Astérisque

PHILIPPE GILLE

Le Problème de Kneser-Tits

Astérisque, tome 326 (2009), Séminaire Bourbaki, exp. n° 983, p. 39-81
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__39_0>

© Société mathématique de France, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 2007
60e année, 2007–2008, n° 983, p. 39 à 81

LE PROBLÈME DE KNESER-TITS

par **Philippe GILLE**

1. INTRODUCTION

Soient k un corps et k_s une clôture séparable. Soit $\mathbf{G}/k$ un k-groupe réductif (connexe). On note $\mathbf{G}(k)$ le groupe abstrait des k-points de $\mathbf{G}$. On note $\mathbf{G}(k)^+$ le sous-groupe (distingué) de $\mathbf{G}(k)$ engendré par les $\mathbf{U}(k)$ pour $\mathbf{U}$ parcourant l'ensemble des k-sous-groupes de $\mathbf{G}$ isomorphes au groupe additif $\mathbf{G}_a$. Le quotient

$$W(k, \mathbf{G}) := \mathbf{G}(k)/\,\mathbf{G}(k)^+$$

est le groupe de Whitehead du groupe $\mathbf{G}/k$. Tits a montré que, si $\mathbf{G}/k$ est presque k-simple (i.e. ne possède aucun sous-k-groupe distingué connexe) et isotrope, et si $\mathrm{card}(k) \geq 4$, alors tout sous-groupe distingué propre de $\mathbf{G}(k)^+$ est central [**96**], englobant ainsi de nombreux résultats classiques de simplicité [**36**], [**23**], [**17**].

La conjecture originelle de Kneser-Tits (1964) énonce que $W(k, \mathbf{G}) = 1$ pour de tels groupes $\mathbf{G}$ simplement connexes et partant que $\mathbf{G}(k)$ est projectivement simple, c'est-à-dire que le quotient $\mathbf{G}(k)/Z(\mathbf{G}(k))$ de $\mathbf{G}(k)$ par son centre est simple. L'exposé 505 (1977) de J. Tits rend compte de nombreux cas où effectivement $W(k, \mathbf{G}) = 1$ mais aussi des contre-exemples de Platonov pour certains groupes de type ${}^1A_{n^2-1}$ [**71**]. Le problème de Kneser-Tits devient alors de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur un groupe $\mathbf{G}/k$ pour que $W(k, \mathbf{G}) = 1$. Ce problème conduit en particulier aux deux questions suivantes selon que l'on privilégie les groupes ou les corps de base.

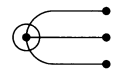
QUESTION 1.1. — *Peut-on caractériser les groupes $\mathbf{G}/k$ tels que $W(F, \mathbf{G}) = 1$ pour tout corps F/k ? (On dit alors que le groupe $\mathbf{G}/k$ est W-trivial.)*

QUESTION 1.2. — *Peut-on déterminer des classes de corps k tels que $W(k, \mathbf{G}) = 1$ pour tout k-groupe semi-simple presque simple simplement connexe et isotrope $\mathbf{G}/k$?*

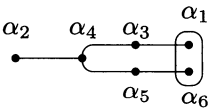
En particulier, est-ce le cas pour un corps global F ?

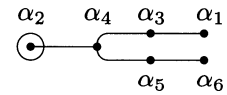
La première question est plus algébrique et la seconde plus arithmétique, du moins pour les corps globaux. Pour la première question, le cas de $\mathbf{SL}_n(D)$, cas des contre-exemples de Platonov, est celui qui est le mieux compris grâce à Suslin, Rost et Merkurjev. Cet exemple (et celui des autres groupes classiques) fait le lien entre la rationalité du corps des fonctions de $\mathbf{G}$ et le problème de Kneser-Tits. Ce lien est en fait de nature générale, ce qui permet de réunir dans un cadre commun la plupart des résultats connus de « W-trivialité ».

La seconde question pour les corps de nombres se décompose cas par cas. Depuis l'exposé de Tits [**98**, §1.2] et jusqu'à très récemment, il restait à traiter trois types de groupes exceptionnels. Il s'agit des groupes trialitaires de rang relatif un, i.e. d'indice de Tits



et les groupes extérieurs de type E_6 d'indice de Tits

$^2E^{29}_{6,1}$ 

ou $^2E^{35}_{6,1}$ 

.

Pour un corps de nombres F, la trivialité de $W(F, \mathbf{G})$ est due à G. Prasad et M.S. Raghunathan pour les groupes trialitaires [**78**] ; pour le type $^2E^{29}_{6,1}$, il s'agit d'un résultat récent de W-trivialité de S. Garibaldi [**26**]. Le dernier cas $^2E^{35}_{6,1}$ est établi dans la section 8 comme un avatar d'un théorème de Chernousov-Timoshenko sur la R-équivalence pour ces groupes [**16**], ce qui permet d'énoncer le

THÉORÈME 1.3. — *Soient F un corps global et $\mathbf{G}/F$ un groupe semi-simple simplement connexe presque simple et isotrope. Alors $W(F, \mathbf{G}) = 1$ et $\mathbf{G}(F)$ est un groupe projectivement simple.*

Remerciements. — En premier lieu, je tiens à remercier vivement Vladimir Chernousov et Jean-Louis Colliot-Thélène, leur expertise a été précieuse. Les commentaires d'Yves Benoist, Skip Garibaldi, Bruno Kahn, Arturo Pianzola et Gopal Prasad ont permis des améliorations substantielles d'une version préliminaire de cet exposé, c'est avec grand plaisir que je les remercie. J'ai bénéficié également des suggestions bienvenues de Boris Kunyavskiĭ et de Fabien Morel.

Je remercie Adrian Wadsworth d'avoir relevé que la version plus forte de la proposition 5.1 (figurant dans la version distribuée de cet exposé) était canulée.

2. LE CAS DE $\mathbf{SL}_N(A)$

Soit A une algèbre simple centrale de dimension finie sur son centre k. On sait que $A = M_r(D)$ pour une (unique) algèbre simple centrale à division D et on note $\mathrm{ind}_k(A) = \sqrt{\dim_k(D)}$ l'indice de A. Le groupe $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(A) = \mathbf{SL}_r(D)$ des automorphismes spéciaux de D^r est un k-groupe semi-simple simplement connexe de type ${}^1A_{rd-1}$.
Si $r \geq 2$, $\mathbf{G}$ est isotrope et on sait que $\mathbf{G}(k)^+ = [A^\times, A^\times]$. En particulier, le groupe $W(k, \mathbf{G})$ est abélien et on sait d'après Whitehead que

$$W(k, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} SK_1(A) = \mathbf{SL}_1(A)(k)/[A^\times, A^\times] \xleftarrow{\sim} SK_1(D)$$

est indépendant de $r \geq 2$. Pour ce type de groupes, le problème de Kneser-Tits est donc l'étude du groupe $SK_1(A)$ ou $SK_1(D)$. Si l'on décompose $\mathrm{ind}_k(D) = p_1^{e_1} ... p^{e_m}$ en facteurs premiers, on rappelle la décomposition (unique) de Brauer $D \xrightarrow{\sim} D_1 \otimes \cdots \otimes D_m$ où les D_i sont des algèbres à division de degrés respectifs $p_i^{e_i}$ (e.g. [**33**, §4.5]). L'identité

$$SK_1(D) \xrightarrow{\sim} SK_1(D_1) \oplus \cdots \oplus SK_1(D_m)$$

réduit alors l'étude au cas d'une algèbre d'indice p-primaire pour un premier p.

2.1. Le théorème de Wang et la rétracte k-rationalité de $\mathbf{SL}_1(A)$

THÉORÈME 2.1 (Wang, 1950 [**105**], voir [**33**, §3]). — *On suppose* $\mathrm{ind}_k(D)$ *sans facteurs carrés. Alors* $SK_1(D) = 0$ *et le groupe* $\mathbf{SL}_r(D)$ *est* W*-trivial pour* $r \geq 2$.

Nous allons mettre en regard ce résultat et la rétracte k-rationalité de $\mathbf{SL}_1(A)$.

DÉFINITION 2.2. — *Soit* $\mathbf{X}/k$ *une* k*-variété (i.e. un* k*-schéma séparé de type fini) réduite et irréductible (intègre).*

1. $\mathbf{X}$ *est* k*-rationnelle si* $\mathbf{X}$ *est* k*-birationnelle à un espace affine.*
2. $\mathbf{X}$ *est stablement* k*-rationnelle s'il existe un entier* $n \geq 0$ *tel que* $\mathbf{X} \underset{k}{\times} \mathbf{A}_k^n$ *est* k*-birationnelle à l'espace affine.*
3. $\mathbf{X}$ *est facteur direct d'une variété* k*-rationnelle s'il existe une variété* $\mathbf{Y}/k$ *telle que* $\mathbf{X} \underset{k}{\times} \mathbf{Y}$ *est* k*-birationnelle à l'espace affine.*
4. $\mathbf{X}$ *est rétracte* k*-rationnelle s'il existe un ouvert non vide* $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{X}$ *tel que l'identité de* $\mathbf{U}$ *factorise à travers un ouvert* $\mathbf{V}$ *d'un espace affine* $\mathbf{A}_k^m$*, i.e. il existe des morphismes* $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *et* $r : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ *tels que* $r \circ f = id_{\mathbf{U}}$.

On a 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4). La rétracte k-rationalité est la variante birationnelle d'un rétracte d'un espace affine.

LEMME 2.3. — (1) *Soient A, B des algèbres simples centrales d'indices premiers entre eux. Alors $\mathbf{SL}_1(A \otimes_k B)$ est stablement k-birationnel à $\mathbf{SL}_1(A) \times \mathbf{SL}_1(B)$.*

(2) *Soient D une k-algèbre simple centrale à division et $D \cong D_1 \otimes \cdots D_m$ sa décomposition de Brauer. Alors pour tout entier $r \geq 1$, $\mathbf{SL}_r(D)$ est stablement k-birationnel à $\mathbf{SL}_1(D_1) \times \cdots \times \mathbf{SL}_1(D_m)$.*

Démonstration. — 1) On montre tout d'abord que

$$\mathrm{Nrd}(A \otimes_k B)^\times = \mathrm{Nrd}(A^\times) \cap \mathrm{Nrd}(B^\times).$$

On peut alors sans perte de généralité supposer momentanément A et B à division. Le groupe $\mathrm{Nrd}(A \otimes_k B)^\times$ est le sous-groupe de $k^\times$ engendré par les $N_{L/k}(L^\times)$ pour L/k parcourant les extensions finies de k trivialisant $A \otimes_k B$, c'est-à-dire trivialisant A et B. Ceci produit l'inclusion $\mathrm{Nrd}(A \otimes_k B)^\times \subset \mathrm{Nrd}(A^\times) \cap \mathrm{Nrd}(B^\times)$. Dans l'autre sens, on se donne $x \in k^\times$ tel que $x = \mathrm{Nrd}_A(a) = \mathrm{Nrd}_B(b)$. On considère alors une décomposition de Bezout $1 = m\deg(A) + n\deg(B)$ et on constate que $\mathrm{Nrd}(a^n \otimes b^m) = \mathrm{Nrd}_A(a^n)^{\deg(B)}\,\mathrm{Nrd}_B(b^m)^{\deg(A)} = x^{n\deg(B)+m\deg(A)} = x$, montrant l'inclusion ci-dessus. On a donc $\mathrm{Nrd}(A_F \otimes_F B_F)^\times = \mathrm{Nrd}(A_F^\times) \cap \mathrm{Nrd}(B_F^\times)$ pour toute extension de corps F/k. On note $\mathbf{H} \subset \mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{GL}_1(B)$ le sous-groupe défini par $\mathrm{Nrd}_A(a) = \mathrm{Nrd}_B(b) \neq 0$. Par construction, le groupe $\mathbf{H}$ est donc muni d'un caractère $\chi : \mathbf{H} \to \mathbf{G}_m$ tel que $\chi(\mathbf{H}(F)) = \mathrm{Nrd}(A_F \otimes_F B_F)^\times$ pour tout corps F/k. Selon une remarque de Chernousov-Merkurjev [**55**, prop. 4.5], ceci entraîne que les groupes $\mathbf{GL}_1(A \otimes B) \times \ker(\chi) = \mathbf{GL}_1(A \otimes B) \times \mathbf{SL}_1(A) \times \mathbf{SL}_1(B)$ et $\mathbf{SL}_1(A \otimes B) \times \mathbf{H}$ sont k-birationnels. De plus, on a une suite exacte scindée de k-groupes $1 \to \mathbf{H} \to \mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{GL}_1(B) \to \mathbf{G}_m \to 1$, donc $\mathbf{H} \times \mathbf{G}_m$ est k-isomorphe (comme k-variétés) à $\mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{GL}_1(B)$. On conclut que $\mathbf{SL}_1(A \otimes_k B)$ est stablement k-birationnel à $\mathbf{SL}_1(A) \times \mathbf{SL}_1(B)$.

2) On procède par récurrence sur m à partir de (1). □

PROPOSITION 2.4 (Colliot-Thélène et Sansuc). — *On suppose* $\mathrm{ind}_k(D)$ *sans facteurs carrés. Alors pour tout entier $r \geq 1$, la variété $\mathbf{SL}_r(D)$ est rétracte k-rationnelle.*

Démonstration. — Le lemme précédent permet de supposer que $r = 1$ et $\mathrm{ind}_k(D) = p$ pour p premier. On note $\mathcal{T}$ la variété des tores maximaux du k-groupe $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(D)$. On dispose d'une application rationnelle dominante $\mathbf{G} \to \mathcal{T}$ qui associe à tout élément semi-simple régulier de $\mathbf{G}$ son centralisateur [**103**, §4]. Ainsi $k(\mathbf{G}) = k(\mathcal{T})(\mathbf{T}_{\mathrm{gen}})$ où $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}}/k(\mathcal{T})$ désigne le tore générique de $\mathbf{G}$. Selon Chevalley (*ibid.*), $\mathcal{T}$ est une variété k-rationnelle. Ensuite, le tore $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}}$ est un tore normique, c'est-à-dire qu'il existe une extension de corps séparable $F/k(\mathcal{T})$ de degré p telle que $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}} = \ker\Big(R_{F/k(\mathcal{T})}(\mathbf{G}_m) \xrightarrow{N_{F/k(\mathcal{T})}} \mathbf{G}_{m,k(\mathcal{T})}\Big)$. Suivant [**21**, cor. 9.12], on sait que $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}}$ est facteur direct d'une $k(\mathcal{T})$-variété rationnelle $V/k(\mathcal{T})$. Ainsi il existe un

morphisme rationnel $G \to \mathbf{A}^N \times_k \mathcal{T}$ qui admet une rétraction. On conclut que $\mathbf{G}$ est rétracte k-rationnelle. □

Aucun des deux résultats précédents ne s'étend au cas où l'indice a des facteurs carrés. En effet, Platonov a construit des algèbres D/k d'indice n^2 telles que $SK_1(D) \neq 0$ et telles que $\mathbf{SL}_r(D)$ ne soit pas rétracte k-rationnel pour aucun $r \geq 1$ [**71**]. De façon plus précise, ces algèbres sont construites de la façon suivante. On pose $F = k((t_1))((t_2))$. Etant données deux extensions de corps cycliques k_i/k de degré n et de groupe de Galois $\langle \sigma_i \rangle$, on considère le produit tensoriel de F-algèbres cycliques

$$A := A_1 \otimes_F A_2 = (k_1/k, \sigma_1, X) \otimes (k_2/k, \sigma_2, Y),$$

où $A_i = F \otimes_k k_i \oplus F \otimes_k k_i\, y_i \cdots \oplus F \otimes_k k_i\, y_i^{n-1}$ avec les relations $y_i^n = t_i$ et $\lambda\, y = y\, \sigma_i(\lambda)$ pour tout $\lambda \in F \otimes_k k_i$. On pose

$$N_1 = \left\{ x \in (k_1 \otimes k_2)^\times \mid N_{k_1 \otimes k_2/k}(x) = 1 \right\} \text{ et } M := I_\Gamma . (k_1 \otimes k_2)^\times \subset N_1,$$

où $\Gamma = \mathcal{G}al(k_1.k_2/k)$. On a alors un invariant surjectif $SK_1(A) \to N_1/M$, qui est non trivial pour un bon choix des k_i/k. Cette classe de contre-exemples est reprise ou discutée notamment dans les références [**24**], [**25**], [**91**], [**103**, §18.3] et [**104**].

