $\beta_{\mathbf{Z}_p}$ est donc la composée de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : \Pi^\vee \to \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L)$ et de $\mu \mapsto A_\mu$. On en déduit que $\beta_{\mathbf{P}^1}$ est l'application envoyant $\mu \in \Pi^\vee$ sur (A_{μ_1}, A_{μ_2}), où $\mu_1 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\mu$ et $\mu_2 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w\cdot\mu$. Or l'application $\mu \mapsto (\mu_1,\mu_2)$ induit un isomorphisme de k_L-modules de $\Pi^\vee$ sur l'ensemble des couples d'éléments de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L)$ vérifiant $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\mu_2 = w\cdot(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\mu_1)$. En tenant compte de l'action de G, cela nous fournit un isomorphisme de $k_L[G]$-modules

$$\Pi^\vee \cong (\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, k_L) \boxtimes_{\omega^{-1}\delta_1\delta_2} \mathbf{P}^1) \otimes \omega\delta_1^{-1} \cong (k_{\mathscr{E}}^\natural \boxtimes_{\omega^{-1}\delta_1\delta_2} \mathbf{P}^1) \otimes \omega\delta_1^{-1}.$$

On conclut en utilisant l'isomorphisme de G-modules $(D\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)\otimes\eta \cong (D\otimes\eta)\boxtimes_{\delta\eta^2}\mathbf{P}^1$.

Proposition IV.4.18. — (i) $\check{\Pi} \cong B(\delta_2,\delta_1)\otimes\delta_\Pi^{-1}$, *si* $\Pi = B(\delta_1,\delta_2)$ *et si* $\delta_1,\delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$.
(ii) $\check{\mathrm{St}}$ *est une extension non triviale de* $B(1,\omega)$ *par* $\mathbf{1}$.
(iii) *Si* Π *est supersingulière, alors* $\check{\Pi} = \Pi\otimes\delta_\Pi^{-1}$.

Démonstration. — (i) Soient $\Pi = B(\delta_1,\delta_2)$ et $D = \mathbf{D}(\Pi)$. On a donc $D = k_{\mathscr{E}}(\omega\delta_1^{-1})$ et $\delta_\Pi = \omega^{-1}\delta_1\delta_2$. Si $\Pi_0 = B(\delta_2,\delta_1)\otimes\delta_\Pi^{-1}$, alors, d'après la prop. IV.4.17,

$$\mathbf{D}(\Pi_0) = k_{\mathscr{E}}(\omega\delta_2^{-1})\otimes\delta_\Pi = k_{\mathscr{E}}(\omega\delta_2^{-1}\omega^{-1}\delta_1\delta_2) = k_{\mathscr{E}}(\delta_1) = \check{D}.$$

De plus $\delta_{\Pi_0} = \delta_\Pi^{-2}\delta_\Pi = \delta_\Pi^{-1}$. Il suit de la prop. IV.4.17 et du th. II.2.11 que $D^\natural\boxtimes_{\delta_\Pi^{-1}}\mathbf{P}^1$ est le dual de $\check{\Pi}_0$. Or $D^\natural\boxtimes_{\delta_\Pi^{-1}}\mathbf{P}^1 = k_{\mathscr{E}}(\omega\delta_1^{-1})^\natural\boxtimes_{\delta_\Pi^{-1}}\mathbf{P}^1$ est aussi le dual de Π d'après la prop. IV.4.17. On a donc $\Pi\cong\check{\Pi}_0$, et donc aussi $\check{\Pi}\cong\Pi_0$, ce qui démontre le (i).

(ii) Comme on a une suite exacte $0\to\mathbf{1}\to B(\omega,1)\to\mathrm{St}\to 0$, on en déduit que la suite $0\to\mathrm{St}^\vee\to B(\omega,1)^\vee\to\mathbf{1}\to 0$ est exacte. Comme $\check{\mathrm{St}}$ et $\check{B}(\omega,1) = B(1,\omega)$ sont les quotients respectifs de $k_{\mathscr{E}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ par $\mathrm{St}^\vee$ et $B(\omega,1)^\vee$, le lemme du serpent nous fournit une suite exacte $0\to\mathbf{1}\to\check{\mathrm{St}}\to B(1,\omega)\to 0$. Comme $\check{\mathrm{St}}$ n'a pas de quotient fini (cf. (i) du th. IV.4.15), cette suite n'est pas scindée, ce qui démontre le (ii).

(iii) Supposons maintenant que Π est supersingulière, et soit $D = \mathbf{D}(\Pi)$. On a $\check{D}\cong D\otimes\delta_\Pi^{-1}$, puisque D est de dimension 2 sur k_L. Il résulte du th. IV.4.7 que $\beta_{\mathbf{P}^1}$ induit un isomorphisme de $\Pi^\vee$ sur $D^\natural\boxtimes_{\delta_\Pi^{-1}}\mathbf{P}^1$. Comme $\beta_{\mathbf{P}^1}$ induit un isomorphisme de $\check{\Pi}^\vee$ sur l'orthogonal de $\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^\vee)$ dans $\check{D}\boxtimes_{\delta_\Pi}\mathbf{P}^1$, et comme celui-ci est $\check{D}^\natural\boxtimes_{\delta_\Pi}\mathbf{P}^1$ d'après le th. II.2.11, on a

$$\check{\Pi}^\vee\cong\beta_{\mathbf{P}^1}(\check{\Pi}^\vee) = \check{D}^\natural\boxtimes_{\delta_\Pi}\mathbf{P}^1\cong(D^\natural\otimes\delta_\Pi)\boxtimes_{\delta_\Pi}\mathbf{P}^1\cong(D^\natural\boxtimes_{\delta_\Pi^{-1}}\mathbf{P}^1)\otimes\delta_\Pi\cong\Pi^\vee\otimes\delta_\Pi.$$

On en déduit l'isomorphisme $\check{\Pi}\cong\Pi\otimes\delta_\Pi^{-1}$ souhaité.

V. Surconvergence et analyticité locale

Ce chapitre est consacré à la détermination de l'espace Π^{an} des vecteurs localement analytiques de $\Pi = \mathbf{\Pi}(D)$, si $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. On sait *a priori*, grâce à Schneider et Teitelbaum [**66**], que $\Pi^{\mathrm{an}}\neq 0$; leur démonstration fournit même, par dualité, une construction assez explicite de Π^{an}, et notre étude de Π^{an} (th. V.2.20) suit d'assez près la construction de Schneider et Teitelbaum. Guidé par le dictionnaire d'analyse p-adique, on est amené à penser que Π^{an} doit être lié aux éléments surconvergents de D, ce qui s'avère être le cas, et nous conduit à consacrer le § V.1 à des rappels et des compléments sur le sous-module $D^\dagger$ de D. En particulier, le th. V.1.12 et son corollaire permettent de comparer les actions de $\left(\begin{smallmatrix}1 & p^n\mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1+p^n\mathbf{Z}_p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ sur $D^\dagger\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, ce qui joue un rôle très important pour l'étude des vecteurs localement analytiques.

V.1. Surconvergence

1. (φ,Γ)*-modules surconvergents.* — Soit $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$. Si $n\in\mathbf{N}$, soit $D^{\dagger,n}$ le plus grand sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}$-module M de type fini de D tel que $\varphi(M)$ soit inclus dans le sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n+1}$-module de D engendré par M (cf. [**19**] ou rem. V.1.2). Comme tout

(φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est surconvergent [**9, 20**], il existe un entier $m_0(D)\geq 1$ tel que $D^{\dagger,m_0(D)}$ soit libre de rang d sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m_0(D)}$ et $D^{\dagger,n}=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m_0(D)}}D^{\dagger,m_0(D)}$, pour tout $n\geq m_0(D)$. Cette propriété montre que les modules ci-dessous ne dépendent pas du choix de $m_0(D)$ (les produits tensoriels sont tous au-dessus de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m_0(D)}$) :

- $D^{(0,r_n]}=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]}\otimes D^{\dagger,m_0(D)}$, pour $n\geq m_0(D)$,
- $D^{[r_a,r_n]}=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_n]}\otimes D^{\dagger,m_0(D)}$, pour $a\geq n\geq m_0(D)$,
- $D^{]0,r_n]}=\mathscr{E}^{]0,r_n]}\otimes D^{\dagger,m_0(D)}$, pour $n\geq m_0(D)$,
- $D^{\dagger}=\mathscr{E}^{\dagger}\otimes D^{\dagger,m_0(D)}$ et $D_{\mathrm{rig}}=\mathscr{R}\otimes D^{\dagger,m_0(D)}$.

De plus, $D^{]0,r_n]}$ est l'intersection, pour $a\geq n$, des $L\cdot D^{[r_a,r_n]}$, et $D^{\dagger}$ et D_{rig} sont les réunions respectives, pour $n\geq m_0(D)$, des $L\cdot D^{(0,r_n]}$ et des $D^{]0,r_n]}$.

Tous les modules définis ci-dessus sont munis d'une action de Γ, le module D_{rig} est aussi muni d'une action de φ commutant à celle de Γ ; par contre, φ ne préserve pas les autres modules : il envoie $D^{\dagger,n}$ dans $D^{\dagger,n+1}$, $D^{[r_a,r_n]}$ dans $D^{[r_{a+1},r_{n+1}]}$, et $D^{]0,r_n]}$ dans $D^{]0,r_{n+1}]}$.

Il existe $\ell(D)$ tel que $\psi(D^{\dagger,m_0(D)})\subset T^{-\ell(D)}D^{\dagger,m_0(D)}$. On en déduit que ψ envoie $D^{\dagger,n+1}$ dans $T^{-\ell(D)}D^{\dagger,n}$, si $n\geq m_0(D)$, envoie $D^{(0,r_{n+1}]}$ et $D^{]0,r_{n+1}]}$ dans $D^{(0,r_n]}$ et $D^{]0,r_n]}$, si $n\geq m_0(D)$, et préserve D_{rig}. On en déduit, en utilisant la formule $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z)=(1+T)^i\varphi^n\circ\psi^n((1+T)^{-i}z)$, le résultat suivant.

Lemme V.1.1. — (i) *Si $m\leq n-m_0(D)$, alors $D^{(0,r_n]}$, $D^{]0,r_n]}$ et $L\cdot D^{[r_a,r_n]}$, sont stables par $\mathrm{Res}_{i+p^m\mathbf{Z}_p}$, pour tout $i\in\mathbf{Z}_p$.*

(ii) *$D^{\dagger}$ et D_{rig} sont stables par $\mathrm{Res}_{i+p^m\mathbf{Z}_p}$, pour tout $i\in\mathbf{Z}_p$ et tout $m\in\mathbf{N}$.*

Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, et si X est un des modules $D^{(0,r_n]}$, $D^{]0,r_n]}$ et $L\cdot D^{[r_a,r_n]}$, on définit $X\boxtimes U$ comme l'intersection de X et de $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes U$ (qui est, quant-à-lui, défini comme d'habitude, à partir de φ et ψ). Il résulte du lemme V.1.1 que $X\boxtimes U=\oplus_{i\in U \bmod p^m}X\boxtimes(i+p^m\mathbf{Z}_p)$, si U est stable par translation par $p^m\mathbf{Z}_p$, et si $m\leq n-m_0(D)$.

On a défini, à partir de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+}$, des anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}$ et $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]}=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}[\frac{1}{T}]$, pour $n\geq 1$, des anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_n]}$, pour $a\geq n\geq 1$, des anneaux $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$, pour $n\geq 1$, et des anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger}$, $\mathscr{E}^{\dagger}$, $\mathscr{R}$, et $\mathscr{R}^{+}$. On peut faire les mêmes constructions [**24**] en partant de $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{+}$, ce qui nous fournit des anneaux $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}$ et $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]}=\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}[\frac{1}{T}]$ pour $n\geq 1$, des anneaux $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_n]}$, pour $a\geq n\geq 1$, des anneaux $\widetilde{\mathscr{E}}^{]0,r_n]}$, pour $n\geq 1$, et des anneaux $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{\dagger}$, $\widetilde{\mathscr{E}}^{\dagger}$, $\widetilde{\mathscr{R}}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}^{+}$. On en déduit des modules :

- $\widetilde{D}^{\dagger,n}=\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}\otimes D^{\dagger,m_0(D)}$, pour $n\geq m_0(D)$,
- $\widetilde{D}^{(0,r_n]}=\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]}\otimes D^{\dagger,m_0(D)}$ pour $n\geq m_0(D)$,
- $\widetilde{D}^{[r_a,r_n]}=\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_n]}\otimes D^{\dagger,m_0(D)}$, pour $a\geq n\geq m_0(D)$,
- $\widetilde{D}^{]0,r_n]}=\widetilde{\mathscr{E}}^{]0,r_n]}\otimes D^{\dagger,m_0(D)}$ pour $n\geq m_0(D)$,
- $\widetilde{D}^{\dagger}=\widetilde{\mathscr{E}}^{\dagger}\otimes D^{\dagger,m_0(D)}$ et $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}=\widetilde{\mathscr{R}}\otimes D^{\dagger,m_0(D)}$.

Remarque V.1.2. — Les modules définis ci-dessus peuvent aussi se décrire en termes d'anneaux de Fontaine, ce qui est souvent très utile pour comprendre ce qui se passe.

Le procédé fournissant, à partir de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, les anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}$ et $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}[\frac{1}{T}]$ pour $n \geq 1$, les anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_n]}$, pour $a \geq n \geq 1$, les anneaux $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$, pour $n \geq 1$, et les anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger}$, $\mathscr{E}^{\dagger}$, $\mathscr{R}$, et $\mathscr{R}^+$ permet [**9, 24**] de construire :

– des anneaux $\mathbf{A}^{\dagger,n}$ et [(54)] $\mathbf{A}^{(0,p^{-n}]} = \mathbf{A}^{\dagger,n}[\frac{1}{T}]$, pour $n \geq 1$, des anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}^{[p^{-a},p^{-n}]}$, pour $a \geq n \geq 1$, des anneaux [(55)] $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}$, pour $n \geq 1$, et des anneaux $\mathbf{A}^{\dagger}$, $\mathbf{B}^{\dagger}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$, en partant de $\mathbf{A}^+$,

– des anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,n}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-n}]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,n}[\frac{1}{T}]$, pour $n \geq 1$, des anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}^{[p^{-a},p^{-n}]}$, pour $a \geq n \geq 1$, des anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}$, pour $n \geq 1$, et des anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$, en partant de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$.

Maintenant, si $V = \mathbf{V}(D)$ de telle sorte que $D = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$, alors :

- $D^{\dagger,n} = (\mathbf{A}^{\dagger,n} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$ et $\widetilde{D}^{\dagger,n} = (\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,n} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$, si $n \geq m_0(D)$,
- $D^{(0,r_n]} = (\mathbf{A}^{(0,p^{-n}]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$ et $\widetilde{D}^{(0,r_n]} = (\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-n}]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$, si $n \geq m_0(D)$,
- $\widetilde{D}^{[r_a,r_n]} = (\widetilde{\mathbf{A}}^{[p^{-a},p^{-n}]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$, si $a \geq n \geq m_0(D)$,
- $\widetilde{D}^{]0,r_n]} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$, si $n \geq m_0(D)$,
- $\widetilde{D}^{\dagger} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$ et $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}} = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$.

Remarque V.1.3. — Le sous-anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,b}$ de $\widetilde{\mathbf{A}}$ est le complété de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{T^{n_b}}]$ pour la topologie p-adique. On en déduit les résultats suivants.

(i) Si $k \in \mathbf{N}$, on a l'inclusion $T^{kn_b}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,b} \subset (T^{n_b},p)^k\widetilde{\mathbf{A}}^{++} + p^k\widetilde{\mathbf{A}}$. On en déduit que si $z \in T^{kn_b}D^{\dagger,b}$, l'image de z dans D/p^kD appartient à $(T^{n_b},p)^k(\widetilde{D}/p^k\widetilde{D})^{++}$, et l'exactitude du foncteur $D \mapsto \widetilde{D}^{++}$ montre que l'on peut écrire z sous la forme $z = x + p^k y$, avec $x \in (T^{n_b},p)^k\widetilde{D}^+$ et $y \in \widetilde{D}$.

(ii) Si $\ell, k \in \mathbf{N}$, on a $T^{-\ell n_b}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,b} \cap p^k\widetilde{\mathbf{A}} \subset p^{[k/2]}T^{-\ell n_{b+1}}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,b+1}$. D'où les inclusions

$$T^{-\ell n_b}\widetilde{D}^{\dagger,b} \cap p^k\widetilde{D} \subset p^{[k/2]}T^{-\ell n_{b+1}}\widetilde{D}^{\dagger,b+1} \quad \text{et} \quad T^{-\ell n_b}D^{\dagger,b} \cap p^kD \subset p^{[k/2]}T^{-\ell n_{b+1}}D^{\dagger,b+1}.$$

2. Le module $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$. — On dispose d'un morphisme d'anneaux $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ surjectif, dont le noyau est un idéal principal engendré par $\omega = \frac{T}{\varphi^{-1}(T)} = \sum_{i=0}^{p-1}[(1+T)^{i/p}]$. On note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ le complété de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ pour la topologie ω-adique, et $\mathbf{A}_{\max}$ le complété de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{\omega}{p}]$ pour la topologie p-adique. Alors $\mathbf{A}_{\max}$ s'identifie à un sous anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et θ s'étend, par linéarité et continuité en un morphisme $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbf{C}_p$. L'action de φ s'étend par continuité à $\mathbf{A}_{\max}$ et on a $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{A}_{\max}[\frac{1}{p}])$.

Soit $\widetilde{\mathbf{A}}^{++} = W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++})$, et soit $r : \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to W(\overline{\mathbf{F}}_p)$ la réduction modulo $\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$. Si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, et si $a \in \overline{\mathbf{F}}_p$ est la réduction de x modulo $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$, on a $x - a \in \widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ et $[x] - [a] \in \widetilde{\mathbf{A}}^{++}$, et donc $r([x]) = [a]$. On en déduit que $r(\omega) = p$.

Lemme V.1.4. — *On a $\widetilde{\mathbf{A}}^{++} \cap \operatorname{Ker}\theta = \omega\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$.*

(54) Ce regrettable décalage vient de ce que $v_{\mathbf{E}}(T) = \frac{p}{p-1}$; on a $(\mathscr{O}_L \cdot \mathbf{A}^{(0,p^{-n}]})^{\mathscr{H}} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]}$, $(\mathscr{O}_L \cdot \widetilde{\mathbf{A}}^{[p^{-a},p^{-b}]})^{\mathscr{H}} = \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}$, etc.

(55) Partir de $\mathbf{A}$ ou $\widetilde{\mathbf{A}}$ donne la même chose car $\mathbf{A}^+$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ pour la topologie faible.

Démonstration. — Cela suit de ce que $\mathrm{Ker}\,\theta$ est engendré par ω et $r(\omega)=p$ n'est pas un diviseur de 0.

On rappelle que tout élément x de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ admet des *écritures minimales* : si $k_n \in \mathbf{Z}$ est le plus petit entier tel que $x \in p^{-k_n}\widetilde{\mathbf{A}}^{+} + (\mathrm{Ker}\,\theta)^{n+1}$, alors $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante et x peut s'écrire sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} p^{-k_n}x_n\omega^n$, où les x_n sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ (une telle écriture est loin d'être unique). Le lemme ci-dessus décrit les sous-anneaux $\mathbf{A}_{\max}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+} = \cap_{i\in\mathbf{N}}\varphi^i(\mathbf{A}_{\max}[\frac{1}{p}])$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ via l'écriture minimale de leurs éléments. On dit qu'une suite d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *sous-linéaire* si $rn - k_n \to +\infty$, pour tout $r>0$.

Lemme V.1.5. — *Soient $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} p^{-k_n}x_n\omega^n$ une écriture minimale de x.*
(i) *$x \in \mathbf{A}_{\max}$ si et seulement si $k_n \le n$ pour tout n et $n-k_n \to +\infty$.*
(ii) *$x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$ si et seulement si k_n est sous-linéaire.*

Démonstration. — Pour le (i), cf. [**23**, n° 8.5]. Passons à la démonstration du (ii). Comme $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+} = \cap_{i\in\mathbf{N}}\varphi^i(\mathbf{A}_{\max}[\frac{1}{p}])$, on peut écrire x, pour tout i, sous la forme $p^{-m_i}\varphi^i(y_i)$, avec $y_i \in \mathbf{A}_{\max}$ et $m_i \in \mathbf{N}$. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} p^{-k_{i,n}}y_{i,n}\omega^n$ une écriture minimale de y_i. Comme $\varphi^i(\omega) = \omega^{p^i} + pu_i$, avec $u_i \in \widetilde{\mathbf{A}}^{+}$, on a $x = p^{-m_i}\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi^i(y_{i,n})\frac{(\omega^{p^i}+pu_i)^n}{p^{k_{i,n}}}$, et comme u_i et les $\varphi^i(y_{i,n})$ sont éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$, et $k_{i,n}\le n$, on en déduit la majoration $k_n \le \frac{n}{p^i} + m_i$, pour tout i. La suite k_n est donc sous-linéaire, ce qui démontre une des deux implications du (ii). L'autre suit de ce que $\sum_{n=0}^{+\infty} p^{-k_n}\varphi^{-i}(x_n)\varphi^{-i}(\omega)^n$ converge dans $\mathbf{A}_{\max}[\frac{1}{p}]$ pour tout i, si la suite $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sous-linéaire.

Lemme V.1.6. — (i) *$r : \widetilde{\mathbf{A}}^{+}[\frac{1}{p}] \to W(\overline{\mathbf{F}}_p)[\frac{1}{p}]$ s'étend par continuité à $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$.*
(ii) *Le noyau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{++}$ de r est fermé dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$, est constitué des $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$ tels que $\varphi^i(x)\to 0$, et on a $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+} = W(\overline{\mathbf{F}}_p)[\frac{1}{p}] \oplus \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{++}$.*

Démonstration. — Comme $r(\omega)=p$, le (i) du lemme V.1.5 montre que r s'étend par continuité à $\mathbf{A}_{\max}$, et donc aussi à $\mathbf{A}_{\max}[\frac{1}{p}]$, à $\varphi^i(\mathbf{A}_{\max}[\frac{1}{p}])$, pour tout i, et enfin à $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$. Le (ii) est alors immédiat à part le fait que $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{++}$ entraine $\varphi^i(x)\to 0$. En écrivant ω sous la forme $(\omega-p)+p$, on peut écrire x sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} p^{-k_n}x'_n(\omega-p)^n$. Or $r(x)=0$ si et seulement si $r(x'_0)=0$, et comme $\varphi^i(\omega-p)\to 0$, on a $\varphi^i(x)\to 0$ si et seulement si $\varphi^i(x'_0)\to 0$. Ceci permet de déduire le résultat cherché de l'énoncé correspondant pour $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$.

Soit $V = \mathbf{V}(D)$. On note $\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}$ le module $(\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}\otimes V)^{\mathscr{H}}$, et $\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}^{++}$ le sous-module $(\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p}\otimes V)^{\mathscr{H}}$ de $\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}$. Comme $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ est la somme directe des $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-modules $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p}$ et $W(\overline{\mathbf{F}}_p)$, on a $\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}} = \widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}^{++}\oplus D^{\mathrm{nr}}$.

Lemme V.1.7. — *θ induit une surjection de $\widetilde{D}^+$ sur $\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}$.*

Démonstration. — On a $\widetilde{D}^+ = \widetilde{D}^{++} \oplus D^{\mathrm{nr}}$ et $\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}} = \widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}^{++} \oplus D^{\mathrm{nr}}$. Il suffit donc de prouver que θ induit une surjection de $\widetilde{D}^{++} = (\widetilde{\mathbf{A}}^{++} \otimes V)^{\mathscr{H}}$ sur $\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}^{++} = (\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p} \otimes V)^{\mathscr{H}}$. Or, d'après le lemme V.1.4, on a une suite exacte

$$0 \to \widetilde{\mathbf{A}}^{++} \otimes V \to \widetilde{\mathbf{A}}^{++} \otimes V \to \mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p} \otimes V \to 0,$$

où la première flèche est $x \mapsto \omega x$. On conclut grâce à la nullité de $H^1(\mathscr{H}, \widetilde{\mathbf{A}}^{++} \otimes V)$, elle-même conséquence de la nullité de $H^1(\mathscr{H}, \widetilde{\mathbf{E}}^{++} \otimes V)$ (cf. [**22**]).

Soit $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+ = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ \otimes V)^{\mathscr{H}}$. On peut aussi caractériser $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$, de manière intrinsèque, comme l'ensemble des $x \in \widetilde{D}_{\mathrm{rig}} = \widetilde{\mathscr{R}} \otimes_{\mathscr{R}} D_{\mathrm{rig}}$ tels que la suite $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée.

Lemme V.1.8. — *Tout élément x de $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$ peut s'écrire, au choix, sous l'une des deux formes $x = \sum_{n=0}^{+\infty} p^{-k_n} x_n \omega^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} p^{-k_n} x'_n (\omega - p)^n$, où $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite sous-linéaire croissante, et les x_n, x'_n sont des éléments de $\widetilde{D}^+$.*

Démonstration. — On passe d'une écriture à l'autre en développant $(\omega - p)^n$ ou $((\omega - p) + p)^n$; on peut donc se contenter de démontrer l'existence d'une écriture sous la première forme. D'après le (ii) du lemme V.1.5, on peut écrire x sous la forme $x = \sum_{n=0}^{+\infty} p^{-k_n} a_n \omega^n$, où $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sous-linéaire croissante, et les a_n sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes V$. On a alors $\theta(a_0) \in \widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}$, et la surjectivité de $\theta : \widetilde{D}^+ \to \widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}$ (cf. lemme V.1.7), nous fournit $b_0 \in \widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes V$, et $x_0 \in \widetilde{D}^+$, tels que $x_0 - a_0 = \omega b_0$. On a donc $x = p^{-k_0} x_0 + (a_1 + p^{k_1 - k_0} b_0) \frac{\omega}{p^{k_1}} + \sum_{n\geq 2} a_n \frac{\omega^n}{p^{k_n}}$, et on peut réitérer le procédé pour écrire $a_1 + p^{k_1 - k_0} b_0$ sous la forme $x_1 + b_1 \omega$, avec $b_1 \in \widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes V$ et $x_1 \in \widetilde{D}^+$. Un passage à la limite nous fournit le résultat.

Lemme V.1.9. — (i) *$\sum_{n\in\mathbf{N}} \varphi^{-n}(T) \widetilde{D}^+$ est dense dans $\widetilde{D}^{++}$.*
(ii) *$\sum_{n\in\mathbf{N}} \varphi^{-n}(T) \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$ est dense dans $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^{++}$.*

Démonstration. — Soit $x_0 \in \widetilde{D}^{++}$. La réduction $\overline{x}_0$ de x_0 modulo $\mathfrak{m}_L$ appartient à $\widetilde{D}^{++}(V/\mathfrak{m}_L)$. Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\overline{x}_0 \in \varphi^{-n_0}(T) \widetilde{D}^{++}(V/\mathfrak{m}_L)$, et le foncteur $D \mapsto \widetilde{D}^{++}$ étant un foncteur exact, on peut écrire x_0 sous la forme $\varphi^{-n_0}(T) y_0 + p x_1$, avec $y_0 \in \widetilde{D}^{++}$. Mais alors $\varphi^n(x_1) \to 0$, et donc $x_1 \in \widetilde{D}^{++}$, ce qui permet de réitérer le procédé. On en déduit que $x \in \sum_{n\in\mathbf{N}} \varphi^{-1}(T) \widetilde{D}^+$ modulo $p^k \widetilde{D}^+$, pour tout k, ce qui démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), écrivons $x \in \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^{++}$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \frac{(\omega-p)^n}{p^{k_n}}$. Comme $\omega - p$ est divisible par $[(1+T)^{p^{-1}}] - 1 = \varphi^{-1}(T)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, l'appartenance de x à $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^{++}$ équivaut à ce que $\varphi^n(x_0) \to 0$, et donc aussi à l'appartenance de x_0 à $\widetilde{D}^{++}$. Ceci permet de déduire le (ii) du (i).

3. L'anneau $\mathscr{R}(\Gamma)$ et ses sous-anneaux. — Si C est un pro-p-groupe cyclique (donc isomorphe à $\mathbf{Z}_p$), et si c est un générateur de C, l'algèbre de groupe complétée Λ_C de C est isomorphe à $\mathscr{O}_L[[c-1]]$. Ceci permet de définir des anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(C)$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(C)$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}(C)$, $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(C)$, $\mathscr{R}(C)$ et $\mathscr{R}^+(C)$ en remplaçant par $c-1$ la variable T intervenant dans la définition de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}$, $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$, $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}^+$, à partir de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ (cf. n° 2 du § 1). Explicitement (avec $n_b=(p-1)p^{b-1}$ et $r_b=\frac{1}{n_b}$) :

- si $b\geq 1$, alors $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(C)$ est le complété de $\Lambda_C[\frac{p}{(c-1)^{n_b}}]$ pour la topologie p-adique et $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(C)=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(C)[\frac{1}{c-1}]$,
- si $a\geq b\geq 1$, alors $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}(C)$ est le complété de $\Lambda_C[\frac{(c-1)^{n_a}}{p},\frac{p}{(c-1)^{n_b}}]$ pour la topologie p-adique,
- si $b\geq 1$, alors $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(C)$, est l'intersection des $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}(C)[\frac{1}{p}]$, pour $a\geq b$,
- $\mathscr{R}(C)$ est la réunion des $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(C)$, pour $b\geq 1$,
- $\mathscr{R}^+(C)$ est l'ensemble des éléments de $\mathscr{R}(C)$ sans puissances négatives de $(c-1)$; c'est aussi l'algèbre des distributions sur C.

Remarque V.1.10. — On peut définir [**67**] des anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}(C)$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}(C)$, $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(C)$, $\mathscr{R}(C)$ et $\mathscr{R}^+(C)$ pour tout pro-p-groupe analytique, non nécessairement commutatif.

Lemme V.1.11. — *Si C_n est le sous-groupe fermé de C d'indice p^n, on a des isomorphismes*[56] :

- $\Lambda_C\otimes\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b-n}(C_n)\cong\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(C)$ *et* $\Lambda_C\otimes\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(C_n)=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(C)$, *si* $b\geq n+1$,
- $\Lambda_C\otimes\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_{a-n},r_{b-n}]}(C_n)\cong\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}(C)$, *si* $a\geq b\geq n+1$,
- $\Lambda_C\otimes\mathscr{E}^{]0,r_{b-n}]}(C_n)\cong\mathscr{E}^{]0,r_b]}(C)$, *si* $b\geq n+1$,
- $\Lambda_C\otimes\mathscr{R}(C_n)\cong\mathscr{R}(C)$ *et* $\Lambda_C\otimes\mathscr{R}^+(C_n)\cong\mathscr{R}^+(C)$

Démonstration. — Cela suit du lemme I.1.1.

Soit H un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}_p^*$ (comme Γ, par exemple). On note H_d le sous-groupe de H correspondant à $1+p^d\mathbf{Z}_p$, et on choisit d de telle sorte que H_d soit procyclique (donc on peut prendre $d=1$, si $p\neq 2$, et $d=2$, si $p=2$). On définit alors les anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(H)$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}(H)$, $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(H)$, $\mathscr{R}(H)$ et $\mathscr{R}^+(H)$ par[57] (le lemme V.1.11 montre que cette définition ne dépend pas du choix de d) :

- $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(H)=\Lambda_H\otimes\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b-d}(H_d)$ et $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(H)=\Lambda_H\otimes\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_{b-d}]}(H_d)$, si $b\geq d+1$,
- $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}(H)=\Lambda_H\otimes\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_{a-d},r_{b-d}]}(H_d)$, si $a\geq b\geq d+1$,
- $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(H)=\Lambda_H\otimes\mathscr{E}^{]0,r_{b-d}]}(H_d)$, si $b\geq d+1$,
- $\mathscr{R}(H)=\Lambda_H\otimes\mathscr{R}(H_d)$ et $\mathscr{R}^+(H)=\Lambda_H\otimes\mathscr{R}^+(H_d)$.

(56) Tous les produits tensoriels sont au-dessus de Λ_{C_n}.
(57) Tous les produits tensoriels sont au-dessus de Λ_{H_d}.

Comme d'habitude, $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(H)$ est l'intersection, pour $a \geq b$, des $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}(H)[\frac{1}{p}]$, et $\mathscr{R}(H)$ est la réunion, pour $b \in \mathbf{N}$, des $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(H)$.

4. Le Γ-module $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. — La continuité de l'action de Γ implique l'existence de $m_1(D) \geq m_0(D)$ tel que

$$(\sigma_a - 1)D^{\dagger,m_0(D)} \subset T^2 D^{\dagger,m_0(D)}, \quad \text{pour tout } a \in 1 + p^{m_1(D)}\mathbf{Z}_p.$$

On a alors

$$(\sigma_a - 1)D^{\dagger,m} \subset T^2 D^{\dagger,m}, \quad \text{pour tout } a \in 1 + p^{m_1(D)}\mathbf{Z}_p \text{ et tout } m \geq m_0(D).$$

Rappelons que $D^{\psi=1}$, qui est contenu dans $D^\sharp$, est inclus dans $D^{(0,r_{m_0(D)}]}$ puisque $D^\sharp$ l'est ([**32**, cor. II.6.2]). Il en résulte que $\mathscr{C} = (1-\varphi)\cdot D^{\psi=1}$ est inclus dans $D^{(0,r_m]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, pour tout $m > m_0(D)$. Le th. I.5.2 peut se raffiner sous la forme du th. V.1.12 ci-dessous et de son corollaire.

Théorème V.1.12. — (i) *Si $b \geq 2m_1(D)$, alors $D^{(0,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(\Gamma)$-module libre de rang d engendré par $D^{(0,r_{2m_1(D)}]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.*

(ii) *Si $b \geq 2m_1(D)$, alors $D^{]0,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{]0,r_b]}(\Gamma)$-module libre de rang d engendré par $D^{(0,r_{2m_1(D)}]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.*

(iii) *$D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est un $\mathscr{R}(\Gamma)$-module libre de rang d engendré par $D^{(0,r_{2m_1(D)}]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.*

Corollaire V.1.13. — (i) *Il existe $m_2(D) \geq 2m_1(D)$ tel que l'inclusion de $\mathscr{C}$ dans $D^{(0,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ induise un isomorphisme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} \mathscr{C} \cong D^{(0,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, si $b \geq m_2(D)$.*

(ii) *Si $b \geq m_2(D)$, alors l'inclusion de $\mathscr{C}$ dans $D^{]0,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ induit un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{]0,r_b]}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} \mathscr{C}$ sur $D^{]0,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.*

(iii) *L'inclusion $\mathscr{C} \subset D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ induit un isomorphisme $\mathscr{R}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} \mathscr{C} \cong D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.*

Démonstration. — Le corollaire se démontre en utilisant le fait que $\mathscr{C}$ est un Λ_Γ-module libre de rang d et $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma) \otimes_{\Lambda_\Gamma} \mathscr{C}$ (cf. th. I.5.2). Ceci implique, en vertu du (i) du théorème, que $(D^{(0,r_{2m_1(D)}]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)/(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_{2m_1(D)}]}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} \mathscr{C})$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_{2m_1(D)}]}(\Gamma)$-module de torsion ; il est donc tué par tensorisation par $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(\Gamma)$, pour tout b suffisamment grand. Ceci démontre le (i) du corollaire, et comme les (ii) et (iii) en sont des conséquences immédiates en vertu des (ii) et (iii) du théorème, cela démontre le corollaire.

Passons à la démonstration du théorème. Soit $n \geq 1$. Si X est D_{rig} ou bien un des modules $D^{(0,r_b]}$, $D^{[r_a,r_b]}$, $D^{]0,r_b]}$, si $b \geq n + m(D)$, alors l'application $\sigma_i \otimes x \mapsto \sigma_i \cdot x$ induit un isomorphisme

$$\mathscr{O}_L[[\Gamma]] \otimes_{\mathscr{O}_L[[\Gamma_n]]} (X \boxtimes (1 + p^n\mathbf{Z}_p)) \cong X \boxtimes \mathbf{Z}_p^*,$$

où $X \boxtimes (1 + p^n\mathbf{Z}_p) = X \cap (D_{\mathrm{rig}} \boxtimes (1 + p^n\mathbf{Z}_p))$. (L'isomorphisme réciproque est

$$x \mapsto \sum_{i \bmod p^n} \sigma_i \otimes \left(\mathrm{Res}_{1+p^n\mathbf{Z}_p} \sigma_i^{-1} \cdot x\right)$$

et, d'après le lemme V.1.1, $\mathrm{Res}_{1+p^n\mathbf{Z}_p}\sigma_i^{-1}\cdot x \in X$.) Maintenant, si $x \in X\boxtimes(1+p^n\mathbf{Z}_p)$, on a $x = (1+T)\varphi^n(y)$, où $y = \psi^n((1+T)^{-1}x)$. Comme $\psi^n(D^{(0,r_b]}) = D^{(0,r_{b-n}]}$, $\psi^n(D^{]0,r_b]}) = D^{]0,r_{b-n}]}$ et $\psi^n(D_{\mathrm{rig}}) = D_{\mathrm{rig}}$, on est conduit à définir les modules :

- $M_n^{\dagger,m} = (1+T)\varphi^n(D^{\dagger,m})$
- $M_n^{[r_a,r_b]} = (1+T)\varphi^n(D^{[r_a,r_b]})$,
- $M_n^{]0,r_b]} = (1+T)\varphi^n(D^{]0,r_b]})$,
- $M_{\mathrm{rig},n} = (1+T)\varphi^n(D_{\mathrm{rig}})$.

Le th. V.1.12 est alors une conséquence de la prop. V.1.14 ci-dessous. (Le (i) s'obtient, via l'isomorphisme $M_m^{\dagger,b-m} \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b-m}(\Gamma_m)f_{1,m} \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b-m}(\Gamma_m)f_{d,m}$, avec $m = m_1(D)$, que l'on déduit du premier point de cette proposition, en tensorisant par $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(\Gamma)$. Les (ii) et (iii) se démontrent de même.)

Soient $e_1,\dots,e_d$ une base de $D^{\dagger,m_1(D)}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m_1(D)}$, et $f_{i,n} = (1+T)\varphi^n(e_i)$, si $1 \le i \le d$ et $n \in \mathbf{N}$.

Proposition V.1.14. — *$f_{1,n},\dots,f_{d,n}$ est une base de :*

- $M_n^{\dagger,m}$ *sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m}(\Gamma_n)$, *si* $m \ge n \ge m_1(D)$,
- $M_n^{[r_a,r_b]}$ *sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}(\Gamma_n)$, *si* $a \ge b \ge n \ge m_1(D)$,
- $M_n^{]0,r_b]}$ *sur* $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(\Gamma_n)$, *si* $b \ge n \ge m_1(D)$,
- $M_{\mathrm{rig},n}$ *sur* $\mathscr{R}(\Gamma_n)$.

Démonstration. — Soit $M = M_n^{\dagger,n}$. Soit $\gamma = \sigma_{1+p^n}$; c'est un générateur de Γ_n. Soit $x \in M$. Il existe $y \in D^{\dagger,n}$ tel que l'on ait $x = (1+T)\varphi^n(y)$, et on a

$$\begin{aligned}(\gamma-1)x &= (1+T)^{1+p^n}\varphi^n(\gamma(y)) - (1+T)\varphi^n(y)\\ &= (1+T)\varphi^n((1+T)\gamma(y)-y) = (1+T)\varphi^n(Ty+(1+T)(\gamma-1)y),\end{aligned}$$

ce qui fait qu'étudier l'application $\gamma-1$ sur M revient à étudier $G : D^{\dagger,n} \to D^{\dagger,n}$ définie par $G(y) = T(y+(1+T)T^{-1}(\gamma-1)y)$. Nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme V.1.15. — (i) *G est inversible sur $D^{(0,r_n]} = D^{\dagger,n}[\frac{1}{T}]$.*

(ii) *G^k induit une bijection de $T^aD^{\dagger,n}$ sur $T^{a+k}D^{\dagger,n}$, quels que soient $a,k \in \mathbf{Z}$, qui coïncide modulo $T^{k+a+1}D^{\dagger,n}$ avec la multiplication par T^k.*

Démonstration. — On a

$$(\gamma-1)(\sum_{i=1}^d x_ie_i) = \sum_{i=1}^d \big((\gamma-1)x_i\big)e_i + x_i\big((\gamma-1)e_i\big),$$

et $(\gamma-1)T^a\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n} \subset T^{a+2}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}$, quel que soit $a \in \mathbf{Z}$; on en déduit, pour tout $a \in \mathbf{Z}$, l'inclusion $(\gamma-1)T^aD^{\dagger,n} \subset T^{a+2}D^{\dagger,n}$, puisque $(\gamma-1)e_i \in T^2D^{\dagger,n}$ grâce à l'hypothèse $n \ge m_1(D)$. Ceci implique que $h(y) = (1+T)T^{-1}(\gamma-1)y$ est strictement contractante puisqu'elle envoie $T^aD^{\dagger,n}$ dans $T^{a+1}D^{\dagger,n}$, quel que soit $a \in \mathbf{Z}$, et que les $T^aD^{\dagger,n}$ forment une base de voisinages de 0 et $\cup_{a\in\mathbf{Z}}T^aD^{\dagger,n} = D^{(0,r_n]}$. L'application G admet donc comme inverse G^{-1} définie par $G^{-1}(z) = T^{-1}z - h(T^{-1}z) + h^2(T^{-1}z) + \cdots$. Ceci démontre le (i).

Le (ii) se démontre par récurrence, les cas $k=1$ et $k=-1$ se déduisant de ce qui précède.

Lemme V.1.16. — (i) *Si* $f=\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m}$, *et si* $e\in D^{\dagger,m}$, *alors pour tout* $k\in\mathbf{Z}$, *on a* $a_kG^k(e)\in D^{\dagger,m}$, *et* $a_kG^k(e)\to 0$ *dans* $D^{\dagger,n}$ *quand* $k\to\infty$, *ce qui permet de définir* $f(G)(e)$ *comme la somme de la série des* $a_kG^k(e)$.

(ii) *L'application* $(F_1,\dots,F_d)\mapsto F_1(G)(e_1)+\cdots+F_d(G)(e_d)$ *induit une bijection de* $(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m})^d$ *sur* $D^{\dagger,m}$.

Démonstration. — Le (i) est une conséquence directe du lemme précédent, et de ce que $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}} D^{\dagger,n}=D^{\dagger,m}$. Pour démontrer le (ii), il suffit de vérifier le résultat modulo T puisque les deux modules en présence sont séparés et complets pour la topologie T-adique. Or, d'après le lemme V.1.17 ci-dessous, on a $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m}/T=(\mathscr{O}_L/p)[Y]$ et $D^{\dagger,m}/TD^{\dagger,m}=(\mathscr{O}_L/p)[Y]e_1+\cdots+(\mathscr{O}_L/p)[Y]e_d$, avec $Y=\frac{p}{T^{n_m}}$, et le lemme V.1.15 montre que, modulo T, l'application $(F_1,\dots,F_d)\mapsto F_1(G)(e_1)+\cdots+F_d(G)(e_d)$ devient juste $(F_1,\dots,F_d)\mapsto F_1e_1+\cdots+F_de_d$ qui est trivialement bijective.

Ceci démontre le premier point de la prop. V.1.14. La démonstration du second est quasiment identique, et le quatrième étant une conséquence immédiate du troisième qui lui-même est une conséquence immédiate du second, cela permet de conclure.

Lemme V.1.17. — *On a* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}/T\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}=(\mathscr{O}_L/p)[Y]$, *si* Y *est l'image de* pT^{-n_b} *dans* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}/T\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$.

Démonstration. — Le cas L quelconque se déduit du cas $L=\mathbf{Q}_p$ en tensorisant par $\mathscr{O}_L$. Dans le cas $L=\mathbf{Q}_p$, si $p^aT^k\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$, alors $p^{a+1}T^k\in T\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$, pour tout $k\in\mathbf{Z}$, et $p^aT^k\in T\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$ sauf si $k=-an_b$. On en déduit le résultat.

Proposition V.1.18. — *Si* $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}=(1-\varphi)D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$, *alors* $D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}=\mathscr{R}^+(\Gamma)\otimes_\Lambda D^{\psi=1}$ *et* $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}=\mathscr{R}^+(\Gamma)\otimes_\Lambda\mathscr{C}$.

Démonstration. — Il résulte du th. I.5.2 et du cor. V.1.13 que $\mathscr{C}$ est un Λ-module libre de rang d et que si $e_1,\dots,e_d$ en est une base, alors c'est aussi une base de $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ sur $\mathscr{R}(\Gamma)$. Soit donc $x\in\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$. On peut écrire x de manière unique sous la forme $x=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_de_d$, avec $\lambda_1,\dots,\lambda_d\in\mathscr{R}(\Gamma)$. Décomposons λ_i sous la forme $\lambda_i=\lambda_i^++\mu_i$, avec $\lambda_i\in\mathscr{R}^+(\Gamma)$ et $\mu_i=\mathscr{E}^\dagger(\Gamma)$. On a $\sum_{i=1}^d\lambda_i^+e_i\in\mathscr{R}^+(\Gamma)\otimes_\Lambda\mathscr{C}$ et $y=\sum_{i=1}^d\mu_ie_i\in D^\dagger\cap\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$, et il existe $z\in(D_{\mathrm{rig}})^{\psi=1}$ tel que $y=(\varphi-1)z$. Soit alors $V=\mathbf{V}(D)$, et soit $v_1,\dots,v_d$ une base de V sur $\mathbf{Z}_p$; c'est aussi une base de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{R}}D_{\mathrm{rig}}=\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}V$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ ainsi qu'une base de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}^\dagger}}D^\dagger=\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_{\mathbf{Z}_p}V$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$. Soient $y_1,\dots,y_d$ et $z_1,\dots,z_d$ les coordonnées de y et z dans cette base. On a donc $y_i\in\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et $z_i\in\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$, et la relation $y=(\varphi-1)z$ se traduit par $y_i=(\varphi-1)z_i$, pour tout i. Maintenant, $\varphi-1$ est surjectif sur $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et son noyau dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ est réduit à $\mathbf{Q}_p$ qui est inclus dans $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$. On en déduit l'appartenance de z_i à $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$, puis celle de z à $D[\frac{1}{p}]^{\psi=1}$, et enfin celle de $y=(\varphi-1)z$ à $\mathscr{C}[\frac{1}{p}]$. On a donc démontré que $x\in\mathscr{R}^+(\Gamma)\otimes_\Lambda\mathscr{C}$;

d'où l'inclusion $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}} \subset \mathscr{R}^+(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}$. L'inclusion inverse se démontre en constatant que D_{rig} est un $\mathscr{R}^+(\Gamma)$-module [**4**] et, comme ψ commute à Γ, l'application naturelle $\mathscr{R}^+(\Gamma) \otimes_\Lambda D^{\psi=1} \to D_{\mathrm{rig}}$ a son image incluse dans $D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$.

5. (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{R}$. — Un φ-module D sur $\mathscr{R}$ est un $\mathscr{R}$-module de type fini, muni d'un opérateur semi-linéaire φ, tel que l'application naturelle $\mathscr{R}\otimes_{\varphi(\mathscr{R})}\varphi(D) \to D$ soit un isomorphisme.

Comme tout élément x de $\mathscr{R}$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(x_i)(1+T)^i$, où $x_i = \psi((1+T)^{-i}x)$, l'isomorphisme $\mathscr{R} \otimes_{\varphi(\mathscr{R})} \varphi(D) \cong D$ fait que tout élément x de D peut, de même, s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{i=0}^{p-1} \varphi(x_i)(1+T)^i$. Ceci permet d'étendre la construction de l'opérateur ψ à un φ-module sur $\mathscr{R}$, en posant $\psi(\sum_{i=0}^{p-1} \varphi(x_i)(1+T)^i) = x_0$. Il est alors immédiat que si D est un (φ,Γ)-module, ψ commute à l'action de Γ. Cela permet de définir le Γ-module $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, et ses sous-modules $D^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, pour $r > 0$ assez petit, pour tout (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$.

Proposition V.1.19. — *Si D est un (φ,Γ)-module de rang d sur $\mathscr{R}$, alors :*

(i) *$D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est un $\mathscr{R}(\Gamma)$-module libre de rang d ;*

(ii) *$D^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est un $\mathscr{E}^{]0,r]}(\Gamma)$-module libre de rang d, si $r > 0$ est assez petit.*

Démonstration. — Commençons par supposer D isocline. Il existe alors un unique sous-$\mathscr{E}^\dagger$-espace vectoriel Δ de dimension d stable par φ, et l'action de φ est isocline ; on peut donc la rendre étale en multipliant φ par un élément ayant la bonne valuation (ce qui demande éventuellement de remplacer L par une extension finie). Le résultat dans ce cas est alors une conséquence du th. V.1.12.

Maintenant, si $0 \to D_1 \to D \to D_2 \to 0$ une suite exacte de (φ,Γ)-modules libres sur $\mathscr{R}$, et si D_1 et D_2 vérifient les conclusions de la proposition, il en est de même de D, ce qui permet de déduire le cas général du cas isocline par dévissage, en utilisant la filtration de Kedlaya.

V.2. Vecteurs localement analytiques. — On suppose maintenant que D est libre de rang 2 sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et irréductible [(58)], et on note Π la représentation $\mathbf{\Pi}(D)$ de G, ce qui fait de Π un réseau du L-banach $L \cdot \Pi$. On fixe une base e_1, e_2 de $D^{\dagger,m_1(D)}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m_1(D)}$, ce qui permet d'utiliser les résultats du n° 4 du § V.1, et en particulier de disposer de $m_2(D) \geq m_1(D)$ tel que $D^{(0,r_n]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]}(\Gamma) \otimes \mathscr{C}$, pour tout $n \geq m_2(D)$.

1. L'action de w_D sur $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$. — Le résultat suivant est la clé permettant de contourner la pauvre convergence des formules définissant l'action de G. On rappelle que $\mathscr{C} = (1-\varphi)D^{\psi=1}$; on note $\mathscr{C}'$ le module $(1-\delta_D(p)^{-1}\varphi)D^{\psi=\delta_D(p)^{-1}}$.

Proposition V.2.1. — *Si D est irréductible, alors $w_D(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$ et $w_D(\mathscr{C}') = \mathscr{C}$.*

(58) Cela permet d'utiliser la prop. V.2.1. On pourrait, en étant plus soigneux, inclure le cas non irréductible, mais ce cas peut aussi se traiter directement car alors $\mathbf{\Pi}(D)$ est une extension de deux induites de caractères unitaires du borel.

Démonstration. — Soient $x \in \mathscr{C}$ et $\tilde{x} \in D^{\psi=1}$ tel que $x = (1-\varphi)\tilde{x} = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\tilde{x}$. On peut prolonger $\tilde{x}$ de manière unique en un élément de $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ fixe par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Maintenant, l'hypothèse D irréductible équivaut à ce que $D^{\mathrm{nr}} = 0$, et donc, d'après la prop. II.1.14, à ce que $\beta_{\mathbf{Q}_p}$ induise un isomorphisme B-équivariant de $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ sur $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. On peut donc voir $\tilde{x}$ comme un élément de $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ fixe par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Alors $w \cdot \tilde{x} \in D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est fixe par $\delta_D(p)^{-1}\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et donc $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot \tilde{x}) \in D^{\psi=\delta_D(p)^{-1}}$, et la restriction de $w \cdot \tilde{x}$ à $\mathbf{Z}_p^*$ appartient à $\mathscr{C}'$. Comme cette restriction est $w \cdot \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\tilde{x} = w_D(x)$, on en déduit l'inclusion $w_D(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}'$. Les mêmes calculs montrent que $w_D(\mathscr{C}') \subset \mathscr{C}$, et comme w_D est une involution, cela permet de conclure.

On a $w\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w$, et donc $w_D(\sigma_a \cdot x) = \delta_D(a)\sigma_{a^{-1}}w_D(x)$, pour tout $x \in D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. Si $\iota_D : \Lambda \to \Lambda$ est l'involution définie par $\iota_D(\sigma_a) = \delta_D(a)\sigma_{a^{-1}}$, on peut reformuler ce qui précède de la manière suivante.

Lemme V.2.2. — *$w_D : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est Λ-antilinéaire pour ι_D.*

Si $m \geq 1$, soit $\tau_m = \sigma_{1+p^m} - 1 \in \mathscr{O}_L[[\Gamma_m]]$.

Lemme V.2.3. — (i) *Il existe $m_3(D) \geq m_2(D)$ tel que $\tau_m^{-1}\iota_D(\tau_m)$ soit une unité de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,1}(\Gamma_m)$ pour tout $m \geq m_3(D)$.*

(ii) *L'involution ι_D se prolonge en une involution de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n}(\Gamma)$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]}(\Gamma)$ et $\mathscr{E}^{]0,r_n]}(\Gamma)$, si $n \geq m_3(D)+1$, ainsi qu'en une involution de $\mathscr{R}(\Gamma)$.*

Démonstration. — On a $\tau_m^{-1}\iota_D(\tau_m) = -\sigma_{1+p^m}(1 - \frac{\delta_D(1+p^m)-1}{\tau_m})$. Or il existe un entier $m_3(D) \geq m_2(D)$ tel que $\delta_D(1+p^m) \equiv 1 \bmod p$, pour tout $m \geq m_3(D)$, et il suit de l'expression ci-dessus que $\tau_m^{-1}\iota_D(\tau_m)$ est une unité de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,1}(\Gamma_m)$, si $m \geq m_3(D)$. En particulier, $\tau_{m_3(D)}^{-1}\iota_D(\tau_{m_3(D)})$ est une unité de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,1}(\Gamma_{m_3(D)})$; c'est donc aussi une unité de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m_3(D)+1}(\Gamma)$. Le (ii) s'en déduit.

Lemme V.2.4. — (i) *Il existe $m_4(D) \geq m_3(D)+1$ tel que, pour tout $n \geq m_4(D)$, on ait $D^{(0,r_n]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]}(\Gamma) \otimes \mathscr{C}'$.*

(ii) *Si $n \geq m_4(D)$, alors $D^{(0,r_n]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est stable par w_D.*

Démonstration. — Le (i) se déduit du th. V.1.12 appliqué au (φ,Γ)-module D' obtenu en tordant l'action de φ sur D par $\delta_D(p)^{-1}$. Le (ii) est alors une conséquence de ce que $w_D(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$, de l'antilinéarité de w_D, de ce que ι_D est une involution de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]}(\Gamma)$, et de ce que

$$D^{(0,r_n]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]}(\Gamma) \otimes \mathscr{C}' = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r_n]}(\Gamma) \otimes \mathscr{C}.$$

On rappelle que, si $b \in p\mathbf{Z}_p$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $D \boxtimes p\mathbf{Z}_p$ se fait par l'opérateur

$$u_b = \delta_D(1+b)^{-1}g_1 \circ w_D \circ g_2 \circ w_D \circ g_3,$$

où $g_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $g_2 = \left(\begin{smallmatrix} (1+b)^2 & b(1+b) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $g_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1/(1+b) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Lemme V.2.5. — *Soit $m = m_4(D)$, et soient $\tau = \sigma_{1+p^m} - 1$ et $\omega = \varphi^m(T)$. Soit aussi $M_m^{\dagger,m} = (1+T)\varphi^m(D^{\dagger,m})$.*

(i) *$\tau^k M_m^{\dagger,m} = \omega^k M_m^{\dagger,m}$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$.*

(ii) *Il existe $a_0 \in \mathbf{N}$ tel que $w_D(M_m^{\dagger,m}) \subset \tau^{-a_0} M_m^{\dagger,m}$.*

(iii) *Il existe $a \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $u_b(x) \in \varphi^m(T^{-a}D^{\dagger,m})$, si $x \in \varphi^m(D^{\dagger,m})$, et si $b \in p^m\mathbf{Z}_p$.*

Démonstration. — Le (i) est une réécriture du (ii) du lemme V.1.15. Maintenant, la stabilité de $D^{(0,r_{2m}]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ par w_D implique celle de $D^{(0,r_{2m}]} \boxtimes (1+p^m\mathbf{Z}_p) = (1+T)\varphi^m(D^{(0,r_m]})$: en effet, comme $m \geq m_1(D)$, le module $D^{(0,r_{2m}]} \boxtimes (1+p^m\mathbf{Z}_p)$ est aussi l'image de $D^{(0,r_{2m}]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ par l'application $\mathrm{Res}_{1+p^m\mathbf{Z}_p}$. Il en résulte que si $f_1 = (1+T)\varphi^m(e_1)$, $f_2 = (1+T)\varphi^m(e_2)$ est la base usuelle (cf. prop.V.1.14) de $M_m^{\dagger,m}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m}(\Gamma_m)$, alors il existe a_0 tel que $w_D(f_1)$ et $w_D(f_2)$ appartiennent à $\tau^{-a_0}M_m^{\dagger,m}$. Comme $w_D(M_m^{\dagger,m})$ est le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m}(\Gamma_m)$-module engendré par $w_D(f_1)$ et $w_D(f_2)$ par antilinéarité de w_D, cela démontre le (ii). Enfin, le (iii) suit du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\varphi^m(D^{\dagger,m}) & \xrightarrow{g_3} & M_m^{\dagger,m} & \xrightarrow{w_D} & \tau^{-a_0}M_m^{\dagger,m} = \omega^{-a_0}M_m^{\dagger,m} & \xrightarrow{g_2} & \omega^{-a_0}M_m^{\dagger,m} \\
& \searrow^{\delta_D(1+b)u_b} & & & & & \| \\
& & \omega^{-2a_0}\varphi^m(D^{\dagger,m}) & \xleftarrow{g_1} & \omega^{-2a_0}M_m^{\dagger,m} = \tau^{-2a_0}M_m^{\dagger,m} & \xleftarrow{w_D} & \iota_D(\tau)^{-a_0}M_m^{\dagger,m}
\end{array}$$

qui montre que l'on peut prendre $a = 2a_0$.

Lemme V.2.6. — *Il existe un entier $m_5(D) \geq m_4(D)$ tel que $e_1' = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ p^{m_5(D)} & 1 \end{smallmatrix}\right)e_1$ et $e_2' = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ p^{m_5(D)} & 1 \end{smallmatrix}\right)e_2$ forment une base de $D^{\dagger,m_5(D)}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m_5(D)}$.*

Démonstration. — Soit $m = m_4(D)$. On a aussi $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ p^n & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} p^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^{n-m} \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)w\left(\begin{smallmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Il résulte du (iii) du lemme V.2.5, appliqué à $\left(\begin{smallmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)e_i = \varphi^m(e_i)$ et $b = p^{n-m}$, qu'il existe $a \in \mathbf{N}$ tel que $e_{i,n}' \in T^{-a}D^{\dagger,m}$, pour $i = 1,2$ et tout $n \geq 2m$. Par ailleurs, $e_{i,n}'$ tend vers $\sigma_{-1}\cdot e_i$. De plus, $D^{\dagger,m}$ est stable par σ_{-1}, et donc $e_1'' = \sigma_{-1}\cdot e_1$ et $e_2'' = \sigma_{-1}\cdot e_2$ forment une base de $D^{\dagger,m}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m}$. Soit $P_n \in \mathbf{M}_2(T^{-a}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m})$ la matrice de $(e_{1,n}', e_{2,n}')$ dans la base e_1'', e_2''. Alors P_n tend vers 1 dans $\mathbf{M}_2(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$. Comme

$$T^{-a}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m} \cap (p^i\mathscr{O}_{\mathscr{E}} + T\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+) \subset T\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m+1}, \quad \text{si } i \geq \frac{a+1}{(p-1)^2p^{m-1}},$$

on a $P_n \in 1 + T\mathbf{M}_2(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m+1})$, si n est assez grand. On conclut en remarquant que $1 + T\mathbf{M}_2(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m+1}) \subset \mathbf{GL}_2(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,n})$, pour tout $n \geq m+1$.

Proposition V.2.7. — *Soit $m = m_5(D)$, et soient $\tau = \sigma_{1+p^m} - 1 \in \mathscr{O}_L[[\Gamma_m]]$, $a_m^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1+p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $a_m^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p^m \end{smallmatrix}\right)$, $u_m^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $u_m^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p^m & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Soit $b \geq m$.*

(i) *$M_m^{\dagger,b} = (1+T)\varphi^m(D^{\dagger,b})$ est stable par w_D.*

(ii) *On a $(g-1)^n\cdot(\tau^k M_m^{\dagger,b}) = \tau^{n+k}M_m^{\dagger,b}$, si $g \in \{a_m^+, a_m^-, u_m^+, u_m^-\}$, pour tous $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Si e'_1, e'_2 est la base de $D^{\dagger,m}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m}$ fournie par le lemme V.2.6, et si $f'_1 = (1+T)\varphi^m(e'_1)$, $f'_2 = (1+T)\varphi^m(e'_2)$, alors $f'_1 = w_D(f_1)$ et $f'_2 = w_D(f_2)$ (cela suit de l'identité $\left(\begin{smallmatrix} p^m & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ p^m & 1 \end{smallmatrix}\right) = w\left(\begin{smallmatrix} p^m & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$). Or, d'après la prop. V.1.14, f_1, f_2 (resp. f'_1, f'_2) sont des bases de $M_m^{\dagger,b}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$ pour tout $b \geq m$. On en déduit le (i) grâce à l'antilinéarité de w_D.

Passons à la démonstration du (ii). Pour $g = a_m^+$, cela suit de ce que $a_m^+ - 1$ agit comme τ, et pour $g = u_m^+$, c'est une traduction du (i) du lemme V.2.5. Maintenant, $w \cdot M_m^{\dagger,b} = M_m^{\dagger,b}$ et $\tau^{-1} w \tau w = \tau^{-1}\iota_D(\tau)$ est une unité de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,m}(\Gamma_m)$, et donc $\iota_D(\tau^k) M_m^{\dagger,b} = \tau^k M_m^{\dagger,b}$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$. On en déduit que, si $g = a_m^+$ ou $g = u_m^+$, alors

$$\begin{aligned}(wgw-1)^n \cdot (\tau^k M_m^{\dagger,b}) &= w(g-1)^n \cdot (\iota_D(\tau)^k w \cdot M_m^{\dagger,b}) \\ &= w(g-1)^n \cdot (\tau^k w \cdot M_m^{\dagger,b}) = w\tau^{n+k} w \cdot M_m^{\dagger,b} = \tau^{n+k} M_m^{\dagger,b}.\end{aligned}$$

Comme $a_m^- = w a_m^+ w$ et $u_m^- = w u_m^+ w$, cela permet de conclure.

2. Le G-module $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$. — On note $D^{(0,r_n]} \boxtimes \mathbf{P}^1$, si $n \geq m_2(D)+2$, (resp. $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$) l'ensemble des $(z_1, z_2) \in D \boxtimes \mathbf{P}^1$ vérifiant $z_1, z_2 \in D^{(0,r_n]}$ (resp. $z_1, z_2 \in D^\dagger$).

Proposition V.2.8. — (i) *$D^{(0,r_n]} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable sous l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, pour tout $n \geq m_2(D)+2$.*

(ii) *$D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable sous l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.*

Démonstration. — Compte-tenu des lemmes V.2.4 et V.1.1, le (i) suit du lemme II.1.10 appliqué à $M = D$, $\iota = w_D$, $\delta = \delta_D$, $M_0 = D^{(0,r_n]}$ et $M_1 = D^{(0,r_{n-1}]}$.

En passant à la limite inductive sur n, on déduit du lemme V.2.4 la stabilité de $D^\dagger \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ sous l'action de w_D. Le (ii) se déduit alors, en utilisant la prop. II.1.9, de la stabilité de $D^\dagger$ par $P(\mathbf{Z}_p)$ et ψ.

On a $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \mathscr{R}(\Gamma) \otimes_{\mathscr{E}^\dagger(\Gamma)} D^\dagger \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, ce qui permet d'étendre l'action de w_D sur $D^\dagger \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ à $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ par Γ-antilinéarité en posant $w_D(\lambda \otimes x) = \iota_D(\lambda) \otimes w_D(x)$. On peut alors recopier la définition de $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ pour définir $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ par :

$$D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D_{\mathrm{rig}} \times D_{\mathrm{rig}},\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} z_2 = w_D(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} z_1)\}.$$

On note $D^{]0,r_n]} \boxtimes \mathbf{P}^1$ le sous-L-espace vectoriel de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ des $z = (z_1, z_2)$, vérifiant $z_1, z_2 \in D^{]0,r_n]}$.

Proposition V.2.9. — (i) *L'action de G sur $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$ s'étend en une action continue de G sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$.*

(ii) *Si $n \geq m_2(D)+2$, alors $D^{]0,r_n]} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.*

Démonstration. — On définit, en utilisant les formules (cf. n° 2 du § II.1) du squelette d'action de G, une action d'un groupe $\widetilde{G}$, produit libre des différents sous-groupes de G intervenant dans le squelette d'action, sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, et il est apparent sur ces formules que $g \in \widetilde{G}$ agit continûment. Or cette action se factorise à travers G

sur $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$, et comme cet espace est dense dans $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, elle se factorise aussi à travers G sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Le (ii) se démontrant comme le (i) de la prop. V.2.8, cela permet de conclure.

Il résulte de la prop. I.1.5, et de ce que $f \mapsto \sigma_{-1} \cdot f$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{R}$, que l'accouplement $\{\ ,\ \}$, défini par la formule habituelle $\{f,g\} = \mathrm{rés}_0\big((\sigma_{-1}\cdot f)g\,\frac{dT}{1+T}\big)$, identifie $\mathscr{R}$ à son dual topologique.

Soient alors $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, et $e_1,\dots,e_d$ une base de $D^\dagger$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\dagger$, et soit $e_1^*,\dots,e_d^*$ la base de $\check{D}^\dagger$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\dagger$ duale de $\sigma_{-1}\cdot e_1,\dots,\sigma_{-1}\cdot e_d$ pour l'accouplement naturel $\langle\ ,\ \rangle : \check{D}^\dagger \times D^\dagger \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\dagger\,\frac{dT}{1+T}$ (i.e. $\langle e_i^*, \sigma_{-1}\cdot e_i\rangle = \frac{dT}{1+T}$). Alors $e_1,\dots,e_d$ et $e_1^*,\dots,e_d^*$ sont des bases de D_{rig} et $\check{D}_{\mathrm{rig}}$ sur $\mathscr{R}$, et l'accouplement $(x,y)\mapsto\{x,y\} = \mathrm{rés}_0(\langle\sigma_{-1}\cdot x, y\rangle)$ de $\check{D}_{\mathrm{rig}}\times D_{\mathrm{rig}}$ dans L, est donné, dans ces bases, par $\{\sum_i x_i e_i^*, \sum_i y_i e_i\} = \sum_i \{x_i,y_i\}$. Il en résulte que l'accouplement $\{\ ,\ \}$ est parfait (i.e. il identifie $\check{D}_{\mathrm{rig}}$ au dual topologique de D_{rig} et D_{rig} au dual topologique de $\check{D}_{\mathrm{rig}}$). On en déduit qu'il en est de même de l'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1} : (\check{D}_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1)\times(D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1)\to L$ défini par

$$\{(z_1,z_2),(z_1',z_2')\}_{\mathbf{P}^1} = \{z_1,z_1'\} + \{\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_2, \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_2'\}.$$

Proposition V.2.10. — *L'accouplement* $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1} : (\check{D}_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1)\times(D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1)\to L$ *est G-équivariant.*

Démonstration. — Sa restriction à $(\check{D}^\dagger\boxtimes\mathbf{P}^1)\times(D^\dagger\boxtimes\mathbf{P}^1)$ coïncide avec la restriction de l'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ existant sur $(\check{D}\boxtimes\mathbf{P}^1)\times(D\boxtimes\mathbf{P}^1)$. Comme ce dernier est G-équivariant (th. II.1.13), il en est de même de sa restriction, et on conclut en utilisant la densité de $(\check{D}^\dagger\boxtimes\mathbf{P}^1)\times(D^\dagger\boxtimes\mathbf{P}^1)$ dans $(\check{D}_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1)\times(D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1)$.

3. Caractérisation des vecteurs localement analytiques. — Si $m\geq 1$ (ou $m\geq 2$, si $p=2$), le groupe $K_m = 1+p^m\mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p)$ est un p-groupe sans p-torsion. De plus, c'est un p-groupe analytique : si $a_m^+ = \left(\begin{smallmatrix}1+p^m & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $a_m^- = \left(\begin{smallmatrix}1+p^m & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $u_m^+ = \left(\begin{smallmatrix}1 & p^m\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $u_m^- = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ p^m & 1\end{smallmatrix}\right)$, alors $(x_1,\dots,x_4)\mapsto (a_m^+)^{x_1}(a_m^-)^{x_2}(u_m^+)^{x_3}(u_m^-)^{x_4}$ est une bijection de $\mathbf{Z}_p^4$ sur K_m.

On note $\Lambda_{K_m} = \varprojlim \mathscr{O}_L[K_m/K_{m+n}]$ la $\mathscr{O}_L$-algèbre de groupe complétée de K_m ; elle peut aussi s'interpréter comme l'algèbre des $\mathscr{O}_L$-mesures sur K_m. Tout élément λ de Λ_{K_m} peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\lambda = \sum_{k_1,\dots,k_4\in\mathbf{N}} \lambda_{k_1,\dots,k_4}\,(a_m^+-1)^{k_1}(a_m^--1)^{k_2}(u_m^+-1)^{k_3}(u_m^--1)^{k_4},\ \text{ avec } \lambda_{k_1,\dots,k_4}\in\mathscr{O}_L.$$

Si $h\in\mathbf{N}$, on note $\Lambda_{K_m}^{[h]}$ l'ensemble des λ comme ci-dessus, où les $\lambda_{k_1,\dots,k_4}$ sont des éléments de L tels que $v_p(\lambda_{k_1,\dots,k_4}) + \big[\frac{k_1+\cdots+k_4}{p^h}\big]\geq 0$ pour tous $k_1,\dots,k_4$ et tend vers $+\infty$ quand $k_1+\cdots+k_4\to+\infty$. On peut aussi voir $\Lambda_{K_m}^{[h]}$ comme le complété, pour la topologie p-adique, de $\Lambda_{K_m}[p^{-1}I^{p^h}]$, où I est l'idéal d'augmentation. Cette interprétation montre que $\Lambda_{K_m}^{[h]}$ est un anneau.

On note $\mathscr{D}(K_m)$ l'intersection des $\Lambda_{K_m}^{[h]}[\frac{1}{p}]$, pour $h \in \mathbf{N}$. C'est l'algèbre des L-distributions sur K_m, et tout élément λ de $\mathscr{D}(K_m)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\lambda = \sum_{k_1,\dots,k_4 \in \mathbf{N}} \lambda_{k_1,\dots,k_4} (a_m^+ - 1)^{k_1} (a_m^- - 1)^{k_2} (u_m^+ - 1)^{k_3} (u_m^- - 1)^{k_4}, \text{ avec } \lambda_{k_1,\dots,k_4} \in L,$$

et $\lim_{k_1+\cdots+k_4 \to +\infty} v_p(\lambda_{k_1,\dots,k_4}) + \frac{k_1+\cdots+k_4}{p^h} = +\infty$ pour tout $h \in \mathbf{N}$.

Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$, on dit [**65, 66**] que $v \in \Pi$ est *localement analytique* si $g \mapsto g \cdot v$ est localement analytique sur G (à valeurs dans Π). On note Π^{an} l'ensemble des vecteurs localement analytiques de Π. En tant qu'espace vectoriel topologique, Π^{an} est une limite inductive compacte de L-banach dont le dual $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ est le L-fréchet $\mathscr{D}(K_m) \otimes_{\Lambda_{K_m}} \Pi^*$, où $m \geq 1$ (ou $m \geq 2$, si $p = 2$) peut être choisi arbitrairement. (Il n'y a pas besoin de compléter le produit tensoriel car Π^* est de type fini sur Λ_{K_m} puisque Π est admissible.) On peut donc aussi caractériser Π^{an} comme le dual de $\mathscr{D}(K_m) \otimes_{\Lambda_{K_m}} \Pi^*$ ou encore comme l'ensemble des $v \in \Pi$ tels que $\lambda \mapsto \langle \lambda, v \rangle$ s'étende par continuité à $\mathscr{D}(K_m) \otimes_{\Lambda_{K_m}} \Pi^*$ (dont $L \cdot \Pi^*$ est un sous-espace dense).

4. Estimées préliminaires. — Nous nous proposons de décrire $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ comme un sous-module de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, ce qui va demander un peu de préparation. On fixe $m = m_5(D)$, et on note K le groupe K_m.

Lemme V.2.11. — *Soit $b \geq m$.*
(i) *$\varphi^m(T)^k M_m^{\dagger,b}$ est stable par K, pour tout $k \in \mathbf{Z}$.*
(ii) *$I_K^n \cdot (\varphi^m(T)^k M_m^{\dagger,b}) \subset \varphi^m(T)^{n+k} M_m^{\dagger,b}$, pour tout $m \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Cela suit de la prop. V.2.7.

Soit $J = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ 0 \leq i \leq p^m - 1 \right\} \cup \left\{ w \left(\begin{smallmatrix} 1 & pi-1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ 0 \leq i \leq p^{m-1} - 1 \right\}$ de telle sorte que les $g \cdot (1 + p^m \mathbf{Z}_p)$, pour $g \in J$, forment une partition de $\mathbf{P}^1$. Si $b \geq 2m$, soient

$$X^{\dagger,b} = \bigoplus_{g \in J} g \cdot \left(M_m^{\dagger,b-m}\right) \quad \text{et} \quad X_k^{\dagger,b} = \bigoplus_{g \in J} g \cdot \left(T^{k n_b} M_m^{\dagger,b-m}\right), \text{ si } k \in \mathbf{Z}.$$

On a $X_k^{\dagger,b} \subset D^{\dagger,b} \boxtimes \mathbf{P}^1$, si $k \geq 0$, et $\cup_{k \in \mathbf{Z}} X_k^{\dagger,b} = D^{(0,r_b]} \boxtimes \mathbf{P}^1$. De plus, les $X_k^{\dagger,b}$, pour $k \in \mathbf{N}$, forment une base de voisinages ouverts de 0 dans $D^{(0,r_b]} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Enfin, on remarquera que l'on a aussi $X_k^{\dagger,b} = \oplus_{g \in J} g \cdot \left(\varphi^m(T)^{k n_{b-m}} M_m^{\dagger,b-m}\right)$, (car $T^{-p^m} \varphi^m(T)$ est une unité de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$), ce qui permet de déduire du (ii) du lemme V.2.11, et de ce que K est distingué dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ (et donc $g^{-1} I_K g = I_K$ pour tout $g \in J$), l'inclusion

$$I_K^{k' n_{b-m}} \cdot X_k^{\dagger,b} \subset X_{k'+k}^{\dagger,b}, \qquad \text{pour tous } k' \in \mathbf{N} \text{ et } k \in \mathbf{Z}.$$

Lemme V.2.12. — *Il existe $\ell \in \mathbf{N}$ tel que $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 \subset X_{-\ell}^{\dagger,b}$, pour tout $b \geq 2m$.*

Démonstration. — On a $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 \subset D^{(0,r_m]} \boxtimes \mathbf{P}^1 \subset D^{(0,r_{2m}]} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Or $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est compact et les $X_k^{\dagger,2m}$, pour $k \in \mathbf{Z}$ forment un recouvrement ouvert décroissant

de $D^{(0,r_{2m}]}\boxtimes\mathbf{P}^1$; il existe donc $\ell\in\mathbf{N}$ tel que $D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\subset X_{-\ell}^{\dagger,2m}$. Comme $X_{-\ell}^{\dagger,2m}\subset X_{-\ell}^{\dagger,b}$, pour tout $b\geq 2m$ (car $D^{\dagger,b}=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,2m}}D^{\dagger,2m}$), cela permet de conclure.

Lemme V.2.13. — *Soit $k\geq\ell$.*

(i) *Tout $z\in X_k^{\dagger,b}$ peut s'écrire sous la forme $z=x_1+w\cdot x_2+p^k y$, où x_1,x_2,y vérifient $x_1,x_2\in(T^{n_b},p)^k\widetilde{D}^+$ et $y\in D\boxtimes\mathbf{P}^1$.*

(ii) *Tout $z\in I_K^{2kn_{b-m}}\cdot X^{\dagger,b}$ peut s'écrire sous la forme $z=x_1+w\cdot x_2+p^{[k/2]}y$, où x_1,x_2,y vérifient $x_1,x_2\in T^{kn_b}\widetilde{D}^+$ et $y\in T^{-\ell n_{b+1}}D^{\dagger,b+1}\boxtimes\mathbf{P}^1$.*

(iii) *Tout $z\in I_K^{kn_{b-m}}\cdot(D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)$ peut s'écrire sous la forme $z=x_1+w\cdot x_2$, avec $x_1,x_2\in(T^{n_b},p)^{k-\ell}\widetilde{D}^+$.*

Démonstration. — On peut décomposer z sous la forme $z_1+w\cdot z_2$, avec $z_1=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}z$ et $z_2=\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}w\cdot z$. La définition de $X_k^{\dagger,b}$ fait que $z_1,z_2\in T^{kn_b}D^{\dagger,b}$, ce qui permet de déduire le (i) du (i) de la rem. V.1.3.

Comme $I_K^{2kn_{b-m}}\cdot X^{\dagger,b}\subset X_{2k}^{\dagger,b}$, on peut, d'après le (i), décomposer z sous la forme $z=x_1+w\cdot x_2+p^k y'$, avec $x_1,x_2\in T^{kn_b}\widetilde{D}^+$ et $y'\in D\boxtimes\mathbf{P}^1$. Par ailleurs, comme $\widetilde{D}^+\subset D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\subset T^{-\ell n_b}D^{\dagger,b}\boxtimes\mathbf{P}^1$ (lemme V.2.12), l'appartenance de $p^k y'$ à $p^{[k/2]}T^{-\ell n_{b+1}}D^{\dagger,b+1}\boxtimes\mathbf{P}^1$ suit de l'inclusion $T^{-\ell n_b}D^{\dagger,b}\cap p^kD\subset p^{[k/2]}T^{-\ell n_{b+1}}D^{\dagger,b+1}$ du (ii) de la rem. V.1.3.

Comme $D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\subset X_{-\ell}^{\dagger,b}$, on a $I_K^{kn_{b-m}}\cdot(D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)\subset X_{k-\ell}^{\dagger,b}$, ce qui permet, en utilisant le (i), d'écrire $z\in I_K^{kn_{b-m}}\cdot(D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)$ sous la forme $z=x_1+w\cdot x_2+p^{k-\ell}y$, avec $x_1,x_2\in(T^{n_b},p)^{k-\ell}\widetilde{D}^+$ et $y\in D\boxtimes\mathbf{P}^1$. De plus, z,x_1,x_2 sont des éléments de $D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ et donc y aussi [car $D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\cap p^{k-\ell}(D\boxtimes\mathbf{P}^1)=p^{k-\ell}(D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)$], et comme $D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1=\widetilde{D}^+ + w\widetilde{D}^+$ (cor. II.2.8), cela démontre le (iii) et permet de conclure la preuve du lemme.

5. L'injection de $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ dans $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$. — Si $a\geq b\geq 2m$, soient

$$X^{[r_a,r_b]}=\bigoplus_{g\in J}g\cdot\left(M_m^{[r_{a-m},r_{b-m}]}\right)\ \text{ et }\ X_k^{[r_a,r_b]}=\bigoplus_{g\in J}g\cdot\left(T^{kn_b}M_m^{[r_{a-m},r_{b-m}]}\right),\ \text{si } k\in\mathbf{Z}.$$

Lemme V.2.14. — *Soient $\ell,k,N\in\mathbf{N}$.*

(i) $p^N\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}\cap p^{-k}T^{-\ell n_b}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}=\sum_{i=0}^{k+N}p^N\frac{T^{in_a}}{p^i}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$.

(ii) $p^N M_m^{[r_{a-m},r_{b-m}]}\cap p^{-k}T^{-\ell n_b}M_m^{\dagger,b}=\sum_{i=0}^{k+N}p^N\frac{T^{in_a}}{p^i}M_m^{\dagger,b}$.

(iii) $p^N X^{[r_{a-m},r_{b-m}]}\cap p^{-k}X_{-\ell}^{\dagger,b}=\sum_{i=0}^{k+N}p^{N-i}X_{ip^{a-b}}^{\dagger,b}$.

Démonstration. — Les (ii) et (iii) sont des conséquences du (i), et le cas N quelconque se déduit du cas $N=0$ en divisant par p^N. Maintenant, si $N=0$, notons $c(i)$, si $i\in\mathbf{Z}$, le plus petit $c\in\mathbf{Z}$ tel que p^cT^i appartienne à l'intersection. On a :

- $c(i)=\sup(-[ir_a],-k)$, si $i\geq 0$,
- $c(i)=\sup([-ir_b],-k)=[-ir_b]$, si $-\ell n_b\leq i\leq -1$,
- $c(i)=\sup([-ir_b],[-ir_b]-k-\ell)=[-ir_b]$, si $i\leq -\ell n_b-1$.

On en déduit le résultat.

Lemme V.2.15. — *Soit $b \geq 2m$.*

(i) *Si $a \geq b$, si $v \in X_k^{\dagger,b}$, et si $\lambda \in \Lambda_K^{[a-b]}$, alors $\lambda \cdot v$ converge dans $X_k^{[r_a,r_b]}$.*

(ii) *Si $\lambda \in \mathscr{D}(K)$, et si $v \in D^{(0,r_b]} \boxtimes \mathbf{P}^1$, alors $\lambda \cdot v$ converge dans $D^{]0,r_b]} \boxtimes \mathbf{P}^1$.*

Démonstration. — Le (i) suit de ce que $I_K^{k'n_{b-m}} \cdot X_k^{\dagger,b} \subset X_{k+k'}^{\dagger,b}$, quels que soient $k \in \mathbf{Z}$ et $k' \in \mathbf{N}$. On en déduit le (ii) en inversant p et en prenant l'intersection pour $a \geq b$, et en utilisant l'existence de $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que $X_{-k_0}^{\dagger,b} \subset D^{\dagger,b} \boxtimes \mathbf{P}^1 \subset X_0^{\dagger,b}$.

Ce lemme nous fournit des applications

$$\mathscr{D}(K) \otimes_{\Lambda_K} (D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1) \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 \quad \text{et} \quad \Lambda_K^{[a-b]}[\tfrac{1}{p}] \otimes_{\Lambda_K} X_k^{\dagger,b} \to L \cdot X_k^{[r_a,r_b]} = L \cdot D^{[r_a,r_b]} \boxtimes \mathbf{P}^1.$$

Par ailleurs, on dipose d'un isomorphisme $\iota : \check{\Pi}^* \cong D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, et on note encore ι les applications

$$\Lambda_K^{[a-b]}[\tfrac{1}{p}] \otimes_{\Lambda_K} \check{\Pi}^* \to L \cdot D^{[r_a,r_b]} \boxtimes \mathbf{P}^1 \quad \text{et} \quad (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* = \mathscr{D}(K) \otimes_{\Lambda_K} \check{\Pi}^* \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$$

qui s'en déduisent.

Lemme V.2.16. — (i) *Si $z \in p^N \Lambda_K^{[a-b]} \otimes_{\Lambda_K} \check{\Pi}^*$, alors $\iota(z) \in p^{N-\ell} X^{[r_a,r_b]}$.*

(ii) *Si $z \in \Lambda_K^{[a-b]}[\frac{1}{p}] \otimes_{\Lambda_K} \check{\Pi}^*$ et si $\iota(z) \in p^N X^{[r_a,r_b]}$, alors $z \in p^N \Lambda_K^{[a-b]} \otimes_{\Lambda_K} \check{\Pi}^*$.*

(iii) *La restriction de ι à $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* = \mathscr{D}(K) \otimes_{\Lambda_K} (D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)$ est un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. — On déduit le (i) des inclusions $I_K^{k'n_{b-m}} \cdot X_k^{\dagger,b} \subset X_{k+k'}^{\dagger,b}$ et $\iota(\check{\Pi}^*) \subset X_{-\ell}^{\dagger,b} \subset p^{-\ell} X^{[r-a,r_b]}$.

Passons au (ii). Tout élément de $\Lambda_K^{[a-b]}[\frac{1}{p}]$ pouvant s'écrire sous la forme $\lambda_1 + \lambda_2$, avec $\lambda_1 \in \Lambda_K[\frac{1}{p}]$ et $\lambda_2 \in p^{N+\ell} \Lambda_K^{[a-b]}$, on peut décomposer z sous la forme $z = z_1 + z_2$, avec $z_1 \in L \cdot \check{\Pi}^*$ et $z_2 \in p^{N+\ell} \Lambda_K^{[a-b]} \otimes_{\Lambda_K} \check{\Pi}^*$. Comme $\iota(z_2) \in p^N X^{[r_a,r_b]}$ d'après le (i), on peut, quitte à remplacer z par z_1, supposer que $z \in L \cdot \check{\Pi}^*$. Soit alors $k \in \mathbf{N}$ tel que $p^k z \in \check{\Pi}^*$. On a donc $\iota(z) \in p^N X^{[r_a,r_b]} \cap p^{-k} X_{-\ell}^{\dagger,b} = \sum_{i=0}^{k+N} p^{N-i} X_{ip^{a-b}}^{\dagger,b}$ (cf. lemme V.2.14). Par ailleurs, il résulte du (i) du lemme V.2.13, de l'inclusion $\widetilde{D}^+ \subset D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 = \iota(\check{\Pi}^*)$, et de ce que $\varphi^m(T)$ agit comme $u_m^+ - 1$, que

$$X_{ip^{a-b}}^{\dagger,b} \subset (I_K^{n_{b-m}}, p)^{ip^{a-b}} \cdot \iota(\check{\Pi}^*) + p^{ip^{a-b}} (D \boxtimes \mathbf{P}^1) \subset (I_K^{n_{a-m}}, p)^i \cdot \iota(\check{\Pi}^*) + p^i (D \boxtimes \mathbf{P}^1).$$

Il s'ensuit que l'on peut écrire $\iota(z)$ sous la forme $y + \sum_{i=0}^{k+N} x_i$, où $y \in p^N D \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $x_i \in p^N \frac{(I_K^{n_{a-m}}, p)^i}{p^i} \cdot \iota(\check{\Pi}^*)$. Comme $\iota(z)$ et les x_i sont des éléments de $\iota(\check{\Pi}^*)$, il en est de même de y, et donc $y \in p^N \iota(\check{\Pi}^*)$, ce qui permet d'en déduire le résultat annoncé car $\frac{(I_K^{n_{a-m}}, p)^i}{p^i} \subset \Lambda_K^{[a-b]}$.

Enfin, le (iii) est une simple traduction des (i) et (ii), ce qui permet de conclure.

Lemme V.2.17. — *L'injection de $\widetilde{D}^+$ dans $\check{\Pi}^*$ se prolonge par continuité en une injection de $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$ dans $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$.*

Démonstration. — Tout élément x de $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$ peut, d'après le lemme V.1.8, s'écrire (de manière non unique) sous la forme $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega^n}{p^{k_n}} x_n$, où $\omega = p + \sum_{i=1}^{p-1}([(1+T)^{i/p}]-1)$, les x_n sont des éléments de $\widetilde{D}^+$, et k_n est une suite sous-linéaire d'éléments de $\mathbf{N}$. En appliquant ceci à $\varphi^{-2}(x)$ et en appliquant φ^2 au résultat, on voit que l'on peut aussi écrire x sous la forme $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^2(\omega)^n}{p^{k_n}} x_n$ (les k_n et les x_n ne sont plus les mêmes mais vérifient les mêmes conditions que précédemment). On peut voir cette série comme une série d'éléments de $L \cdot \check{\Pi}^*$, l'action de $\varphi^2(\omega)$ coïncidant avec celle de $\lambda = p + (u_1^+ - 1)(\sum_{i=0}^{p-1}(p-1-i)(u_1^+)^i)$, où $u_1^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comme $\lambda \in (p, I_{K_1})$, la suite de terme général $p^{-k_n}\lambda^n$ tend vers 0 dans $\mathscr{D}(K_1)$, vu les conditions satisfaites par les k_n. La série $\sum_{n\in\mathbf{N}} p^{-k_n}\lambda^n \cdot x_n$ converge donc dans $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$. Par ailleurs, on a $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \cap \varphi^2(\omega^N \mathbf{A}_{\max}) = \varphi^2(\omega)^N \widetilde{\mathbf{A}}^+$ (en effet, pour $N = 1$, cela suit, après avoir appliqué φ^{-2}, de ce que ω est un générateur de $\ker\theta$; le cas général s'en déduit par récurrence). Il en résulte que la nullité de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^2(\omega)^n}{p^{k_n}} x_n$ entraîne l'appartenance de $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varphi^2(\omega)^n}{p^{k_n}} x_n$ à $p^{-k_n}\varphi^2(\omega)^N \widetilde{D}^+$, et donc celle de son image à $p^{-k_N}(p, I_{K_1})^N \cdot \check{\Pi}^*$; il s'ensuit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{p^{k_n}} x_n = 0$ dans $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$, ce qui prouve que le résultat ne dépend pas de l'écriture de x sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega^n}{p^{k_n}} x_n$, et permet de prolonger l'injection de $\widetilde{D}^+$ dans $\check{\Pi}^*$ par continuité en une application de $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$ dans $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$.

Il reste à vérifier que cette application est injective. Or sa composée avec ι est l'identité sur $\widetilde{D}^+$, et donc aussi, par continuité, sur $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$. Ceci permet de conclure.

Les lemmes V.2.16 et V.2.17 permettent de considérer $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$ comme un sous-L-espace vectoriel de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$. La proposition suivante permet d'en faire autant de $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$.

Proposition V.2.18. — *L'application ι induit un homéomorphisme de $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ sur $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}} + w \cdot \widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$.*

Démonstration. — Commençons par vérifier que $\lambda \cdot z \in \widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}} + w(\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}})$, si $z \in \check{\Pi}^*$ et $\lambda \in \mathscr{D}(K)$. On peut écrire λ sous la forme $\sum_{j=0}^{+\infty} p^{-k_j}\lambda_j$, où $(k_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite d'entiers croissante et sous-linéaire, et $\lambda_j \in I_K^{jn_m}$. D'après le (iii) du lemme V.2.13, on peut écrire $\lambda_j \cdot z$ sous la forme

$$\lambda_j \cdot z = (p^{j-\ell} y_{1,j} + T^{(j-\ell)n_m} z_{1,j}) + w \cdot (p^{j-\ell} y_{2,j} + T^{(j-\ell)n_m} z_{2,j}),$$

avec $y_{1,j}, y_{2,j}, z_{1,j}, z_{2,j} \in \widetilde{D}^+$. Or les séries $\sum_{j=0}^{+\infty} p^{-k_j} p^{j-\ell} y_{i,j}$, pour $i = 1, 2$, convergent dans $\widetilde{D}^+[\frac{1}{p}] \subset \widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$, tandis que les séries $\sum_{j=0}^{+\infty} p^{-k_j} T^{(j-\ell)j_m} y_{i,j}$, pour $i = 1, 2$, convergent dans $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$. On en déduit, en notant y_i et z_i les sommes respectives de ces séries, que l'on a $\lambda \cdot z = (y_1 + z_1) + w \cdot (y_2 + z_2)$, ce qui prouve que l'image de $\mathscr{D}(K) \otimes_{\Lambda_K} \check{\Pi}^*$ par ι est incluse dans $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}} + w \cdot \widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$. Par ailleurs, il résulte de

la prop. V.2.17 que cette image contient $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$, et donc aussi $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}} + w\cdot\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$ par stabilité sous l'action de G. Le fait que ce soit un homéomorphisme ayant été établi au lemme V.2.16, cela termine la démonstration.

Remarque V.2.19. — Si $a \geq b$, on a

$$\tau^{kp^{a-b}}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m) \subset \tau^{kp^{a-b}}\Lambda_{\Gamma_m} + p\tau^{(k-1)p^{a-b}}\Lambda_{\Gamma_m} + \cdots + p^{k-1}\tau^{p^{a-b}}\Lambda_{\Gamma_m} + p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m),$$

et donc

$$p^{-k}\tau^{kp^{a-b}}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m) \subset (p^{-1}\tau^{p^{a-b}})^k\Lambda_{\Gamma_m} + \cdots + (p^{-1}\tau^{p^{a-b}})^{k-1}\Lambda_{\Gamma_m} + \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m).$$

Si $\lambda \in \Lambda_K[p^{-1}I^{p^{a-b}}]$, et si $v \in M_m^{\dagger,b}$, on peut donc écrire $\lambda\cdot v$ sous la forme $\sum_{j=1}^2 (F_j^+(\tau) + F_j^-(\tau))f_j$, où f_1 et f_2 sont les éléments de $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ utilisés dans la démonstration du lemme V.2.5, $F_j^+(\tau) \in \mathscr{O}_L[p^{-1}\tau^{p^{a-b}}]$ et $F_j^-(\tau) \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$. En particulier, $x = \sum_{j=1}^2 F_j^-(\tau)f_j \in M_m^{\dagger,b}$, et $\lambda\otimes v = 1\otimes x + \sum_{j=1}^2 F_j^+(a_m^+ - 1)\otimes f_j$ dans $\Lambda_K[\frac{1}{p}]\otimes_{\Lambda_K} M_m^{\dagger,b}$. On en déduit que $\lambda\otimes v \mapsto \lambda\cdot v$ induit un isomorphisme

$$\Lambda_K[p^{-1}I^{p^{a-b}}]\otimes_{\Lambda_K} M_m^{\dagger,b} \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m)[p^{-1}\tau^{p^{a-b}}]\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m)} M_m^{\dagger,b}.$$

En complétant pour la topologie p-adique, en symétrisant sous l'action des $g \in J$, puis en inversant p et en passant à la limite projective sur a et inductive sur b, on en déduit des isomorphismes

$$\Lambda_K^{[a-b]}\widehat{\otimes}_{\Lambda_K} M_m^{\dagger,b} \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}(\Gamma_m)\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m)} M_m^{\dagger,b} = M_m^{[r_a,r_b]},$$

$$\Lambda_K^{[a-b]}[\frac{1}{p}]\widehat{\otimes}_{\Lambda_K} X^{\dagger,b} \cong L\cdot D^{[r_a,r_b]}\boxtimes\mathbf{P}^1 \quad\text{et}\quad \mathscr{D}(K)\widehat{\otimes}_{\Lambda_K}(D^\dagger\boxtimes\mathbf{P}^1) \cong D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1.$$

6. Description des vecteurs localement analytiques de $\boldsymbol{\Pi}(D)$. — On note $D^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ le sous-L-espace vectoriel $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}} + w\cdot\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$ de $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$, et on définit de même le sous-espace $\check{D}^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ de $\check{D}_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$. Il résulte de la prop. V.2.18 et de la complétude de $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ et $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ que $D^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ sont des sous-espaces fermés de $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ et $\check{D}_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$, homéomorphes naturellement à $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ et $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ respectivement.

Par ailleurs, $\check{\Pi}^*$ et Π^* étant denses dans $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ et $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ et orthogonaux pour $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$, il en résulte que $D^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ sont orthogonaux pour $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$, par continuité de cet accouplement.

Théorème V.2.20. — (i) $\Pi^{\mathrm{an}} = (D^\dagger\boxtimes\mathbf{P}^1)/L\cdot(D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)$ *et* $D^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1 = (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$.

(ii) *L'application naturelle* $(D^\dagger\boxtimes\mathbf{P}^1)/L\cdot(D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1) \to (D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1)/(D^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Commençons par prouver le (ii). La surjectivité de l'application naturelle est une conséquence immédiate du (iii) du lemme V.2.13. Son injectivité suit de ce qu'un élément du noyau est orthogonal à $\check{D}^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ et donc à $L\cdot\check{D}^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$, et donc appartient à $L\cdot(D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)$.

Passons à la preuve du (i), et notons M et M' les modules $(D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)/(D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$ et $(\check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)/(\check{D}_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$ (provisoirement). L'orthogonalité de $D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\check{D}_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ induit un morphisme continu de M dans le dual de $\check{D}_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ qui n'est autre que Π^{an}. Or ce morphisme est surjectif puisque $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ met en dualité parfaite les espaces $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, et injectif car un élément du noyau, vu comme élément de $(D^{\dagger}[\frac{1}{p}] \boxtimes \mathbf{P}^1)/(D^{\natural}[\frac{1}{p}] \boxtimes \mathbf{P}^1)$ grâce au (ii), est orthogonal à $\check{D}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$, et donc est nul (i.e. appartient à $L \cdot (D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$).

Ceci permet de conclure.

Remarque V.2.21. — (i) Il ressort de la démonstration que $D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\check{D}_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ sont les orthogonaux l'un de l'autre. On aurait donc aussi pu les définir comme les orthogonaux respectifs de $\check{D}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ pour $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$.

(ii) On a $D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1 = (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* = \mathscr{D}(K) \otimes_{\Lambda_K} \check{\Pi}^*$, et comme $\check{\Pi}^* = D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est inclus dans $D^{(0,r_m]} \boxtimes \mathbf{P}^1$, il résulte du lemme V.2.15 que $D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1 \subset D^{]0,r_m]} \boxtimes \mathbf{P}^1$.

VI. Correspondances de Langlands p-adique et classique

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'espace Π^{alg} des vecteurs localement algébriques de $\Pi = \boldsymbol{\Pi}(D)$, où D est supposé irréductible[(59)]. Le § VI.2 étend, aux représentations localement algébriques, la théorie classique du modèle de Kirillov ; cette extension repose sur la définition d'une transformée de Fourier p-adique pour les fonctions localement polynomiales à support compact dans $\mathbf{Q}_p$. Les § VI.3 et VI.4 contiennent des rappels de théorie de Hodge p-adique, et des compléments. En particulier, le lecteur trouvera dans le § VI.3 un calcul de résidu (prop. VI.3.4), crucial pour la détermination des vecteurs localement algébriques, qui étend à une représentation arbitraire de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ une loi de réciprocité de Kato (pour les représentations de de Rham). Le § VI.5 explore les propriétés de Π^{alg}, sous l'hypothèse $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$; il y est en particulier montré que cette hypothèse implique que D est presque de Rham à poids de Hodge-Tate distincts (prop. VI.5.1) et que Π^{alg} est presque automatiquement irréductible (th. VI.5.7 ; ce dernier résultat repose sur la description, à partir de D, du modèle de Kirillov de Π^{alg}). Le § VI.6 est, quant à lui, consacré à la description de Π^{alg} en termes de la correspondance classique. On commence par montrer, grâce à l'étude de l'action de w_D sur la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ des vecteurs localement algébriques potentiels, que $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$ si et seulement si D est de Rham (th. VI.6.13 et VI.6.18). L'étude de cette action de w_D est très indirecte à cause de la pauvre convergence de la formule définissant w_D ; elle repose sur les deux lois de réciprocité explicites (celle mentionnée ci-dessus et celle du th. I.5.5, qui généralise la loi de Perrin-Riou). On détermine ensuite le module de Jacquet de Π^{alg} en termes du D_{pst} de la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ attachée à D (th. VI.6.30). Ceci permet de déterminer complètement Π^{alg} à partir de la représentation D_{pst} du groupe de Weil-Deligne de $\mathbf{Q}_p$ dans le cas où

(59) Le cas non irréductible peut se traiter directement en utilisant le fait que $\boldsymbol{\Pi}(D)$ est une extension de deux induites de caractères unitaires du borel.

celle-ci n'est pas irréductible (th. VI.6.50). Dans le cas où cette représentation est irréductible, on montre que Π^{alg} est supercuspidale et (th. VI.6.42) ne dépend pas de la filtration sur D_{pst} (qui, rappelons-le, permet de reconstruire D).

VI.1. Préliminaires

1. Notations. — Choisissons un système compatible $(\zeta_{p^n})_{n\in\mathbf{N}}$ de racines de l'unité : ζ_{p^n} est une racine primitive p^n-ième de l'unité et $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si $n \in \mathbf{N}$, soit $F_n = \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$, et soient $L_n = L \cdot F_n$ et $L_\infty = \cup_{n\in\mathbf{N}} L_n$.

Si $n \geq 1$ et $i \in \mathbf{N}$, on note $\mathrm{Tr}_{F_{n+i}/F_n} : L_{n+i} \to L_n$ l'application $\mathrm{Tr}_{F_{n+i}/F_n} \otimes \mathrm{id}$. Alors $p^{-i}\mathrm{Tr}_{F_{n+i}/F_n} : L_{n+i} \to L_n$ est un projecteur commutant à l'action de Γ ; de plus, la restriction de $p^{-j}\mathrm{Tr}_{F_{n+j}/F_n}$ à L_{n+i} est $p^{-i}\mathrm{Tr}_{F_{n+i}/F_n}$, si $j \geq i$, et donc les $p^{-i}\mathrm{Tr}_{F_{n+i}/F_n}$ définissent un projecteur $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} : L_\infty \to L_n$ qui commute à l'action de Γ. Ce projecteur est appelé *trace de Tate normalisée* ; il s'étend par continuité à $\widetilde{L} = L \cdot \mathbf{C}_p^{\mathscr{H}}$ dans lequel L_∞ est dense.

On note, $t = \log(1+T)$ le $2i\pi$ de Fontaine : si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, alors $\sigma_a(t) = a\,t$. Le sous-anneau $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}}$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est le complété de $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}^+[\frac{1}{p}]$ pour la topologie ω-adique, où $\omega = T/\varphi^{-1}(T)$. Soit $\widetilde{L[[t]]} = L \cdot (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{H}}$ [resp. $\widetilde{L((t))} = L \cdot (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})^{\mathscr{H}}$] ; c'est un anneau muni d'une action de Γ dans lequel l'anneau $\cup_{n\in\mathbf{N}} L_n[[t]]$ [resp. $\cup_{n\in\mathbf{N}} L_n((t))$] est dense. Le morphisme naturel $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbf{C}_p$ correspond à la réduction modulo ω ; sur $L_n[[t]]$, c'est tout simplement l'application $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \mapsto a_0$.

On note, comme ci-dessus, $\mathrm{Tr}_{F_{n+i}/F_n}$ l'application $\mathrm{Tr}_{F_{n+i}/F_n} \otimes \mathrm{id}$ de $L_{n+i}[[t]]$ dans $L_n[[t]]$ ou de $L_{n+i}((t))$ dans $L_n((t))$. Alors les $p^{-i}\mathrm{Tr}_{F_{n+i}/F_n}$ définissent des projecteurs $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}$ sur $\cup_{n\in\mathbf{N}} L_n[[t]]$ et $\cup_{n\in\mathbf{N}} L_n((t))$, qui s'étendent par continuité en des projecteurs $L[[t]]$-linéaires (appelés *traces de Tate normalisées*) :

$$\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} : \widetilde{L[[t]]} \to L_n[[t]] \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} : \widetilde{L((t))} \to L_n((t)).$$

L'anneau $\widetilde{L[[t]]}$ est aussi le complété de $\widetilde{\mathscr{E}}^+ = \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+[\frac{1}{p}]$ pour la topologie ω-adique, et la restriction de $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}$ à $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$ coïncide avec le projecteur $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}$, de $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$ dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p$, déjà défini (c'est d'ailleurs ce qui permet de prouver [**22**] que $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}$ s'étend par continuité à $\widetilde{L[[t]]}$).

2. Transformée de Fourier. — Rappelons que l'on dispose en p-adique de plusieurs analogues (cf. note 16) de $x \mapsto e^{2i\pi x}$. Le premier est la fonction $x \mapsto [(1+T)^x]$, pour $x \in \mathbf{Q}_p$, où $[(1+T)^x] \in \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$ désigne le représentant de Teichmüller de l'élément $(1+T)^x$ de $k_{\widetilde{\mathscr{E}}}$. Cette fonction est localement analytique, à valeurs dans $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$, et on a $[(1+T)^{x+y}] = [(1+T)^x]\,[(1+T)^y]$, pour tous $x, y \in \mathbf{Q}_p$. En composant $x \mapsto [(1+T)^x]$ avec $\theta : \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+ \to \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$, on obtient un morphisme de groupes $x \mapsto \varepsilon(x)$ de $\mathbf{Q}_p$ dans $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$, qui est localement constant. De plus, on a $[(1+T)^x] = \varepsilon(x)e^{tx}$, pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$, où $t = \log(1+T)$ est le $2i\pi$ de Fontaine.

On a déjà utilisé l'analogue $x \mapsto [(1+T)^x]$ pour définir la transformée de Fourier d'une mesure sur $\mathbf{Q}_p$ (prop. I.1.8). L'application $x \mapsto \varepsilon(x)$ permet de définir une

transformée de Fourier algébrique $\mathscr{F} : \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, L_\infty) \to \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, L_\infty)$ sur les fonctions localement constantes à support compact dans $\mathbf{Q}_p$. En effet, si ϕ est une telle fonction, et si $y \in \mathbf{Q}_p$, la suite de terme général $p^{-k} \sum_{x \bmod p^k} \varepsilon(xy)\phi(x)$ est constante pour k assez grand (si ϕ est constante modulo $p^a\mathbf{Z}_p$, la suite est constante pour $k \geq a - v_p(y)$) ; on note $\hat{\phi}(y) = \int_{\mathbf{Q}_p} \varepsilon(xy)\phi(x)\,dx$ ou $\mathscr{F}\phi(y)$ sa limite. Cette transformée de Fourier vérifie les formules usuelles :

- $\mathscr{F}(\phi(x+a))(y) = \varepsilon(-ay)\hat{\phi}(y)$, si $a \in \mathbf{Q}_p$,
- $\mathscr{F}(\varepsilon(ax)\phi(x))(y) = \hat{\phi}(y+a)$, si $a \in \mathbf{Q}_p$,
- $\mathscr{F}(\phi(cx))(y) = |c|^{-1}\hat{\phi}(c^{-1}y)$, si $c \in \mathbf{Q}_p^*$,
- $\mathscr{F}(\mathscr{F}\phi)(x) = \phi(-x)$.

En particulier, la transformée de Fourier inverse $\overline{\mathscr{F}}$ est définie par la formule habituelle $\overline{\mathscr{F}}\phi(y) = \mathscr{F}\phi(-y) = \int_{\mathbf{Q}_p} \varepsilon(-xy)\phi(x)\,dx$.

Comme $\sigma_a(\varepsilon(x)) = \varepsilon(ax)$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $x \in \mathbf{Q}_p$, on voit que $\mathscr{F}$ envoie les fonctions à valeurs dans L dans les fonctions à valeurs dans L_∞ vérifiant $\sigma_a(\phi(x)) = \phi(ax)$. En munissant $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, L_\infty)$ de l'action de Γ définie par $(\sigma_a \cdot \phi)(x) = \sigma_a(\phi(a^{-1}x))$, cela se traduit par le fait que $\mathscr{F}$ induit un isomorphisme

$$\mathscr{F} : \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, L) \cong \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, L_\infty)^\Gamma.$$

Soit $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p, L)$ l'espace des fonctions localement polynomiales sur $\mathbf{Q}_p$, à support compact, et à valeurs dans L. Soit $L_\infty((t))^- = L_\infty((t))/L_\infty[[t]]$, et soit $\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p, L_\infty((t))^- dt)$ l'espace des fonctions à support compact dans $\mathbf{Q}_p$, à valeurs dans $L_\infty((t))^- dt$, et qui sont localement de la forme $\sum_{i=0}^k \alpha_i y^{-i}$, où $\alpha_i \in L_\infty((t))^-$ (une telle fonction n'est donc pas forcément définie en 0). On fait agir Γ, comme ci-dessus, par la formule $(\sigma_a \cdot \phi)(y) = \sigma_a(\phi(a^{-1}y))$, où $\sigma_a(dt) = a\,dt$. On étend la transformée de Fourier algébrique en un isomorphisme

$$\mathscr{F} : \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p, L) \to \mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p, L_\infty((t))^- dt)^\Gamma,$$

en imposant la règle naturelle $(\mathscr{F}\phi')(y) = -ty\,\hat{\phi}(y)$. De manière explicite, si les ϕ_i sont des éléments de $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, L)$, et $\phi(x) = \sum_{i=0}^k \phi_i(x)\frac{x^i}{i!}$, alors $\mathscr{F}\phi(y) = \sum_{i=0}^k \mathscr{F}\phi_i(y)(-ty)^{-i}\frac{dt}{t}$. La transformée de Fourier inverse

$$\overline{\mathscr{F}} : \mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p, L_\infty((t))^- dt)^\Gamma \to \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p, L)$$

est donc donnée par $\overline{\mathscr{F}}\big(\sum_{i=0}^k \phi_i(y)(ty)^{-i}\frac{dt}{t}\big)(x) = \sum_{i=0}^k \overline{\mathscr{F}}\phi_i(-x)\frac{(-x)^i}{i!}$.

On a alors $\mathscr{F}(\phi(x+a))(y) = [(1+T)^{-ay}]\mathscr{F}\phi(y)$. En effet, si $\phi(x) = \sum_{i=0}^k \phi_i(x)\frac{x^i}{i!}$, alors $\phi(x+a) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \phi_i(x+a)\frac{x^{i-j}}{(i-j)!}\frac{a^j}{j!}$, et donc $\mathscr{F}(\phi(x+a))(y)$ est égal à

$$\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \varepsilon(-ay)\hat{\phi}_i(y)(-ty)^{j-i}\frac{a^j}{j!}\frac{dt}{t} = \sum_{i=0}^k \phi_i(y)(-ty)^{-i}\big(\varepsilon(-ay)\sum_{j=0}^i (-ty)^j\frac{a^j}{j!}\big)\frac{dt}{t}.$$

Or, modulo $L_\infty[[t]]dt$, on a

$$t^{-i}\varepsilon(-ay)\sum_{j=0}^i (-ty)^j\frac{a^j}{j!}\frac{dt}{t} = t^{-i}\varepsilon(-ay)e^{-aty}\frac{dt}{t} = t^{-i}[(1+T)^{-ay}]\frac{dt}{t},$$

d'où le résultat.

On a encore $\mathscr{F}(\phi(cx))(y) = |c|^{-1}\hat{\phi}(c^{-1}y)$, si $c \in \mathbf{Q}_p^*$, comme le montre un calcul immédiat.

On déduit des deux points ci-dessus que $\overline{\mathscr{F}}$ vérifie les deux lois de transformation :
- $\overline{\mathscr{F}}([(1+T)^{-ay}]\phi(y))(x) = \overline{\mathscr{F}}\phi(x+a)$,
- $\overline{\mathscr{F}}(\phi(cy))(x) = |c|^{-1}\,\overline{\mathscr{F}}\phi(c^{-1}x)$, si $c \in \mathbf{Q}_p^*$.

3. Transformées de Fourier et de Mellin, et résidus. — Si $y \in \mathbf{Q}_p^*$, on fait agir $\left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $dt = \frac{dT}{1+T}$ par la formule $\left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot dt = y\,dt$. Il est alors naturel de faire agir ψ sur $\mathscr{R}dt$ par $\psi(f\,dt) = \frac{1}{p}\psi(f)\,dt$, et on obtient de la sorte une structure de $(P(\mathbf{Z}_p),\varphi,\psi)$-module sur $\mathscr{R}dt$, en faisant agir, comme d'habitude, φ par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (i.e. $\varphi(f\,dt) = p\varphi(f)\,dt$) et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ par multiplication par $(1+T)^b$. On dispose donc des $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $(\mathscr{R}dt \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c \subset \mathscr{R}dt \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Si $R \in (\mathscr{R}dt \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ est tel qu'il existe $k, m \in \mathbf{N}$ tels que $\varphi^m(T)^k R \in (\mathscr{R}^+dt \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$, on définit une fonction $\phi_R : \mathbf{Q}_p^* \to L_\infty((t))^-dt$ en prenant pour $\phi_R(y)$ l'image de $\left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot R$ modulo $L_\infty[[t]]dt$.

Proposition VI.1.1. — (i) $\phi_R \in \mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p, L_\infty((t))^-dt)^\Gamma$
(ii) $\overline{\mathscr{F}}\phi_R(x) = \mathrm{rés}_0\big([(1+T)^{-x}]R\big)$.

Démonstration. — L'invariance de ϕ_R par Γ suit juste de ce que, par définition, l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $(\mathscr{R}dt \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ est celle de σ_a, ce qui fait que $\sigma_a(\phi_R(x)) = \phi_R(ax)$. Multiplier R par $[(1+T)^a]$ revient à multiplier ϕ_R par la fonction $[(1+T)^{ay}]$, et remplacer R par $\varphi(R) = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ transforme ϕ_R en $\frac{1}{p}\phi_R(px)$ (ne pas oublier que $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ multiplie dt par p). Comme ϕ_R est identiquement nulle si $R \in (\mathscr{R}^+dt \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$, cela permet, pour vérifier le (i), de se ramener au cas au cas où $R = \frac{1}{T^k}dt$ et $k \in \mathbf{N}$. Or, dans ce cas, ϕ_R est nulle en dehors de $\mathbf{Z}_p$ et vaut $\frac{y\,dt}{(e^{ty}-1)^k}$ modulo $L[[t]]dt$, si $y \in \mathbf{Z}_p$. Si $\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i t^{-i-1}$ est la partie polaire de $\frac{1}{(e^t-1)^k}$, on a alors $\phi_R(y) = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(y)\big(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i(ty)^{-i})\frac{dt}{t}\big)$, ce qui permet de conclure.

Pour démontrer le (ii), on commence par constater que les deux membres de l'égalité à vérifier se comportent de la même manière si on multiplie R par $[(1+T)^{-a}]$ ou si on applique φ à R. Comme de plus, les deux membres sont identiquement nuls si $R \in (\mathscr{R}^+dt \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$, cela permet de se ramener au cas au cas où $R = \frac{1}{T^k}dt$ et $k \in \mathbf{N}$. On a alors $\overline{\mathscr{F}}\phi_R(x) = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(x)\big(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\frac{(-x)^i}{i!}\big)$. Si $x \in \mathbf{Z}_p$, la somme $\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\frac{(-x)^i}{i!}$ est aussi le résidu en 0 de $e^{-tx}\big(\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i t^{-i-1}\big)dt$ et donc aussi celui de $e^{-tx}\frac{dt}{(e^t-1)^k}$. Le changement de variable $t = \log(1+T)$ montre que ce résidu est aussi $\mathrm{rés}_0\big([(1+T)^{-x}]\frac{1}{T^k}\frac{dT}{1+T}\big)$. Pour conclure, il suffit de vérifier que $\mathrm{rés}_0\big([(1+T)^{-x}]\frac{1}{T^k}\frac{dT}{1+T}\big) = 0$, si $x \notin \mathbf{Z}_p$, ce qui suit de ce que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}([(1+T)^{-x}]\frac{1}{T^k}) = \frac{1}{T^k}\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}[(1+T)^{-x}] = 0$, si $x \notin \mathbf{Z}_p$.

On note $\mathrm{rés}_L : L_\infty((t))dt \to L$ la composée de la trace de Tate normalisée $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p^n}\mathrm{Tr}_{L_n/L}$ avec $\mathrm{rés}_0$ application résidu en 0 (qui est à valeurs dans L_∞). On aurait aussi pu définir $\mathrm{rés}_L$ en prenant la composée de l'application résidu avec la

trace de Tate normalisée $L_\infty((t))dt \to L((t))dt$, ce qui donne le même résultat. Cette seconde description a l'avantage de montrer que rés_L s'étend par continuité en une application $\widetilde{\text{rés}_L} : \widetilde{L((t))dt} \to L$.

Lemme VI.1.2. — $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \text{rés}_0(\phi(x))\,dx = \text{rés}_L(\phi(1))$, *si* $\phi \in \text{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p, L_\infty((t))^- dt)^\Gamma$.

Démonstration. — On a $\text{rés}_0(\phi(1)) \in L_n$ pour n assez grand. De plus, rés_0 commute à l'action de Γ, et l'invariance de ϕ sous Γ se traduit par $\phi(a) = \sigma_a(\phi(1))$, pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$. On a donc

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \text{rés}_0(\phi(x))\,dx = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \sigma_x \cdot \text{rés}_0(\phi(1))\,dx = \frac{1}{p^n} \sum_{a \in \mathbf{Z}_p^*/(1+p^n\mathbf{Z}_p)} \sigma_a \cdot \text{rés}_0(\phi(1))$$

$$= \frac{1}{p^n} \text{Tr}_{L_n/L} \text{rés}_0(\phi(1)) = \text{rés}_L(\phi(1)).$$

Proposition VI.1.3. — (i) *Si* $R \in (\mathscr{R} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ *est tel qu'il existe* $k, m \in \mathbf{N}$ *tels que* $\varphi^m(T)^k R \in (\mathscr{R}^+ \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$, *alors* $\text{rés}_0(\phi_{R\,dt}(p^i)) = 0$, *si* $i \ll 0$, $\text{rés}_0(\phi_{R\,dt}(p^i))$ *est constant pour* $i \gg 0$, *et*

$$\text{rés}_0(R\,\frac{dT}{1+T}) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} p^{-i} \text{rés}_L(\phi_{R\,dt}(p^i)),$$

où, par convention naturelle, $\sum_{i=0}^{+\infty} p^{-i} = \frac{p}{p-1}$.

(ii) *Si* $R \in \widetilde{\mathscr{R}}$ *est tel qu'il existe* $k, m \in \mathbf{N}$ *et* $a \in \mathbf{Z}$ *tels que* $R \in \frac{\varphi^a(T)^k}{\varphi^m(T)^k} \widetilde{\mathscr{R}}^+$, *alors* $\phi_{R\,dt}$ *est à support compact dans* $\mathbf{Q}_p^*$, *et*

$$\text{rés}_0(R\,\frac{dT}{1+T}) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} p^{-i} \text{rés}_L(\phi_{R\,dt}(p^i)) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} \text{rés}_L(\varphi^i(R)\,dt).$$

Démonstration. — Le (ii) se déduit du (i) par passage à la limite pour $\text{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} R$, en tenant compte du fait que $\text{rés}_L(\varphi^i(R)\,dt) = 0$, si $i \notin [1-m, -a]$. Démontrons donc le (i). D'après la prop. VI.1.1, on a $\text{rés}_0(R\,\frac{dT}{1+T}) = \overline{\mathscr{F}}\phi_{R\,dt}(0)$. Or

$$\overline{\mathscr{F}}\phi_{R\,dt}(0) = \int_{\mathbf{Q}_p} \text{rés}_0(\phi_{R\,dt}(x))\,dx = \sum_{i \in \mathbf{Z}} p^{-i} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \text{rés}_0(\phi_{R\,dt}(p^i x))\,dx.$$

On conclut en utilisant la formule $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \text{rés}_0(\phi_{R\,dt}(p^i x))\,dx = \text{rés}_L(\phi_{R\,dt}(p^i))$ du lemme VI.1.2.

VI.2. Représentations localement algébriques. — L'objet de ce § est l'étude des représentations localement algébriques de G. Les résultats qui nous seront utiles par la suite sont :

– la prop. VI.2.3 qui donne un critère portant sur l'action du sous-groupe A de G pour qu'une représentation soit localement algébrique,

– la prop. VI.2.12 qui fournit une classification des représentations localement algébriques de G possédant un modèle de Kirillov.

1. Caractérisation. — Une fonction $\phi : G \to L$ est *algébrique* si $\phi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est un polynôme en a, b, c, d et $(ad-bc)^{-1}$; elle est *localement algébrique* si tout $g \in G$ possède un voisinage sur lequel elle est algébrique. Le lemme suivant montre qu'il suffit de vérifier ceci « pour chaque variable séparément »

Lemme VI.2.1. — *Soit ϕ une fonction de $K_n = 1+p^n\mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p)$ dans L. Si les fonctions*

$$x \mapsto \phi\left(\left(\begin{smallmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)g\right), \quad x \mapsto \phi\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+x \end{smallmatrix}\right)g\right),$$
$$x \mapsto \phi\left(\left(\begin{smallmatrix} 1+x & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)g\right), \quad x \mapsto \phi\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & 1+x \end{smallmatrix}\right)g\right)$$

sont, pour tout $g \in K_n$, polynomiales de degré $\leq D$ sur $p^n\mathbf{Z}_p$, alors $\phi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est un polynôme en a, b, c, d et $(ad-bc)^{-1}$.

Démonstration. — Soit $\phi_0(a,b,c,d) = \phi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de telle sorte que les fonctions

$$x \mapsto \phi_0(a(1+x),b(1+x),c,d), \quad x \mapsto \phi_0(a,b,c(1+x),d(1+x)),$$
$$x \mapsto \phi_0(a+(a+c)x,b+(b+d)x,c,d), \quad x \mapsto \phi_0(a,b,c+(a+c)x,d+(b+d)x),$$

sont polynomiales sur $p^n\mathbf{Z}_p$. Soit ψ la fonction définie par

$$\psi(z_1,z_2,z_3,z_4) = \phi_0(z_1,z_2z_1,z_3z_4,z_4) \quad \text{et donc } \phi_0(a,b,c,d) = \psi(a,a^{-1}b,d^{-1}c,d).$$

Alors

$$\phi_0(a(1+x),b(1+x),c,d) = \psi(a(1+x),a^{-1}b,c,d)$$
$$\phi_0(a,b,c(1+x),d(1+x)) = \psi(a,b,d^{-1}c,d(1+x))$$

sont polynomiales en x, de degré $\leq D$, ce qui montre que ψ est polynomiale en z_1 et z_4, de degré $\leq D$ en chacune de ces variables. De plus, les fonctions

$$\phi_0\big(a+(a+c)x,b+(b+d)x,c,d\big) = \psi\big(a+(a+c)x,(a+(a+c)x)^{-1}(b+(b+d)x),d^{-1}c,d\big)$$
$$\phi_0\big(a,b,c+(a+c)x,d+(b+d)x\big) = \psi\big(a,a^{-1}b,(d+(b+d)x)^{-1}(c+(a+c)x),d+(b+d)x\big),$$

sont polynomiales en x de degré $\leq D$. Soit $u = \frac{b+(b+d)x}{a+(a+c)x}$ pour que $x = \frac{au-b}{(b+d)-u(a+c)}$. Alors $((b+d)-u(a+c))^D\psi\big(a+(a+c)\frac{au-b}{(b+d)-u(a+c)},u,d^{-1}c,d\big)$ est polynomiale en u, de degré $\leq D$, et aussi en a et b puisque ψ est polynomiale en z_1. En prenant $x=0$ de telle sorte que $u = a^{-1}b$, on en déduit que

$$a^D((b+d)-a^{-1}b(a+c))^D\psi(a,a^{-1}b,d^{-1}c,d) = (ad-bc)^D\phi_0(a,b,c,d)$$

est polynomiale en a et b. Pour les mêmes raisons, $(ad-bc)^D\phi_0(a,b,c,d)$ est polynomiale en c et d, et donc $\phi_0(a,b,c,d)$ est de la forme $(ad-bc)^{-D}P(a,b,c,d)$, où P est un polynôme. Ceci permet de conclure.

2. Vecteurs localement algébriques. — Une *représentation algébrique* de G est un L-espace vectoriel W de dimension finie, muni d'une action linéaire de G telle que $g \mapsto g \cdot v$ soit une fonction algébrique sur G (à valeurs dans W), pour tout $v \in W$. Une telle représentation est une somme directe de représentations irréductibles et les représentations algébriques irréductibles de G sont exactement les $W_{\ell,k}$, où $\ell \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N} - \{0\}$, et $W_{\ell,k} = \det^{\ell} \otimes \mathrm{Sym}^{k-1}$, où Sym^{k-1} est la puissance symétrique $(k-1)$-ième de la représentation standard de G.

Soit Π un L-espace vectoriel muni d'une action linéaire de G. Suivant Prasad [**64**], on dit que $v \in \Pi$ est *localement algébrique* s'il existe un sous-groupe ouvert compact K' de G tel que $L[K'] \cdot v$ soit de dimension finie sur L et si la représentation de K' sur $L[K'] \cdot v$ est la restriction d'une représentation algébrique de G. Comme $g \cdot v$ est algébrique pour $gK'g^{-1}$, si v l'est pour K', l'ensemble Π^{alg} des vecteurs localement algébriques est stable par G.

Lemme VI.2.2. — *Les conditions suivantes sont équivalentes pour $v \in \Pi$:*

(i) $v \in \Pi^{\mathrm{alg}}$;

(ii) $L[K] \cdot v$ *est de dimension finie et pour tout*[(60)] $\mu \in (L[K] \cdot v)^*$, *la fonction* $g \mapsto \langle \mu, g \cdot v \rangle$ *est localement algébrique sur* K.

Démonstration. — Si $v \in \Pi^{\mathrm{alg}}$, il existe $n \geq 1$ tel que $L[K_n] \cdot v$ soit de dimension finie ; il en est donc de même de $L[K] \cdot v$ puisque K_n est d'indice fini dans K. L'algébricité locale de $g \mapsto \langle \mu, g \cdot v \rangle$ suit alors de la classification des représentations algébriques de G. D'où l'implication (i)⇒(ii).

Réciproquement, si (ii) est vérifié, et si $\mu_1, \ldots, \mu_d$ est une base de $(L[K] \cdot v)^*$, il existe n tel que $g \mapsto \langle \mu_i, g \cdot v \rangle$ soit algébrique sur K_n, pour tout $1 \leq i \leq d$. Mais alors $g \mapsto g \cdot v$ est algébrique sur K_n et donc $L[K_n] \cdot v$ est la restriction à K_n d'une représentation algébrique de G. On en déduit l'implication (ii)⇒(i), ce qui permet de conclure.

Proposition VI.2.3. — *Soit M un sous-L-espace vectoriel de Π stable par K. Si pour tout $v \in M$, la fonction $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ est localement polynomiale sur $p\mathbf{Z}_p$, alors $M \subset \Pi^{\mathrm{alg}}$.*

Démonstration. — Soit $v \in M$. L'hypothèse selon laquelle $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ est localement polynomiale implique en particulier que $L[\left(\begin{smallmatrix} 1+p\mathbf{Z}_p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)] \cdot v$ est de dimension finie. Maintenant, tout élément de K_1 est le produit d'au plus 12 termes appartenant à $\left(\begin{smallmatrix} 1+p\mathbf{Z}_p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cup \left\{w, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ car $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+x \end{smallmatrix}\right) = w\left(\begin{smallmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} (1+x)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} (1+x)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On en déduit que $L[K_1] \cdot v$ est de dimension finie et donc que $L[K] \cdot v$ est de dimension finie.

Soit alors $\mu_1, \ldots, \mu_d$ une base de $(L[K] \cdot v)^*$. Si $1 \leq i \leq d$, notons $\phi_{i,v}$ la fonction $g \mapsto \langle \mu_i, g \cdot v \rangle$. Soient $h, g \in K$. En utilisant l'hypothèse, on obtient que pour tous

(60) Ici $K = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et $K_n = 1 + p^n \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p)$.

$g,h\in K$, la fonction $x\mapsto \phi_{i,v}\big(h^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1+x & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)h\,g\big)=\langle h\cdot\mu_i,\left(\begin{smallmatrix}1+x & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)hg\cdot v\rangle$ est localement algébrique. En utilisant ceci pour $h=w$, $h=\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $h=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)w$, on voit que $\phi_{i,v}$ vérifie les hypothèses du lemme VI.2.1. On en déduit que $\phi_{i,v}$ est localement algébrique sur K, pour tout i, et donc que $g\mapsto\langle\mu,g\cdot v\rangle$ est localement algébrique sur K pour tout $\mu\in(L[K]\cdot v)^*$, ce qui permet, grâce au lemme VI.2.2, de conclure.

Comme une fonction localement algébrique sur G est localement analytique, on a $\Pi^{\mathrm{alg}}\subset\Pi^{\mathrm{an}}$. Comme on l'a déjà mentionné, Schneider et Teitelbaum ont démontré que Π^{an} n'est jamais nul, si $\Pi\in\mathrm{Rep}_L G$. Par contraste, Π^{alg} est le plus souvent nul : une condition nécessaire (mais pas du tout suffisante) pour que $\Pi^{\mathrm{alg}}\neq 0$ est que le caractère central de Π soit localement algébrique (i.e. de la forme $x^k\delta_0$, où $k\in\mathbf{Z}$ et δ_0 est localement constant). Sous cette condition, v est localement algébrique si v est $U(\mathfrak{g})$-fini au sens de [**64**], où $U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathbf{SL}_2$: cela résulte de la prop. 3.2 de [**64**], dont on tire, en outre, l'énoncé suivant.

Proposition VI.2.4. — *Si $\Pi\in\mathrm{Rep}_L G$, on peut décomposer Π^{alg} sous la forme $\Pi^{\mathrm{alg}}=\oplus_{\ell,k}\Pi^{\mathrm{alg}}_{\ell,k}$, où :*

- $\Pi^{\mathrm{alg}}_{\ell,k}=W_{\ell,k}\otimes_L\Pi_{\ell,k}$,
- *$\Pi_{\ell,k}$ est une représentation de G qui est lisse, admissible, de longueur finie, nulle pour presque tout couple (ℓ,k).*

On dit qu'une représentation de G est *localement algébrique, admissible*, si elle est de la forme $\oplus_{\ell,k}\Pi^{\mathrm{alg}}_{\ell,k}$ où $\Pi_{\ell,k}$ est une représentation de G qui est lisse, admissible, de longueur finie, nulle pour presque tout couple (ℓ,k). On peut donc paraphraser la prop. VI.2.4 sous la forme : *si $\Pi\in\mathrm{Rep}_L G$, alors Π^{alg} est localement algébrique, admissible.*

3. L'action du mirabolique sur les fonctions localement polynomiales. — On note $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)^\Gamma$ le sous-L-espace vectoriel des fonctions de $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,L_\infty)^\Gamma$ à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$. On munit cet espace d'une action de $P(\mathbf{Q}_p)$ grâce à la formule

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\phi\right)(x)=\varepsilon(bx)\phi(ax).$$

Lemme VI.2.5. — *$\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)^\Gamma$ est un $L[P(\mathbf{Q}_p)]$-module irréductible.*

Démonstration. — $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)$ est la réunion croissante des E_n, où E_n est l'espace des fonctions à support dans $\{x,\ -n\leq v_p(x)\leq n\}$, constantes modulo $p^{n+1}\mathbf{Z}_p$. Comme E_n est un L_∞-espace vectoriel de dimension finie sur lequel $\Gamma=\mathrm{Aut}(L_\infty/L)$ agit à travers un quotient fini, il résulte du théorème de Hilbert 90 que l'application naturelle de $L_\infty\otimes_L\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)^\Gamma$ dans $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)$ est un isomorphisme. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)$ est un $L_\infty[P(\mathbf{Q}_p)]$-module irréductible. C'est parfaitement classique, mais nous allons rappeler la démonstration pour le confort du lecteur.

Soit $\phi\in\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)-\{0\}$. On veut prouver que $L_\infty[P(\mathbf{Q}_p)]\cdot\phi=\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)$ et, quitte à remplacer ϕ par $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\lambda\phi$, avec $a\in\mathbf{Q}_p^*$ et $\lambda\in L$, on peut supposer que

$\phi(1)=1$. Il existe alors $\ell, m \in \mathbf{N}$ tels que $\phi = 1$ sur $1+p^m\mathbf{Z}_p$ et $\phi = 0$ en dehors de $p^{-\ell}\mathbf{Z}_p$. Soit $n \geq m$. La fonction $\alpha_n(x) = \frac{1}{p^{n+\ell}} \sum_{i=0}^{p^{n+\ell}-1} \varepsilon(p^{-n}i(x-1))$ vaut 1 sur $1+p^n\mathbf{Z}_p$ et 0 sur $p^{-\ell}\mathbf{Z}_p - (1+p^n\mathbf{Z}_p)$. On a donc $\alpha_n\phi = \mathbf{1}_{1+p^n\mathbf{Z}_p}$. Or on a aussi $\alpha_n\phi = \frac{1}{p^{n+\ell}} \sum_{i=0}^{p^{n+\ell}-1} \varepsilon(-p^{-n}i)\left(\begin{smallmatrix}1 & p^{-n}i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi \in L_\infty[P(\mathbf{Q}_p)]\cdot\phi$, et donc $\mathbf{1}_{1+p^n\mathbf{Z}_p}$ appartient à $L_\infty[P(\mathbf{Q}_p)]\cdot\phi$. Il s'ensuit que $\mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix}a^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot \mathbf{1}_{1+p^{n-v_p(a)}\mathbf{Z}_p} \in L_\infty[P(\mathbf{Q}_p)]\cdot\phi$, pour tout $a \in \mathbf{Q}_p^*$ et tout $n \geq m + v_p(a)$, et comme ces fonctions forment une famille génératrice du L_∞-espace vectoriel $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)$, cela permet de conclure.

On note $\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty((t))^-dt)^\Gamma$ le sous-L-espace vectoriel des fonctions de $\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p, L_\infty((t))^-dt)^\Gamma$ à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$. On munit cet espace d'une action de $P(\mathbf{Q}_p)$ grâce à la formule

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\phi\right)(x) = [(1+T)^{bx}]\phi(ax).$$

Si $k \in \mathbf{N} - \{0\}$, on note $t^{-k}L_\infty[t]^-$ le sous-$L_\infty[[t]]$-module de $L_\infty((t))^-$ engendré par t^{-k}, et on note $\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p^*, t^{-k}L_\infty[t]^-dt)^\Gamma$ le sous-espace de $\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty((t))^-dt)^\Gamma$ des fonctions à valeurs dans $t^{-k}L_\infty[t]^-dt$. Il est clair sur la formule donnant l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ que $\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p^*, t^{-k}L_\infty[t]^-dt)^\Gamma$ est stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, pour tout $k \in \mathbf{N} - \{0\}$, car $[(1+T)^{bx}] = \varepsilon(bx)e^{tbx} \in L_\infty[[t]]$.

Proposition VI.2.6. — *$\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty((t))^-dt)^\Gamma$ n'a pour sous-$L[P(\mathbf{Q}_p)]$-modules stricts que les $\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p^*, t^{-k}L_\infty[t]^-dt)^\Gamma$, pour $k \geq \mathbf{N} - \{0\}$.*

Démonstration. — Notons simplement X_k l'espace $\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p^*, t^{-k}L_\infty[t]^-dt)^\Gamma$. Un élément de X_k est donc localement un polynôme de degré $\leq k-1$ en x^{-1} à cause de l'invariance sous l'action de Γ. Il en résulte que X_k/X_{k-1} est isomorphe, en tant que $L[P(\mathbf{Q}_p)]$-module à l'espace $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma$ tordu par le caractère $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \mapsto a^{1-k}$ de $P(\mathbf{Q}_p)$, car $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot t^{-k}dt = a^{1-k}t^{-k}dt$, si $a \in \mathbf{Q}_p^*$.

Par ailleurs, $\left(\begin{smallmatrix}1 & p^n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1$ envoie $\phi \in X_k$ dans X_{k-1}, si n est assez grand, et le degré de $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & p^n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right)\phi$ en x^{-1} est alors exactement $i-1$ si celui de ϕ est i. Soit maintenant M un sous-$L[P(\mathbf{Q}_p)]$-module de $\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty((t))^-dt)^\Gamma$. Il résulte de ce qui précède et du lemme VI.2.5 que si M contient un élément de degré $k-1$ en x^{-1}, alors M contient X_k. On en déduit le résultat.

4. Modèle de Kirillov d'une représentation lisse. — Si Π est une représentation de G, admissible, lisse, de caractère central δ_Π, un *modèle de Kirillov* pour Π est une injection B-équivariante de Π dans l'espace $\mathrm{LC}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma$ des fonctions localement constantes sur $\mathbf{Q}_p^*$, à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ (l'adhérence de $\{x \in \mathbf{Q}_p^*,\ f(x) \neq 0\}$ dans $\mathbf{Q}_p$ est compact), muni de l'action de B définie par

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\cdot f\right)(x) = \delta_\Pi(d)\,\varepsilon(d^{-1}bx)\,f(d^{-1}ax).$$

(Les espaces $\mathrm{LC}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma$ et $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, L_\infty)^\Gamma$ seront notés respectivement X et X_c dans les démonstrations qui suivent, mais pas dans les énoncés.) Un tel modèle n'existe

pas forcément, mais si Π est irréductible et de dimension infinie, alors Π a un modèle de Kirillov (voir ci-dessous pour un énoncé plus précis).

On rappelle que le *module de Jacquet* $J(\Pi)$ de Π est le quotient de Π par le sous-espace Π_U engendré par les $(u-1)\cdot v$, pour $v\in\Pi$, et $u\in U=\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

Lemme VI.2.7. — *Si Π admet un modèle de Kirillov, alors :*

(i) $\Pi^U=0$, *et donc* $\Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}=0$;

(ii) $\Pi_U=\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)^\Gamma$ *et* $J(\Pi)=\Pi/\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)^\Gamma$.

Démonstration. — Soit $\phi\in\Pi$, non nulle. On a $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi-\phi\right)(x)=(\varepsilon(bx)-1)\phi(x)$, et comme $(\varepsilon(bx)-1)\phi(x)\neq 0$, si $\phi(x)\neq 0$ et $v_p(b)<-v_p(x)$, cela prouve que $\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi\neq\phi$, si $v_p(b)\ll 0$. On en déduit le (i).

Maintenant, comme $\varepsilon(bx)=1$, si $v_p(x)\geq -v_p(b)$, on a $\Pi_U\subset X_c$. Par ailleurs, Π_U est stable par B et non nul d'après le (i). L'irréductibilité de X_c comme $L[B]$ (et même $L[P]$)-module implique donc que $\Pi_U=X_c$. On en déduit le (ii), ce qui permet de conclure.

Proposition VI.2.8. — *Soit Π une représentation irréductible de G, admissible et lisse, de dimension infinie.*

(i) Π *admet un modèle de Kirillov.*

(ii) $J(\Pi)$ *est de dimension* 0 (si Π est supercuspidale), 1 (si Π est spéciale), *ou* 2 (si Π est de la série principale). *De plus :*

– *si $J(\Pi)$ est de dimension* 2, *et si χ est un caractère de B apparaissant en quotient de $J(\Pi)$, alors χ n'est ni de la forme $\delta\otimes\delta$, ni de la forme $\delta|\ |\otimes\delta|\ |^{-1}$, et* $\Pi=\mathrm{Ind}_B^G\chi$;

– *si $J(\Pi)$ est de dimension* 1, *alors $J(\Pi)$ est un caractère de B de la forme $\delta|\ |\otimes\delta|\ |^{-1}$, et on a une suite exacte* $0\to\Pi\to\mathrm{Ind}_B^G\delta|\ |\otimes\delta|\ |^{-1}\to\delta\circ\det\to 0$, *de G-modules, et* $\Pi=\mathrm{St}\otimes(\delta\circ\det)$, *où* St *est la steinberg.*

Démonstration. — Le (i) est [**48**, th. 2.23]. Pour le (ii), dans le cas supercuspidal, cf. [**48**, prop. 2.16] ; le reste découle de l'analyse de la série principale [**48**, th. 3.3].

Lemme VI.2.9. — *Soit Π_0 une représentation irréductible de G, admissible et lisse, de dimension infinie, et soit $d\in\mathbf{N}$. Si Π est une extension de $\mathbf{1}^d$ par Π_0 admettant un modèle de Kirillov, alors de deux choses l'une :*

- $d=0$ *et donc* $\Pi=\Pi_0$ *est irréductible ;*
- $d=1$, *auquel cas* Π_0 *est la steinberg et* $\Pi=\mathrm{Ind}_B^G|\ |\otimes|\ |^{-1}$.

Démonstration. — Si $d\geq 1$, en prenant l'image inverse Π' d'une copie de $\mathbf{1}$, on obtient une extension de $\mathbf{1}$ par Π_0, qui est non triviale puisque $\Pi^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}=0$, d'après le (i) du lemme VI.2.7. D'après le (ii) du même lemme, les modules de Jacquet de Π_0 et Π' sont respectivement Π_0/X_c et Π'/X_c, ce qui fait que l'on a une suite exacte $0\to J(\Pi_0)\to J(\Pi')\to\mathbf{1}\to 0$. La discussion est légèrement différente suivant que $J(\Pi_0)$ est de dimension 0, 1 ou 2.

– Si $J(\Pi_0)=0$ (i.e. si Π_0 est cuspidale), alors $\Pi_0=X_c$, tandis que Π' contient une fonction ϕ vérifiant, modulo X_c, $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\phi=\phi$ et $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\phi=\phi$, pour tout $a\in\mathbf{Z}_p^*$, ce qui se traduit le fait que $\phi(x)$ ne dépend que de $v_p(x)$ et $\phi(px)=\phi(x)$, si $v_p(x)\gg 0$. Or il y a, modulo X_c, une seule telle fonction, à savoir $\phi=\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$. On en déduit que Π' est le sous-espace $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,L_\infty)^\Gamma$ de X. Soit maintenant $\phi=\int_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)} g\cdot\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\,dg$, où la mesure de Haar sur $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ est normalisée. Alors ϕ est invariante par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ par construction, et est de la forme $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}+\phi_0$, avec $\phi_0\in X_c$, car dg est normalisée. En particulier ϕ est à support dans $\mathbf{Z}_p$ car ϕ est fixé par $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. De même, $\phi(x)$ ne dépend que de $v_p(x)$ car ϕ est fixé par $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^*&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Maintenant, $\Pi_0^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}=0$, puisque Π_0 est cuspidale. On en déduit le fait que $(\Pi')^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}$ est de dimension 1, et donc que ϕ est vecteur propre de l'opérateur de Hecke T_p (pour la valeur propre $1+p^{-1}$, puisque T_p agit par multiplication par $1+p^{-1}$ sur la représentation triviale). Ceci se traduit par l'identité

$$\frac{1}{p}\sum_{i\in\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p}\varepsilon(ix)\phi(px)+\frac{1}{p}\phi(\frac{x}{p})=(1+\frac{1}{p})\phi(x),\quad\text{pour tout } x\in\mathbf{Q}_p^*.$$

En utilisant le fait que ϕ est à support dans $\mathbf{Z}_p$, et en normalisant ϕ par $\phi(0)=1$, on en déduit que $\phi(x)=\frac{1-p^{-n}}{1-p^{-1}}$ sur $p^n\mathbf{Z}_p$. On aboutit à une contradiction puisque cette fonction n'est constante sur $p^k\mathbf{Z}_p$ pour aucun $k\in\mathbf{N}$, et donc n'appartient pas à Π'. On a donc $d=0$, si Π_0 est cuspidale.