2.2. La conjecture de Suslin

CONJECTURE 2.5 (Suslin, 1991). — *Soit A une algèbre simple centrale. Soit $\xi \in \mathbf{G}(k(\mathbf{G}))$ le point générique de $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(A)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathrm{ind}_k(A)$ *est sans facteurs carrés ;*
2. $SK_1(A \otimes_k F) = 0$ *pour tout corps F/k ;*
3. $[\xi] = 1$ *dans $SK_1(A_{k(\mathbf{G})})$;*
4. $\mathbf{G}$ *est une variété stablement k-rationnelle.*

Si $A = M_r(D)$ et $r \geq 2$, la seconde condition peut être formulée aussi de la façon suivante :

(2′) *Le groupe $\mathbf{SL}_r(D)$ est W-trivial.*

La proposition 2.4 montre seulement la rétracte k-rationalité de $\mathbf{G}$ lorsque $\mathrm{ind}_k(A)$ est sans facteurs carrés. Telles quelles, du moins si $d \geq 5$, les implications (1) $\Longrightarrow$ (4) et (2) $\Longrightarrow$ (4) sont des problèmes ouverts. Le sens (4) $\Longrightarrow$ (2) est une conséquence de la propriété d'invariance

$$SK_1(A) \xrightarrow{\sim} SK_1(A_{k(t)})$$

par extension trancendante pure [**71**]. En effet, si $\mathbf{G}$ est une variété stablement k-rationnelle, alors $SK_1(A) = SK_1(A_{k(\mathbf{G})}) = W(k(\mathbf{G}), \mathbf{G})$ et un argument de spécialisation montre que $[\xi] = 0 \in SK_1(A_{k(\mathbf{G})})$ [**74**]. La conjecture porte donc principalement sur le sens (2) $\Longrightarrow$ (1). En d'autres mots, si $\mathrm{ind}_k(A)$ contient un facteur carré, existe-t-il un corps F/k tel que $SK_1(A \otimes_k F) \neq 0$?

Nous suivons maintenant une approche chronologique mettant en évidence l'apparition des techniques motiviques à partir du milieu des années 1990.

2.3. Invariant de Suslin, 1991

On suppose ici que $d := \mathrm{ind}_k(A)$ est inversible dans k et on note $[A] \in H^2(k, \mu_d) \subset \mathrm{Br}(k)$ la classe de A dans le groupe de Brauer de k. On considère les groupes de cohomologie galoisienne $H^i(k, \mu_d^{\otimes j})$ [**86**] et on note $\beta : H^3(k, \mu_d^{\otimes 3}) \to H^4(k, \mu_d^{\otimes 3})$ le bord associé à la suite exacte de faisceaux galoisiens $1 \to \mu_d^{\otimes 3} \to \mu_{d^2}^{\otimes 3} \to \mu_d^{\otimes 3} \to 1$.

On suppose que k contient une racine primitive d^3-ième de l'unité. Suslin définit un invariant (fonctoriel en k)

$$\rho_0 : SK_1(A) \to H^4(k, \mu_d^{\otimes 3}) \,/\, [A] \cup H^2(k, \mu_d^{\otimes 2}) + \mathrm{Im}(\beta),$$

qui explique les contre-exemples de Platonov lorsque d est impair. De façon plus précise, pour un corps $K = \mathbf{Q}_p((X))((Y))$, on a $H^4(K, \mu_d^{\otimes 3}) = \mathbf{Z}/d\,\mathbf{Z}$ et l'invariant est alors non nul pour les algèbres de Platonov.

En outre, cet invariant devrait être non trivial pour le corps $k(\mathbf{G})$ lorsque d est divisible par un carré.

Remarque 2.6. — L'annulation du bord β est une conséquence de la conjecture de Bloch-Kato (en degré 3 et pour les facteurs premiers de d). Celle-ci a été démontrée par Voevodsky pour $p = 2$ (i.e. la conjecture de Milnor [**100**]) et annoncée par Rost et Voevodsky [**101**], [**93**], [**82**], [**106**]. L'invariant ρ_0 doit donc avoir valeur dans le groupe $H^4(k, \mu_d^{\otimes 3}) \,/\, [A] \cup H^2(k, \mu_d^{\otimes 2})$.

2.4. Algèbres de biquaternions et de degré 4

On suppose ici que $\mathrm{car}(k) \neq 2$ et que A est une algèbre de biquaternions (cf. [**48**] [**33**]), c'est-à-dire que le produit tensoriel d'algèbres de quaternions $Q_1 \otimes_k Q_2$ où $Q_i = (a_i, b_i)$ est la k-algèbre de présentation

$$X^2 = a_i, \;\; Y^2 = b_i, \;\; YX + XY = 0$$

avec $a_i, b_i \in k^\times$. On associe à une telle présentation sa forme quadratique d'Albert

$$\varphi = a_1\, x_1^2 + a_2\, x^2 - a_1\, a_2\, x_3^2 - b_1\, x_2^2 - b_2 y^2 + b_1 b_2\, y_3^2$$

dont la classe de similitude est un invariant de A. De façon plus précise, il existe un isomorphisme « exceptionnel » $\mathbf{SO}(\varphi) \cong \mathbf{SL}_1(A)/\mu_2$ et, pour toute extension F/k, on a la propriété suivante :

$$\text{la forme } \varphi_F \text{ est isotrope} \iff A \otimes_k F \text{ n'est pas à division.}$$

THÉORÈME 2.7 (Rost, 1992, [**53**, §2]). — *On note X la quadrique projective associée à φ. Alors il existe une suite exacte*

$$0 \to SK_1(A) \to H^4(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^4(k(X), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Les H^i sont des groupes de cohomologie galoisienne à coefficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ [**86**]. Une construction « élémentaire » (i.e. sans K-théorie) de cet invariant se trouve dans [**48**, §17]. Ce résultat est un des ingrédients principaux de la démonstration du cas particulier suivant de la conjecture de Suslin.

THÉORÈME 2.8 (Merkurjev, 1993, [**52**] [**57**]). — *Soit A une algèbre simple centrale d'indice multiple de 4. Alors il existe un corps F/k tel que $SK_1(A \otimes_k F) \neq 0$. En particulier, pour tout $n \geq 2$, $\mathbf{SL}_n(A)$ n'est pas W-trivial et n'est pas une variété stablement k-rationnelle.*

Remarque 2.9. — Si A est un corps gauche de degré 4 sur $\mathbf{Q}$ (ou sur $\mathbf{Q}_p$), on sait que $SK_1(A) = 0$ [**105**] et le résultat ci-dessus montre que $SK_1\big(A \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\mathbf{SL}_1(A))\big) \neq 0$.

Appliquant sa théorie des invariants de groupes algébriques à valeurs dans les modules de cycles [**56**], Merkurjev a étendu la construction de Rost aux algèbres de degré 4 et a donné une nouvelle démonstration, plus naturelle, du théorème 2.8.

THÉORÈME 2.10 ([**56**, th. 6.6]). — *Soit A une algèbre simple centrale de degré 4. Soit $Y = SB(A, 2)$ la variété des idéaux à droite de A de dimension 2. Alors il existe un isomorphisme*

$$SK_1(A) \xrightarrow{\sim} \ker\Big(H^4(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^4(k(Y), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\Big) / \, [A^{\otimes 2}] \cup H^2(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

2.5. Invariant de Suslin, 2006

On suppose toujours que $d = \mathrm{ind}(A)$ est inversible dans k. Soit X la variété de Severi-Brauer de A, c'est-à-dire la variété des idéaux à droite de dimension $\deg(A) = \sqrt{\dim_k(A)}$. Nous allons définir suivant Suslin [**92**] un nouvel invariant

$$(*) \qquad \rho : SK_1(A) \to \ker\Big(H^4(k, \mu_d^{\otimes 3}) \to H^4(k(X), \mu_d^{\otimes 3})\Big) \, / \, [A] \cup H^2(k, \mu_d^{\otimes 2})$$

au moyen de la théorie motivique étale de Voevodsky [**51**] ; ceci nécessite la conjecture de Bloch-Kato en degré 3. La comparaison des invariants ρ_0 et ρ est une tâche ardue non encore réalisée ; on s'attend cependant à la formule $\rho_0 = \pm 2\rho$. En d'autres mots, le nouvel invariant est (deux fois !) plus fin que celui de 1991, la cohomologie motivique

ayant permis ce raffinement. En caractéristique nulle, cet invariant a été construit indépendamment par B. Kahn [**44**].

À toute k-variété lisse Y, on associe des groupes de cohomologie motivique étale $H^i_{\text{ét}}(Y, \mathbf{Z}(j))$ ($i \geq 0$, $j \in \mathbf{Z}$). Pour le point $\operatorname{Spec}(k)$, vu que $H^i_{\text{ét}}(k, \mathbf{Q}(j)) = 0$ pour $i > j$, on a des isomorphismes de bord

$$H^i(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)) = H^i_{\text{ét}}(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)) \cong H^{i+1}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}(j)) \qquad (i > j)$$

qui relient ces groupes à la cohomologie galoisienne. On considère le groupe

$$SH^5_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3)) := \ker\Big(H^5_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3)) \to H^5_{\text{ét}}(X \times_k k(X), \mathbf{Z}(3))\Big).$$

Par ailleurs, on utilise la cohomologie Zariski du faisceau $\mathcal{K}_3$ associé à la K-théorie de Quillen. De façon analogue, on pose

$$SH^2_{\text{Zar}}(X, \mathcal{K}_3) := \ker\Big(H^2_{\text{Zar}}(X, \mathcal{K}_3) \to H^2_{\text{Zar}}(X \times_k k(X), \mathcal{K}_3)\Big).$$

THÉORÈME 2.11 ([**92**, th. 1]). — *On suppose d inversible dans k,* $\deg(A) \geq 3$ *et que la conjecture de Bloch-Kato vaut en degré* 3 *pour les extensions de k. On a des isomorphismes*

$$SH^2_{\text{Zar}}(X, \mathcal{K}_3) \xrightarrow{\sim} SH^5_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3)) \xrightarrow{\sim} \ker\Big(H^4(k, \mu_d^{\otimes 3}) \to H^4(k(X), \mu_d^{\otimes 3})\Big)/[A] \cup H^2(k, \mu_d^{\otimes 2}).$$

Démonstration. — On se limite au cas de caractéristique nulle. Notons $V(X)$ le groupe de droite, il est isomorphe à

$$\ker\Big(H^4(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) \to H^4(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3))\Big) / [A] \cup H^2(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Vu que X est une variété géométriquement cellulaire, la cohomologie motivique étale de X en poids 3 peut se calculer via la suite spectrale de B. Kahn [**43**]

$$E_2^{p,q} = H^{p-q}_{\text{ét}}\big(k, CH^q(X \times_k k_s) \otimes \mathbf{Z}(3-q)\big) \Longrightarrow E_\infty^{p+q}$$

avec des flèches $E_\infty^{p+q} \to H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3))$ qui sont bijectives pour $p + q \leq 6$. Vu que $CH^q(X \times_k k_s) = \mathbf{Z}$ pour $q = 0, ..., \deg(A) - 1$, et vaut 0 sinon, l'étude de cette suite

spectrale conduit au diagramme exact suivant (*ibid.*, §5.4 et §7)

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & H^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_3) \arrow[r, "\sim"] & H^4_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(3)) \arrow[d] & \\
 & & K_2(k) \arrow[d, "\cup[A]"'] & \\
 & & H^4(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^2_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_3^M) \arrow[r] & H^5_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(3)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{H}(4)). \\
 & & k^\times &
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme demande quelques explications. La flèche $H^4(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) \to H^5_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(3))$ est le composé $H^4(k,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) \cong H^5_{\text{ét}}(k,\mathbf{Z}(3)) \to H^5_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(3))$ qui est défini via l'isomorphisme rappelé précédemment. Les groupes $H^*_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_3^M)$ désignent la cohomologie du module de cycles K_*^M, i.e. la K-théorie de Milnor [**81**]. D'ailleurs, on a un isomorphisme $H^2_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_3^M) \xrightarrow{\sim} H^2_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_3)$ qui se lit sur la définition compte tenu du théorème de comparaison de Matsumoto, i.e. $K_2^M(F) \xrightarrow{\sim} K_2(F)$ pour tout corps F/k. Enfin, $\mathcal{H}(4)$ désigne le faisceau Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^4_{\text{ét}}(U,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3))$. On dispose d'un diagramme analogue pour $X_{k(X)}$; la compatibilité

$$\begin{tikzcd}
H^5_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(3)) \arrow[r] \arrow[d] & H^5_{\text{ét}}(X_{k(X)},\mathbf{Z}(3)) \arrow[d] \\
k^\times \arrow[r, hook] & k(X)^\times
\end{tikzcd}$$

produit par chasse au diagramme un isomorphisme $SH^2_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_3^M) \xrightarrow{\sim} V(X)$. Vu que $X \times_k X$ est k-birationnelle à $\mathbf{P}^{d-1} \times_k X$, la flèche $H^4(k(X),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) \to H^4(k(X\times X),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3))$ est injective. Le diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^2_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_3^M) \arrow[r] \arrow[d] & H^5_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(3)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{H}(4)) \arrow[r, hook] \arrow[d] & H^4(k(X),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^2_{\mathrm{Zar}}(X_{k(X)},\mathcal{K}_3^M) \arrow[r] & H^5_{\text{ét}}(X_{k(X)},\mathbf{Z}(3)) \arrow[r] & H^0_{\mathrm{Zar}}(X_{k(X)},\mathcal{H}(4)) \arrow[r, hook] & H^4(k(X\times X),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3))
\end{tikzcd}$$

permet de conclure que $SH^2_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_3) \xrightarrow{\sim} SH^5_{\text{ét}}(X,\mathbf{Z}(3))$. □

On se souvient alors de la décomposition de Quillen (voir [**94**, §12])

$$K_1(X) = \bigoplus_{j=0}^{\deg(A)-1} K_1(A^{\otimes j}).$$

de la K-théorie de X. La suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen

$$E_2^{p,q}(X) = H^{p+q}_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_{-q}) \Longrightarrow K_{-p-q}(X)$$

définit une filtration décroissante sur $K_1(X)$ avec $F^0(X) = K_1(X)$, $F^{p/p+1}(X) = E_\infty^{p,-1-p}$. La restriction du morphisme $K_1(X) \to E_\infty^{0,-1} = E_2^{0,-1} = H^0(X,\mathcal{K}_1) = k^\times$ sur le facteur $K_1(A) = A^\times/[A^\times,A^\times]$ n'est pas autre chose que la norme réduite $\mathrm{Nrd} : K_1(A) \to k^\times$. Ainsi, on a une inclusion $SK_1(A) \subset F^2(X)$, d'où par composition une flèche

$$SK_1(A) \hookrightarrow F^2(X) \twoheadrightarrow F^{2/3}(X) = E_\infty^{2,-3} \hookrightarrow E_2^{2,-3} = H^2_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_3).$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} SK_1(A) & \longrightarrow & H^2_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 = SK_1(A_{k(X)}) & \longrightarrow & H^2_{\mathrm{Zar}}(X_{k(X)},\mathcal{K}_3) \end{array}$$

montre que l'on a en fait une flèche $SK_1(A) \to SH^2_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_3)$. On peut alors combiner avec le théorème 2.11 pour définir l'invariant de Suslin $(*)$

$$\rho : SK_1(A) \to \ker\Big(H^4(k,\mu_d^{\otimes 3}) \to H^4(k(X),\mu_d^{\otimes 3})\Big) \,/\, [A] \cup H^2(k,\mu_d^{\otimes 2}).$$

Dans le cas d'une algèbre de degré 4, Suslin montre que ρ est un isomorphisme et établit un théorème de comparaison avec les invariants de Rost et Merkurjev [**92**, §3.4].

QUESTION 2.12. — *Si $d = p^2$, p premier impair, l'invariant ρ est-il injectif ?*

Remarque 2.13. — Ce type de techniques permet de définir un invariant analogue pour le groupe $SK_2(A)$ [**11**] [**44**]. Le cas d'une algèbre de biquaternions donne lieu à une généralisation du théorème de Rost (Calmès, *loc. cit.*). De plus, Kahn et Levine sont allés plus loin dans le rapprochement de la décomposition de Quillen et de la cohomologie motivique de la variété de Severi-Brauer $X = SB(A)$ [**45**]. De façon plus précise, la filtration « de la tranche » de la K-théorie de A est explicitée en termes de complexes de faisceaux associés à A. Ceci donne une autre méthode pour définir des invariants de $SK_1(A)$ et $SK_2(A)$ (*loc. cit.*, §4.9).

2.6. Questions de finitude

De façon générale se pose la question de la finitude de $W(k, \mathbf{G})$ lorsque k est un corps de type fini sur son sous-corps premier. Le seul cas connu significatif est le théorème suivant de Colliot-Thélène dont les ingrédients sont le théorème 2.7 et la théorie du corps de classes supérieur.

THÉORÈME 2.14 ([**18**]). — *Soient F un corps et A/F une algèbre de biquaternions. Dans chacun des cas suivants :*

(i) *F est un corps de fonctions d'au plus deux variables sur un corps de nombres,*

(ii) *F est un corps de fonctions d'au plus trois variables sur un corps fini,*

le groupe $SK_1(A)$ est fini.

3. DÉVISSAGE DU GROUPE $W(K, \mathbf{G})$

Nous revenons à des généralités en fixant un k-groupe algébrique réductif (connexe) $\mathbf{G}$.

3.1. Réduction au cas simplement connexe absolument presque simple

On adopte ici une présentation légèrement différente de Borel-Tits [**7**, 6.5]. On sait que le groupe G admet une z-extension, c'est-à-dire une présentation

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mu \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{G}^{\mathrm{sc}} \arrow[r] \arrow[d] & D\,\mathbf{G} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbf{E} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathbf{G}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{G} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbf{E}\,/\,\mu \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{corad}(\widetilde{\mathbf{G}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{corad}(\mathbf{G}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

où $\mathbf{G}^{\mathrm{sc}} = D\widetilde{\mathbf{G}}$ est semi-simple simplement connexe, $\mathbf{E}$ est un k-tore quasi-trivial (i.e. produit de restrictions des scalaires à la Weil $R_{L/k}\mathbf{G}_m$), $\mathrm{corad}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}\,/D\,\mathbf{G}$ désignant le k-tore coradical de $\mathbf{G}$. Il y a des correspondances bijectives entre les k-sous-groupes additifs à un paramètre de $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^{\mathrm{sc}}$ et $\widetilde{\mathbf{G}}$. Le théorème 90 de Hilbert

implique que la flèche $\widetilde{\mathbf{G}}(k) \to \mathbf{G}(k)$ est surjective. Pour un k-tore $\mathbf{T}$, on a par définition $\mathbf{T}(k)^+ = 1$; on montre alors aisément que le diagramme précédent donne lieu au diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & & \\
 & & W(k,\mathbf{G}^{\mathrm{sc}}) \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \mathbf{E}(k) \arrow[r] & W(k,\widetilde{\mathbf{G}}) \arrow[r] \arrow[d] & W(k,\mathbf{G}) \arrow[r] & 1, \\
 & & \mathrm{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})(k) & &
\end{tikzcd}$$

permettant de calculer dans une certaine mesure le groupe $W(k,\mathbf{G})$ à partir de $W(k,\mathbf{G}^{\mathrm{sc}})$. De façon plus précise, le groupe $W(k,\widetilde{\mathbf{G}})$ est extension de $\mathrm{Im}\big(\widetilde{\mathbf{G}}(k) \to \mathrm{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})(k)\big)$ par $W(k,\mathbf{G}^{\mathrm{sc}})$.

Rappelons qu'un tel k-groupe $\mathbf{G}^{\mathrm{sc}}$ se décompose en un produit fini $\mathbf{G}^{\mathrm{sc}} = \prod_i R_{k_i/k}(\mathbf{G}_i)$ de restrictions à la Weil où les k_i/k sont des extensions finies séparables de corps et les $\mathbf{G}_i/k_i$ sont des k_i-groupes semi-simples simplement connexes absolument presque simples [**97**]. Vu que

$$W(k,\mathbf{G}^{\mathrm{sc}}) \xrightarrow{\sim} \prod_i W(k_i,\mathbf{G}_i), \tag{1}$$

le problème de Kneser-Tits pour $\mathbf{G}^{\mathrm{sc}}$ se ramène au problème de Kneser-Tits pour les $\mathbf{G}_i/k_i$. Sans perte de généralité, il est donc loisible de considérer uniquement des k-groupes simplement connexes absolument presque simples, i.e. des k-groupes $\mathbf{H}$ tels que $\mathbf{H} \times_k k_s$ soit un groupe de Chevalley presque simple $\mathbf{SL}_{n+1}, \mathbf{Spin}_{2n+1}, \mathbf{Sp}_{2n}$, etc.

3.2. Conséquence pour les groupes W-triviaux

PROPOSITION 3.1. — *On suppose que $\mathbf{G}$ est W-trivial, c'est-à-dire que $W(F,\mathbf{G}) = 1$ pour tout corps F/k. Alors $\mathbf{G}$ est semi-simple simplement connexe et tous ses facteurs presque simples sont isotropes et W-triviaux.*

Démonstration. — (1) $\mathbf{G}$ *est semi-simple :* on peut supposer que k est algébriquement clos. Alors la flèche $\mathbf{G}(k) \to \mathrm{corad}(\mathbf{G})(k)$ est surjective et induit un morphisme surjectif $1 = W(k,\mathbf{G}) \to \mathrm{corad}(\mathbf{G})(k)$. Le tore $\mathrm{corad}(\mathbf{G})$ est trivial, donc le groupe $\mathbf{G}$ est semi-simple.

(2) $\mathbf{G}$ *est semi-simple simplement connexe :* on peut encore supposer que k est algébriquement clos. Le groupe $\mathbf{G}$ est alors déployé, il est W-trivial (e.g. [**89**, lemma 64]).

En outre le tore $\mathrm{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})$ est déployé. Le diagramme ci-dessus produit les isomorphismes

$$\mathbf{E}(F) \xrightarrow{\sim} W(F, \widetilde{\mathbf{G}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})(F)$$

pour tout corps F/k. Si $\mathrm{car}(k) = 0$, cela entraîne immédiatement (pour $F = k$) que $\mathbf{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})$. Pour le cas général, en prenant $F = k((t))$, on obtient un isomorphisme des groupes de cocaractères $\widehat{E}^0 \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})}^0$, d'où $\mathbf{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})$.

(3) *Les facteurs presque simples de* $\mathbf{G}$ *sont isotropes et* W*-triviaux* : on peut supposer $\mathbf{G}$ presque k-simple. Si $\mathbf{G}$ est anisotrope, on sait que $\mathbf{G}$ n'a pas de sous-groupes à un paramètre. Ceci implique en particulier que le corps k est infini [**5**, §16]. Par définition, on a donc $W(k, \mathbf{G}) = \mathbf{G}(k)$, et ce groupe est non trivial [**5**, 18.3], ce qui contredit l'hypothèse de W-trivialité pour $\mathbf{G}$. La W-trivialité des facteurs simples de $\mathbf{G}$ se voit avec la formule (1). □

3.3. Réduction aux groupes de rang relatif 1

Cette réduction, due à Prasad-Raghunathan [**79**] (voir aussi [**75**, §7.2]), complète la technique de Tits d'élimination des sommets négligeables du diagramme de Dynkin [**98**, §4.3]. Ici encore, $\mathbf{G}$ désigne un groupe semi-simple simplement connexe, isotrope, et absolument presque simple. On note $\Gamma_k = \mathcal{G}al(k_s/k)$ le groupe de Galois absolu de k. Soient $\mathbf{S}$ un k-tore maximal déployé de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{T}$ un k-tore maximal contenant $\mathbf{S}$. Soit Δ une base du système de racines absolu $\Phi := \Phi(\mathbf{G}_{k_s}, \mathbf{T}_{k_s}) \subset \widehat{\mathbf{T}}(k_s)$ et $\Delta_k \subset \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$ un ordre compatible [**5**, §20]. On note $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ le sous-groupe parabolique minimal standard associé à $\mathbf{S}$ et Δ_k ; le groupe $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}$. On pose

$$\Delta_0 = \left\{ \alpha \in \Delta \mid \alpha_{|S} = 1 \right\}.$$

La $*$-action de Γ_k sur Δ [**6**] stabilise Δ_0 et $\Delta \setminus \Delta_0$ consiste en r orbites galoisiennes, où $r = \mathrm{rg}(\mathbf{S})$ est le rang relatif de $\mathbf{G}$.

Pour toute partie Γ_k-stable Θ de $\Delta \setminus \Delta_0$, on note $\mathbf{P}_\Theta$ le sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}$ associé à $\Delta_0 \cup \Theta$ et $\mathbf{L}_\Theta$ son sous-groupe de Levi standard. On pose alors $\mathcal{G}_\Theta := D\,\mathbf{L}_\Theta$, c'est un groupe semi-simple simplement connexe dont l'indice de Tits est le sous-diagramme de Dynkin de Δ de sommets $\Delta_0 \cup \Theta$.

Si Θ est une Γ_k-orbite de $\Delta \setminus \Delta_0$, le groupe $\mathcal{G}_\Theta$ se décompose de façon unique

$$\mathcal{G}_\Theta = \mathbf{G}_\Theta \times \mathbf{A}_\Theta,$$

où $\mathbf{G}_\Theta$ est un k-groupe de rang relatif 1 absolument presque simple et $\mathbf{A}_\Theta$ est un k-groupe anisotrope. Ceci se montre en remarquant que l'indice de Tits de $\mathbf{G}_\Theta$ est la composante connexe de Θ dans le sous-diagramme de Δ dont les sommets sont $\Delta_0 \cup \Theta$.

THÉORÈME 3.2 ([**79**]). — *Les $\mathbf{G}_\Theta(k)$, pour Θ parcourant les Γ_k-orbites de $\Delta \setminus \Delta_0$, engendrent $W(k, \mathbf{G})$.*

Cette réduction est bien commode lorsque l'on s'intéresse à la question 1.2, c'est-à-dire lorsque l'on fixe le corps de base.

COROLLAIRE 3.3. — *On suppose que $W(k, \mathbf{H}) = 1$ pour tout k-groupe semi-simple simplement connexe presque simple et de k-rang 1. Alors pour tout k-groupe $\mathbf{G}$ semi-simple simplement connexe isotrope et presque simple, on a $W(k, \mathbf{G}) = 1$.*

4. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES GROUPES DE WHITEHEAD

On suppose désormais, sauf mention expresse du contraire, que $\mathbf{G}/k$ est semi-simple simplement connexe absolument presque simple et isotrope.

4.1. Faits pêle-mêle

Nous allons tirer quelques observations utiles du théorème de simplicité de Tits.

FAIT 4.1. — *Pour tout corps F/k ayant au moins quatre éléments, on a*

$$[\mathbf{G}(F)^+, \mathbf{G}(F)^+] = \mathbf{G}(F)^+.$$

En particulier, $\mathbf{G}(F)^+ \subset [\mathbf{G}(F), \mathbf{G}(F)]$ et on a alors une surjection naturelle

$$W(F, \mathbf{G}) \twoheadrightarrow \mathbf{G}(F)_{ab} = \mathbf{G}(F)/[\mathbf{G}(F), \mathbf{G}(F)]$$

du groupe de Whitehead sur l'abélianisé de $\mathbf{G}(F)$.

QUESTION 4.2. — *A-t-on un isomorphisme $W(F, \mathbf{G}) \cong \mathbf{G}(F)_{ab}$? En d'autres termes, le groupe $W(F, \mathbf{G})$ est-il abélien ?*

La réponse est positive pour les groupes classiques, voir 7.7. Vu que l'on ne connaît pas de contre-exemples, il est tentant de penser que la réponse est positive. En étant encore plus optimiste, ce groupe $W(F, \mathbf{G})$ devrait être de torsion et même annulé par un petit entier, l'ordre du groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ par exemple (voir plus loin la remarque 7.6).

On rappelle que, si k est parfait, tout élément unipotent de $\mathbf{G}(k)$ est k-plongeable dans le radical unipotent d'un k-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$; le groupe $\mathbf{G}(k)^+$ coïncide alors avec le sous-groupe de $\mathbf{G}(k)$ engendré par les éléments unipotents de $\mathbf{G}(k)$. Pour un corps de caractéristique $p > 0$, ceci vaut plus généralement dans les cas suivants : p n'est pas un entier de torsion de $\mathbf{G}$ [**88**, §5] ou $[k : k^p] \leq p$ [**30**].

En pratique, on utilise la définition équivalente de $\mathbf{G}(k)^+$ en termes de k-sous-groupes paraboliques. Soient $\mathbf{P}$ un k-sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{P}^-$ un

k-sous-groupe parabolique opposé à $\mathbf{P}$. On note $R_u(\mathbf{P})$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$, c'est un k-groupe unipotent déployé.

FAIT 4.3 ([**7**, 6.10]). — *On suppose k infini.*

1. $\mathbf{G}(k)^+$ *est le sous-groupe de* $\mathbf{G}(k)$ *engendré par les conjugués de* $(R_u\,\mathbf{P})(k)$.
2. $\mathbf{G}(k)^+$ *est le sous-groupe de* $\mathbf{G}(k)$ *engendré par* $(R_u\,\mathbf{P})(k)$ *et* $(R_u\,\mathbf{P}^-)(k)$.

En effet, le sous-groupe de $\mathbf{G}(k)$ engendré par les conjugués de $(R_u\,\mathbf{P})(k)$ est un sous-groupe normal de $\mathbf{G}(k)$, donc aussi de $\mathbf{G}(k)^+$. Ce groupe n'est pas commutatif, donc est non central dans $\mathbf{G}(k)^+$. Le théorème de simplicité de Tits montre que les deux groupes coïncident. Pour la seconde assertion, le sous-groupe M de $\mathbf{G}(k)$ engendré par $(R_u\,\mathbf{P})(k)$ et $(R_u\,\mathbf{P}^-)(k)$ est normalisé par $(\mathbf{P}\cap\mathbf{P}^-)(k)$, donc aussi par $\mathbf{G}(k)$ puisque celui-ci est engendré par $(\mathbf{P}\cap\mathbf{P}^-)(k)\,.\,(R_u\,\mathbf{P})(k)$ et $(R_u\,\mathbf{P}^-)(k)$ (grosse cellule dans la décomposition de Bruhat). Le groupe M est un sous-groupe normal de $\mathbf{G}(k)^+$ qui contient $(R_u\,\mathbf{P})(k)$, la première assertion entraîne $M = \mathbf{G}(k)^+$.

Le groupe $\mathbf{G}(k)^+$ est assez « gros » au sens suivant.

FAIT 4.4. — *On suppose que k est un corps infini. Alors* $\mathbf{G}(k)^+$ *est Zariski-dense dans* $\mathbf{G}$. *En outre* $Z(\mathbf{G}(k)^+) \subset Z(\mathbf{G})(k)$.

Notons $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ le k-sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par $\mathbf{G}(k)^+$ [**5**, 2.1]. Alors $\mathbf{G}(k)$ normalise $\mathbf{H}$. Puisque $\mathbf{G}(k)$ est Zariski-dense dans $\mathbf{G}$ [**5**, 18.3], le k-groupe $\mathbf{H}$ est distingué dans $\mathbf{G}$. Par hypothèse, $\mathbf{G}$ est presque k-simple et $\mathbf{H}$ est non central, donc $\mathbf{H} = \mathbf{G}$. La remarque sur le centre est immédiate et amène à la question d'égalité des groupes $Z(\mathbf{G}(k)^+)$ et $\mathbf{Z}(\mathbf{G})(k)$ que l'on peut formuler de la façon suivante. A-t-on l'inclusion

$$\mathbf{Z}(\mathbf{G})(k) \subset \mathbf{G}(k)^+ \quad ?$$

L'article [**61**] de Monastyrniĭ étudie cette question pour les groupes classiques et la réponse est en général négative. En effet, il existe un groupe simplement connexe $\mathbf{G}$ de type ${}^1D_n$ dont le centre donne lieu à des éléments non triviaux de $W(k, \mathbf{G})$.

4.2. Flèche de relèvement

Soit O un anneau hensélien de valuation discrète, par exemple un anneau complet pour une valuation discrète. On note K son corps de fractions et κ son corps résiduel. Soit $\mathfrak{H}/O$ un schéma en groupes semi-simples simplement connexes [**1**]. Alors $\mathfrak{H} \underset{O}{\times} K$ et $\mathbf{H} := \mathfrak{H} \underset{O}{\times} \kappa$ sont des groupes simplement connexes et ont même indice de Witt-Tits, c'est-à-dire même diagramme de Dynkin relatif. On suppose que $\mathbf{H}$ est absolument presque simple et isotrope. La première décomposition ci-dessous rend compte du caractère « non-ramifié » du groupe de Whitehead.

LEMME 4.5. — 1) $\mathfrak{H}(K) = \mathfrak{H}(K)^+ . \mathfrak{H}(O)$;
2) $\ker\big(\mathfrak{H}(O) \to \mathbf{H}(\kappa)\big) \subset \mathfrak{H}(K)^+$.

L'inclusion ci-dessus est une variante de la proposition 6.14 de Borel-Tits [**7**] portant sur les corps localement compacts. On considère les objets suivants. Soit $\mathbf{P}$ un κ-sous-groupe parabolique minimal de $\mathbf{H}$. Puisque O est hensélien, $\mathbf{P}$ se relève en un O-sous-groupe parabolique $\mathfrak{P}$. Soit $\mathbf{S}/\kappa$ un κ-tore maximal déployé de $\mathbf{P}$, il se relève en un O-tore déployé maximal $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{P}$ [**1**, IX.7]. On sait alors que $\mathfrak{S}_K$ est un K-tore maximal déployé de $\mathfrak{H}_K$ [**10**, 4.6.4]. On note $Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})$ le centralisateur de $\mathfrak{S}$ [**1**, XI.5.3]. Alors $\mathbf{P} = R_u(\mathbf{P}) \rtimes Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$ et $\mathfrak{P} = R_u(\mathbf{P}) \rtimes Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})$ [**1**, XXVI.1].

Démonstration. — (1) On rappelle que $W(K, \mathfrak{H}_K)$ est engendré par $Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})(K)$ [**96**, §3]. Vu que $Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$ est un schéma en groupe réductif dont la fibre spéciale est anisotrope, la théorie de Bruhat-Tits montre que $(Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S})(O) = (Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S})(K)$ [**10**, 4.6.33]. Le O-tore $\mathfrak{S}$ est déployé, donc la flèche $Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})(O) \to (Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S})(O)$ est surjective. Ces deux faits combinés entraînent

$$Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})(K) = Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})(O) . \mathfrak{S}(K).$$

Par ailleurs, il est bien connu que $\mathfrak{S}(K) \subset \mathfrak{H}(K)^+$ [**7**, prop. 6.11]. Par suite, le groupe $W(K, \mathfrak{H})$ est engendré par $Z_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{S})(O)$ et partant par $\mathfrak{H}(O)$.