– Si $J(\Pi_0)$ est de dimension 1 ou 2, et si χ est un caractère de B apparaissant comme quotient de $J(\Pi_0)$, alors χ apparaît aussi comme quotient de $J(\Pi')$, car χ n'est pas trivial d'après la prop. VI.2.8. On en déduit l'existence d'un morphisme G-équivariant non trivial de Π' dans $\mathrm{Ind}_B^G\chi$. Comme l'extension dont on est parti n'est pas scindée, et comme Π_0 est irréductible, cela implique que $\Pi'=\mathrm{Ind}_B^G\chi$, et comme $\mathbf{1}$ est un quotient de Π', il s'ensuit que $\chi=|\ |\otimes|\ |^{-1}$ et $\Pi_0=\mathrm{St}$.

Pour conclure, il reste à vérifier que l'on ne peut pas avoir $d\geq 2$, dans le cas $\Pi_0=\mathrm{St}$. Supposons le contraire, et soit Π' une extension de $\mathbf{1}\oplus\mathbf{1}$ par St admettant un modèle de Kirillov. Comme $\mathrm{St}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}=0$, on en déduit, comme dans le cas cuspidal, que $(\Pi')^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}$ est de dimension 2, et que T_p agit par multiplication par $1+p^{-1}$ sur cet espace. On aboutit à une contradiction car il n'y a, à multiplication près par une constante, qu'une seule fonction de X à support dans $\mathbf{Z}_p$, propre pour T_p pour cette valeur propre, à savoir la fonction rencontrée plus haut.

Ceci permet de conclure.

Proposition VI.2.10. — *Soit* Π *une représentation de* G*, admissible, lisse, admettant un caractère central, et possédant un modèle de Kirillov. Alors* Π *est irréductible ou bien* Π *est de la forme* $\mathrm{Ind}_B^G\delta|\ |\otimes\delta|\ |^{-1}$*, et donc est une extension de* $\delta\circ\det$ *par* $\mathrm{St}\otimes(\delta\circ\det)$.

Démonstration. — Comme Π possède un modèle de Kirillov, on peut voir Π comme un sous-espace de X, qui, d'après le (ii) du lemme VI.2.7, contient X_c. Soit Π_0 l'intersection de toutes les sous-représentations de Π contenant X_c. Alors Π_0 est irréductible

(une sous-représentation stricte de Π_0 serait d'intersection nulle avec X_c car X_c est irréductible (lemme VI.2.5), et donc serait constituée d'éléments fixes par U, et donc serait nulle puisque $X^U = 0$), et admissible puisque Π l'est.

Si $\Pi = \Pi_0$, on a gagné. Supposons donc que $\Pi/\Pi_0 \neq 0$. Comme Π_0 contient X_c par construction, il contient l'ensemble des $(u-1)\phi$, pour $\phi \in X$ et $u \in U$, et donc, *a fortiori*, l'ensemble des $(u-1)\phi$, pour $\phi \in \Pi$ et $u \in U$. Il en résulte que U agit trivialement sur Π/Π_0 et donc que $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ agit trivialement sur Π/Π_0 puisque $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est engendré par U et wUw. Comme Π a un caractère central, il en est de même de Π/Π_0, ce qui permet de découper Π/Π_0 en un nombre fini de morceaux correspondant aux racines carrées du caractère central. Choisissons un morceau A_δ non nul sur lequel G agit par $\delta \circ \det$. Quitte à tordre par $(\delta \circ \det)^{-1}$, on peut supposer que G agit trivialement. Soit $v \in A_\delta$ non nul, et soit Π' l'image inverse de $L\,v$ dans Π, de telle sorte que l'on a une extension $0 \to \Pi_0 \to \Pi' \to \mathbf{1} \to 0$ qui est non scindée puisque $X^U = 0$ comme on l'a déjà remarqué. On en déduit, en utilisant le lemme VI.2.9, que $\Pi_0 = \mathrm{St}$, et que $\Pi = \mathrm{Ind}_B^G |\ | \otimes |\ |^{-1}$.

Ceci permet de conclure.

5. Modèle de Kirillov d'une représentation localement algébrique. — Ce qui précède s'étend aux représentations localement algébriques, admissibles, Une telle représentation Π est la somme directe de représentations $W_{\ell,k} \otimes \Pi_{\ell,k}$, où $W_{\ell,k} = \det^\ell \otimes \mathrm{Sym}^{k-1}$ et $\Pi_{\ell,k}$ est une représentation admissible lisse de G admettant un caractère central. On dit que Π est *de type* (ℓ,k) si $\Pi_{\ell',k'} = 0$ pour tout $(\ell',k') \neq (\ell,k)$. Alors, d'après Prasad [**64**], Π est irréductible si et seulement si elle est de type (ℓ,k) pour un certain couple (ℓ,k) (déterminé de manière unique), et si $\Pi_{\ell,k}$ est irréductible.

Soit $\Pi = W_{\ell,k} \otimes \Pi_0$ une représentation de type (ℓ,k). Le caractère central δ_Π de Π est relié à celui de Π_0 par la formule

$$\delta_\Pi(a) = a^{2\ell+k-1}\delta_{\Pi_0}(a).$$

Si e_1, e_2 désigne la base canonique de $\mathbf{Q}_p^2$ sur $\mathbf{Q}_p$, on a $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)e_1 = ae_1 + ce_2$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)e_2 = be_1 + de_2$, et donc dans la base $e_1^i e_2^{k-1-i}$, pour $0 \leq i \leq k-1$, de Sym^{k-1}, l'action de G est donnée par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)e_1^i e_2^{k-1-i} = (ae_1 + ce_2)^i(be_1 + de_2)^{k-1-i}$.

On peut écrire tout $z \in \Pi$, de manière unique, sous la forme $z = \sum_{i=0}^{k-1} z_i \otimes e_2^i e_1^{k-1-i}$, où les z_i sont des éléments de Π_0. Si Π_0 possède un modèle de Kirillov, on utilise la décomposition de z sous la forme ci-dessus pour lui associer une fonction $\mathscr{K}_z$, localement polynomiale, à valeurs dans $t^\ell L_\infty[t]/t^{k+\ell}$ (plus précisément, élément de $\mathrm{LP}^{[\ell,\ell+k-1]}(\mathbf{Q}_p^*, t^\ell L_\infty[t]/t^{\ell+k})$), en posant

$$\mathscr{K}_z(x) = (tx)^\ell \sum_{i=0}^{k-1} i!\,\mathscr{K}_{z_i}(x)(tx)^{k-1-i},$$

où $\mathscr{K}_{z_i}$ désigne la fonction associée à z_i dans le modèle de Kirillov de Π_0. La proposition suivante montre que $\{\mathscr{K}_z,\ z \in \Pi\}$ peut être considéré comme un modèle de Kirillov pour Π.

Proposition VI.2.11. — *Si $z \in \Pi$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in B$, alors*

$$\mathscr{K}_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)z}(x) = \delta_\Pi(d)[(1+T)^{d^{-1}bx}]\mathscr{K}_z(d^{-1}ax).$$

Démonstration. — Il suffit de le vérifier pour $z = z_i \otimes e_2^i e_1^{k-1-i}$, avec $0 \leq i \leq k-1$. Or on a

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)(z_i \otimes e_2^i e_1^{k-1-i}) &= (ad)^\ell \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) z_i \otimes (de_2 + be_1)^i (ae_1)^{k-1-i} \\ &= (ad)^\ell a^{k-1-i} d^i \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) z_i \otimes \Big(\sum_{j=0}^{i} \frac{i!}{j!(i-j)!} (d^{-1}b)^j e_2^{i-j} e_1^{k-1-i+j} \Big)\end{aligned}$$

et comme $\mathscr{K}_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)z_i}(x) = \delta_{\Pi_0}(d)\varepsilon(d^{-1}bx)\mathscr{K}_{z_i}(d^{-1}ax)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)z}(x) &= i!(tx)^\ell (ad)^\ell a^{k-1-i} d^i \delta_{\Pi_0}(d) \mathscr{K}_{z_i}(d^{-1}ax)\varepsilon(d^{-1}bx) \sum_{j=0}^{i} \frac{(d^{-1}b)^j}{j!}(tx)^{k-1-i+j} \\ &= i!\delta_\Pi(d)(d^{-1}a\,tx)^\ell (d^{-1}a)^{k-1-i} \mathscr{K}_{z_i}(d^{-1}ax)\varepsilon(d^{-1}bx) \sum_{j=0}^{i} \frac{(d^{-1}b)^j}{j!}(tx)^{k-1-i+j},\end{aligned}$$

et le résultat suit de ce que $\varepsilon(d^{-1}bx)\sum_{j=0}^{i} \frac{(d^{-1}b)^j}{j!}(tx)^{k-1-i+j} = [(1+T)^{d^{-1}bx}](tx)^{k-1-i}$ dans $L_\infty[t]/t^k$.

On dit qu'une représentation Π, localement algébrique de type (ℓ, k), admettant un caractère central, possède un modèle de Kirillov, s'il existe une injection B-équivariante de Π dans $\mathrm{LP}^{[\ell,\ell+k-1]}(\mathbf{Q}_p^*, t^\ell L_\infty[t]/t^{\ell+k})$ (muni de l'action de B définie par $\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\phi\right)(x) = \delta_\Pi(d)[(1+T)^{d^{-1}bx}]\phi(d^{-1}ax)$). On déduit facilement de la prop. VI.2.11 que, si $\Pi = W_{\ell,k} \otimes \Pi_0$, alors Π admet un modèle de Kirillov si et seulement si Π_0 en admet un. Le résultat suivant est donc une conséquence de la prop. VI.2.10.

Proposition VI.2.12. — *Soit Π une représentation de G, localement algébrique de type (ℓ, k), admissible, admettant un caractère central et possédant un modèle de Kirillov. Alors Π est irréductible ou bien est une extension de $W_{\ell,k} \otimes (\delta_0 \circ \det)$ par $W_{\ell,k} \otimes (\mathrm{St} \otimes (\delta_0 \circ \det))$, où δ_0 est un caractère localement constant de $\mathbf{Q}_p^*$.*

VI.3. (φ, Γ)-modules et théorie de Hodge p-adique. — Ce § vise à introduire un certain nombre d'invariants associés à un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. Les résultats qui nous seront utiles par la suite sont les suivants.

– La prop. VI.3.2 fournit un critère permettant de distinguer, parmi les (φ, Γ)-modules Hodge-Tate de dimension 2, ceux qui sont de Rham des autres.

– La prop. VI.3.4, qui généralise une loi de réciprocité explicite de Kato (§ VIII.2), joue un rôle crucial pour l'étude de l'action de w sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ (cf. lemme VI.6.7, qui admet pour conséquence le th VI.6.8, clef de voûte de l'étude de Π^{alg}).

1. Les modules D_{dif}, D_{Sen}, D_{dR}...— L'anneau [61] $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}$ apparaissant dans la rem. V.1.2 est constitué de l'ensemble des éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ convergeant dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui se traduit par l'existence d'une injection naturelle ι de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Si $n\in\mathbf{N}$, on dispose d'un morphisme d'anneaux $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}\to\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ « de localisation en $\zeta_{p^n}-1$ » qui est injectif et commute à l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Le morphisme ι_n est obtenu en composant l'injection naturelle ι de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ avec $\varphi^{-n} : \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}\to\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}$. L'image du sous-anneau $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}$ par ι_n est incluse dans $L_n[[t]]$, l'application ι_n envoyant $f(T)$ sur $f(\zeta_{p^n}e^{t/p^n}-1)$.

Soit $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ de rang d, et soit $V=\mathbf{V}(D)$ de sorte que $D=(\mathbf{A}\otimes_{\mathbf{Z}_p}V)^{\mathscr{H}}$. Soit $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+=(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V)^{\mathscr{H}}$ (resp. $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}=(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V)^{\mathscr{H}}$). C'est un $\widetilde{L[[t]]}$ (resp. $\widetilde{L((t))}$)-module libre de rang d. Le morphisme de localisation $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}\to\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ induit une application de localisation en $\zeta_{p^n}-1$, encore noté ι_n, de $D^{]0,r_n]}$ dans $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$, qui commute à l'action de Γ. On note $D_{\mathrm{dif},n}^+$ le sous-$L_n[[t]]$-module de $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$ engendré par $\iota_n(D^{]0,r_n]})$, et $D_{\mathrm{dif},n}=D_{\mathrm{dif},n}^+[\frac{1}{t}]$ (c'est un sous-$L_n((t))$-espace vectoriel de $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}$). On choisit un entier $m(D)$ suffisamment grand [62]. Si $n\geq m(D)$, ce module est de rang d sur $L_n[[t]]$, et ne dépend pas de n en le sens que $D_{\mathrm{dif},n}^+$ est le sous-$L_n[[t]]$-module de $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$ engendré par $D_{\mathrm{dif},m(D)}^+$. Comme $\iota_n=\iota\circ\varphi^{-n}$, on dispose, si $n\geq m(D)$, de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} D^{]0,r_n]} & \xrightarrow{\iota_n} & D_{\mathrm{dif},n}^+ \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow \\ D^{]0,r_{n+1}]} & \xrightarrow{\iota_{n+1}} & D_{\mathrm{dif},n+1}^+ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D^{]0,r_n]} & \xrightarrow{\iota_n} & D_{\mathrm{dif},n}^+ \\ \uparrow{\scriptstyle\psi} & & \uparrow \\ D^{]0,r_{n+1}]} & \xrightarrow{\iota_{n+1}} & D_{\mathrm{dif},n+1}^+ \end{array},$$

où l'application $D_{\mathrm{dif},n}^+\to D_{\mathrm{dif},n+1}^+$ du premier diagramme est juste l'inclusion tandis que l'application $D_{\mathrm{dif},n+1}^+\to D_{\mathrm{dif},n}^+$ du second est induite par $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{L_{n+1}/L_n}$, et donc est une projection commutant à l'action de Γ.

On aurait pu définir directement les objets ci-dessus sans passer par V : si on voit $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$ comme un sous-anneau de $L_n[[t]]$ grâce à ι_n, alors on a :

$$D_{\mathrm{dif},n}^+=L_n[[t]]\otimes_{\mathscr{E}^{]0,r_n]}}D^{]0,r_n]}\quad\text{et}\quad D_{\mathrm{dif},n}=L_n((t))\otimes_{\mathscr{E}^{]0,r_n]}}D^{]0,r_n]},$$
$$\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+=\widetilde{L[[t]]}\otimes_{\mathscr{E}^{]0,r_n]}}D^{]0,r_n]}\quad\text{et}\quad\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}=\widetilde{L((t))}\otimes_{\mathscr{E}^{]0,r_n]}}D^{]0,r_n]}.$$

Soit $\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}=(\mathbf{C}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}V)^{\mathscr{H}}$; d'après Sen [**69**], c'est un $\widetilde{L}$-module libre de rang d ; on a aussi $\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}=\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+/t\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$. Si $n\geq m(D)$, on pose $D_{\mathrm{Sen},n}=D_{\mathrm{dif},n}^+/tD_{\mathrm{dif},n}^+$. Alors $D_{\mathrm{Sen},n}$ est un L_n-espace vectoriel de dimension d, muni d'une action semi-linéaire

[61] Le lecteur est renvoyé à [**24**] pour une présentation plus détaillée de ce qui suit.

[62] Pour une partie de ce qui suit, il suffit que $m(D)$ soit supérieur ou égal à l'entier $m_0(D)$ du n° 1 du § V.1, mais dans les applications à la correspondance de Langlands locale p-adique, on aura besoin que $m(D)\geq m_5(D)$, et pour que l'action de Γ sur $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$ soit agréable (note 63), on peut être amené à augmenter encore $m(D)$.

de Γ, qui ne dépend pas de n au sens ci-dessus et qui engendre $\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}$. Si n est assez grand [63], et si $a \in 1+p^n\mathbf{Z}_p$, alors σ_a agit linéairement, et il existe $\kappa_1, \dots, \kappa_d \in \overline{\mathbf{Q}}_p$ (les *poids de Hodge-Tate* de D) tels que les valeurs propres de σ_a soient $a^{\kappa_1}, \dots, a^{\kappa_d}$ pour tout $a \in 1+p^n\mathbf{Z}_p$.

2. (φ,Γ)-modules presque de Rham. — En s'inspirant des techniques de Sen [**69**], Fontaine [**41**] a défini les notions de représentation *presque de Rham* ou *presque Hodge-Tate* de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et montré que ces deux notions coïncident. Ces résultats se traduisent, via l'équivalence de catégories $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, en termes de (φ,Γ)-modules. Dans tout ce qui suit, $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est de dimension d, et $V = \mathbf{V}(D)$ est l'objet de $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui correspond.

On définit un anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}$ en adjoignant à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ une variable notée $\log t$ (i.e. $\mathbf{B}_{\mathrm{pdR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}[\log t]$) sur laquelle $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit par $g(\log t) = \log t + \log\chi(g)$, où $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ est, comme d'habitude, le caractère cyclotomique (on rappelle que $g(t) = \chi(g)t$, ce qui explique la notation $\log t$). De même, on définit un anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{pHT}}$ par $\mathbf{B}_{\mathrm{pHT}} = \mathbf{C}[t, t^{-1}, \log t]$, avec les actions ci-dessus de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur t et $\log t$.

Les L-espace vectoriels

$$\mathbf{D}_{\mathrm{pHT}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{pHT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}'_{\mathrm{pdR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{pdR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$$

sont de dimension $\leq d$. On dit que V est *presque Hodge-Tate* (resp. *presque de Rham*) s'il y a égalité.

Si $n \geq m_0(D)$, on peut récupérer $\mathbf{D}_{\mathrm{pHT}}(V)$ et $\mathbf{D}'_{\mathrm{pdR}}(V)$ à partir de D, sans passer par les anneaux de Fontaine : on a

$$\mathbf{D}_{\mathrm{pHT}}(V) = (L_n[t,t^{-1},\log t] \otimes_{L_n} D_{\mathrm{Sen},n})^{\Gamma}, \quad \mathbf{D}'_{\mathrm{pdR}}(V) = (L_n((t))[\log t] \otimes_{L_n((t))} D_{\mathrm{dif},n})^{\Gamma}$$

Par ailleurs, on dispose sur $D_{\mathrm{dif},n}$ d'une connexion ∇ définie par $\nabla = \lim_{\gamma\to 1} \frac{\gamma-1}{\chi(\gamma)-1}$ (on a aussi $\nabla = \frac{\log\gamma}{\log\chi(\gamma)}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ d'ordre infini). Cette connexion respecte la filtration de $D_{\mathrm{dif},n}$ par les $t^iD^+_{\mathrm{dif},n}$ et induit, sur $D_{\mathrm{Sen},n} = D^+_{\mathrm{dif},n}/tD^+_{\mathrm{dif},n}$, l'opérateur de Sen ; ses valeurs propres sur le L_n-espace vectoriel $t^iD^+_{\mathrm{dif},n}/t^{i+1}D^+_{\mathrm{dif},n}$ sont les τ_j+i, où les τ_j sont les poids de Hodge-Tate de D (ce sont aussi ceux de V).

On a alors le résultat suivant [**41**].

Proposition VI.3.1. — *Soit $V \in \mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *V est presque de Rham,*
- *V est presque Hodge-Tate,*
- *les poids de Hodge-Tate de V sont des entiers,*
- *∇ est unipotente.*

De plus, si les poids de Hodge-Tate sont distincts, alors V est de Hodge-Tate.

(ii) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *V est de Rham,*

[63] Quitte à augmenter $m(D)$, on peut supposer, ce que nous ferons, que c'est le cas pour tout $n \geq m(D)$.

- ∇ *est triviale.*

On dit que D est *presque de Rham* (cela équivaut à V presque de Rham et donc aussi à V presque Hodge-Tate d'après la prop. VI.3.1) si ses poids de Hodge-Tate sont entiers ; on dit que D est *Hodge-Tate*, si D est presque de Rham et si l'action de σ_a sur $D_{\mathrm{Sen},n}$ est semi-simple pour $n \geq m(D)$ (ce qui équivaut à ce que V soit Hodge-Tate), ce qui est automatique si les poids de Hodge-Tate de D sont distincts.

On note $D_{\mathrm{pdR},n}$ l'ensemble des $x \in \widetilde{D}_{\mathrm{dif}} = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{H}}$ tués par une puissance de $\gamma_n - 1$, où γ_n est un générateur de Γ_n (si $p = 2$ et $n \leq 1$, on demande que x soit tué par une puissance de $\gamma_2 - 1$ et soit fixe par le sous-groupe de torsion de Γ). On note D_{pdR} le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $D_{\mathrm{pdR},0}$, et on a $D_{\mathrm{pdR},n} = F_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{pdR}}$, pour tout n. Par construction, D_{pdR} est muni d'une action unipotente de Γ, et on note D_{dR} l'espace des points fixes de D_{pdR} sous l'action de Γ. De plus D_{pdR} est de dimension $\leq d$, avec égalité si et seulement si D est presque de Rham. On dit que D est *de Rham* si D_{dR} est de dimension d ; cela équivaut à ce que D est presque de Rham et Γ agit trivialement sur D_{pdR}. On note $D^+_{\mathrm{pdR},n}$ ou $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{pdR},n}$ l'intersection de $D_{\mathrm{pdR},n}$ avec $\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$.

Si $n \geq m(D)$, alors $D_{\mathrm{pdR},n}$ est aussi le noyau de ∇^d agissant sur $D_{\mathrm{dif},n}$ et le noyau de ∇ est le sous-espace $L_n \otimes_L D_{\mathrm{dR}}$ de $D_{\mathrm{pdR},n}$.

On passe facilement de D_{pdR} à $\mathbf{D}'_{\mathrm{pdR}}(V)$. Tout élément x de $\mathbf{D}'_{\mathrm{pdR}}(V)$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $P_x(\log t)$, où P_x est à coefficients dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. L'invariance de x par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ implique que P_x est en fait à coefficients dans D_{pdr}, et l'application $x \mapsto P_x(0)$ est un isomorphisme de $\mathbf{D}'_{\mathrm{pdR}}(V)$ sur D_{pdR}, l'isomorphisme inverse étant $x \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-\log t)^i}{i!} \nabla^i x$, et la somme est finie car ∇ agit de manière nilpotente sur D_{pdR} .

3. Le cas de la dimension 2. — En dimension 2, qui est le cas qui va nous intéresser, le critère suivant permet de faire la distinction entre les cas de Rham et presque de Rham mais pas de Rham. Ceci va jouer un rôle fondamental dans la suite.

Proposition VI.3.2. — *Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, de dimension 2, presque de Rham, à poids de Hodge-Tate distincts 0 et $k > 0$. Alors D_{pdR} possède une base e_1, e_2 sur L telle que $e_1, t^k e_2$ soit une base de $D^+_{\mathrm{dif},n}$ sur $L_n[[t]]$, pour tout $n \geq m(D)$, et dans laquelle l'action de $\gamma \in \Gamma_n$ est donnée par :*

- $\gamma(e_1) = e_1$ *et* $\gamma(e_2) = e_2$, *si D est de Rham,*
- $\gamma(e_1) = e_1$ *et* $\gamma(e_2) = e_2 + \log\chi(\gamma) e_1$, *si D n'est pas de Rham.*

Démonstration. — Si D est de Rham, le résultat est immédiat. Si D n'est pas de Rham, alors D_{pdR} possède une base e_1, e_2 dans laquelle dans laquelle l'action de $\gamma \in \Gamma_n$ est donnée par $\gamma(e_1) = e_1$ et $\gamma(e_2) = e_2 + \log\chi(\gamma) e_1$, puisqu'elle est unipotente. Le problème est donc de prouver que e_1 qui, à multiplication près par un élément de L_n^*, est le seul élément de $D_{\mathrm{dif},n}$ tué par ∇, appartient à $D^+_{\mathrm{dif},n}$. Les poids de Hodge-Tate étant 0 et $k > 0$, il existe $f_0 \in D^+_{\mathrm{dif},n}$, d'image non nulle dans $D_{\mathrm{Sen},n}$, tel que $\nabla f_0 = 0$

modulo $tD^+_{\mathrm{dif},n}$. Maintenant, les valeurs propres de ∇ sur $t^iD^+_{\mathrm{dif},n}/t^{i+1}D^+_{\mathrm{dif},n}$ sont i et $i+k$, et donc ne sont jamais nulles si $i \geq 1$. Il en résulte que ∇ est surjective sur $t^iD^+_{\mathrm{dif},n}/t^{i+1}D^+_{\mathrm{dif},n}$, ce qui permet de construire, par récurrence à partir de f_0, une suite $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $D^+_{\mathrm{dif},n}$, vérifiant :

- $f_i - f_{i-1} \in t^iD^+_{\mathrm{dif},n}$,
- $\nabla f_i \in t^{i+1}D^+_{\mathrm{dif},n}$.

La limite f de la suite $(f_i)_{i\in I}$ nous fournit donc un élément non nul de $D^+_{\mathrm{dif},n}$ tué par ∇ ; c'est donc un multiple de e_1, ce qui permet de conclure.

4. Résidus et dualité. — On rappelle que $\check{V} = \mathrm{Hom}(V, L\,dt)$ est le dual de Tate de V. L'accouplement naturel $\check{V} \times V \to L\,dt$ est parfait et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-équivariant ; il induit donc des accouplements parfaits et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-équivariants

$$(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \check{V}) \times (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V) \to (L \cdot \mathbf{B}_{\mathrm{dR}})\,dt \text{ et } (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes \check{V}) \times (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes V) \to (L \cdot \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})\,dt.$$

Comme $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{L_n[[t]]} D^+_{\mathrm{dif},n} = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes V$ et $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{L_n[[t]]} \check{D}^+_{\mathrm{dif},n} = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes \check{V}$, si $n \geq m(D)$, les restrictions des accouplement ci-dessus nous définissent des accouplements parfaits et Γ-équivariants

$$\langle\ ,\ \rangle : \check{D}_{\mathrm{dif},n} \times D_{\mathrm{dif},n} \to L_n((t))\,dt \text{ et } \langle\ ,\ \rangle : \check{D}^+_{\mathrm{dif},n} \times D^+_{\mathrm{dif},n} \to L_n[[t]]\,dt.$$

En composant cet accouplement avec l'application Γ-équivariante $x \mapsto \mathrm{rés}_0(x)$ de $L_n((t))\,dt$ dans L_n, puis avec $p^{-n}\mathrm{Tr}_{F_n/\mathbf{Q}_p}$, cela nous fournit un accouplement Γ-équivariant

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dif}} : \check{D}_{\mathrm{dif},n} \times D_{\mathrm{dif},n} \to L,$$

qui est indépendant de $n \geq m(D)$. Alors $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dif}}$ induit une dualité parfaite dans laquelle $\check{D}^+_{\mathrm{dif},n}$ et $D^+_{\mathrm{dif},n}$ sont les orthogonaux l'un de l'autre (cela résulte du lemme VI.3.3 ci-dessous dont la démonstration est laissée au lecteur).

Lemme VI.3.3. — *L'application, qui à $g \in L_n((t))$ fait correspondre la forme linéaire $f \mapsto \mathrm{rés}_0(gf)$, induit un isomorphisme de $L_n((t))$ sur le dual topologique de $L_n((t))\,dt$, et l'orthogonal de $L_n[[t]]\,dt$ est $L_n[[t]]$.*

Si $n \geq m(D)$, alors $D_{\mathrm{pdR},n}$ est aussi l'ensemble des $x \in D_{\mathrm{dif},n}$ tués par une puissance de $\gamma_n - 1$, et l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dif}}$ induit une dualité parfaite entre $\check{D}_{\mathrm{pdR},n}$ et $D_{\mathrm{pdR},n}$ pour tout n. Comme $D^+_{\mathrm{pdR},n}$ est aussi l'intersection de $D_{\mathrm{pdR},n}$ avec $D^+_{\mathrm{dif},n}$, l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dif}}$ induit une dualité parfaite entre $\check{D}^+_{\mathrm{pdR},n}$ et $D_{\mathrm{pdR},n}/D^+_{\mathrm{pdR},n}$ et donc aussi, puisqu'il est Γ-équivariant, entre $\check{D}^+_{\mathrm{pdR},n}/(\gamma_n - 1)$ et $(D_{\mathrm{pdR},n}/D^+_{\mathrm{pdR},n})^{\Gamma_n}$.

5. Un calcul de résidu. — On note encore $\{\ ,\ \} : \check{D}_{\mathrm{rig}} \times D_{\mathrm{rig}} \to L$ l'accouplement $(x,y) \mapsto \mathrm{rés}_0(\langle \sigma_{-1} \cdot x, y\rangle)$ introduit pour définir l'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ de la prop. V.2.10.

Proposition VI.3.4. — *Soient $z \in (D_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}])^{\psi=1}$ et $z' \in \check{D}^{\psi=1}_{\mathrm{rig}}$.*

(i) *Si $(1-\varphi)z \in D_{\mathrm{rig}}$, la suite de terme général $\langle \iota_n(z'), \iota_n(z)\rangle_{\mathrm{dif}}$ est stationnaire et sa limite $\langle z', z\rangle_{\mathrm{dif},\infty}$ est égale à $\{\sigma_{-1} \cdot z', (1-\varphi)z\}$.*

(ii) *S'il existe $P \in L[X]$ non nul, avec $P(\gamma)\cdot z \in D_{\mathrm{rig}}$, alors la suite de terme général $\langle \iota_n(z'), \iota_n(z)\rangle_{\mathrm{dif}}$ est stationnaire et sa limite $\langle z', z\rangle_{\mathrm{dif},\infty}$ est égale à $\{\sigma_{-1}\cdot z', (1-\varphi)z\}$.*

Démonstration. — Pour déduire le (ii) du (i), on remarque que $P(\gamma)z \in D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ implique $P(\gamma)((1-\varphi)z) \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. Par ailleurs, $(1-\varphi)z \in (D_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}]) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. Or $P(\gamma)$ est inversible (prop. V.1.19) sur $(D_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}])\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ et sur $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, et donc $(1-\varphi)z$ appartient à $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \subset D_{\mathrm{rig}}$.

La démonstration du (i) se fait en plusieurs étapes. On commence par montrer l'existence de la limite $\langle z', z\rangle_{\mathrm{dif},\infty}$, puis on prouve que « $\langle z', z\rangle_{\mathrm{dif},\infty} = 0$ » implique « $\{\sigma_{-1}\cdot z', (1-\varphi)z\} = 0$ ». On en déduit l'existence d'une constante α ne dépendant pas de D, telle que $\{\sigma_{-1}\cdot z', (1-\varphi)z\} = \alpha\langle z', z\rangle_{\mathrm{dif},\infty}$. Enfin, on montre que $\alpha = 1$ dans le cas $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes \chi$.

– *Étape 1, existence de $\langle z', z\rangle_{\mathrm{dif},\infty}$.*

L'invariance de z' par ψ se traduit par le fait que $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n+1}/F_n}(\iota_{n+1}(z')) = \iota_n(z')$, si $n \geq m(D)$, et son appartenance à $\check{D}_{\mathrm{rig}}$ par $\iota_n(z') \in \check{D}^+_{\mathrm{dif},n}$, si $n \geq m(D)$.

L'appartenance de $(1-\varphi)z$ à D_{rig}, se traduit par l'existence d'un entier n_0 tel que $\iota_n^-((1-\varphi)z) = 0$, si $n \geq n_0+1$ (on rappelle que $\iota_n^-(z)$ est l'image de $\iota_n(z)$ modulo $D^+_{\mathrm{dif},n}$). On a alors $\iota_n^-(z) = \iota_{n_0}^-(z)$, pour tout $n \geq n_0$, et comme $\iota_n(z') \in \check{D}^+_{\mathrm{dif},n}$, on en déduit que

$$\langle \iota_n(z'), \iota_n(z)\rangle_{\mathrm{dif}} = \langle \iota_n(z'), \iota_n^-(z)\rangle_{\mathrm{dif}} = \langle \iota_n(z'), \iota_{n_0}^-(z)\rangle_{\mathrm{dif}},$$

pour tout $n \geq n_0$. On a donc

$$\begin{aligned}\langle \iota_n(z'), \iota_n(z)\rangle_{\mathrm{dif}} &= p^{-n}\mathrm{Tr}_{F_n/\mathbf{Q}_p}(\mathrm{rés}_0(\langle \iota_n(z'), \iota_n^-(z)\rangle\, dt)\\ &= p^{-n_0}\mathrm{Tr}_{F_{n_0}/\mathbf{Q}_p}(\mathrm{rés}_0(\langle p^{n_0-n}\mathrm{Tr}_{F_n/F_{n_0}}(\iota_n(z')), \iota_{n_0}^-(z)\rangle\, dt)\\ &= p^{-n_0}\mathrm{Tr}_{F_{n_0}/\mathbf{Q}_p}(\mathrm{rés}_0(\langle \iota_{n_0}(z'), \iota_{n_0}^-(z)\rangle\, dt),\end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite $\langle \iota_n(z'), \iota_n(z)\rangle_{\mathrm{dif}}$ est stationnaire.

– *Étape 2, $\langle z', z\rangle_{\mathrm{dif},\infty} = 0 \Rightarrow \{\sigma_{-1}\cdot z', (1-\varphi)z\} = 0$.*

Si $\langle z', z\rangle_{\mathrm{dif},\infty} = 0$, alors pour tout $n \geq n_0$, on a $\mathrm{Tr}_{F_n/\mathbf{Q}_p}(\mathrm{rés}_0(\iota_n(\langle z', z\rangle)\, dt) = 0$. Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $t^k z' \in \check{D}_{\mathrm{rig}}$ (et donc $\langle z', z\rangle \in t^{-k}\mathscr{R}$). Soit $\nabla = t\frac{d}{dt}$. Alors

$$\nabla + 1 = \frac{\log(\chi(\gamma)\gamma)}{\log\chi(\gamma)} = \frac{(\chi(\gamma)\gamma - 1) + H(\gamma)}{\log\chi(\gamma)}, \text{ où } H(\gamma) = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}(\chi(\gamma)\gamma - 1)^{j-2}.$$

Soit Δ_k l'opérateur $\Delta_k = \frac{\log(\chi(\gamma))(\nabla+1)}{(\chi(\gamma)\gamma-1)}(\nabla+2)\cdots(\nabla+k)$. Cet opérateur a la vertu de tuer $t^{-j}F_\infty$, si $2 \leq j \leq k$ ainsi que tout élément de $t^{-1}F_n$ de trace nulle sur $t^{-1}\mathbf{Q}_p$. La nullité de $\mathrm{Tr}_{F_n/\mathbf{Q}_p}(\mathrm{rés}_0(\iota_n(\langle z', z\rangle)\, dt)$ pour $n \geq n_0$ se traduit donc par l'appartenance de $A = \Delta_k\langle z', z\rangle$ à $\mathscr{R}$. Soient alors $B = \Delta_k\cdot\langle z', (1-\varphi)z\rangle$ et $C = \Delta_k\cdot\langle(\varphi-1)z', z\rangle$. Comme Δ_k commute à φ, on a $B = (1-\varphi)A + C$. Par hypothèse, $(\varphi-1)z \in D_{\mathrm{rig}}$, et donc $B \in \mathscr{R}$ et $C \in \mathscr{R}$ puisque $A \in \mathscr{R}$ d'après ce qui précède. Rappelons que

$\text{rés}_0\big(\psi(x)\frac{dT}{1+T}\big) = \text{rés}_0\big(\varphi(x)\frac{dT}{1+T}\big) = \text{rés}_0\big(x\frac{dT}{1+T}\big)$, si $x \in \mathscr{R}$. En particulier, on a $\text{rés}_0\big((1-\varphi)A\frac{dT}{1+T}\big) = 0$. Maintenant $\psi((\varphi-1)z') = 0$, et donc $\psi(\langle(\varphi-1)z', \varphi(z)\rangle) = \langle\psi((\varphi-1)z'), z\rangle = 0$; on en déduit que $\psi(C) = 0$, et donc $\text{rés}_0\big(C\frac{dT}{1+T}\big) = 0$. Ceci implique que $\text{rés}_0(B\frac{dT}{1+T}) = 0$. Or $\text{rés}_0\big((\chi(\gamma)\gamma - 1)x\frac{dT}{1+T}\big) = 0$, si $x \in \mathscr{R}$, et comme $\Delta_k = (k-1)! + (\chi(\gamma)\gamma - 1)H_1(\gamma)$, on en déduit que

$$\text{rés}_0(B\frac{dT}{1+T}) = (k-1)!\,\text{rés}_0\big(\langle z', (1-\varphi)z\rangle\frac{dT}{1+T}\big) = (k-1)!\,\{\sigma_{-1}\cdot z', (1-\varphi)z\},$$

et donc que $\{\sigma_{-1}\cdot z', (1-\varphi)z\} = 0$, ce que l'on cherchait à démontrer.

– *Étape 3, réduction au cas $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}\otimes\chi$.*

Notons E l'ensemble des $z \in (D_{\text{rig}}[\frac{1}{t}])^{\psi=1}$ tels que $(1-\varphi)z \in D_{\text{rig}}$ et posons $E' = \check{D}_{\text{rig}}^{\psi=1}$. Soient $B(z', z) = \langle z', z\rangle_{\text{dif}_\infty}$ et $B'(z', z) = \{\sigma_{-1}\cdot z', z\}$. Alors B et B' sont des formes bilinéaires sur $E'\times E$, et on vient de montrer que $B(x, y) = 0$ implique $B'(x, y) = 0$. On en déduit l'existence de $\alpha(D)$ tel que $B = \alpha(D)B'$.

Maintenant, si D_1, D_2 sont deux (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on peut appliquer ce qui précède à $D = D_1\oplus D_2$, et on a $B = B_1\oplus B_2$ et $B' = B_1'\oplus B_2'$ avec des notations évidentes. On en déduit que $\alpha(D_1) = \alpha(D_2) = \alpha(D)$ (tout du moins dans le cas où les formes bilinéaires B et B' ne sont pas identiquement nulles). Il suffit donc de prouver que les formes bilinéaires $\langle\ ,\ \rangle_{\text{dif}_\infty}$ et $\{\ ,\ \}$ coïncident dans le cas de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\otimes\chi$.

– *Étape 4, étude du cas $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}\otimes\chi$.*

Commençons par construire des $z \in (\frac{1}{t}\mathscr{R}\otimes\chi)^{\psi=1}$ tels que $(1-\varphi)z \in \mathscr{R}\otimes\chi$. Pour cela, partons d'un élément $u = (u_n)_{n\geq 1}$ de la limite projective des $\mathscr{O}_{F_n^*}$ pour les applications normes, et notons $g \in \mathbf{Z}_p[[T]]^*$ la série de Coleman associée, et posons $G = \log g \in \mathscr{R}^+$. Rappelons que :

- g est caractérisée par le fait que $g(\pi_n) = u_n$, pour tout $n \geq 1$, où $\pi_n = \zeta_{p^n} - 1$,
- $\frac{\partial g}{g} \in \mathbf{Z}_p[[T]]^{\psi=1}$ et $\frac{1}{t}G \in (\frac{1}{t}\mathscr{R})^{\psi=1}$,
- $\iota_n^-(\frac{1}{t}G) = (p^n\log u_n)\frac{1}{t}$, la relation $\frac{1}{p}\text{Tr}_{F_{n+1}/F_n}((p^{n+1}\log u_{n+1})\frac{1}{t}) = (p^n\log u_n)\frac{1}{t}$, rencontrée au cours de l'étape 1, traduit juste le fait que $\text{N}_{F_{n+1}/F_n}(u_{n+1}) = u_n$.

Soit alors γ_1 un générateur de Γ_1, et soit $z = \frac{\log\gamma_1}{\gamma_1-1}\cdot((\frac{1}{t}G)\otimes\chi)$, où $\frac{\log\gamma_1}{\gamma_1-1}$ désigne l'opérateur $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1-\gamma_1)^k}{k+1} \in \mathscr{D}(\Gamma_1)$. Comme l'action de γ_1 sur $\frac{1}{t}\otimes\chi$ est triviale, on a aussi $z = (\frac{1}{t}\frac{\log\gamma_1}{\gamma_1-1}\cdot G)\otimes\chi$, et comme $\frac{\log\gamma_1}{\log\chi(\gamma_1)} = t\frac{d}{dt}$ sur $\mathscr{R}$, on obtient, si $a = (\gamma_1-1)z$,

$$a = (\frac{1}{t}\log\gamma_1\cdot G)\otimes\chi = \log\chi(\gamma_1)(\partial G)\otimes\chi = \log\chi(\gamma_1)\frac{\partial g}{g}\otimes\chi \in (\mathbf{Z}_p[[T]]\otimes\chi)^{\psi=1} \subset D_{\text{rig}}^{\psi=1}.$$

On en déduit que $(1-\varphi)z = (\gamma_1-1)^{-1}((1-\varphi)a) \in D_{\text{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^* \subset D_{\text{rig}}$.

L'appartenance de $(1-\varphi)z$ à D_{rig} peut aussi se démontrer en remarquant que

$$\frac{\log\gamma_1}{\gamma_1-1} = \lim_{n\to+\infty} p^{1-n}\frac{\gamma_1^{p^{n-1}}-1}{\gamma_1-1}$$

agit par $p^{1-n}\mathrm{Tr}_{F_n/F_1}$ sur $\frac{1}{t}D^+_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n} = \frac{1}{t}F_n\otimes\chi$: ceci implique que

$$\iota_n^-(z) = p^{1-n}\mathrm{Tr}_{F_n/F_1}(p^nG(\pi_n)\frac{1}{t})\otimes\chi = (pG(\pi_1)\frac{1}{t})\otimes\chi,$$

pour tout $n\geq 1$, et donc que $\iota_n^-((1-\varphi)z)=0$, pour $n\geq 2$. Comme par ailleurs, $(1-\varphi)z\in(\frac{1}{t}\mathscr{R}^+)\otimes\chi$, cela implique, plus précisément, que $(1-\varphi)z\in(\frac{1}{\varphi(T)}\mathscr{R}^+)\otimes\chi$. On peut donc écrire $(1-\varphi)z$ sous la forme $(\frac{P(T)}{\varphi(T)}+H(T))\otimes\chi$, où $P\in\mathbf{Q}_p[T]$ est de degré $\leq p-1$ et $H\in\mathscr{R}^+$. De plus, comme $\psi(z)=z$, on a $\psi((1-\varphi)z)=0$, et donc $\psi(\frac{P(T)}{\varphi(T)}) = -\psi(H(T))\in\mathscr{R}^+$. Comme $\psi(\frac{P(T)}{\varphi(T)}) = \frac{\psi(P(T))}{T}$, et comme $\psi(P(T))$ est de degré 0, puisque P est de degré $\leq p-1$, on a $\psi(P(T))=0$. On en déduit, si $z'=F(T)\in(\mathscr{R}^+)^{\psi=1}\subset\check{D}^{\psi=1}_{\mathrm{rig}}$, la formule

$$\begin{aligned}\{\sigma_{-1}\cdot z',(1-\varphi)z\} &= \mathrm{rés}_0\big(\frac{F(T)P(T)}{\varphi(T)}\frac{dT}{1+T}\big) = \mathrm{rés}_0\big(\psi\big(\frac{F(T)P(T)}{\varphi(T)}\big)\frac{dT}{1+T}\big)\\ &= \mathrm{rés}_0\big(\frac{\psi(F(T)P(T))}{T}\frac{dT}{1+T}\big) = \psi(FP)(0) = \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}F(\zeta-1)P(\zeta-1)\\ &= \frac{1}{p}F(0)P(0)+\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_1/\mathbf{Q}_p}(F(\pi_1)P(\pi_1)).\end{aligned}$$

Il nous reste à comparer le résultat obtenu avec

$$\begin{aligned}\langle z',z\rangle_{\mathrm{dif},\infty} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p^n}\mathrm{Tr}_{F_n/\mathbf{Q}_p}\big(\mathrm{rés}_0(\langle\iota_n(z'),\iota_n^-(z)\rangle\,dt)\big)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p^n}\mathrm{Tr}_{F_n/\mathbf{Q}_p}\big(\mathrm{rés}_0((F(\pi_n)pG(\pi_1)\frac{dt}{t})\big) = \mathrm{Tr}_{F_1/\mathbf{Q}_p}(F(\pi_1)G(\pi_1)).\end{aligned}$$

Pour cela, on remarque que $\iota_1((1-\varphi)z)$ est égal à $(pG(\pi_1)-G(0))\frac{1}{t}\otimes\chi$, modulo $D^+_{\mathrm{dif},1}$, et aussi à $P(\pi_1)\frac{1}{t}\otimes\chi$ [cela suit de l'égalité $(1-\varphi)z=\big(\frac{P(T)}{\varphi(T)}+H(T)\big)\otimes\chi$]. On en déduit que $P(\pi_1)=pG(\pi_1)-G(0)$. Par ailleurs, on a $P(0)=(1-\frac{1}{p})G(0)$; cela peut se voir soit, comme ci-dessus, en calculant de deux manières l'image de $(1-\varphi)z$ modulo $D^+_{\mathrm{dif},0}$, soit en remarquant que $\psi(P)=0$ implique que

$$P(0) = -\mathrm{Tr}_{L_1/\mathbf{Q}_p}(P(\pi_1)) = (p-1)G(0)-p\mathrm{Tr}_{L_1/\mathbf{Q}_p}(G(\pi_1)),$$

et que l'on a $\mathrm{Tr}_{L_1/\mathbf{Q}_p}(G(\pi_1)) = \log(\mathrm{N}_{L_1/\mathbf{Q}_p}u_1)=0$ car u_1 est une norme universelle. Enfin, le fait que $\psi(F)=F$ se traduit par

$$F(0)=\frac{1}{p}\big(F(0)+\mathrm{Tr}_{L_1/\mathbf{Q}_p}(F(\pi_1))\big)\quad\text{et}\quad\mathrm{Tr}_{L_1/\mathbf{Q}_p}(F(\pi_1))=(p-1)F(0).$$

On obtient donc, en remarquant que $G(0) \in \mathbf{Q}_p$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{F_1/\mathbf{Q}_p}(F(\pi_1)G(\pi_1)) &= \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_1/\mathbf{Q}_p}(F(\pi_1)P(\pi_1) + F(\pi_1)G(0)) \\ &= \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_1/\mathbf{Q}_p}(F(\pi_1)P(\pi_1)) + \frac{p-1}{p}G(0)F(0) \\ &= \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_1/\mathbf{Q}_p}(F(\pi_1)P(\pi_1)) + \frac{1}{p}P(0)F(0) = \{\sigma_{-1}\cdot z', (1-\varphi)z\}\end{aligned}$$

Pour montrer que $\alpha(\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes \chi) = 1$ et donc terminer la démonstration de la prop. VI.3.4, il reste à vérifier que l'on peut choisir $u = (u_n)_{n\geq 1}$ et $F \in \mathbf{Z}_p[[T]]^{\psi=1}$, de telle sorte que $\mathrm{Tr}_{F_1/\mathbf{Q}_p}(F(\pi_1)\log u_1) \neq 0$, ce qui ne pose aucune difficulté, l'application $F \mapsto F(\pi_1)$ induisant une surjection sur F_1 une fois qu'on a inversé p.

VI.4. (φ,Γ)-modules presque de Rham de dimension 2. — Ce § est consacré à une comparaison des actions infinitésimales de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ (qui agit comme Γ) et de $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ (qui agit comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$) sur un (φ,Γ)-module presque de Rham de dimension 2, à poids de Hodge-Tate distincts (à torsion près, on peut se ramener au cas où les poids sont 0 et $k \geq 1$, ce que nous supposerons être le cas). On utilise la filtration sur D_{pdR} pour construire des objets $N_{\mathrm{dif},n}$, N_{rig}, etc. qui ont toujours une relation du même genre avec l'objet correspondant pour D. Par exemple :

— $N_{\mathrm{dif},n} \supset D^+_{\mathrm{dif},n} \supset t^k N_{\mathrm{dif},n}$ et $N_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n} \cong D^+_{\mathrm{dif}n}/t^k N_{\mathrm{dif},n} \cong L_n[[t]]/t^k$

— $N^{]0,r_a]} \supset D^{]0,r_a]} \supset t^k N^{]0,r_a]}$ et $N^{]0,r_a]}/D^{]0,r_a]} \cong D^{]0,r_a]}/t^k N^{]0,r_a]} \cong \mathscr{E}^{]0,r_a]}/t^k$.

– A partir de $N^{]0,r_a]}$, on fabrique deux sous-$\mathscr{R}^+(\Gamma)$-modules $M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]}$ et $M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]}$ de $D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, si $a \geq m(D)$, le premier en utilisant l'action infinitésimale de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et le second celle de $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Le lemme VI.4.8, la prop. VI.4.9 et le cor. VI.4.10, qui décrivent les relations entre $M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]}$, $M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]}$ et $D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, seront utilisés de manière cruciale dans les n$^{\mathrm{os}}$ 2, 3, 4 et 5 du § VI.6 pour l'étude de l'action de w sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ (prop. VI.6.11 et VI.6.15) dont découle celle des vecteurs localement algébriques de $\Pi = \mathbf{\Pi}(D)$ (th. VI.6.13 et VI.6.18).

– L'étude du module $\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$ servira à caractériser l'orthogonal de Π^{alg} dans $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ (prop. VI.6.21, qui repose sur la prop. VI.5.14 qui s'appuie sur l'étude de $\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$).

– L'étude du module $N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ (prop. VI.4.15) intervient dans celle de l'action de w sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ (lemmes VI.6.6 et VI.6.7 dont découle la prop. VI.6.11 mentionnée ci-dessus), et dans l'étude directe de Π^{alg} (démonstration du lemme VI.6.12).

1. Compléments sur l'action de Γ. — Dans tout ce qui suit, k est un entier ≥ 1.

Choisissons un générateur topologique γ_n de Γ_n tel que $\gamma_{n+1} = \gamma_n^p$, pour tout $n \geq 1$ (resp. $n \geq 2$, si $p = 2$). Soit

$$\lambda_{k,n} = \prod_{j=0}^{k-1} (\chi(\gamma_n)^{-j}\gamma_n - 1) \in \mathscr{O}_L[[\Gamma]].$$

On remarquera que $\lambda_{k,n}$ divise $\lambda_{k,n+1}$ dans $\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$; on note $\mu_{k,n+1}$ le quotient ; les $\mu_{k,n+1}$ sont alors premiers entre eux deux à deux.

Soit $\nabla = \lim_{\gamma\to 1} \frac{\gamma-1}{\chi(\gamma)-1} \in \mathscr{R}^+(\Gamma)$. On a aussi $\nabla = \frac{1}{\log\chi(\gamma)}\log\gamma$, pour tout $\gamma \in \Gamma$ d'ordre infini. Si $k \geq 1$, soit $\nabla_k = \prod_{j=0}^{k-1}(\nabla - j)$. On a aussi $\nabla_k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log\chi(\gamma_n)^k}\lambda_{k,n}$.

On déduit de la factorisation $\log(1+T) = T\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{\varphi^{n+1}(T)}{p\varphi^n(T)}$ dans $\mathscr{R}^+$, que

$$\nabla_k = \frac{1}{(\log\chi(\gamma_a))^k}\lambda_{k,a}\prod_{n\geq a}(p^{-k}\mu_{k,n+1}), \quad \text{si } a \geq 1.$$

Comme $\mathscr{R}^+$ (et donc aussi $\mathscr{R}^+(\Gamma)$) est de Fréchet-Stein, on dispose du théorème des restes chinois, et

$$\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k \cong (\mathscr{R}^+(\Gamma)/\lambda_{k,a}) \times \prod_{n\geq a}(\mathscr{R}^+(\Gamma)/\mu_{k,n+1}).$$

Soit D un (φ,Γ)-module étale de rang 2 sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, presque de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et $k \geq 1$. Si $n \geq m(D)$, soit $N_{\mathrm{dif},n}$ le sous-$L_n[[t]]$-module de $D_{\mathrm{dif},n}$ engendré par D_{pdR}. Alors

$$t^k N_{\mathrm{dif},n} \subset D^+_{\mathrm{dif},n} \subset N_{\mathrm{dif},n} \text{ et } N_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n} \cong D^+_{\mathrm{dif},n}/t^k N_{\mathrm{dif},n} \cong L_n[t]/t^k.$$

De même, notons $\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$ le sous-$\widetilde{L[[t]]}$-module de $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}$ endendré par D_{pdR}. Alors on a $\widetilde{N}_{\mathrm{dif}} = \widetilde{L[[t]]} \otimes_{L_n[[t]]} N_{\mathrm{dif},n}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et aussi $t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}} \subset \widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}} \subset \widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$ et $\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}/\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}} \cong \widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}/t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}} \cong \widetilde{L[[t]]}/t^k$.

Proposition VI.4.1. — *On a $\lambda_{k,n}(N_{\mathrm{dif},n}) \subset D^+_{\mathrm{dif},n}$ et $\lambda_{k,n}(D^+_{\mathrm{dif},n}) \subset t^k N_{\mathrm{dif},n}$. Plus précisément :*

(i) *si D est de Rham, $\lambda_{k,n}(N_{\mathrm{dif},n}) = t^k N_{\mathrm{dif},n}$ et $D^+_{\mathrm{dif},n}/\lambda_{k,n}(N_{\mathrm{dif},n}) \cong L_n[t]/t^k$,*

(ii) *si D n'est pas de Rham, $\lambda_{k,n}(N_{\mathrm{dif},n}) = D^+_{\mathrm{dif},n}$ et $\lambda_{k,n}(D^+_{\mathrm{dif},n}) = t^k N_{\mathrm{dif},n}$.*

Démonstration. — Soit e_1, e_2 la base de D_{pdR} fournie par la prop. VI.3.2. Alors $N_{\mathrm{dif},n}$ (resp. $D^+_{\mathrm{dif},n}$) est le $L_n[[t]]$-module engendré par e_1 et e_2 (resp. e_1 et $t^k e_2$).

– Si D est de Rham, $\gamma_n(e_1) = e_1$ et $\gamma_n(e_2) = e_2$, et le résultat suit de ce que $\lambda_{k,n}(t^i e_\ell) = \prod_{j=0}^{k-1}(\chi(\gamma_n)^{i-j} - 1)t^i e_\ell$, si $i \in \mathbf{N}$.

– Si D n'est pas de Rham, $\gamma_n(e_1) = e_1$ et $\gamma_n(e_2) = e_2 + \log\chi(\gamma_n)\, e_1$. On a donc

$$\lambda_{k,n}(t^i e_1) = \prod_{j=0}^{k-1}(\chi(\gamma_n)^{i-j} - 1)t^i e_1 \text{ et } \lambda_{k,n}(t^i e_2) = \prod_{j=0}^{k-1}(\chi(\gamma_n)^{i-j} - 1)t^i e_2 + \beta_{n,k,i}t^i e_1,$$

où $\beta_{n,k,i} \in \mathbf{Q}$ et, si $0 \leq i \leq k-1$, est égal à $\log\chi(\gamma_n)\prod_{0\leq j\leq k-1,\ j\neq i}(\chi(\gamma_n)^{i-j} - 1)$, et donc est non nul. On en déduit le (ii).

Proposition VI.4.2. — *On a $\nabla_k(N_{\mathrm{dif},n}) \subset D^+_{\mathrm{dif},n}$ et $\nabla_k(D^+_{\mathrm{dif},n}) \subset t^k N_{\mathrm{dif},n}$. Plus précisément :*

(i) *si D est de Rham, alors $\nabla_k(N_{\mathrm{dif},n}) = t^k N_{\mathrm{dif},n}$ et $D^+_{\mathrm{dif},n}/\nabla_k(N_{\mathrm{dif},n}) \cong L_n[t]/t^k$,*

(ii) *si D n'est pas de Rham, alors* $\nabla_k(N_{\mathrm{dif},n}) = D^+_{\mathrm{dif},n}$ *et* $\nabla_k(D^+_{\mathrm{dif},n}) = t^k N_{\mathrm{dif},n}$.

Démonstration. — On reprend les notations de la démonstration de la prop. VI.4.1.

– Si D est de Rham, alors $\nabla_k(t^i e_\ell) = \prod_{j=0}^{k-1}(i-j)t^i e_\ell$, et le résultat s'en déduit sans problème.

– Si D n'est pas de Rham, alors

$$\nabla_k(t^i e_1) = \prod_{j=0}^{k-1}(i-j)t^i e_1 \quad \text{et} \quad \nabla_k(t^i e_2) = \prod_{j=0}^{k-1}(i-j)t^i e_2 + \beta'_{k,i}t^i e_1,$$

où $\beta'_{k,i} \in \mathbf{Q}$ et, si $0 \leq i \leq k-1$, est égal à $\prod_{0\leq j\leq k-1,\ j\neq i}(i-j)$, et est donc non nul. On en déduit le (ii).

On rappelle que $w_D : D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est la restriction de l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, et que $w_D \circ \sigma_a = \delta_D(a)\,\sigma_{a^{-1}} \circ w_D$ (cf. lemme V.2.2).

Lemme VI.4.3. — (i) *Si n est assez grand, alors* $w_D \cdot \lambda_{k,n} = u_n \lambda_{k,n} \cdot w_D$, *où u_n est une unité de $\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$.*

(ii) $w_D \cdot \nabla = ((k-1) - \nabla) \cdot w_D$ *et* $w_D \cdot \nabla_k = (-1)^k \nabla_k \cdot w_D$.

Démonstration. — On a $w_D \gamma_n = \delta_D(\chi(\gamma_n))\gamma_n^{-1} \cdot w_D$ et $\delta_D(\chi(\gamma_n)) = \chi(\gamma_n)^{k-1}$, si n est assez grand. Ceci nous donne,

$$w_D \cdot \lambda_{k,n} = w_D \cdot \prod_{j=0}^{k-1}(\chi(\gamma_n)^{-j}\gamma_n - 1) = \prod_{j=0}^{k-1}(\chi(\gamma_n)^{k-1-j}\gamma_n^{-1} - 1) \cdot w_D.$$

Le changement de variable $j \mapsto k-1-j$, montre que $w_D \cdot \lambda_{k,n} = u_n \lambda_{k,n} \cdot w_D$, avec $u_n = \prod_{j=0}^{k-1}(-\chi(\gamma_n)^j \gamma_n^{-1})$, ce qui permet de démontrer le (i).

L'égalité $\frac{1}{\log \chi(\gamma_n)} w_D \cdot (\gamma_n - 1) = \frac{1}{\log \chi(\gamma_n)}(\chi(\gamma_n)^{k-1}\gamma_n^{-1} - 1) \cdot w_D$ nous fournit, en passant à la limite, la première identité du (ii). La seconde s'en déduit en remarquant que $i \mapsto k-1-i$ est une permutation de $\{0, 1 \ldots, k-1\}$.

2. Les Γ-modules $X^+ \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $X^- \boxtimes \mathbf{Q}_p$. — On rappelle que, si $n \geq 1$, on a défini au n° 1 du § VI.1 un projecteur $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n+1}/F_n}$ de $L_{n+1}[[t]]$ sur $L_n[[t]]$. Ce projecteur commute à l'action de Γ et respecte les filtrations.

Lemme VI.4.4. — *La limite projective* $\varprojlim L_n[[t]]/t^k$ *relativement aux applications* $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n+1}/F_n}$ *est un $\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k$-module libre de rang* 1.

Démonstration. — On a

$$\varprojlim L_n[[t]]/t^k = \oplus_{j=0}^{k-1} t^j \varprojlim L_n \quad \text{et} \quad \mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k = \oplus_{j=0}^{k-1}(\mathscr{R}^+(\Gamma)/(\nabla - j)).$$

Il suffit donc de prouver que $t^j \varprojlim L_n \cong \mathscr{R}^+(\Gamma)/(\nabla - j)$, et comme $(\nabla - j)(t^j x) = t^j \nabla x$, on est ramené à prouver le résultat pour $j = 0$. Or $\nabla = \lim \frac{\gamma_n - 1}{\chi(\gamma_n) - 1}$, et comme $\frac{\gamma_n - 1}{\chi(\gamma_n)-1}$ divise $\frac{\gamma_{n+1}-1}{\chi(\gamma_{n+1})-1}$ dans $\mathscr{R}^+(\Gamma)$, on a $\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla = \varprojlim \mathscr{R}^+(\Gamma)/(\gamma_n - 1)$. Le résultat suit de

ce que L_n est isomorphe à $L[\mathrm{Gal}(F_n/\mathbf{Q}_p)] = \mathscr{R}^+(\Gamma)/(\gamma_n - 1)$ comme $L[\mathrm{Gal}(F_n/\mathbf{Q}_p)]$-module et donc aussi comme $\mathscr{R}^+(\Gamma)$-module.

Si $n \geq m(D)$, on note $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n+1}/F_n} : D_{\mathrm{dif},n+1} \to D_{\mathrm{dif},n}$, l'application envoyant $\sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon_{n+1}^i x_i$ sur x_0, si $x_0, \ldots, x_i \in D_{\mathrm{dif},n}$. Cette application est une incarnation de ψ : si $x \in D^{]0,r_{n+1}]}$, alors

$$\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n+1}/F_n}(\iota_{n+1}(x)) = \iota_n(\psi(x)),$$

comme on peut le voir sur la formule définissant ψ : on a $\psi\big(\sum_{i=0}^{p-1}[\varepsilon]^i\varphi(x_i)\big) = x_0$. L'application $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n+1}/F_n}$ est un projecteur de $D_{\mathrm{dif},n+1}$ sur $D_{\mathrm{dif},n}$ commutant à l'action de Γ et respectant les filtrations.

Si $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$X_n^- = N_{\mathrm{dif},n}/D_{\mathrm{dif},n}^+ \text{ et } X_n^+ = D_{\mathrm{dif},n}^+/t^k N_{\mathrm{dif},n}^+.$$

Alors $X_\infty^+ = \cup_{n\in\mathbf{N}} X_n^+$ et $X_\infty^- = \cup_{n\in\mathbf{N}} X_n^-$ sont denses dans $\widetilde{X}^+ = \widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+/t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$ et dans $\widetilde{X}^- = \widetilde{N}_{\mathrm{dif}}/\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$ respectivement. De plus, on a des suites exactes

$$0 \to X_n^+ \to N_{\mathrm{dif},n}/t^k N_{\mathrm{dif},n} \to X_n^- \to 0, \text{ si } n \in \mathbf{N},$$

$$0 \to X_\infty^+ \to N_{\mathrm{dif},\infty}/t^k N_{\mathrm{dif},\infty} \to X_\infty^- \to 0 \text{ et } 0 \to \widetilde{X}^+ \to \widetilde{N}_{\mathrm{dif}}/t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}} \to \widetilde{X}^- \to 0.$$

On note $X^+ \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (resp. $X^- \boxtimes \mathbf{Q}_p$) la limite projective des X_n^+ (resp. X_n^-) relativement aux applications $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n+1}/F_n}$. Si $Y \in \{X^+, X^-\}$, et si $n \geq m(D)$, on note

$$\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} : Y \boxtimes \mathbf{Q}_p \to Y \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p = Y_n$$

la projection naturelle ; sa restriction à $\widetilde{Y}$ est la trace de Tate normalisée. Si $n \geq m(D) + 1$, on note $Y \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p^*$ le noyau de $\mathrm{Tr}_{F_n/F_{n-1}}$ sur $Y \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p$. Si $a \geq m(D)$, l'application $(x_n) \mapsto (x_a, x_{a+1} - x_a, \ldots)$ induit un isomorphisme de Γ-modules

$$Y \boxtimes \mathbf{Q}_p \cong (Y \boxtimes p^{-a}\mathbf{Z}_p) \times \prod_{n\geq a+1} (Y \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p^*).$$

Lemme VI.4.5. — *Si $Y \in \{X^+, X^-\}$, et si $n \geq m(D)$, alors :*

(i) *$\lambda_{k,n}$ est identiquement nul sur $Y \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p$ et inversible sur $Y \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*$, pour tout $i \geq n+1$.*

(ii) *$\lambda_{k,n}^{-1}\nabla_k$ est inversible sur $Y \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p$.*

Démonstration. — Le (i) suit de ce que, en tant que $L[\Gamma]$-module,

$$Y \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p \cong \oplus_{j=0}^{k-1} L\cdot(F_n\, t^j) \quad \text{et} \quad Y \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^* \cong \oplus_{j=0}^{k-1} L\cdot((F_i/F_{i-1})\, t^j).$$

Le (ii) suit de la factorisation de ∇_k et de l'isomorphisme de $L[\Gamma]$-modules ci-dessus.

Lemme VI.4.6. — *$X^+\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $X^-\boxtimes\mathbf{Q}_p$ sont des $\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k$-modules libres de rang 1.*

Démonstration. — Choisissons une base e_1, e_2 de D_{pdR} sur L telle que $e_1, t^k e_2$ soit une base de D_{dif}^+ sur $L[[t]]$. Alors e_1, e_2 est une base de $N_{\mathrm{dif},n}$ sur $L_n[[t]]$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et de plus, e_1 et e_2 sont fixes par Γ modulo $t^k N_{\mathrm{dif},n}$. On en déduit que les deux $\mathscr{R}^+(\Gamma)$-modules considérés sont isomorphes à $\varprojlim (L_n[[t]]/t^k)$. Le lemme VI.4.4 permet de conclure.

3. Le module N_{rig}. — Ce qui suit est inspiré de [**4, 5**]. Si $a \geq m(D)$, soit

$$N^{]0,r_a]} = \{x \in D^{]0,r_a]}[\frac{1}{t}],\ \iota_n(x) \in N_{\mathrm{dif},n},\ \text{si } n \geq a\},$$

et soit N_{rig} la réunion des $N^{]0,r_a]}$, de telle sorte que

$$N_{\mathrm{rig}} = \{x \in D_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}],\ \iota_n(x) \in N_{\mathrm{dif},n},\ \text{pour } n \gg 0\}.$$

Alors $N^{]0,r_a]}$ est un sous $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$-module fermé de $D^{]0,r_a]}[\frac{1}{t}]$, contenant $D^{]0,r_a]}$ et contenu dans $t^{-k}D^{]0,r_a]}$; c'est donc un $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$-module de rang 2. De même, N_{rig} est un $\mathscr{R}$-module de rang 2, et on a

$$N_{\mathrm{rig}} = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^{]0,r_a]}} N^{]0,r_a]},\ \text{pour tout } a \geq m(D).$$

Remarque VI.4.7. — (i) On a $D^{]0,r_a]} = \{x \in N^{]0,r_a]},\ \iota_n(x) \in D_{\mathrm{dif},n}^+,\ \text{si } n \geq a\}$. En effet, si $x \in N^{]0,r_a]}$, il existe m tel que $t^m x \in D^{]0,r_a]}$; l'appartenance de $\iota_n(t^m x)$ à $t^m D_{\mathrm{dif},n}^+$ implique que $\left(\frac{p\varphi^{n-1}(T)}{\varphi^n(T)}\right)^m t^m x \in D^{]0,r_a]}$. Si ceci est vrai pour tout $n \geq a$, on déduit du fait que $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$ est de Fréchet-Stein, et de ce que $t\prod_{n\geq a} \frac{p\varphi^{n-1}(T)}{\varphi^n(T)}$ est une unité de $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$, que $x \in D^{]0,r_a]}$ comme annoncé.

(ii) On déduit du théorème des restes chinois que $x \mapsto (\iota_n(x))_{n\geq a}$ induit des isomorphismes

$$N^{]0,r_a]}/D^{]0,r_a]} \cong \prod_{n\geq a}(X^- \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p) \ \text{ et } \ D^{]0,r_a]}/t^k N^{]0,r_a]} \cong \prod_{n\geq a}(X^+ \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p).$$

De même, cette application induit un isomorphisme $\mathscr{E}^{]0,r_a]}/t^k \cong \prod_{n\geq a}(L_n[t]/t^k)$, ce qui fait que l'on a des isomorphismes $N^{]0,r_a]}/D^{]0,r_a]} \cong D^{]0,r_a]}/t^k N^{]0,r_a]} \cong \mathscr{E}^{]0,r_a]}/t^k$ de $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$-modules.

Lemme VI.4.8. — *Si $a \geq m(D)$, les $\mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma)$-modules $N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*/D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et $D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*/(t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)$ sont libres de rang 1 sur $\mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma)/\nabla_k$.*

Démonstration. — La formule $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n+1}/F_n} \circ \iota_{n+1} = \iota_n \circ \psi$ montre que, si $a \geq m(D)$, l'application $x \mapsto (\iota_n(x))_{n\geq a}$ induit des morphismes de Γ-modules :

$$N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*/D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \cong \prod_{n\geq a}(X^- \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p^*),$$

$$D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*/t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \cong \prod_{n\geq a}(X^+ \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p^*).$$

Ces morphismes sont injectifs par définition de X^+ et X^- et parce que $D^{]0,r_a]}$ est l'ensemble des $z \in N^{]0,r_a]}$ tels que $\iota_n(z) \in D^+_{\mathrm{dif},n}$, pour tout $n \geq a$. Le théorème des restes chinois (pour l'anneau $\mathscr{E}^{]0,r_{a-1}]}$) permet de montrer que ces morphismes sont surjectifs (on écrit un élément de $N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ sous la forme $\sum_{i=1}^{p-1}(1+T)^i\varphi(z_i)$, avec $z_i \in N^{]0,r_{a-1}]}$, et on est ramené à prouver que $z \mapsto (\iota_n(z))_{n\geq a-1}$ est surjectif de $N^{]0,r_{a-1}]}$ sur $\prod_{n\geq a-1} X_n^-$, ce qui suit du théorème des restes chinois (cf. démonstration du lemme VI.4.11 pour des techniques intervenant dans la démonstration de ce théorème)). Le résultat suit donc du lemme VI.4.6, une fois que l'on a remarqué que, si $Y \in \{X^+, X^-\}$, alors

$$\mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma) \otimes_{\mathscr{R}^+(\Gamma)} (Y \boxtimes \mathbf{Q}_p) \cong \prod_{n\geq a} (Y \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p^*),$$

car l'isomorphisme $Y \boxtimes \mathbf{Q}_p \cong (Y \boxtimes p^{1-a}\mathbf{Z}_p) \times \prod_{n\geq a}(Y \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p^*)$ est induit par la décomposition

$$\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k \cong (\mathscr{R}^+(\Gamma)/\lambda_{k,a-1}) \times \prod_{n\geq a} (\mathscr{R}^+(\Gamma)/\lambda_{k,n-1}^{-1}\lambda_{k,n}),$$

conséquence de la factorisation de ∇_k.