(2) En considérant le radical unipotent de $\mathfrak{P}$, on sait qu'il existe un sous-groupe unipotent $\mathfrak{U} : \mathbf{G}_{a,O} \to \mathfrak{P}$. On note $U : \mathbf{G}_{a,\kappa} \to \mathbf{H}$ sa fibre fermée. On note $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{H}$ et $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{h}$ celle de U. On considère le κ-sous-groupe $\mathbf{M}$ de $\mathbf{H}$ engendré par les $({}^hU)_{h \in \mathbf{H}(\kappa)}$. Vu que $\mathbf{H}(\kappa)$ est Zariski-dense dans $\mathbf{H}$ [**5**, 18.3], le groupe $\mathbf{M}$ est distingué dans $\mathbf{H}$, donc égal à $\mathbf{H}$. Par suite les ${}^h\mathfrak{u}$, pour h parcourant $\mathbf{H}(\kappa)$, engendrent le κ-espace vectoriel $\mathfrak{h}$. Ainsi, il existe $h_1, ..., h_d \in \mathbf{H}(\kappa)$ tels que

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1,\dots,d} {}^{h_i}\mathfrak{u} \qquad \text{où } d = \dim(\mathbf{H}).$$

Le lemme de Hensel (e.g. [**59**, I.4.2]) permet de relever les h_i en des $\widetilde{h}_i \in \mathfrak{H}(O)$. Par construction, la différentielle en $(0, ..., 0)$ du morphisme

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{G}_{a,O})^d & \xrightarrow{\ f\ } & \mathfrak{H} \\ (x_1, \cdots, x_d) & \longmapsto & \widetilde{h}_1\, \mathfrak{U}(x_1)\, \widetilde{h}_1^{-1} \cdots \widetilde{h}_n\, \mathfrak{U}(x_n)\, \widetilde{h}_n^{-1} \end{array}$$

est un isomorphisme. Ainsi f est étale en $(0, \cdots, 0)$ et le lemme de Hensel permet de conclure que

$$\ker\Big(\mathfrak{H}(O) \to \mathbf{H}(\kappa)\Big) \ \subset\ f\big(O^d\big) \ \subset\ \mathfrak{H}(K)^+. \qquad \square$$

Ce lemme montre que l'application composée $\mathfrak{H}(O) \to \mathfrak{H}(K) \to W(K, \mathfrak{H}_K)$ passe au quotient par le groupe $\ker\big(\mathfrak{H}(O) \to \mathbf{H}(\kappa)\big)$ induisant un morphisme surjectif

$$\rho : \mathbf{H}(\kappa) \twoheadrightarrow W(K, \mathfrak{H}_K).$$

Le lemme de Hensel montre que la spécialisation $R_u(\mathfrak{P})(O) \to R_u(\mathbf{P})(\kappa)$ est surjective. Ainsi les éléments de $\mathbf{H}(\kappa)^+$ se relèvent en des éléments de $\mathfrak{H}(K)^+$. La flèche ρ est donc nulle sur $\mathbf{H}(\kappa)^+$ et produit une flèche surjective

$$\overline{\rho} : W(\kappa, \mathbf{H}) \longrightarrow W(K, \mathfrak{H}_K),$$

appelée flèche de relèvement. Cette flèche est en fait un isomorphisme, voir plus loin le corollaire 7.3.

4.3. Lien avec le π_0 naïf

Soit $\mathbf{F}$ un foncteur en ensembles de la catégorie des k-algèbres. On note $\pi_0(k, \mathbf{F})$ le quotient de $\mathbf{F}(k)$ par la relation d'équivalence engendrée par la relation élémentaire suivante : deux éléments $f_0, f_1 \in \mathbf{F}(k)$ sont liés s'il existe $f \in \mathbf{F}(k[t])$ tels que $f(0) = f_0$ et $f(1) = f_1$.

En particulier, si $\mathbf{F}$ est un foncteur en groupes, on note $H\,\mathbf{F}(k)$ le sous-groupe distingué de $\mathbf{F}(k)$ directement liés à e. On a alors un isomorphisme de groupes

$$\mathbf{F}(k)/H\,\mathbf{F}(k) \xrightarrow{\sim} \pi_0(k, \mathbf{F}).$$

En effet, soient f et f' deux éléments de $\mathbf{F}(k)$ équivalents. Il existe une chaîne $f_0 = f, f_1, \cdots, f_n = f'$ où f_i est directement équivalent à f_{i+1} pour $i = 0, .., n-1$. Par récurrence, on peut supposer $n = 2$ et $f_0 = e$. Il existe h_0 et h_1 dans $\mathbf{F}(k[t])$ satisfaisant $h_0(0) = e$, $h_0(1) = f_1$, $h_1(0) = f_1$ et $h_1(1) = f_2$. Posons $\phi(t) = h_1(t)(h_0(1-t))^{-1} \in \mathbf{F}(k[t])$. Alors $\phi(0) = e = f_0$ et $\phi(1) = f_2$. Donc f_0 et f_2 sont directement équivalents.

En particulier, pour le k-groupe algébrique $\mathbf{G}$, cette construction donne lieu au quotient $\pi_0(k, \mathbf{G})$ de $\mathbf{G}(k)$. B. Margaux a montré le résultat de comparaison suivant.

PROPOSITION 4.6 ([**50**]). — $W(k, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(k, \mathbf{G})$.

Cet isomorphisme est une conséquence du résultat suivant de théorie géométrique des groupes.

FAIT 4.7 ([**50**]). — *Soit* $\mathbf{P}$ *un* k*-sous-groupe parabolique minimal de* $\mathbf{G}$. *Alors*

$$\mathbf{G}(k[t]) = \Big\langle\, \mathbf{G}(k),\ (R_u\,\mathbf{P})(k[t]) \,\Big\rangle.$$

En effet, on dispose d'une présentation du groupe $\mathbf{G}(k[t])$ en terme d'amalgame qui provient de l'action de $\mathbf{G}(k[t])$ sur l'immeuble de Bruhat-Tits [**10**] du groupe $\mathbf{G}_{k((\frac{1}{t}))}$. Pour $\mathbf{SL}_2$, cette présentation est un résultat de Nagao [**68**] (voir aussi [**85**, II.1.6]) ; pour $\mathbf{G}$ déployé, il s'agit d'un résultat de Soulé [**87**]. Expliquons brièvement pourquoi le fait (4.7) entraîne l'isomorphisme (4.6). Il s'agit d'établir que la surjection $\mathbf{G}(k)/\,\mathbf{G}(k)^+ \to \pi_0(k,\mathbf{G})$ est injective, c'est-à-dire que $\mathbf{G}(k)^+ = H\,\mathbf{G}(k)$. Étant donné un élément $g \in H\,\mathbf{G}(k)$, il existe $h \in \mathbf{G}(k[t])$ satisfaisant $h(0) = e$ et $h(1) = g$. Selon le fait ci-dessus, un tel h s'écrit alors $h = g_1\,u_1\,g_1^{-1} \cdots g_n\,u_n\,g_n^{-1}$ avec $g_1, ..., g_n \in \mathbf{G}(k)$ et $u_1, ..., u_n \in (R_u\,\mathbf{P})(k[t])$ satisfaisant $u_1(0) = \cdots = u_n(0) = e$. Par suite, $g = h(1) = g_1\,u_1(1)\,g_1^{-1} \cdots g_n\,u_n(1)\,g_n^{-1} \in \mathbf{G}(k)^+$.

Cette construction est faussement naïve (k est parfait ici) puisque

$$\pi_0(k,\mathbf{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(\mathrm{Spec}(k),\mathbf{G})$$

est le groupe des homomorphismes dans la catégorie homotopique des schémas $\mathcal{H}(k)$ de Morel-Voevodsky [**67**], [**66**, §3.1]. En outre, les groupes d'homotopie $\pi_i(k,\mathbf{G})$ ($i \geq 1$) de Morel-Voevodsky définissent des analogues supérieurs du groupe de Whitehead.

5. LIEN AVEC LES QUESTIONS DE RATIONALITÉ ET D'APPROXIMATION

Dans cette section, nous formalisons dans un cadre général ces liens établis pour les groupes classiques [**72**] [**62**] [**74**] [**98**].

5.1. Variétés de groupes rétractes k-rationnelles

On appelle corps valué la donnée (K, v) d'un corps K muni d'une valuation v (non nécessairement discrète, de rang arbitraire). On note alors K_v le complété de K pour la valuation v. Si K contient k et $v(k^\times) = 0$, on dit que (K, v) est une k-valuation.

PROPOSITION 5.1 (Saltman [**83**, theorem 3.9] ; voir aussi [**22**, §1])
Soit $\mathbf{X}$ *une k-variété. On considère les propriétés suivantes*[(1)] *:*

1. $\mathbf{X}$ *est rétracte k-rationnelle.*
2. *Il existe un ouvert non vide* $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ *tel que, pour toute k-algèbre locale A de corps résiduel κ, l'application* $\mathbf{U}(A) \to \mathbf{U}(\kappa)$ *soit surjective.*
3. $k(X)$ *est séparable sur k et il existe un ouvert non vide* $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ *tel que, pour tout corps K/k et toutes valuations $v_1, ..., v_n$ sur K deux à deux indépendantes,* $\mathbf{U}(K)$ *soit dense dans* $\mathbf{U}(K_{v_1}) \times \cdots \times \mathbf{U}(K_{v_n})$.

(1) La version préliminaire de cet exposé présentait une démonstration canulée de (4) $\Longrightarrow$ (1). Ceci est une question ouverte.

4. *$k(X)$ est séparable sur k et il existe un ouvert non vide $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ tel que, pour tout k-corps valué (K, v), $\mathbf{U}(K)$ soit dense dans $\mathbf{U}(K_v)$.*

Alors on a les implications (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4).

Nous appelons dans la suite de l'exposé « *propriété de relèvement* » la propriété 2). Dans les assertions 3) et 4), la topologie sur $\mathbf{U}(K_v)$ est la topologie v-adique définie par Weil [**107**, appendice III]. Si $\mathbf{U}$ est affine, il s'agit de la topologie la plus fine telle que les applications $f : \mathbf{U}(K_v) \to K_v$ soient continues pour tout $f \in \Gamma(\mathbf{U}, \mathcal{O}_{\mathbf{U}})$, voir [**46**, page 256].

Démonstration. — 1) $\Longrightarrow$ 2) est le sens facile. Pour la réciproque, on peut supposer que $\mathbf{U} = \mathrm{Spec}(B)$ est affine. La k-algèbre B étant de type fini, on considère un morphisme surjectif d'anneaux $R = k[t_1, \cdots, t_n] \to B = R/\mathfrak{P}$. Le corps de fonctions $k(X)$ est le corps résiduel de l'anneau local $R_{\mathfrak{P}}$. Par hypothèse, la flèche $\mathbf{U}(R_{\mathfrak{P}}) \to \mathbf{U}(k(X))$ est surjective. Le point générique ξ de $\mathbf{U}$ se relève donc en un morphisme $f : \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{P}}) \to \mathbf{U}$. Il s'étend en un voisinage $\mathbf{V}$ de $[\mathfrak{P}]$ dans $\mathbf{A}_k^n = \mathrm{Spec}(R)$ de sorte que l'on obtient un morphisme $f : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ qui admet une section rationnelle. Ainsi X est rétracte k-rationnelle.

1) $\Longrightarrow$ 3) : Si X est rétracte k-rationnelle, X est k-unirationnelle et $k(X)$ est une extension séparable de k. La seconde assertion se ramène au cas d'un ouvert d'un espace affine, donc au cas de l'espace affine de dimension d pour lequel la densité de K^d dans $K_{v_1}^d \times \cdots K_{v_n}^d$ est une conséquence du théorème d'approximation [**9**, VI.7, corollaire 2].

3) $\Longrightarrow$ 4) est évident. □

LEMME 5.2. — *On suppose que le corps de base k est infini. Soit $\mathbf{H}$ un k-groupe réductif. On note $\xi \in \mathbf{H}(k(\mathbf{H}))$ le point générique de $\mathbf{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *le morphisme $\mathbf{H}(A) \to \mathbf{H}(\kappa)$ est surjectif pour toute k-algèbre locale A de corps résiduel κ ;*
2. *$\mathbf{H}(K)$ est dense dans $\mathbf{H}(K_v)$ pour tout k-corps valué (K, v) ;*
3. *$\mathbf{H}$ est une variété rétracte k-rationnelle.*

Remarque 5.3. — Le lemme vaut en fait un espace homogène $\mathbf{H} / \mathbf{M}$. En outre, si $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ sont deux k-groupes réductifs, le produit $\mathbf{H}_1 \times_k \mathbf{H}_2$ est rétracte k-rationnel si et seulement si $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ sont rétractes k-rationnels.

Démonstration. — 1) $\Longrightarrow$ 2) : c'est une conséquence immédiate de la proposition 5.1.

2) $\Longrightarrow$ 1) : la proposition 5.1 produit un ouvert $\mathbf{V}$ de $\mathbf{H}$ ayant la propriété de relèvement. Vu que $\mathbf{V}(k)$ est Zariski-dense dans $\mathbf{H}$, il existe $h_1, ..., h_n \in \mathbf{V}(k)$ tel que $\bigcup h_i \mathbf{V} = \mathbf{H}$. Il est alors immédiat que $\mathbf{G}$ vérifie la propriété de relèvement.

L'équivalence 1) $\Longleftrightarrow$ 3) se démontre de la même façon. □

Le cas des variétés de groupes simplement connexes isotropes est particulièrement intéressant.

PROPOSITION 5.4. — *On suppose que le corps de base k est infini. Soit $\mathbf{G}$ un k-groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple et isotrope. On note $\xi \in \mathbf{G}(k(\mathbf{G}))$ le point générique de $\mathbf{G}$. On considère les propriétés suivantes :*

1. *$\mathbf{G}$ est W-trivial, i.e. $W(F, \mathbf{G}) = 1$ pour tout corps F/k ;*
2. *$[\xi] = 1 \in W(k(\mathbf{G}), \mathbf{G})$;*
3. *$\mathbf{G}$ est une variété rétracte k-rationnelle.*

Alors on a les implications suivantes : 1) $\Longleftrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3).

Ainsi la rétracte k-rationalité de $\mathbf{G}$ est une condition nécessaire pour que $\mathbf{G}$ soit W-trivial. L'équivalence 2) $\Longleftrightarrow$ 3) est établie plus loin (5.9). En outre, l'implication 1) $\Longrightarrow$ 3) pour le groupe $\mathbf{SL}_r(D)$ pour une algèbre à division D d'indice sans facteurs carrés montre que le théorème de Wang implique la rétracte k-rationalité de $\mathbf{SL}_r(D)$. On retrouve ainsi par une autre méthode la proposition 2.4.

Démonstration. — L'implication 1) $\Longrightarrow$ 2) est triviale.

2) $\Longrightarrow$ 1) : on dispose de $k(G)$-morphismes $u_i : \mathbf{G}_{a,k(G)} \to \mathbf{G}_{k(\mathbf{G})}$ $(i = 1, ..., n)$ et de fonctions rationnelles $f_1, ..., f_n \in k(\mathbf{G})$ telles que

$$\xi = u_1(f_1)\, u_2(f_2) \cdots u_n(f_n).$$

Il existe un ouvert non vide $\mathbf{V} \subset \mathbf{G}$ tel que les u_i et les f_i soient définis sur $\mathbf{V}$. La relation précédente montre que l'on a le diagramme commutatif de $\mathbf{V}$-schémas

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_k^n \underset{k}{\times} \mathbf{V} \arrow[r, "u_1 \cdots u_n"] & \mathbf{G} \underset{k}{\times} \mathbf{V} \\ & \mathbf{V}. \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ul, "(f_1,..,f_n)"'] \end{tikzcd}$$

Par spécialisation, il vient $\mathbf{V}(F) \subset \mathbf{G}(F)^+$ pour tout corps F/k. Vu que $\mathbf{V}(F)$ est Zariski-dense dans $\mathbf{G}_F$ [**5**, 18.3], on a $\mathbf{V}.\mathbf{V}(F) = \mathbf{G}$, d'où aussitôt $\mathbf{G}(F) = \mathbf{V}(F).\mathbf{V}(F) = \mathbf{G}(F)^+$.

1) $\Longrightarrow$ 3) : soient $\mathbf{P}$ un k-sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{P}^-$ un k-sous-groupe parabolique opposé. Le groupe $\mathbf{G}(\kappa)^+$ est engendré par $(R_u\,\mathbf{P})(\kappa)$ et $(R_u\,\mathbf{P}^-)(\kappa)$ (fait 4.3), donc on est ramené à voir que

$$R_u(\mathbf{P})(\kappa) \subset \mathrm{Im}\Big(\mathbf{G}(A) \to \mathbf{G}(\kappa)\Big).$$

Mais la variété $R_u(\mathbf{P})$ est isomorphe à un espace affine, donc l'application

$$R_u(\mathbf{P})(A) \to R_u(\mathbf{P})(\kappa)$$

est surjective. On a bien établi l'inclusion $R_u(\mathbf{P})(\kappa) \subset \mathrm{Im}\big(\mathbf{G}(A) \to \mathbf{G}(\kappa)\big)$. □

En appliquant ceci au corps $k(\mathbf{G})$, le théorème 3.2 entraîne immédiatement le

COROLLAIRE 5.5. — *On suppose que k est infini. Avec les notations du théorème 3.2, on suppose que le groupe $\mathbf{G}_\Theta$ est W-trivial pour toute Γ_k-orbite Θ de $\Delta \setminus \Delta_0$. Alors $\mathbf{G}$ est W-trivial.*

5.2. Lien avec l'approximation forte

Le problème de Kneser-Tits intervient de façon cruciale dans la preuve du théorème d'approximation forte pour les corps de nombres (Kneser [**47**], Platonov [**70**]) et dans le cas général (Prasad [**77**]). On note ici le lien suivant à la Kneser-Harder.

LEMME 5.6. — *Soit A un anneau de Dedekind de corps des fractions K. Soit $\mathbf{H}/K$ un groupe simplement connexe absolument presque simple et isotrope. Soit $\mathfrak{H}/A$ un modèle de $\mathbf{H}/K$, i.e. un A-schéma en groupes affine, plat de type fini sur A, et de fibre générique $\mathbf{H}/K$. Soit $\Sigma \subset \mathrm{Spec}(A)$ un ensemble fini de points fermés de complémentaire $U = \mathrm{Spec}(A) \setminus \Sigma$.*

1. *$\mathfrak{H}(V) \cap \mathbf{H}(K)^+$ est dense dans $\prod_{\mathfrak{p}\in\Sigma} \mathbf{H}(\widehat{K}_\mathfrak{p})^+$.*
2. *Si $\mathbf{H}(\widehat{K}_\mathfrak{p})^+ = \mathbf{H}(\widehat{K}_\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \Sigma$, alors $\mathfrak{H}(\mathbf{U})$ est dense dans $\prod_{\mathfrak{p}\in\Sigma} \mathbf{H}(\widehat{K}_\mathfrak{p})$.*

Remarque 5.7. — Rappelons que la densité de $\mathfrak{H}(\mathbf{U})$ dans $\prod_{\mathfrak{p}\in\Sigma} \mathbf{H}(\widehat{K}_\mathfrak{p})$ est indépendante du modèle choisi [**35**, §2.1]. On dit alors que l'approximation forte vaut pour le groupe $\mathbf{H}/K$ en Σ.

Démonstration. — (1) On continue à voir $\mathbf{H}(K)^+$ comme le sous-groupe de $\mathbf{H}(K)$ engendré par $(R_u\,\mathbf{P})(K)$ et $(R_u\,\mathbf{P}^-)(K)$ pour des K-sous-groupes paraboliques propres $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}^-$ opposés de $\mathbf{H}/K$ (4.3). Quitte à décomposer les éléments de $\mathbf{H}(\widehat{K}_\mathfrak{p})^+$ en un produit fini d'éléments de $(R_u\,\mathbf{P})(\widehat{K}_\mathfrak{p})$ et $(R_u\,\mathbf{P}^-)(\widehat{K}_\mathfrak{p})$, on est ramené à voir que $\prod_{\mathfrak{p}\in\Sigma} (R_u\,\mathbf{P})(\widehat{K}_\mathfrak{p})$ se trouve dans l'adhérence de $\mathfrak{H}(\mathbf{U}) \cap \mathbf{H}(K)^+$. La K-variété $R_u(\mathbf{P})$ est

isomorphe à un espace affine, donc satisfait l'approximation forte (cf. [**47**, 2.4]). Ainsi $(R_u\,\mathbf{P})(K) \cap \mathfrak{H}(U)$ est dense dans $\prod_{\mathfrak{p}\in\Sigma} (R_u\,\mathbf{P})(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})$, ce qui achève la démonstration.

(2) C'est une conséquence immédiate. □

5.3. Invariance pour les extensions transcendantes pures

Le résultat suivant donne une forme générale aux énoncés de Platonov [**71**], Yanchevskiĭ et Monastyrniĭ-Yanchevskiĭ [**64**] pour tous les groupes classiques.

THÉORÈME 5.8. — *On suppose que* $\mathbf{G}$ *est semi-simple simplement connexe absolument presque simple et isotrope. Alors on a un isomorphisme*

$$W(k,\mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} W(k(t),\mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} W(k((t)),\mathbf{G}).$$

Démonstration. — Il suffit de montrer la surjectivité de $W(k,\mathbf{G}) \longrightarrow W(k(t),\mathbf{G})$ et le second isomorphisme.

Passage de k à $k(t)$: on note F le corps $k(t)$; il faut donc montrer que $\mathbf{G}(F) = \mathbf{G}(k)\,.\,\mathbf{G}(F)^+$. Pour tout point fermé M de $\mathbf{A}^1_k$, on note $\widehat{F}_M$ le complété de F pour la valuation associée. Le lemme 4.5 appliqué aux anneaux de valuations $\widehat{O}_M$ des corps $\widehat{F}_M$ montre que l'on a $\mathbf{G}(\widehat{F}_M) = \mathbf{G}(\widehat{F}_M)^+.\,\mathbf{G}(\widehat{O}_M)$ pour tout point fermé M de $\mathbf{A}^1_k$.

Soit $g \in \mathbf{G}(F)$. On note $\mathbf{U} \subset \mathbf{A}^1_k$ l'ouvert de définition de g et $\Sigma = \mathbf{A}^1_k \setminus \mathbf{U}$ son complémentaire. Il existe $h_M \in \mathbf{G}(\widehat{F}_M)^+$ et $g_M \in \mathbf{G}(\widehat{O}_M)$ tel que

$$g = h_M\, g_M \quad (M \in \mathbf{A}^1).$$

Le lemme 5.6 montre que $\mathbf{G}(U) \cap \mathbf{G}(F)^+$ est dense dans $\prod_{M\in\Sigma} \mathbf{G}(\widehat{F}_M)^+$. Par suite, il existe $g' \in \mathbf{G}(U) \cap \mathbf{G}(F)^+$ tel que

$$g'^{-1}\, h_M \in \mathbf{G}(\widehat{O}_M) \quad \forall M \in \Sigma.$$

Ainsi

$$g'^{-1} g \in \mathbf{G}(\widehat{O}_M) \quad \forall M \in \Sigma,$$

d'où $g'^{-1}g \in \mathbf{G}(k[t])$. Mais $\mathbf{G}(k[t]) \subset \mathbf{G}(k)\,.\,\mathbf{G}(F)^+$ (4.7), d'où aussitôt $g \in \mathbf{G}(k)\,.\,\mathbf{G}(F)^+$.

Passage de k à $k((t))$: soient $\mathbf{P}$ un k-sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{P}^-$ un sous-groupe parabolique opposé. Suivant le §4.2, l'application $W(k,\mathbf{G}) \to W(k((t)),\mathbf{G})$ est la flèche de relèvement associée à $\mathbf{G} \underset{k}{\times} k[[t]]$, elle est donc surjective. Pour l'injectivité, il convient d'établir que $\mathbf{G}(k)^+ = \mathbf{G}(k) \cap \mathbf{G}(k((t)))^+$. On se donne donc $g_0 \in \mathbf{G}(k)$ tel que

$$g_0 = u_1 \cdots u_n$$

avec $u_i \in R_u(\mathbf{P}^{\pm})(k((t)))$ pour $i = 1, ..., n$, l'indice $\pm$ dépendant de i. On note $R = k[t, \frac{1}{t}]$ l'anneau des polynômes de Laurent. Vu que $R_u(\mathbf{P}^{\pm})(R)$ est dense dans $R_u(\mathbf{P}^{\pm})\big(k((t))\big)$, il existe des éléments $f_1, ..., f_n \in R_u(\mathbf{P}^{\pm})(R)$ satisfaisant

$$\prod u_i \prod f_i^{-1} \in \ker\big(\mathbf{G}(k[[t]]) \xrightarrow{ev_0} \mathbf{G}(k)\big).$$

Puisque $g_0 = \prod u_i$, il vient $\prod f_i \in \mathbf{G}(R) \cap \mathbf{G}(k[[t]]) = \mathbf{G}(k[t])$, d'où

$$g_0 \prod f_i^{-1} \in \ker\big(\mathbf{G}(k[t]) \xrightarrow{ev_0} \mathbf{G}(k)\big).$$

Suivant le fait 4.7, on sait que le groupe $\ker\big(\mathbf{G}(k[t]) \xrightarrow{ev_0} \mathbf{G}(k)\big)$ est constitué d'éléments ${}^{g_1}h_1 \cdots {}^{g_m}h_m$ avec $h_i \in R_u(\mathbf{P})(k[t])$ et $g_i \in \mathbf{G}(k)$. En reportant ci-dessus, on obtient

$$g_0 \prod f_i^{-1} = {}^{g_1}h_1 \cdots {}^{g_m}h_m.$$

Il reste à spécialiser en 1 pour obtenir $g_0 \in \mathbf{G}(k)^+$. □

Ceci nous permet de compléter la proposition 5.4.

THÉORÈME 5.9. — *Sous les hypothèses du théorème 5.8, on note $\xi \in \mathbf{G}(k(\mathbf{G}))$ le point générique de $\mathbf{G}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbf{G}$ est W-trivial, i.e. $W(F, \mathbf{G}) = 1$ pour tout corps F/k ;*
2. *$[\xi] = 1 \in W(k(\mathbf{G}), \mathbf{G})$;*
3. *$\mathbf{G}$ est une variété rétracte k-rationnelle.*

Démonstration. — Quitte à remplacer k par $k(t)$, le théorème 5.8 permet de supposer le corps de base infini. Au vu de la proposition 5.4, il reste à montrer que, si $\mathbf{G}$ est une variété rétracte k-rationnelle, alors $[\xi] = 1 \in W(k(\mathbf{G}), \mathbf{G})$. Par hypothèse, il existe un ouvert $\mathbf{U}$ de $\mathbf{G}$ tel que l'identité de $\mathbf{U}$ factorise à travers un ouvert $\mathbf{V}$ d'un espace affine $\mathbf{A}_k^m$, i.e. il existe des morphismes $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ et $r : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ tels que $r \circ f = id_{\mathbf{U}}$. Ainsi le morphisme

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) \xrightarrow{r^*} \mathbf{G}(\mathbf{V}) \xrightarrow{f^*} \mathbf{G}(\mathbf{U})$$

est l'identité. Le théorème 5.8 montre que $W(k, \mathbf{G}) = W(k(\mathbf{V}), \mathbf{G})$. Par suite, quitte à restreindre $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$, il existe $g_0 \in \mathbf{G}(k)$ et des éléments $g_i \in \mathbf{G}(\mathbf{V})$ et $u_i \in (R_u\,\mathbf{P})(\mathbf{V})$ tels que

$$r^*(\xi_{|\mathbf{U}}) = g_0\, g_1\, u_1\, g_1^{-1} \cdots g_n\, u_n\, g_n^{-1}.$$

En appliquant f^*, il vient

$$\xi = g_0 \mod \mathbf{G}(k(\mathbf{G}))^+.$$

On utilise maintenant que le groupe $\mathbf{G}(k)^+$ est Zariski-dense dans $\mathbf{G}$ (4.4). En spécialisant en un k-point convenable de $\mathbf{G}(k)^+$, on obtient $g_0 \in \mathbf{G}(k)^+$, d'où $\xi \in \mathbf{G}(k(\mathbf{G}))^+$. □

On obtient donc un élément de réponse à la question 1.1.

COROLLAIRE 5.10. — *Soit* $\mathbf{H}$ *un* k*-groupe réductif. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{H}$ *est* W*-trivial;*
2. $\mathbf{H}$ *est semi-simple simplement connexe et tous ses facteurs presque* k*-simples sont isotropes et rétractes* k*-rationnels.*

Démonstration. — (1) $\Longrightarrow$ 2) : on suppose le groupe $\mathbf{H}$ W-trivial. La proposition 3.1 montre que $\mathbf{H}$ est semi-simple simplement connexe, et que ses facteurs presque simples sont isotropes et W-triviaux. Notons $\mathbf{H} = R_{k_i/k}(\mathbf{H}_i)$ la décomposition de $\mathbf{H}$ en facteurs presque simples. Suivant la formule (1), il revient au même de dire que $\mathbf{H}_i/k_i$ est W-trivial pour tout i. Le théorème 5.9 montre que $\mathbf{H}_i$ est rétracte k_i-rationnel pour tout i. Alors $R_{k_i/k}(\mathbf{H}_i)$ est rétracte k-rationnel pour tout i et il en est de même de $\mathbf{H}$. La réciproque est immédiate. □

Par ailleurs, le théorème 5.8 a une conséquence pour l'approximation forte.

COROLLAIRE 5.11. — *Sous les hypothèses de la proposition 5.6, on suppose que la variété de groupe* $\mathbf{H}/K$ *est rétracte* K*-rationnelle. Alors pour tout ensemble fini* $\Sigma \subset \mathrm{Spec}(A)$, *l'approximation forte vaut pour le groupe* $\mathbf{H}/K$ *en* Σ.

Démonstration. — En effet, le théorème 5.9 montre que $\mathbf{H}(E)^+ = \mathbf{H}(E)$ pour toute extension E/K. En particulier, $\mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{P}})^+ = \mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{P}})$ pour tout $[\mathfrak{P}] \in \Sigma$. Posant $U = \mathrm{Spec}(A) \setminus \Sigma$, et notant $\mathfrak{H}/A$ un modèle de $\mathbf{H}/K$, le lemme 5.6 montre que $\mathfrak{H}(U)$ est dense dans $\prod_{\mathfrak{P}\in\Sigma} \mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{P}})$. □

6. GROUPES W-TRIVIAUX

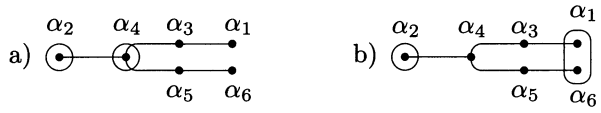
Pour de nombreux groupes, on sait que la variété $\mathbf{G}$ est stablement k-rationnelle et donc que $\mathbf{G}$ est W-trivial suivant le théorème 5.9. C'est par exemple le cas classique du groupe $\mathbf{Spin}(q)$ d'une forme quadratique non dégénérée isotrope (voir ci-dessous §7.3). Sur cette thématique, mentionnons ici l'exposé de Merkurjev [**55**]. Comme le montre la conjecture de Suslin, on est très loin de savoir décider si une variété de groupe est stablement k-rationnelle.

6.1. Groupes k-rationnels

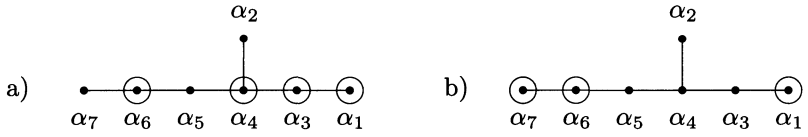
La liste ci-dessous est essentiellement due à Chernousov-Platonov.

THÉORÈME 6.1 ([**15**]). — *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe semi-simple simplement connexe isotrope absolument presque simple. Alors* $\mathbf{G}$ *est une variété* k*-rationnelle dans les cas suivants :*

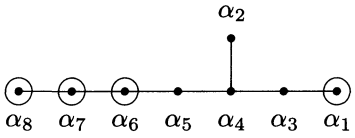
1. $\mathbf{G}$ *est quasi-déployé ;*
2. *les composantes du noyau anisotrope de* $\mathbf{G}$ *sont de rang au plus* 2 *;*
3. $\mathbf{G}$ *est de type* B_n, C_n *;*
4. $\mathbf{G} = \mathbf{Spin}(q)$ *pour une forme quadratique non dégénérée et isotrope* q *de dimension paire ;*
5. $\mathbf{G} = \mathbf{Spin}(D, h)$ *où* D/k *est une algèbre à division centrale de degré* ≤ 4 *munie d'une involution de première espèce de type orthogonal et* h *est une forme hermitienne (non dégénérée) isotrope ;*
6. $\mathbf{G}$ *est de type* ${}^{3,6}D_4$, ${}^1E_6$ *ou* F_4 *;*
7. $\mathbf{G}$ *est de type* ${}^2E_6$ *avec l'un des indices de Tits suivants*



8. $\mathbf{G}$ *est de type* E_7 *avec l'un des indices de Tits suivants*



9. $\mathbf{G}$ *est de type* E_8 *avec l'indice de Tits suivant*



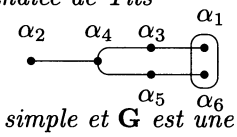
Notons que le cas 5) porte sur certains groupes de type ${}^1D_n$ (resp. ${}^2D_n$). Rappelons l'argument pour le cas quasi-déployé 1). Si $\mathbf{G}$ est quasi-déployé, on note $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}^-$ des sous-groupes de Borel opposés. La décomposition de Bruhat permet de voir que $\mathbf{G}$ est birationnel à $\mathbf{B} \times R_u(\mathbf{B}^-)$, c'est-à-dire à $R_u(\mathbf{B}) \times \mathbf{T} \times R_u(\mathbf{B}^-)$ où $\mathbf{T} = \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^-$. Les variétés $R_u(\mathbf{B}^\pm)$ sont des espaces affines et le tore $\mathbf{T}$ est quasi-trivial [**35**, §1.4], donc k-rationnel. Ainsi $\mathbf{G}$ est k-rationnel.