Soient $M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]} = t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et $M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]} = \nabla_k \cdot (N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)$.

Proposition VI.4.9. — (i) *$M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]}$ et $M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]}$ sont des sous-$\mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma)$-modules de $M^{]0,r_a]} = D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.*

(ii) *Si D est de Rham, alors $M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]} = M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]}$.*

(iii) *Si D n'est pas de Rham, alors*

$$M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]} + M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]} = M^{]0,r_a]} \text{ et } M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]} \cap M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]} = \nabla_k \cdot M^{]0,r_a]}.$$

Démonstration. — Notons simplement B l'anneau $\mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma)$ et $M, M_{\mathrm{e}}, M_{\mathrm{p-e}}$ les modules $D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, $M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]}$, $M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]}$. Notons aussi M' le B-module $N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, de telle sorte que $M_{\mathrm{e}} = \nabla_k \cdot M'$.

L'inclusion de M_{e} dans M résulte de la prop. VI.4.2, et celle de $M_{\mathrm{p-e}}$ est une évidence. La stabilité de M_{e} sous B est une évidence ; celle de $M_{\mathrm{p-e}}$ suit du lemme VI.4.8. On en déduit le (i).

Si D est de Rham, il résulte du (i) de la prop. VI.4.2 que $M_{\mathrm{e}} \subset M_{\mathrm{p-e}}$. Par ailleurs, d'après le lemme VI.4.8, le B-module $M'/M_{\mathrm{p-e}}$ est une extension de deux B/∇_k-modules de rang 1, et comme $M'/M_{\mathrm{e}} = M'/\nabla_k \cdot M'$ est isomorphe à $(B/\nabla_k)^2$, la surjection $M'/M_{\mathrm{e}} \to M'/M_{\mathrm{p-e}}$ est un isomorphisme. Ceci démontre le (ii).

Si D n'est pas de Rham, alors $x \mapsto (\iota_n(x))_{n\geq a}$ induit une surjection de M_{e} sur $Y = \prod_{n\geq a}(X^+ \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p^*)$, d'après le (ii) de la prop. VI.4.2 et le théorème des restes chinois. Or, d'après le lemme VI.4.8, cette même application induit un isomorphisme de $M/M_{\mathrm{p-e}}$ sur Y, et donc $M_{\mathrm{e}} + M_{\mathrm{p-e}} = M$.

Maintenant, $\nabla_k \cdot M \subset M_{\mathrm{e}}$ car $M_{\mathrm{e}} = \nabla_k \cdot M'$ et $M \subset M'$, et $\nabla_k \cdot M \subset M_{\mathrm{p-e}}$ d'après la prop. VI.4.2 ; on a donc $\nabla_k \cdot M \subset M_{\mathrm{e}} \cap M_{\mathrm{p-e}}$. Par ailleurs, on a une suite exacte $0 \to M/M_{\mathrm{e}} \to M'/M_{\mathrm{e}} \to M'/M \to 0$ dans laquelle $M'/M_{\mathrm{e}} = M'/\nabla_k \cdot M'$ est un (B/∇_k)-module libre de rang 2 et M'/M est un (B/∇_k)-module libre de rang 1 d'après le lemme VI.4.8. On en déduit que M/M_{e} est aussi un (B/∇_k)-module libre de rang 1. Comme $M_{\mathrm{e}} + M_{\mathrm{p-e}} = M$, on a $M/(M_{\mathrm{e}} \cap M_{\mathrm{p-e}}) = (M/M_{\mathrm{e}}) \oplus (M/M_{\mathrm{p-e}})$, et $M/(M_{\mathrm{e}} \cap M_{\mathrm{p-e}})$ est un (B/∇_k)-module libre de rang 2. Comme il en est de même de $M/\nabla_k \cdot M$, la surjection $M/\nabla_k \cdot M \to M/(M_{\mathrm{e}} \cap M_{\mathrm{p-e}})$ est un isomorphisme, et $M_{\mathrm{e}} \cap M_{\mathrm{p-e}} = \nabla_k \cdot M$.

Ceci permet de conclure.

On a démontré en passant le résultat suivant.

Corollaire VI.4.10. — *Si $a \geq m(D)$, le $\mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma)$-module $D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*/M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]}$ est libre de rang 1 sur $\mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma)/\nabla_k$.*

4. Le module $\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$. — Comme φ est bijectif sur $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$, il l'est aussi sur $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+[\frac{1}{t}]$. Par ailleurs, $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$ s'injecte naturellement dans $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$ (car $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ est un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et que l'on dispose de la description de $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$ du (ii) de la rem. V.1.2). On dispose donc, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, d'une injection ι_i (obtenue en composant φ^{-i} avec l'injection ci-dessus) de $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+[\frac{1}{t}]$ dans $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}$. Soit

$$\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+ = \{x \in \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+[\frac{1}{t}],\ \iota_i(x) \in \widetilde{N}_{\mathrm{dif}} \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}\}.$$

Comme $\widetilde{N}_{\mathrm{dif}} \subset t^{-k}\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$, on a $\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+ \subset t^{-k}\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$.

Soit $\iota^+ : \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+/t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}} \to \prod_{i\in\mathbf{Z}} \widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+/t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$ l'application envoyant z sur la collection des images des $\iota_i(z)$ modulo $t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$.

Lemme VI.4.11. — *L'application ι^+ induit, pour tout $i_0 \in \mathbf{Z}$, un isomorphisme*

$$\varphi^{i_0-1}(T)^k\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+/t^k\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+ \cong \Big(\prod_{i<i_0}\{0\}\Big) \times \Big(\prod_{i\geq i_0} \widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+/t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}\Big).$$

Démonstration. — L'inclusion de l'image de $\varphi^{i_0-1}(T)^k\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+/t^k\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$ par ι^+ dans $\big(\prod_{i<i_0}\{0\}\big) \times \big(\prod_{i\geq i_0} \widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+/t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}\big)$ est immédiate. L'injectivité de l'application induite par ι^+ suit juste de la définition de $\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$.

Il n'y a donc que la surjectivité à prouver. Quitte à remplacer z par $\varphi^{-i_0}(z)$, on peut se contenter de montrer le résultat pour $i_0 = 0$. Soit donc $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+/t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$. Choisissons, pour chaque $i \in \mathbf{N}$, un relèvement y_i de $(\varepsilon^{(i+1)} - 1)^{-k}x_i$ dans $\widetilde{D}^+[\frac{1}{p}]$, et un entier $k_i \geq 0$ tel que $p^{k_i}y_i \in \widetilde{D}^+$.

Soit, par ailleurs, $P \in \mathbf{Q}_p[T]$ tel que $p\frac{T\log(1+T)}{\varphi(T)}P(T) \equiv 1 \bmod (T^{-1}\varphi(T))^k\mathscr{R}^+$ et, si $i \in \mathbf{N}$, soit $q_i = \varphi^{i-1}(p\frac{T\log(1+T)}{\varphi(T)}P(T))^k$. Alors $\iota_j(q_i) \equiv 0 \bmod t^k\widetilde{L[[t]]}$, si $j \neq i$, tandis que $\iota_i(q_i) \equiv 1 \bmod t^k\widetilde{L[[t]]}$.

Maintenant, le p^i qui apparaît dans q_i quand on applique φ^{i-1} fait que la série $\sum_{i\geq 0}\varphi^i(y_i)q_i^{i+k_i}$ converge dans $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$. Notons z' la somme de cette série. Alors, modulo $t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$, on a la congruence $\iota_j(z') \equiv \sum_{i\geq 0}\iota_{j-i}(y_i)\iota_j(q_i)^{i+k_i} \equiv \iota_0(y_j)$, si $j \geq 0$ et $\iota_j(z') \equiv 0$, si $j < 0$. On en déduit que l'image de $z = \varphi^{-1}(T)^k z'$ par ι^+ est $(\dots, 0, x_0, x_1, \dots)$. Comme $\varphi^{-1}(T)^k z' \in \varphi^{-1}(T)^k\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$, cela permet de conclure.

On démontre de même le résultat suivant.

Lemme VI.4.12. — *Si $i_0 \in \mathbf{Z}$, l'image de $\varphi^{i_0-1}(T)^k t^k\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$ par l'application qui à z associe la suite des $\iota_i(z)$ modulo $t^k\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$, est égale $\big(\prod_{i<i_0}\{0\}\big)\times\big(\prod_{i\geq i_0} t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}/t^k\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}\big)$.*

5. Le module $N^{\psi=1}_{\mathrm{rig}}$. — Soient D un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$ et $V = \mathbf{V}(D)$. Si $n \in \mathbf{N}$, on note $M_{\mathrm{dif},n}$ le sous-$L_n[[t]]$-module de $D_{\mathrm{dif},n}$ engendré par l'image inverse de $(D_{\mathrm{pdR}}/D^+_{\mathrm{pdR}})^\Gamma$ dans $D_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n}$.

Si $a \geq m_0(D)$, soit $M^{]0,r_a]}$ l'ensemble des $x \in D^{]0,r_a]}[\frac{1}{t}]$ tels que $\iota_n(x) \in M_{\mathrm{dif},n}$, pour tout $n \geq a$. Si $x \in D^{]0,r_a]}[\frac{1}{t}]$ et si $i \geq a$, on note $\iota_i^-(x)$ l'image de $\iota_i(x)$ modulo $D^+_{\mathrm{dif},i}$.

Proposition VI.4.13. — *Si $n \geq a \geq m_0(D)$, et si $x \in (D_{\mathrm{pdR}}/D^+_{\mathrm{pdR}})^{\Gamma_n}$, il existe $\tilde{x} \in M^{]0,r_a]}$, vérifiant $\psi(\tilde{x}) - \tilde{x} \in D^+_{\mathrm{cris},F_n}$ et $\iota_m^-(\tilde{x}) = x$, pour tout $m \geq n$.*

Démonstration. — La surjectivité de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\varphi=1}_{\mathrm{rig}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ fournit $c \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\varphi=1}_{\mathrm{rig}} \otimes V$ dont l'image modulo $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes V$ est x. La suite exacte $0 \to \mathbf{Q}_p \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\varphi=1}_{\mathrm{rig}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \to 0$ (fondamentale) et l'invariance de x par $\mathscr{G}_{F_n}$ montrent que le $\mathscr{G}_{F_n}$-cocycle $g \mapsto c_g$, avec $c_g = (g-1)\cdot c$, est à valeurs dans V. On déduit alors (cf. [**21**]), de la description de $H^1(\mathscr{G}_{F_n}, V)$ en termes de (φ,Γ)-modules (prop. VIII.1.4), l'existence de $z \in D^{(0,r_a]}$ et de $b \in \mathbf{A}^{(0,p^{-n}]} \otimes V$ tels que $c_g = \tau_n(\gamma_n)\frac{g-1}{\gamma_n-1}\cdot z - (g-1)\cdot b$, pour tout $g \in \mathscr{G}_{F_n}$.

Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $x \in (t^{-k}\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})\otimes V$. Alors $c \in t^{-k}\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}\otimes V \subset t^{-k}\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}\otimes V$. Par ailleurs, $D^{(0,r_n]} \subset \mathbf{A}^{(0,p^{-n}]} \otimes V \subset t^{-k}\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]} \otimes V$, ce qui permet de voir z, b, c comme des éléments de $t^{-k}\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]} \otimes V$. On a donc, pour tout $g \in \mathscr{G}_{F_n}$,

$$\tau_n(\gamma_n)\frac{g-1}{\gamma_n-1}\cdot z = (g-1)\cdot(b+c), \quad \text{dans } t^{-k}\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}\otimes V.$$

En particulier, comme z est fixe par $\mathscr{H}$, il en est de même de $\tilde{x} = b + c$. Autrement dit, on a

$$\tilde{x} \in (t^{-k}\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]} \otimes V)^{\mathscr{H}} = t^{-k}\widetilde{D}^{]0,r_n]} = t^{-k}\widetilde{\mathscr{E}}^{]0,r_n]} \otimes_{\mathscr{E}^{(0,r_n]}} D^{(0,r_n]}.$$

De plus, en prenant pour g un relèvement de γ_n dans $\mathscr{G}_{F_n}$, on obtient $\frac{\gamma_n-1}{\tau_n(\gamma_n)}\cdot\tilde{x} = z$.

Maintenant, tout élément x de $t^{-k}\widetilde{D}^{]0,r_n]}$ peut se décomposer de manière unique sous la forme $x = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(x) + (\gamma_n - 1)x'$, où la trace de Tate normalisée $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ (de $t^{-k}\widetilde{D}^{]0,r_n]}$ dans $t^{-k}D^{]0,r_n]}$) est le projecteur $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$-linéaire continu, commutant à l'action de Γ, dont la restriction à $\widetilde{D}^+$ coïncide avec l'opérateur $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : \widetilde{D}^+ \to D^\natural$ déjà défini, et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(x') = 0$ (cela résulte de [**27**, prop. 9.10] par exemple). On en déduit l'appartenance de $\tilde{x}$ à $t^{-k}D^{]0,r_n]}$ (i.e. l'égalité $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\tilde{x}) = \tilde{x}$). De plus, comme $b \in \mathbf{A}^{(0,p^{-n}]} \otimes V$, on a $\iota_m^-(\tilde{x}) = \iota_0^-(\varphi^{-m}(c)) = \iota_0^-(c) = x$, pour tout $m \geq n$. On en déduit que $\iota_m^-(\psi(\tilde{x}) - \tilde{x}) = 0$ pour tout $m \geq n$, et donc que $a = \psi(\tilde{x}) - \tilde{x}$ appartient à $D_{\mathrm{rig}}^{\Gamma_n} = D^+_{\mathrm{cris},F_n}$. Enfin, comme $\tilde{x} = \psi(\tilde{x}) - a$, avec $a \in D^+_{\mathrm{cris},F_n}$, et comme ψ améliore la convergence [**25**], on en déduit l'appartenance de $\tilde{x}$ à $t^{-k}D^{]0,r_a]}$. Ceci permet de conclure.

Remarque VI.4.14. — Si $D^{\mathrm{nr}} = 0$ (i.e. si $H^0(\mathscr{H}', V) = 0$), ou même si $H^0(\mathscr{G}_{F_n}, V) = 0$, alors $\psi - 1$ est injectif, et donc surjectif, sur $D_{\mathrm{rig}}^{\Gamma_n}$. Ceci permet, en rajoutant un élément de $D_{\mathrm{rig}}^{\Gamma_n}$ à $\tilde{x}$, de s'arranger pour que $\psi(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Dans le cas qui nous intéresse, où D est de dimension 2, absolument irréductible, presque de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et $k \geq 1$, la prop. VI.4.13 fournit le résultat suivant.

Proposition VI.4.15. — (i) *Si* $0 \leq i \leq k-1$, *et si* $n \geq m(D)$, *l'application* $z \mapsto \bigl(\iota_m^-\bigl(\frac{\nabla_k}{\chi(\gamma_n)^{-i}\gamma_n - 1} \cdot z\bigr)\bigr)_{m \geq n}$ *induit une surjection de* $N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ *sur le sous-*L_n*-espace vectoriel* $L_n \otimes (t^i D_{\mathrm{pdR}}/D^+_{\mathrm{pdR}})$ *de* $X_n^- \cong X^- \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p$.

(ii) $z \mapsto (\iota_n^-(z))_{n \gg 0}$ *induit un isomorphisme* $N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}/D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1} \cong X^- \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Démonstration. — Comme on a supposé D absolument irréductible, de dimension 2, on a $D^{\mathrm{nr}} = 0$, et le (i) suit directement de la prop. VI.4.13 (en utilisant la rem. VI.4.14) pour le (φ, Γ)-module $D \otimes \chi^{-i}$.

Maintenant, l'application $x \mapsto (\iota_n(x))_{n \gg 0}$ envoie $N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ dans $\varprojlim N_{\mathrm{dif},n}$ (cela suit de ce que $\frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n+1}/F_n}$ est une incarnation de ψ). En composant avec la projection modulo $\varprojlim D^+_{\mathrm{dif},n}$, cela nous fournit une application $\iota^- : N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1} \to X^- \boxtimes \mathbf{Q}_p$ dont le noyau est $N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1} \cap D_{\mathrm{rig}} = D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$. Par ailleurs, il résulte du (i) que l'image de ι^- contient X_∞^-. Il en résulte que si $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in X^- \boxtimes \mathbf{Q}_p$, il existe $y_{m(D)} \in N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ tel que $\iota^-(y_{m(D)}) = x_{m(D)}$, et pour tout $n \geq m(D)+1$, il existe $y_n \in N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ tel que $\iota^-(y_n) = x_n - x_{n-1}$. Maintenant, N_{rig} est, de manière naturelle, un $\mathscr{R}^+(\Gamma)$-module, et ψ commutant à Γ, il en est de même de $N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$. On déduit des techniques standard pour les anneaux de Fréchet-Stein, l'existence de $y \in N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$, tel que $y - y_{m(D)} \in \lambda_{k,m(D)}^{-1}\nabla_k N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ et $y - y_n \in \frac{\lambda_{k,n-1}}{\lambda_{k,n}}\nabla_k N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$, pour tout $n \geq m(D)+1$.

Mais alors[64], $\iota^-(y)=(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ce qui prouve que ι^- est surjective. Ceci permet de conclure.

6. Dualité. — Fixons un isomorphisme $\wedge^2 D\cong\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(1)\otimes\delta_D$, ce qui fixe aussi un isomorphisme $\check{D}\cong D\otimes\delta_D^{-1}$ envoyant $x\otimes\delta_D^{-1}$ sur la forme linéaire $y\mapsto(x\wedge y)\otimes\delta_D^{-1}$. On en déduit des isomorphismes $\check{D}_{\mathrm{dif},n}\cong D_{\mathrm{dif},n}\otimes\delta_D^{-1}$ et $\check{D}^+_{\mathrm{dif},n}\cong D^+_{\mathrm{dif},n}\otimes\delta_D^{-1}$ de Γ-modules.

Lemme VI.4.16. — (i) *Si $n\in\mathbf{N}$, l'application $x\mapsto t^kx\otimes\delta_D^{-1}$ induit un isomorphisme de $N_{\mathrm{dif},n}$ sur son $L_n[[t]]$-réseau dual dans $\check{D}_{\mathrm{dif},n}$.*

(ii) *Si $a\geq m(D)$, l'application $x\mapsto t^kx\otimes\delta_D^{-1}$ induit un isomorphisme de $N^{]0,r_a]}$ sur son $\mathscr{E}^{]0,r_a]}$-dual dans $\check{D}^{]0,r_a]}[\frac{1}{t}]$.*

(iii) *L'application $x\mapsto t^kx\otimes\delta_D^{-1}$ induit un isomorphisme de N_{rig} sur son $\mathscr{R}$-dual dans $\check{D}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}]$.*

Démonstration. — Soit e_1,e_2 une base de D_{pdR} sur L telle que e_1,t^ke_2 soit une base de $D^+_{\mathrm{dif},n}$ sur $L_n[[t]]$, pour un (et donc tout) $n\in\mathbf{N}$. Comme $x\mapsto x\otimes\delta_D^{-1}$ est un isomorphisme de $D^+_{\mathrm{dif},n}$ sur son dual $\check{D}^+_{\mathrm{dif},n}$, le dual de $N_{\mathrm{dif},n}$ est l'image de l'ensemble des $x_1e_1+x_2t^ke_2$, avec $x_1,x_2\in L_n((t))$, tels que $x\wedge e_1$ et $x\wedge e_2$ appartiennent à $L_n[[t]](e_1\wedge t^ke_2)=t^kL_n[[t]](e_1\wedge e_2)$. Comme ceci équivaut à $x_1,x_2\in t^kL_n[[t]]$, cela démontre le (i).

On a $x\wedge y\in\mathscr{E}^{]0,r_a]}\otimes\delta_D$ si et seulement si $\iota_n(x)\wedge\iota_n(y)\in L_n[[t]]\otimes\delta_D$, pour tout $n\geq a$. Comme l'application $y\mapsto(\iota_n(y))_{n\geq a}$ de $N^{]0,r_a]}$ dans $\prod_{n\geq a}N_{\mathrm{dif},n}$ a une image dense, et comme le réseau dual de $N_{\mathrm{dif},n}$ est $t^kN_{\mathrm{dif},n}$ d'après le (i), on voit que « $\iota_n(x)\wedge\iota_n(y)\in L_n[[t]]\otimes\delta_D$, pour tout $n\geq a$ et tout $y\in N^{]0,r_a]}$ » équivaut à « $\iota_n(x)\in t^kN_{\mathrm{dif},n}$, pour tout $n\geq a$ ». Comme ceci équivaut à $x\in N^{]0,r_a]}$, cela démontre le (ii). Le (iii) s'en déduisant par limite inductive, cela permet de conclure.

L'accouplement $(x,y)\mapsto\mathrm{rés}_L(\langle\sigma_{-1}\cdot(x\otimes\delta_D^{-1}),y\rangle)$ sur $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}$, où $\mathrm{rés}_L:L_\infty((t))\,dt\to L$ est l'application définie juste avant le lemme VI.1.2, fournit des accouplements non dégénérés

$$[\ ,\ ]_{\mathrm{dif}}:X_n^+\times X_n^-\to L,\quad [\ ,\ ]_{\mathrm{dif}}:X_\infty^+\times X_\infty^-\to L\ \text{ et }\ [\ ,\ ]_{\mathrm{dif}}:\widetilde{X}^+\times\widetilde{X}^-\to L.$$

On a aussi $[x,y]_{\mathrm{dif}}=\langle\sigma_{-1}\cdot(x\otimes\delta_D^{-1}),y\rangle_{\mathrm{dif}}$, où $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dif}}$ est l'accouplement induit par celui du n° 4 du § VI.3. L'accouplement $[\ ,\ ]_{\mathrm{dif}}$ étant non dégénéré, il induit un isomorphisme de X_n^+ sur $(X_n^-)^*$, et donc aussi un isomorphisme de $X^+\boxtimes\mathbf{Q}_p$ sur $(X_\infty^-)^*$. Comme $[\ ,\ ]_{\mathrm{dif}}$ induit une injection de $\widetilde{X}^+$ dans $(X_\infty^-)^*$, on en déduit une injection naturelle de $\widetilde{X}^+$ dans $X^+\boxtimes\mathbf{Q}_p$. Cette injection peut encore se décrire

(64) On rappelle que $X^-\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est isomorphe, en tant que $L[\Gamma]$-module, à $(X^-\boxtimes p^{-a}\mathbf{Z}_p)\times\prod_{n\geq a+1}(X^-\boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p^*)$, pour tout $a\geq m(D)$, et que cet isomorphisme est induit (cf. dém. du lemme VI.4.8) par la factorisation de ∇_k.

en termes de traces de Tate normalisées : elle est induite par l'application de $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}$ dans $\varprojlim D_{\mathrm{dif},n}$ envoyant x sur $(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} x)_{n\geq 1}$.

VI.5. Irréductibilité de Π^{alg}. — Ce § explore les renseignements que l'on peut obtenir concernant Π^{alg} en n'utilisant que l'action du mirabolique. On définit l'ensemble $\Pi^{P-\mathrm{alg}}$ des vecteurs localement algébriques pour l'action du mirabolique ; cet ensemble contient Π^{alg} et n'est pas loin de lui être égal si $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$.

1. Une condition d'existence de vecteurs localement algébriques. — Dans tout ce numéro, D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$, irréductible, de rang 2. On note Π la représentation $\mathbf{\Pi}(D)$ de G, et Π^{alg} l'espace de ses vecteurs localement algébriques. Comme Π est admissible d'après le lemme II.2.10, il résulte de la prop. VI.2.4 que Π^{alg} se décompose sous la forme $\Pi^{\mathrm{alg}} = \oplus_{\ell,k}\Pi^{\mathrm{alg}}_{\ell,k}$ et $\Pi^{\mathrm{alg}}_{\ell,k} = W_{\ell,k} \otimes \Pi_{\ell,k}$, où $\Pi_{\ell,k}$ est une représentation lisse, admissible, de G.

Proposition VI.5.1. — *Si $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$, alors D est presque de Rham à poids de Hodge-Tate distincts* (et donc, en particulier, est Hodge-Tate). *De plus, si $\ell < \ell + k$ sont les poids de Hodge-Tate de D, alors $\Pi^{\mathrm{alg}} = \Pi^{\mathrm{alg}}_{\ell,k}$.*

Démonstration. — Soit (ℓ,k) tel que $\Pi^{\mathrm{alg}}_{\ell,k} \neq 0$. Quitte à tordre D par $\chi^{-\ell}$, on peut supposer $\ell = 0$; le caractère central de Π, qui est égal à celui de $\Pi^{\mathrm{alg}}_{\ell,k} \neq 0$, est alors de la forme $x^{k-1}\alpha$, où α est localement constant. Comme ce caractère central est aussi égal à δ_D, la somme des poids de Hodge-Tate généralisés de D est k.

Soit $v' \in \Pi_{\ell,k}$, non nul. Il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que v' soit fixe par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et alors $v = \left(\begin{smallmatrix} p^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)v$ est fixe par $\left(\begin{smallmatrix} p^{-m} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Soit $n \geq 1$ tel que $\left(\begin{smallmatrix} 1+p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ fixe v. Maintenant, Sym^{k-1} contient un vecteur e fixe par $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, tué par $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)-1\right)^k$ pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$, mais pas par $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)-1\right)^{k-1}$, si $x \neq 0$. Il en résulte que $v \otimes e$ est tué par $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)-1\right)^k$ et par $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1+p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)-1\right)$, mais pas par $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)-1\right)^{k-1}$.

Maintenant, il résulte du cor. II.2.9 et de la nullité de $D^\sharp/D^\natural$ (conséquence de l'irréductibilité de D) que l'injection de $\widetilde{D}$ dans $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ induit un isomorphisme de B-modules de $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ sur Π. On peut donc choisir un relèvement z de $v \otimes e$ dans $\widetilde{D}$, et les propriétés de $v \otimes e$ énoncées ci-dessus se traduisent par :

- $T^k z \in \widetilde{D}^+$ et $(\sigma_{1+p^n} - 1)z \in \widetilde{D}^+$,
- $T^{k-1} z \notin \widetilde{D}^+$.

Comme $T^{k-1}z \notin \widetilde{D}^+$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi^m(T^k z) \notin t\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ (cf. lemme VI.5.2 ci-dessous). Choisissons un tel m. Alors l'image de $\varphi^m(z)$ dans $t^{-k}\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}/t^{1-k}\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ est non nulle. Par ailleurs, elle est tuée par $\sigma_{1+p^n} - 1$ car $(\sigma_{1+p^n} - 1)z \in \widetilde{D}^+$ et $\sigma_{1+p^n} - 1$ commute à φ^m. On en déduit que l'un des poids de Hodge-Tate de $t^{-k}D$ est 0 et donc que l'un des poids de Hodge-Tate de D est k. Comme la somme des poids de Hodge-Tate est k, cela prouve que les deux poids de Hodge-Tate de D sont 0 et k, et donc que D est presque de Rham, à poids 0 et k. On a donc démontré que $\Pi^{\mathrm{alg}}_{\ell,k} \neq 0$ implique que D est presque de Rham à poids de Hodge-Tate ℓ et $\ell + k$. Il en résulte

qu'il existe au plus un couple (ℓ,k) tel que $\Pi^{\mathrm{alg}}_{\ell,k}\neq 0$, et que l'on a alors $\Pi^{\mathrm{alg}}=\Pi^{\mathrm{alg}}_{\ell,k}$. Ceci permet de conclure.

Lemme VI.5.2. — *Si $x\in\varphi^n(T)^{-k}\widetilde{D}^+$ et si $\varphi^m(x)\in\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$, pour tout $m\in\mathbf{N}$, alors $x\in\widetilde{D}^+$.*

Démonstration. — Cela suit de ce que $\widetilde{D}^+=(\widetilde{\mathbf{A}}^+\otimes_{\mathbf{Z}_p}V)^{\mathscr{H}}$ et qu'un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ tel que $\varphi^m(x)\in\operatorname{Ker}\theta$ pour tout $m\in\mathbf{N}$ est divisible par T dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ (c'est un des résultats de base de la théorie).

2. Le modèle de Kirillov de Π^{alg}. — On suppose dorénavant que D est presque de Rham à poids 0 et k. On note $\widetilde{D}^{U-\mathrm{alg}}$ l'ensemble des $z\in\widetilde{D}$ tels qu'il existe $n\in\mathbf{N}$ avec $\varphi^n(T)^kz\in\widetilde{D}^+$, et on note $\Pi^{U-\mathrm{alg}}$ l'image de $\widetilde{D}^{U-\mathrm{alg}}$ dans Π via l'isomorphisme $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+\cong\Pi$ utilisé plus haut. On note $\widetilde{D}^{P-\mathrm{alg}}$ l'ensemble des $z\in\widetilde{D}^{U-\mathrm{alg}}$ tels qu'il existe $n\in\mathbf{N}$ avec $\lambda_{k,n}z\in\widetilde{D}^+$, où l'on a posé $\lambda_{k,n}=\prod_{i=0}^{k-1}(\sigma_{1+p^n}-(1+p^n)^i)$. Enfin, on note $\Pi^{P-\mathrm{alg}}$ l'image de $\widetilde{D}^{P-\mathrm{alg}}$ dans Π.

Lemme VI.5.3. — $\Pi^{\mathrm{alg}}\subset\Pi^{P-\mathrm{alg}}\subset\Pi^{U-\mathrm{alg}}$.

Démonstration. — L'inclusion $\Pi^{P-\mathrm{alg}}\subset\Pi^{U-\mathrm{alg}}$ est une évidence. Maintenant, si $v\in\Pi^{\mathrm{alg}}$, il existe n tel que $x\mapsto\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)v$ soit polynomiale de degré $\leq k-1$ sur $p^n\mathbf{Z}_p$, et $x\mapsto\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)v$ soit polynomiale de degré $\leq k-1$ sur $1+p^n\mathbf{Z}_p$, ce qui implique que v est tué par $\left(\left(\begin{smallmatrix}1&p^n\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)^k$ et par $\prod_{i=0}^{k-1}\left(\left(\begin{smallmatrix}1+p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)-(1+p^n)^i\right)$. On en déduit que si on relève v en $z\in\widetilde{D}$, alors $\varphi^n(T)^kz\in\widetilde{D}^+$ et $\lambda_{k,n}\cdot z\in\widetilde{D}^+$. D'où l'inclusion $\Pi^{\mathrm{alg}}\subset\Pi^{P-\mathrm{alg}}$ qui permet de conclure.

Le module $\widetilde{D}^{U-\mathrm{alg}}$ est stable par B de manière évidente. Par ailleurs, comme $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ s'injecte dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ (qui est, rappelons-le, le complété de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ pour la topologie $\frac{T}{\varphi^{-1}(T)}$-adique), le module $\widetilde{D}^+=(\widetilde{\mathbf{A}}^+\otimes V)^{\mathscr{H}}$ s'injecte dans $\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}=(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V)^{\mathscr{H}}$, et comme $\varphi^n(T)^k$ divise t^k pour tout n, on dispose d'une injection naturelle de $\widetilde{D}^{U-\mathrm{alg}}$ dans $t^{-k}\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$. La composée de cette injection avec la projection modulo $\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ est identiquement nulle sur $\widetilde{D}^+$, et donc induit une application

$$\iota_0^-:\Pi^{U-\mathrm{alg}}\to t^{-k}\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}/\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}},$$

qui commute à l'action de Γ. Si $z\in\Pi^{U-\mathrm{alg}}$, on note $\phi_z:\mathbf{Q}_p^*\to t^{-k}\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}/\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ la fonction définie par $\phi_z(x)=\iota_0^-\left(\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot z\right)$.

Lemme VI.5.4. — (i) *L'application $z\mapsto\phi_z$ est injective.*
De plus :
(ii) *ϕ_z est à support compact dans $\mathbf{Q}_p$.*
(iii) *$\sigma_a(\phi_z(x))=\phi_z(ax)$, pour tous $a\in\mathbf{Z}_p^*$ et $x\in\mathbf{Q}_p^*$.*
(iv) *$\phi_{gz}(x)=\delta_D(d)[(1+T)^{d^{-1}bx}]\phi_z(d^{-1}ax)$, pour tous $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\in B$ et $x\in\mathbf{Q}_p^*$.*
(v) *$\phi_{(u-1)^kz}$ est à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$ pour tout $u\in U$.*

Démonstration. — L'injectivité de $z \mapsto \phi_z$ suit du lemme VI.5.2.

Maintenant, $\varphi^m(x) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, si $x \in \varphi^n(T)^{-k}\widetilde{\mathbf{A}}^+$ et $m < -n$, car $\varphi^{-s}(T) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, pour tout $s \geq 1$. On a donc

$$\iota_0^-\left(\left(\begin{smallmatrix} p^m a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right) = \sigma_a(\iota_0^-(\varphi^m(z))) = 0,$$

si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, si $z \in \varphi^n(T)^{-k}\widetilde{D}^+/\widetilde{D}^+$ et $m < -n$. On en déduit le (ii).

Le (iii) suit juste de ce que $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et σ_a agissent de la même manière et donc que

$$\sigma_a(\phi_z(x)) = \sigma_a\left(\iota_0^-\left(\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right)\right) = \iota_0^-\left(\sigma_a\left(\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right)\right) = \iota_0^-\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right) = \phi_z(ax).$$

Le (iv) suit du calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned} \iota_0^-\left(\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right) &= \delta_D(d)\iota_0^-\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & d^{-1}bx \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} d^{-1}ax & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right) \\ &= \delta_D(d)[\varepsilon^{d^{-1}bx}]\iota_0^-\left(\left(\begin{smallmatrix} d^{-1}ax & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right) = \delta_D(d)[\varepsilon^{d^{-1}bx}]\phi_z(d^{-1}ax). \end{aligned}$$

Enfin, $\varphi^m\left(\left(\frac{[\varepsilon^b]-1}{\varphi^n(T)}\right)^k\right) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, si $m > -v_p(b)$. On en déduit que $\phi_{(u-1)^k z} = 0$ sur $p^m\mathbf{Z}_p$, si $z \in \varphi^n(T)^{-k}\widetilde{D}^+/\widetilde{D}^+$, si $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et si $m = 1 - v_p(b)$.

Lemme VI.5.5. — (i) *Soit $z \in \Pi^{U-\mathrm{alg}}$. Alors $z \in \Pi^{P-\mathrm{alg}}$ si et seulement si ϕ_z est à valeurs dans X_∞^-.*

(ii) *$\Pi^{P-\mathrm{alg}}$ est stable par B.*

Démonstration. — Par définition, un élément de $\Pi^{U-\mathrm{alg}}$ appartient à $\Pi^{P-\mathrm{alg}}$ si et seulement si il est tué par $\lambda_{k,n}$, pour un certain n. Or $\phi_{\lambda_{k,n}z} = \lambda_{k,n} \cdot \phi_z$, et comme $z \mapsto \phi_z$ est injective, on voit que $z \in \Pi^{P-\mathrm{alg}}$ si et seulement si $\phi_z(x)$ est tué, pour tout x, par $\lambda_{k,n}$. Comme le noyau de $\lambda_{k,n}$ sur $t^{-k}\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}/\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ (et même sur $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}/\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$) est X_n^- [cela résulte de ce que $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}/\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ est la réunion des $t^{-i-1}\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}/\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$, et $t^{-i-1}\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}/t^{-i}\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}} = t^{-i-1}\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}} \cong \mathbf{C}_p(-i-1) \oplus \mathbf{C}_p(k-i-1)$], cela démontre le (i).

Le (ii) s'en déduit en utilisant l'injectivité de $z \mapsto \phi_z$ et le (iv) du lemme VI.5.4.

On choisit une base f_D de $D_{\mathrm{pdR}}/D^+_{\mathrm{pdR}}$ sur L, ce qui fait que $a \mapsto a\,f_D$ induit un isomorphisme de $L_\infty[t]/t^k$ sur X_∞^-. Si $z \in \Pi^{\mathrm{alg}}$, on note $\mathscr{K}_z : \mathbf{Q}_p^* \to L_\infty[t]/t^k$ la fonction définie par (l'existence de $\mathscr{K}_z(x)$ découle du (i) du lemme VI.5.5)

$$\mathscr{K}_z(x)\,f_D = \iota_0^-\left(\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right) = \phi_z(x).$$

Proposition VI.5.6. — *Soit $z \in \Pi^{\mathrm{alg}}$.*

(i) *$\sigma_a(\mathscr{K}_z(x)) = \mathscr{K}_z(ax)$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $x \in \mathbf{Q}_p^*$.*

(ii) *Si on écrit $\mathscr{K}_z$ sous la forme $\mathscr{K}_z(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathscr{K}_{z,i}(x)\,(tx)^i$, avec $\mathscr{K}_{z,i}(x) \in L_\infty$, alors $\mathscr{K}_{z,i}$ est localement constante sur $\mathbf{Q}_p^*$, à support compact dans $\mathbf{Q}_p$.*

(iii) *L'application $z \mapsto \mathscr{K}_z$ est une bijection de Π^{alg} sur son modèle de Kirillov.*

(iv) *Si $b \in \mathbf{Q}_p$ et $y = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^k \cdot z$, alors $\mathscr{K}_y$ est à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$.*

Démonstration. — Le (i) est une conséquence du (iii) du lemme VI.5.4. Que $\mathscr{K}_{z,i}$ soit localement constante suit du (i) et de ce que $\mathscr{K}_{z,i}$ est à valeurs dans L_∞ ; qu'elle soit à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ suit du (ii) du lemme VI.5.4. Le (iii) est une conséquence des (i) (pour la bijectivité) et (iv) du lemme VI.5.4, et le (iv) suit du (v) de ce même lemme.

Théorème VI.5.7. — *Si D est presque de Rham à poids de Hodge-Tate $\ell < \ell + k$, et si $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$, alors Π^{alg} est de type (ℓ, k) et est irréductible ou bien on est dans* le cas spécial *où Π^{alg} est une extension de $W_{\ell,k} \otimes (\delta_0 \circ \det)$ par $W_{\ell,k} \otimes \mathrm{St} \otimes (\delta_0 \circ \det)$, où δ_0 est un caractère localement constant de $\mathbf{Q}_p^*$.*

Démonstration. — Que Π^{alg} soit de type (ℓ, k) suit de la prop. VI.5.1. Le reste se déduit donc, via la prop. VI.2.12, de l'existence d'un modèle de Kirillov (prop. VI.5.6).

3. Vecteurs P-algébriques à support compact. — On note $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X_\infty^-)$ les fonctions localement polynomiales, à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$, à valeurs dans X_∞^- et $\Pi_c^{P-\mathrm{alg}}$ l'ensemble des éléments z de $\Pi^{P-\mathrm{alg}}$ tels que $\phi_z \in \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X_\infty^-)$.

On rappelle que, si $i \in \mathbf{Z}$, l'on a défini $\iota_i : \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+[\frac{1}{t}] \to \widetilde{D}_{\mathrm{dif}}$ en composant l'injection naturelle avec φ^{-i}. On note, comme d'habitude, ι_i^- l'image de ι_i modulo $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$ (notons que $\varphi^n(T)^{-k}\widetilde{D}^+ \subset \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+[\frac{1}{t}]$, et donc ι_i et ι_i^- sont aussi définies sur $\varphi^n(T)^{-k}\widetilde{D}^+$). Si $z \in \Pi^{P-\mathrm{alg}}$, et si $\tilde{z} \in \widetilde{D}$ est un relèvement de z, on a $\phi_z(p^{-i}) = \iota_i^-(\tilde{z})$, quel que soit $i \in \mathbf{Z}$, comme on peut le constater en revenant à la définition de ϕ_z.

Proposition VI.5.8. — *L'application $z \mapsto \phi_z$ induit un isomorphisme de $L[B]$-modules de $\Pi_c^{P-\mathrm{alg}}$ sur $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma$.*

Démonstration. — La seule chose non évidente est la surjectivité de $z \mapsto \phi_z$ et, compte-tenu de la prop. VI.2.6, il suffit d'exhiber $z \in \Pi_c^{P-\mathrm{alg}}$ tel que ϕ_z ne soit pas à valeurs dans tX_∞^-. Soit $n \in \mathbf{N}$, et soit $\alpha \in X_n^- - tX_n^-$. On peut relever α en un élément $\tilde{\alpha}$ de $N_{\mathrm{dif},n}$. Soient alors $x \in \widetilde{D}^+$ tel que $\iota_0(x)$ ait même image que $\left(\frac{T}{\varphi^{-1}(T)}\right)^k\tilde{\alpha}$ dans $t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}/t^k\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$, et soit $\tilde{z} = \left(\frac{\varphi^{-1}(T)}{T}\right)^k x$. Alors, par construction, $\iota_0^-(\tilde{z}) = \alpha$ et $\iota_i^-(\tilde{z}) = 0$, si $i \neq 0$. Comme $\iota_i^-(\tilde{z})$ est tué par $\lambda_{k,n}$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on a $\lambda_{k,n}(\tilde{z}) \in \widetilde{D}^+$. On en déduit que $\tilde{z}$ est P-algébrique et, si z désigne son image dans $\Pi^{P-\mathrm{alg}}$, que $\phi_z(p^i) = \iota_i^-(\tilde{z}) = 0$, si $i \neq 0$, et $\phi_z(1) = \iota_0^-(\tilde{z}) = \alpha$. Ceci permet de conclure.

Corollaire VI.5.9. — *Si $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$, alors $\Pi_c^{P-\mathrm{alg}} \subset \Pi^{\mathrm{alg}}$.*

Démonstration. — Si $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$, alors $\Pi^{\mathrm{alg}} = W_{0,k} \otimes \Pi_0$, où Π_0 est lisse, et il existe $v' \in \Pi^{\mathrm{alg}}$, non nul, tel que $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ agit par multiplication par a^{k-1} sur v', pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$ assez proche de 1. Il en résulte que $\phi_{v'}$ n'est pas à valeurs dans tX_∞^-. Si $n \gg 0$, et si $v = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^k \cdot v'$, alors ϕ_v est à support compact d'après le (v) du lemme VI.5.4, et n'est pas à valeurs dans tX_∞^- car $\phi_v(p^i) = \varphi^{i-n}(T)^k\phi_{v'}(p^i)$, et $\varphi^{i-n}(T) \notin t\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, si $n > i$. On en déduit, en utilisant la prop. VI.2.6, que l'image

de Π^{alg} par $z \mapsto \phi_z$ contient $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma$. On conclut, en utilisant la prop. VI.5.8 et l'injectivité de $z \mapsto \phi_z$.

On a, par construction, $\phi_z(p^{-i}) = \iota_i^-(\tilde{z})$, si $z \in \Pi^{P-\mathrm{alg}}$, et si $\tilde{z}$ est un relèvement de z dans $\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$. Par ailleurs, l'application $\phi \mapsto (\phi(p^i))_{i\in\mathbf{Z}}$ est un isomorphisme de $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma$ sur $\oplus_{i\in\mathbf{Z}} X_\infty^-$, l'isomorphisme inverse associant à une suite presque nulle $(a_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ d'éléments de X_∞^-, la fonction coïncidant avec $x \mapsto \sigma_{p^{-i}x}(a_i)$ sur $p^i\mathbf{Z}_p^*$. Il en résulte, d'après la prop. VI.5.9, que :

Lemme VI.5.10. — *$\tilde{z} \mapsto (\iota_i^-(\tilde{z}))_{i\in\mathbf{Z}}$ induit un isomorphisme $\Pi_c^{P-\mathrm{alg}} \cong \oplus_{i\in\mathbf{Z}} X_\infty^-$.*

On dispose, pour chaque $i \in \mathbf{Z}$, d'une application $\iota_i = \iota_0 \circ \varphi^{-i}$ de $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$ dans $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$. On note $\iota_i^+ : \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+ \to X^+ \boxtimes \mathbf{Q}_p$ la composée de l'injection naturelle $\widetilde{X}^+ \to X^+ \boxtimes \mathbf{Q}_p$, de la projection naturelle $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}^+ \to \widetilde{X}^+$ et de ι_i. On note $\iota^+ : \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+ \to \prod_{i\in\mathbf{Z}}(X^+ \boxtimes \mathbf{Q}_p)$ la collection des ι_i^+, pour $i \in \mathbf{Z}$.

Cette construction s'étend à $D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ de la manière suivante. D'après la rem. V.2.21, on a $D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 \subset D^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Il en résulte que, si $z \in D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, alors $\iota_{i,n}(z) = \iota_n\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix} p^{n-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\big)$ est un élément bien défini de $D_{\mathrm{dif},n}^+$, si $n \geq m(D)$. On définit alors $\iota_i(z) \in \varprojlim D_{\mathrm{dif},n}^+$ comme la collection des $\iota_{i,n}(z)$, pour $n \geq m(D)$, et on a $\iota_{i,n}(z) = \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} \iota_0\big(\left(\begin{smallmatrix} p^{-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\big)$. On note $\iota_{i,n}^+(z)$ l'image de $\iota_{i,n}(z)$ dans X_n^+, et $\iota_i^+(z) \in X^+ \boxtimes \mathbf{Q}_p$ la collection des $\iota_{i,n}^+(z)$, pour $n \in \mathbf{N}$.

On pose $[x, y] = \{x \otimes \delta_D^{-1}, y\}$. On définit de même les accouplements $[\ ,\ ]_{\mathbf{Q}_p}$ et $[\ ,\ ]_{\mathbf{P}^1}$. On a donc $[g \cdot x, g \cdot y] = \delta_D(\det g)[x, y]$. On rappelle que l'on a aussi défini, par essentiellement la même formule, des accouplements $[\ ,\ ]_{\mathrm{dif}}$ (cf. n° 6 du § VI.4).

Lemme VI.5.11. — *Soient $a \leq m \in \mathbf{Z}$. Si $z \in \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$ et $y \in \frac{\varphi^a(T)^k}{\varphi^m(T)^k}\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$, ou si $z \in \frac{1}{\varphi^m(T)^k}\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$ et $y \in \varphi^a(T)^k t^k \widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$, alors $[z, y]_{\mathbf{Q}_p} = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \delta_D(p^i)[\iota_i(z), \iota_i(y)]_{\mathrm{dif}}$, où la somme est finie.*

Démonstration. — Cela suit du (ii) de la prop. VI.1.3, grâce à l'appartenance de $\langle \sigma_{-1}(z \otimes \delta_D^{-1}), y\rangle$ à $\widetilde{\mathscr{R}}^+\, dt$, si $z, y \in \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$, où si $z \in \widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$ et $y \in t^k\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$ (ce second cas demande d'utiliser le (i) du lemme VI.4.16).

Proposition VI.5.12. — (i) *$\Pi_c^{P-\mathrm{alg}}$ est inclus dans Π^{an}.*

(ii) *Si $z \in D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, et si $y \in \Pi_c^{P-\mathrm{alg}}$, alors $[z, y]_{\mathbf{P}^1} = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \delta_D(p^i)[\iota_i^+(z), \iota_i^-(y)]_{\mathrm{dif}}$.*

(iii) *Si $a \in \mathbf{N}$, si $z \in \varphi^{-a}(T)^k\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$, et si $y \in \Pi^{P-\mathrm{alg}}$, alors $[\iota_i^+(z), \iota_i^-(y)]_{\mathrm{dif}} = 0$, sauf pour un nombre fini de $i \in \mathbf{Z}$, et $[z, y]_{\mathbf{P}^1} = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \delta_D(p^i)[\iota_i^+(z), \iota_i^-(y)]_{\mathrm{dif}}$.*

Démonstration. — Soit $y \in \Pi_c^{P-\mathrm{alg}}$. On peut relever y en $\tilde{y} \in \big(\frac{\varphi^a(T)}{\varphi^n(T)}\big)^k\widetilde{D}^+$, si ϕ_y est à support dans $\cup_{-n\leq i\leq 1-a} p^i\mathbf{Z}_p^*$. Maintenant, si $z \in \widetilde{D}^+$, on déduit de ce que y

et z sont les limites respectives de $\mathrm{Res}_{p^{-m}\mathbf{Z}_p} y$ et $\mathrm{Res}_{p^{-m}\mathbf{Z}_p} z$ dans $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, et du lemme VI.5.11,

$$[z,y]_{\mathbf{P}^1} = [z,y]_{\mathbf{Q}_p} = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \delta_D(p^i)[\iota_i(z),\iota_i(y)]_{\mathrm{dif}}.$$

Comme $[\iota_i(z),\iota_i(y)]_{\mathrm{dif}} = [\iota_i^+(z),\iota_i^-(y)]_{\mathrm{dif}}$, la formule du (ii) est valable pour tout $z \in \widetilde{D}^+$. Or cette formule définit une forme linéaire continue sur $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* = D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$, dans lequel $\widetilde{D}^+$ est dense (car il l'est dans $\check{\Pi}^*$), car il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls étant donné que $\iota_i^-(y) = 0$ sauf pour un nombre fini de i grâce à l'hypothèse $y \in \Pi^{P-\mathrm{alg}}$. On en déduit l'appartenance de y à $\check{\Pi}^{\mathrm{an}}$, ce qui démontre le (i). Le (ii) a été démontré en passant.

Passons au (iii). On a $[\iota_i^+(z),\iota_i^-(y)]_{\mathrm{dif}} = 0$ si $\iota_i^+(z) = 0$ (ce qui est le cas si $i \leq -a$) ou si $\iota_i^-(y) = 0$ (ce qui est le cas si ϕ_y est à support dans $p^{1-i}\mathbf{Z}_p$). On en déduit la nullité de $[\iota_i^+(z),\iota_i^-(y)]_{\mathrm{dif}} = 0$, sauf pour un nombre fini de i. La formule se déduit alors du (ii), en utilisant l'inclusion de $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$ dans $D^{\natural}_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, l'appartenance de $\sigma_{-1}(\varphi^a(T)^k)y$ à $\Pi_c^{P-\mathrm{alg}}$, et les formules

$$[\lambda z,y]_{\mathbf{P}^1} = [z,\sigma_{-1}(\lambda)y]_{\mathbf{P}^1} \quad \text{et} \quad [\iota_i^+(\lambda z),\iota_i^-(y)]_{\mathrm{dif}} = [\iota_i^+(z),\iota_i^-(\sigma_{-1}(\lambda)y)]_{\mathrm{dif}},$$

si $\lambda = \varphi^a(T)^k$ (pour la première, cela suit de ce que $\varphi^a(T)^k$ agit comme une combinaison linéaire finie de $\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, avec $b \in \mathbf{Z}_p$, et de l'équivariance de $[\ ,\ ]_{\mathbf{P}^1}$ sous l'action de U ; pour la seconde, c'est immédiat sur la définition).

Lemme VI.5.13. — *Si $z \in \Pi^{\mathrm{an}} \cap \Pi^{U-\mathrm{alg}}$, et si $\tilde{z} \in \widetilde{D}$ est un relèvement de z, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $z \in \Pi^{P-\mathrm{alg}}$,

(ii) $\iota_i(\tilde{z}) \in \widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$, *pour tout* $i \in \mathbf{Z}$.

(iii) $\tilde{z} \in \widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$

Démonstration. — L'équivalence entre (ii) et (iii) est juste la définition de $\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$. L'implication (i)⇒(ii) suit du lemme VI.5.5 ; montrons la réciproque. Comme $z \in \Pi^{\mathrm{an}}$, la fonction $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix}x & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot z$ est analytique sur $1 + p^n\mathbf{Z}_p$, si n est assez grand. Il en est donc de même de $x \mapsto \sigma_x(\iota_i(\tilde{z}))$ modulo $\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$, et comme $\iota_i(\tilde{z}) \in \widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$ par hypothèse, cela implique que $\iota_i(z) \in N_{\mathrm{dif},n}$ modulo $\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$. Il en résulte, d'après la prop. VI.4.1, que $\iota_i(\lambda_{k,n} \cdot \tilde{z})$ appartient à $\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ pour tout i, et donc, d'après le lemme VI.5.2, que $\lambda_{k,n} \cdot \tilde{z} \in \widetilde{D}^+$. On en déduit l'appartenance de z à $\Pi^{P-\mathrm{alg}}$, ce qui permet de conclure.

Proposition VI.5.14. — *L'orthogonal de $t^k\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$ dans $\check{\Pi}^{\mathrm{an}}$ est égal à $\check{\Pi}^{\mathrm{an}} \cap \check{\Pi}^{P-\mathrm{alg}}$.*

Démonstration. — Soient $z_1 \in t^k\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$ et $z_2 \in \frac{1}{\varphi(T)^k}\widetilde{D}^+$ dont l'image dans Π appartient à $\Pi^{\mathrm{an}} \cap \Pi^{P-\mathrm{alg}}$. On a alors $[z_1,z_2]_{\mathbf{P}^1} = [z_1,z_2]_{\mathbf{Q}_p}$ car z_1 et z_2 sont les limites respectives de $\mathrm{Res}_{p^{-m}\mathbf{Z}_p} z_1$ et $\mathrm{Res}_{p^{-m}\mathbf{Z}_p} z_2$ dans $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Or $z_1 \in t^k\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$ par hypothèse, et $z_2 \in \widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$, d'après le lemme VI.5.13, ce qui permet d'utiliser le lemme VI.5.11 pour en déduire que $[z_1,z_2]_{\mathbf{Q}_p} = 0$. On en déduit l'inclusion de $\check{\Pi}^{\mathrm{an}} \cap \check{\Pi}^{P-\mathrm{alg}}$ dans $(t^k\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}})^{\perp}$.

Réciproquement, $t^k\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$ contient $t^k\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$ est dense [65] dans $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$, et donc tout élément z_2 de $(t^k\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}})^\perp$ est tué par t^k. Ceci se traduit par le fait que la fonction $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z_2$ est tuée par $\left(\frac{d}{dx}\right)^k$, et comme elle est localement analytique, c'est un polynôme de degré $\leq k-1$ sur $p^n\mathbf{Z}_p$ qui est donc tué par $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & p^n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)^k$, pour n assez grand. On en déduit l'appartenance de z_2 à $\check{\Pi}^{U-\mathrm{alg}}$ et, plus précisément, l'existence d'un relèvement $\tilde{z}_2$ de z_2 dans $\frac{1}{\varphi^n(T)^k}\widetilde{D}^+$. Maintenant, si $z_1 \in \varphi^{i_0-1}(T)^k t^k\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$, on a, grâce au lemme VI.5.11,

$$0 = [z_1, z_2]_{\mathbf{P}^1} = [z_1, z_2]_{\mathbf{Q}_p} = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \delta_D(p^i)[\iota_i(z_1), \iota_i(\tilde{z}_2)]_{\mathrm{dif}}.$$

On a $\iota_i(\tilde{z}_2) \in \widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$, si $i \geq n+1$, et comme $\iota_i(z_1) \in t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}} \subset \widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$, cela implique que $[\iota_i(z_1), \iota_i(\tilde{z}_2)]_{\mathrm{dif}} = 0$, pour tout $i \geq n+1$. Par ailleurs, il résulte du lemme VI.4.12, que si $(a_i)_{i\leq n}$ est une suite d'éléments de $t^k\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}/t^k\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ nulle pour $i < i_0$, il existe $z_1 \in \varphi^{i_0-1}(T)^k t^k\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$ tel que $\iota_i(z_1) = a_i$ modulo $t^k\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$, pour tout $i \leq n$. On en déduit que $\sum_{i\in\mathbf{Z}} \delta_D(p^i)[a_i, \iota_i(\tilde{z}_2)]_{\mathrm{dif}} = 0$, pour toute famille $(a_i)_{i\leq n}$ comme ci-dessus, et donc que $\iota_i(\tilde{z}_2) \in \widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$ pour tout $i_0 \leq i \leq n$, et donc aussi pour tout $i \in \mathbf{Z}$, étant donné que i_0 peut être choisi arbitrairement. Comme ceci implique, d'après le lemme VI.5.13, que $z_2 \in \check{\Pi}^{P-\mathrm{alg}}$, on en déduit l'inclusion $(t^k\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}})^\perp \subset \check{\Pi}^{P-\mathrm{alg}}$, ce qui permet de conclure.

4. Compléments sur les vecteurs localement analytiques. — On peut adapter les démonstrations du (i) de la prop. VI.5.12 et du lemme VI.5.13 pour obtenir des informations sur Π^{an} dans le cas général. On ne suppose donc pas que D est presque de Rham dans ce n°. On définit les objets suivants :

- $\widetilde{D}^{U-\mathrm{fini}}$ (resp. $\widetilde{D}^{U-\mathrm{fini}}_c$), ensemble des $z \in \widetilde{D}$ tels qu'il existe des entiers $n, k \in \mathbf{N}$ (resp. $n, k \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{Z}$) avec $\varphi^n(T)^k z \in \widetilde{D}^+$ (resp. $\varphi^n(T)^k z \in \varphi^a(T)^k\widetilde{D}^+$).
- $\Pi^{U-\mathrm{fini}}$ et $\Pi^{U-\mathrm{fini}}_c$, images de $\widetilde{D}^{U-\mathrm{fini}}$ et $\widetilde{D}^{U-\mathrm{fini}}_c$ par $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+ \to \Pi$; alors $\Pi^{U-\mathrm{fini}}$ est aussi l'ensemble des $z \in \Pi$ tués par une puissance de $\left(\begin{smallmatrix}1 & p^n\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1$, pour $n \gg 0$.
- $\widetilde{D}^{P-\mathrm{fini}}$, ensemble des $z \in \widetilde{D}^{U-\mathrm{fini}}$, tués par un polynôme non nul en γ et $\widetilde{D}^{P-\mathrm{fini}}_c = \widetilde{D}^{P-\mathrm{fini}} \cap \widetilde{D}^{U-\mathrm{fini}}_c$.
- $\Pi^{P-\mathrm{fini}}$ et $\Pi^{P-\mathrm{fini}}_c$, images de $\widetilde{D}^{P-\mathrm{fini}}$ et $\widetilde{D}^{P-\mathrm{fini}}_c$ par $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+ \to \Pi$; alors $\Pi^{P-\mathrm{fini}}$ est aussi l'ensemble des $z \in \Pi^{U-\mathrm{fini}}$ tués par un polynôme en $\left(\begin{smallmatrix}1+p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, pour $n \gg 0$.
- $\widetilde{Y}^- = \widetilde{D}_{\mathrm{dif}}/\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ et, si $n \in \mathbf{N}$, $Y^-_n = D_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n}$. Alors Y^-_n est la somme directe des $t^{-k}D_{\mathrm{dif},n}/t^{1-k}D^+_{\mathrm{dif},n}$, pour $k \geq 1$. On pose $Y^-_\infty = \cup_{n\in\mathbf{N}} Y^-_n$, ce qui fait de Y^-_∞ un sous-$L_\infty[[t]]$-module dense de $\widetilde{Y}^-$ (isomorphe à $(L_\infty((t))/L_\infty[[t]])^2$) obtenu en décomplétant $\widetilde{Y}^-$ à la Sen : Y^-_∞ est l'ensemble des éléments de $\widetilde{Y}^-$ tués par un polynôme en γ.
- Si $z \in \widetilde{D}^{U-\mathrm{fini}}$, on définit une fonction $\phi_z : \mathbf{Q}_p^* \to \widetilde{Y}^-$ par $\phi_z(x) = \iota_0^-\left(\left(\begin{smallmatrix}x & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z\right)$, où ι_0^- est la composée de l'injection naturelle de $\widetilde{D}^+[\frac{1}{\varphi^n(T)}]$ dans $\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}$ avec la projection

[65] Car $\widetilde{D}^+$ est dense dans $(D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ et donc dans $\check{\Pi}^*$ (car $D^{\mathrm{nr}} = 0$).

sur $\widetilde{Y}^-$. Cette fonction est invariante par Γ, à support compact si $z \in \widetilde{D}_c^{U-\mathrm{fini}}$, et l'application $z \mapsto \phi_z$ se factorise à travers $\Pi^{U-\mathrm{fini}}$. De plus, si $z \in \Pi^{P-\mathrm{fini}}$, alors ϕ_z est à valeurs dans Y_∞^-.

• On note $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, Y_\infty^-)^\Gamma$ l'ensemble des fonctions $\phi : \mathbf{Q}_p^* \to Y_\infty^-$, à support compact, invariantes par Γ (ce qui implique qu'elles sont « localement polynomiales », les degrés étant de la forme $\kappa - k$, où κ est un poids de Hodge-Tate de D et k un entier ≥ 1, avec en outre un terme en $\log x$, si les espaces caractéristiques de la connexion ∇ sur Y_n^- ne sont pas des espaces propres (ce qui ne peut se produire que si les deux poids de Hodge-Tate de D diffèrent par un entier)).

On démontre alors les résultats suivants.

Proposition VI.5.15. — (i) $\Pi^{\mathrm{an}} \cap \Pi^{U-\mathrm{fini}} = \Pi^{P-\mathrm{fini}}$.

(ii) *$z \mapsto \phi_z$ induit un isomorphisme* $\Pi_c^{P-\mathrm{fini}} \cong \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, Y_\infty^-)^\Gamma$.

On remarquera que l'action infinitésimale de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $\Pi^{P-\mathrm{fini}}$ peut se lire sur l'action de la connexion ∇ sur Y_∞^-.

VI.6. Détermination des vecteurs localement algébriques. — L'ingrédient principal pour l'étude des vecteurs localement algébriques est la prop. VI.6.11 selon laquelle les modules $M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]}$ et $M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]}$ introduits au § VI.4 sont échangés par w. Compte-tenu de ce que l'on a déjà démontré sur ces modules (prop. VI.4.9), cela permet d'en déduire que $\Pi^{\mathrm{alg}} = 0$ si D n'est pas de Rham (th. VI.6.13). Dans le cas de Rham, cela fournit (prop. VI.6.15) des sous-espaces de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ à partir desquels on peut exhiber des vecteurs localement algébriques non nuls (lemme VI.6.19). La démonstration de la prop. VI.6.11 est un peu acrobatique ; elle utilise :

• la loi de réciprocité de la prop. VI.3.4 qui permet de montrer (lemme VI.6.7) que $\mathscr{C}_{\mathrm{e}} = M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]} \cap \mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ et $\mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}} = M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]} \cap \mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}$ sont les orthogonaux l'un de l'autre pour l'accouplement $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$ modulo ∇_k,

• l'antisymétrie de l'accouplement $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$ (cor. VI.6.2) dont la source est la formule de réciprocité explicite du th. I.5.5 généralisant celle de Perrin-Riou, et dont on déduit (th. VI.6.8) que $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ et $\mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}$ sont échangés par w,

• les liens entre tous les Γ-modules ci-dessus (cor. V.1.13, prop. V.1.18, lemme VI.6.6, cor. VI.6.9, lemme VI.6.10).

1. L'accouplement antisymétrique $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$. — On note $\wedge_{\mathbf{Z}_p^*}$ l'accouplement $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-bilinéaire $(D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \times (D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \to (\wedge^2 D) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ obtenu par convolution multiplicative à partir de $\wedge : D \times D \to \wedge^2 D$ (cf. prop. I.4.6). On note aussi δ le caractère δ_D^{-1}, de telle sorte que $w_D : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est aussi égal à $m_\delta \circ w_*$, où $w : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{Z}_p^*$ est le difféomorphisme $x \mapsto x^{-1}$. Enfin, on rappelle que l'on dispose d'un accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}} : (\check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \times (D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \to \mathscr{E}(\Gamma)$ induisant une dualité parfaite entre $\check{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{C}$ (cf. prop. I.5.3 et th. I.5.5).

Lemme VI.6.1. — (i) *Si $x, y \in D$, alors* $\langle m_\delta(x) \otimes \delta, y \rangle_{\mathbf{Z}_p^*} = m_\delta(x \wedge_{\mathbf{Z}_p^*} y) \otimes \delta$.

(ii) $w_*(w_D(z) \otimes \delta) = \big(\delta(-1) m_\delta(z)\big) \otimes \delta$.

(iii) $d(\langle w_\delta(x)\otimes\delta, y\rangle_{\mathrm{Iw}}) = -\big(\delta(-1)\, m_\delta(x\wedge_{\mathbf{Z}_p^*} y)\big)\otimes\delta$.

Démonstration. — Le (i) est une conséquence immédiate du lemme I.4.9. Le (ii) suit du cor. I.4.8, dont on déduit la formule

$$w_*(w_D(z)\otimes\delta) = \big(\delta(-1)m_{\delta^2}\circ w_*(m_\delta\circ w_*(z))\big)\otimes\delta.$$

Or $w_*\circ m_\delta = m_{\delta^{-1}}\circ w_*$ (conséquence imédiate du (ii) de la prop. I.4.3), et donc

$$m_{\delta^2}\circ w_*\circ m_\delta\circ w_* = (m_{\delta^2}\circ m_{\delta^{-1}})\circ(w_*\circ w_*) = m_\delta.$$

On en déduit le (ii). Le (iii) suit des (i) et (ii), et du th. I.5.5, par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} -d(\langle w_\delta(x)\otimes\delta, y\rangle_{\mathrm{Iw}}) &= \langle w_*(w_{\delta^{-1}}(x)\otimes\delta), y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*} \\ &= \langle\delta(-1)m_\delta(x), y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*} = \big(\delta(-1)\, m_\delta(x\wedge_{\mathbf{Z}_p^*} y)\big)\otimes\delta. \end{aligned}$$

Corollaire VI.6.2. — *L'accouplement* $(x,y)\mapsto[x,y]_{\mathrm{Iw}} = \langle w_D(x)\otimes\delta, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$ *est* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$*-bilinéaire et antisymétrique sur* $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$.

Démonstration. — La bilinéarité de $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$ suit de ce que :

- $\wedge_{\mathbf{Z}_p^*}$ est $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-bilinéaire,
- $z\mapsto m_\delta(z)\otimes\delta$ est $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-linéaire (utiliser le (i) du lemme I.5.3 et le (iii) de la prop. I.4.3 (pour $f = \left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $\alpha=\delta$)).
- $d : \mathscr{O}_{\mathscr{E}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^* \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ est un isomorphisme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-linéaire,
- $d([x,y]_{\mathrm{Iw}}) = -\big(\delta(-1)\, m_\delta(x\wedge_{\mathbf{Z}_p^*} y)\big)\otimes\delta$, d'après le lemme VI.6.1.

L'antisymétrie de $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$ étant une conséquence de celle de $\wedge_{\mathbf{Z}_p^*}$, cela permet de conclure.

Remarque VI.6.3. — $x\mapsto w_D(x)\otimes\delta$ induit un isomorphisme de $\mathscr{C}$ sur $\check{\mathscr{C}}$ (cf. démonstration de la prop. V.2.1 et lemme V.2.2) et on a $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^* = \mathscr{R}(\Gamma)\otimes_{\Lambda(\Gamma)}\mathscr{C}$ et $\check{D}_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^* = \mathscr{R}(\Gamma)\otimes_{\Lambda(\Gamma)}\check{\mathscr{C}}$ (prop. V.1.13), ce qui permet d'étendre la forme bilinéaire $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$ sur $\mathscr{C}\subset D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ en une forme bilinéaire antisymétrique sur $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ (à valeurs dans $\mathscr{R}(\Gamma)$).

2. Action de w_D sur $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ et ses sous-modules. — Soient $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}} = (1-\varphi)D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ et $\mathscr{C}'_{\mathrm{rig}} = (1-\delta_D(p)^{-1}\varphi)D_{\mathrm{rig}}^{\psi=\delta_D(p)^{-1}}$ de telle sorte que $x\mapsto x\otimes\delta_D^{-1}$ induise un isomorphisme $\mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}\cong\check{\mathscr{C}}_{\mathrm{rig}} = (1-\varphi)\check{D}_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$.

Lemme VI.6.4. — (i) $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ *et* $\mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}$ *sont des* $\mathscr{R}^+(\Gamma)$*-modules libres de rang* 2.
(ii) $w_D(\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}) = \mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}$ *et* $w_D(\mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}) = \mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$.

Démonstration. — Le (i) résulte de la prop. V.1.18 (utilisée pour D et $D\otimes\delta_D^{-1}$). Le (ii) s'en déduit en utilisant la prop. V.1.18 et le fait que w_D induit un isomorphisme de $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$ (prop. V.2.1), qui est ι_D-antilinéaire (où $\iota_D : \mathscr{R}^+(\Gamma)\to\mathscr{R}^+(\Gamma)$ est l'involution habituelle : $\iota_D(\sigma_a) = \delta_D(a)\sigma_{a^{-1}}$).

Remarque VI.6.5. — (i) Comme $\check{\mathscr{C}}_{\mathrm{rig}} = \mathscr{R}^+(\Gamma)\otimes_\Lambda \check{\mathscr{C}}$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}} = \mathscr{R}^+(\Gamma)\otimes_\Lambda \mathscr{C}$, on peut étendre l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$ de la prop. I.5.3 par linéarité en un accouplement de $\check{\mathscr{C}}_{\mathrm{rig}}\times\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ dans $\mathscr{R}^+(\Gamma)$. Cet accouplement est antilinéaire en la première variable et linéaire en la seconde et parfait d'après les (iii) et (iv) de la prop. I.5.3. De plus, la formule

$$\int_{\Gamma_n}\eta^{-1}\langle x,y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \Big\{x, \frac{-\tau_n(\gamma_n)}{\eta(\gamma_n)\gamma_n-1}\cdot y\Big\}$$

de la prop. I.5.4 reste valable (par continuité).

(ii) Traduit en termes de l'accouplement, $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$ de la rem. VI.6.3, on obtient que $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$ est un accouplement, à valeurs dans $\mathscr{R}^+(\Gamma)$, bilinéaire, antisymétrique et parfait sur $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$. De plus, si $\eta:\Gamma\to\mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu, et si $n\geq 1$, on a

$$\int_{\Gamma_n}\eta^{-1}[x,y]_{\mathrm{Iw}} = \Big[w_D(x), \frac{-\tau_n(\gamma_n)}{\eta(\gamma_n)\gamma_n-1}\cdot y\Big].$$

Soit $\mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}\subset\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ l'image de $(t^kN_{\mathrm{rig}})^{\psi=1}$ par $1-\varphi$, et soit $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ l'image de $(\varphi-1)N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ par ∇_k. On a $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}\subset\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ grâce à la prop. VI.4.2.

De même, soit $\mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}\subset\mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}$ l'image de $(t^kN_{\mathrm{rig}})^{\psi=\delta_D(p)^{-1}}$ par $(1-\delta_D(p)^{-1}\varphi)$, et soit $\mathscr{C}'_{\mathrm{e}}$ l'image par ∇_k de $(1-\delta_D(p)^{-1}\varphi)N_{\mathrm{rig}}^{\psi=\delta_D(p)^{-1}}$. On a $\mathscr{C}'_{\mathrm{e}}\subset\mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}$ comme ci-dessus.