Cette liste (non disjointe) permet non seulement de retrouver les résultats connus de W-trivialité mais donne aussi de nouveaux cas, notamment sur les groupes exceptionnels. Par exemple, on retrouve ainsi un résultat de Jacobson pour les groupes de type F_4 de rang relatif 1 [**37**], [**98**, 4.4.3].

Un cas nouveau significatif est la W-trivialité des groupes trialitaires (i.e. de type ${}^{3,6}D_4$), produisant ainsi une autre démonstration du théorème de Prasad-Raghunathan pour les corps de nombres [**78**].

6.2. Groupes d'indice ${}^2E_6^{29}$

THÉORÈME 6.2 (Garibaldi, 2006, [**26**]). — *On suppose* $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$. *Soit* $\mathbf{G}/k$ *un groupe simplement connexe d'indice de Tits*



Alors $\mathbf{G}(k)$ *est projectivement simple et* $\mathbf{G}$ *est une variété stablement* k*-rationnelle.*

La première étape est de décrire ces groupes de façon explicite (Garibaldi-Petersson [**27**]). Ces groupes des transformations ont été étudiés par Veldkamp en 1968 qui a établi, transcrit dans le language de cet exposé, que $\mathbf{G}(k)/Z(\mathbf{G})(k)$ est le sous-groupe engendré par des « transvections », i.e. $\mathbf{G}(k) = Z(\mathbf{G})(k).\,\mathbf{G}(k)^+$ [**99**, theorem 9.5]. Garibaldi a interprété les calculs de Veldkamp sur les transvections en termes du groupe $\mathbf{G}$ de type E_6 et de ses sous-groupes algébriques. Cet article établit ensuite la stable k-rationalité de ces groupes, complétant la liste ci-dessus. Le théorème 5.9 permet de voir les choses dans l'autre sens, c'est-à-dire de montrer d'abord la stable k-rationalité, ce qui est plus facile, et d'en déduire ensuite la W-trivialité (ce qui est légèrement plus précis). Observons de plus que l'hypothèse sur la caractéristique peut être levée en tenant compte de la remarque technique 7.4.

De façon plus précise, soit $\mathbf{G}$ un k-groupe simplement connexe d'indice de Tits ${}^2E_6^{29}$ muni d'un k-tore déployé maximal $\mathbf{S} \cong \mathbf{G}_m$. On note $K = k(\alpha)$ l'extension quadratique associée à la $*$-action. L'article [**27**] met en évidence une algèbre d'octonions C, non déployée par K/k, telle que le noyau anisotrope $DZ_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ de $\mathbf{G}$ soit isomorphe à $\mathbf{Spin}(C^K)$, groupe des spineurs de la forme quadratique

$$C^K = \langle 1 \rangle \perp \langle \alpha \rangle \widetilde{N}_C,$$

où $\widetilde{N}_C$ est définie par $N_C = \langle 1 \rangle \perp \widetilde{N}_C$, N_C désignant la norme octonionique.

Disons quelques mots sur la démonstration de la stable k-rationalité pour ce type de groupes. Selon la décomposition de Bruhat généralisée, $\mathbf{G}$ et $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ sont stablement rationnellement équivalents. Le centre connexe $\mathbf{S}'$ de $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ est un tore quasi-trivial $R_{K/k}(\mathbf{G}_m)$. Suivant le théorème 90 de Hilbert, la fibration $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) \to Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})/\mathbf{S}'$ admet une section rationnelle, donc $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ et $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})/\mathbf{S}'$ sont stablement rationnellement

équivalents. On est donc ramené à l'étude du groupe $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})/\mathbf{S}'$ qui est semi-simple, anisotrope et de type quasi-déployé ${}^2D_4$. Or $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})/\mathbf{S}' \cong \mathbf{PSO}(C^K)$, le point étant que cette forme quadratique C^K est remarquable. En effet, C^K est Witt équivalente à $\langle\alpha\rangle N_C \perp \langle 1, -\alpha\rangle$ et N_C est une 3-forme de Pfister. On montre alors que pour ce type particulier de formes quadratiques, le groupe $\mathbf{PSO}(C^K)$ est stablement k-rationnel [**26**, prop. 61].

7. LIEN AVEC LA R-ÉQUIVALENCE

Dans cette section, on montre que la R-équivalence est la bonne généralisation du groupe de Whitehead à des groupes réductifs arbitraires.

7.1. Définition

La R-équivalence est une relation d'équivalence sur les points rationnels d'une variété algébrique introduite par Manin [**49**]. Soit $\mathbf{X}/k$ une variété algébrique définie sur un corps k. On note $\mathcal{O}$ l'anneau semi-local en 0 et 1 de la droite affine. La R-équivalence est la relation d'équivalence sur l'ensemble des points rationnels $\mathbf{X}(k)$ de $\mathbf{X}$ engendrée par la relation élémentaire suivante : deux points x et y de $\mathbf{X}(k)$ sont dits directement R–équivalents s'il existe $\phi \in \mathbf{X}(\mathcal{O})$ tel que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. Cette définition s'étend à tout foncteur $\mathbf{F}$ de la catégorie des k-algèbres.

Soit $\mathbf{F}$ un foncteur en groupes de la catégorie des k-algèbres ; on note $R\mathbf{F}(k)$ le sous-groupe (distingué) formé des éléments $f \in \mathbf{F}(k)$ directement R-équivalents à $e \in \mathbf{F}(k)$. Alors l'ensemble des classes $\mathbf{F}(k)/R$ est muni d'une structure naturelle de groupes. On sait que $R\mathbf{F}(k)$ est formé des éléments $f \in \mathbf{F}(k)$ pour lesquels il existe $h \in \mathbf{F}(\mathcal{O})$ satisfaisant $h(0) = e$ et $h(1) = f$ (même démonstration qu'en 4.3). On a alors un morphisme surjectif canonique $\pi_0(k, \mathbf{F}) \to \mathbf{F}(k)/R$. En particulier, pour tout k-groupe algébrique $\mathbf{H}$, cette construction donne lieu à la flèche $\pi_0(k, \mathbf{H}) \to \mathbf{H}(k)/R$. Si k est infini, il est immédiat que $\mathbf{H}(k)/R \cong \mathbf{H}(k(t))/R$ [**103**, §16.2]. On dit que $\mathbf{H}$ est R-trivial si $\mathbf{H}(F)/R = 1$ pour toute extension F/k. Si $\mathbf{H}$ est rétracte k-rationnelle (et k infini), on sait que $\mathbf{H}$ est R-trivial [**20**, prop. 8].

7.2. Comparaison

Selon Voskresenskiĭ [**102**], la R-équivalence étend le groupe de Whitehead pour les groupes linéaires spéciaux anisotropes (i.e. le cas $r = 1$ ci-dessous).

THÉORÈME 7.1. — *Soit D une algèbre simple centrale à division. Alors pour tout entier $r \geq 1$, on a un isomorphisme*

$$SK_1(D) \xrightarrow{\sim} \mathbf{SL}_r(D)(k)/R.$$

En particulier, si $r \geq 2$, on a un isomorphisme

$$W(k, \mathbf{SL}_r(D)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{SL}_r(D)(k)/R.$$

La démonstration utilise la stabilité de $SK_1(D)$ par passage de k à $k(t)$ et $k((t))$. La même démonstration permet de généraliser ce résultat de comparaison entre groupe de Whitehead et la R-équivalence, relation d'équivalence a priori plus grossière. Ici aussi, le cas des groupes classiques était connu [**64**], [**62**], [**60**].

THÉORÈME 7.2. — *Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple et isotrope. Alors on a un isomorphisme*

$$W(k, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}(k)/R.$$

Démonstration. — Il faut montrer l'injectivité. On se donne donc un élément $g_1 \in \mathbf{G}(k)$ qui est R-équivalent à e. Alors il existe $g \in \mathbf{G}(\mathcal{O})$ satisfaisant $g(0) = e$ et $g(1) = g_1$. La propriété d'invariance par extension transcendante pure produit une décomposition $\mathbf{G}(k(t)) = \mathbf{G}(k).\mathbf{G}(k(t))^+$. Ainsi $g = g_0\, g'$ avec $g_0 \in \mathbf{G}(k)$ et $g' \in \mathbf{G}(k(t))^+$. Mais $W(k, \mathbf{G}) \cong W(k((t)), \mathbf{G})$, donc $e = g(0) = g_0 \mod \mathbf{G}(k)^+$ et de même $g_1 = g(1) = g_0 \mod \mathbf{G}(k)^+$. On conclut que $g_1 \in \mathbf{G}(k)^+$. □

On peut appliquer alors ce que l'on sait pour la R-équivalence. Si k est infini, l'*ensemble* $\mathbf{H}(k)/R$ définit un invariant birationnel pour les k-groupes réductifs [**20**, cor. de la prop. 11]. En particulier, si $\mathbf{H}$ est rétracte k-rationnel, on sait alors que $\mathbf{H}(k)/R = 1$. Ces faits combinés avec le théorème 5.8 produisent une autre démonstration du théorème 5.9.

Par ailleurs, on a pour la R–équivalence un isomorphisme de relèvement pour un schéma en groupes réductifs sur un anneau hensélien de valuation discrète [**31**]. En particulier $\mathbf{H}(k)/R \cong \mathbf{H}\big(k((t))\big)/R$ pour tout groupe réductif $\mathbf{H}$, ce qui est cohérent avec le théorème 5.8. La conséquence suivante du théorème 7.2 complète le §4.2.

COROLLAIRE 7.3. — *Soit O un anneau hensélien de valuation discrète de corps de fractions K et de corps résiduel κ. Soit $\mathfrak{H}/O$ un schéma en groupes semi-simples simplement connexes. On suppose que $\mathbf{H}$ est absolument presque simple et isotrope. Alors la flèche de relèvement (§4.2) est un isomorphisme*

$$W(\kappa, \mathbf{H}) \xrightarrow{\sim} W(K, \mathfrak{H}_K).$$

Remarque 7.4. — Cet énoncé permet parfois de s'affranchir de la caractéristique positive. En effet, si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, on considère un anneau O complet pour une valuation discrète et de corps résiduel k. On sait que le groupe $\mathbf{G}/k$ se relève alors de façon unique en un O-schéma en groupes semi-simples simplement connexes $\mathfrak{G}$ [**1**, XXIV.8]. L'isomorphisme $W(k, \mathbf{G}) \cong W(K, \mathfrak{G}_K)$ ramène le calcul du groupe de Whitehead de $\mathbf{G}$ à celui de $\mathfrak{G}_K$.

La R–équivalence permet de généraliser à tous les groupes réductifs les questions sur le groupe de Whitehead.

QUESTIONS 7.5. — Soit $\mathbf{H}$ un k-groupe réductif.

1) Le groupe $\mathbf{H}(k)/R$ est-il abélien ?

2) A-t-on l'équivalence

$$\mathbf{H} \text{ est } R\text{-trivial} \Longleftrightarrow \mathbf{H} \text{ est une variété rétracte } k\text{-rationnelle ?}$$

3) Si k est de type fini sur le corps premier, le groupe $\mathbf{H}(k)/R$ est-il fini ?

Pour les tores algébriques, la théorie de Colliot-Thélène et Sansuc répond positivement à ces questions ([**20**] pour 1) et 3), [**21**] pour 2)). De façon plus précise, on sait qu'un tore $\mathbf{T}$ est R-trivial si et seulement s'il est facteur direct d'un tore quasi-trivial (un tel tore n'est pas nécessairement stablement k-rationnel). Une version plus optimiste de la seconde question est

$$(2') \qquad \mathbf{H} \text{ est } R\text{-trivial} \overset{?}{\Longleftrightarrow} \mathbf{H} \text{ est facteur direct d'une variété } k\text{-rationnelle.}$$

En fait, on ne connaît aucun exemple de variété rétracte k-rationnelle non facteur direct d'une variété k-rationnelle.

Remarque 7.6. — On suppose k infini. Le cas des tores permet de voir que tout élément de $\mathbf{G}(k)/R$ est annulé par l'ordre du groupe des automorphismes $A(\Phi)$ du système de racines absolu Φ de $\mathbf{G}$. En effet, le groupe $R\,\mathbf{G}(k)$ est Zariski-dense, ainsi tout élément de $\mathbf{G}(k)$ est R-équivalent à un élément semi-simple régulier. Par suite,

$$\mathbf{G}(k)/R = \bigcup \operatorname{Im}\big(\mathbf{T}(k)/R \to \mathbf{G}(k)/R\big)$$

pour $\mathbf{T}$ parcourant l'ensemble des k-tores maximaux de $\mathbf{G}$. Un tel tore est déployé par une $A(\Phi)$-algèbre étale. On sait alors que $\sharp A(\Phi)\,.\,\mathbf{T}(k)/R = 0$ par un argument de restriction-corestriction.

La commutativité de $\mathbf{G}(k)/R$ est connue dans les cas suivants.

THÉORÈME 7.7 ([**13**, 1.2], Chernousov-Merkurjev). — *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k-simple et classique (i.e. de type A, B, C, D non trialitaire). Alors le groupe $\mathbf{G}(k)/R$ est commutatif.*

Pour le type D, ce résultat est énoncé en caractéristique $\neq 2$ mais la remarque 7.4 montre qu'il vaut en général.

Enfin, la finitude 3) est connue pour les corps globaux [**28**] et pour quelques cas assez particuliers (théorème 2.14 et [**4**]).

7.3. Le groupe $\mathbf{Spin}(q)$

Il s'agit de l'exemple nouveau le plus important concernant la R–équivalence, au sens qu'il va au-delà du problème de Kneser-Tits. On suppose ici que $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Soit q une k-forme quadratique (non dégénérée). On rappelle que le groupe de Clifford pair $\mathbf{\Gamma}^+(q)$ s'insère dans le diagramme commutatif [**84**, §9]

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \mu_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Spin}(q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{SO}(q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbf{G}_m \arrow[r] \arrow[d, "\times 2"'] & \mathbf{\Gamma}^+(q) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ns}"'] & \mathbf{SO}(q) \arrow[r] & 1. \\
 & \mathbf{G}_m \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbf{G}_m \arrow[d] & & \\
 & 1 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

La flèche $\mathrm{Ns} : \mathbf{\Gamma}^+(q) \to \mathbf{G}_m$ est la norme spinorielle, elle est scindée si et seulement si q est isotrope (e.g. [**54**, §6]). Si q est isotrope, on sait que $\mathbf{Spin}(q)$ est alors stablement k-rationnelle. En effet, $\mathbf{Spin}(q) \times \mathbf{G}_m$ est birationnellement équivalent à $\mathbf{\Gamma}^+(q)$, lui-même stablement équivalent au groupe k-rationnel $\mathbf{SO}(q)$. Dans ce cas, $\mathbf{Spin}(q)$ est donc stablement k-rationnel (même k-rationnel [**73**]), et a fortiori W-trivial. Le cas intéressant est donc lorsque la forme quadratique q est anisotrope.

Le théorème 2.7 traite en fait aussi du groupe $\mathbf{Spin}(\varphi)$ pour une forme d'Albert φ associée à une algèbre de biquaternions D puisque l'on a alors l'isomorphisme exceptionnel $\mathbf{Spin}(\varphi) \cong \mathbf{SL}_1(D)$ [**48**, §16].

Notre but ici est d'énoncer le théorème de Chernousov-Merkurjev-Rost qui compare le groupe $\mathbf{Spin}(q)/R$ à la K-cohomologie de la quadrique projective $\mathbf{X}$ définie par q [**14**]. On considère l'application suivante

$$\partial : \bigoplus_{x \in \mathbf{X}_{(1)}} K_2^M(k(x)) \to \bigoplus_{x \in \mathbf{X}_{(0)}} k(x)^\times$$

construite à partir du symbole modéré de Bass-Tate [**33**, §7.1] (où la notation $\mathbf{X}_{(i)}$ signifie l'ensemble des points de X de dimension i). Son conoyau est noté $A_0(\mathbf{X}, K_1) = \mathrm{coker}(\partial)$. La quadrique $\mathbf{X}$ étant propre, la norme

$$N : \bigoplus_{x \in \mathbf{X}_{(0)}} k(x)^\times \to k^\times$$

s'annule sur $\mathrm{Im}(\partial)$. Ceci donne lieu à une application $A_0(\mathbf{X}, K_1) \to k^\times$ dont le noyau est noté $\overline{A}_0(\mathbf{X}, K_1)$.

Une grande partie du travail est de définir la flèche de Rost $\rho : \mathbf{\Gamma}^+(q)(k) \to A_0(\mathbf{X}, K_1)$ au moyen de la norme spinorielle. En effet, le groupe $\mathbf{\Gamma}^+(q)(k)$ est le sous-groupe du groupe $\mathbf{C}(q)^\times$ (i.e. le groupe des éléments inversibles de l'algèbre de Clifford de q) engendré par les produits pairs de vecteurs anisotropes v. Le candidat pour ρ est alors donné par

$$\rho(v_1 \otimes \cdots v_{2m}) = \Big[(\cdots, q(v_i), \cdots)\Big] \in A_0(\mathbf{X}, K_1)$$

avec $q(v_i)$ placé en $[v_i]$. La démonstration de Rost [**80**] [**42**] de l'existence de ρ est fondée sur une réduction au cas d'une forme de degré 3, celle de Chernousov-Merkurjev est tout à fait différente et nécessite une marche d'approche assez longue [**13**], [**14**]. En outre le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Gamma}^+(q)(k) & \xrightarrow{\rho} & A_0(\mathbf{X}, K_1) \\ {\scriptstyle \mathrm{Ns}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{N}}\downarrow \\ k^\times & = & k^\times \end{array}$$

commute, induisant un invariant $\overline{\rho} : \mathbf{Spin}(q)(k) \to \overline{A}_0(\mathbf{X}, K_1)$.

THÉORÈME 7.8 (Chernousov-Merkurjev-Rost [**14**]). — *L'invariant $\overline{\rho}$ induit un isomorphisme*

$$\overline{\rho} : \mathbf{Spin}(q)(k)/R \xrightarrow{\sim} \overline{A}_0(\mathbf{X}, K_1).$$

En général, ces groupes ne sont pas R-triviaux [**55**, 9.2]. Le théorème est appliqué à travers le corollaire suivant, qui n'utilise que la surjectivité de l'invariant précédent.

COROLLAIRE 7.9. — *Si $\mathbf{Spin}(q)$ est une variété stablement k-rationnelle, alors $\overline{A}_0(\mathbf{X}, K_1) = 0$.*

Le groupe $\mathbf{Spin}(q)$ est stablement k-rationnel dans les cas suivants [**55**, 6.4].

THÉORÈME 7.10. — *Supposons que q soit une voisine de Pfister (i.e. une sous-forme d'une forme de Pfister $\langle\langle a_1, ..., a_n\rangle\rangle$ de dimension $> 2^{n-1}$). Soit p une k-forme quadratique de rang au plus 2. Alors pour la forme quadratique $q \perp p$, on a $\mathbf{Spin}(q \perp p)(k)/R = \overline{A}_0(\mathbf{X}_{q\perp p}, K_1) = 0$.*

L'annulation du groupe $\overline{A}_0(\mathbf{X}, K_1)$ pour certaines quadriques est un ingrédient essentiel dans la preuve de Voevodsky de la conjecture de Milnor [**100**] [**42**]. Enfin, il est à noter que les questions 2) et 3) ci-dessus (7.5) sont ouvertes pour $\mathbf{Spin}(q)$.

8. LE PROBLÈME DE KNESER-TITS SUR CERTAINS CORPS

8.1. Corps globaux

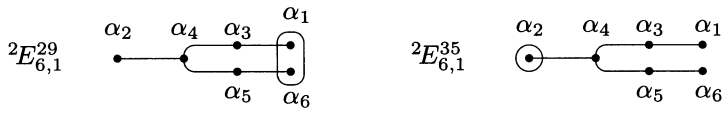
THÉORÈME 8.1. — *Soient F un corps global et $\mathbf{G}/F$ un groupe semi-simple simplement connexe presque simple et isotrope. Alors $W(F,\mathbf{G}) = 1$ et $\mathbf{G}(F)$ est projectivement simple.*

Démonstration. — Les réductions usuelles (§3.1) permettent de supposer $\mathbf{G}/F$ absolument presque simple. Pour une synthèse sur le cas des groupes classiques, nous renvoyons à [**75**, §7.2]. On se concentre donc sur les groupes exceptionnels. Selon la réduction 3.3, on peut supposer que $\mathbf{G}$ est un groupe exceptionnel de rang relatif 1, ce qui écarte d'emblée le type G_2 et le cas ${}^1E_6$, i.e. les groupes de type E_6 intérieurs. De plus, sur le corps global F, les tables d'indices de Tits [**97**] montrent que le type de $\mathbf{G}$ n'est ni E_7, ni E_8.

Type F_4 : c'est un résultat de Jacobson [**37**] en caractéristique $\neq 2,3$ complété par Tits dans le cas général [**98**, 4.4.3].

Groupes trialitaires, i.e. de type ${}^{3,6}D_4$: il s'agit du résultat de Prasad-Raghunathan ([**78**, theorem 6.1] et §6.1).

Type ${}^2E_6$: on retrouve les deux cas de l'introduction, i.e.



Pour le cas ${}^2E^{29}_{6,1}$, c'est un cas particulier du théorème 6.2 de Garibaldi. Dans le cas ${}^2E^{35}_{6,1}$, Chernousov et Timoshenko ont montré que $\mathbf{G}(F)/R = 1$ [**16**, 2.12]. Le théorème 7.2 permet de conclure que $W(F,\mathbf{G}) = 1$. □

Remarque 8.2. — La démonstration repose en grande partie sur la classification des groupes semi-simples sur les corps globaux. Les groupes discutés dans la démonstration sont en fait W-triviaux pour les indices de Tits $F^{2,1}_{4,1}$, ${}^{3,6}D^9_{4,1}$ et ${}^2E^{29}_{6,1}$. On ignore si c'est le cas pour les groupes d'indices ${}^2E^{35}_{6,1}$.

Ce résultat permet la réactualisation de la liste pour la R-équivalence.

THÉORÈME 8.3. — *Soient F un corps global et $\mathbf{G}/F$ un groupe semi-simple simplement connexe presque simple. On suppose que $\mathbf{G}$ n'est pas anisotrope de type E_6. Alors $\mathbf{G}(F)/R = 1$.*

Démonstration. — On peut supposer $\mathbf{G}$ anisotrope et absolument presque F-simple. On commence par le type A.

Type A : si $\mathbf{G}$ est de type ${}^1A_n$, alors $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(D)$ et on sait que $\mathbf{G}(F)/R = SK_1(D) = 0$. Si $\mathbf{G}$ est de type ${}^2A_n$, alors il existe une extension quadratique séparable L/F, une algèbre simple centrale à division D/L munie d'une involution de seconde espèce τ, un D-espace vectoriel (à droite) V et une forme hermitienne h sur V telle que $\mathbf{G} = \mathbf{SU}(V,h)$. Suivant [**13**, theorem 6.4], $\mathbf{G} = \mathbf{SU}(V,h)$ et $\mathbf{G} = \mathbf{SU}(V',h')$ sont stablement F-birationnels. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que h est isotrope, c'est-à-dire que $\mathbf{G}$ est isotrope. Le théorème 8.1 permet de conclure que $\mathbf{G}(F)/R = 1$.

Pour les autres types, l'anisotropie de $\mathbf{G}$ impose que F est un corps de nombres. Suivant [**79**, th.5 et 9.7], on sait que si $\mathbf{G}$ est de type B, C, ${}^{1,2}D$, E_7, E_8, F_4 ou G_2, alors $\mathbf{G}(F)$ est un groupe projectivement simple et donc $\mathbf{G}(F)/R = 1$. Il reste donc les groupes trialitaires ${}^{3,4}D_6$ et les groupes de type ${}^{1,2}E_6$, exclus par hypothèse.

Type ${}^{3,6}D_4$: la trivialité de $\mathbf{G}(F)/R$ est un résultat de Chernousov-Timoshenko [**16**, théorème 3.1]. □

8.2. Corps de dimension cohomologique 2

On suppose k parfait et de dimension cohomologique ≤ 2, c'est-à-dire que $H^i(k,A) = 0$ pour tout module galoisien fini A et pour tout $i \geq 3$. Selon la conjecture II de Serre [**86**, III.3.1], on a $H^1(k,\mathbf{G}) = 1$ pour tout k-groupe semi-simple simplement connexe $\mathbf{G}$. Ceci produit alors une classification des groupes semi-simples [**32**]. De façon plus précise, si $\mathbf{G}$ est un groupe semi-simple simplement connexe, on note $\mathbf{G}^{qd}$ sa forme quasi-déployée [**48**, 31.4] et μ son centre. On dispose alors de la classe de Tits $t_{\mathbf{G}} \in H^2(k,\mu)$ qui est un invariant de $\mathbf{G}$ [**48**, 31.6]. Si la conjecture II vaut pour k et pour $\mathbf{G}$, le groupe $\mathbf{G}$ est classifié par $\mathbf{G}^{qd}$ et $t_{\mathbf{G}}$, c'est-à-dire par sa forme quasi-déployée et sa classe de Tits.

Pour les groupes $\mathbf{SL}_1(D)$, la conjecture II signifie que $\mathrm{Nrd}(D^\times) = k^\times$, i.e. la norme réduite est surjective, ce qui est un théorème de Merkurjev-Suslin [**91**, 24.8]. Pour les groupes classiques (et de type G_2, F_4), la conjecture II a été démontrée par Bayer-Parimala [**3**] et on dispose de résultats partiels pour les autres groupes exceptionnels [**29**], [**12**]. Revenons au problème de Kneser-Tits.

THÉORÈME 8.4 (Yanchevskiĭ, 1975, [**39**] et [**38**, th. 1]). — *Le corps k est supposé parfait et de dimension cohomologique ≤ 2.*

1. *Si A/k est une algèbre simple centrale, alors $SK_1(A) = 0$.*
2. *Si $\mathbf{G}$ est un groupe semi-simple simplement connexe isotrope de type ${}^2A_n$, alors $W(k,\mathbf{G}) = 1$.*

Ce résultat a été étendu par le même auteur lorsque le corps k est virtuellement de dimension cohomologique ≤ 2, i.e. $cd(k(\sqrt{-1})) \leq 2$ [**108**, §3].

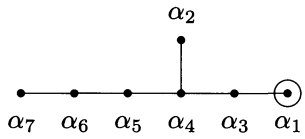
QUESTION 8.5. — *Le corps k étant comme ci-dessus, est-ce que $W(k, \mathbf{G}) = 1$ pour tout k-groupe $\mathbf{G}$ semi-simple simplement connexe presque simple et isotrope ?*

Plus généralement, est-ce que $\mathbf{G}(k)/R = 1$ pour tout k-groupe $\mathbf{G}$ semi-simple simplement connexe presque simple ?

Il ne reste alors ici qu'un seul cas pour le problème de Kneser-Tits.

THÉORÈME 8.6. — *Soit k un corps de caractéristique nulle de dimension cohomologique ≤ 2. Soit $\mathbf{G}/k$ un groupe semi-simple simple simplement connexe absolument presque k-simple et isotrope. On suppose que l'indice de Tits de $\mathbf{G}$ est distinct de*

$E_{7,1}^{66}$



Alors $W(k, \mathbf{G}) = 1$.

Démonstration. — Comme dans le cas des corps globaux, on peut supposer $\mathbf{G}$ de rang relatif un et faire une discussion cas par cas qui écarte d'emblée le type G_2 et le type ${}^1E_6$. Le type A est le théorème 8.4, les types B et C, ${}^{3,6}D_4$ et F_4 résultent du théorème 6.1. Sur k de dimension cohomologique 2, on sait qu'un groupe isotrope de type E_8 est déployé ; cela résulte de la conjecture II de Serre prouvée pour tous les autres groupes déployés [**29**], [**12**]. Il reste donc à traiter les types ${}^{1,2}D_n$, ${}^2E_6$ et E_7.

Type ${}^{1,2}D_n$: on sait que $\mathbf{G} = \mathbf{Spin}(A, \sigma)$ où A est une algèbre simple centrale de degré $2n$ et σ une involution orthogonale. On note $\mathbf{H}$ le sous-groupe de $\mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{G}_m$ formé des (a, x) satisfaisant $\mathrm{Nrd}(a) = x^2$. Suivant [**55**, prop. 8.3], $\mathbf{G}$ étant isotrope, on dispose d'un isomorphisme de groupes $\mathbf{H}(F)/R \cong \mathbf{G}(F)/R$ pour tout corps F/k. On est donc ramené à montrer que $\mathbf{H}(k)/R = 1$. On a une suite exacte $1 \to \mathbf{SL}_1(A) \to \mathbf{H} \to \mathbf{G}_m \to 1$. Suivant [**8**, appendix], cette suite induit une suite exacte

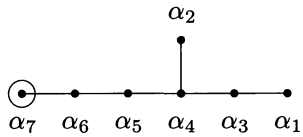
$$\mathbf{SL}_1(A)(k)/R \to \mathbf{H}(k)/R \to \mathbf{G}_m(k)/R \to 1.$$

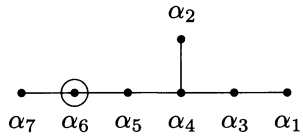
Le terme de gauche est nul suivant le théorème 8.4 et le terme de droite est trivialement nul. On conclut que $\mathbf{H}(k)/R = 1$.

Type ${}^2E_6$: si $\mathbf{G}$ est d'indice de Tits ${}^2E_{6,1}^{29}$, alors on applique le théorème 6.2. On peut donc supposer que $\mathbf{G}$ est d'indice de Tits ${}^2E_{6,1}^{35}$. Nous prétendons que cet indice est exclu. La classe de Tits $t_{\mathbf{G}} \in H^2(k, \mu_3)$ est représentée par une algèbre simple centrale A de degré 27, l'algèbre de Tits de $\mathbf{G}$. Suivant [**58**, table 8A page 156],

l'isotropie de $\mathbf{G}$ implique $\mathrm{ind}_k(A) = 1$ ou 3. Suivant [**29**, th. 4 et 9], le groupe $\mathbf{G}$ est de rang relatif ≥ 2, contradiction.

Type E_7 : excluant par hypothèse l'indice de Tits $E_{7,1}^{66}$, on peut supposer que $\mathbf{G}$ est d'indice de Tits [(2)]

$E_{7,1}^{78}$ 

ou $E_{7,1}^{48}$ 

Ces indices sont en fait exclus, et l'argument est le même que pour ${}^2E_6$. Notant A l'algèbre de Tits de $\mathbf{G}$, celle-ci est d'indice 1 ou 2 selon [**58**, table 8B page 166]. Alors $\mathbf{G}$ est de rang relatif ≥ 4 suivant [**29**, th. 4 et 10]. □

Sous une hypothèse additionnelle sur les k-algèbres simples centrales, on peut contrôler non seulement le groupe de Whitehead, mais aussi la R-équivalence suivant les investigations de Colliot-Thélène, Parimala et du rapporteur.

THÉORÈME 8.7 ([**19**, th. 4.3]). — *On suppose k de caractéristique nulle et de dimension cohomologique ≤ 2. On suppose que, pour toute extension finie k'/k et pour toute k'-algèbre simple centrale de période 2^α ou 3^β (i.e. l'exposant dans le groupe de Brauer), son indice est égal à sa période. Soit $\mathbf{G}$ un groupe semi-simple simplement connexe et absolument presque simple de type distinct de A_n et de E_8. Alors $\mathbf{G}$ est un groupe isotrope, est une variété k-rationnelle et $\mathbf{G}$ est W-trivial.*

THÉORÈME 8.8 ([**19**, th. 4.5]). — *Sous les hypothèses du théorème 8.7, soit $\mathbf{G}/k$ un groupe semi-simple simplement connexe sans facteurs de type E_8. Alors $\mathbf{G}(k)/R = 1$.*

Remarque 8.9. — En étant plus optimiste, on peut poser la même question que (8.5) en dimension cohomologique ≤ 3. Pour le cas $\mathbf{SL}_n(D)$, cette question est due à Suslin (voir [**18**]). Les contre-exemples de Platonov étant sur des corps de dimension cohomologique quatre, on ne peut certainement pas espérer plus.

8.3. Corps C_2

Nous nous intéressons maintenant au cas où k satisfait la propriété C_2, c'est-à-dire que, pour tout système $(f_1, ..., f_r)$ de polynômes homogènes à n variables, avec $n > \deg(f_1)^2 + \cdots + \deg(f_r)^2$, il existe $x = (x_1, \cdots, x_n) \in k^n \setminus \{0\}$ tel que $f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0$ [**69**, §5]. En particulier, toute k-forme quadratique de rang ≥ 5 est isotrope. La théorie de Tsen-Lang montre que les corps de fonctions de surfaces sur un corps algébriquement clos sont de classe C_2 (*ibid.*).

(2) Le second type avait été oublié dans la version distribuée.

Supposons k de caractéristique nulle. Suivant Merkurjev-Suslin, on sait alors que le corps k de classe C_2 est un corps de dimension cohomologique ≤ 2 [**86**, II.4.5].

La propriété C_2 est nettement plus forte que la propriété $\dim(k) \leq 2$. Tout d'abord, un corps p-adique n'est pas C_2 [**95**], même si toute forme quadratique de rang ≥ 5 est isotrope. Une autre classe de contre-exemples est celle construite par Merkurjev ; pour tout entier $n \geq 1$, il existe un corps de dimension cohomologique 2 avec une forme anisotrope de dimension $2n$ [**53**, th. 3].