Lemme VI.6.6. — (i) *Les $\mathscr{R}^+(\Gamma)$-modules $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}/\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}/\nabla_k\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ sont isomorphes à $\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k$.*

(ii) *Les $\mathscr{R}^+(\Gamma)$-modules $\mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}/\mathscr{C}'_{\mathrm{e}}$ et $\mathscr{C}'_{\mathrm{e}}/\nabla_k\mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}$ sont isomorphes à $\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k$.*

Démonstration. — D'après la prop. VI.4.15, le $\mathscr{R}^+(\Gamma)$-module $N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}/D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ est isomorphe à $X^-\boxtimes\mathbf{Q}_p$. Comme $x\mapsto\nabla_k(1-\varphi)x$ induit un isomorphisme de $N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}/D_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ sur $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}/\nabla_k\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$, et comme $X^-\boxtimes\mathbf{Q}_p\cong\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k$ d'après le lemme VI.4.6, on a $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}/\nabla_k\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}\cong\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k$. On conclut la démonstration du (i) en utilisant le fait que $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}/\nabla_k\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}\cong(\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k)^2$, puisque $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ est un $\mathscr{R}^+(\Gamma)$-module libre de rang 2.

Le (ii) se déduit du (i) appliqué à $\check{D}=D\otimes\delta_D^{-1}$.

Lemme VI.6.7. — (i) *Si $z'\in\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $[z',z]_{\mathrm{Iw}}\in\nabla_k\mathscr{R}^+(\Gamma)$, *pour tout $z\in\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$;*

(b) $w_D(z')\in\mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}$.

(ii) *L'image dans $\mathscr{R}^+(\Gamma)$ de $w_D(\mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}})\times\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ par $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$ est $\nabla_k\mathscr{R}^+(\Gamma)$.*

Démonstration. — On a $[z',z]_{\mathrm{Iw}}\in\nabla_k\mathscr{R}^+(\Gamma)$, si et seulement si, pour tout $n\gg 0$, tout $i\in\{0,\dots,k-1\}$ et tout $\sigma\in\Gamma$, on a $\int_{\sigma\Gamma_n}\chi^i\,[z',z]_{\mathrm{Iw}}=0$. Or $\int_{\sigma\Gamma_n}\chi^i\,[z',z]_{\mathrm{Iw}}$ est égal à $\chi(\sigma)^{-i}\int_{\Gamma_n}\chi^i\,\sigma\cdot[z',z]_{\mathrm{Iw}}$, et comme $\sigma\cdot[z',z]_{\mathrm{Iw}}=[z',\sigma z]_{\mathrm{Iw}}$, on voit que $[z',z]_{\mathrm{Iw}}\in\nabla_k\mathscr{R}^+(\Gamma)$, si et seulement si $\int_{\Gamma_n}\chi^i\,[z',\sigma z]_{\mathrm{Iw}}=0$, pour tout $n\gg 0$, tout $i\in\{0,\dots,k-1\}$ et tout $\sigma\in\Gamma$. Or d'après la rem. VI.6.5,

$$\int_{\Gamma_n}\chi^i\,[z',\sigma z]_{\mathrm{Iw}} = \Big[w_D(z'), \frac{-\tau_n(\gamma_n)}{\chi(\gamma_n)^{-i}\gamma_n-1}\sigma z\Big].$$

Maintenant, comme $\sigma \cdot z \in \mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, il existe $y \in N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$ tel que $\sigma z = \nabla_k(\varphi-1)y$. De même, il existe $y' \in \check{D}_{\mathrm{rig}}^{\psi=\delta_D(p)^{-1}}$ tel que $w_D(z') = (1-\delta_D(p)^{-1}\varphi)y'$. Par ailleurs, l'appartenance de $\frac{\nabla_k}{\chi(\gamma_n)^{-i}\gamma_n-1}$ à $\mathscr{R}^+(\Gamma)$, implique que

$$\frac{\tau_n(\gamma_n)}{\chi(\gamma_n)^{-i}\gamma_n-1}\sigma z = (\varphi-1)y_{n,i}, \text{ avec } y_{n,i} = \frac{-\tau_n(\gamma_n)\nabla_k}{\chi(\gamma_n)^{-i}\gamma_n-1}y \in N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}.$$

On est donc sous les conditions d'application de la prop. VI.3.4 ; on en déduit que

$$\left[w_D(z'), \frac{-\tau_n(\gamma_n)}{\chi(\gamma_n)^{-i}\gamma_n-1}\sigma z\right] = \langle \sigma_{-1}(\iota_n(y')\otimes\delta_D^{-1}), \iota_n(y_{n,i})\rangle_{\mathrm{dif}} = \delta_D(p)^n[\iota_n(y'),\iota_n(y_{n,i})]_{\mathrm{dif}}.$$

Or $z \mapsto \iota_n(y_{n,i})$ induit une surjection de $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ sur $L_n \otimes (t^i D_{\mathrm{pdR}}/D_{\mathrm{pdR}}^+)$ d'après la prop. VI.4.15 et $\iota_n(y') \in D_{\mathrm{dif},n}^+$. On en déduit que z' vérifie la condition (a) si et seulement si $\iota_n(y')$ appartient à l'orthogonal de $N_{\mathrm{dif},n}$ dans $D_{\mathrm{dif},n}$, pour tout $n \gg 0$. Comme cet orthogonal est $t^k N_{\mathrm{dif},n}$ (cf. lemme VI.4.16), cette condition équivaut à $y' \in (t^k N_{\mathrm{rig}})^{\psi=\delta_D(p)^{-1}}$, et donc aussi à $w_D(z') = (1-\delta_D(p)^{-1}\varphi)y' \in \mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}$. Ceci démontre le (i).

L'inclusion de l'image de $w_D(\mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}) \times \mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ dans $\nabla_k\mathscr{R}^+(\Gamma)$ suit du (i). Maintenant $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$ est un accouplement parfait de $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}} \times \mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ dans $\mathscr{R}^+(\Gamma)$. Comme $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}/\mathscr{C}_e$ est isomorphe à $\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k$, et comme $\mathscr{R}^+(\Gamma)$ est de Bézout, on peut trouver une base e_1, e_2 de $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ telle que $e_1, \nabla_k e_2$ soit une base de $\mathscr{C}_e$ sur $\mathscr{R}^+(\Gamma)$, et comme $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$ est parfait, on peut trouver $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ tel que $[f,e_2]_{\mathrm{Iw}} = 1$. On a alors $w_D(\nabla_k f) \in \mathscr{C}'_{p-e}$ et donc $\nabla_k f \in w_D(\mathscr{C}'_{p-e})$ (cela suit de la prop. VI.4.2 et de ce que $w_D \circ \nabla_k = (-1)^k \nabla_k \circ w_D$ d'après le lemme VI.4.3), et $[\nabla_k f, e_2]_{\mathrm{Iw}} = \nabla_k$ (par linéarité). On en déduit l'inclusion inverse, ce qui permet de conclure.

Théorème VI.6.8. — (i) *On a* $w_D(\mathscr{C}_{\mathrm{e}}) = \mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}$ *et* $w_D(\mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}) = \mathscr{C}'_{\mathrm{e}}$.

(ii) *On a* $w_D(\mathscr{C}'_{\mathrm{e}}) = \mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}$ *et* $w_D(\mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}) = \mathscr{C}_{\mathrm{e}}$.

Démonstration. — Comme $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}/\mathscr{C}_{\mathrm{e}} \cong \mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k$, la théorie des diviseurs élémentaires montre qu'il existe une base e_1, e_2 de $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ sur $\mathscr{R}^+(\Gamma)$ telle que $\nabla_k e_1, e_2$ soit une base de $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ sur $\mathscr{R}^+(\Gamma)$. L'accouplement $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$ étant parfait et antisymétrique, on a $[e_1,e_1]_{\mathrm{Iw}} = 0$, $[e_2,e_2]_{\mathrm{Iw}} = 0$ et $[e_1,e_2]_{\mathrm{Iw}}$ est une unité de $\mathscr{R}^+(\Gamma)$. Ceci implique que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $z' \in w_D(\mathscr{C}_{\mathrm{e}})$,
- $w_D(z')$ appartient au sous-$\mathscr{R}^+(\Gamma)$-module de $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ engendré par e_1 et e_2,
- $[w_D(z'), z]_{\mathrm{Iw}} \in \nabla_k\mathscr{R}^+(\Gamma)$, pour tout $z \in \mathscr{C}_{\mathrm{e}}$.

Comme cette dernière condition équivaut à $w_D(w_D(z')) = z' \in \mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}$ d'après le lemme VI.6.7, on en déduit la première des égalités à démontrer. Les autres s'en déduisent en utilisant le fait que w_D est une involution et en échangeant les rôles de D et $\check{D} = D \otimes \delta_D^{-1}$.

Corollaire VI.6.9. — (i) *Les* $\mathscr{R}^+(\Gamma)$*-modules* $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}/\mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}$ *et* $\mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}/\nabla_k\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$ *sont isomorphes à* $\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k$.

(ii) *Les* $\mathscr{R}^+(\Gamma)$*-modules* $\mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}/\mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}$ *et* $\mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}/\nabla_k\mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}$ *sont isomorphes à* $\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k$.

Démonstration. — C'est, compte-tenu du th. VI.6.8, une conséquence du lemme VI.6.6.

Lemme VI.6.10. — *Soit $a \geq m(D)$.*

(i) *On a $M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]} = \mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma) \otimes_{\mathscr{R}^+(\Gamma)} \mathscr{C}_{p-e}$ et $M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]} = \mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma) \otimes_{\mathscr{R}^+(\Gamma)} \mathscr{C}'_{p-e}$.*

(ii) *On a $M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]} = \mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma) \otimes_{\mathscr{R}^+(\Gamma)} \mathscr{C}_{e}$ et $M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]} = \mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma) \otimes_{\mathscr{R}^+(\Gamma)} \mathscr{C}'_{e}$.*

Démonstration. — Un élément z de $(t^k N_{\mathrm{rig}})^{\psi=1}$ vérifie $\varphi^{-n}(z) \in t^k N_{\mathrm{dif},n}$ (c'est vrai pour tout $z \in t^k N_{\mathrm{rig}}$), si n est assez grand, et son invariance par ψ, qui se traduit par la relation $\varphi^{1-n}(z) = \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_n/F_{n-1}}\varphi^{-n}(z)$, implique $\varphi^{-n}(z) \in t^k N_{\mathrm{dif},n}$, pour tout $n \geq m_0(D)$. On en déduit $\mathscr{C}_{p-e} \subset M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]}$, et $\mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma) \otimes_{\mathscr{R}^+(\Gamma)} \mathscr{C}_{p-e} \subset M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]}$; l'inclusion inverse suit des lemmes VI.4.8 et VI.6.6. L'argument étant le même pour $\mathscr{C}'_{p-e}$, cela démontre le (i). Le (ii) se démontrant de même, en remplaçant les lemmes VI.4.8 et VI.6.6 par les cor. VI.4.10 et VI.6.9, cela permet de conclure.

Proposition VI.6.11. — *$w_D(M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]}) = M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]}$ et $w_D(M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]}) = M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]}$.*

Démonstration. — Cela découle de la combinaison du th. VI.6.8 et du lemme VI.6.10, en utilisant, comme d'habitude, l'antilinéarité de l'action de Γ.

3. Une condition nécessaire pour la non nullité de Π^{alg}. — Soit $r = r_{m(D)}$, et soit $M_{\mathrm{e}} = (D^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) + (\cup_{n\in\mathbf{N}} \lambda_{k,n}^{-1}\mathscr{C}_{\mathrm{e}})$, où la réunion est croissante puisque $\lambda_{k,n}$ divise $\lambda_{k,n+1}$, et tous les termes (et donc M_e aussi) sont inclus dans $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ qui est un $\mathscr{R}(\Gamma)$-module. Comme $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ est l'image de $(N^{]0,r]})^{\psi=1}$ par $x \mapsto \nabla_k(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} x)$, et comme $\lambda_{k,n}$ divise ∇_k, le module $\cup_{n\in\mathbf{N}} \lambda_{k,n}^{-1}\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ est inclus dans $N^{]0,r]}$. On en déduit, si $x \in \cup_{n\in\mathbf{N}} \lambda_{k,n}^{-1}\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, l'appartenance de $\iota_i(x)$ à $N_{\mathrm{dif}} \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*$, pour tout $i \geq m(D)+1$. L'image $\iota_i^-(x)$ de $\iota_i(x)$ modulo $D_{\mathrm{dif},i}^+$ appartient donc à $X^- \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*$. De plus, si $x \in \lambda_{k,n}^{-1}\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, alors $\iota_i^-(x) = 0$ si $i \geq n+1$ car $\iota_i^-(x)$ est tué par $\lambda_{k,n}$, et $\lambda_{k,n}$ est injectif sur $X^- \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*$, si $i \geq n+1$ (lemme VI.4.5). Ceci nous fournit une application

$$\iota^- : M_{\mathrm{e}} \to \oplus_{i\geq m(D)+1}(X^- \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*) \quad \text{avec } \iota^-(x) = (\iota_i^-(x))_{i\geq m(D)+1},$$

dont le noyau est $D^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.

Lemme VI.6.12. — (i) *$\iota^- : M_{\mathrm{e}}/(D^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \to \oplus_{i\geq m(D)+1}(X^- \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*)$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si $z \in \widetilde{D}^{P-\mathrm{alg}}$, alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} z \in M_{\mathrm{e}}$.*

(iii) *Si $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$, alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ induit une surjection de Π^{alg} sur $M_{\mathrm{e}}/(D^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)$.*

Démonstration. — (i) Il suffit de prouver la surjectivité de ι^-. Soit donc $(\overline{z}_i)_{i\geq m(D)+1}$ appartenant à $\oplus_{i\geq m(D)+1}(X^- \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*)$. Il existe n tel que $\overline{z}_i = 0$, pour tout $i \geq n$. Soit $\overline{z} = \sum_{i=m(D)+1}^{n} \overline{z}_i \in X_n^-$. Comme $\lambda_{k,n}^{-1}\nabla_k$ est inversible sur X_n^- (lemme VI.4.5), il existe $\overline{x} \in X_n^-$ tel que $\lambda_{k,n}^{-1}\nabla_k\overline{x} = \overline{z}$. Par ailleurs, d'après la prop. VI.4.15, il existe $\tilde{x} \in (N^{]0,r]})^{\psi=1}$, tel que $\iota_n^-(\tilde{x}) = \overline{x}$. Soit $x' = \lambda_{k,n}^{-1}\nabla_k\tilde{x}$ et soit $x = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} x'$. Par construction, on a $\lambda_{k,n}x' \in \nabla_k N_{\mathrm{rig}}^{\psi=1}$, ce qui fait que $x \in \lambda_{k,n}^{-1}\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$. De plus, on a

$\iota_i(x) = \mathrm{Res}_{p^{-i}\mathbf{Z}_p^*}(\iota_i(x')) = \mathrm{Res}_{p^{-i}\mathbf{Z}_p^*}(\iota_m(x'))$ pour tout $m \geq i$ (la première égalité vient de ce que $x = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}x'$, et la seconde de ce que x' est fixe par ψ, et donc $\iota_i(x') = \mathrm{Res}_{p^{-i}\mathbf{Z}_p}(\iota_m(x'))$). On en déduit que

$$\iota_i^-(x) = \mathrm{Res}_{p^{-i}\mathbf{Z}_p^*}(\iota_i^-(x')) = \mathrm{Res}_{p^{-i}\mathbf{Z}_p^*}(\lambda_{k,n}^{-1}\nabla_k\iota_n^-(\tilde{x}))$$
$$= \mathrm{Res}_{p^{-i}\mathbf{Z}_p^*}(\overline{z}) = \begin{cases} \overline{z}_i & \text{si } m(D)+1 \leq i \leq n, \\ 0 & \text{si } i \geq n+1. \end{cases}$$

Ceci prouve la surjectivité de ι^- et termine la démonstration du (i).

(ii) Si $z \in (D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Q}_p)^{P-\mathrm{alg}}_{\mathrm{pc}}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi^n(T)^k z \in \widetilde{D}^+$ et $\lambda_{k,n}z \in \widetilde{D}^+$. Alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z) \in \frac{1}{\varphi^n(T)^k}D^\natural$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z) = (1-\varphi\psi)z \in \frac{1}{\varphi^n(T)^k}(D^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)$, et donc $\iota_i(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z)) \in t^{-k}D^+_{\mathrm{dif}} \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*$. Or $\lambda_{k,n}$ est injective sur $(t^{-k}D^+_{\mathrm{dif}}/N_{\mathrm{dif}}) \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*$, pour tout i (les poids de Hodge-Tate de $t^{-k}D^+_{\mathrm{dif}}/N_{\mathrm{dif}}$ sont < 0), et sur $X^- \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*$, si $i \geq n+1$ (lemme VI.4.5). On en déduit que $\iota_i(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z)) \in N_{\mathrm{dif}} \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*$, pour tout i, et $\iota_i^-(z) = 0$, si $i \geq n+1$. L'appartenance de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}z$ à M_{e} suit alors du (i).

(iii) Grâce au (i), il suffit de prouver que $\iota^- \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ induit une surjection de Π^{alg} sur $\oplus_{i \geq m(D)+1}(X^- \boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p^*)$. Or on a $\iota_i(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}z) = \mathrm{Res}_{p^{-i}\mathbf{Z}_p^*}\left(\left(\begin{smallmatrix} p^{-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right)$. On en déduit, en regardant modulo $D^+_{\mathrm{dif},i}$, la relation $\iota_i^-(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}z) = \mathrm{Res}_{p^{-i}\mathbf{Z}_p^*}(\phi_z(p^{-i}))$. Le résultat suit de ce que l'image de $z \mapsto \phi_z$ contient $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma$ d'après le cor. VI.5.9.

Théorème VI.6.13. — *Si D n'est pas de Rham, alors $\Pi^{\mathrm{alg}} = 0$.*

Démonstration. — Si $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$, alors D est presque de Rham à poids de Hodge-Tate distincts (prop. VI.5.1), et on peut, quitte à tordre par un caractère algébrique, supposer que les poids de Hodge-Tate sont 0 et $k \geq 1$.

Soit alors $(D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)^{\mathrm{alg}}$ l'image inverse de Π^{alg} dans $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Il résulte du (ii) du lemme VI.6.12 que l'image Y de $(D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)^{\mathrm{alg}}$ par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ est incluse dans M_{e}. Notons, comme pour la prop. VI.4.9, $M_{\mathrm{e}}^{]0,r]}$ et $M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r]}$ respectivement, les modules $\nabla_k \cdot (N^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)$ et $t^k N^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. On a :

- $\nabla_k(Y) \subset M_{\mathrm{e}}^{]0,r]}$ car $Y \subset M_{\mathrm{e}} \subset N^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$,
- $\nabla_k(Y) \subset M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r]}$, car Y est stable par w_D puisque $(D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)^{\mathrm{alg}}$ est stable par w, et que $\nabla(M_{\mathrm{e}}^{]0,r]}) = M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r]}$, d'après la prop. VI.6.11.

On en déduit, grâce à la prop. VI.4.9, que $Y \subset D^{]0,r]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ (ce qui implique que $\iota^-(Y) = 0$), si D n'est pas de Rham. On conclut à la nullité de Π^{alg} en utilisant le (iii) du lemme VI.6.12.

4. Dévissage du module $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$. — *On suppose dorénavant que D est de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et $k \geq 1$.* On a alors $D_{\mathrm{pdR}} = D_{\mathrm{dR}}$.

Lemme VI.6.14. — *$\mathscr{C}_{\mathrm{e}} = \mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}$ et $\mathscr{C}'_{\mathrm{e}} = \mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}$.*

Démonstration. — On a $\mathscr{C}_{\mathrm{e}} \subset \mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}$ (cela suit du (i) de la prop. VI.4.2), et comme $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}/\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}/\mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}$ sont tous deux isomorphes à $\mathscr{R}^+(\Gamma)/\nabla_k$, la surjection naturelle de $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}/\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}/\mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}$ est un isomorphisme, ce qui permet de prouver la première égalité. La seconde se démontrant de la même manière, cela permet de conclure.

Proposition VI.6.15. — (i) $t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]}$, *pour* $a \geq m(D)$, *et* $t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ *sont stables par* w_D.

(ii) $t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1$ *est stable par* $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, *pour tout* $a \geq m(D)$.

(iii) $t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ *est stable par* G.

Démonstration. — Le (i) suit de la prop. VI.6.11 et du (ii) de la prop. VI.4.9.

Le (ii) suit, grâce au lemme II.1.10, de ce que $\psi(t^k N^{]0,r_a]}) = t^k N^{]0,r_{a-1}]}$, et $\varphi(t^k N^{]0,r_{a-1}]}) \subset t^k N^{]0,r_a]}$, si $a \geq m(D) - 1$.

Le (iii) est une conséquence du (i) et de ce que $t^k N_{\mathrm{rig}}$ est stable par φ et ψ, ce qui permet d'utiliser la prop. II.1.9.

Lemme VI.6.16. — (i) *Si* $a \geq m(D)$, *l'opérateur* ∇_k *induit un isomorphisme de* $\mathscr{E}^{]0,r_a]}(\Gamma)$*-modules de* $N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ *sur* $t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.

(ii) *L'opérateur* ∇_k *induit un isomorphisme de* $\mathscr{R}(\Gamma)$*-modules de* $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ *sur* $(t^k N_{\mathrm{rig}}) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.

Démonstration. — Le (i) est une réécriture du (ii) de la prop. VI.4.9. Le (ii) s'en déduisant par limite inductive, cela permet de conclure.

Le lemme VI.6.16 permet de prolonger l'opérateur w_D à $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, grâce à la formule $w_D(x) = (-1)^k \nabla_k^{-1}(w_D(\nabla_k \cdot x))$, ce qui a un sens car $(t^k N_{\mathrm{rig}}) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est stable par w_D d'après la prop. VI.6.15, et est bien un prolongement de w_D puisque $w_D \circ \nabla_k = (-1)^k \nabla_k \circ w_D$ sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ d'après le lemme VI.4.3. Par ailleurs, il résulte du (iii) du lemme VI.4.16 que $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est le dual de $t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, et comme $t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est muni d'une action de G ((iii) de la prop. VI.6.15), cela munit, par dualité, $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ d'une action de G. Cette action est décrite par les formules du squelette d'action à partir de l'action sur $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. Or w agit Γ-antilinéairement ; on en déduit que son action sur $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est précisément celle que l'on vient de définir. En résumé, on a le résultat suivant.

Lemme VI.6.17. — *L'action de* G *sur* $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ *qui se déduit, par dualité, de l'action de* G *sur* $t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ *est celle que l'on obtient, via les formules du squelette d'action, en utilisant l'action de* w_D *ci-dessus.*

5. Existence de vecteurs localement algébriques. — Dans tout ce qui suit, ∇_k désigne indifféremment l'élément de $\mathscr{R}^+(\Gamma)$, où celui de $\mathscr{D}(\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$ qui lui correspond via l'isomorphisme $\sigma_a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. L'action de ∇_k sur $(z_1, z_2) \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est donc donnée par la formule

$$\nabla_k \cdot (z_1, z_2) = (\nabla_k \cdot z_1, (-1)^k \nabla_k \cdot z_2).$$

Théorème VI.6.18. — *Si D est de Rham, à poids de Hodge-Tate distincts, alors $\mathbf{\Pi}(D)^{\mathrm{alg}} \neq 0$.*

Démonstration. — Quitte à tordre par une puissance du caractère cyclotomique, on peut supposer que les poids de Hodge-Tate sont 0 et k. Par ailleurs, si on note Π la représentation $\mathbf{\Pi}(D)$, la non vacuité de Π^{alg} équivaut à celle de $\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}$, puisque $z \mapsto z \otimes \delta_D$ est un isomorphisme de Π sur $\check{\Pi}$ qui préserve les vecteurs localement algébriques étant donné que δ_D est un caractère localement algébrique. Le théorème est donc une conséquence du lemme VI.6.19 ci-dessous.

Si $a \geq m(D)$, soit $W_a = (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* \cap (t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1)$.

Lemme VI.6.19. — *Si $a \geq m(D)$, alors :*
(i) *W_a est fermé et strictement inclus dans $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$.*
(ii) *W_a contient $\nabla_k \cdot (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$.*
(iii) *L'orthogonal $W_a^{\perp} \subset \check{\Pi}^{\mathrm{an}}$ de W_a est inclus dans $\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}$ et n'est pas réduit à 0.*

Démonstration. — W_a est l'ensemble des $(z_1, z_2) \in (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* \subset D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1$ vérifiant $\iota_n(z_i) \in t^k N_{\mathrm{dif},n}$ pour tout $n \geq a$, si $i = 1$ ou 2. C'est donc un fermé en tant qu'intersection de fermés (les applications ι_n sont continues ainsi $z \mapsto z_i$). Il n'est pas égal à $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ car $z \mapsto z_1 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z$ induit une surjection de de $\check{\Pi}^* \subset (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ sur $D^\natural$, ι_n induit une surjection de $D^\natural$ sur $D^+_{\mathrm{dif},n}$ et $t^k N_{\mathrm{dif},n}$ est strictement inclus dans $D^+_{\mathrm{dif},n}$.

(ii) ∇_k envoie $D^+_{\mathrm{dif},n}$ dans $t^k N_{\mathrm{dif},n}$ (cf. prop. VI.4.2) et commute (au signe près) avec $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. On déduit de la première propriété que $\nabla_k z \in t^k N^{]0,r_a]}$, si $z \in D^{]0,r_a]}$, et de la seconde, via le (ii) de la prop. VI.6.15, que si $z \in D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1$, alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w(\nabla_k z)) = (-1)^k \nabla_k(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot z) \in t^k N^{]0,r_a]}$. Ceci implique que l'on a l'inclusion $\nabla_k(D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1) \subset t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Par ailleurs, $\nabla_k \in \mathscr{D}(K_m)$ pour tout $m \in \mathbf{N}$ puisque ∇_k est la limite, quand x tend vers 1, de l'opérateur $\prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{x-1}\left(\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - x^i\right)\right)$, et donc $\nabla_k((\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*) \subset (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$. Comme $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* \subset D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1$ (rem. V.2.21), on a $\nabla_k \cdot (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* \subset (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* \cap (t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1) = W_a$, ce qui démontre le (ii).

(iii) $W_a^{\perp}$ n'est pas réduit à 0 car W_a est un fermé strict de $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$. De plus, il est stable par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ puisque W_a l'est (prop. VI.6.15 (ii)). Enfin, comme W_a contient $\nabla_k(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$, cela implique que tout élément de $W_a^{\perp}$ est tué par ∇_k. Maintenant, si on note $\phi_{\mu,z}(x)$, pour $\mu \in (\Pi^{\mathrm{an}})^*$, et $z \in \Pi^{\mathrm{an}}$, la fonction $x \mapsto \langle \mu, \left(\begin{smallmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z \rangle$, on a $\phi_{\mu,\nabla_k z}(x) = (1+x)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k \phi_{\mu,z}(x)$ (on a $\nabla = \lim_{a \to 1} \frac{1}{a-1}\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)$, et comme $\lim_{a \to 1} \frac{1}{a-1}(f(a(1+x)) - f(1+x)) = (1+x)\frac{df}{dx}(1+x)$, on en déduit la formule par une récurrence immédiate sur k). On en déduit que si $z \in W_a^{\perp}$, alors $\phi_{\mu,z}(x)$ est tuée par $\left(\frac{d}{dx}\right)^k$, et comme elle est localement analytique, cela implique qu'elle est localement polynomiale. Ceci permet d'utiliser la prop. VI.2.3 pour conclure que $W_a^{\perp}$ est constitué de vecteurs localement algébriques, et donc inclus dans $\check{\Pi}_{\mathrm{alg}}$. Ceci termine la démonstration du (iii) et donc du lemme.

6. Description des vecteurs localement algébriques. — On note Π_c^{alg} l'image inverse de $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma$ dans Π^{alg} par $z \mapsto \phi_z$. On a donc une suite exacte (cf. lemme VI.2.7)

$$0 \to \Pi_c^{\mathrm{alg}} \to \Pi^{\mathrm{alg}} \to J(\Pi^{\mathrm{alg}}) \to 0,$$

où le *module de Jacquet* $J(\Pi^{\mathrm{alg}})$ de Π^{alg} est de la forme $\mathrm{Sym}^{k-1} \otimes J_0(\Pi^{\mathrm{alg}})$, et $J_0(\Pi^{\mathrm{alg}}) = \{z \in J(\Pi^{\mathrm{alg}}),\ \nabla z = 0\}$ est un $L[B]$-module de dimension 0, 1 ou 2 sur L.

Remarque VI.6.20. — Si on note Π_U^{alg} le sous-B-module de Π^{alg} engendré par les $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) - 1\right)\cdot v$, avec $b \in \mathbf{Q}_p$ et $v \in \Pi^{\mathrm{alg}}$, alors Π_U^{alg} contient Π_c^{alg} et l'application naturelle $J_0(\Pi^{\mathrm{alg}}) \to \Pi^{\mathrm{alg}}/\Pi_U^{\mathrm{alg}}$ qui s'en déduit est un isomorphisme.

On a $t^k\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+ \subset \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$, et comme $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$ est un sous-module de $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ (lemme V.2.17), le $L[B]$-module $t^k\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$ est inclus dans $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$. On note $t^kN_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ l'adhérence[(66)] dans $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ du $L[G]$-module engendré par $t^k\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$.

Proposition VI.6.21. — *$t^kN_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est l'orthogonal de $\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}$.*

Démonstration. — D'après la prop. VI.5.14, $t^k\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$ est orthogonal à $\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}$ (et même à $\check{\Pi}^{P-\mathrm{alg}}$) ; on en déduit l'inclusion $t^kN_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 \subset (\check{\Pi}^{\mathrm{alg}})^\perp$.

Montrons l'inclusion dans l'autre sens. On a $(t^k\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+)^\perp = \check{\Pi}^{P-\mathrm{alg}}$ (prop. VI.5.14), donc $(t^kN_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)^\perp \subset \check{\Pi}^{P-\mathrm{alg}}$, et comme $\check{\Pi}^{P-\mathrm{alg}}$ est tué par ∇_k, il en est de même de $(t^kN_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)^\perp$. Comme d'autre part, $(t^kN_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)^\perp$ est stable par G, il est inclus dans $\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}$ d'après la démonstration du lemme VI.6.19 (une stabilité par un sous-groupe ouvert compact de G suffirait). Enfin, comme $t^kN_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est fermé par construction, il est égal à son biorthogonal d'après le théorème de Hahn-Banach (cf. (ii) de la rem. I.1.5) ; il contient donc l'orthogonal de $\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}$ d'après ce qui précède, ce qui permet de conclure.

On a $t^kN_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 \subset t^kN_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ (cela suit de son orthogonalité à $\Pi_c^{\mathrm{alg}} = \Pi_c^{P-\mathrm{alg}}$, et de la formule du (ii) de la prop. VI.5.12) ; on peut donc considérer son orthogonal[(67)] dans $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, que l'on note $N_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, et on a

$$\Pi^{\mathrm{alg}} = \big((D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (N_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)\big)/D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1.$$

En effet, si $v \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $v \in N_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$,

(ii) v est orthogonal à $t^kN_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$,

---

(66) Il est probable que $t^kN_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 = t^k\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+ + w(t^k\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+)$ de la même manière que $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* = D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est égal à $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+ + w\cdot\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$.

(67) Il est probable que $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 = \widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+ + w\cdot\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^+$.

(iii) l'image de v dans Π^{an} est orthogonale à $t^k N_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$,

(iv) l'image de v dans Π^{an} appartient à Π^{alg}.

(On a (i)$\Leftrightarrow$(ii) par définition de $N_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$; (ii)$\Leftrightarrow$(iii) car $\Pi^{\mathrm{an}} = D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 / D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est orthogonal à $t^k N_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$ (et même à $D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$) ; enfin (iii)$\Leftrightarrow$(iv) suit de la prop. VI.6.21 par dualité.)

Théorème VI.6.22. — *Le sous-module*

$$\big((t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (N_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big) / \big((t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big)$$

de Π^{an} *est égal à* Π^{alg}.

Démonstration. — Nous allons avoir besoin d'un peu de préparation.

Lemme VI.6.23. — $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ *est dense dans* $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Démonstration. — Cela suit de ce que $t^k \mathscr{R}$ est dense dans $\mathscr{R}$. En effet, si $x \in \mathscr{R}$, et si $x_n = \big(\frac{p^n t}{\varphi^n(T)}\big)x$, alors $x_n \in t\mathscr{R}$ et $x_n \to x$ puisque $\frac{p^n t}{\varphi^n(T)}$ tend vers 1 dans $\mathscr{R}^+$.

Si $x \in N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, on a $\nabla_k \cdot x \in t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ (cela suit du (i) de la prop. VI.4.2). Ceci permet, grâce au lemme VI.4.16, de définir $[\nabla_k \cdot x, y]$ et $[x, \nabla_k \cdot y]$, si $x, y \in N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Lemme VI.6.24. — *On a* $[\nabla_k \cdot x, y] = (-1)^k [x, \nabla_k \cdot y]$ *pour tous* $x, y \in N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Démonstration. — Si $x, y \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, on a

$$\begin{aligned}[\nabla x, y] = \{\nabla x \otimes \delta_D^{-1}, y\} &= \{\nabla(x \otimes \delta_D^{-1}) + (k-1)x \otimes \delta_D^{-1}, y\} \\ &= \{x \otimes \delta_D^{-1}, ((k-1) - \nabla)y\} = [x, ((k-1) - \nabla)y].\end{aligned}$$

Comme $\nabla_k = \prod_{i=0}^{k-1}(\nabla - i)$, on en déduit la formule pour $x, y \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Le résultat s'en déduit grâce à la densité de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ dans $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, et à la continuité de toutes les applications en présence.

Lemme VI.6.25. — (i) $\nabla_k \cdot (D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1) \subset t^k N_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$

(ii) $\nabla_k \cdot (N_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1) \subset D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Démonstration. — Comme $(D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1)/(t^k N_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1) = (\check{\Pi}^{\mathrm{alg}})^*$, le (i) suit de ce que $\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}$ est tué par ∇_k et donc son dual aussi.

Maintenant, si $x \in N_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $y \in D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$, on a $[\nabla_k \cdot x, y] = (-1)^k [x, \nabla_k \cdot y] = 0$, puisque $\nabla_k \cdot y \in t^k N_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$ d'après le (i), et que $t^k N_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est, par définition, orthogonal à $N_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Il s'ensuit que $\nabla_k \cdot x$, qui appartient à $t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 \subset D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, est orthogonal à $D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$, et donc appartient à $D_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$ (rem. V.2.21). Ceci permet de conclure.

Lemme VI.6.26. — *Si $n \in \mathbf{N}$, et si $u_n^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $u_n^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p^n & 1 \end{smallmatrix}\right)$, alors*

$$\Big(\frac{\log u_n^-}{u_n^- - 1}\Big)^k \Big(\frac{\log u_n^+}{u_n^+ - 1}\Big)^k \cdot (N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \subset t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1.$$

Démonstration. — On a $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 = (N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p) \oplus w(N_{\mathrm{rig}} \boxtimes p\mathbf{Z}_p)$.

Notons Δ^+ (resp. Δ^-) l'opérateur $\big(\frac{\log u_n^+}{u_n^+ - 1}\big)^k$ (resp. $\big(\frac{\log u_n^-}{u_n^- - 1}\big)^k$). Alors Δ^+ agit par multiplication par $\frac{p^n t^k}{\varphi^n(T)^k}$ sur N_{rig} et donc envoie N_{rig} dans $t^k N_{\mathrm{rig}}$ ainsi que $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p$ dans $t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p$. Comme $t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par $\mathscr{D}(K_n)$, et donc par Δ^-, on obtient l'inclusion $\Delta^-\Delta^+ \cdot (N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p) \subset t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Par ailleurs, u_n^+ laisse stable $w(p\mathbf{Z}_p)$ donc $\Delta^+ \cdot w(N_{\mathrm{rig}} \boxtimes p\mathbf{Z}_p) \subset w(N_{\mathrm{rig}} \boxtimes p\mathbf{Z}_p)$, et comme $\Delta^- w = w\Delta^+$, on obtient

$$\Delta^- w \cdot (N_{\mathrm{rig}} \boxtimes p\mathbf{Z}_p) = w\Delta^+ \cdot (N_{\mathrm{rig}} \boxtimes p\mathbf{Z}_p) \subset w(t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p) \subset t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1,$$

puisque $t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par w. Ceci permet de conclure.

Lemme VI.6.27. — (i) $(t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)$ *est dense dans* $D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$.

(ii) $(t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (N_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)$ *est dense dans* $N_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Démonstration. — Si $z \in D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, alors z est la limite de la suite de terme général $\big(\frac{\log u_n^-}{u_n^- - 1}\big)^k \big(\frac{\log u_n^+}{u_n^+ - 1}\big)^k \cdot z$ dont tous les termes appartiennent à $t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ d'après le lemme VI.6.26, et à $D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ qui est stable par $\mathscr{D}(K_n)$. Ceci démontre le (i), et la démonstration du (ii) étant identique, cela permet de conclure.

Revenons à la démonstration du th. VI.6.22. Soit

$$Y = \big((t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (N_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)\big) / \big((t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)\big).$$

Alors Y est tué par ∇_k puisque $N_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 / D_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ l'est (lemme VI.6.25). Comme Y est stable par G, cela implique (démonstration du (iii) du lemme VI.6.19) que Y est une représentation localement algébrique de G, et donc que $Y \subset \Pi^{\mathrm{alg}}$. Par ailleurs, $(t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (N_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)$ est dense dans $N_{\mathrm{rig}}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ (lemme VI.6.27) ; on en déduit que Y contient des éléments qui ne sont pas tués par $\prod_{i=1}^{k-1}(\nabla - i) = \nabla^{-1}\nabla_k$, et donc que Y contient Π_c^{alg}, puisque Y est stable par B. Pour conclure, il suffit donc de prouver que $Y \to J(\Pi^{\mathrm{alg}})$ est surjective, ce qui suit de la démonstration du (ii) du th. VI.6.30 ci-dessous . (En fait, comme Y est stable par G, et comme Π^{alg} est irréductible sauf dans le cas spécial, on peut, en général, conclure directement que $Y = \Pi^{\mathrm{alg}}$.)

7. Le module de Jacquet de Π^{alg}. — D'après [**4**], si $V = \mathbf{V}(D)$, le L-espace vectoriel $N_{\mathrm{rig}}^{\Gamma_n}$ est égal à $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, où V est vue comme représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p(\mu_{p^n})}$. On note D_{crab} la limite inductive des $N_{\mathrm{rig}}^{\Gamma_n}$. Le résultat suivant est alors immédiat.

Proposition VI.6.28. — (i) $\dim D_{\mathrm{crab}} = 2$ *si et seulement si V devient cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$.*

(ii) $\dim D_{\mathrm{crab}} = 1$ *si* V *est tordue d'une représentation semi-stable par un caractère localement algébrique de* $\mathbf{Q}_p^*$.

(iii) $\dim D_{\mathrm{crab}} = 0$ *dans tous les autres cas.*

Le L-espace vectoriel D_{crab} est stable par φ et Γ ; on peut donc le munir d'une action de B, en faisant agir $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ par $\delta_D(d)\varphi^i\sigma_u$, où $i = v_p(d^{-1}a)$ et $u = p^{-i}d^{-1}a$. Par ailleurs, on a $D_{\mathrm{crab}} \subset \widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$, ce qui permet d'attacher à tout élément de D_{crab} une fonction $\phi_z : \mathbf{Q}_p^* \to \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma$ par la formule habituelle, à savoir, $\phi_z(x) = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z$ modulo $\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$.

Lemme VI.6.29. — (i) $z \mapsto \phi_z$ *est injective.*

(ii) ϕ_z *n'est à support compact dans* $\mathbf{Q}_p$ *que si* $z = 0$.

Démonstration. — Cela suit de ce que D est irréductible, et donc $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{crab}}$ ne contient pas de droite stable par φ.

Théorème VI.6.30. — (i) *Si* $z \in D_{\mathrm{crab}}$, *alors* $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\phi_z \in \Pi^{\mathrm{alg}}$, *et son image dans* $J(\Pi^{\mathrm{alg}})$ *appartient à* $J_0(\Pi^{\mathrm{alg}})$.

(ii) *L'application* $z \mapsto \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\phi_z$ *induit un isomorphisme de* $L[B]$*-modules de* D_{crab} *sur* $J_0(\Pi^{\mathrm{alg}})$.

Démonstration. — La démonstration va demander un petit peu de préparation.

On note D_{pst} le module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \cup_{[K:\mathbf{Q}_p]<\infty}(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\log[T], \frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$. Comme D est de Rham et comme toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable (cf. [**27**], par exemple, pour une démonstration de ce résultat, ou [**24**] pour un résumé des travaux de Berger, André, Mebkhout et Kedlaya ayant conduit à sa démonstration), D_{pst} est un $L \cdot \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$-module libre de rang 2 qui contient D_{crab} et est muni d'actions semi-linéaires de φ et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et d'un opérateur N induit par la dérivation $-\frac{p}{p-1}\frac{d}{d\log[T]}$; de plus,

$$\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\log[T], \frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} D_{\mathrm{pst}} = \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\log[T], \frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

On déduit de l'isomorphisme ci-dessus que $\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}} = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\log[T]] \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} D_{\mathrm{pst}})^{N=0,\mathscr{H}}$. En notant E le module $(D_{\mathrm{pst}} \otimes_L L[\log[T]])^{N=0}$, qui est de rang 2 sur $L \cdot \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$, on voit que l'on a aussi $\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}} = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes E)^{\mathscr{H}}$. On note $\widetilde{N}^{++}_{\mathrm{rig}}$ le sous-module $(\widetilde{\mathbf{B}}^{++}_{\mathrm{rig}} \otimes E)^{\mathscr{H}}$ de $\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$ (cf. lemme V.1.6). On a $\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}} = \widetilde{N}^{++}_{\mathrm{rig}} \oplus E^{\mathscr{H}}$, et il résulte du lemme V.1.9 que $\sum_{n\in\mathbf{N}} \varphi^{-n}(T)\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$ est dense dans $\widetilde{N}^{++}_{\mathrm{rig}}$.

Lemme VI.6.31. — *On a* $\widetilde{N}^{++}_{\mathrm{rig}} \subset N^\natural_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Démonstration. — Soit $z \in \widetilde{N}^{++}_{\mathrm{rig}}$. On rappelle que l'on dispose, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, d'une application $\iota_i^- : \widetilde{N}^{++}_{\mathrm{rig}} \to \widetilde{X}^-$, et que $z \in \widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$ si et seulement si $\iota_i^-(z) = 0$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Maintenant, ι^- induisant une bijection de Π_c^{alg} sur $\oplus_{i\in\mathbf{Z}} X_\infty^-$ (lemme VI.5.10), il existe, pour chaque $i \in \mathbf{Z}$, une suite $(x_{i,n})_{n\geq 1}$ d'éléments de Π_c^{alg} vérifiant

$\iota_j^-(x_{i,n})=0$, si $j\neq i$, $\iota_i^-(x_{i,1})=\mathrm{Res}_{p^{-1}\mathbf{Z}_p}(\iota_i^-(z))$ et $\iota_i^-(x_{i,n})=\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}(\iota_i^-(z))$, si $n\geq 2$. On peut relever $x_{i,n}$ en un élément $\tilde{x}_{i,n}$ de $\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}\cap\bigl(\frac{\varphi^{i-1}(T)}{\varphi^i(T)}\bigr)^k\widetilde{D}^+[\frac{1}{p}]$, et comme $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}(\iota_i^-(z))$ tend vers 0 (pour la topologie p-adique) quand n tend vers $+\infty$, on peut imposer à $\tilde{x}_{i,n}$ de tendre aussi vers 0. Soit $\tilde{x}_i$ la somme de la série $\sum_{n\geq 1}\tilde{x}_{i,n}$. Par construction, $\tilde{x}_i$ appartient à $\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}\cap\bigl(\frac{\varphi^{i-1}(T)}{\varphi^i(T)}\bigr)^k\widetilde{D}^+[\frac{1}{p}]$, est orthogonal à $t^kN^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ puisque chaque $\tilde{x}_{i,n}$ l'est, et vérifie $\iota_i^-(\tilde{x}_i)=\iota_i^-(z)$ et $\iota_j^-(\tilde{x}_i)=0$, si $j\neq i$.

Soit $k_i\in\mathbf{N}$ tel que $p^{k_i}\tilde{x}_i\in\bigl(\frac{\varphi^{i-1}(T)}{\varphi^i(T)}\bigr)^k\widetilde{D}^+$. D'après la démonstration du lemme VI.4.11, dont nous reprenons les notations, $\sum_{i=i_0}^{+\infty}q_i^{i+k_i}\widetilde{x}_i$ converge dans $\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$. La somme $\widetilde{x}$ de cette série est orthogonale à $t^kN^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$, donc appartient à $N^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$, et vérifie $\iota_i^-(\tilde{x})=\iota_i^-(z)$, pour tout $i\geq i_0$, et $\iota_i^-(\tilde{x})=0$, si $i<i_0$. Il en résulte que, si $z\in\varphi^{i_0}(T)\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$, alors $z-\tilde{x}\in t^k\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}\subset\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}\subset N^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$. Comme $\widetilde{x}\in N^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$, on a prouvé que $N^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ contient $\sum_{i\in\mathbf{N}}\varphi^{-i}(T)\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$. On conclut en utilisant la densité de $\sum_{i\in\mathbf{N}}\varphi^{-i}(T)\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$ dans $\widetilde{N}^{++}_{\mathrm{rig}}$ et la continuité de $[\ ,\ ]_{\mathbf{P}^1}$.

Lemme VI.6.32. — (i) $z_n=(\frac{p^{nk}t^k}{\varphi^n(T)^k}z,0)\in(D\boxtimes\mathbf{P}^1)^{\mathrm{alg}}$, *si* $z\in D_{\mathrm{crab}}$ *et* $n\geq 1$.
(ii) $D_{\mathrm{crab}}\subset N^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$.

Démonstration. — On déduit que $(\frac{p^{nk}t^k}{\varphi^n(T)^k}z,0)\in N^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$ du lemme VI.6.31. Comme, de plus, on a $(\frac{p^{nk}t^k}{\varphi^n(T)^k}z,0)\in t^kN_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$, le th. VI.6.22 permet de démontrer le (i).

Le (ii) s'en déduit en remarquant que z est la limite de $(\frac{p^{nk}t^k}{\varphi^n(T)^k}z,0)$, et donc est orthogonal à $t^kN^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$, puisque tous les termes de la suite le sont.

Revenons à la démonstration du th. VI.6.30. Si $z\in D_{\mathrm{crab}}$, et si z_n est l'élément de $(D\boxtimes\mathbf{P}^1)^{\mathrm{alg}}$ ci-dessus, on a $\phi_{z_n}=\mathbf{1}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\phi_z$, et comme $\nabla z=0$, on en déduit le (i) du théorème. La B-équivariance de $z\mapsto\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\phi_z$ est immédiate. La nullité de $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\phi_z$ dans $J(\Pi^{\mathrm{alg}})$ équivaut à ce que $\varphi^n(z)\in\mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{crab}})$, pour tout n assez grand, ce qui implique $z=0$. L'application $z\mapsto\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}\phi_z$ est donc injective. Pour démontrer sa surjectivité et terminer ainsi la démonstration du th. VI.6.30, il suffit donc, pour des questions de dimension, de prouver le résultat suivant.

Proposition VI.6.33. — (i) *Si* $\dim J_0(\Pi^{\mathrm{alg}})=2$, *alors* D_{crab} *est de dimension* 2.
(ii) *Si* $\dim J_0(\Pi^{\mathrm{alg}})=1$, *alors* $\dim D_{\mathrm{crab}}\geq 1$.

Démonstration. — D'après la prop. VI.2.8, si $\dim J_0(\Pi^{\mathrm{alg}})=2$, alors $J_0(\Pi^{\mathrm{alg}})$ admet $\delta_1\otimes\delta_2|\ |^{-1}$ comme quotient, avec $\delta_1\neq\delta_2|\ |^{-1}$, et $\Pi^{\mathrm{alg}}=(\mathrm{Ind}_B^G\,\delta_1\otimes\delta_2|\ |^{-1})\otimes\mathrm{Sym}^{k-1}$. Il s'agit donc de prouver que $D_{\mathrm{crab}}=\delta_1\oplus\delta_2$, si $\delta_1\neq\delta_2$, et que D_{crab} est l'extension non triviale de δ par δ si $\delta_1=\delta_2=\delta$.

Pour cela, commençons par remarquer que, comme Π^{alg} admet un complété unitaire irréductible (à savoir Π), on a, d'après [**18, 35**],

$$v_p(\delta_1(p)) < 0,\ v_p(\delta_2(p)) < 0 \text{ et } v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = -k.$$

Intéressons nous au cas $\delta_1 \neq \delta_2$. Alors $J_0(\Pi^{\mathrm{alg}}) = (\delta_1 \otimes \delta_2|\ |^{-1}) \oplus (\delta_2 \otimes \delta_1|\ |^{-1})$. Le modèle de Kirillov de Π^{alg} contient donc les fonctions $\phi_1 = \delta_1 \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$ et $\phi_2 = \delta_2 \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$. On en déduit l'existence d'éléments z_1, z_2 de $\widetilde{D}^{P-\mathrm{alg}}$ vérifiant $\phi_{z_1} = \phi_1$ et $\phi_{z_2} = \phi_2$. Comme ϕ_i est à support dans $\mathbf{Z}_p$, cela implique que $z_i \in \frac{1}{T^k}\widetilde{D}^+$. De plus, on a $\phi_i(ax) = \delta_i(a)\phi_i(x)$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, ce qui se traduit par l'appartenance de $\sigma_a(z_i) - \delta_i(a)z_i$ à $\widetilde{D}^+$, pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Enfin, $\phi_i(px) - \delta_i(p)\phi_i(x)$ est à support dans $p^{-1}\mathbf{Z}_p^*$, ce qui se traduit par l'appartenance de $\varphi(z_i) - \delta_i(p)z_i$ à $\left(\frac{T}{\varphi(T)}\right)^k \widetilde{D}^+$, et est localement constante et non nulle, ce qui implique que $\varphi(z_i) - \delta_i(p)z_i \notin \left(\frac{T}{\varphi(T)}\right)^{k-1}\widetilde{D}^+$.

Soit $y_i = \varphi(z_i) - \delta_i(p)z_i$. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_i(p)^{-n}\varphi^n(y_i)$ converge dans $t^{-k}\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$ car $v_p(\delta_i(p)) < 0$. Si on note u_i la somme de cette série, alors $z_i' = z_i - \delta_i(p)^{-1}u_i$ appartient à $(t^{-k}\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi=\delta_i(p)}$, et est non nul car $\phi_{z_i'}(x) = \delta(x)$ sur tout $\mathbf{Q}_p^*$. De plus, on a $\phi_{(\sigma_a - \delta_i(a))z_i'} = 0$; on en déduit que $z_i' \in D_{\mathrm{crab}}$, et que la droite engendré par z_i' est stable par $W_{\mathbf{Q}_p}$ et isomorphe à δ_i. On a donc bien $D_{\mathrm{crab}} = \delta_1 \oplus \delta_2$.

Passons au cas $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Alors $J_0(\Pi^{\mathrm{alg}}) = (\delta \otimes \delta|\ |^{-1}) \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 & v_p(a^{-1}d) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et le modèle de Kirillov contient les fonctions $\phi_1 = \delta \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$ et $\phi_2 = v_p\, \delta \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$, ce qui nous fournit des éléments z_1, z_2 de $\widetilde{D}^{P-\mathrm{alg}}$ vérifiant $\phi_{z_1} = \phi_1$ et $\phi_{z_2} = \phi_2$. Comme ci-dessus, on construit à partir de z_1 une droite de D_{crab} isomorphe à δ. Par ailleurs, on a $\phi_2(p^2x) - 2\delta(p)\phi_2(px) + \delta(p)^2\phi_2(x) = \delta \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}$. On vérifie comme précédemment que, si l'on pose $y_2 = \varphi(z_2) - 2\delta(p)\varphi(z_2) + \delta(p)^2 z_2$ et $z_2' = z_2 - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\delta(p)^{-1}\varphi^n(y_2)$, alors z_2' est un élément de D_{crab} vérifiant $\phi_{z_2'}(x) = v_p(x)\delta(x)$, pour tout $x \in \mathbf{Q}_p^*$. On en déduit que D_{crab} est l'extension non triviale de δ par δ, ce qui termine la démonstration du (i).

Maintenant, si $\dim J_0(\Pi^{\mathrm{alg}}) = 1$, et si δ est le caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ à travers lequel $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ agit sur $J_0(\Pi^{\mathrm{alg}})$, les arguments ci-dessus produisent une droite de D_{crab} isomorphe à δ. Ceci permet de conclure.

8. Une seconde copie des vecteurs localement algébriques. — $D^{\natural}_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 / t^k N^{\natural}_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ s'identifie naturellement à $(\check{\Pi}^{\mathrm{alg}})^*$, ce qui nous fournit une suite exacte

$$0 \to (\check{\Pi}^{\mathrm{alg}})^* \to \big((D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (N^{\natural}_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big)/t^k N^{\natural}_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi^{\mathrm{alg}} \to 0.$$

Les vecteurs localement algébriques de $(\check{\Pi}^{\mathrm{alg}})^*$ s'identifient à la contragrédiente algébrique de $\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}$, qui est isomorphe à $\check{\Pi}^{\mathrm{alg}} \otimes \delta_D = \Pi^{\mathrm{alg}}$ sauf dans le cas spécial où Π^{alg} est une extension de $W_{\ell,k} \otimes \delta_0$ par $\mathrm{St} \otimes W_{\ell,k} \otimes \delta_0$, où cette contragrédiente est $B \otimes \delta_D$, et B est une extension de $\mathrm{St} \otimes W_{\ell,k} \otimes \delta_0$ par $W_{\ell,k} \otimes \delta_0$ (cela suit de l'énoncé correspondant pour une représentation lisse [**48**, th. 2.18]).

Théorème VI.6.34. — (i) *Le sous-module* $\big((t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (D^{\natural}_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big)/(t^k N^{\natural}_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)$ *de* $(\check{\Pi}^{\mathrm{alg}})^*$ *est isomorphe à* $((\check{\Pi}^{\mathrm{alg}})^*)^{\mathrm{alg}}$.

(ii) *On a une suite exacte*

$$0 \to ((\check{\Pi}^{\mathrm{alg}})^*)^{\mathrm{alg}} \to \big((t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big)/(t^k N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1) \to \Pi^{\mathrm{alg}} \to 0.$$

Démonstration. — Nous allons avoir besoin d'un peu de préparation.

Lemme VI.6.35. — $\lambda_{k,a}\big((t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big) \subset t^k N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$, *si* $a \geq m(D)$.

Démonstration. — Soit $z \in (t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$. En particulier,

$$z_1 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z) \in t^k N^{]0,r_a]} \quad \text{et} \quad z_2 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot z) \in t^k N^{]0,r_a]}.$$

Si $n \geq 0$, on a $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p^*} z = \varphi^n(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \psi^n(z_1))$, et si $n \leq 0$, alors $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p^*} z$ est égal à

$$w \cdot \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z_2 = w\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\left(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z_2\right) = \delta_D(p)^{-n} \varphi^n\big(w_D(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \psi^{-n}(z_2))\big).$$

Comme $a \geq m(D)$, le module $t^k N^{]0,r_a]}$ est stable par ψ, par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$, et $t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est stable par w_D. On en déduit que $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p^*} z \in t^k \varphi^n(N^{]0,r_a]})$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Par ailleurs, l'appartenance de z à $D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ permet de voir z comme un élément de $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$, et donc de considérer sa restriction à $\check{\Pi}_c^{\mathrm{alg}}$. D'après la prop. VI.5.12, cette restriction $\iota^+(z)$ est représentée par une suite $(\iota_i^+(z))_{i\in\mathbf{Z}}$ d'éléments $(\iota_{i,n}^+(z))_{n\in\mathbf{N}}$ de $X^+ \boxtimes \mathbf{Q}_p$. De plus,

$$\iota_{i,n}^+(z) - \iota_{i,n-1}^+(z) = \varphi^{-n}(\mathrm{Res}_{p^{i-n}\mathbf{Z}_p^*} z) \bmod t^k N_{\mathrm{dif},n}, \quad \text{si } n \geq m(D).$$

Or $\varphi^{-n}(\mathrm{Res}_{p^{i-n}\mathbf{Z}_p^*} z) \in t^k \varphi^{-n}(N^{]0,r_a]})$ a une image nulle modulo $t^k N_{\mathrm{dif},n}$, pour tout $n \geq a$, par définition de $N^{]0,r_a]}$. Il s'ensuit que $\iota_i^+(z) \in X_a^+$ et donc est tué par $\lambda_{k,a}$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Il en est donc de même de $\iota^+(z)$.

Maintenant, on peut appliquer ce qui précède à $w \cdot z$ puisque w et $\lambda_{k,a}$ commutent à multiplication près par une unité de Λ_{Γ_a}. On en déduit que $\iota^+(\lambda_{k,a} \cdot z)$ et $\iota^+(w \cdot \lambda_{k,a} \cdot z)$ sont nuls. Or l'application $z \mapsto (\iota^+(z), \iota^+(w \cdot z))$ est injective sur $(\check{\Pi}^{\mathrm{alg}})^*$, puisque $\check{\Pi}_c^{\mathrm{alg}} + w \cdot \check{\Pi}_c^{\mathrm{alg}} = \check{\Pi}^{\mathrm{alg}}$ (cela suit de l'énoncé correspondant pour une représentation lisse [**48**, prop. 2.9]). La nullité de $\iota^+(\lambda_{k,a} \cdot z)$ et $\iota^+(w \cdot \lambda_{k,a} \cdot z)$ entraîne donc l'appartenance de $\lambda_{k,a} \cdot z$ à $t^k N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$, ce qui permet de conclure.

Revenons à la démonstration du th. VI.6.34. Notons Y le sous-module de $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ que l'on cherche à étudier : $Y = \big((t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big)/(t^k N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$. Si $z \in Y$, il résulte du lemme VI.6.35 que $\lambda_{k,n} \cdot z = 0$, si n est assez grand, et donc que $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z$ est localement polynomiale. Comme Y est stable par G, cela prouve (prop. VI.2.3) que Y est une représentation localement algébrique de G. On en déduit l'inclusion de Y dans l'espace des vecteurs localement algébriques de $(\check{\Pi}^{\mathrm{alg}})^*$. Or ceux-ci n'ont pas de sous-$L[G]$-module strict de dimension infinie sur L. On termine la démonstration du (i) en remarquant que $t^k N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est fermé et de codimension infinie dans $D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$, alors que $(t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$ est dense (lemme VI.6.27).

Soit $Z = (t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$. On a une suite exacte

$$0 \to Y \to Z/(t^k N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1) \to Z/\big((t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big) \to 0.$$

Or, d'après le th. VI.6.22, le membre de droite est égal à Π^{alg}. Le (ii) suit donc du (i), ce qui permet de conclure.

9. Indépendance par rapport à la filtration. — Soit M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module de rang 2 sur $L \cdot \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$. Le module M est donc muni d'actions semi-linéaires (pour l'action de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$) de φ et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (le sous-groupe d'inertie $I_{\mathbf{Q}_p}$ agissant à travers un quotient fini), commutant entre elles, et d'un opérateur N commutant à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et tel que $N \circ \varphi = p\varphi \circ N$.

Soit $t_N(M) = v_p(\det \varphi)$; on suppose que $t_N(M) = -k$, avec $k \geq 1$ entier, sinon la théorie est vide. Soit K une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$ telle que I_K agisse trivialement. Le L-espace vectoriel $M_{\mathrm{dr}} = ((K \cdot \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}) \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} M)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$; est alors, d'après le théorème de Hilbert 90, de dimension 2, et ne dépend pas du choix de K.

On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des filtrations admissibles sur M_{dR}, dont les poids sont 0 et $-k$. Ces filtrations sont paramétrées par l'ensemble des droites de M_{dr} auquel il faut éventuellement enlever (à cause de la condition d'admissibilité) les droites de M_{dR} stables par les actions de φ, N et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On note $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(M_{\mathrm{dr}})$ le paramètre d'une telle filtration, et $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}}$ la filtration correspondante sur M_{dR}.

Comme $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}}$ est supposée admissible, il lui correspond [**5, 23, 33**] une représentation de de Rham $V_{\mathscr{L}}$, à poids de Hodge-Tate 0 et k, telle que $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V_{\mathscr{L}}) = M$, et $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_{\mathscr{L}})$ soit égal à M_{dR} muni de la filtration $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}}$. Il lui correspond aussi un (φ, Γ)-module $D_{\mathscr{L}} = \mathbf{D}(V_{\mathscr{L}})$, étale sur $\mathscr{E}$. On note $D_{\mathscr{L}}^{\dagger}$ l'ensemble des éléments surconvergents de $D_{\mathscr{L}}$, et on pose $D_{\mathrm{rig},\mathscr{L}} = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^{\dagger}} D_{\mathscr{L}}^{\dagger}$ et $D_{\mathrm{rig},\mathscr{L}}[\frac{1}{t}] = \mathscr{R}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathscr{R}} D_{\mathrm{rig},\mathscr{L}}$. Le (φ, Γ)-module $D_{\mathrm{rig},\mathscr{L}}[\frac{1}{t}]$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{L}$; en effet, si K est l'extension galoisienne de $\mathbf{Q}_p$ ci-dessus, il résulte de [**4**] (cf. aussi [**24**]) que [(68)]

$$D_{\mathrm{rig},\mathscr{L}}[\frac{1}{t}] = (\mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{Q}_p} M)^{\mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty), N=0}.$$

Le $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré admissible $\wedge^2 M$ est de rang 1 et ne dépend pas de $\mathscr{L}$ (la filtration ne comporte qu'un saut qui est imposé par la condition d'admissibilité). On note δ'_M le caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ tel que $\wedge^2 M = \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(L(\delta'_M))$ et $\delta_M \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ défini par $\delta_M(x) = (x|x|)^{-1}\delta'_M(x)$. Le résultat suivant est immédiat.

Lemme VI.6.36. — *On a $\delta_{D_{\mathscr{L}}} = \delta_M$ pour tout $\mathscr{L}$. En particulier, $\delta_{D_{\mathscr{L}}}$ ne dépend pas de $\mathscr{L}$.*

---

(68) K_∞ désigne l'extension cyclotomique de K et $\mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris},K}^{\dagger}[\log T]$, où $L \cdot \mathbf{B}_{\mathrm{cris},K}^{\dagger}$ est l'extension de $\mathscr{R}$ attachée à l'extension K_∞ de F_∞ ; l'opérateur N est $1 \otimes N + N \otimes 1$, où N sur $\mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger}$ est $\frac{-p}{p-1}$ fois la dérivation par rapport à $\log T$.

L'espace $N_{\mathrm{dif},n} = L_n[[t]] \otimes_L M_{\mathrm{dR}}$ ne dépend pas non plus du choix de $\mathscr{L}$; il en est donc de même de

$$N_{\mathrm{rig}} = \{x \in D_{\mathrm{rig},\mathscr{L}}[\tfrac{1}{t}],\ \iota_n(x) \in N_{\mathrm{dif},n},\ \text{pour } n \gg 0\} = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{log},K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} M)^{\mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty)},$$

et donc aussi de $t^k N_{\mathrm{rig}}$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{e}} = (1-\varphi)(t^k N_{\mathrm{rig}})^{\psi=1}$.

On note $w_{\mathscr{L}} : D_{\mathscr{L}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to D_{\mathscr{L}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ l'involution w_{δ_M}. Comme on l'a vu (lemme VI.6.17), cette involution s'étend à $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, et les formules du squelette d'action définissent, à partir de $w_{\mathscr{L}}$, une action de G sur $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Nous allons montrer que cette action ne dépend pas de $\mathscr{L}$ [pour que ceci ait un sens, on utilise l'isomorphisme de $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ sur $N_{\mathrm{rig}} \oplus \varphi(N_{\mathrm{rig}})$ envoyant z sur $(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z, \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} w \cdot z)$]. Cette indépendance est moralement évidente sur la formule (cf. rem. II.1.3) définissant $w_{\mathscr{L}}$ sur $D_{\mathscr{L}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$; le problème est que $D_{\mathscr{L}_1} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et $D_{\mathscr{L}_2} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ ne s'intersectent pas dans $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et que la formule définissant $w_{\mathscr{L}}$ converge dans $D_{\mathscr{L}}$, mais pas dans $D^{\dagger}_{\mathscr{L}}$, ce qui la rend inutilisable.

Si $\mathscr{L} \in \mathscr{F}$, soient $\mathscr{C}_{\mathrm{rig},\mathscr{L}} = (\varphi-1)D^{\psi=1}_{\mathrm{rig},\mathscr{L}}$ et $\mathscr{C}_{\mathscr{L}} = (\varphi-1)D^{\psi=1}_{\mathscr{L}}$. Alors $\mathscr{C}_{\mathscr{L}}$ est un $\Lambda[\frac{1}{p}]$-module libre de rang 2 et $\mathscr{C}_{\mathrm{rig},\mathscr{L}} = \mathscr{R}^+(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}_{\mathscr{L}}$ contient le $\mathscr{R}^+(\Gamma)$-module $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ pour tout $\mathscr{L}$.

Notons $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw},\mathscr{L}}$ l'application de $\check{\mathscr{C}}_{\mathrm{e}} \times \mathscr{C}_{\mathrm{e}} \to \mathscr{R}^+(\Gamma)$ de la rem. VI.6.5 (pour le (φ,Γ)-module $D_{\mathscr{L}}$).

Lemme VI.6.37. — *$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw},\mathscr{L}}$ ne dépend pas de $\mathscr{L}$.*

Démonstration. — D'après la rem. VI.6.5, on a $\int_\Gamma \eta\langle x,y\rangle_{\mathrm{Iw},\mathscr{L}} = \{x, \frac{-\tau(\gamma)}{\chi(\gamma)^i\gamma-1} \cdot y\}$, si $\eta : \Gamma \to \mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu. Cette expression ne fait pas intervenir $\mathscr{L}$, ce qui permet de conclure puisque l'application $\mu \mapsto (\eta \mapsto \int_\Gamma \eta\mu)$ est une injection de $\mathscr{R}^+(\Gamma)$ dans l'espace des fonctions sur l'ensemble des caractères de Γ (les χ^i, pour $i \in \mathbf{N}$, suffiraient).

Le lemme VI.6.37 permet de noter simplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$ l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw},\mathscr{L}}$.

Lemme VI.6.38. — *L'image de $\mathscr{C}_{\mathrm{e}} \times \mathscr{C}_{\mathrm{e}}$ par $(z,z') \mapsto \langle w_{\mathscr{L}}(z) \otimes \delta_M^{-1}, z'\rangle_{\mathrm{Iw}}$ est le sous-$\mathscr{R}^+(\Gamma)$-module $\nabla_k\mathscr{R}^+(\Gamma)$ de $\mathscr{R}^+(\Gamma)$ engendré ∇_k.*

Démonstration. — Cela suit du (ii) du lemme VI.6.7 et de ce que $\check{\mathscr{C}}_{p-e} = \check{\mathscr{C}}_e$ dans le cas de Rham (lemme VI.6.14).

Fixons $\mathscr{L}_0 \in \mathscr{F}$, et notons simplement D et w_D (au lieu de $D_{\mathscr{L}_0}$ et $w_{\mathscr{L}_0}$) les objets correspondants. Si $\mathscr{L} \in \mathscr{F}$, on note $g \cdot_{\mathscr{L}} z$, l'action de $g \in G$; si $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0$, cette action est simplement notée $g \cdot z$.

Corollaire VI.6.39. — *Il existe $\lambda \in \Lambda^*$ tel que l'on ait $w_{\mathscr{L}}(z) = \lambda w_D(z)$, pour tout $z \in N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.*

Démonstration. — Il suffit de le démontrer pour $z \in \mathscr{C}_e$, le reste s'en déduisant par Γ-antilinéarité. On note ι_D l'involution de Λ en voyant σ_a sur $\delta_M(a)\sigma_{a^{-1}}$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Comme $\mathscr{C}_e$ est libre de rang 2 sur $\mathscr{R}^+(\Gamma)$, et comme les formes bilinéaires

$(z,z') \mapsto (z,z')_0 = \langle w_D(z) \otimes \delta_M^{-1}, z' \rangle_{\mathrm{Iw}}$ et $(z,z') \mapsto (z,z')_1 = \langle w_{\mathscr{L}}(z) \otimes \delta_M^{-1}, z' \rangle_{\mathrm{Iw}}$ sont antisymétriques (cor. VI.6.2) et non dégénérées, il existe λ dans l'anneau total des fractions $\mathrm{Frac}(\mathscr{R}^+(\Gamma))$ tel que $(z,z')_1 = \iota_D(\lambda)\,(z,z')_0$, quels que soient $z, z' \in \mathscr{C}_e$. De plus, comme l'image de $\mathscr{C}_e \times \mathscr{C}_e$ par ces deux formes bilinéaires est $\nabla_k \mathscr{R}^+(\Gamma)$ d'après le lemme VI.6.38, on a $\iota_D(\lambda)\nabla_k \mathscr{R}^+(\Gamma) = \nabla_k \mathscr{R}^+(\Gamma)$, ce qui prouve que $\iota_D(\lambda)$ est une unité de $\mathscr{R}^+(\Gamma)$. Il en est donc de même de λ, et comme $\mathscr{R}^+(\Gamma)^* = \Lambda[\frac{1}{p}]^*$ (cela se déduit du même énoncé pour $\mathscr{R}^+$, à savoir $(\mathscr{R}^+)^* = (\mathscr{E}^+)^*$, qui suit de ce qu'un élément de $\mathscr{R}^+$ dont les coefficients ne sont pas bornés admet, d'après la théorie des polygones de Newton, des zéros dans le disque unité ouvert et donc n'est pas inversible), on a $\lambda \in \Lambda[\frac{1}{p}]^*$. On a alors $\langle (\lambda w_D(z) - w_{\mathscr{L}}(z)) \otimes \delta_M^{-1}, z' \rangle_{\mathrm{Iw}} = 0$, pour tous $z, z' \in \mathscr{C}_e$, et comme $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$ est non dégénérée, cela implique $w_{\mathscr{L}}(z) = \lambda w_D(z)$, quel que soit $z \in \mathscr{C}_e$. Enfin, comme $w_D \circ w_D = \mathrm{id}$ et $w_{\mathscr{L}} \circ w_{\mathscr{L}} = \mathrm{id}$, on a $\lambda \iota_D(\lambda) = 1$, ce qui implique, en particulier, que λ est inversible dans Λ. On en déduit le résultat.

On note $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\mathscr{L}} \mathbf{P}^1$ le module $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ muni de l'action de G correspondant à $\mathscr{L}$. Les formules du squelette d'action montrent que cette action est entièrement déterminée par $w_{\mathscr{L}}$; il suffit donc de prouver que $\lambda = 1$ pour en déduire l'indépendance de l'action de G sur $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ par rapport à $\mathscr{L}$.

Corollaire VI.6.40. — (i) *Le sous-module $D^\dagger \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ de $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est stable par $w_{\mathscr{L}}$.*

(ii) *Le module $D^\dagger \boxtimes_{\mathscr{L}} \mathbf{P}^1 = (N_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\mathscr{L}} \mathbf{P}^1) \cap (D^\dagger \oplus \varphi(D^\dagger))$ est stable par G.*

(iii) *L'action de G s'étend par continuité à $D \oplus \varphi(D)$ et le G-module ainsi obtenu est le module $D \boxtimes_{\delta,\iota} \mathbf{P}^1$ du n° 2 du § II.1, avec $\delta = \delta_M$ et $\iota = w_{\mathscr{L}}$.*

Démonstration. — Le (i) suit de ce que $D^\dagger \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est stable par w_D et $w_{\mathscr{L}} = \lambda w_D$. On en déduit le (ii) en revenant aux formules du squelette d'action, et le (iii) en utilisant la densité de $D^\dagger$ dans D et les formules du squelette d'action.

Proposition VI.6.41. — *L'action de G sur $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ ne dépend pas de $\mathscr{L}$.*

Démonstration. — Commençons par démontrer que l'on a $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot_{\mathscr{L}} z = \lambda \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot z$, pour tout $z \in D \boxtimes \mathbf{P}^1$. On sait que c'est vrai pour tout $z \in D^\dagger \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ (cf. (i) du cor. VI.6.40). Ce l'est donc, par continuité, pour tout $z \in D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, et aussi, si $n \in \mathbf{Z}$, pour tout $z \in \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) = D \boxtimes p^n \mathbf{Z}_p^*$ (car λ commute à $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$). Soit alors $z \in D \boxtimes \mathbf{P}^1$, et soit $y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot_{\mathscr{L}} z - \lambda \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot z$. D'après ce qui précède, $\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p^*}(y)$, qui est égal à $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot_{\mathscr{L}} \mathrm{Res}_{p^{-n} \mathbf{Z}_p^*}(z) - \lambda \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{Res}_{p^{-n} \mathbf{Z}_p^*}(z)$, est nul pour tout n. Cela implique que si l'on écrit y sous la forme (y_1, y_2), alors $y_i = \mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} y_i$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et donc $y_i \in \cap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(D) = D^{\mathrm{nr}}$; on a donc $y = 0$ puisque, D étant irréductible, $D^{\mathrm{nr}} = 0$.

On en déduit que $D^\natural \boxtimes_{\mathscr{L}} \mathbf{P}^1$ est stable par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Comme B et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ engendrent G, on en déduit que $D^\natural \boxtimes_{\mathscr{L}} \mathbf{P}^1$ est stable pour l'action de G, ce qui permet d'utiliser la prop. IV.4.10 pour en tirer l'égalité $w_{\mathscr{L}} = w_{\delta_M} = w_D$ sur $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, et en déduire que $\lambda = 1$. Les formules du squelette d'action permettent de conclure.

Théorème VI.6.42. — *$\mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{alg}}$ ne dépend, à isomorphisme près, pas de $\mathscr{L}$.*

Démonstration. — D'après le th. VI.6.34, on a pour tout $\mathscr{L}$, une suite exacte

$$0 \to \mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{alg}} \to \big((t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big)/(t^k N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1) \to \mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{alg}} \to 0.$$

Or le terme du milieu ne dépend pas de $\mathscr{L}$. Il en est donc de même de ses composants de Jordan-Hölder, ce qui permet de conclure.

10. Décomposition des vecteurs localement analytiques. — On garde les notations du numéro précédent. Le th. VI.6.43 ci-dessous montre que l'on fabrique $\mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}$ à partir de deux morceaux ne dépendant pas de $\mathscr{L}$ et qu'il existe une représentation naturelle de G dont les $\mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}$ sont des quotients.

Notons $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{an}}$ la représentation $(t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)/(t^k N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$ de G, et $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{alg}}$ la représentation $\mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{alg}}$, pour n'importe quel $\mathscr{L} \in \mathscr{F}$. Soient aussi

$$\Pi'(M,0,k)^{\mathrm{an}} = (t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)/\big((t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big)$$
$$\Pi'(M,0,k)^{\mathrm{alg}} = \big((t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big)/(t^k N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$$

Théorème VI.6.43. — (i) *$\Pi'(M,0,k)^{\mathrm{alg}}$ est l'ensemble des vecteurs algébriques de $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{an}}$; c'est la somme directe de deux copies de $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{alg}}$ sauf dans le cas spécial.*

(ii) *$\Pi'(M,0,k)^{\mathrm{an}}$ est le quotient de $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{an}}$ par $\Pi'(M,0,k)^{\mathrm{alg}}$.*

(iii) *Si $\mathscr{L} \in \mathscr{F}$, alors $\mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}$ est le quotient de $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{an}}$ par une copie de $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{alg}}$; c'est aussi une extension de $\Pi'(M,0,k)^{\mathrm{an}}$ par $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{alg}}$.*

Démonstration. — Le (i) est une conséquence du th. VI.6.42, et du fait que l'extension entre les deux copies de $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{alg}}$ est scindée car deux $\mathscr{L}$ différents fournissent deux copies distinctes de $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{alg}}$ dans $\Pi'(M,0,k)^{\mathrm{alg}}$. (En effet, si $\mathscr{L}_1 \neq \mathscr{L}_2$, alors $\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif},\mathscr{L}_1} + \widetilde{D}^+_{\mathrm{dif},\mathscr{L}_2} = \widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$. Il en résulte, en utilisant le lemme VI.4.11 et en divisant tout par t^k dans le lemme VI.4.12, que $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig},\mathscr{L}_1} + \widetilde{D}^+_{\mathrm{rig},\mathscr{L}_2}$ est dense dans $\widetilde{N}^{++}_{\mathrm{rig}}$. On en déduit que $Y_1 = (D^{\natural}_{\mathrm{rig},\mathscr{L}_1} \boxtimes \mathbf{P}^1)$ et $Y_2 = (D^{\natural}_{\mathrm{rig},\mathscr{L}_2} \boxtimes \mathbf{P}^1)$ sont de codimension infinie dans $Y_1 + Y_2$, et donc que $Y_1 \cap Y_2$ est de codimension infinie dans Y_1 et Y_2. Or $Y_1 \cap Y_2$ contient $Z = t^k N_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Par ailleurs Y_1/Z et Y_2/Z sont des G-modules topologiquement irréductibles puisque égaux respectivement à $(\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}_{\mathscr{L}_1})^*$ et $(\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}_{\mathscr{L}_2})^*$ et que $\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}_{\mathscr{L}_1}$ et $\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}_{\mathscr{L}_2}$ sont irréductibles si on n'est pas dans le cas spécial. Il en résulte que $Y_1 \cap Y_2 = Z$ et donc que $(\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}_{\mathscr{L}_1})^* \cap (\check{\Pi}^{\mathrm{alg}}_{\mathscr{L}_2})^* = 0$, ce qui implique le résultat annoncé.)

Le (ii) est une évidence, et la prop. VI.6.45 ci-dessous montre que $\mathbf{\Pi}(D_{\mathscr{L}})^{\mathrm{an}}$ est le quotient de $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{an}}$ par l'image de $(t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (D^{\natural}_{\mathrm{rig},\mathscr{L}} \boxtimes \mathbf{P}^1)$ dans $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{an}}$; cette image est isomorphe à $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{alg}}$ d'après le th. VI.6.22.

Remarque VI.6.44. — La même analyse montre que $\Pi(M,0,k)^{\mathrm{alg}}$ admet, dans le cas spécial, $W = W_{0,k} \otimes \delta_M$ comme sous objet et quotient, et que ce qui reste est la somme directe de deux copies de $\mathrm{St} \otimes W$.

On choisit $\mathscr{L} \in \mathscr{F}$, et on note simplement D, D_{rig} et Π les objets correspondants. Le résultat suivant est à rapprocher du th. VI.6.22.

Proposition VI.6.45. — (i) $(t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) + (D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1) = D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$.

(ii) *L'application naturelle de* $t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 / \big((D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (t^k N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)\big)$ *dans* Π^{an} *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Comme $\Pi^{\mathrm{an}} = D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 / D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$, le (ii) est une conséquence du (i). Passons à la démonstration du (i). Soit $z \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Il existe $a \geq m(D)$ tel que $z \in D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1$, et $z_n = \varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z) \in D^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, d'après la démonstration du lemme VI.6.35, En particulier, $\iota_{n+i}^+(z_n) \in X_{n+i}^+ \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est bien défini si $i \geq a$. Maintenant, d'après le lemme VI.4.11, il existe $y \in D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ tel que $\iota_i^+(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} y) = \iota_i^+(z_n)$, pour tout $i \geq a$. On a alors, par construction, $\varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z - y) \in t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Soit $u = w \cdot (z - y)$. On a

$$\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p^*} u = w(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}(z-y)) = \delta_D(p)^{-n} \varphi^n(w_D \cdot \varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}(z-y))),$$

et comme w_D laisse stable $t^k N^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, on a $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p^*} u \in t^k N^{]0,r_{a+n}]}$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. On peut donc écrire u sous la forme $u = \varphi^n(\psi^n(u)) + t^k y_n$, avec $y_n \in t^k N^{]0,r_{a+n}]}$. On a alors $\varphi^{-n-a}(y) = \varphi^{-a}(\psi^n(u)) + p^{-k(n+a)} \varphi^{-n-a}(y_n)$, ce qui implique $\iota_{n+a}^+(u) = \iota_0^+(\varphi^{-a}(\psi^n(u))) \in X_a^+$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

D'après le lemme VI.4.11, on peut trouver $u' \in D_{\mathrm{rig}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ tel que $\iota_n^+(u') = \iota_n^+(u)$, si $n > N(a)$, et $\iota_n^+(u') = 0$, si $n \leq N(a)$, et quitte à modifier u' par un élément de $(\check{\Pi}_c^{\mathrm{alg}})^{\perp}$, on peut de plus s'arranger pour que u' soit identiquement nul sur $\mathrm{LP}(p^{-N(a)}\mathbf{Z}_p, X_n^-)^{\Gamma} \cap \Pi^{\mathrm{alg}}$. Alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot u') \in t^k N_{\mathrm{rig}}$, d'après le lemme VI.6.49 ci-dessous, et donc $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - y - w \cdot u') \in t^k N_{\mathrm{rig}}$. Comme on s'est d'autre part débrouillé pour que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot (z-y) - u') \in t^k N_{\mathrm{rig}}$, on a $z - (y + w \cdot u') \in t^k N_{\mathrm{rig}}$, ce qui nous fournit une décomposition de z sous la forme voulue.

On note $Y_n^- \subset X_\infty^-$, le noyau de la trace de Tate normalisée $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} : X_\infty^- \to X_n^-$.

Lemme VI.6.46. — *On a* $X_\infty^- = X_n^- \oplus Y_n^-$, *et cette décomposition est stable par* Γ. *De plus,* X_n^- *est le noyau de* $\lambda_{k,n}$, *alors que* $\lambda_{k,n} : Y_n^- \to Y_n^-$ *est bijective.*

Démonstration. — C'est standard.

Lemme VI.6.47. — (i) *L'image et le noyau de* $\lambda_{k,n}$ *sur* Π^{alg} *sont stables par* w.

(ii) *Si* n *est assez grand, alors* $\mathrm{Im}\,\lambda_{k,n} = \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, Y_n^-)^{\Gamma}$ *et on a une suite exacte* $0 \to \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X_n^-)^{\Gamma} \to \mathrm{Ker}\,\lambda_{k,n} \to J(\Pi^{\mathrm{alg}}) \to 0$.

Démonstration. — Le (i) suit de ce que, d'après le lemme VI.4.3, $\lambda_{k,n}$ commute à w à multiplication près par une unité de Λ_{Γ_n}. Le (ii) suit du lemme VI.6.46, de la suite

exacte $0 \to \mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X_n^-)^\Gamma \to \Pi^{\mathrm{alg}} \to J(\Pi^{\mathrm{alg}}) \to 0$, et de ce que $J(\Pi^{\mathrm{alg}})$, étant de dimension finie, peut se relever dans $\mathrm{LP}(\mathbf{Z}_p, X_n^-)^\Gamma$, si n est assez grand.

Lemme VI.6.48. — *Si $n \gg 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $i \in \mathbf{N}$:*
(i) *Si $\phi \in \mathrm{LP}(p^{-i}\mathbf{Z}_p^*, X_n^-)^\Gamma$, alors $w \cdot \phi$ est à support dans $p^{-N}\mathbf{Z}_p$.*
(ii) *Si $\phi \in \mathrm{LP}(p^{-i}\mathbf{Z}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma$, alors $(w \cdot \phi)(p^j) \in Y_n^-$, pour tout $j \leq -N-1$.*

Démonstration. — L'espace $\mathrm{LP}(\mathbf{Z}_p^*, X_n^-)^\Gamma$ étant de dimension finie, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que son image par w soit contenue dans $\mathrm{LP}(p^{-N}\mathbf{Z}_p, X_n^-)^\Gamma$. Maintenant $\mathrm{LP}(p^{-i}\mathbf{Z}_p^*, X_n^-)^\Gamma = \left(\begin{smallmatrix} p^{-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{LP}(\mathbf{Z}_p^*, X_n^-)^\Gamma$; son image par w est donc $\left(\begin{smallmatrix} p^{i} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot \mathrm{LP}(\mathbf{Z}_p^*, X_n^-)^\Gamma$, et est incluse dans $\mathrm{LP}(p^{-N}\mathbf{Z}_p, X_n^-)^\Gamma$, pour tout $i \in \mathbf{N}$. On en déduit le (i).

Pour démontrer le (ii), on décompose ϕ en $\phi_1 + \phi_2$, avec $\phi_1 \in \mathrm{LP}(p^{-i}\mathbf{Z}_p^*, X_n^-)^\Gamma$ et $\phi_2 \in \mathrm{LP}(p^{-i}\mathbf{Z}_p^*, Y_n^-)^\Gamma$. Comme $w \cdot \phi_2$ est à valeurs dans Y_n^- d'après le lemme VI.6.47, le résultat suit du (i) appliqué à ϕ_1. Ceci permet de conclure.

Lemme VI.6.49. — *Si $z \in \widetilde{D}_{\mathrm{rig}}^+$ vérifie $\iota_i^+(z) \in X_n^+$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, et si z est orthogonal à $\mathrm{LP}(p^{-N}\mathbf{Z}_p, X_n^-)^\Gamma \cap \Pi^{\mathrm{alg}}$, alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot z) \in t^k N_{\mathrm{rig}}$.*

Démonstration. — L'hypothèse $\iota_i^+(z) \in X_n^+$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, implique que z est orthogonal à $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, Y_n^-)$. L'hypothèse z orthogonal à $\mathrm{LP}(p^{-N}\mathbf{Z}_p, X_n^-)^\Gamma \cap \Pi^{\mathrm{alg}}$, implique donc, d'après le lemme VI.6.48, que z est orthogonal à $w \cdot \mathrm{LP}(p^{-i}\mathbf{Z}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma$, pour tout $i \in \mathbf{N}$. On en déduit que $w \cdot z$ est orthogonal à $\mathrm{LP}(p^{-i}\mathbf{Z}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma$, pour tout $i \in \mathbf{N}$, et donc que $\iota_i^+(w \cdot z) = 0$, si $i \geq 0$. Ceci permet de conclure.

11. Lien avec la correspondance classique. — On note $M \mapsto \mathrm{LL}(M)$ la correspondance de Langlands locale classique, qui associe une représentation lisse $\mathrm{LL}(M)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, à une représentation M de dimension 2 de $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$, non tordue de la représentation triviale par un caractère.

On rappelle qu'à un caractère $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$ est associé un caractère de $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$ donné par la formule $\delta(g) = \delta(p)^{-\deg g}\delta(\chi(g))$, où χ est le caractère cyclotomique.

Si M est une représentation de dimension 2 de $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$, non irréductible, mais pas tordue de la représentation triviale par un caractère, alors elle est d'une des formes suivantes :

- $M = \delta_1 \oplus \delta_2$, avec $\delta_1 \notin \{\delta_2, \delta_2|\ |, \delta_2|\ |^{-1}\}$, auquel cas $\mathrm{LL}(M) = \mathrm{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2|\ |^{-1}$ (isomorphe à $\mathrm{Ind}_B^G \delta_2 \otimes \delta_1|\ |^{-1}$) ;
- $M = \delta \oplus \delta|\ |$ comme représentation de $W_{\mathbf{Q}_p}$ et $N = 0$, auquel cas $\mathrm{LL}(M)$, qui est égal à $\mathrm{Ind}_B^G \delta|\ | \otimes \delta|\ |^{-1}$, est une extension de $\delta \circ \det$ par $\mathrm{St} \otimes (\delta \circ \det)$;
- $M = \delta \oplus \delta|\ |$ comme représentation de $W_{\mathbf{Q}_p}$ et $N \neq 0$, auquel cas $\mathrm{LL}(M)$ est égal à $\mathrm{St} \otimes (\delta \circ \det)$;
- $M = \delta \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 & v_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est l'extension non triviale de δ par δ, auquel cas $\mathrm{LL}(M)$ est égal à $\mathrm{Ind}_B^G \delta \otimes \delta|\ |^{-1}$.

On étend la correspondance de Langlands locale aux représentations de $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$ munies d'une filtration à poids distincts : si (M, Fil) est une telle représentation, et si les sauts de la filtration sont $a < b$, on pose $\mathrm{LL}(M, \mathrm{Fil}) = \mathrm{LL}(M) \otimes W_{a,b-a}$.

Théorème VI.6.50. — (i) *Si* $\dim J_0(\Pi^{\mathrm{alg}}) = 2$, *alors* D *est cristabélin et donc* $D_{\mathrm{pst}} = D_{\mathrm{crab}}$, *et* $\Pi^{\mathrm{alg}} = \mathrm{LL}(D_{\mathrm{pst}})$.

(ii) *Si* $\dim J_0(\Pi^{\mathrm{alg}}) = 1$, *alors* D *est le tordu, par un caractère localement algébrique, d'un module semi-stable non cristallin, et* $\Pi^{\mathrm{alg}} = \mathrm{LL}(D_{\mathrm{pst}})$.

(iii) *Si* $\dim J_0(\Pi^{\mathrm{alg}}) = 0$, *alors* D *est de Rham mais ne devient semi-stable sur aucune extension abélienne de* $\mathbf{Q}_p$.

Démonstration. — En tordant par χ^{-a}, on se ramène au cas où les poids de Hodge-Tate sont 0 et $k-1$.

Si $\dim J_0(\Pi^{\mathrm{alg}}) = 2$, alors $\dim D_{\mathrm{crab}} = 2$, d'après le (ii) du th. VI.6.30 (ou la prop. VI.6.33). L'isomorphisme $\Pi^{\mathrm{alg}} = \mathrm{LL}(D_{\mathrm{crab}})$ a été établi au début de la démonstration de la prop. VI.6.33. On en déduit le (i).

Pour démontrer le (ii), on constate que D_{crab} est de dimension 1 d'après le (ii) du th. VI.6.30. Le (φ, Γ)-module D est donc triangulin, mais pas cristabélin. Comme il est de Rham, cela implique que c'est le tordu, par un caractère localement algébrique, d'un module semi-stable non cristallin. L'isomorphisme $\Pi^{\mathrm{alg}} = \mathrm{LL}(D_{\mathrm{pst}})$ se démontre alors en remarquant que si $J_0(\Pi^{\mathrm{alg}}) = 0$, alors Π^{alg} est de la forme $(\mathrm{St} \otimes \mathrm{Sym}^{k-1}) \otimes \delta$, où $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$ est le caractère lisse défini par D_{crab}.

Le (iii) est une conséquence du (ii) du th. VI.6.30.

Remarque VI.6.51. — (i) Comme $J_0(\Pi^{\mathrm{alg}})$ est de dimension 0, 1 ou 2, il résulte du théorème et de [**28**] que Π^{alg} est supersingulière si et seulement si $\mathbf{V}(D)$ n'est pas trianguline.

(ii) Il doit être aussi possible de démontrer l'isomorphisme $\Pi^{\mathrm{alg}} = \mathrm{LL}(D_{\mathrm{pst}})$ dans le cas (iii) de manière purement locale, en extrayant, du module $D^{\psi=1}$, les facteurs ε de la représentation D_{pst} de $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$. En attendant, on peut tricher en utilisant l'invariance de Π^{alg} par rapport à la filtration (th. VI.6.42), ce qui permet, quitte à tordre par un caractère lisse, de choisir une filtration correspondant à une forme modulaire. On peut alors utiliser les travaux d'Emerton [**36, 39**] pour conclure.

VII. Extensions de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Dans ce chapitre, on utilise le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ pour calculer certains groupes d'extensions (avec caractère central) entre représentations de torsion de G. On démontre assez de résultats pour permettre à la stratégie de Kisin [**55**] de marcher. Les Ext^1 manquants ont été déterminés par Paskunas [**59**].

VII.1. Le foncteur de Jacquet et ses variantes

1. Le foncteur de Jacquet $\Pi \mapsto J(\Pi)$. — Soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$. On a déjà vu le module $J^\vee(\Pi) = (\Pi^\vee)^U$. On note $\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p$ l'orthogonal de $J^\vee(\Pi)$ dans Π ; c'est le

sous-$\mathscr{O}_L$-module de Π engendré par les $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot v$, pour $v\in\Pi$ et $b\in\mathbf{Q}_p$. On note $J(\Pi)$ le quotient de Π par $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p$; c'est le *module de Jacquet* de Π et $J^\vee(\Pi)$ est son dual.

D'après le lemme IV.3.1 et le (ii) de la prop. IV.3.2, le $k_L[B]$-module $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est d'indice fini dans Π et donc $J(\Pi)$ est de longueur finie.

Remarque VII.1.1. — (i) Si $0\to\Pi_1\to\Pi\to\Pi_2\to 0$ est exacte, alors $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p$ contient $\Pi_1\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et se surjecte sur $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p$. (Cela suit de la description de $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p$ comme sous-$\mathscr{O}_L$-module de Π engendré par les $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot v$, pour $v\in\Pi$ et $b\in\mathbf{Q}_p$.)

(ii) Si Π n'a pas de sous-objet fini, le module $(\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p)^\vee=\Pi^\vee/J^\vee(\Pi)$ s'identifie à $\mathbf{D}(\Pi)^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$, d'après les (ii) et (iii) de la prop. IV.3.2.

Proposition VII.1.2. — (i) *Si* $\Pi=\delta\circ\det$, *avec* $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *alors* $J^\vee(\Pi)=\Pi$.

(ii) *Si* $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *et* $\delta_1\delta_2^{-1}\neq\omega$, *alors* $J^\vee(B(\delta_1,\delta_2))=k_L\mathrm{Dir}_\infty$, *et, en tant que* $k_L[A]$*-module, on a* $J^\vee(B(\delta_1,\delta_2))=\delta_2^{-1}\otimes\delta_1^{-1}\omega$.

(iii) *Si* $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *alors* $J^\vee(\mathrm{St}\otimes\delta)=0$.

(iv) *Si* Π *est supersingulière, alors* $J^\vee(\Pi)=0$.

Démonstration. — Le (i) est immédiat. Le (ii) et le (iii) suivent de ce qu'une mesure invariante sur $\mathbf{Q}_p$ est identiquement nulle. Le (iv) est une traduction de l'injectivité de $\Pi^\vee\to\mathbf{D}(\Pi)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ qui suit de ce que $D_W^\natural(\Pi)$ est sans T-torsion, si on choisit W comme dans le th. IV.2.1.

Remarque VII.1.3. — Ce résultat était connu d'Emerton ; c'est ce qui lui avait permis de vérifier la nullité de certains groupes d'extensions au moment de la conférence de Montréal [**37**].

Corollaire VII.1.4. — *Si* Π *est irréductible,* $J(\Pi)$ *est de longueur* ≤ 1 *sur* $\mathscr{O}_L$.

Soit M un $k_L[B]$-module de longueur finie sur k_L avec caractère central δ_M. Comme on l'a vu au lemme III.1.4, le sous-groupe U de B agit trivialement, et M peut aussi être considéré comme un $k_L[A]$-module, ce qui permet de le décomposer en composantes isotypiques suivant les caractères $\delta_1\otimes\delta_2$ de A, où $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ et $\delta_1\otimes\delta_2\left(\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\right)=\delta_1(a)\delta_2(d)$. On note $M_{\delta_1\otimes\delta_2}$ l'ensemble des $x\in M$ tels qu'il existe $k(x)\in\mathbf{N}$ tel que $(g-\delta_1\otimes\delta_2(g))^{k(x)}\cdot x=0$ quel que soit $g\in B$. Alors $M_{\delta_1\otimes\delta_2}=0$ si $\delta_1\delta_2\neq\delta_M$, et $M=\oplus_{\delta_1\delta_2=\delta_M}M_{\delta_1\otimes\delta_2}$.

De plus, le $k_L[B]$-module $M_{\delta_1\otimes\delta_2}$ est une extension successive de $k_L[B]$-modules de rang 1, tous isomorphes à $\delta_1\otimes\delta_2$. On note $M'_{\delta_1\otimes\delta_2}$ le plus grand quotient de $M_{\delta_1\otimes\delta_2}$ isomorphe à une somme directe de $\delta_1\otimes\delta_2$. Soit

$$\left(\mathrm{Ind}_B^G\,\delta_1\otimes\delta_2\right)^0=\begin{cases}\mathrm{Ind}_B^G\,\delta_1\otimes\delta_2, & \text{si } \delta_1\neq\delta_2,\\ \delta\circ\det, & \text{si } \delta_1=\delta_2=\delta,\end{cases}$$

et définissons $\left(\mathrm{Ind}_B^G\,M'_{\delta_1\otimes\delta_2}\right)^0$ comme $\left(\mathrm{Ind}_B^G\,\delta_1\otimes\delta_2\right)^0\otimes M'_{\delta_1\otimes\delta_2}$, où $M'_{\delta_1\otimes\delta_2}$ est considéré comme étant muni de l'action triviale de G. Finalement, soient $\left(\mathrm{Ind}_B^G\,M_{\delta_1\otimes\delta_2}\right)^0$

l'image inverse de $\left(\mathrm{Ind}_B^G M'_{\delta_1\otimes\delta_2}\right)^0$ dans $\mathrm{Ind}_B^G M_{\delta_1\otimes\delta_2}$, et

$$\left(\mathrm{Ind}_B^G M\right)^0 = \oplus_{\delta_1\delta_2=\delta_M}\left(\mathrm{Ind}_B^G M_{\delta_1\otimes\delta_2}\right)^0.$$

Proposition VII.1.5. — *Soit* $\left(\mathrm{Ind}_B^G M\right)^0$ *le plus petit sous-*$k_L[G]$*-module* Π *de* $\mathrm{Ind}_B^G M$ *tel que l'application* B*-équivariante naturelle* $\Pi \subset \mathrm{Ind}_B^G M \to M$ *soit surjective. Alors* $\left(\mathrm{Ind}_B^G M\right)^0$ *est le sous-*$k_L[G]$*-module de* $\mathrm{Ind}_B^G M$ *défini plus haut.*

Démonstration. — La démonstration se fait composante isotypique par composante isotypique, par récurrence sur la longueur. Le seul cas non trivial (où $\mathrm{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2$ n'est pas irréductible) est celui d'une composante de la forme $M_{\delta\otimes\delta}$, pour lequel on utilise le lemme VII.1.6 ci-dessous.

Si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est non nul, on note Y_τ le $k_L[B]$-module $k_L \cdot e_1 \oplus k_L \cdot e_2$ avec action de B donnée par

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot e_1 = e_1 \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot e_2 = e_2 + \tau(ad^{-1})e_1.$$

Alors Y_τ est une extension de $1 \otimes 1$ par $1 \otimes 1$, et toute $k_L[B]$-extension non triviale de $1 \otimes 1$ par $1 \otimes 1$, possédant un caractère central, est isomorphe à Y_τ pour un $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) - \{0\}$ (unique à multiplication près par un élément de k_L^*).

Maintenant, on a une suite exacte de $k_L[G]$-modules

$$0 \to \left(\mathrm{Ind}_B^G 1 \otimes 1\right) \cdot e_1 \to \mathrm{Ind}_B^G Y_\tau \to \left(\mathrm{Ind}_B^G 1 \otimes 1\right) \cdot \bar{e}_2 \to 0,$$

où l'on a noté $\bar{e}_2$ l'image de e_2 dans $Y_\tau/(k_L \cdot e_1)$. Par ailleurs, $\mathrm{Ind}_B^G 1 \otimes 1$ est une extension non triviale de St par $\mathbf{1}$, et on note $\widetilde{E}_\tau$ l'image réciproque de $\mathbf{1} \cdot \bar{e}_2$ dans $\mathrm{Ind}_B^G Y_\tau$.

Lemme VII.1.6. — (i) *La sous-extension* $0 \to \mathrm{St} \cdot e_1 \to E_\tau \to \mathbf{1} \cdot \bar{e}_2 \to 0$ *de* $\mathbf{1}$ *par* St *est non triviale.*

(ii) *Soit* $\Pi \subset \mathrm{Ind}_B^G Y_\tau$. *Si l'application* B*-équivariante* $\Pi \to Y_\tau$, *obtenue en composant l'inclusion avec l'application naturelle* $\mathrm{Ind}_B^G Y_\tau \to Y_\tau$, *est injective, alors* Π *contient* $\widetilde{E}_\tau$.

Démonstration. — (i) Si $0 \to \mathrm{St} \cdot e_1 \to E_\tau \to \mathbf{1} \cdot \bar{e}_2 \to 0$ est scindée, alors $\mathrm{Ind}_B^G Y_\tau$ admet comme sous-$k_L[G]$-module une extension de $\mathbf{1} \cdot \bar{e}_2$ par $\mathbf{1} \cdot e_1$. Par ailleurs, $\mathrm{Ind}_B^G Y_\tau$, vu comme $k_L[B]$-module, admet un unique sous-quotient extension de $\mathbf{1} \cdot \bar{e}_2$ par $\mathbf{1} \cdot e_1$, à savoir Y_τ. Or Y_τ ne s'étend pas en une représentation de G car $B \cap \mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ n'agit pas trivialement ; on obtient donc une contradiction qui permet de conclure.

Démontrons le (ii). Si $\Pi \to Y_\tau$ est surjective, alors Π contient $\mathbf{1} \cdot e_1$, et son image modulo $\left(\mathrm{Ind}_B^G 1 \otimes 1\right) \cdot e_1$ contient $\mathbf{1} \cdot \bar{e}_2$, et comme l'extension $\mathrm{St} \cdot e_1 \to E_\tau \to \mathbf{1} \cdot \bar{e}_2$ est non triviale, cela implique que $\Pi/\mathbf{1} \cdot e_1$ contient E_τ, et donc que Π contient $\widetilde{E}_\tau$, ce que l'on cherchait à démontrer.

Proposition VII.1.7. — *Si* Π *est un objet de* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, *alors* Π *admet* $(\mathrm{Ind}_B^G J(\Pi))^0$ *comme sous-quotient* (plus exactement, comme sous-objet d'un quotient).

Démonstration. — Si $v \in \Pi$, on définit $\phi_v : G \to J(\Pi)$ par $\phi_v(g) = \overline{g \cdot v}$, où $\overline{g \cdot v}$ désigne l'image de $g \cdot v$ dans $J(\Pi)$. Si $h \in G$, on a $\phi_{h \cdot v}(g) = \phi_v(gh)$, et si $b \in B$, on a $\phi_v(bg) = b \cdot \phi_v(g)$, ce qui montre que $v \mapsto \phi_v$ est une application G-équivariante de Π dans $\mathrm{Ind}_B^G J(\Pi)$. Par ailleurs, l'application composée $\Pi \to \mathrm{Ind}_B^G J(\Pi) \to J(\Pi)$ est clairement surjective, ce qui permet d'utiliser la prop. VII.1.5 pour conclure.

2. Compléments sur le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$. — On rappelle que si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, on note $\mathbf{V}(\Pi)$ le dual de Tate de la représentation $\mathbf{V}(\mathbf{D}(\Pi))$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et que $\Pi \to \mathbf{V}(\Pi)$ est un foncteur covariant exact de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$ dans $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition VII.1.8. — (i) *Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, n'a pas de sous-objet fini, la suite*

$$0 \to J^\vee(\Pi) \to \Pi^\vee \to \mathbf{D}(\Pi)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p \to H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi))^* \to 0$$

de $k_L[B]$-modules est exacte (si Π a un sous-objet fini, $\mathbf{D}(\Pi)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p \to H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi))^*$ n'est pas forcément surjective).

(ii) *Si $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ est une suite exacte d'éléments de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$ sans sous-objets finis, on dispose du diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & J^\vee(\Pi_2) & \longrightarrow & J^\vee(\Pi) & \longrightarrow & J^\vee(\Pi_1) & \xrightarrow{\partial} & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Pi_2^\vee & \longrightarrow & \Pi^\vee & \longrightarrow & \Pi_1^\vee & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{D}(\Pi_2)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p & \longrightarrow & \mathbf{D}(\Pi)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p & \longrightarrow & \mathbf{D}(\Pi_1)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & \xrightarrow{\partial} & H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi_2))^\vee & \longrightarrow & H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi))^\vee & \longrightarrow & H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi_1))^\vee & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

de $k_L[B]$-modules, dans lequel les colonnes sont exactes, les deuxième et troisième lignes sont exactes, et la suite à 6 termes utilisant l'application de connexion ∂ est aussi exacte.

Démonstration. — Le (i) est la conjonction des (ii) et (iii) de la prop. IV.3.2, du (ii) de la prop. I.3.4 et du (o) de la prop. I.3.3. Le (ii) suit du (i), de l'exactitude (cf. th. I.3.9) du foncteur $D \mapsto D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et du lemme du serpent.

Corollaire VII.1.9. — *Si $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ est une suite exacte d'objets de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$ sans sous-objets finis, et si $\partial : J^\vee(\Pi_1) \to H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi_2))^\vee$ est identiquement nulle* (en particulier, si $J^\vee(\Pi_1) = 0$), *alors les suites*

$$0 \to H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi_1)) \to H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi)) \to H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi_2)) \to 0$$
$$0 \to D^\natural(\check{\mathbf{V}}(\Pi_2)) \boxtimes \mathbf{Q}_p \to D^\natural(\check{\mathbf{V}}(\Pi)) \boxtimes \mathbf{Q}_p \to D^\natural(\check{\mathbf{V}}(\Pi_1)) \boxtimes \mathbf{Q}_p \to 0$$

sont exactes.

Démonstration. — C'est une conséquence du (ii) de la prop. VII.1.8 et de ce que $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est le noyau de $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p \to H^0(\mathscr{H}', \check{\mathbf{V}}(D))^\vee$, si D est un (φ, Γ)-module.

Remarque VII.1.10. — Si la suite $0 \to \mathbf{V}(\Pi_1) \to \mathbf{V}(\Pi) \to \mathbf{V}(\Pi_2) \to 0$ est scindée, il en est de même de la suite

$$0 \to H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi_2))^\vee \to H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi))^\vee \to H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi_1))^\vee \to 0.$$

Comme $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p = \mathrm{Ker}\left(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p \to H^0(\mathscr{H}', \check{\mathbf{V}}(D))^\vee\right)$ si D est un (φ, Γ)-module, on déduit de la prop. VII.1.8 l'exactitude des lignes et colonnes du diagramme commutatif de $\mathscr{O}_L[B]$-représentations suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & J^\vee(\Pi_2) & \longrightarrow & \Pi_2^\vee & \longrightarrow & (\Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p)^\vee & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & J^\vee(\Pi) & \longrightarrow & \Pi^\vee & \longrightarrow & (\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p)^\vee & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & J^\vee(\Pi_1) & \longrightarrow & \Pi_1^\vee & \longrightarrow & (\Pi_1 \boxtimes \mathbf{Q}_p)^\vee & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

dans lequel la colonne de droite est scindée sur B.

3. Le module $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$

Proposition VII.1.11. — *Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, l'ensemble des sous-$\mathscr{O}_L$-modules de $\Pi^\vee$ de longueur finie, stables par $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, admet un plus grand élément $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$. De plus, on a la suite exacte*

$$0 \to J^\vee(\Pi) \to \widetilde{J}^\vee(\Pi) \to H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi)^\vee(1)) \to 0$$

de $k_L[A]$-modules.

Démonstration. — Soit M un sous-$\mathscr{O}_L$-module de $\Pi^\vee$ de longueur finie, stable par $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On déduit de la suite exacte $0 \to J^\vee(\Pi) \to \Pi^\vee \to \mathbf{D}(\Pi)^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p \to 0$ et de ce que, si $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, un sous-$\mathscr{O}_L$-module de type fini de $\mathbf{D}(V)$, stable par Γ, est inclus dans $\mathbf{D}(V)^{\mathrm{nr}} = H^0(\mathscr{H}', V)$, le fait que l'image de M dans $\mathbf{D}(\Pi)^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est incluse dans $H^0(\mathscr{H}', \check{\mathbf{V}}(\Pi))$, et comme $H^0(\mathscr{H}', \check{\mathbf{V}}(\Pi))$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, cela permet de conclure.

Proposition VII.1.12. — (i) *Si $\Pi = \delta \circ \det$, avec $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, alors $\widetilde{J}^\vee(\Pi) = \Pi$.*

(ii) *Si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ et $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$, alors $\widetilde{J}^\vee(B(\delta_1, \delta_2)) = k_L \mathrm{Dir}_0 \oplus k_L \mathrm{Dir}_\infty$, et, en tant que $k_L[\Delta]$-module, on a $\widetilde{J}^\vee(B(\delta_1, \delta_2)) = \mathrm{Ind}_A^D(\delta_1^{-1}\omega \otimes \delta_2^{-1})$.*

(iii) *Si* $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *alors* $\widetilde{J}^\vee(\mathrm{St}\otimes\delta) = k_L(\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty)$, *et* w *agit par multiplication par* -1 *et* $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in A$ *par* $\delta^{-1}(ad)$.

(iv) *Si* Π *est supersingulière, alors* $\widetilde{J}^\vee(\Pi) = 0$.

Démonstration. — La suite exacte de la proposition VII.1.1.11 permet de relier $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ et $J^\vee(\Pi)$. La proposition suit donc de ce que $H^0(\mathscr{H}', \check{\mathbf{V}}(\Pi))$ est nul si Π est de dimension finie ou supersingulière, et de dimension 1 si Π est de la forme $B(\delta_1,\delta_2)$ ou $\mathrm{St}\otimes\delta$.

Remarque VII.1.13. — (i) Le module $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ est stable par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, et il contient $(\Pi^\vee)^U = J^\vee(\Pi)$; il contient donc $J^\vee(\Pi) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\cdot J^\vee(\Pi)$.

(ii) Un élément de $J^\vee(\Pi)\cap\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\cdot J^\vee(\Pi)$ est fixe par le sous-groupe de G engendré par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{Q}_p & 1 \end{smallmatrix}\right)$, c'est-à-dire par $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Si Π n'a pas de quotient de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, cela implique que $J^\vee(\Pi)\cap\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\cdot J^\vee(\Pi) = 0$.

(iii) Les points (i) et (ii) montrent que, si Π n'a pas de quotient de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, alors $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ contient $J^\vee(\Pi)\oplus\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\cdot J^\vee(\Pi)$ comme sous-A-module. L'exemple de la steinberg montre que cette inclusion n'est pas toujours une égalité.

Un objet Π de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ est *équilibré* si $\widetilde{J}^\vee(\Pi) = J^\vee(\Pi)\oplus\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\cdot J^\vee(\Pi)$.

On note $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ l'orthogonal de $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ dans Π, et on note $\widetilde{J}(\Pi)$ le quotient de Π par $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$. D'après la prop. VII.1.1.11, le $\mathscr{O}_L[\Delta]$-module est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$.

Remarque VII.1.14. — (i) On peut aussi définir $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ comme le plus petit sous-$\mathscr{O}_L$-module d'indice fini de Π stable par $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Si $0\to\Pi_1\to\Pi\to\Pi_2\to 0$ est exacte, il en résulte que $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ contient $\Pi_1\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ et se surjecte sur $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$.

(ii) Le fait, pour Π, d'être équilibré se traduit par l'exactitude de la suite

$$0\to\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*\to(\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p)\oplus w\cdot(\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p)\to\Pi,$$

l'application $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*\to(\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p)\oplus w\cdot(\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p)$ étant $v\mapsto(v,-w\cdot v)$. Si Π n'a pas de quotient de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, la suite est aussi exacte à droite d'après le (ii) de la rem. VII.1.1.13.

Proposition VII.1.1.15. — (i) *Si* $\Pi = \delta\circ\det$, *avec* $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *alors* $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^* = 0$.

(ii) *Si* $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *et* $\delta_1\delta_2^{-1}\neq\omega$, *alors* $B(\delta_1,\delta_2)\boxtimes\mathbf{Q}_p^* = \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$.

(iii) *Si* $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *alors* $(\mathrm{St}\otimes\delta)\boxtimes\mathbf{Q}_p^* = \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$.

(iv) *Si* Π *est supersingulière, alors* $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^* = \Pi$

Démonstration. — C'est immédiat à partir de la prop. VII.1.1.12 en prenant les orthogonaux.

Proposition VII.1.1.16. — *Si* $v\in\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p$, *il existe* $n(v)$ *tel que, si* $v_p(b)\leq -n(v)$, *alors* $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot v\in\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier l'énoncé pour v de la forme $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot x$ car ces éléments engendrent $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p$. Maintenant, si $\mu\in\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ et $x\in\Pi$, on a

$$\langle\mu,\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x\rangle=\langle\mu,\left(\begin{smallmatrix}\frac{b+a}{b} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\frac{b}{b+a} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x\rangle=\langle\left(\begin{smallmatrix}\frac{b}{b+a} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu,\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\frac{b}{b+a} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x\rangle$$

Par ailleurs, il existe n_1 tel que $\left(\begin{smallmatrix}1+p^{n_1}\mathbf{Z}_p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ laisse fixe x. De même, $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ étant de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ et stable par Δ, il existe n_2 tel que $\left(\begin{smallmatrix}1+p^{n_2}\mathbf{Z}_p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ agisse trivialement sur $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$. Posons alors $n(v)=v_p(a)-\sup(n_1,n_2)$, de telle sorte que l'on ait $v_p(\frac{b}{b+a}-1)\geq\sup(n_1,n_2)$, si $v_p(b)\leq -n(v)$. On déduit de la formule ci-dessus que $\langle\mu,\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x\rangle=\langle\mu,\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x\rangle$, et donc que $\langle\mu,\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\rangle=0$, si $\mu\in\widetilde{J}^\vee(\Pi)$ et $v_p(b)\leq -n(v)$. Compte-tenu de la définition de $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ comme orthogonal de $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$, cela permet de conclure.

VII.2. Extensions de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. — Ce § est consacré à la question suivante : combien perd-on d'information en passant de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à son sous-groupe de Borel ? Les résultats obtenus sont abondamment utilisés dans la suite du chapitre. Des résultats plus généraux ont, depuis la rédaction de ce chapitre, été obtenus par Paskunas [**58**].

On note $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}B$ la catégorie des $\mathscr{O}_L$-représentations de B localement constantes, admettant un caractère central. La restriction à B nous fournit une application naturelle de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ dans $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}B$.

Si $H\in\{B,G\}$, et si Π_1,Π_2 sont deux objets de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}H$, on note $\mathrm{Ext}^1_H(\Pi_2,\Pi_1)$ le groupe des extensions de Π_2 par Π_1 dans $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}H$ (ce qui, par définition, implique l'existence d'un caractère central). Si Π_1,Π_2 sont deux objets de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, la restriction à B nous fournit une application naturelle de $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2,\Pi_1)$ dans $\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2,\Pi_1)$.

Théorème VII.2.1. — *Si* $\Pi_1\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ *vérifie* $\Pi_1^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}=0$, *alors pour tout* $\Pi_2\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, *l'application naturelle* $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2,\Pi_1)\to\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2,\Pi_1)$ *est injective.*

Remarque VII.2.2. — On montrera en fait un résultat plus précis : si l'application naturelle $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2,\Pi_1)\to\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2,\Pi_1)$ n'est pas injective, alors il existe $\chi\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ tel que $\chi\circ\det$ soit un sous-objet de Π_1 et $\mathrm{St}\otimes(\chi\circ\det)$ soit un sous-quotient de Π_2. Cet énoncé est essentiellement optimal : $0\to\mathbf{1}\to\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p),k_L)\to\mathrm{St}\to 0$ est scindée comme suite de B-représentations puisque $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)$ est, dans $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p),k_L)$, un supplémentaire, stable par B, des fonctions constantes, mais cette suite n'est pas scindée en tant que suite de G-représentations (cf. [**3**]).

Démonstration. — Nous allons nous placer dans un cadre un peu plus général que nécessaire (avec les notations ci-dessous, traiter le cas de $M=N=\Pi_2$ suffirait), mais cette généralité nous sera utile plus tard (prop. VII.2.12).

Soit $0\to\Pi_1\to\Pi\to\Pi_2\to 0$ une suite exacte d'éléments de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$. Soient $M\supset N$ des sous-$\mathscr{O}_L$-modules de Π_2 vérifiant les propriétés suivantes :

(H1) M est stable par B et il existe un scindage B-équivariant $\iota:M\to\Pi$;

(H2) N est stable par le sous-groupe diédral Δ de G ;

Les hypothèses (H1) et (H2) impliquent l'existence de $\lambda : N \to \Pi_1$ tel que l'on ait $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\iota(v) = \lambda(v)+\iota(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot v)$. Si $\widetilde{M}$ est l'image réciproque de M dans Π, on peut écrire tout élément v de $\widetilde{M}$, de manière unique, sous la forme $v = v_1 + \iota(v_2)$, avec $v_1 \in \Pi_1$ et $v_2 \in M$. Pour simplifier un peu les formules, on notera plus simplement (v_1, v_2) l'élément $v_1 + \iota(v_2)$ de $\widetilde{M}$. On a alors $w \cdot (v_1, v_2) = (w \cdot v_1 + \lambda(v_2), w \cdot v_2)$, si $v_2 \in N$, et $b \cdot (v_1, v_2) = (b \cdot v_1, b \cdot v_2)$, si $(v_1, v_2) \in \widetilde{M}$, et si $b \in B$.

Lemme VII.2.3. — (i) *Si $v \in N$, on a*

$$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\lambda(v) + \lambda(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot v) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda(\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)\cdot v) = \left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\cdot\lambda(v).$$

(ii) $\operatorname{Ker}\lambda$ *et* $\operatorname{Im}\lambda$ *sont stables par* Δ.

Démonstration. — Le (i) est une traduction des identité $w^2 = 1$ et $w\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)w$, qui impliquent

$$\begin{aligned}(0,z) = w^2\cdot(0,z) &= w\cdot(\lambda(z), w\cdot z) = (w\cdot\lambda(z) + \lambda(w\cdot z), z)\\ (\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)\cdot\lambda(z), \left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)w\cdot z) &= \left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)\cdot(\lambda(z), w\cdot z) = \left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)w\cdot(0,z)\\ &= w\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\cdot(0,z) = w\cdot(0, \left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\cdot z) = (\lambda(\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\cdot z), w\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\cdot z)\end{aligned}$$

Le (ii) est une conséquence immédiate du (i).

On suppose à partir de maintenant qu'en sus de (H1) et (H2), on a :

(H3) quel que soit $v \in N$, il existe $n_1(v) \in \mathbf{N}$, tel que $\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v \in N$ si $v_p(x) \leq -n_1(v)$.

La propriété (H3) alliée avec le fait que l'action de G est localement constante, implique que, si $v \in N$, il existe $n(v)$ tel que

- $\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v \in N$ et $\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)w\cdot v \in N$, si $v_p(x) \leq -n(v)$,
- $\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot z = z$, si $z \in \{v, w\cdot\lambda(v), w\cdot v, w\cdot\lambda(w\cdot v)\}$, et si $v_p(x) \geq n(v)$.

Lemme VII.2.4. — *Si $v \in N$, et si $v_p(x) \geq n(v)$, alors* $\lambda(\left(\begin{smallmatrix}x&1\\0&-x^{-1}\end{smallmatrix}\right)\cdot v) = 0$.

Démonstration. — Soient $b = \left(\begin{smallmatrix}x&1\\0&-x^{-1}\end{smallmatrix}\right)$, $u = \left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $u' = \left(\begin{smallmatrix}1&x^{-1}\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Un petit calcul montre que $u = w\cdot u'\cdot w\cdot b\cdot w$. Par ailleurs, $bw\cdot z = \left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&-x^{-1}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&x^{-1}\\0&1\end{smallmatrix}\right)w\cdot z$ et $u'wbw\cdot z = wu\cdot z$ sont éléments de N, si $v_p(x) \geq n(z)$, ce qui permet d'utiliser, dans le calcul ci-dessous, la formule pour l'action de w donnée plus haut.

$$\begin{aligned}(0, u\cdot z) &= wu'wbw\cdot(0,z) = wu'wb\cdot(\lambda(z), w\cdot z) = wu'w\cdot(b\cdot\lambda(z), bw\cdot z)\\ &= wu'\cdot(wb\cdot\lambda(z) + \lambda(bw\cdot z), wbw\cdot z)\\ &= w\cdot(u'wb\cdot\lambda(z) + u'\cdot\lambda(bw\cdot z), u'wbw\cdot z)\\ &= (wu'wb\cdot\lambda(z) + wu'\cdot\lambda(bw\cdot z) + \lambda(u'wbw\cdot z), wu'wbw\cdot z)\\ &= (uw\cdot\lambda(z) + wu'\cdot\lambda(bw\cdot z) + \lambda(wu\cdot z), u\cdot z).\end{aligned}$$

Comme $uw\cdot\lambda(z) = w\cdot\lambda(z)$ et $u\cdot z = z$, si $v_p(x) \geq n(z)$, et comme $w\cdot\lambda(z)+\lambda(w\cdot z) = 0$ d'après le (i) du lemme VII.2.3, on en déduit la nullité de $wu'\cdot\lambda(bw\cdot z)$. Il suffit alors d'appliquer ce qui précède à $z = w\cdot v$ pour en déduire le résultat.

Si $\ell \in \mathbf{N}$, on note $P^{[\ell]}$ l'ensemble des $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, avec $v_p(a) \geq v_p(b) + \ell$. Si $v \in \Pi_2$, on note $P^{[\ell]} \cdot v$ le sous-$\mathscr{O}_L$-module de Π_2 engendré par les $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v$, pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P^{[\ell]}$.

Corollaire VII.2.5. — $\operatorname{Ker}\lambda$ *contient* $P^{[n(v)]} \cdot v$, *quel que soit* $v \in N$.

Démonstration. — Si $v \in \mathbf{N}$, alors $\operatorname{Ker}\lambda$ contient $\left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ 0 & -b^{-1} \end{smallmatrix}\right) \cdot v$, si $v_p(b) \geq n(v)$. Comme $\operatorname{Ker}\lambda$ est stable par Δ, il contient aussi $\left(\begin{smallmatrix} ab^{-1} & 0 \\ 0 & -b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ 0 & -b^{-1} \end{smallmatrix}\right) \cdot v = \left(\begin{smallmatrix} a & ab^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v$ quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p^*$ et $b \in \mathbf{Q}_p^*$ vérifiant $v_p(b) \geq n(v)$. Ceci permet de conclure.

On suppose maintenant, qu'en sus de (H1) (H2) et (H3), on a :

(H4) Il existe une famille finie $(v_i)_{i \in I}$ d'éléments de N telle que, pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, on ait l'inclusion $N \subset \left(\sum_{i \in I} P^{[\ell]} \cdot v_i\right) + w \cdot \left(\sum_{i \in I} P^{[\ell]} \cdot v_i\right)$.

Lemme VII.2.6. — (i) $\operatorname{Ker}\lambda = N$.

(ii) $\iota(N)$ *est stable par* Δ.

Démonstration. — Le (i) est une conséquence immédiate du cor. VII.2.5, de l'hypothèse (H4) et de la stabilité de $\operatorname{Ker}\lambda$ par w. Le (ii) suit du (i), qui se traduit par la stabilité de $\iota(N)$ par w, et du fait que $\iota(N)$ est, par construction, stable par A.

Considérons les propriétés suivantes :

(P1) Il existe un ensemble fini $\{v_i,\ i \in I\}$ d'éléments de Π tels que, pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, on ait l'inclusion $\left(\sum_{i \in I} P^{[\ell]} \cdot v_i\right) + w \cdot \left(\sum_{i \in I} P^{[\ell]} \cdot v_i\right) = \Pi$.

(P2) Il existe un ensemble fini $\{v_i,\ i \in I\}$ d'éléments de $\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$ tels que, quel que soit $\ell \in \mathbf{N}$, on ait l'inclusion $\sum_{i \in I} P^{[\ell]} \cdot v_i \supset \Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$.

Remarque VII.2.7. — (i) (P1) se traduit par : « $M = N = \Pi$ vérifient (H4) ».

(ii) (P2), alliée à la prop. VII.1.16, se traduit par : « $M = \Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $N = \Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$ vérifient (H3) et (H4) ».

Lemme VII.2.8. — *Soit* $\Pi_2 \in \operatorname{Rep}_{\text{tors}} G$.

(i) *Si* Π_2 *vérifie* (P1), *l'application naturelle* $\operatorname{Ext}^1_G(\Pi_2, \Pi_1) \to \operatorname{Ext}^1_B(\Pi_2, \Pi_1)$ *est injective, pour tout* $\Pi_1 \in \operatorname{Rep}_{\text{tors}} G$.

(ii) *Si* Π_2 *vérifie* (P2), *l'application naturelle* $\operatorname{Ext}^1_G(\Pi_2, \Pi_1) \to \operatorname{Ext}^1_B(\Pi_2, \Pi_1)$ *est injective, quel que soit* $\Pi_1 \in \operatorname{Rep}_{\text{tors}} G$ *vérifiant* $\Pi_1^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$.

Démonstration. — Soit Π une extension de Π_2 par Π_1 qui est scindée sur B. Si Π_2 vérifie (P1), alors $M = N = \Pi_2$ vérifient les propriétés (H1), (H2), (H3) et (H4), et le (i) du lemme VII.2.6 montre que le scindage B-équivariant $\Pi_2 \to \Pi$ est en fait G-équivariant. On en déduit le (i).

Maintenant, si Π_2 satisfait (P2), $M = N = \Pi_2$ vérifient (H1), (H2) et (H3), ce qui nous fournit $\lambda : \Pi_2 \to \Pi$ tel que $w \cdot (0, z) = (\lambda(z), w \cdot z)$, et prouve (lemme VII.2.3) que $\operatorname{Im}\lambda$ est stable par Δ. Par ailleurs, $M = \Pi_2$ et $N = \Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$ vérifient (H1), (H2), (H3) et (H4), ce qui prouve (lemme VII.2.6) que $\operatorname{Ker}\lambda$ contient $\Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$. Comme

$\Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$ est d'indice fini dans Π_2, cela implique que que $\mathrm{Im}\,\lambda$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, et comme $\mathrm{Im}\,\lambda$ est stable par Δ (lemme VII.2.3), cela implique, d'après le lemme III.1.5, que $\mathrm{Im}\,\lambda$ est inclus dans $\Pi_1^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$. On en déduit le (ii).

Lemme VII.2.9. — *Les propriétés* (P1) *et* (P2) *sont stables par extensions.*

Démonstration. — C'est clair pour (P1) : si $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ est exacte, il suffit de prendre pour $\{v_i,\ i \in I\}$ la réunion d'une famille $\{v_i, i \in I_1\}$ (resp. $\{v_i, i \in I_2\}$) d'éléments de Π_1 (resp. de Π relevant une famille d'éléments de Π_2) dont la propriété affirme l'existence.

Passons à la stabilité de (P2) par extensions. D'après la remarque VII.1.14, si $0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \Pi_2 \to 0$ est exacte, alors $\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$ se surjecte sur $\Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$ et contient $\Pi_1 \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$. Soit donc $\{v_i, i \in I\}$ réunion de familles $\{v_i, i \in I_1\}$ (resp. $\{v_i, i \in I_2\}$) d'éléments de Π_1 (resp. de Π relevant une famille d'éléments de Π_2) dont la propriété affirme l'existence. Si $\ell \in \mathbf{N}$, soit $\Pi^{[\ell]} = \sum_{i\in I} P^{[\ell]} \cdot v_i$. D'après la prop. VII.1.16, $\sum_{i\in I} P^{[\ell]} \cdot v_i \subset \Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$, si ℓ est assez grand. Par ailleurs, $P^{[\ell]}$ se surjecte sur $\Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$ et contient $\Pi_1 \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$ quel que soit $\ell \in \mathbf{N}$, et comme $\Pi_2 \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$ et $\Pi_1 \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$ sont d'indice fini dans Π_2 et Π_1 respectivement, cela implique que $\Pi^{[\ell]}$ est d'indice fini dans Π. Finalement, comme $P^{[\ell]}$ est stable par multiplication à gauche par $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et comme $\Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$ est le plus petit sous-$\mathscr{O}_L$-module d'indice fini de Π stable par $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, on en déduit que $\Pi^{[\ell]} = \Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$, si $\ell \gg 0$. Ceci permet de conclure.

Lemme VII.2.10. — (i) *Les* $\chi \circ \det$, *pour* $\chi \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *vérifient* (P1) *et* (P2).
(ii) *Les supersingulières vérifient* (P1) *et* (P2).
(iii) *Si* $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *vérifient* $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$, *alors* $B(\delta_1,\delta_2)$ *vérifie* (P1) *et* (P2).
(iv) *La steinberg vérifie* (P2).
(v) *Tout élément de* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$ *vérifie* (P2).

Démonstration. — – Le (i) est immédiat.

– Soit Π une représentation supersingulière. Il existe alors $r \in \{0,\dots,p-1\}$ et $\chi \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ tels que $\Pi \cong \Pi(r,0,\chi)$. Soit alors $W = W_{r,\chi} \oplus W_{p-1-r,\chi\omega^r}$. Un élément de W peut se représenter comme un couple (P,Q), avec $P \in k_L[X]$ de degré $\leq r$ et $Q \in k_L[Y]$ de degré $\leq p-1-r$. D'après la proposition III.3.12, $W \in \mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$ et $R(W,\Pi)$ est engendré par

$$R_0 = [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,Y^{p-1-r})] - [\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(1,0)]$$
$$\text{et } R_1 = [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(X^r,0)] - \alpha[\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)],\ \text{ avec } \alpha = (-1)^r\chi(p)^{-2}.$$

Maintenant, si $P \in k_L[Z]$ est de degré $\leq s \leq p-1$, on peut écrire P, de manière unique, sous la forme $P = \sum_{i=1}^{s+1} \beta_i(P)(Z+i)^s$. On a alors, si $b \in \mathbf{Z}_p^*$ et $\ell \geq 1$, la formule

$$\sum_{i=1}^{r+1} \beta_i(P)\left(\begin{smallmatrix}p^\ell & b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot R_1 = [\left(\begin{smallmatrix}p^\ell & b\\0&1\end{smallmatrix}\right),(P,0)] - \alpha\sum_{i=1}^{r+1}\beta_i(P)[\left(\begin{smallmatrix}p^{\ell+1} & b+p^\ell i\\0&1\end{smallmatrix}\right),(0,1)].$$

On en déduit l'appartenance de $\left(\begin{smallmatrix} p^\ell & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (P,0)$ à $P^{[\ell+1]} \cdot W$. On montre de même que $\left(\begin{smallmatrix} p^\ell & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (0,Q) \in P^{[\ell+1]} \cdot W$, et donc que $P^{[\ell]} \cdot W = P^{[\ell+1]} \cdot W$ si $\ell \geq 1$, en échangeant les rôles de X et Y, de r et $p-1-r$, et de R_0 et R_1.

Maintenant, si $r \leq p-2$, on a $r+1 \leq p-1$ et, comme ci-dessus,

$$\sum_{i=1}^{r+1} \beta_i(P)\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot R_1 = [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), (P,0)] - \alpha \sum_{i=1}^{r+1} \beta_i(P)[\left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), (0,1)],$$

ce qui prouve que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (P,0) \in P^{[1]} \cdot W$.

Si $r = p-1$, un petit calcul (tenant compte de ce que $p-1-r=0$) montre que

$$\begin{aligned} &\alpha\beta_p(P)\left(\begin{smallmatrix} p & p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot R_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i(P)\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot R_1 \\ &\qquad = [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), (P,0)] - \alpha \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i(P)[\left(\begin{smallmatrix} p & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), (0,1)] - \alpha\beta_p(P)\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot [\left(\begin{smallmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), (1,0)], \end{aligned}$$

ce qui prouve, dans ce cas aussi, que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (P,0) \in P^{[1]} \cdot W$.

On en déduit, comme ci-dessus, que l'on a, dans tous les cas, $P^{[0]} \cdot W = P^{[1]} \cdot W$, et donc $P^{[\ell]} \cdot W = P^{[0]} \cdot W$ quel que soit $\ell \geq 0$. Comme $P^{[0]} \cdot W = \Pi = \Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p$, cela démontre le (ii).

– Si $\Pi = B(\delta_1, \delta_2)$, on peut prendre $\phi_1 = \mathbf{1}_{1+p\mathbf{Z}_p} \in \Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$, auquel cas $P^{[\ell]} \cdot v$ contient la fonction $\mathbf{1}_{(b+p^n)+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}$ quel que soit $b \in \mathbf{Q}_p^*$ et $n \geq v_p(b) + \ell$. L'espace $P^{[\ell]} \cdot W$ contient donc $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, k_L) = \Pi \boxtimes \mathbf{Q}_p^*$, ce qui prouve que Π vérifie (P2). De plus, l'image de $\left(\begin{smallmatrix} p^n & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \phi_\infty$ dans le $k_L[\Delta]$-module $\Pi/\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est non nulle quel que soit $n \in \mathbf{N}$; comme ce $k_L[\Delta]$-module est irréductible (cf. rem. III.3.10), si $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$, cela montre que $(P^{[\ell]} \cdot k_L\phi_1 + k_L\phi_\infty) + w \cdot (P^{[\ell]} \cdot k_L\phi_1 + k_L\phi_\infty)) = \Pi$, quel que soit $\ell \in \mathbf{N}$, et donc que Π vérifie (P1). Ceci démontre le (iii).

– Si Π est la steinberg, la même démonstration que dans le cas de $B(\delta_1, \delta_2)$ montre que Π vérifie (P2).

– Les points (i)–(iv) montrent que tout objet irréductible de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$ vérifie (P2). Le (v) est donc une conséquence de la stabilité de la propriété (P2) par extensions (lemme VII.2.9).

Ceci permet de conclure.

Remarque VII.2.11. — (o) Le th. VII.2.1 est une conséquence de la conjonction du (v) du lemme VII.2.10 et du (ii) du lemme VII.2.8.

(i) La stabilité de la propriété (P1) par extensions montre que si Π_2 n'a pas de sous-quotient isomorphe à $\mathrm{St} \otimes (\chi \circ \det)$, alors Π_2 vérifie (P1) ; par suite, l'application naturelle $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2, \Pi_1) \to \mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2, \Pi_1)$ est injective, quel que soit $\Pi_1 \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$.

(ii) St ne vérifie par (P1) car, quel que soit $v \in \mathrm{St}$, on a $P^{[\ell]} \cdot v \subset \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$, si ℓ est assez grand, et, de plus, $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est stable par w. En particulier, cela ne permet pas de conclure à l'injectivité de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St}, \Pi_1) \to \mathrm{Ext}^1_B(\mathrm{St}, \Pi_1)$, en général (c'est rassurant vu qu'il y a des contrexemples...). Maintenant, l'action de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_p^* \end{smallmatrix}\right)$

sur le k_L-espace vectoriel $\mathrm{St}/\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$, de dimension 1, est triviale, alors que $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ agit par -1. En utilisant les formules (i) et (ii) du lemme VII.2.3, on voit que si E est une extension non triviale de St par Π_1 qui devient triviale quand on la restreint à B, alors Π_1 contient la représentation triviale.

(iii) Les points (i) et (ii) ci-dessus entrainent le raffinement du th. VII.2.1 donné dans la rem. VII.2.2.

Proposition VII.2.12. — *Si Π_2 est équilibrée et sans quotient fini, alors, quel que soit $\Pi_1\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, l'application naturelle $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi_2,\Pi_1)\to\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p,\Pi_1)$ est injective.*

Démonstration. — Soit $0\to\Pi_1\to\Pi\to\Pi_2\to 0$ une extension de Π_2 par Π_1 dont l'image dans $\mathrm{Ext}^1_B(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p,\Pi_1)$ est nulle. On peut donc identifier $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p$ à un sous $k_L[B]$-module de Π. De plus, $M=\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $N=\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$ satisfont les propriétés (H1) et (H2) de manière évidente, (H3) et (H4) d'après le (v) de la prop. VII.2.10 (cf. (i) de la rem. VII.2.7). Il en résulte, d'après le lemme VII.2.6, que $\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$, vu comme sous-$\mathscr{O}_L$-module de Π, est stable par w.

Par ailleurs, comme Π_2 est équilibrée, la suite

$$0\to\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p^*\to(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p)\oplus w\cdot(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p)\to\Pi_2\to 0$$

est exacte, ce qui permet d'identifier Π_2 au sous-$\mathscr{O}_L$-module $(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p)+w\cdot(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p)$ de Π, qui est stable par Δ par construction, et notre problème est de prouver que ce module est stable par G.

Pour cela, écrivons un élément de Π sous la forme (v_1,v_2), avec $v_1\in\Pi_1$ et $v_2\in\Pi_2$. Le $k_L[B]$-module $\Pi/(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p)$ est une extension de $\Pi_2/(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p)=J(\Pi_2)$ par Π_1 et donc nous fournit un 1-cocycle $g\mapsto c_g$ sur B à valeurs dans $\mathrm{Hom}(J(\Pi_2),\Pi_1)$. On note $\overline{v}$ l'image de $v\in\Pi_2$ dans $J(\Pi_2)$. L'action de $b\in B$ sur (v_1,v_2) est alors donnée par $b\cdot(v_1,v_2)=(b\cdot v_1+c_b(\overline{v}_2),b\cdot v_2)$, tandis que celle de w est donnée par $w\cdot(v_1,v_2)=(w\cdot v_1,w\cdot v_2)$.

Il s'agit de vérifier que $g\mapsto c_g$ est identiquement nul. Comme $J(\Pi_2)$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, et comme l'action de B est localement constante, il existe $n\in\mathbf{N}$ tel que $c_g=0$, si $g\in\left(\begin{smallmatrix}1+p^n\mathbf{Z}_p&p^n\mathbf{Z}_p\\0&1+p^n\mathbf{Z}_p\end{smallmatrix}\right)$. De plus, le centre agissant par un caractère, on a $c_g=0$, si $g=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)$ avec $a\in\mathbf{Q}_p^*$. Finalement, considérons l'action de $u=\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, avec $v_p(x)\ll 0$ de telle sorte que $u'=\left(\begin{smallmatrix}1&x^{-1}\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ agisse trivialement sur $J(\Pi_2)$. En utilisant l'identité $u=wu'wbw$, avec $b=\left(\begin{smallmatrix}x&1\\0&-x^{-1}\end{smallmatrix}\right)$, on obtient, si $v\in M$,

$$\begin{aligned}u\cdot(0,v)&=wu'wbw\cdot(0,v)=wu'wb\cdot(0,w\cdot v)\\&=wu'w\cdot(c_b(\overline{w\cdot v}),bw\cdot v)=(wu'w\cdot c_b(\overline{w\cdot v}),wu'w\cdot bw\cdot v),\end{aligned}$$

la dernière égalité venant de ce que $c_{u'}=0$ par l'hypothèse selon laquelle u' agit trivialement sur $J(\Pi_2)$. Maintenant, si $v\in\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p$, on a $u\cdot(0,v)=(0,u\cdot v)$, ce qui implique que $c_b(\overline{w\cdot v})=0$ quel que soit $v\in\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p$, et comme $w\cdot(\Pi_2\boxtimes\mathbf{Q}_p)$ se surjecte sur $J(\Pi_2)$ car Π_2 est supposée équilibrée, cela implique $c_b=0$. Pour conclure, il suffit de constater que le sous-groupe engendré par $\left(\begin{smallmatrix}1+p^n\mathbf{Z}_p&p^n\mathbf{Z}_p\\0&1+p^n\mathbf{Z}_p\end{smallmatrix}\right)$, les $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)$,

avec $a \in \mathbf{Q}_p^*$, et les $\left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 0 & -x^{-1} \end{smallmatrix}\right)$, avec $v_p(x) \ll 0$, n'est autre que B, ce qui prouve que $g \mapsto c_g$ est identiquement nul.

VII.3. Les atomes galoisiens et leurs (φ, Γ)-modules

1. Atomes galoisiens. — Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $k_L(\delta)$ la k_L-représentation de dimension 1 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, sur laquelle $g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit par multiplication par $\delta(g)$.

Un *atome galoisien* (sous-entendu : de dimension 2 pour $\mathbf{Q}_p$) est une k_L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 qui n'est somme directe de deux caractères sur aucune extension de k_L et n'est pas la tordue par un caractère d'une extension de $k_L(\omega)$ par k_L.

Toute L-représentation irréductible V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, admet (quitte à faire une extension quadratique de L) un $\mathscr{O}_L$-réseau V^0 tel que $k_L \otimes V^0$ ne soit pas somme de deux caractères. Si $p \geq 5$, toute L-représentation irréductible V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, admet un $\mathscr{O}_L$-réseau V^0 tel que $k_L \otimes V^0$ soit un atome galoisien.

La raison pour éliminer les extensions de $k_L(\omega)$ par k_L (et leurs tordues) est la suivante : si V est une L-représentation irréductible de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, admettant un $\mathscr{O}_L$-réseau V^0 tel que $k_L \otimes V^0$ soit une extension non triviale de $k_L(\omega)$ par k_L, alors V admet aussi un réseau V^1 tel que $k_L \otimes V^0$ soit une extension non triviale de k_L par $k_L(\omega)$, et une extension non triviale de k_L par $k_L(\omega)$ contient plus d'information qu'une extension non triviale de $k_L(\omega)$ par k_L. Malheureusement, $p = 2$ et $p = 3$ posent quelques problèmes car on a $\omega^{-1} = \omega$, et une extension non triviale de k_L par $k_L(\omega)$ est aussi, à torsion près, une extension non triviale de $k_L(\omega)$ par k_L. Nous serons donc obligé de laisser quelques cas de côté, si $p = 2$ ou $p = 3$.

Il est très facile de faire la liste des atomes galoisiens (cf. prop. VII.3.1).

Soit $\mathbf{Q}_{p^2}$ l'extension quadratique non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, et soit $\mathbf{Z}_{p^2}$ l'anneau de ses entiers. Soit $\mathscr{F}$ le groupe de Lubin-Tate sur K associé à $pX + X^{p^2}$, et soit $T_p(\mathscr{F})$ son module de Tate. Le $\mathbf{Z}_p$-module $T_p(\mathscr{F})$ est libre de rang 2 et est muni d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. La restriction de cette action à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_{p^2}}$ est donnée par un caractère $\chi_{\mathscr{F}} : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_{p^2}} \to \mathbf{Z}_{p^2}^*$ qui correspond, via la théorie locale du corps de classes, au caractère $x \mapsto x|x|$ de $\mathbf{Q}_{p^2}^*$. En notant « ind » l'induction de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_{p^2}}$ à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on déduit de ce qui précède un isomorphisme $T_p(\mathscr{F}) \cong \mathrm{ind}(\chi_{\mathscr{F}})$ de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. La réduction modulo p de $\chi_{\mathscr{F}}$ est ω_2 (caractère fondamental de Serre de niveau 2).

Si $r \in \mathbf{Z}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $V(r, \delta)$ la représentation $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1}) \otimes \delta$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Si $0 \leq r \leq p-1$, la représentation $V(r, \delta)$ est irréductible, et toute k_L-représentation absolument irréductible de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $V(r, \delta)$ pour un couple convenable (r, δ), avec $0 \leq r \leq p-1$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$.

Si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ sont tels que $\delta_1 \delta_2^{-1} \notin \{1, \omega\}$, alors $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\delta_1 \delta_2^{-1}))$ est un k_L-espace vectoriel de dimension 1. Il existe donc, à isomorphisme près, une unique extension non triviale $V(\delta_1, \delta_2)$ de $k_L(\delta_2)$ par $k_L(\delta_2)$.

On peut voir un élément de τ de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, A)$, groupe des morphismes continus de $\mathbf{Q}_p^*$ dans un $\mathbf{Z}_p$-module A, comme un élément de $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, A)$.

Si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est non nul, et si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $V(\delta,\delta,\tau)$ le k_L-espace vectoriel $k_L e_1 \oplus k_L e_2$, de dimension 2, muni de l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ donnée par $g(e_1) = \delta(g)e_1$ et $g(e_2) = \delta(g)(e_2 + \tau(g)e_1)$. Alors $V(\delta,\delta,\tau)$ est une extension non triviale de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$ qui est, à isomorphisme près, déterminé par la droite de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) \cong H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L)$ engendrée par τ. De plus, toute extension non triviale de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$ est isomorphe à $V(\delta,\delta,\tau)$ pour un certain $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) - \{0\}$.

Si $p \neq 2$, alors $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ et $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega))$ sont des k_L-espaces vectoriels de dimension 2, qui sont mis en dualité parfaite par le cup-produit $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L) \times H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega)) \to H^2(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega)) \cong k_L$. Si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est non nul, on note $V(\omega, 1, \tau^\perp)$ l'extension de k_L par $k_L(\omega)$ dont la classe dans $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega))$ engendre l'orthogonal de τ. Plus généralement, si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est non nul, et si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on note $V(\delta\omega, \delta, \tau^\perp)$ la représentation $V(\omega, 1, \tau^\perp) \otimes \delta$. Ceci fait de $V(\delta\omega, \delta, \tau^\perp)$ une extension de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta\omega)$, et toute extension non triviale de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta\omega)$ est isomorphe à $V(\delta\omega, \delta, \tau^\perp)$ pour un certain $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) - \{0\}$.

Proposition VII.3.1. — *Un atome galoisien est isomorphe à une des représentations suivantes :*

- $V(r,\delta)$, *avec* $0 \leq r \leq p-1$ *et* $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$,
- $V(\delta_1,\delta_2)$, *avec* $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *et* $\delta_1\delta_2^{-1} \notin \{1, \omega, \omega^{-1}\}$,
- $V(\delta,\delta,\tau)$, *avec* $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *et* $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) - \{0\}$,
- $V(\delta\omega,\delta,\tau^\perp)$, *avec* $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *et* $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L) - \{0\}$ (si $p \neq 2$).

Remarque VII.3.2. — On a $V(r,1) = V(p-1-r, \omega^r)$ et, à torsion près par un caractère, c'est le seul isomorphisme entre atomes galoisiens.

2. Les (φ,Γ)-modules attachés aux atomes galoisiens

– *Atomes irréductibles* Si $r \in \mathbf{Z}$, le (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\chi_{\mathscr{F}}^{-r}))$ peut se décrire explicitement de la manière suivante. Soit $q = \frac{\varphi(T)}{T} = T^{p-1} + pT^{p-2} + \cdots + \binom{p}{2}T + p \in \mathbf{Z}_p[T]$. Si $\gamma \in \Gamma$, on a $\frac{\gamma(q)}{q} \in 1 + T\mathbf{Z}_p[[T]]$, ce qui fait que les produits infinis

$$a_+(\gamma) = \prod_{n=0}^{+\infty} \varphi^{2n+1}\Big(\frac{\gamma(q)}{q}\Big) \quad \text{et} \quad a_-(\gamma) = \prod_{n=0}^{+\infty} \varphi^{2n}\Big(\frac{\gamma(q)}{q}\Big)$$

convergent dans $1 + T\mathbf{Z}_p[[T]]$.

Proposition VII.3.3. — *Si* $r \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\chi_{\mathscr{F}}^{-r})) = \mathscr{O}_{\mathscr{E}} e_{r,1} \oplus \mathscr{O}_{\mathscr{E}} e_{r,2}$, *les actions de* φ *et* Γ *étant données par*

$$\varphi(e_{r,1}) = q^r e_{r,2}, \quad \varphi(e_{r,2}) = e_{r,1}$$
$$\gamma(e_{r,1}) = a_+(\gamma)^{-r} e_{r,1}, \quad \gamma(e_{r,2}) = a_-(\gamma)^{-r} e_{r,2}.$$

Démonstration. — cf. [**10**].

La réduction modulo p de $\chi_{\mathscr{F}}$ est ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2, et la réduction modulo p de $\mathrm{ind}(\chi_{\mathscr{F}}^{-r})$ est la représentation $\mathrm{ind}(\omega_2^{-r})$, dont le (φ,Γ)-module est la réduction modulo p de celui de $\mathrm{ind}(\chi_{\mathscr{F}}^{-r})$.

Proposition VII.3.4. — (i) *Si* $r \in \mathbf{Z}$, *alors* $\mathbf{D}(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r})) = k_{\mathscr{E}} e_{r,1} \oplus k_{\mathscr{E}} e_{r,2}$, *les actions de* φ *et* Γ *étant données par*

$$\varphi(e_{r,1}) = T^{(p-1)r} e_{r,2}, \quad \varphi(e_{r,2}) = e_{r,1}$$
$$\gamma(e_{r,1}) = a_+(\gamma)^{-r} e_{r,1}, \quad \gamma(e_{r,2}) = a_-(\gamma)^{-r} e_{r,2}.$$

(ii) *Si* $1 \le r \le p$, *alors* $\mathbf{D}^\sharp(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r})) = \mathbf{D}^\natural(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r})) = k_{\mathscr{E}}^+ \frac{e_{r,1}}{T^r} \oplus k_{\mathscr{E}}^+ \frac{e_{r,2}}{T}$.

Démonstration. — Le (i) est juste la réduction modulo p de la prop. VII.3.3.

Maintenant, si $x \in k_{\mathscr{E}}$, on a $\psi(x\frac{e_{r,1}}{T^r}) = \psi(T^{-r}x\varphi(e_{r,2})) = T^{-1}\psi(T^{p-r}x)e_{r,2}$ et $\psi(x\frac{e_{r,2}}{T}) = \psi(T^{r-1}xT^{-rp}\varphi(e_{r,1})) = T^{-r}\psi(T^{r-1}x)e_{r,1}$. On en déduit le fait que ψ induit une surjection de $M = k_{\mathscr{E}}^+ \frac{e_{r,1}}{T^r} \oplus k_{\mathscr{E}}^+ \frac{e_{r,2}}{T}$ sur lui-même. De plus, comme $1 \le r \le p$, on a $p - r \ge 1$ ou $r - 1 \ge 1$, ce qui montre que $\psi^{n+1}(T^{-p^n}M) \subset M$, et donc que $M = \mathbf{D}^\sharp(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r}))$. De même, on a $p - r \le p - 2$ ou $r - 1 \le p - 2$, ce qui permet de montrer que $\psi(TM) = M$, et donc que $M = \mathbf{D}^\natural(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r}))$. Ceci termine la démonstration.

Corollaire VII.3.5. — $\mathbf{D}^\natural(\mathrm{ind}(\omega_2^{-r}))/T \cong \omega^{-1} \oplus \omega^{-r}$ *en tant que* $k_L[\Gamma]$*-module.*

Démonstration. — C'est une conséquence de ce que $a_+(\gamma) \equiv a_-(\gamma) \equiv 1$ modulo T et de ce que $\frac{\gamma(T)}{T} \equiv \omega(\gamma)$ modulo T.

– *Extension de deux caractères génériques*

Proposition VII.3.6. — *Si* $\delta_1 \ne \delta_2$ *sont deux éléments de* $\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *et si* V *est une extension non triviale de* $k_L(\delta_2)$ *par* $k_L(\delta_1)$, *alors* $\mathbf{D}^\natural(V)$ *contient* $\frac{1}{T}k_{\mathscr{E}}^+(\delta_1)$

Démonstration. — Comme $\mathbf{D}^\sharp(k_L(\delta)) = \frac{1}{T}k_{\mathscr{E}}^+(\delta)$, si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, on a des suites exactes

$$0 \to M \to \mathbf{D}^\sharp(V) \to \frac{1}{T}k_{\mathscr{E}}^+(\delta_2) \to 0,$$
$$0 \to M' \to \mathbf{D}^\natural(V) \to k_{\mathscr{E}}^+(\delta_2) \to 0,$$

où M contient $\frac{1}{T}k_{\mathscr{E}}^+(\delta_1)$ et M' contient $k_{\mathscr{E}}^+(\delta_1)$. Par ailleurs, $\mathbf{D}^\sharp(V)/\mathbf{D}^\natural(V)$ est de dimension 1 sur k_L (On a $\mathbf{D}^\sharp(V)/\mathbf{D}^\natural(V) \cong H^0(\mathscr{H}', \check{V})^\vee$ et s'il était de dimension 2, cela impliquerait que $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ sur V, et comme $\delta_1 \ne \delta_2$, on en déduirait que V est scindée). On en déduit que $M = M'$, ce qui permet de conclure.

– *Extensions de* $k_L(\delta)$ *par* $k_L(\delta)$.— Comme on l'a vu plus haut, une extension non triviale V de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$ est isomorphe à $V(\delta,\delta,\tau)$ pour un certain $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ (unique à multiplication près par un élément de k_L^*). Il existe donc une base e_1, e_2 de V sur k_L dans laquelle l'action de $g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est donnée par $g \cdot e_1 = \delta(g)e_1$ et

$g\cdot e_2=\delta(g)(e_2+\tau(g)e_1)$. Comme δ et τ se factorisent à travers $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$, le (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ est très facile à calculer : il existe une base f_1,f_2 de $\mathbf{D}(V)$ sur $k_{\mathscr{E}}$ telle que

$$\gamma\cdot f_1=\delta(\gamma)f_1,\ \gamma\cdot f_2=\delta(\gamma)(f_2+\tau(\gamma)f_1),\ \ \varphi(f_1)=\delta(p)f_1,\ \varphi(f_2)=\delta(p)(f_2+\tau(p)f_1).$$

Il est alors immédiat que

$$\mathbf{D}^\natural(V)=k_{\mathscr{E}}^+\cdot f_1\oplus k_{\mathscr{E}}^+\cdot f_2.$$

En particulier, $\mathbf{D}^\natural(V)$ est stable par φ.

– *Extensions de k_L par $k_L(\omega)$.*— Dans cet alinéa, $p\neq 2$ (si $p=2$, on a $\omega=1$, et ce cas est traité au numéro précédent). Le groupe $\Gamma\cong\mathbf{Z}_p^*$ est alors procyclique ce qui permet d'en choisir un générateur topologique γ. Le k_L-espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ est de dimension 2 car $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ est uniquement déterminé par ses valeurs en p et $\chi(\gamma)$. Si $u,v\in k_L$, on note $\tau_{u,v}$ l'élément de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ vérifiant $\tau_{u,v}(p)=u$ et $\tau_{u,v}(\chi(\gamma))=v\tau_0(\gamma)$, où $\tau_0(\gamma)=\frac{p-1}{p}\log\chi(\gamma)$ appartient à $\mathbf{Z}_p^*$.

Proposition VII.3.7. — (i) *Il existe $c\in\mathbf{F}_p$ unique, tel que $\frac{\omega(\gamma)\gamma-1}{\tau_0(\gamma)}\cdot\big(\frac{1}{T}+c\big)\in k_{\mathscr{E}}^{++}$. De plus, la série $F=\sum_{n\geq 1}\varphi^n\big(\frac{\omega(\gamma)\gamma-1}{\tau_0(\gamma)}\cdot\big(\frac{1}{T}+c\big)\big)$ converge dans $k_{\mathscr{E}}^+$ vers une solution de l'équation $(\psi-1)\cdot F=\frac{\omega(\gamma)\gamma-1}{\tau_0(\gamma)}\cdot\big(\frac{1}{T}+c\big)$.*

(ii) *Si $\alpha,\beta\in k_L$, l'équation $\frac{\omega(\gamma)\gamma-1}{\tau_0(\gamma)}\cdot x=(\varphi-1)\cdot y_{\alpha,\beta}$, avec $y_{\alpha,\beta}=\alpha\frac{1}{T}+\beta F$ a une solution unique $x_{\alpha,\beta}$ dans $k_{\mathscr{E}}$.*

(iii) *Le $k_{\mathscr{E}}$-module $D_{\alpha,\beta}=k_{\mathscr{E}}e_1\oplus k_{\mathscr{E}}e_2$, muni des actions de φ et Γ définies par*

$$\varphi(e_1)=e_1,\quad \varphi(e_2)=e_2+x_{\alpha,\beta}e_1,$$
$$\gamma(e_1)=\omega(\gamma)e_1,\quad \gamma(e_2)=e_2+\tau_0(\gamma)y_{\alpha,\beta}e_1,$$

est un (φ,Γ)-module étale sur $k_{\mathscr{E}}$, extension de $k_{\mathscr{E}}$ par $k_{\mathscr{E}}(\omega)$, et $D_{\alpha,\beta}\to(\alpha,\beta)$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Ext}^1(k_{\mathscr{E}},k_{\mathscr{E}}(\omega))$ sur k_L^2.

(iv) *On a $\psi(e_2)=e_2+\beta\big(\frac{1}{T}+c\big)e_1$, et $\hat{e}_2=\big(e_2-n\beta\big(\frac{1}{T}+c\big)e_1\big)_{n\in\mathbf{N}}\in D_{\alpha,\beta}^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$. De plus, $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\hat{e}_2-\hat{e}_2\in\frac{1}{T}k_{\mathscr{E}}^+(\omega)\boxtimes\mathbf{Q}_p$, et*[69] *$\mathrm{Res}\big(\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\hat{e}_2-\hat{e}_2\big)=\tau_{-\beta,\alpha}(a)$, si $a\in\mathbf{Q}_p^*$.*

Démonstration. — On a $(\omega(\gamma)\gamma-1)\cdot\frac{1}{T}=a_0+a_1T+\cdots\in k_{\mathscr{E}}^+$, ce qui fait que si on veut que $(\omega(\gamma)\gamma-1)\cdot\big(\frac{1}{T}+c\big)\in k_{\mathscr{E}}^{++}$, on peut (et doit) poser $c=-\frac{a_0}{\omega(\gamma)-1}$. Le reste du (i) est alors immédiat.

Maintenant, on a $(\varphi-1)\cdot F=-\frac{\omega(\gamma)\gamma-1}{\tau_0(\gamma)}\cdot\varphi\big(\frac{1}{T}+c\big)$, et $(\varphi-1)\cdot\frac{1}{T}\in k_{\mathscr{E}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ puisque $\psi(\frac{1}{T})=\frac{1}{T}$. L'existence de $x_{\alpha,\beta}$ est donc une conséquence du fait que $\gamma-1$ est inversible sur $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ pour tout (φ,Γ)-module étale D ; son unicité suit de l'injectivité de $\omega(\gamma)\gamma-1$ sur $k_{\mathscr{E}}$. De plus, on a $(\omega(\gamma)\gamma-1)\cdot x_{\alpha,\beta}=(\varphi-1)\cdot(\tau_0(\gamma)y_{\alpha,\beta})$ par

[69] L'application Res : $k_{\mathscr{E}}(\omega)\boxtimes\mathbf{Q}_p\to k_L$ est définie par $\mathrm{Res}((x^{(n)}\otimes\omega)_{n\in\mathbf{N}})=\mathrm{rés}_0(x^{(0)}\frac{dT}{1+T})$, et on a $\mathrm{Res}((x^{(n)}\otimes\omega)_{n\in\mathbf{N}})=\mathrm{rés}_0(x^{(n)}\frac{dT}{1+T})$, pour tout $n\in\mathbf{N}$.

construction, ce qui permet de vérifier la relation de commutativité nécessaire pour faire de $D_{\alpha,\beta}$ un (φ,Γ)-module sur $k_{\mathscr{E}}$ qui, de manière évidente, est étale.

On a $\psi(e_2) = \psi(\varphi(e_2) - x_{\alpha,\beta}\varphi(e_1)) = e_2 - \psi(x_{\alpha,\beta})e_1$. Or la démonstration de l'existence de $x_{\alpha,\beta}$ montre que $x_{\alpha,\beta} = -\beta\varphi\big(\frac{1}{T}+c\big)$ à un élément de $k_{\mathscr{E}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ près. On en déduit les formules $\psi(x_{\alpha,\beta}) = -\beta\big(\frac{1}{T}+c\big)$, et $\psi(e_2) = e_2+\beta\big(\frac{1}{T}+c\big)e_1$. L'appartenance de $\hat{e}_2 = \big(e_2 - n\beta\big(\frac{1}{T}+c\big)e_1\big)_{n\in\mathbf{N}}$ à $D^{\sharp}_{\alpha,\beta}\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est alors immédiate. Comme Res : $k_{\mathscr{E}}(\omega)\boxtimes\mathbf{Q}_p \to k_L$ est équivariante sous l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, si $a\in\mathbf{Q}_p^*$, l'application $a\mapsto \mathrm{Res}\big(\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\hat{e}_2 - \hat{e}_2\big)$ est un 1-cocycle sur $\mathbf{Q}_p^*$ à valeurs dans k_L, et donc de la forme $a\mapsto\tau(a)$, avec $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$. Maintenant, si $x=(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}\in D^{\sharp}_{\alpha,\beta}\boxtimes\mathbf{Q}_p$, on a $\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x = (x^{(n+1)})_{n\in\mathbf{N}}$, ce qui nous donne

$$\mathrm{Res}(\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\hat{e}_2-\hat{e}_2) = -\mathrm{Res}(\beta(\frac{1}{T}+c)) = -\beta.$$

De même, $\left(\begin{smallmatrix} \chi(\gamma) & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x = (\gamma\cdot x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, et donc

$$\mathrm{Res}(\left(\begin{smallmatrix} \chi(\gamma) & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\hat{e}_2-\hat{e}_2) = \mathrm{Res}(\tau_0(\gamma)y_{\alpha,\beta}) = \tau_0(\gamma)\alpha.$$

Ceci permet de conclure.

Si D est un (φ,Γ)-module quelconque, il résulte de la prop. VIII.1.4 que les groupes $H^1_{\psi,\gamma}(D)$ et $H^1_{\varphi,\gamma^{-1}}(\check{D})$ sont en dualité naturelle, cette dualité étant donnée par

$$\{(x,y),(x',y')\} = \{x,y'\}+\{y,x'\},\ \text{ si } (x,y)\in H^1_{\psi,\gamma}(D) \text{ et } (x',y')\in H^1_{\varphi,\gamma^{-1}}(\check{D}).$$

On peut spécialiser cet énoncé au cas de $D = k_{\mathscr{E}}(\omega)$ et $\check{D} = k_{\mathscr{E}}$. Comme on l'a vu plus haut, le groupe $H^1_{\psi,\gamma}(D)$ est alors le k_L-espace vectoriel de dimension 2 engendré par $(\frac{1}{T},0)$ et $(F,\frac{1}{T}+c)$, alors que le groupe $H^1_{\varphi,\gamma^{-1}}(D)$ est le k_L-espace vectoriel de dimension 2 engendré par $(1,0)$ et $(0,1)$; ce groupe est aussi isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$, l'isomorphisme envoyant $\tau_{u,v}$ sur (v,u) (le (φ,Γ)-module défini par $(v,u)\in H^1_{\varphi,\gamma^{-1}}$ est une extension de $k_{\mathscr{E}}$ par $k_{\mathscr{E}}$ possédant une base e_1,e_2 vérifiant $\varphi(e_1)=e_1$, $\varphi(e_2)=e_2+ue_1$, $\gamma^{-1}(e_1)=e_1$ et $\gamma^{-1}(e_2)=e_2+\tau_0(\gamma^{-1})ve_1$; on reconnaît les formules de l'extension correspondant à $\tau_{u,v}$).

Proposition VII.3.8. — *On a $\mathbf{V}(D_{\alpha,\beta}) = V(\omega,1,(\tau_{-\beta,\alpha})^{\perp})$, si $\alpha,\beta\in k_L$ ne sont pas tous les deux nuls.*

Démonstration. — La classe de $D_{\alpha,\beta}$ dans $H^1_{\psi,\gamma}(\mathbf{D}(\omega))$ est $\big(\alpha\frac{1}{T}+\beta F,\beta(\frac{1}{T}+c)\big)$; son cup-produit avec $\tau_{u,v}$ est donc

$$\big\{\big(\alpha\frac{1}{T}+\beta F,\beta(\frac{1}{T}+c)\big),(v,u)\big\} = \mathrm{Res}\big(u\sigma_{-1}(\alpha\frac{1}{T}+\beta F)+v\beta\sigma_{-1}(\frac{1}{T}+c)\big) = -u\alpha-v\beta,$$

et son orthogonale dans $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ est la droite engendrée par $\tau_{-\beta,\alpha}$, ce qu'il fallait démontrer.

VII.4. Classification des atomes automorphes. — Ce § est consacré à la classification des k_L-représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ apparaissant comme réduction modulo p des représentations de la série principale unitaire, et au calcul des (φ,Γ)-modules qui leur sont associés. La situation la plus subtile (parmi celles considérées) est celle où la suite de Jordan-Hölder a trois composantes. Comme expliqué dans l'introduction, son étude a grandement bénéficié de l'aide d'Emerton et Kisin. Le cas où la suite de Jordan-Hölder a quatre composantes (ce qui ne peut se produire que si $p=2$ ou si $p=3$) a été prudemment ignoré.

Remarque VII.4.1. — Dans ce qui suit, on se contente de faire une liste d'objets ; il n'est pas impossible que les objets que l'on obtient soient exactement les objets Π de $\mathrm{Rep}_{k_L} G$ vérifiant :
- $\mathbf{V}(\Pi)$ est de dimension 2 sur k_L,
- $\check{\Pi} \cong \Pi \otimes \delta_\Pi^{-1}$.

1. Atomes irréductibles

Proposition VII.4.2. — *On a* $\mathbf{V}\big(\Pi(r,0,\delta)\otimes(-1)^{v_p(x)}\big) = V(r,\delta)$, *si* $0 \leq r \leq p-1$ *et* $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$.

Démonstration. — Quitte à tordre par δ^{-1}, on peut supposer $\delta = 1$, ce que nous ferons. Posons alors $\Pi = \Pi(r,0,1)$ et $W = W_r$. La démonstration consiste à commencer par vérifier que $\mathbf{D}(\Pi)$ est irréductible, et donc que $\mathbf{V}(\Pi)$ est de la forme $V(s,\delta')$. La détermination du couple (s,δ') se fait alors en déterminant l'action de Γ sur $D^\natural(V(s,\delta'))/TD^\natural(V(s,\delta')) = D_W^\natural(\Pi)/TD_W^\natural(\Pi)$ et en comparant les déterminants des deux membres. Ceci va demander un peu de préparation.

Lemme VII.4.3. — (i) *L'image de* $D_W^+(\Pi)$ *dans* $D_W^\natural(\Pi)$ *est l'ensemble des* μ *vérifiant* $\langle \mu, e\rangle = \langle \mu, f\rangle = 0$, *où*

$$e = [\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),1] \quad \text{et} \quad f = \sum_{i=0}^{p-1} i^r [\left(\begin{smallmatrix}p&i\\0&1\end{smallmatrix}\right),1].$$

(ii) $D_W^+(\Pi) = \left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot D_W^\natural(\Pi)$.

Démonstration. — Soit $\mu \in D_W^\natural(\Pi)$. Soit $\tilde{\mu}$ l'élément de $I(W)^\vee$ coïncidant avec μ sur $I_{\mathbf{Z}_p}(W)$, et identiquement nul sur $I^-(W)$. Pour que μ soit dans l'image de $D_W^+(\Pi)$, il faut et il suffit que $\langle \tilde{\mu}, gT_p\cdot[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),P]\rangle = 0$, quels que soient $P \in W$ et $g \in G$. Cette nullité est automatique si le support de $gT_p\cdot[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),P]$ est inclus dans $I_{\mathbf{Z}_p}(W)$ ou dans $I^-(W)$; les seuls couples (g,P) (à l'action près de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$) donnant une condition d'annulation non automatique, sont ceux de la forme $g = \left(\begin{smallmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $P \in W$ arbitraire, et $g = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $P = X^r$. Le (i) s'en déduit en explicitant T_p. Quant au (ii), c'est une conséquence du (i) et de ce que, d'après le cor. IV.2.9, e et f forment une base de $I_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)^{U(\mathbf{Z}_p)}$ dont le dual est $D_W^\natural(\Pi)/\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot D_W^\natural(\Pi)$.

Lemme VII.4.4. — *En tant que $k_L[\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]$-module, on a*

$$D_W^\natural(\Pi)/TD_W^\natural(\Pi) \cong k_L \oplus k_L(\omega^{-r}).$$

Démonstration. — $D_W^\natural(\Pi)/TD_W^\natural(\Pi)$ est le dual de $I_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)^{U(\mathbf{Z}_p)}$. Or d'après le cor. IV.2.9, on a $I_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)^{U(\mathbf{Z}_p)} = k_L\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1 \oplus k_L\left(\begin{smallmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r$. Comme

$$\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1 = a^r\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot 1 \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot X^r,$$

si $a \in \mathbf{F}_p$, cela montre que $I_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)^{U(\mathbf{Z}_p)} = k_L \oplus k_L(\omega^r)$ en tant que $k_L[\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]$-module. Ceci permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la prop. VII.4.2. Comme $D_W^\natural(\Pi)$ est sans T-torsion, l'application naturelle $D_W^\natural(\Pi) \to \mathbf{D}(\Pi)^\natural$ est un isomorphisme d'après le lemme IV.3.1 et la prop. IV.3.2. Or il résulte du lemme VII.4.3 que $TD_W^\natural(\Pi) = D_W^+(\Pi)$; on en déduit que $T\mathbf{D}(\Pi)^\natural \subset \mathbf{D}(\Pi)^{++}$ car $\varphi^n(\mu) \to 0$, si $\mu \in D_W^+(\Pi)$. D'après la prop. VII.3.6, cela implique que $\mathbf{V}(\Pi)$ n'est pas une extension de $k_L(\delta_2)$ par $k_L(\delta_1)$, avec $\delta_1 \neq \delta_2$. Si $\mathbf{V}(\Pi)$ était de la forme $k_L(\delta_1)\oplus k_L(\delta_2)$ ou une extension de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$, on aurait $\mathbf{D}(\Pi)^\natural = \mathbf{D}(\Pi)^+$, et donc $\varphi(D_W^+(\Pi)) \subset T^pD_W^\natural(\Pi)$. Or $D_W^\natural(\Pi)/T^pD_W^\natural(\Pi)$ est le dual de $I_{\mathbf{Z}_p}^\Pi(W)^{U(p\mathbf{Z}_p)}$, et on peut trouver e', fixe par $\left(\begin{smallmatrix}1 & p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, non annulé par $\varphi(D_W^+(\Pi))$, ce qui contredit l'inclusion $\varphi(D_W^+(\Pi)) \subset T^pD_W^\natural(\Pi)$ [si $r \neq 0$, on peut prendre $e' = \sum_{i=0}^{p-1}\left[\left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), X\right]$ car on a $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot e' = \sum_{i=0}^{p-1}\left[\left(\begin{smallmatrix}p & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), 1\right] = T_p\cdot\left[\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), 1\right]$; si $r = 0$, on prend $e' = \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{p-1} i\left[\left(\begin{smallmatrix}p^2 & pi+j\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), 1\right]$, et un petit calcul montre que $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot e' = -\sum_{i=0}^{p-1}\left[\left(\begin{smallmatrix}p^2 & pi\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), 1\right] = e - T_p\cdot\left[\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), 1\right]$, et donc $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)^2\cdot e' = 0$ et $\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)^p\cdot e' = \left(\left(\begin{smallmatrix}1 & p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-1\right)\cdot e' = 0$].

Il résulte de la discussion précédente que $\mathbf{V}(\Pi)$ est irréductible (on aurait aussi pu utiliser le foncteur $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ pour arriver à cette conclusion), donc isomorphe à $V(s,\chi)$, avec $0 \leq s \leq p-1$ et $\chi \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$. On a donc $D_W^\natural(\Pi) \cong D^\natural(V(s,\chi)^\vee(1))$. Comme $V(s,\chi)^\vee(1) = \mathrm{ind}(\omega_2^{-s-1})\otimes\omega\chi^{-1}$, on déduit du cor. VII.3.5, que

$$D_W^\natural(\Pi)/TD_W^\natural(\Pi) \cong \left(k_L(\omega)\oplus k_L(\omega^{-s-1})\right)\otimes\omega\chi^{-1},$$

en tant que $k_L[\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]$-module. Comme on a $D_W^\natural(\Pi)/TD_W^\natural(\Pi) \cong k_L \oplus k_L(\omega^{-r})$, d'après le lemme VII.4.4, cela implique que $\{1,\omega^{-r}\} = \{\chi^{-1},\omega^{-s}\chi^{-1}\}$. Il y a alors *a priori* deux cas : soit $\chi = 1$ et $s = r$, soit $\chi = \omega^r$ et $s = p-1-r$, mais comme $V(r,1) = V(p-1-r,\omega^r)$, cela permet de conclure.

2. Réduction modulo p d'éléments irréductibles de $\mathrm{Rep}_L G$. — Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$ et si $\Pi_0 \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} G$ est un $\mathscr{O}_L$-réseau de Π, la semi-simplifiée de $k_L \otimes \Pi_0$ ne dépend que de Π et pas du choix de Π_0 ; on la note $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}}$.

Proposition VII.4.5. — *Soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$ irréductible.*

(i) *Si $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, où les W_i sont irréductibles, il existe un $\mathscr{O}_L$-réseau Π_1 de Π, stable par G, tel que $k_L \otimes \Pi_1$ soit indécomposable et admette W_1 comme sous-objet.*

(ii) *Si* $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}} = W_1 \oplus W_2$, *où les* W_i *sont irréductibles, il existe un* $\mathscr{O}_L$*-réseau* Π_1 *de* Π, *stable par* G, *tel que* $k_L \otimes \Pi_1$ *soit une extension non triviale de* W_2 *par* W_1.

(iii) *Si* $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, *où les* W_i *sont irréductibles, et si* $\mathrm{Ext}^1_G(W_3, W_1) = 0$ *et* $\mathrm{Ext}^1_G(W_2, W_3) = 0$, *il existe un* $\mathscr{O}_L$*-réseau* Π_1 *de* Π, *stable par* G, *tel que* $k_L \otimes \Pi_1$ *admette* W_1 *comme sous-objet,* W_3 *comme quotient et les extensions intermédiaires* $0 \to W_1 \to E \to W_2 \to 0$ *et* $0 \to W_2 \to E' \to W_3 \to 0$ *soient non scindées.*

Démonstration. — Soit W un sous-$k_L[G]$-module de $k_L \otimes \Pi_0$ tel que $(k_L \otimes \Pi_0)/W$ admette W_1 comme sous-objet, et soit Π'_0 l'image inverse de W' dans Π_0. Alors Π'_0 est un réseau de Π, stable par G, et $k_L \otimes \Pi'_0$ admet W_1 comme sous-objet. On peut donc, quitte à remplacer Π_0 par Π_1, supposer que W_1 est un sous-objet de $k_L \otimes \Pi_0$.

Soit A_1 le plus grand sous-objet indécomposable de $k_L \otimes \Pi_0$ contenant W_1. Si $A_1 = k_L \otimes \Pi_0$, on a gagné ; sinon il existe A_2 tel que $k_L \otimes \Pi_0 = A_1 \oplus A_2$. Soit Π'_1 l'image inverse de A_2 dans Π_0 ; alors $k_L \otimes \Pi'_1$ est une extension (éventuellement scindée) de A_2 par A_1. Si elle est scindée, on réitère le procédé et on obtient un réseau Π'_2 comme ci-dessus. Si le processus ne s'arrête pas au bout d'un nombre fini d'étapes, l'intersection Π'_∞ des Π'_n, est un $\mathscr{O}_L[G]$-module fermé de Π_0 dont l'image dans $k_L \otimes \Pi_0$ est A_2, ce qui prouve que $\Pi' = L \cdot \Pi'_\infty$ est un sous-objet strict de Π' en contradiction avec l'hypothèse Π irréductible. Il existe donc un réseau Π'_n tel que le plus grand sous-objet indécomposable A'_1 de $k_L \otimes \Pi_0$ contenant W_1 soit strictement plus grand que A_1. Ceci permet,par récurrence sur le nombre de composantes irréductibles de $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}}$, de démontrer le (i)

Le (ii) est une conséquence immédiate du (i).

Le (iii) suit aussi du (i) en remarquant que les hypothèses $\mathrm{Ext}^1_G(W_3, W_1) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1_G(W_2, W_3) = 0$ implique qu'un objet indécomposable dont les composantes sont W_1, W_2 et W_3, et qui admet W_1 comme sous-objet, doit avoir W_3 comme quotient et des extensions intermédiaires $0 \to W_1 \to E \to W_2 \to 0$ et $0 \to W_2 \to E' \to W_3 \to 0$ non scindées.

Ceci termine la démonstration.

3. Atomes de longueur 2

Proposition VII.4.6. — *Soient* $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *vérifiant* $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$ *et* $\delta_3\delta_4^{-1} \neq \omega$. *Si* $(\delta_1, \delta_2) \notin \{(\delta_3, \delta_4), (\delta_4, \delta_3)\}$, *alors* $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_3, \delta_4), B(\delta_1, \delta_2)) = 0$.

Démonstration. — Soit Π une extension de $B(\delta_3, \delta_4)$ par $B(\delta_1, \delta_2)$. D'après les prop. III.3.7 et VII.1.8, on dispose du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \delta_4^{-1} \otimes \delta_3^{-1}\omega & \longrightarrow & J^\vee(\Pi) & \longrightarrow & \delta_2^{-1} \otimes \delta_1^{-1}\omega & \xrightarrow{\partial} & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B(\delta_3, \delta_4)^\vee & \longrightarrow & \Pi^\vee & \longrightarrow & B(\delta_1, \delta_2)^\vee & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \\
0 & \longrightarrow & k_{\mathscr{E}}(\omega\delta_3^{-1})^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p & \longrightarrow & \mathbf{D}(\Pi)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p & \longrightarrow & k_{\mathscr{E}}(\omega\delta_1^{-1})^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & \xrightarrow{\partial} & \delta_3^{-1} \otimes \delta_4^{-1}\omega & \longrightarrow & H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi))^\vee & \longrightarrow & \delta_1^{-1} \otimes \delta_2^{-1}\omega & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

de $k_L[B]$-modules. Comme $(\delta_1,\delta_2)\neq(\delta_4,\delta_3)$, l'application de connexion ∂ est nulle, et comme $(\delta_1,\delta_2)\neq(\delta_3,\delta_4)$, la suite exacte $0\to\delta_4^{-1}\otimes\delta_3^{-1}\to J^{\vee}(\Pi)\to\delta_2^{-1}\otimes\delta_1^{-1}\to 0$ est scindée. Il résulte de la prop. VII.1.7 que Π admet $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_4\otimes\delta_3\omega^{-1}\oplus\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1})=B(\delta_3,\delta_4)\oplus B(\delta_1,\delta_2)$ comme quotient. Ceci permet de conclure.

Proposition VII.4.7. — *Si $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ vérifient $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{1,\omega,\omega^{-1}\}$, alors $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_2,\delta_1),B(\delta_1,\delta_2))$ est un k_L-espace vectoriel de dimension 1, et $\mathbf{V}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_2,\delta_1),B(\delta_1,\delta_2))$ sur $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\delta_2),k_L(\delta_1))$.*

Démonstration. — Reprenons le diagramme commutatif de $k_L[B]$-modules ci-dessus, avec $(\delta_3,\delta_4)=(\delta_2,\delta_1)$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

(i) la suite $0\to k_L(\delta_1)\to\mathbf{V}(\Pi)\to k_L(\delta_2)\to 0$ est scindée ;

(ii) $\partial=0$;

(iii) $J(\Pi)=\big(\delta_1\otimes\delta_2\omega^{-1}\big)\oplus\big(\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1}\big)$.

Comme la dernière propriété implique, d'après la prop. VII.1.7, que Π admet $B(\delta_2,\delta_1)\oplus B(\delta_1,\delta_2)$ comme quotient, on en déduit que $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_1,\delta_2),B(\delta_2,\delta_1))$ s'injecte dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\delta_2),k_L(\delta_1))$ qui est un k_L-espace vectoriel de dimension 1 sous l'hypothèse $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{1,\omega\}$. Pour conclure, il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_2,\delta_1),B(\delta_1,\delta_2))\neq 0$, si $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{1,\omega,\omega^{-1}\}$.

Pour cela, on utilise l'existence d'une représentation trianguline [70] irréductible V possédant un réseau V^0 tel que $(k_L\otimes V^0)^{\mathrm{ss}}=\delta_1\oplus\delta_2$. Cette représentation est alors de la forme $V(s)$ pour $s\in\mathscr{S}_*^{\mathrm{irr}}$, et la représentation $\Pi(s)$ est irréductible et admet un réseau $\Pi(s)^0$ tel que $(k_L\otimes\Pi(s)^0)^{\mathrm{ss}}=B(\delta_1,\delta_2)\oplus B(\delta_2,\delta_1)$ (cf. [**7, 14, 16**]). En modifiant le réseau $\Pi(s)^0$, on peut donc fabriquer (cf. (ii) de la prop. VII.4.5) des extensions non triviales de $B(\delta_2,\delta_1)$ par $B(\delta_1,\delta_2)$ (et de $B(\delta_1,\delta_2)$ par $B(\delta_2,\delta_1)$).

Définition VII.4.8. — *D'après la prop. VII.4.7, il existe, à isomorphisme près, une unique extension non triviale de $B(\delta_2,\delta_1)$ par $B(\delta_1,\delta_2)$. On note $\Pi(\delta_1,\delta_2)$ cette extension. Par ailleurs, $\mathbf{V}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_1,\delta_2),B(\delta_2,\delta_1))$ sur $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\delta_2),k_L(\delta_1))$, ce qui prouve que*

$$\mathbf{V}(\Pi(\delta_1,\delta_2))=V(\delta_1,\delta_2).$$

Proposition VII.4.9. — *Si $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ vérifient $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{1,\omega,\omega^{-1}\}$, et si Π est une extension non triviale de $B(\delta_2,\delta_1)$ par $B(\delta_1,\delta_2)$, alors $J^{\vee}(\Pi)=J^{\vee}(B(\delta_2,\delta_1))$ et $\widetilde{J}^{\vee}(\Pi)=\widetilde{J}^{\vee}(B(\delta_2,\delta_1))$. En particulier, Π est équilibrée.*

Démonstration. — On a $\mathbf{V}(B(\delta_1,\delta_2))=k_L(\delta_1)$ et $\mathbf{V}(B(\delta_2,\delta_1))=k_L(\delta_2)$. Si l'application de connexion $\partial: J^{\vee}(B(\delta_1,\delta_2)\to H^0(\mathscr{H}',k_L(\delta_2)$ est nulle, la suite $0\to k_L(\delta_1)\to H^0(\mathscr{H}',\mathbf{V}(\Pi))\to k_L(\delta_2)\to 0$ est exacte, et comme $\delta_1\neq\delta_2$, cela implique qu'elle est scindée, et que $\mathbf{V}(\Pi)=H^0(\mathscr{H}',\mathbf{V}(\Pi))$ pour des questions de dimension. D'après la prop. VII.4.7, cela signifie que la suite $0\to B(\delta_1,\delta_2)\to\Pi\to B(\delta_2,\delta_1)\to 0$ est

[70] On pourrait aussi utiliser les représentations $\mathbf{\Pi}(D)$, où D est une extension non triviale de $k_{\mathscr{E}}(\delta_2)$ par $k_{\mathscr{E}}(\delta_1)$ ou une extension non triviale de $k_{\mathscr{E}}(\delta_1)$ par $k_{\mathscr{E}}(\delta_2)$.

scindée. Comme on a supposé que Π est une extension non triviale de $B(\delta_2,\delta_1)$ par $B(\delta_1,\delta_2)$, cela implique que ∂ est un isomorphisme, et que $J^\vee(\Pi)=J^\vee(B(\delta_2,\delta_1))$. En particulier, l'image de $\widetilde{J}^\vee(\Pi)\to\widetilde{J}^\vee(B(\delta_1,\delta_2))$ ne contient pas $J^\vee(B(\delta_1,\delta_2))$. Comme $\widetilde{J}^\vee(B(\delta_1,\delta_2))$ est irréductible sous l'action de Δ (prop. VII.1.12 et rem. III.3.10), cela implique $\widetilde{J}^\vee(\Pi)=\widetilde{J}^\vee(B(\delta_2,\delta_1))$, ce qui permet de conclure.

Proposition VII.4.10. — (i) *Si $p\neq 2$, alors $\Pi\mapsto J(\Pi)$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1_{k_L[G]}(B(\delta,\delta),B(\delta,\delta))\cong\mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}(\delta\otimes\delta\omega^{-1},\delta\otimes\delta\omega^{-1}).$$

(ii) $\mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}(\delta\otimes\delta\omega^{-1},\delta\otimes\delta\omega^{-1})$ *est naturellement isomorphe à* $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$.

Démonstration. — Soit Π une extension de $B(\delta,\delta)$ par $B(\delta,\delta)$. La représentation $\mathbf{V}(\Pi)$ est une extension de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$ et donc $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers $\mathscr{G}^{\mathrm{ab}}_{\mathbf{Q}_p}$. Comme Π n'a pas de sous-objets finis, la suite $0\to J(B(\delta,\delta))\to J(\Pi)\to J(B(\delta,\delta))\to 0$ est exacte, d'après le (ii) de la prop. VII.1.8. Comme, d'après la prop. VII.1.7, Π admet comme quotient $\mathrm{Ind}_B^G J(\Pi)$, et comme Π et $\mathrm{Ind}_B^G J(\Pi)$ ont même suite de Jordan-Hölder, cela implique que $\Pi=\mathrm{Ind}_B^G J(\Pi)$, ce qui démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), on peut tordre par $\delta^{-1}\otimes\delta^{-1}\omega$ pour se ramener à montrer que $\mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}(1\otimes 1,1\otimes 1)=\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$, ce qui suit de ce que $\mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}$ s'identifie au groupe des morphismes continus de B dans k_L triviaux sur le centre ; un tel morphisme est de la forme $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\mapsto\tau(a^{-1}d)$, pour un unique $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$.

Remarque VII.4.11. — (i) Si $p=2$, on a $\omega=1$ et $B(\delta,\delta)$ n'est pas irréductible.

(ii) La démonstration ci-dessus fournit une construction de l'extension $\Pi(\delta,\delta,\tau)$ de $B(\delta,\delta)$ par $B(\delta,\delta)$ correspondant à $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$. Si $Y_\tau=k_L\cdot e_1\oplus k_L\cdot e_2$ est la k_L-représentation de dimension 2 de B définie par

$$\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\cdot e_1=e_1,\quad\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\cdot e_2=e_2+\tau(a^{-1}d)e_1,$$

alors

$$\Pi(\delta,\delta,\tau)=\mathrm{Ind}_B^G\big(Y_\tau\otimes(\delta\otimes\delta\omega^{-1})\big).$$

Proposition VII.4.12. — $\mathbf{V}(\Pi(\delta,\delta,\tau))=V(\delta,\delta,\tau)$.

Démonstration. — On sait *a priori* que $\mathbf{V}(\Pi(\delta,\delta,\tau))$ est une extension de $k_L(\delta)$ par $k_L(\delta)$, et donc que $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers $\mathscr{G}^{\mathrm{ab}}_{\mathbf{Q}_p}$. Comme $B(\delta,\delta)$ est équilibrée, il en est de même de $\Pi(\delta,\delta,\tau)$, et $\widetilde{J}^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau))=J^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau))\oplus w\cdot J^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau))$. Par ailleurs, d'après la prop. VII.1.11, on a $\widetilde{J}^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau))/J^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau))\cong H^0(\mathscr{H}',\mathbf{V}(\Pi)^\vee(1))$ en tant que $k_L[A]$-modules, et par construction, $J^\vee(\Pi(\delta,\delta,\tau))\cong w\cdot(Y_\tau\otimes(\delta\otimes\delta\omega^{-1}))^\vee$. On en déduit un isomorphisme de $k_L[A]$-modules

$$\mathbf{V}(\Pi(\delta,\delta,\tau))=w\cdot(Y_\tau\otimes(\delta\omega\otimes\delta))=(w\cdot Y_\tau\otimes(\delta\otimes\delta\omega)),$$

où $w\cdot Y_\tau$ s'obtient à partir de Y_τ en échangeant les rôles de a et d. Pour en déduire l'action de $\mathscr{G}^{\mathrm{ab}}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{V}(\Pi(\delta,\delta,\tau))$, il suffit de remarquer que, par définition, celle-ci correspond à l'action du sous-groupe $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}_p^*&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ de A, et donc que l'on a $g(e_1)=\delta(g)e_1$ et $g(e_2)=\delta(g)(e_2+\tau(g)e_1)$. Ceci permet de conclure.

La même démonstration que ci-dessus permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition VII.4.13. — *Si* $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ *vérifient* $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$, *alors*
(i) $\Pi \mapsto J(\Pi)$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1_{k_L[G]}(B(\delta_1,\delta_2), B(\delta_1,\delta_2)) \cong \mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}(\delta_2 \otimes \delta_1\omega^{-1}, \delta_2 \otimes \delta_1\omega^{-1});$$

(ii) $\mathrm{Ext}^1_{k_L[B]}(\delta_2 \otimes \delta_1\omega^{-1}, \delta_2 \otimes \delta_1\omega^{-1}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p, k_L)$;
(iii) *le foncteur* $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ *induit un isomorphisme de* $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_1,\delta_2), B(\delta_1,\delta_2))$ *sur* $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\delta_1), k_L(\delta_1))$.

Démonstration. — La seule chose qui ne suit pas directement des arguments ci-dessus est le (iii), car on considère Ext^1_G au lieu de $\mathrm{Ext}^1_{k_L[G]}$, mais on a la même suite exacte $0 \to \mathrm{Ext}^1_{k_L[H]}(X,X) \to \mathrm{Ext}^1_H(X,X) \to k_L \to 0$, du côté automorphe ($H = G$ et $X = B(\delta_1,\delta_2)$) que du côté galoisien ($H = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et $X = k_L(\delta_1)$), le k_L correspondant à $\mathrm{Hom}_H(X,X)$. (Pour prouver que l'on peut relever X modulo p^2 et démontrer la surjectivité à droite, il suffit de relever δ_1 et δ_2 modulo p^2.)

4. Extensions de la représentation triviale par la steinberg

Proposition VII.4.14. — *Si* $\delta, \delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, *et si* $(\delta_1,\delta_2) \neq (\omega\delta, \delta)$, *alors* $\mathrm{Ext}^1_G(\delta, B(\delta_1,\delta_2)) = 0$.

Démonstration. — Soit E une extension de $\delta \circ \det$ par $B(\delta_1,\delta_2)$. Le diagramme commutatif de la prop. VII.1.8 montre que la suite de $k_L[B]$-modules $0 \to J(B(\delta_1,\delta_2)) \to J(E) \to \delta \otimes \delta \to 0$ est exacte, et l'hypothèse $(\delta_1,\delta_2) \neq (\omega\delta,\delta)$ implique qu'elle est scindée. Ceci permet d'utiliser la prop. VII.1.7 pour montrer que E admet un quotient admettant $B(\delta_1,\delta_2) \oplus (\delta \circ \det)$ comme sous-$k_L[G]$-module, et donc que $E = B(\delta_1,\delta_2) \oplus (\delta \circ \det)$. Ceci permet de conclure.

Proposition VII.4.15. — (i) $\mathrm{Hom}_B(\mathbf{1}, \mathrm{St}) = 0$.
(ii) $\mathrm{Hom}_G(\mathbf{1}, \mathrm{St}) = 0$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer le (i). Or, en tant que B-module, St s'identifie aux fonctions à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ et une telle fonction ne peut pas être invariante par translation par tout $b \in \mathbf{Q}_p$ (ce qui correspond à l'action de $U \subset B$).

Lemme VII.4.16. — *Soit* $A^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
(i) $(\mathrm{St}^\vee)^{A^+}$ *est de dimension* 1 *engendré par* $\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty$.
(ii) $w \cdot (\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty) = -(\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty)$.

Démonstration. — Soit $\mu \in \mathscr{D}_0(\mathbf{P}^1, k_L)$ invariante par A^+. En particulier, μ est invariante par $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et donc la restriction de μ à $p^n\mathbf{Z}_p^*$ est, quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, invariante par $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comme il n'existe pas de distribution de Haar sur $\mathbf{Z}_p^*$, cela implique que la restriction de μ à $p^n\mathbf{Z}_p^*$ est nulle, quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, et donc μ a un support concentré en 0 et ∞, et donc est de la forme $a\mathrm{Dir}_0 + b\mathrm{Dir}_\infty$, avec $a, b \in k_L$.

Comme de plus, on doit avoir $\int_{\mathbf{P}^1}\mu=0$ si $\mu\in\mathrm{St}^\vee$, cela démontre le (i). Le (ii) étant immédiat, cela permet de conclure.

Soit E une extension de $\mathbf{1}$ par St. Par dualité, cela nous fournit une extension de $\mathrm{St}^\vee$ par $\mathbf{1}$. Maintenant, comme on l'a vu plus haut, l'espace $(\mathrm{St}^\vee)^{A^+}$ est de dimension 1 sur k_L engendré par $\mathrm{Dir}_0-\mathrm{Dir}_\infty$. L'image inverse de $k_L\cdot(\mathrm{Dir}_0-\mathrm{Dir}_\infty)$ est donc une A^+-extension de $\mathbf{1}$ par $\mathbf{1}$, ce qui nous fournit une application naturelle

$$\mathrm{res}_{A^+}:\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},\mathrm{St})\to\mathrm{Ext}^1_{A^+}(\mathbf{1},\mathbf{1})=\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L).$$

Explicitement, si $e\in E^\vee$ est un relèvement de $\mathrm{Dir}_0-\mathrm{Dir}_\infty$, alors $a\mapsto\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e-e=c(a)$ est un morphisme continu de $\mathbf{Q}_p^*$ dans k_L, et on a $\mathrm{res}_{A^+}(E)=c$.

Si $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$ est un homomorphisme continu (et donc localement constant), on note τ_+ la fonction de $\mathbf{Q}_p$ dans k_L définie par

$$\tau_+(x)=\begin{cases}\tau(x) & \text{si } v_p(x)<0,\\ 0 & \text{si } v_p(x)\geq 0.\end{cases}$$

Ceci fait de τ_+ une fonction localement constante sur $\mathbf{Q}_p$ (mais pas à support compact).

Lemme VII.4.17. — *Si $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in G$, alors $x\mapsto\phi(x)=\tau(cx+d)+\tau_+(\frac{ax+b}{cx+d})-\tau_+(x)$ se prolonge par continuité en un élément de* $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1,k_L)$.

Démonstration. — Il y a deux cas :

– Si $c=0$, alors $\phi(x)$ est localement constante sur $\mathbf{Q}_p$, et vaut $\tau(a+\frac{b}{x})=\tau(a)$ si $v_p(x)\ll 0$.

– Si $c\neq 0$, il faut regarder ce qui se passe en $-\frac{d}{c}$ et ∞. Si x tend vers $-\frac{d}{c}$, alors $\frac{ax+b}{cx+d}$ tend ∞ et donc $\tau_+(\frac{ax+b}{cx+d})=\tau(\frac{ax+b}{cx+d})$ et $\phi(x)=\tau(ax+b)-\tau_+(x)$ est localement constante dans un voisinage de $-\frac{d}{c}$. Par ailleurs, $\phi(x)=\tau(c+\frac{d}{x})+\tau_+(\frac{a}{c})=\tau(c)+\tau_+(\frac{a}{c})$ dans un voisinage de ∞.

Ceci permet de conclure.

Soit $\widetilde{E}_\tau=\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1,k_L)\oplus k_L\tau_+$. Si $\phi\in\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1,k_L)$ et $u\in k_L$, on fait agir $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ à droite sur $\phi+u\tau_+$ par la formule

$$\Big((\phi+u\tau_+)\star\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\Big)(x)=\phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)+u\Big(\tau_+\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)+\tau(cx+d)\Big).$$

Un calcul immédiat, utilisant le lemme précédent, montre que ceci définit bien une action à droite de G sur $\widetilde{E}_\tau$, mais le centre n'agit pas par un caractère étant donné que $\tau_+\star\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)=\tau_++\tau(d)$. (On peut remédier à ce problème en remplaçant $\tau(cx+d)$ par $-\frac{1}{2}\tau(\frac{ad-bc}{(cx+d)^2})$, mais cette recette ne marche pas si $p=2$.)

On définit E_τ comme le quotient de $\widetilde{E}_\tau$ par les constantes, et on munit E_τ de l'action de G à gauche définie, comme d'habitude, par $g\cdot v=v\star g^{-1}$. Comme on a quotienté par les constantes, le centre agit trivialement, et E_τ est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$. L'application $\phi+u\tau_+\mapsto u$ induit alors la suite exacte $0\to\mathrm{St}\to E_\tau\to\mathbf{1}\to 0$. En

utilisant l'identification de St à $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$, on peut décomposer E_τ sous la forme $E_\tau = \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L) \oplus k_L \cdot \tau_+$. En passant au dual, on en déduit une décomposition $E_\tau^\vee = \mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, k_L) \oplus k_L \cdot \lambda_\tau$, où λ_τ est identiquement nulle sur $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$ et prend la valeur 1 sur τ_+. Par ailleurs, si $a \in \mathbf{Q}_p^*$, alors $\tau_+ \star \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - \tau_+ - \tau(a)$ est un élément de $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$ prenant la valeur $-\tau(a)$ en 0. On en déduit les formules

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{Dir}_0 = \mathrm{Dir}_0 - \tau(a)\lambda_\tau \quad \text{et} \quad \mathrm{res}_{A^+}(E_\tau) = -\tau.$$

Théorème VII.4.18. — *L'application naturelle* (de restriction) res_{A^+} *de* $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1}, \mathrm{St})$ *dans* $\mathrm{Ext}^1_{A^+}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — La surjectivité est une conséquence de l'existence de E_τ et de ce que $\mathrm{res}_{A^+}(E_\tau) = -\tau$. D'autre part, l'application de restriction $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1}, \mathrm{St}) \to \mathrm{Ext}^1_B(\mathbf{1}, \mathrm{St})$ est injective d'après le th. VII.2.1, puisque $\mathrm{St}^{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$. Il suffit donc, pour terminer la démonstration, de prouver que $\mathrm{res}_{A^+} : \mathrm{Ext}^1_B(\mathbf{1}, \mathrm{St}) \to \mathrm{Ext}^1_{A^+}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ est injective. Ceci va demander un peu de préparation.

Lemme VII.4.19. — *Si* $\mathrm{res}_{A^+}(E) = 0$, *il existe un unique relèvement* $e_E \in E^\vee$ *de* $\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty$, *fixe par* A^+, *tel que* $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot e_E \to 0$ *quand* $x \in \mathbf{Q}_p^*$ *tend vers* ∞.

Démonstration. — Commençons par remarquer que, si $\mathrm{res}_{A^+}(E) = 0$, alors tout relèvement de $\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty$ est fixe par A^+. Maintenant, si $x \in \mathbf{Q}_p^*$, on a

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty) &= \mathrm{Dir}_x - \mathrm{Dir}_\infty = w \cdot (\mathrm{Dir}_{x^{-1}} - \mathrm{Dir}_0) \\ &= w \cdot \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty) - (\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty)\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot (\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty) + (\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty).\end{aligned}$$

Ceci implique que, si $e \in E^\vee$ est au-dessus de $\mathrm{Dir}_0 - \mathrm{Dir}_\infty$, alors il existe $u_e(x) \in k_L$ tel que l'on ait

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot e = u_e(x)\lambda - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot e + e,$$

où $\lambda \in E^\vee$ est une base de $\mathbf{1}^\vee$ et est donc fixe par G. Par ailleurs, comme on a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & ax \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et comme e est fixe par A^+, on en déduit $u_e(ax) = u_e(x)$, pour tous $a, x \in \mathbf{Q}_p^*$. En résumé, il existe $u_e \in k_L$ tel que l'on ait

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot e = u_e\lambda - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot e + e, \quad \text{quel que soit } x \in \mathbf{Q}_p^*.$$

Quitte à remplacer e par $e - u_e\lambda$, on peut s'arranger pour que $u_e = 0$, et comme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ tend vers $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ quand x tend vers ∞, on a alors $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot e \to 0$ quand $x \to \infty$, ce qui prouve l'existence d'un e vérifiant les conditions du lemme. L'unicité suit de ce que, si $u \in k_L$, alors $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (e + u\lambda) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot e + u\lambda \to u\lambda$ quand $x \to \infty$.

Lemme VII.4.20. — *Si* I *est un système de représentants de* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ *dans* $\mathbf{Q}_p$, *et si* $(\mu_i)_{i \in I}$ *est une famille d'éléments de* $k_L[[\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]]$, *alors* $\mu_i \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot e_E \to 0$ *dans* $E^\vee$ *quand* $i \to \infty$.

Démonstration. — Soit $\phi \in E$. Il s'agit de prouver que $\langle \mu_i \cdot \left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot e_E, \phi\rangle = 0$ sauf pour un nombre fini de $i \in I$. Or on a $\langle \mu_i \cdot \left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot e_E, \phi\rangle = \langle \left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot e_E, \mu_i^\iota \cdot \phi\rangle$, où $\mu \mapsto \mu^\iota$ est l'involution de $k_L[[\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]]$ envoyant $g \in \left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ sur g^{-1}. Maintenant, comme $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ est compact, les $\mu_i^\iota \cdot \phi$ varient dans un k_L-espace vectoriel V_ϕ de dimension finie, et comme $\left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot e_E$ tend vers 0 dans $E^\vee$, cela implique que $\left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot e_E$ est identiquement nul sur V_ϕ sauf pour un nombre fini de $i \in I$. Ceci permet de conclure.

Revenons à la démonstration du th. VII.4.18. Soit donc E une B-extension de $\mathbf{1}$ par St dont l'image par res_{A^+} est nulle. Soit e_E l'élément de $E^\vee$ dont le lemme VII.4.19 affirme l'existence, et soit I un système de représentants dans $\mathbf{Q}_p$ de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. On peut écrire tout $x \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, k_L)$, de manière unique, sous la forme $x = \sum_{i\in I} \mu_i \cdot \left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{Dir}_0$, avec $\mu_i \in k_L[[\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]]$, et on peut relever x en $\tilde{x} = \sum_{i\in I} \mu_i \cdot \left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot e_E$ dans $E^\vee$ (la convergence de la série est assurée par le lemme VII.4.20). De plus, comme $\mathbf{Q}_p$ est commutatif, et comme la série converge quel que soit le choix de I, la somme ne dépend pas du choix de I, et on a $g \cdot \tilde{x} = \widetilde{g \cdot x}$ si $g \in U$. Par ailleurs, si $g \in A^+$, on a

$$g \cdot \tilde{x} = \sum_{i\in I} g \cdot \mu_i \cdot \left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot e_E = \sum_{i\in I} g \cdot \mu_i \cdot \left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) g^{-1} \cdot (g \cdot e_E).$$

Comme $g \cdot e_E = e_E$ par hypothèse, comme g normalise U, et comme $h \cdot \tilde{x} = \widetilde{h \cdot x}$ si $h \in U$, la dernière somme n'est autre que $\widetilde{g \cdot x}$, ce qui prouve que $x \mapsto \tilde{x}$ est un scindage B-équivariant de $E^\vee \to \mathrm{St}^\vee$. Ceci permet de conclure.

Remarque VII.4.21. — On a fabriqué ci-dessus un scindage B-équivariant de l'application $E^\vee \to \mathrm{St}^\vee$. Comme $\mathrm{Hom}_B(\mathbf{1}, \mathrm{St}) = 0$, ce scindage est unique, et comme $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1}, \mathrm{St}) \to \mathrm{Ext}^1_B(\mathbf{1}, \mathrm{St})$ est injective, ce scindage est en fait G-équivariant, et on a $w \cdot e_E = -e_E$. Ceci peut se vérifier directement en partant de l'identité

$$\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ -x^{-1} & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x & 0\\ 0 & -x^{-1}\end{smallmatrix}\right) w.$$

En effet, d'après le lemme VII.4.19 (ou plutôt d'après sa démonstration), le membre de gauche envoie e_E sur

$$\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ -x^{-1} & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(e_E - \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ x^{-1} & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot e_E\right) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ -x^{-1} & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot e_E - e_E.$$

Par ailleurs, il existe $u \in k_L$ tel que $w \cdot e_E = -e_E + u\lambda$. Le membre de droite envoie donc e_E sur

$$\left(\begin{smallmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x & 0\\ 0 & -x^{-1}\end{smallmatrix}\right) \cdot (-e_E + u\lambda) = \left(\begin{smallmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot (-e_E + u\lambda) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ -x^{-1} & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot e_E - e_E + u\lambda.$$

On a donc $u = 0$, ce qu'on voulait vérifier.

5. Atomes de longueur 3. — On suppose $p \geq 5$ de telle sorte que $\omega \neq \omega^{-1}$.

Proposition VII.4.22. — $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega), \mathrm{St}) = 0$.

Démonstration. — Soit $0 \to \mathrm{St} \to \Pi \to B(1,\omega) \to 0$ une extension de $B(1,\omega)$ par St. On a $J^\vee(\mathrm{St}) = 0$, et donc la suite $0 \to k_L(\omega) \to H^0(\mathscr{K}', \mathbf{V}(\Pi)) \to k_L \to 0$ est exacte (cf. cor. VII.1.9). On en déduit que l'extension $0 \to k_L(\omega) \to \mathbf{V}(\Pi) \to k_L \to 0$ est scindée. L'image de Π dans $\mathrm{Ext}^1_B(B(1,\omega) \boxtimes \mathbf{Q}_p, \mathrm{St})$ est donc nulle (rem. VII.1.10).

Comme $B(1,\omega)$ est équilibrée et sans quotient fini, cela implique (cf. prop. VII.2.12) que l'extension $0 \to \mathrm{St} \to \Pi \to B(1,\omega) \to 0$ est scindée, ce qui permet de conclure.

Lemme VII.4.23. — *Si* Π *est une extension non triviale de* $B(1,\omega)$ *par* E_τ, *alors* $\widetilde{J}^\vee(\Pi) = \widetilde{J}^\vee(B(1,\omega))$ *et* $J^\vee(\Pi) = J^\vee(B(1,\omega)) = \omega^{-1}\otimes\omega$; *en particulier,* Π *est équilibrée.*

Démonstration. — On part du diagramme commutatif suivant de $k_L[B]$-modules.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \omega^{-1}\otimes\omega & \longrightarrow & J^\vee(\Pi) & \longrightarrow & 1\otimes 1 & \xrightarrow{\partial} & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B(1,\omega)^\vee & \longrightarrow & \Pi^\vee & \longrightarrow & E_\tau^\vee & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\iota & & \downarrow\iota & & \downarrow\iota & & \\
0 & \longrightarrow & k_{\mathscr{E}}(\omega)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p & \longrightarrow & \mathbf{D}(\Pi)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p & \longrightarrow & k_{\mathscr{E}}^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & \xrightarrow{\partial} & 1\otimes 1 & \longrightarrow & H^0(\mathscr{H}',\mathbf{V}(\Pi))^\vee & \longrightarrow & \omega^{-1}\otimes\omega & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Si l'application de connexion ∂ est nulle, on a $J^\vee(\Pi) = (1\otimes 1)\oplus(\omega^{-1}\otimes\omega)$ en tant que $k_L[B]$-module. D'après la prop. VII.1.7, cela implique que Π admet $\mathbf{1}\oplus B(1,\omega)$ comme sous-quotient. On a donc $\Pi/\mathrm{St} = \mathbf{1}\oplus B(1,\omega)$, et comme $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega),\mathrm{St}) = 0$, cela implique que la suite $0 \to E_\tau \to \Pi \to B(1,\omega) \to 0$ est scindée. Comme on a supposé que Π est une extension non triviale de $B(1,\omega)$ par E_τ, cela implique que ∂ est un isomorphisme, et que $J^\vee(\Pi) = \omega^{-1}\otimes\omega$. En particulier, l'image de $\widetilde{J}^\vee(\Pi) \to \widetilde{J}^\vee(E_\tau)$ ne contient pas $J^\vee(E_\tau)$ (cf. prop. VII.1.11 pour le lien entre $J^\vee$ et $\widetilde{J}^\vee$). Or, l'action de A est unipotente sur $\widetilde{J}^\vee(E_\tau)$ et donc tout sous-$k_L[A]$-module non nul de $\widetilde{J}^\vee(E_\tau)$ contient $J^\vee(E_\tau)$. On a donc $\widetilde{J}^\vee(\Pi) = \widetilde{J}^\vee(B(1,\omega))$ et Π est équilibrée.

Proposition VII.4.24. — *Si* Π *est une extension non triviale de* $B(1,\omega)$ *par* E_τ, *alors* $\mathbf{V}(\Pi) = V(\omega,1,\tau^\perp)$

Démonstration. — Si f est un générateur de $1\otimes 1 \subset E_\tau^\vee$, et si $\tilde{f}\in\Pi^\vee$ a pour image f dans $E_\tau^\vee$, alors $\iota(\tilde{f}) \in k_{\mathscr{E}}(\omega)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p \subset \mathbf{D}(\Pi)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$, et $\partial(f) = \mathrm{Res}(\iota(\tilde{f}))$.

Soit maintenant, $(1)_{n\in\mathbf{N}} \in k_{\mathscr{E}}^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$. Comme $\mathrm{Res}(1) = 0$, il existe $e\in E_\tau^\vee$ vérifiant $\iota(e) = (1)_{n\in\mathbf{N}}$. Par construction de E_τ, on peut choisir $f\in 1\otimes 1$ tel que l'on ait $\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot e - e = \tau(a)f$ quel que soit $a\in\mathbf{Q}_p^*$. Soient alors $\tilde{e}\in\Pi^\vee$ relevant e, et soit $\hat{e} = \iota(\tilde{e})$ l'image de $\tilde{e}$ dans $\mathbf{D}(\Pi)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$; c'est un relèvement de e dans $\mathbf{D}(\Pi)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$, qui est bien déterminé à addition près d'un élément de $k_{\mathscr{E}}(\omega)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$. Si $a\in\mathbf{Q}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\hat{e} - \hat{e} \in k_{\mathscr{E}}(\omega)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$, et on a $\mathrm{Res}(\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\hat{e} - \hat{e}) = \partial(\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot e - e) = \tau(a)\partial(f)$. Une comparaison avec le (iv) de la prop. VII.3.7 permet, en utilisant la prop. VII.3.8, de conclure.

Proposition VII.4.25. — *Si $p \neq 2$, si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$, et si E_τ est l'extension de $\mathbf{1}$ par* St *habituelle,* $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega), E_\tau)$ *est un k_L-espace vectoriel de dimension* 1.

Démonstration. — Soit Π une extension de $B(1,\omega)$ par E_τ. On a $J^\vee(E_\tau) = 1 \otimes 1$ comme représentation de B, et $J^\vee(B(1,\omega)) = \omega \otimes \omega^{-1}$. En recopiant la démonstration de la prop. VII.4.7, on montre que, si $0 \to k_L(\omega) \to \mathbf{V}(\Pi) \to k_L \to 0$ est scindée, alors $J(\Pi) = \omega \otimes \omega^{-1} \oplus 1 \otimes 1$, et donc que Π admet $B(1,\omega) \oplus \mathbf{1}$ comme quotient. Comme $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega), \mathrm{St}) = 0$, cela implique que $B(1,\omega)$ est un sous-objet de Π et donc que Π est scindée. Ceci prouve que $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega), E_\tau)$ s'injecte dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(1,\omega)$. Par ailleurs, il résulte de la prop. VII.4.24 que l'image est incluse dans la droite orthogonale à τ. Pour conclure, il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega), E_\tau) \neq 0$.

Pour cela, on utilise une représentation trianguline[(71)] irréductible V possédant un réseau V^0 tel que $k_L \otimes V^0$ soit l'extension de 1 par ω dont la classe dans $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega))$ soit orthogonale à τ. Cette représentation est alors de la forme $V(s)$ pour $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{irr}}$, et la représentation $\Pi(s)$ est irréductible et admet un réseau $\Pi(s)^0$ tel que $(k_L \otimes \Pi(s)^0)^{\mathrm{ss}} = \mathbf{1} \oplus \mathrm{St} \oplus B(1,\omega)$ (cf. [**7, 14, 16**]). Comme $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega), \mathrm{St}) = 0$ (prop. VII.4.22) et $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1}, B(1,\omega)) = 0$ (prop. VII.4.14), quitte à modifier le réseau $\Pi(s)^0$, on peut se débrouiller (cf. (iii) de la prop. VII.4.5) pour que $k_L \otimes \Pi(s)^0$ admette $B(1,\omega)$ comme quotient, St comme sous-objet, et que les extensions intermédiaires $0 \to \mathrm{St} \to E_1 \to \mathbf{1} \to 0$ et $0 \to \mathbf{1} \to E_2 \to B(1,\omega) \to 0$ soient non scindées. Il existe donc $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ non nul, tel que $E_1 \cong E_\lambda$. Mais alors $\mathbf{V}(k_L \otimes \Pi(s)^0)$ est l'extension de 1 par ω dont la classe dans $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, k_L(\omega))$ est dans l'orthogonal de λ. Comme $\mathbf{V}(k_L \otimes \Pi(s)^0)$ est un sous-quotient de V, on a $\lambda = \tau$, et on a construit une extension non triviale de $B(1,\omega)$ par E_τ, ce qui termine la démonstration du (ii).

Définition VII.4.26. — *Il résulte de la proposition VII.4.25 que, si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ est non nul, il existe, à isomorphisme près, une unique extension de $B(1,\omega)$ par E_τ. On note $\Pi(1,\omega^{-1},\tau)$ cette extension, et si $\delta_1\delta_2^{-1} = \omega$, on note $\Pi(\delta_1,\delta_2,\tau)$ la représentation $\Pi(1,\omega^{-1},\tau) \otimes \delta_1$. D'après la prop. VII.4.24, on a*

$$\mathbf{V}(\Pi(\delta_1,\delta_2,\tau)) = V(\delta_1,\delta_2,\tau^\perp).$$

6. Atomes de longueur 4. — Il n'y a d'atomes de longueur 4 que si $p = 2$, où on a $\omega = 1$, et si $p = 3$, où on a $\omega = \omega^{-1}$. Leur classification reste à faire... Ce sont des extensions de E_{τ_1} par $E_{\tau_2} \otimes \omega$, avec $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$.

7. Non exactitude du foncteur $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$. — On suppose $p \geq 5$. On note D_1 et D_2 les (φ,Γ)-modules $k_{\mathscr{E}}(\omega)$ et $k_{\mathscr{E}}$. On prend $\delta = 1$ dans tout ce qui suit, et on ne le fait pas apparaître dans les notations (i.e. on note $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ le module $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$). Il résulte de la prop. IV.4.17 que $D_2^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est le dual de $B(\omega,1)$ et $D_1^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ celui de $B(1,\omega)$. Par ailleurs, $D_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $D_2 \boxtimes \mathbf{P}^1$ sont duaux l'un de l'autre et, dans cette dualité, $D_1^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $D_2^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ sont les orthogonaux l'un de l'autre.

(71) On pourrait aussi utiliser la représentation $\mathbf{\Pi}(D)$, où D est une extension non triviale de $k_{\mathscr{E}}$ par $k_{\mathscr{E}}(\omega)$, cf. prop. VII.4.27.

Maintenant, $B(\omega,1)$ est une extension de St par $\mathbf{1}$. Il en résulte que $D_2^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ possède un sous-module d'indice fini $(D_2^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)_0$ stable par G, dual de St (tout ceci a déjà été utilisé dans la démonstration du (ii) de la prop. IV.4.18). L'orthogonal de $(D_2^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)_0$ dans $D_1\boxtimes\mathbf{P}^1$ est $D_1^\sharp\boxtimes\mathbf{P}^1$ qui contient donc strictement $D_1^\flat\boxtimes\mathbf{P}^1$, et le quotient est $\mathbf{1}$. Par contre, $B(1,\omega)$ étant irréductible, on a $D_2^\sharp\boxtimes\mathbf{P}^1=D_2^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$. En notant E l'extension non triviale de $B(1,\omega)$ par $\mathbf{1}$, on obtient des suites exactes.

$$0\to D_1^\flat\boxtimes\mathbf{P}^1\to D_1\boxtimes\mathbf{P}^1\to B(\omega,1)\to 0 \text{ et } 0\to D_1^\sharp\boxtimes\mathbf{P}^1\to D_1\boxtimes\mathbf{P}^1\to \mathrm{St}\to 0,$$

$$0\to D_2^\flat\boxtimes\mathbf{P}^1\to D_2\boxtimes\mathbf{P}^1\to B(1,\omega)\to 0 \text{ et } 0\to (D_2^\flat\boxtimes\mathbf{P}^1)_0\to D_2\boxtimes\mathbf{P}^1\to E\to 0.$$

Proposition VII.4.27. — (i) *Si* $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)-\{0\}$, *et si* D_τ *est l'extension non triviale de* D_2 *par* D_1 *correspondant à la droite orthogonale de* τ *dans* $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},k_L(\omega))$, *on a des suites exactes*

$$0\to D_1^\sharp\boxtimes\mathbf{P}^1\to D_\tau^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\to(D_2^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)_0\to 0 \text{ et } 0\to\mathrm{St}\to\mathbf{\Pi}(D_\tau)\to E\to 0,$$

et l'extension intermédiaire de $\mathbf{1}$ *par* St *apparaissant dans* $\mathbf{\Pi}(D_\tau)$ *est l'extension* E_τ *définie juste avant le th. VII.4.18.*

(ii) *Si* D *est une extension non triviale de* D_1 *par* D_2, *on a des suites exactes*

$$0\to D_2^\flat\boxtimes\mathbf{P}^1\to D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\to D_1^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\to 0 \text{ et } 0\to B(1,\omega)\to\mathbf{\Pi}(D)\to B(\omega,1)\to 0,$$

et $\mathbf{\Pi}(D)$ *est une extension de* St *par* $B(1,\omega)\oplus\mathbf{1}$.

Démonstration. — On a $\check{D}_\tau=D_\tau$, et donc $D_\tau^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ est son propre orthogonal, et comme l'image de $D_\tau^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ dans $D_2\boxtimes\mathbf{P}^1$ est incluse dans $D_2^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ (car $D_\tau^\natural$ s'envoie dans $D_2^\natural$), il y a *a priori* deux possibilités :

– la suite $0\to D_1^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\to D^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\to D_2^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\to 0$ est exacte,

– la suite $0\to D_1^\sharp\boxtimes\mathbf{P}^1\to D_\tau^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1\to(D_2^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1)_0\to 0$ est exacte.

Dans le premier cas, la suite $0\to B(\omega,1)\to\mathbf{\Pi}(D_\tau)\to B(1,\omega)\to 0$ serait exacte. Or $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega),\mathrm{St})=0$ (prop. VII.4.22), ce qui fait que $\mathbf{\Pi}(D_\tau)$ serait une extension de $\mathrm{St}\oplus B(1,\omega)$ par $\mathbf{1}$, et que $\mathbf{D}(\mathbf{\Pi}(D_\tau))$ serait scindé car égal à $\mathbf{D}(\mathrm{St})\oplus\mathbf{D}(B(1,\omega))$. Comme ceci est en contradiction avec le fait que $\mathbf{D}(\mathbf{\Pi}(D_\tau))=\check{D}_\tau=D_\tau$, cela prouve que l'on est dans le second cas.

On a donc une suite exacte $0\to\mathrm{St}\to\mathbf{\Pi}(D_\tau)\to E\to 0$ où l'extension n'est pas scindée pour les mêmes raisons que ci-dessus. Comme $\mathrm{Ext}^1_G(B(1,\omega),\mathrm{St})=0$, cela prouve que l'extension intermédiaire de $\mathbf{1}$ par St n'est pas scindée, et il résulte de la prop. VII.4.24 que cette extension est E_τ.

Ceci démontre le (i). La démonstration du (ii) est identique à part le fait qu'il n'y a qu'un cas possible et qu'on utilise la nullité de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},B(1,\omega))$ (prop. VII.4.14) pour déterminer la structure de $\mathbf{\Pi}(D)$.

Remarque VII.4.28. — Soit $\Delta\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, irréductible de dimension 2, dont les composants de Jordan-Hölder de la réduction sont D_1 et D_2. On peut alors trouver des $\mathscr{O}_\mathscr{E}$-réseaux Δ_0 et Δ_1 de Δ tels que $k_L\otimes\Delta_0$ soit une extension non triviale de D_2

par D_1 tandis que $k_L \otimes \Delta_1$ est une extension non triviale de D_1 par D_2. Les semi-simplifiées de $\mathbf{\Pi}(k_L \otimes \Delta_0)$ et $\mathbf{\Pi}(k_L \otimes \Delta_1)$ sont bien les mêmes, mais la structure des extensions entre les morceaux est assez différente. C'est dû au fait que l'extension de $\mathbf{1}$ par St apparaissant dans $\mathbf{\Pi}(k_L \otimes \Delta_0)$ contient l'information concernant l'extension de D_2 par D_1, et cette information disparaît dans $\mathbf{\Pi}(k_L \otimes \Delta_1)$. Il en résulte que :

- $\mathbf{\Pi}(k_L \otimes \Delta_1)$ n'est pas égal à $k_L \otimes \mathbf{\Pi}(\Delta_1)$ qui est une extension de St par l'extension E de $B(1,\omega)$ par $\mathbf{1}$ apparaissant ci-dessus.
- $(\Delta_1^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ n'est pas saturé.

VII.5. Extensions d'atomes automorphes. — Ce § contient la démonstration de l'injectivité de $\mathrm{Ext}^1(\Pi,\Pi) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbf{V}(\Pi),\mathbf{V}(\Pi))$ requise pour faire marcher la stratégie de Kisin. Le lecteur y trouvera aussi des calculs de groupes d'extensions de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dont beaucoup étaient déjà connus d'Emerton [**37**].

1. Injectivité de $\mathrm{Ext}^1(\Pi,\Pi) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbf{V}(\Pi),\mathbf{V}(\Pi))$

Lemme VII.5.1. — *Le foncteur* $\mathbf{V}$ *induit une injection de* $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St}, B(1,\omega))$ *dans* $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\omega), k_L)$ *et de* $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St},\mathrm{St})$ *dans* $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\omega), k_L(\omega))$.

Démonstration. — On a $J^\vee(\mathrm{St}) = 0$ d'après le (iii) de la prop. VII.1.2. Ceci permet d'en déduire (cf. rem. VII.1.10) qu'une extension qui est dans le noyau de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St}, B(1,\omega)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\omega), k_L)$ (resp. $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St},\mathrm{St}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\omega), k_L(\omega))$), est aussi dans le noyau de la restriction de G à B. On conclut en utilisant le th. VII.2.1.

Théorème VII.5.2. — *Si* Π *est un atome automorphe de longueur* ≤ 3, *alors* $\mathbf{V}$ *induit une injection de* $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi,\Pi)$ *dans* $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\mathbf{V}(\Pi),\mathbf{V}(\Pi))$.

Démonstration. — Soit $0 \to \Pi \to E \to \Pi \to 0$ une extension de Π par Π. Il s'agit de montrer que, si $\mathbf{V}(E) = \mathbf{V}(\Pi) \oplus \mathbf{V}(\Pi)$, comme $k_L[\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}]$-module, alors $E = \Pi \oplus \Pi$. La démonstration se fait cas par cas.

– Si Π est irréductible (et donc supersingulière), $J^\vee(\Pi) = 0$ d'après le (iv) de la prop. VII.1.2. On déduit du diagramme commutatif de la rem. VII.1.10 que que $0 \to \Pi^\vee \to E^\vee \to \Pi^\vee \to 0$ est scindée sur B, et donc que $0 \to \Pi \to E \to \Pi \to 0$ est scindée sur B. Le th. VII.2.1 permet d'en déduire que $0 \to \Pi \to E \to \Pi \to 0$ est scindée sur G, ce qui permet de conclure dans ce cas.

– Si Π est de longueur 2, alors Π est une extension de $B(\delta_2,\delta_1)$ par $B(\delta_1,\delta_2)$, avec $\delta_1\delta_2^{-1} \notin \{\omega,\omega^{-1}\}$. L'injectivité de $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi,\Pi)$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\mathbf{V}(\Pi),\mathbf{V}(\Pi))$, peut donc se déduire, par dévissage, du (iii) de la prop. VII.4.13, et de la prop. VII.4.7.

– Si Π est de longueur 3, on peut, quitte à tordre Π par un caractère, supposer que Π est une extension de $B(1,\omega)$ par E_τ, avec $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, k_L)$ non nul. La démonstration va encore se faire par dévissage, mais il faut faire un petit peu attention car $\mathbf{V}$ tue les morceaux de dimension finie. On peut écrire E sous la forme matricielle suivante (dans cette matrice $a_{3,1}$ est un élément de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St}, B(1,\omega))$; si $a_{3,1} = 0$, alors $a_{2,1}$

et $a_{3,2}$ sont des éléments de $\mathrm{Ext}^1{}_G(\mathrm{St},\mathbf{1})$ et $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},B(1,\omega))$ respectivement, etc.) :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{St} & \tau & c\cup\tau & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & \mathbf{1} & c & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & B(1,\omega) & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{St} & \tau & c\cup\tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B(1,\omega) \end{pmatrix}$$

On cherche à annuler les $a_{i,j}$. Comme $\mathbf{V}(E)$ est scindée, la sous-extension

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} B(1,\omega) & a_{3,1} \\ 0 & \mathrm{St} \end{pmatrix}$$

est scindée d'après le lemme VII.5.1, puisque $0\to\mathbf{V}(B(1,\omega))\to\mathbf{V}(E')\to\mathbf{V}(\mathrm{St})\to 0$ est scindée comme sous-extension de $\mathbf{V}(E)$. On a donc $a_{3,1}=0$. De plus, comme $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},B(1,\omega))=0$ d'après la prop. VII.4.14, on a aussi $a_{3,2}=0$. On en déduit que E contient la sous-extension

$$E^{(2)} = \begin{pmatrix} B(1,\omega) & a_{3,3} \\ 0 & B(1,\omega) \end{pmatrix}.$$

En utilisant le (iii) de la prop. VII.4.13 et les arguments ci-dessus, on en déduit que cette extension est aussi scindée, et donc que $a_{3,3}=0$. En résumé, la sous-extension $0\to\Pi/E_\tau\to E/E_\tau\to\Pi\to 0$ est scindée et donc E contient une sous extension $0\to E_\tau\to E^{(3)}\to\Pi\to 0$. Comme $0\to\mathbf{V}(E_\tau)\to\mathbf{V}(E^{(3)})\to\mathbf{V}(\Pi)\to 0$ est scindée, on déduit de la rem. VII.1.10, que la suite $0\to J^\vee(\Pi)\to J^\vee(E^{(3)})\to J^\vee(E_\tau)\to 0$ est exacte. Comme $J^\vee(\Pi)\cong\omega^{-1}\otimes\omega$ d'après le lemme VII.4.23, et comme $J^\vee(E_\tau)=1\otimes 1$, cette suite est scindée comme suite de $k_L[B]$-modules. On en déduit, en utilisant la prop. VII.1.7, que $E^{(3)}$ admet $\mathbf{1}\oplus B(1,\omega)$ comme sous-objet d'un quotient. Il en est donc de même de

$$E^{(3)}/\mathrm{St} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & \mathrm{St} & \tau & c\cup\tau \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & c \\ 0 & 0 & 0 & B(1,\omega) \end{pmatrix},$$

et comme τ et c ne sont pas triviaux, cela montre que $a_{2,1}=a_{2,2}=a_{2,3}=0$. Comme $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St},\mathrm{St})\to\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(k_L(\omega),k_L(\omega))$ est injective d'après le lemme VII.5.1, on a aussi $a_{1,1}=0$. L'extension $0\to\mathrm{St}\to E^{(4)}\to\mathbf{1}\to 0$ déterminée par $a_{1,2}$ est, d'après le th. VII.4.18, de la forme $E_{\tau'}$, avec $\tau'\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$. Or E contient

$$\begin{pmatrix} \mathrm{St} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & \mathbf{1} & c \\ 0 & 0 & B(1,\omega) \end{pmatrix},$$

comme sous-objet. Si $\tau' = 0$, on a gagné. Si $\tau' \neq 0$, alors $\mathbf{V}(E)$ contient, d'après la prop. VII.4.24, la représentation $V(\omega, 1, (\tau')^{\perp})$. Comme, par ailleurs, $\mathbf{V}(E)$ est égale à $V(\omega, 1, \tau^{\perp}) \oplus V(\omega, 1, \tau^{\perp})$, cela implique qu'il existe $\alpha \in k_L$ tel que $\tau' = \alpha\tau$. L'espace E est la somme directe de Π et $s(\Pi)$, où $s(\Pi)$ est un relèvement du Π en quotient, et $s : \Pi \to E$ est une section de la projection. En remplaçant s par s' définie par $s'(v) = s(v) - \alpha v$, cela fait disparaître le $\alpha\tau$, et donc $a_{1,2} = 0$. Enfin, $a_{1,3} = 0$ puisque $\mathrm{Ext}^1(B(1,\omega), \mathrm{St}) = 0$ d'après la prop. VII.4.22. Ceci permet de conclure.

2. Calculs de groupes d'extensions de représentations de G

Proposition VII.5.3. — *Soient $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$.*

(i) *Si $\delta' \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, alors $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi(r,\delta), \delta') = 0$.*

(ii) *Si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, avec $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$, alors*

$$\mathrm{Ext}^1_G(\Pi(r,\delta), B(\delta_1,\delta_2)) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_1,\delta_2), \Pi(r,\delta)) = 0.$$

(iii) *Si $\delta' \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$, alors $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St} \otimes \delta', \Pi(r,\delta)) = 0$.*

Démonstration. — Soit E une extension de Π par $\Pi(r,\delta)$, où Π est de la forme $B(\delta_1,\delta_2)$, avec $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ et $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$, ou encore $\mathrm{St} \otimes \delta'$, avec $\delta' \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$. Comme $J^{\vee}(\Pi(r,\delta)) = 0$ et $H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi(r,\delta))) = 0$, il résulte du cor. VII.1.9 que l'application naturelle $H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(E)) \to H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi))$ est un isomorphisme, et donc que l'extension $0 \to \mathbf{V}(\Pi(r,\delta)) \to \mathbf{V}(E) \to \mathbf{V}(\Pi) \to 0$ est scindée puisque $H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi)) = \mathbf{V}(\Pi)$.

– Dans le cas, où $\Pi = \mathrm{St} \otimes \delta'$, cela implique que $0 \to \Pi^{\vee} \to E^{\vee} \to \Pi(r,\delta)^{\vee} \to 0$ est scindée sur B puisque $J^{\vee}(\mathrm{St} \otimes \delta') = 0$ et $J^{\vee}(\Pi(r,\delta)) = 0$. Le th. VII.2.1 montre que E est scindée sur G. On en déduit la trivialité de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St} \otimes \delta', \Pi(r,\delta))$.

– Dans le cas $\Pi = B(\delta_1,\delta_2)$, cela implique que E a une image nulle dans $\mathrm{Ext}^1_B(B(\delta_1,\delta_2) \boxtimes \mathbf{Q}_p, \Pi(r,\delta))$ (rem. VII.1.10). Comme $B(\delta_1,\delta_2)$ est équilibrée et sans quotient fini, cela implique, d'après la prop. VII.2.12, que E est scindée sur G. On en déduit la trivialité de $\mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_1,\delta_2), \Pi(r,\delta))$.

Soit maintenant E une extension de $\Pi(r,\delta)$ par δ', avec $\delta' \in \widehat{\mathscr{T}}(k_L)$ ou par $B(\delta_1,\delta_2)$, avec $\delta_1\delta_2^{-1} \neq \omega$. Comme $J^{\vee}(\Pi(r,\delta)) = 0$ et $H^0(\mathscr{H}', \mathbf{V}(\Pi(r,\delta))) = 0$, il résulte du (ii) de la prop. VII.1.8, que l'on a $J^{\vee}(E) = J^{\vee}(\Pi)$. En utilisant la prop. VII.1.7, cela permet de montrer que E admet δ' [resp. $\mathrm{Ind}_B^G J(B(\delta_1,\delta)) = B(\delta_1,\delta_2)$] comme quotient. L'extension E est donc scindée, ce qui prouve la trivialité de $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi(r,\delta), \delta')$ et $\mathrm{Ext}^1_G(\Pi(r,\delta), B(\delta_1,\delta_2))$.

Ceci termine la démonstration de la proposition.

Proposition VII.5.4. — *Si $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p, k_L)$, l'application naturelle de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1}, E_\tau)$ dans $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1},\mathbf{1})$ est identiquement nulle.*

Démonstration. — Soit Π une extension de $\mathbf{1}$ par E_τ ; on doit prouver $\Pi/\mathrm{St} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}$. Rappelons que $E_\tau = \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L) \oplus k_L \cdot \tau_+$. Soit $e \in \Pi$ relevant $1 \in \mathbf{1}$. Si $g \in G$, il existe $\alpha_g \in k_L$ et $\phi_g \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$, uniquement déterminés, tels que $g \cdot e - e = \alpha_g\tau_+ + \phi_g$.

Maintenant, comme $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, E_\tau) = 0$, on a $\mathrm{Ext}^1_G(\mathbf{1}, E_\tau) = H^1(G, E_\tau)$, et il suffit de prouver que $\alpha_g = 0$ quel que soit $g \in G$.

On a

$$\alpha_{gh}\tau_+ + \phi_{gh} = gh \cdot e - e = g \cdot (he - e) + g \cdot e - e = g \cdot (\alpha_h \tau_+ + \phi_h) + \alpha_g \tau_+ + \phi_g.$$

Comme $g \cdot \tau_+ - \tau_+ \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, k_L)$, cela implique $\alpha_{gh} = \alpha_g + \alpha_h$, pour tous $g, h \in G$. On en déduit l'existence de $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p, k_L)$ tel que $\alpha_g = \alpha(\det g)$, pour tout $g \in G$. De plus, le 2-cocycle $(g, h) \mapsto \alpha(\det h)(g \cdot \tau_+ - \tau_+)$ est égal à $\phi_{gh} - g \cdot \phi_h - \phi_g$; c'est donc un 2-cobord, et sa restriction à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_p^* \end{smallmatrix}\right)$ est donc, *a fortiori*, un 2-cobord.

Si $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{smallmatrix}\right)$, on a

$$(g \cdot \tau_+ - \tau_+)(x) = \tau_+(vx) - \tau_+(x) - \tau(v) = \begin{cases} -\tau(v) & \text{si } x, vx \in \mathbf{Z}_p, \\ \tau(x) & \text{si } x \in \mathbf{Z}_p \text{ et } vx \notin \mathbf{Z}_p, \\ -\tau(vx) & \text{si } x \notin \mathbf{Z}_p \text{ et } vx \in \mathbf{Z}_p, \\ 0 & \text{si } x, vx \notin \mathbf{Z}_p. \end{cases}$$

En évaluant en $x = 1$ la formule $\alpha(\det h)(g \cdot \tau_+ - \tau_+) = \phi_{gh} - g \cdot \phi_h - \phi_g$, pour $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$, $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{smallmatrix}\right)$, on obtient, en notant, pour simplifier, ϕ_u la fonction ϕ_k, si $k = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right)$,

$$\alpha(d) \cdot \begin{cases} -\tau(v) & \text{si } v \in \mathbf{Z}_p \\ \tau(v) & \text{si } v \notin \mathbf{Z}_p \end{cases} = \phi_{dv}(1) - \phi_d(v) - \phi_v(1).$$

Remplaçant v par x, cela nous fournit l'identité

$$\phi_d(x) = \phi_{dx}(1) - \phi_x(1) - \alpha(d) \cdot \begin{cases} -\tau(x) & \text{si } x \in \mathbf{Z}_p \\ \tau(x) & \text{si } x \notin \mathbf{Z}_p \end{cases}.$$

Un petit calcul permet d'en déduire que, si $x, vx \notin \mathbf{Z}_p$, alors

$$\phi_{dv}(x) - \phi_d(vx) - \phi_v(x) = -\alpha(dv)\tau(x) + \alpha(d)\tau(vx) + \alpha(v)\tau(x) = \alpha(d)\tau(v).$$

Le membre de gauche étant à support compact dans $\mathbf{Q}_p$, on en déduit la nullité de $\alpha(d)\tau(v)$, pour tous $d, v \in \mathbf{Q}_p^*$, et τ n'étant pas identiquement nul, cela implique $\alpha = 0$, ce qui permet de conclure.

VIII. Annexe : (φ, Γ)-modules et cohomologie galoisienne

VIII.1. Compléments de théorie d'Iwasawa

1. Cohomologie d'Iwasawa. — Soient G un groupe profini et Γ un quotient de G. Si $g \in G$, on note $\overline{g}$ l'image de g dans Γ. On suppose que l'élément neutre de Γ admet une base dénombrable de voisinages, et on fixe une suite décroissante $(\Gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-groupes ouverts distingués de Γ formant une base dénombrable de voisinages de l'élément neutre. On impose que $\Gamma_0 = \Gamma$. On note G_n le sous-groupe de G image inverse de Γ_n ; on a donc un isomorphisme $G/G_n \cong \Gamma/\Gamma_n$ pour tout n.

On note $\Lambda = \mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ l'algèbre de groupe complétée de Γ : c'est la limite projective des $\mathscr{O}_L[\Gamma/\Gamma_n]$. On peut aussi voir Λ comme l'algèbre des mesures sur Γ, à valeurs dans $\mathscr{O}_L$, un élément a de Γ vu comme élément de Λ correspondant à la masse de Dirac en a. Si $\mu \in \Lambda$ et si $\mu_n = \sum_{a\in\Gamma/\Gamma_n} \alpha_{n,a}\, a$ est l'image de μ dans $\mathscr{O}_L[\Gamma/\Gamma_n]$, on définit la mesure $\mu(a\Gamma_n)$ par $\mu(a\Gamma_n) = \alpha_{n,a}$. Ceci permet de définir l'intégrale $\int_\Gamma \phi\mu$ d'une fonction continue $\phi : \Gamma \to \mathscr{O}_L$ comme la limite des sommes de Riemann

$$\int_\Gamma \phi\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{a\in\Gamma/\Gamma_n} \mu(a\Gamma_n)\phi(a).$$

On munit Λ d'actions de G et Γ commutant entre elles, en étendant par linéarité et continuité les actions $(g,a) \mapsto g\cdot a = \overline{g}a$ et $(\gamma,a) \mapsto \gamma\cdot a = a\gamma^{-1}$, si $g \in G$ et $a,\gamma \in \Gamma$.

Si V est un $\mathscr{O}_L$-module muni d'une action continue de G (ce qui inclut les L-représentations de G), les actions ci-dessus de G et Γ sur Λ munissent naturellement $\Lambda \otimes_{\mathscr{O}_L} V$ d'une structure de $\Lambda[G]$ module. De manière plus précise, si $a \in \Gamma$ est vu comme un élément de Λ et si $v \in V$, les actions de $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$ sur $a\otimes v$ sont données par $g\cdot(a\otimes v) = ga\otimes(g\cdot v)$ et $\gamma\cdot(a\otimes v) = a\gamma^{-1}\otimes v$.

On peut aussi décrire ces actions en utilisant l'identification de $\Lambda \otimes_{\mathscr{O}_L} V$ avec les mesures sur Γ à valeurs dans V. Si μ est une telle mesure, et si $\phi : \Gamma \to \mathscr{O}_L$ est continue, on a

$$\int_\Gamma \phi(x)\, g\cdot\mu = g\cdot\Big(\int_\Gamma \phi(\overline{g}\,x)\,\mu\Big) \quad \text{et} \quad \int_\Gamma \phi(x)\,\gamma\cdot\mu = \int_\Gamma \phi(x\gamma^{-1})\,\mu.$$

Si $i \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$, cela permet de considérer le groupe de cohomologie continue $H^i(G, \Lambda\otimes_{\mathscr{O}_L} V)$ comme un module sur Λ.

Soit W un $\mathscr{O}_L$-module de type fini muni d'une action linéaire continue de Γ. En utilisant la projection de G sur Γ, cela munit aussi W d'une action linéaire continue de G. On peut donc considérer les $\Lambda[G]$-modules $\Lambda\otimes(V\otimes W)$ (avec action de G sur W à travers Γ) et $(\Lambda\otimes V)\otimes W$ (avec action triviale de G sur W).

Proposition VIII.1.1. — *L'application $(a\otimes v)\otimes w \mapsto a\otimes(v\otimes a\cdot w)$ induit par linéarité un morphisme α_W de $\Lambda[G]$-modules de $(\Lambda\otimes V)\otimes W$ sur $\Lambda\otimes(V\otimes W)$.*

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que l'application ci-dessus commute bien aux actions de G et Γ, et il suffit de regarder ces actions sur les tenseurs élémentaires. Si $g \in G$, alors

$$g(\alpha_W((a\otimes v)\otimes w) = g(a\otimes(v\otimes a\cdot w)) = \overline{g}\,a\otimes(gv\otimes\overline{g}a\cdot w),$$
$$\alpha_W(g((a\otimes v)\otimes w)) = \alpha_W(\overline{g}\,a\otimes gv)\otimes w) = \overline{g}\,a\otimes(gv\otimes\overline{g}a\cdot w),$$

ce qui prouve que α_W commute à l'action de G. De même,

$$\gamma(\alpha_W((a\otimes v)\otimes w)) = \gamma(a\otimes(v\otimes a\cdot w)) = a\gamma^{-1}\otimes(v\otimes a\cdot w),$$
$$\alpha_W(\gamma((a\otimes v)\otimes w)) = \alpha_W(a\gamma^{-1}\otimes v)\otimes\gamma w) = a\gamma^{-1}\otimes(v\otimes a\cdot w),$$

ce qui prouve que α_W commute à l'action de Γ.

Corollaire VIII.1.2. — *Si $i \in \mathbf{N}$, alors α_W induit un morphisme de Λ-modules de $H^i(G, \Lambda \otimes V) \otimes W$ dans $H^i(G, \Lambda \otimes (V \otimes W))$.*

2. Théorie d'Iwasawa. — On s'intéresse au cas où $G = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$. On note F_n le corps $\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^n})$, $\mathscr{G}_{F_n} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ son groupe de Galois absolu, et Γ_n le sous-groupe de Γ fixant F_n. Soit $\Lambda = \mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa. Si V est une $\mathscr{O}_L$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on note $H^1_{\mathrm{Iw}}(V)$ le Λ-module $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes V)$, l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\Lambda \otimes V$ étant l'action diagonale. En interprétant $\Lambda \otimes V$ comme l'ensemble des mesures sur Γ à valeurs dans V, l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ peut aussi se décrire par la formule

$$\int_\Gamma \phi(x)\, g \cdot \mu = g\Big(\int_\Gamma \phi(gx)\, \mu\Big), \quad \text{si } g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}.$$

Si $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(V)$, et si $n \geq 1$, on note $c_n(\mu)$ l'élément $\int_{\Gamma_n} \mu$ de $H^1(\mathscr{G}_{F_n}, V)$. Les $c_n(\mu)$, pour $n \geq 1$, forment un système compatible pour les applications de corestriction, et $\mu \mapsto (c_n(\mu))_{n \geq 1}$ induit un isomorphisme de $H^1_{\mathrm{Iw}}(V)$ sur $\varprojlim H^1(\mathscr{G}_{F_n}, V)$, la limite projective étant relative aux applications de corestriction.

Si $\eta : \Gamma \to \mathscr{O}_L^*$ est un caractère, on note encore η le caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ composé de η et de la projection $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \Gamma$. L'application $\alpha_\eta : H^1_{\mathrm{Iw}}(V) \otimes \eta \to H^1_{\mathrm{Iw}}(V \otimes \eta)$ du cor. VIII.1.2 est un isomorphisme (l'isomorphisme inverse étant $\alpha_{\eta^{-1}}$). Si $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(V)$, on note $c_{\eta,n}(\mu)$ l'élément $c_n(\alpha_\eta(\mu \otimes \eta)) = (\int_{\Gamma_n} \eta(x)\, \mu) \otimes \eta$ de $H^1(\mathscr{G}_{F_n}, V \otimes \eta)$.

Si W est une $\mathscr{O}_L$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et si $\mu \in \Lambda \otimes \Lambda \otimes W$, alors pour tous $\phi : \Gamma \to \mathscr{O}_L$ continue et $g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on a (ne pas oublier que Γ est commutatif) :

$$\int_{\Gamma \times \Gamma} \phi(x^{-1}y)\, g \cdot \mu = g\Big(\int_{\Gamma \times \Gamma} \phi(x^{-1}y)\, \mu\Big).$$

On en déduit le fait que, si $(\sigma, \tau) \mapsto \mu_{\sigma,\tau}$ est un 2-cocycle (resp. 2-cobord) continu sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, à valeurs dans $\Lambda \otimes \Lambda \otimes W$, alors $(\sigma, \tau) \mapsto \int_{\Gamma \times \Gamma} \phi(x^{-1}y) \mu_{\sigma,\tau}$ est un 2-cocycle (resp. 2-cobord) continu sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, à valeurs dans W. D'où l'existence d'une application naturelle $\mu \mapsto M(\mu)$ de $H^2(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes \Lambda \otimes W)$ dans $\Lambda \otimes H^2(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, W)$.

Si V est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L} \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\check{V}$ la représentation $\mathrm{Hom}(V, \mathscr{O}_L \otimes \chi)$ (comme d'habitude). Comme $H^2(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L \otimes \chi) = \mathscr{O}_L$, cela permet, en utilisant la projection naturelle $\langle\ ,\ \rangle : \check{V} \otimes V \to \mathscr{O}_L \otimes \chi$, et en composant les flèches

$$H^1_{\mathrm{Iw}}(\check{V}) \times H^1_{\mathrm{Iw}}(V) \to H^2(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes \Lambda \otimes (\mathscr{O}_L \otimes \chi)) \to \Lambda \otimes H^2(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L \otimes \chi) \cong \Lambda,$$

de définir un accouplement

$$(\ ,\ )_{\mathrm{Iw}} : H^1_{\mathrm{Iw}}(\check{V}) \times H^1_{\mathrm{Iw}}(V) \to \Lambda.$$

Remarque VIII.1.3. — (i) L'accouplement $(\ ,\ )_{\mathrm{Iw}}$ est anti-linéaire en la première variable (pour l'involution $\gamma \to \gamma^{-1}$ de Γ prolongée en une involution $\lambda \to \lambda^*$ de Λ) et linéaire en la seconde.

(ii) On note $(\ ,\ )_n$ l'accouplement naturel

$$H^1(\mathscr{G}_{F_n}, \check{V}) \times H^1(\mathscr{G}_{F_n}, V) \to H^2(\mathscr{G}_{F_n}, \mathscr{O}_L \otimes \chi) \cong \mathscr{O}_L.$$

Si η est un caractère continu de $\mathbf{Z}_p^*$, si $\mu' \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\check{V}^*)$, et si $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(V)$, un petit calcul montre que l'on a

$$\int_{\Gamma_n} \eta\,(\mu',\mu)_{\mathrm{Iw}} = \big(c_{\eta^{-1},n}(\mu'), c_{\eta,n}(\mu)\big)_n, \quad \text{quel que soit } n \in \mathbf{N}.$$

(iii) Si $\gamma \in \Gamma$, on a, dans $H^2(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L \otimes \chi)$,

$$\int_{\gamma\Gamma_n} (\mu',\mu)_{\mathrm{Iw}} = \sum_{\sigma\in\Gamma/\Gamma_n} \Big(\int_{\gamma^{-1}\sigma\Gamma_n} \mu', \int_{\sigma\Gamma_n} \mu\Big)_n = \mathrm{cor}_{F_n}^{\mathbf{Q}_p}\Big(\int_{\gamma^{-1}\Gamma_n} \mu', \int_{\Gamma_n} \mu\Big)_n,$$

et comme $\mathrm{cor}_{F_n}^{\mathbf{Q}_p} : H^2(\mathscr{G}_{F_n}, \mathscr{O}_L \otimes \chi) \to H^2(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L \otimes \chi)$ induit l'identité sur $\mathscr{O}_L$, on obtient finalement $\int_{\gamma\Gamma_n} (\mu',\mu)_{\mathrm{Iw}} = (c_n(\gamma\cdot\mu'), c_n(\mu))_n$. On peut donc aussi définir $(\mu',\mu)_{\mathrm{Iw}}$ par la formule

$$(\mu',\mu)_{\mathrm{Iw}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_n} \big(c_n(\gamma\cdot\mu'), c_n(\mu)\big)_n\, \gamma.$$

(iv) Tout ce qui précède s'étend aux objets de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, en définissant $\check{V}$ comme $\mathrm{Hom}(V, L/\mathscr{O}_L \otimes \chi)$. Les accouplements $(\ ,\ )_n$ et $(\ ,\ )_{\mathrm{Iw}}$ sont alors à valeurs dans $L/\mathscr{O}_L$ et $L/\mathscr{O}_L \otimes \Lambda$ respectivement.

3. Théorie d'Iwasawa et (φ,Γ)-modules. — La théorie des (φ,Γ)-modules fournit une description agréable du module d'Iwasawa $H^1_{\mathrm{Iw}}(V)$ (cf. [**21, 46**]). Soit $D = \mathbf{D}(V)$; on a donc $\check{D} = \mathbf{D}(\check{V})$. Soit γ_n un générateur topologique de Γ_{F_n}, et si $f \in \{\varphi,\psi\}$, soit $C_{f,\gamma_n}(V)$ le complexe (c'est un complexe car f et γ_n commutent)

$$0 \to D \xrightarrow{x\mapsto((f-1)\cdot x, \frac{\gamma_n-1}{\tau_n(\gamma_n)}\cdot x)} D\oplus D \xrightarrow{(a,b)\mapsto -\frac{\gamma_n-1}{\tau_n(\gamma_n)}\cdot a+(f-1)\cdot b} D \to 0,$$

où $\tau_n(\gamma_n) = p^{-n}\log\chi(\gamma_n)$, si $n \geq 1$ et $\tau_0(\gamma_0) = \frac{p-1}{p}\log\chi(\gamma_0)$. Rappelons que l'on dispose d'un accouplement $\{\ ,\ \}$ qui induit une dualité parfaite entre $\check{D}$ et D. Un petit calcul montre que, les complexes $C_{\psi,\gamma_n^{-1}}(\check{V})$ et $C_{\varphi,\gamma_n}(V)$ sont en dualité, si on munit $(\check{D}\oplus\check{D})\times(D\oplus D)$ de l'accouplement $\{(a,b),(a',b')\} = \{a,b'\} + \{a',b\}$. On a alors le résultat suivant.

Proposition VIII.1.4. — (i) *On a, pour tout $i \in \mathbf{N}$, des isomorphismes naturels $H^i(C_{\varphi,\gamma_n}(V)) \cong H^i(C_{\psi,\gamma_n}(V)) \cong H^i(\mathscr{G}_{K_n}, V)$, celui entre $H^i(C_{\varphi,\gamma_n}(V))$ et $H^i(C_{\psi,\gamma_n}(V))$ étant induit par le morphisme de complexes de $C_{\varphi,\gamma_n}(V)$ dans $C_{\psi,\gamma_n}(V)$ dont la flèche du milieu est $(a,b)\mapsto(-\psi(a),b)$.*

(ii) *La dualité induite entre les groupes $H^i(\mathscr{G}_{F_n}, \check{V})$ et $H^{2-i}(\mathscr{G}_{F_n}, V)$ par la dualité entre les complexes $C_{\psi,\gamma_n^{-1}}(\check{V})$ et $C_{\varphi,\gamma_n}(V)$ est la dualité locale de Poitou-Tate.*

L'ingrédient principal pour démontrer le (i) est le fait que $\gamma_n - 1$ admet un inverse continu sur $D^{\psi=0} = D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. Ceci permet, si $z \in D^{\psi=1}$, de construire pour tout $n \geq 1$ un élément $c_n(z) \in H^1(\mathscr{G}_{F_n}, V)$ image de $(\frac{\tau_n(\gamma_n)}{\gamma_n-1}\cdot(\varphi-1)\cdot z, z)$ qui appartient à $Z^1(C_{\varphi,\gamma_n}(V))$; c'est aussi l'image dans $H^1(\mathscr{G}_{F_n}, V)$ de $(0,z) \in Z^1(C_{\psi,\gamma_n}(V))$ (en particulier, il ne dépend que de n et pas du choix de γ_n). Les $(c_n(z))_{n\geq1}$ forment un

système compatible pour les corestrictions et on obtient de la sorte un isomorphisme $(\mathrm{Exp}^*)^{-1} : D^{\psi=1} \cong H^1_{\mathrm{Iw}}(V)$ qui est Λ-antilinéaire.

Plus généralement, si η est un caractère continu de $\mathbf{Z}_p^*$, on a $\mathbf{D}(V \otimes \eta) = D \otimes \eta$, et si $z \in D^{\psi=1}$, alors $z \otimes \eta \in \mathbf{D}(V \otimes \eta)^{\psi=1}$. On note $c_{\eta,n}(z)$ l'élément $c_n(z \otimes \eta)$ de $H^1(\mathscr{G}_{F_n}, V \otimes \eta)$.

Maintenant, si $z' \in \check{D}^{\psi=1}$ et $z \in D^{\psi=1}$, on peut utiliser la description de la dualité locale donnée au (ii) de la prop. VIII.1.4 pour calculer $(c_n(z'), c_n(z))_n$. On obtient

$$\begin{aligned}(c_n(z'), c_n(z))_n &= -\{\frac{\tau_n(\gamma_n)}{\gamma_n - 1} \cdot (\varphi - 1) \cdot z', z\} \\ &= \{\frac{\tau_n(\gamma_n)}{\gamma_n - 1} \cdot \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z'), z\} = \{\frac{\tau_n(\gamma_n)}{\gamma_n - 1} \cdot \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z'), \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z)\},\end{aligned}$$

et par symétrie, on a aussi

$$(c_n(z'), c_n(z))_n = \{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z'), \frac{\tau_n(\gamma_n)}{\gamma_n - 1} \cdot \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z)\}.$$

Plus généralement, si η est un caractère continu de $\mathbf{Z}_p^*$, on a

$$\begin{aligned}(c_{\eta^{-1},n}(z'), c_{\eta,n}(z))_n &= \{\frac{\tau_n(\gamma_n)}{\eta^{-1}(\chi(\gamma_n))\gamma_n - 1} \cdot \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z'), \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z)\} \\ &= \{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z'), \frac{\tau_n(\gamma_n)}{\eta(\chi(\gamma_n))\gamma_n - 1} \cdot \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z)\}.\end{aligned}$$

Remarque VIII.1.5. — En injectant la formule ci-dessus pour $(c_n(z'), c_n(z))$ dans la formule du (ii) de la rem. VIII.1.3 pour $((\mathrm{Exp}^*)^{-1}(z'), (\mathrm{Exp}^*)^{-1}(z))_{\mathrm{Iw}}$, et en comparant le résultat avec la prop. I.5.3, on obtient :

$$((\mathrm{Exp}^*)^{-1}(z'), (\mathrm{Exp}^*)^{-1}(z))_{\mathrm{Iw}} = \langle (1 - \varphi) \cdot z', (1 - \varphi) \cdot z \rangle_{\mathrm{Iw}}.$$

VIII.2. La loi de réciprocité explicite de Kato. — On a (le premier isomorphisme vient des techniques de Tate et Sen (de descente presque étale et de décomplétion), le second suit de l'existence de la connexion de $D_{\mathrm{dif},n}(V)$ induite par ∇ (cf. [**41**]) : $D_{\mathrm{dif},n}(V)/D^+_{\mathrm{dif},n}(V)$ se décompose comme une somme directe d'espaces caractéristiques pour cette connexion et $D_{\mathrm{pdR},n}(V)/D^+_{\mathrm{pdR},n}(V)$ est l'espace caractéristique pour la valeur propre 0) :

$$H^0(\mathscr{G}_{F_n}, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes V) = (D_{\mathrm{dif},n}(V)/D^+_{\mathrm{dif},n}(V))^{\Gamma_n} = (D_{\mathrm{pdR},n}(V)/D^+_{\mathrm{pdR},n}(V))^{\Gamma_n}.$$

On en déduit, via la suite exacte fondamentale $0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \to 0$, une application *exponentielle de Bloch-Kato*

$$\exp : (D_{\mathrm{pdR},n}(V)/D^+_{\mathrm{pdR},n}(V))^{\Gamma_n} \to H^1(\mathscr{G}_{F_n}, V),$$

dont on note $H^1_{\mathrm{e}}(\mathscr{G}_{F_n}, V)$ l'image.

Les techniques de Tate et Sen montrent aussi que, pour tout $n \geq m_0(D)$, on a

$$H^1(\mathscr{G}_{F_n}, \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes \check{V}) = H^1(\Gamma_n, \widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}(\check{V})) = \widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}(\check{V})/(\gamma_n - 1) = D^+_{\mathrm{dif},n}(\check{V})/(\gamma_n - 1) = D^+_{\mathrm{pdR},n}(\check{V})/(\gamma_n - 1),$$

l'application de $H^1(\Gamma_n, \widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}(\check{V}))$ dans $\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}(\check{V})/(\gamma_n - 1)$ étant celle qui envoie le cocycle $\gamma \mapsto c_\gamma$ sur $\tau_n(\gamma_n)^{-1} c_{\gamma_n}$. En composant cet isomorphisme avec l'application naturelle de $H^1(\mathscr{G}_{F_n}, \check{V})$ dans $H^1(\mathscr{G}_{F_n}, \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes \check{V})$, ceci nous fournit une application *exponentielle duale de Bloch-Kato*

$$\exp^* : H^1(\mathscr{G}_{F_n}, \check{V}) \to D^+_{\mathrm{pdR},n}(\check{V})/(\gamma_n - 1),$$

dont on note $H^1_{\mathrm{p-e}}(\mathscr{G}_{F_n}, \check{V})$ le noyau.

Lemme VIII.2.1. — *Si $z' \in \check{D}^{\psi=1}$, alors* $\exp^*(c_n(z'))$ *est l'image modulo* $\gamma_n - 1$ *de* $\iota_m(z')$, *pour tout* $m \geq \sup(n, m_0(\check{D}))$.

Démonstration. — Si $b \in \mathbf{A} \otimes \check{V}$ est une solution de $(\varphi - 1)b = \frac{\tau_n}{\gamma_n - 1} \cdot ((\varphi - 1) \cdot z')$, alors $c_n(z')$ est représenté par le cocycle $g \mapsto c_n(z')_g = \tau_n(\gamma_n) \frac{g-1}{\gamma_n - 1} \cdot z' - (g-1) \cdot b$. Il est donc aussi représenté par le cocycle $g \mapsto \iota_m(c_n(z')_g)$, pour tout m pour lequel ceci a un sens. Or $\iota_m(z')$ a un sens si $m \geq m_0(\check{D})$, et $\iota_m(b)$ a un sens pour tout $m \geq \sup(n, m_0(\check{D}))$, d'après [**21**]. Maintenant, $g \mapsto (g-1)\iota_m(b)$ est un cobord dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes \check{V}$, et comme $\iota_m(z')$ est fixe par $\mathscr{H}$, on voit que l'image de $c_n(z')$ dans $H^1(\mathscr{G}_{F_n}, \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes \check{V})$ est obtenue par inflation à partir du cocycle $\gamma \mapsto \tau_n(\gamma_n) \frac{\gamma - 1}{\gamma_n - 1} \cdot \iota_m(z')$ sur Γ_n. On en déduit le résultat.

Si V est de de Rham, on a

$$(D_{\mathrm{pdR},n}(V)/D^+_{\mathrm{pdR},n}(V))^{\Gamma_n} = L_n \otimes (D_{\mathrm{dR}}(V)/D^+_{\mathrm{dR}}(V))$$
$$D^+_{\mathrm{pdR},n}(\check{V})/(\gamma_n - 1) = L_n \otimes D^+_{\mathrm{dR}}(\check{V}),$$

et le théorème ci-dessous (dans lequel on suppose, pour simplifier l'énoncé, que $H^0(\mathscr{H}', V) = 0$ et $H^0(\mathscr{H}', \check{V}) = 0$) se spécialise en le théorème 1.4.1 de Kato [**49**].

Théorème VIII.2.2. — *Les applications* exp *et* $\exp^*$ *sont duales l'une de l'autre. Autrement dit, si* $x \in H^1(\mathscr{G}_{F_n}, \check{V})$ *et* $y \in (D_{\mathrm{pdR},n}(V)/D^+_{\mathrm{pdR},n}(V))^{\Gamma_n}$, *alors* $(x, \exp(y))_n = \langle \exp^*(x), y \rangle_{\mathrm{dif}}$.

Démonstration. — L'hypothèse simplificatrice entraine que les applications naturelles $H^1_{\mathrm{Iw}}(V) \to H^1(\mathscr{G}_{F_n}, V)$ et $H^1_{\mathrm{Iw}}(\check{V}) \to H^1(\mathscr{G}_{F_n}, \check{V})$ sont surjectives et que $D^{\mathrm{nr}} = 0$ et $\check{D}^{\mathrm{nr}} = 0$. Il existe donc, en particulier, $z' \in \check{D}^{\psi=1}$ tel que $c_n(z') = x$.

Par ailleurs, il existe $z \in D^{\psi=1}$, avec $c_n(z) = \exp(y)$ et, d'après la prop. VI.4.13 et la rem. VI.4.14, il existe $d \in \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)[\frac{1}{t}]^{\psi=1}$ vérifiant $\frac{\gamma_n - 1}{\tau_n(\gamma_n)} \cdot d = z$; de plus, $\iota_m^-(d) = y$, pour tout $m \geq n$.

Maintenant, la formule décrivant l'accouplement $(\ ,\ )_n$ en termes de (φ,Γ)-modules nous donne

$$(x,\exp(y))_n = \{z', \frac{\tau_n(\gamma_n)}{\gamma_n - 1}\cdot((1-\varphi)\cdot z)\} = \{z', (1-\varphi)\cdot d\}.$$

On peut alors utiliser le (ii) de la prop. VI.3.4 pour en déduire que

$$(x,\exp(y))_n = \langle \iota_m(z'), \iota_m(d)\rangle_{\mathrm{dif}},$$

si $m \gg 0$. Or $\iota_m(z') \in D^+_{\mathrm{dif},m}(\check{V})$, et donc $\langle \iota_m(z'), \iota_m(d)\rangle_{\mathrm{dif}} = \langle \iota_m(z'), \iota_m^-(d)\rangle_{\mathrm{dif}}$. De plus, comme $\iota_m^-(d) = y$ est fixe par Γ_n, on en déduit, en utilisant le lemme VIII.2.1, que l'on a $\langle \iota_m(z'), y\rangle_{\mathrm{dif}} = \langle \exp^*(x), y\rangle_{\mathrm{dif}}$, ce qui permet de conclure.

Index

Anneaux de séries
$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{E}$, $k_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{E}^+$, $k^+_{\mathscr{E}}$, 282, 300
$\mathscr{O}^\natural_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{E}^\natural$, $k^\natural_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{R}^\natural$, 283, 300
$\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$, $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$, $\widetilde{\mathscr{O}}^{++}_{\mathscr{E}}$, 304
$\mathscr{O}^{\dagger,n}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{O}^{(0,r_n]}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{O}^{[r_a,r_n]}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$, 300
$\mathscr{E}^\dagger$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}^+$, 283, 300
$L_n[[t]]$, $L_n((t))$, $\widetilde{L[[t]]}$, $\widetilde{L((t))}$, 409
$L_\infty((t))^-$, 410
L'extension cyclotomique
F_n, F_∞, L_n, L_∞, $\widetilde{L}$, 409
Γ, Γ_n, γ_n, τ_n, 318, 428
Λ, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$, $\mathscr{O}^{\dagger,n}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$, $\mathscr{O}^{[r_a,r_b]}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$, $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(\Gamma)$, $\mathscr{E}^\dagger(\Gamma)$, $\mathscr{R}(\Gamma)$, $\mathscr{R}^+(\Gamma)$, 292, 318, 394
$\lambda_{k,n}$, $\mu_{k,n}$, ∇, ∇_k, 425, 429, 451
$\mathrm{Tr}_{F_{n+i}/F_n}$, 409, 431
Catégories
$\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, 284, 307
$\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}G$, $\mathrm{Rep}_L G$, 284, 320, 348
$\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$, 285, 305
Foncteurs
$V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$, $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$, 282, 283, 289
$V \mapsto \mathbf{D}(V)$, $D \mapsto \mathbf{V}(D)$, 285, 308
$V \mapsto \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, $V \mapsto \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$, 455, 456
$D \mapsto \mathbf{\Pi}(D)$, $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$, 289, 332, 337, 368
$J(\Pi)$, $\widetilde{J}(\Pi)$, $J^\vee(\Pi)$, $\widetilde{J}^\vee(\Pi)$, $J_0(\Pi^{\mathrm{alg}})$, 377, 417, 453, 466, 470, 471
$\mathrm{LL}(D_{\mathrm{pst}})$, $\mathrm{LL}(M)$, $\mathrm{LL}(M,\mathrm{Fil})$, 293, 465, 466
Objets galoisiens
$\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$, Γ, Γ^{nr}, 281
$W_{\mathbf{Q}_p}$, $W^{\mathrm{ab}}_{\mathbf{Q}_p}$, 282
$\widehat{\mathscr{T}}$, 282
χ, ω, 281, 282, 361
V, $\check{V}$, 308
H^1_{lw}, H^1_{e}, $H^1_{\mathrm{p-e}}$, 294, 296
exp, $\exp^*$, 502, 503
$V(r,\delta)$, $V(\delta_1,\delta_2)$, $V(\delta,\delta,\tau)$, $V(\delta\omega,\delta,\tau^\perp)$, 478, 479
Anneaux de Fontaine
$\widetilde{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$, 310
$\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$, $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\mathbf{Q}_p}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}$, $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}_{\mathbf{Q}_p}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{++}_{\mathbf{Q}_p}$, 304
$\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}^+$, $\mathbf{A}^+$, $\mathbf{E}^{++}$, $\mathbf{A}^{++}$, 308, 310
$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathbf{E}^+_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathbf{E}^{++}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathbf{A}^{++}_{\mathbf{Q}_p}$, 304
$\mathbf{A}^{\dagger,n}$, $\mathbf{A}^{(0,p^{-n}]}$, $\mathbf{A}^\dagger$, $\mathbf{B}^\dagger$, 391
$\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,n}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-n}]}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{[p^{-a},p^{-n}]}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{]0,p^{-n}]}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$, $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$, 391
$\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, 391
$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{max}}$, $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{log},K}$, $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{cris},K}$, 391, 460
ω, t, 391, 409
(φ,Γ)-modules, généralités
D, $\check{D}$, 306
D^+, D^{++}, $D^\natural$, $D^\sharp$, D^{nr}, 288, 308
$\widetilde{D}$, $\widetilde{D}^+$, $\widetilde{D}^{++}$, 310, 314
$D^{\dagger,n}$, $D^{(0,r_n]}$, $D^{[r_a,r_n]}$, $D^{]0,r_n]}$, $D^\dagger$, D_{rig}, 285, 389, 390
$\widetilde{D}^{\dagger,n}$, $\widetilde{D}^{(0,r_n]}$, $\widetilde{D}^{[r_a,r_n]}$, $\widetilde{D}^{]0,r_n]}$, $\widetilde{D}^\dagger$, $\widetilde{D}_{\mathrm{rig}}$, $\widetilde{D}^+_{\mathrm{rig}}$, 393
$M^{\dagger,m}_n$, $M^{[r_a,r_b]}_n$, $M^{]0,r_b]}_n$, $M_{\mathrm{rig},n}$, 396

$\widetilde{D}_{\mathrm{dif}}$, $\widetilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$, $D_{\mathrm{dif},n}$, $D^+_{\mathrm{dif},n}$, 421
$\widetilde{D}_{\mathrm{Sen}}$, $\widetilde{D}^{++}_{\mathrm{Sen}}$, $D_{\mathrm{Sen},n}$, 392, 421
D_{pdR}, D^+_{pdR}, D_{dR}, $D_{\mathrm{pdR},n}$, 423
D_{pst}, D_{crab}, 293, 455, 456
$D\otimes\delta$, $x\otimes\delta$, 317
$m_i(D)$, $m(D)$, 390, 395, 400, 421

(φ,Γ)-modules et représentations de G
$\widetilde{D}^{U-\mathrm{alg}}$, $\widetilde{D}^{P-\mathrm{alg}}$, 439
$D\boxtimes U$, $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$, $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, 287, 312, 398
$D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$, $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$, 312
$(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_c$, $(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$, $(D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$, $(D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$, 313
$D\boxtimes\mathbf{P}^1$, $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, $D\boxtimes_{\delta,\iota}\mathbf{P}^1$, 282, 287, 291, 322, 325, 336
$D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, $(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$, 291, 330, 380
$D^{(0,r_n]}\boxtimes\mathbf{P}^1$, $D^\dagger\boxtimes\mathbf{P}^1$, $D_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$, 292, 401
$D^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$, $N^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$, $t^kN^\natural_{\mathrm{rig}}\boxtimes\mathbf{P}^1$, 407, 453

(φ,Γ)-modules de rang 2
$\widetilde{N}_{\mathrm{dif}}$, $N_{\mathrm{dif},n}$, 429
$\widetilde{N}^+_{\mathrm{rig}}$, $\widetilde{N}^{++}_{\mathrm{rig}}$, $N^{]0,r_a]}$, N_{rig}, 432, 434, 456
$\mathscr{C}$, $\check{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}'$, 292, 319, 398
$\mathscr{C}_{\mathrm{rig}}$, $\check{\mathscr{C}}_{\mathrm{rig}}$, $\mathscr{C}'_{\mathrm{rig}}$, 295, 397, 446
$\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{\mathrm{p-e}}$, $\mathscr{C}'_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}'_{\mathrm{p-e}}$, 296, 447
$X^+\boxtimes\mathbf{Q}_p$, $X^-\boxtimes\mathbf{Q}_p$, $X^+\boxtimes p^n\mathbf{Z}_p$, $X^-\boxtimes p^n\mathbf{Z}_p$, $X^+\boxtimes p^n\mathbf{Z}_p^*$, $X^-\boxtimes p^n\mathbf{Z}_p^*$, 431
X^+_n, X^-_n, X^+_∞, X^-_∞, $\widetilde{X}^+$, $\widetilde{X}^-$, 431
α_D, δ_D, 291, 336
$M_{\mathrm{e}}^{]0,r_a]}$, $M_{\mathrm{p-e}}^{]0,r_a]}$, 433

Objets attachés à G
G, B, K, Z, U, U^-, A,A^+, A^-, Δ, 345
P, $P(\mathbf{Z}_p)$, $P(\mathbf{Q}_p)$, P^+, 285, 286, 310, 367
$\mathscr{T}$, $\mathscr{T}_U$, 347
$\mathscr{D}(K)$, $\mathscr{D}(K_m)$, 402

Représentations de G, généralités
Π, $\Pi^\vee$, Π^*, $\check{\Pi}$, 288, 290, 296, 355, 386
Π^{an}, Π^{alg}, 292, 293, 403
$\Pi^{U-\mathrm{alg}}$, $\Pi^{P-\mathrm{alg}}$, $\Pi_c^{P-\mathrm{alg}}$, 439, 441
$\mathscr{W}(\Pi)$, $\mathscr{W}^{(0)}(\Pi)$, $I(W)$, $R(W,\Pi)$, $R^{(0)}(W,\Pi)$, 288, 349, 350, 352
$D^+_W(\Pi)$, $D^\natural_W(\Pi)$, $\mathbf{D}(\Pi)$, 356, 367, 368
$[g,v]$, $[g,W]$, $[s,W]$, 349
$W^{[n]}$, 350
$I_{\mathscr{A}}(W,\Pi)$, $I_U(W)$, $I_U(W,\Pi)$, $I_U^\Pi(W)$, $I_U^\Pi(W)^\vee_0$, 352, 356, 367, 368
$M\boxtimes\mathbf{Q}_p$, $M\boxtimes U$, $M\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, 311
$(M\boxtimes\mathbf{Q}_p)_c$, $(M\boxtimes\mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$, 311, 312
$\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p$, $\Pi\boxtimes\mathbf{Q}_p^*$, 467, 471
δ_Π, 419

Représentations de G, exemples
$W_{r,\chi}$, 359
$\delta_1\otimes\delta_2$, 360
$B(\delta_1,\delta_2)$, St, $W(\delta_1,\delta_2)$, 289, 359, 361–363
$\Pi(r,\lambda,\chi)$, $\Pi(\delta_1,\delta_2)$, $\Pi(\delta,\delta,\tau)$, $\Pi(\delta_1,\delta_2,\tau)$, 359, 486, 487, 493
E_τ, 468
Sym^{k-1}, 414
$W_{\ell,k}$, 414

Espaces fonctionnels
$\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$, $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p,M)$, $\mathscr{C}^0(\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L)_0$, 283, 302, 305
$\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$, $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p,M)$, $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L)_{\mathrm{pc}}$, 283, 302, 305
$\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$, 283, 302
$\mathrm{LP}^{[0,k-1]}(\mathbf{Z}_p)$, 283, 303
$\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,k_L)$, $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,k_L)$, $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1,k_L)$, $\mathrm{LC}_c(\delta_1\otimes\delta_2)$, 360, 363
$\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p,L_\infty)$, $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)$, $\mathrm{LC}_{\mathrm{pc}}(\mathbf{Q}_p^*,L_\infty)$, $\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p,L)$, $\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p,L_\infty((t))^-dt)$, $\mathrm{LP}_c^-(\mathbf{Q}_p^*,X_\infty^-)$, 410, 415, 416, 441
Dir_0, Dir_∞, 387

Fourier-Kirillov
$x\mapsto[(1+T)^x]$, $x\mapsto\varepsilon(x)$, 305, 409
$\mathscr{F}$, $\overline{\mathscr{F}}$, 410
$z\mapsto\mathscr{K}_z$, 419, 440

Accouplements
$\{\ ,\ \}$, $\{\ ,\ \}_{\mathbf{Q}_p}$, $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$, 307, 314, 327, 402
$\langle\ ,\ \rangle$, $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{Z}_p^*}$, $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dif}}$, 295, 306, 319, 424
$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$, $[\ ,\ ]_{\mathrm{Iw}}$, 295, 319, 446
$[\ ,\ ]$, $[\ ,\ ]_{\mathbf{Q}_p}$, $[\ ,\ ]_{\mathbf{P}^1}$, $[\ ,\ ]_{\mathrm{dif}}$, 437, 442

Applications diverses
Res_U, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$, 287, 311, 312, 322, 325, 328, 409
$\alpha_{\mathbf{Z}_p,W}$, $\mathrm{R}_{\mathbf{Z}_p,W}$, $\mathrm{R}_{U,W}$, 288, 356, 368, 369
$\beta_{\mathbf{Z}_p}$, β_U, $\beta_{\mathbf{Q}_p}$, $\beta_{\mathbf{P}^1}$, 288, 290, 369, 377–379, 383, 384
w, w_δ, w_D, 286, 287, 322, 336, 401
φ, ψ, ψ_W, 286, 288, 301, 306, 357
$\mathrm{rés}_0$, $\mathrm{rés}_L$, $\mathrm{rés}_\infty$, 302, 305, 315, 333, 411
f_*, m_α, 316
T_p, 359
ι_n, ι_n^+, ι_n^-, 421, 425, 435, 439, 441

ι^+, ι^-, 434
admissible, 284, 348, 415
anneau de Robba, 283, 301
arbre, 347
atome
  automorphe, 483
  galoisien, 478
caractère
  central, 348
  cyclotomique, 281
coeur, 292
contragrédiente, 290, 386
convolution multiplicative, 317
de Rham, 423
  presque, 422, 423
difféomorphisme local, 315
dual de Tate, 291, 308
équilibré, 471
étale, 305
exponentielle
  de Bloch-Kato, 295, 502
  duale, 295, 503
extrémité, 347
Hodge-Tate, 423
  poids, 422
  presque, 422
irréductible, 306
lisse, 284, 348
localement
  algébrique, 293, 413, 414
  analytique, 292, 403
mirabolique, 286, 310
modèle de Kirillov, 416
module de Jacquet, 377, 417, 453, 467
(φ, Γ)-module, 305
nul à l'infini, 305, 311
ouvert élémentaire, 346
présentation standard, 288, 350
représentation
  de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, 308
  de G, 320
$\mathscr{O}_L$-représentation
  de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, 308
  de G, 320
série principale, 289, 360
saturé, 330
sommet, 347
  extrémal, 347
squelette d'action, 287, 325
steinberg, 289, 363
supersingulières, 360
support, 312, 350
  compact, 312
surconvergent, 283, 285
topologie
  faible, 300
  forte, 300
trace de Tate, 409
transformée de Fourier, 305, 410
unitaire, 320

Références

[1] Y. ANDRÉ – Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 285–317.

[2] L. BARTHEL & R. LIVNÉ – Irreducible modular representations of GL_2 of a local field, *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 261–292.

[3] ———, Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case, *J. Number Theory* **55** (1995), p. 1–27.

[4] L. BERGER – Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[5] ———, Équations différentielles p-adiques et (ϕ, N)-modules filtrés, *Astérisque* **319** (2008), p. 13–38.

[6] ———, On some modular representations of the Borel subgroup of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, prépublication, 2008.

[7] ———, Représentations modulaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2, ce volume.

[8] L. BERGER & C. BREUIL – Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce volume.

[9] L. BERGER & P. COLMEZ – Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, *Astérisque* **319** (2008), p. 303–337.

[10] L. BERGER, H. LI & H. J. ZHU – Construction of some families of 2-dimensional crystalline representations, *Math. Ann.* **329** (2004), p. 365–377.

[11] S. BLOCH & K. KATO – L-functions and Tamagawa numbers of motives, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser, 1990, p. 333–400.

[12] G. BÖCKLE – Deformation rings for some mod 3 Galois representations of the absolute Galois group of $\mathbf{Q}_3$, ce volume.

[13] C. BREUIL – Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I, *Compositio Math.* **138** (2003), p. 165–188.

[14] ———, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 23–58.

[15] ———, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 559–610.

[16] C. BREUIL & A. MÉZARD – Représentations semi-stables de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, demi-plan p-adique et réduction modulo p, *Astérisque* **331** (2010), p. 117–178.

[17] C. BREUIL & V. PASKUNAS – Towards a modulo p Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2$, prépublication, 2007.

[18] C. BREUIL & P. SCHNEIDER – First steps towards p-adic Langlands functoriality, *J. reine angew. Math.* **610** (2007), p. 149–180.

[19] F. CHERBONNIER – Représentations p-adiques surconvergentes, thèse de doctorat, université d'Orsay, 1996.

[20] F. CHERBONNIER & P. COLMEZ – Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[21] ———, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 241–268.

[22] P. COLMEZ – Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, *Ann. of Math.* **148** (1998), p. 485–571.

[23] ———, Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), p. 331–439.

[24] ———, Les conjectures de monodromie p-adiques, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897, *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101.

[25] ———, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, prépublication `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/sst.pdf`, 2004.

[26] ———, Série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2, prépublication `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/triangulines.pdf`, 2005.

[27] ———, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, *Astérisque* **319** (2008), p. 117–186.

[28] ———, Représentations triangulines de dimension 2, *Astérisque* **319** (2008), p. 213–258.

[29] ———, Fonctions d'une variable p-adique, ce volume.

[30] ———, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce volume.

[31] ———, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules (version provisoire et partielle), prépublication 2007, `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/unicite.pdf`.

[32] ———, (φ,Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce volume.

[33] P. COLMEZ & J.-M. FONTAINE – Construction des représentations p-adiques semi-stables, *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[34] J. DEE – Φ-Γ modules for families of Galois representations, *J. Algebra* **235** (2001), p. 636–664.

[35] M. EMERTON – p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups, *Duke Math. J.* **130** (2005), p. 353–392.

[36] ———, A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, *Pure Appl. Math. Q.* **2** (2006), p. 279–393.

[37] ———, Locally analytic representation theory of p-adic reductive groups : a summary of some recent developments, in *L-functions and Galois representations*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 320, Cambridge Univ. Press, 2007, p. 407–437.

[38] ———, On a class of coherent rings, with applications to the smooth representation theory of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ in characteristic p, prépublication, 2008.

[39] ———, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathbf{GL}_{2,\mathbf{Q}}$, en préparation.

[40] J.-M. FONTAINE – Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[41] ———, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, *Astérisque* **295** (2004), p. 1–115.

[42] J.-M. FONTAINE & J.-P. WINTENBERGER – Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C. R. Acad. Sci. Paris* **288** (1979), p. 367–370.

[43] F. Q. GOUVÊA & B. MAZUR – On the density of modular representations, in *Computational perspectives on number theory (Chicago, IL, 1995)*, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., 1998, p. 127–142.

[44] M. HARRIS & R. TAYLOR – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies, vol. 151, Princeton Univ. Press, 2001.

[45] G. HENNIART – Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique, *Invent. Math.* **139** (2000), p. 439–455.

[46] L. HERR – Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques, *Bull. Soc. Math. France* **126** (1998), p. 563–600.

[47] ———, Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate, *Math. Ann.* **320** (2001), p. 307–337.

[48] H. JACQUET & R. P. LANGLANDS – *Automorphic forms on* GL(2), Lecture Notes in Math., vol. 114, Springer, 1970.

[49] K. KATO – Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. I, in *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, Lecture Notes in Math., vol. 1553, Springer, 1993, p. 50–163.

[50] K. S. KEDLAYA – A p-adic local monodromy theorem, *Ann. of Math.* **160** (2004), p. 93–184.

[51] C. KHARE & J.-P. WINTENBERGER – Serre's modularity conjecture (I), *Invent. Math.* **178** (2009), p. 485–504.

[52] ———, Serre's modularity conjecture (II), *Invent. Math.* **178** (2009), p. 505–586.

[53] M. KISIN – Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 373–454.

[54] ———, The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2, *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), p. 641–690.

[55] ———, Deformations of $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ and $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ representations, ce volume.

[56] Z. MEBKHOUT – Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 319–351.

[57] R. OLLIVIER – Mod p representations of p-adic $\mathbf{GL}_2$ and coefficient systems on the tree, prépublication.

[58] V. PAŠKŪNAS – On the restriction of representations of $\mathrm{GL}_2(F)$ to a Borel subgroup, *Compos. Math.* **143** (2007), p. 1533–1544.

[59] ———, Extensions for supersingular representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **331** (2010), p. 317–353.

[60] ———, The image of Colmez's Montréal functor, en préparation.

[61] B. PERRIN-RIOU – Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, *Invent. Math.* **115** (1994), p. 81–161.

[62] ———, Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques, *Astérisque* **229** (1995).

[63] P. SCHNEIDER & U. STUHLER – Resolutions for smooth representations of the general linear group over a local field, *J. reine angew. Math.* **436** (1993), p. 19–32.

[64] P. SCHNEIDER & J. TEITELBAUM – $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations, *Represent. Theory* **5** (2001), p. 111–128.

[65] ———, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 443–468.

[66] ———, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 145–196.

[67] P. SCHNEIDER & O. VENJAKOB – Localisations and completions of skew power series rings, à paraître dans *Amer. J. Math.*

[68] P. SCHNEIDER & M.-F. VIGNÉRAS – A functor from smooth o-torsion representations to (φ,Γ)-modules, prépublication, 2008.

[69] S. SEN – Continuous cohomology and p-adic Galois representations, *Invent. Math.* **62** (1980/81), p. 89–116.

[70] M.-F. VIGNÉRAS – Cohomology of sheaves on the building and R-representations, *Invent. Math.* **127** (1997), p. 349–373.

[71] ———, A criterion for integral structures and coefficient systems on the tree of $\mathrm{PGL}(2,F)$, *Pure Appl. Math. Q.* **4** (2008), p. 1291–1316.

[72] J.-P. WINTENBERGER – Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **16** (1983), p. 59–89.

P. COLMEZ, C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • École polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France
E-mail : colmez@math.jussieu.fr