Sous l'hypothèse C_2, pour toute extension finie k'/k, les k'-algèbres simples centrales de périodes 2^α ou 3^β sont d'indice égal à leur exposant (Artin, [**2**]). Les théorèmes 8.7 et 8.8 donnent donc une réponse complète au problème de Kneser-Tits dans ce cas.

8.4. Corps de fonctions de surfaces

On suppose que $k = k_0(X)$ est le corps de fonctions d'une surface sur un corps k_0 algébriquement clos (de caractéristique arbitraire), c'est un corps C_2. J. de Jong, X. He et J. Starr ont annoncé en mai 2007 la preuve complète de la conjecture II de Serre pour ces corps [**41**]. Ceci permet de s'affranchir du cas de E_8.

COROLLAIRE 8.10. — *On suppose que $k = k_0(X)$ comme ci-dessus. Soit $\mathbf{G}/k$ un groupe semi-simple simplement connexe presque simple.*

1. $\mathbf{G}(k)/R = 1$.
2. *Si $\mathbf{G}$ n'est pas de type A, alors $\mathbf{G}$ est isotrope, est une variété k-rationnelle et $\mathbf{G}$ est W-trivial.*

RÉFÉRENCES

[1] Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.É.S., 1963-1964, Schémas en groupes – (M. Demazure & A. Grothendieck, éds.), Lecture Notes in Math., vol. 151–153, Springer, 1970.

[2] M. ARTIN – Brauer-Severi varieties, in *Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981)*, *Lecture Notes in Math.* **917** (1982), p. 194–210.

[3] E. BAYER-FLUCKIGER & R. PARIMALA – Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension ≤ 2, *Invent. Math.* **122** (1995), p. 195–229.

[4] G. BERHUY – Finiteness of R-equivalence groups of some adjoint classical groups of type ${}^2D_3$, *J. Algebra* **309** (2007), p. 360–366.

[5] A. BOREL – *Linear algebraic groups*, 2e éd., Graduate Texts in Math., vol. 126, Springer, 1991.

[6] A. BOREL & J. TITS – Groupes réductifs, *Publ. Math. I.H.É.S.* **27** (1965), p. 55–150.

[7] ———, Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples, *Ann. of Math.* **97** (1973), p. 499–571.

[8] M. BOROVOI, B. KUNYAVSKIĬ & P. GILLE – Arithmetical birational invariants of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields, *J. Algebra* **276** (2004), p. 292–339.

[9] N. BOURBAKI – *Algèbre commutative, chapitres 5 à 7*, Masson, 1985, réimpression Springer, 2007.

[10] F. BRUHAT & J. TITS – Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. I.H.É.S.* **60** (1984), p. 197–376.

[11] B. CALMÈS – The group SK_2 of a biquaternion algebra, *J. reine angew. Math.* **605** (2007), p. 193–235.

[12] V. CHERNOUSOV – The kernel of the Rost invariant, Serre's conjecture II and the Hasse principle for quasi-split groups ${}^{3,6}D_4, E_6, E_7$, *Math. Ann.* **326** (2003), p. 297–330.

[13] V. CHERNOUSOV & A. MERKURJEV – R-equivalence and special unitary groups, *J. Algebra* **209** (1998), p. 175–198.

[14] ———, R-equivalence in spinor groups, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 509–534.

[15] V. CHERNOUSOV & V. PLATONOV – The rationality problem for semisimple group varieties, *J. reine angew. Math.* **504** (1998), p. 1–28.

[16] V. CHERNOUSOV & L. M. TIMOSHENKO – On the group of R-equivalence classes of semisimple groups over arithmetic fields, *Algebra i Analiz* **11** (1999), p. 191–221 ; traduction anglaise : *St. Petersburg Math. J.* **11** (2000), 1097–1121.

[17] C. CHEVALLEY – Sur certains groupes simples, *Tôhoku Math. J.* **7** (1955), p. 14–66.

[18] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – Quelques résultats de finitude pour le groupe SK_1 d'une algèbre de biquaternions, *K-Theory* **10** (1996), p. 31–48.

[19] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, P. GILLE & R. PARIMALA – Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields, *Duke Math. J.* **121** (2004), p. 285–341.

[20] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & J.-J. SANSUC – La R-équivalence sur les tores, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **10** (1977), p. 175–229.

[21] ———, Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications, *J. Algebra* **106** (1987), p. 148–205.

[22] ———, The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group), in *Algebraic groups and homogeneous spaces*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., 2007, p. 113–186.

[23] J. DIEUDONNÉ – *Sur les groupes classiques*, Hermann, 1973, 3e édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, VI, Actualités Scientifiques et Industrielles, n° 1040.

[24] P. DRAXL – SK_1 von Algebren über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen, *J. reine angew. Math.* **293/294** (1977), p. 116–142.

[25] ———, *Skew fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 81, Cambridge Univ. Press, 1983.

[26] S. GARIBALDI – Kneser-Tits for a rank 1 form of E_6 (after Veldkamp), *Compos. Math.* **143** (2007), p. 191–200.

[27] S. GARIBALDI & H. P. PETERSSON – Groups of outer type E_6 with trivial Tits algebras, *Transform. Groups* **12** (2007), p. 443–474.

[28] P. GILLE – La R-équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global, *Publ. Math. I.H.É.S.* **86** (1997), p. 199–235.

[29] ———, Cohomologie galoisienne des groupes quasi-déployés sur des corps de dimension cohomologique ≤ 2, *Compositio Math.* **125** (2001), p. 283–325.

[30] ———, Unipotent subgroups of reductive groups in characteristic $p > 0$, *Duke Math. J.* **114** (2002), p. 307–328.

[31] ———, Spécialisation de la R-équivalence pour les groupes réductifs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), p. 4465–4474.

[32] ———, Serre's conjecture II : a survey, à paraître dans les actes de la conférence « Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology » (2009), University of Hyderabad, *Developments in Mathematics*, Springer.

[33] P. GILLE & T. SZAMUELY – *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 101, Cambridge Univ. Press, 2006.

[34] A. GROTHENDIECK – Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I, *Publ. Math. I.H.É.S.* **20** (1964), p. 5–259.

[35] G. HARDER – Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen, *Invent. Math.* **4** (1967), p. 165–191.

[36] K. IWASAWA – Über die Einfachheit der speziellen projektiven Gruppen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **17** (1941), p. 57–59.

[37] N. JACOBSON – Some groups of transformations defined by Jordan algebras. II. Groups of type F_4, *J. reine angew. Math.* **204** (1960), p. 74–98.

[38] V. I. JANČEVSKIĬ – Simple algebras with involutions, and unitary groups, *Mat. Sb. (N.S.)* **93 (135)** (1974), p. 368–380, 487; traduction anglaise : *Sb. Math.* **22** (1974), 372–385.

[39] ———, Commutants of simple algebras with a surjective reduced norm, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **221** (1975), p. 1056–1058.

[40] ———, Reduced unitary K-theory. Applications to algebraic groups, *Mat. Sb. (N.S.)* **110 (152)** (1979), p. 579–596.

[41] A. J. DE JONG, X. HE & J. M. STARR – Families of rationally simply connected varieties over surfaces and torsors for semisimple groups, prépublication, 2008.

[42] B. KAHN – La conjecture de Milnor (d'après V. Voevodsky), Séminaire Bourbaki, vol. 1996/97, exposé n° 834, *Astérisque* **245** (1997), p. 379–418.

[43] ———, Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties, in *Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., 1999, p. 149–174.

[44] ———, Cohomological approaches to SK_1 and SK_2 of central simple central algebras, notes, `http://www.institut.math.jussieu.fr/~kahn/preprints/SK_i-talca.pdf`, 2002.

[45] B. KAHN & M. LEVINE – Motives of Azumaya algebras, prépublication, 2007.

[46] K. KATO & S. SAITO – Unramified class field theory of arithmetical surfaces, *Ann. of Math.* **118** (1983), p. 241–275.

[47] M. KNESER – Starke Approximation in algebraischen Gruppen. I, *J. reine angew. Math.* **218** (1965), p. 190–203.

[48] M.-A. KNUS, A. MERKURJEV, M. ROST & J.-P. TIGNOL – *The book of involutions*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 44, Amer. Math. Soc., 1998.

[49] Y. I. MANIN – *Cubic forms*, North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., 1986.

[50] B. MARGAUX – The structure of the group $\mathbf{G}(k[t])$: Variations on a theme of Soulé, à paraître dans *Algebra Number Theory*, 2009.

[51] C. MAZZA, V. VOEVODSKY & C. WEIBEL – *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, Amer. Math. Soc., 2006.

[52] A. MERKURJEV – Generic element in SK_1 for simple algebras, *K-Theory* **7** (1993), p. 1–3.

[53] ———, K-theory of simple algebras, in *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., 1995, p. 65–83.

[54] ———, The norm principle for algebraic groups, *Algebra i Analiz* **7** (1995), p. 77–105 ; traduction anglaise : *St. Petersburg Math. J.* **7** (1996), 236–264.

[55] ———, K-theory and algebraic groups, in *European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996)*, Progr. Math., vol. 169, Birkhäuser, 1998, p. 43–72.

[56] ———, Invariants of algebraic groups, *J. reine angew. Math.* **508** (1999), p. 127–156.

[57] ———, The group SK_1 for simple algebras, *K-Theory* **37** (2006), p. 311–319.

[58] A. MERKURJEV, I. A. PANIN & A. R. WADSWORTH – Index reduction formulas for twisted flag varieties. II, *K-Theory* **14** (1998), p. 101–196.

[59] J. S. MILNE – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton Univ. Press, 1980.

[60] A. P. MONASTYRNYĬ – Spinor quotient groups and R-equivalence, *Dokl. Akad. Nauk BSSR* **35** (1991), p. 9–13, 92.

[61] ———, Whitehead groups and the kernel of a universal covering, *Dokl. Akad. Nauk BSSR* **35** (1991), p. 969–974, 1052.

[62] A. P. MONASTYRNYĬ & V. I. YANCHEVSKIĬ – On the Whitehead groups and the Kneser-Tits conjecture for spinor groups, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **307** (1989), p. 31–35 ; traduction anglaise : *Soviet Math. Dokl.* **40** (1990), 23–27.

[63] ———, Whitehead groups of algebraic groups of classical type, and R-equivalence, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **314** (1990), p. 110–114 ; traduction anglaise : *Soviet Math. Dokl.* **42** (1991), 351–355.

[64] ———, Whitehead groups of spinor groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **54** (1990), p. 60–96, 221 ; traduction anglaise : *Math. USSR Izv.* **36** (1991), 61–100.

[65] ———, The Whitehead groups of algebraic groups and applications to some problems of algebraic group theory, in *Algebra and analysis (Irkutsk, 1989)*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 163, Amer. Math. Soc., 1995, p. 127–134.

[66] F. MOREL – An introduction to $\mathbb{A}^1$-homotopy theory, in *Contemporary developments in algebraic K-theory*, ICTP Lect. Notes, XV, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004, p. 357–441.

[67] F. MOREL & V. VOEVODSKY – $\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes, *Publ. Math. I.H.É.S.* **90** (1999), p. 45–143.

[68] H. NAGAO – On GL(2, $K[x]$), *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A* **10** (1959), p. 117–121.

[69] A. PFISTER – *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 217, Cambridge Univ. Press, 1995.

[70] V. PLATONOV – The problem of strong approximation and the Kneser-Tits hypothesis for algebraic groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **33** (1969), p. 1211–1219 ; traduction anglaise : *Math. USSR Izv.* **3** (1969), 1139–1147.

[71] ———, On the Tannaka-Artin problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **221** (1975), p. 1038–1041 ; traduction anglaise : *Soviet Math. Dokl.* **16** (1975), 468–471.

[72] ———, The Tannaka-Artin problem, and groups of projective conorms, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **222** (1975), p. 1299–1302.

[73] ———, On the problem of the rationality of spin varieties, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **248** (1979), p. 524–527 ; traduction anglaise : *Soviet Math. Dokl.* **20** (1979), 1027–1031.

[74] ———, Birational properties of the reduced Whitehead group, *AMS Translations* **154** (1992), p. 7–9.

[75] V. PLATONOV & A. RAPINCHUK – *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139, Academic Press Inc., 1994.

[76] V. PLATONOV & V. I. YANCHEVSKIĬ – Dieudonné's conjecture on the structure of unitary groups over a skew-field and Hermitian K-theory, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **48** (1984), p. 1266–1294.

[77] G. PRASAD – Strong approximation for semi-simple groups over function fields, *Ann. of Math.* **105** (1977), p. 553–572.

[78] ———, On the Kneser-Tits problem for triality forms, *Comment. Math. Helv.* **83** (2008), p. 913–925.

[79] G. PRASAD & M. S. RAGHUNATHAN – On the Kneser-Tits problem, *Comment. Math. Helv.* **60** (1985), p. 107–121.

[80] M. ROST – On the spinor norm and $A_0(X, K_1)$ for quadrics, prépublication `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rost/spinor.html`, 1988.

[81] ———, Chow groups with coefficients, *Doc. Math.* **1** (1996), p. 319–393.

[82] ———, On the basic correspondence of a splitting variety, prépublication `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rost/basic-corr.html`, 2007.

[83] D. J. SALTMAN – Retract rational fields and cyclic Galois extensions, *Israel J. Math.* **47** (1984), p. 165–215.

[84] W. SCHARLAU – *Quadratic and Hermitian forms*, Grund. Math. Wiss., vol. 270, Springer, 1985.

[85] J-P. SERRE – Arbres, amalgames, SL_2, *Astérisque* **46** (1977).

[86] ———, Cohomologie galoisienne, *Lecture Notes in Math.* **5** (1997).

[87] C. SOULÉ – Chevalley groups over polynomial rings, in *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 36, Cambridge Univ. Press, 1979, p. 359–367.

[88] T. A. SPRINGER & R. STEINBERG – Conjugacy classes, in *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69)*, Lecture Notes in Math., vol. 131, Springer, 1970, p. 167–266.

[89] R. STEINBERG – *Lectures on Chevalley groups, notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson*, Yale University, New Haven, Conn., 1968.

[90] A. SUSLIN – Algebraic K-theory and the norm-residue homomorphism, *Journal of Math. Sciences* **30** (1985), p. 2556–2611.

[91] ———, SK_1 of division algebras and Galois cohomology, in *Algebraic K-theory*, Adv. Soviet Math., vol. 4, Amer. Math. Soc., 1991, p. 75–99.

[92] ———, SK_1 of division algebras and Galois cohomology revisited, in *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XII*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 219, Amer. Math. Soc., 2006, p. 125–147.

[93] A. SUSLIN & S. JOUKHOVITSKI – Norm varieties, *J. Pure Appl. Algebra* **206** (2006), p. 245–276.

[94] R. G. SWAN – Higher algebraic K-theory, in *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., 1995, p. 247–293.

[95] G. TERJANIAN – Un contre-exemple à une conjecture d'Artin, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **262** (1966), p. A612.

[96] J. TITS – Algebraic and abstract simple groups, *Ann. of Math.* **80** (1964), p. 313–329.

[97] ———, Classification of algebraic semisimple groups, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, Amer. Math. Soc., 1966, p. 33–62.

[98] ———, Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps (d'après V. P. Platonov et al.), Séminaire Bourbaki, vol. 1976/77, exposé n° 505, *Lecture Notes in Math.* **677** (1978), p. 218–236.

[99] F. D. VELDKAMP – Unitary groups in projective octave planes, *Compositio Math.* **19** (1968), p. 213–258.

[100] V. VOEVODSKY – Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$-coefficients, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **98** (2003), p. 59–104.

[101] ———, Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$-coefficients, K-theory, Preprint Archives, No. 639, 2003.

[102] V. E. VOSKRESENSKIĬ – The reduced Whitehead group of a simple algebra, *Uspehi Mat. Nauk* **32** (1977), p. 247–248.

[103] ———, *Algebraic groups and their birational invariants*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 179, Amer. Math. Soc., 1998.

[104] A. R. WADSWORTH – Valuation theory on finite dimensional division algebras, in *Valuation theory and its applications, Vol. I (Saskatoon, SK, 1999)*, Fields Inst. Commun., vol. 32, Amer. Math. Soc., 2002, p. 385–449.

[105] S. WANG – On the commutator group of a simple algebra, *Amer. J. Math.* **72** (1950), p. 323–334.

[106] C. WEIBEL – Patching the norm residue isomorphism theorem, prépublication, 2007.

[107] A. WEIL – *Foundations of algebraic geometry*, Amer. Math. Soc., 1962.

[108] V. I. YANCHEVSKIĬ – Whitehead groups and groups of R-equivalence classes of linear algebraic groups of non-commutative classical type over some virtual fields, in *Algebraic groups and arithmetic*, Tata Inst. Fund. Res., 2004, p. 491–505.

Philippe GILLE

École normale supérieure
Département de Mathématiques et Applications
UMR CNRS 8553
45 rue d'Ulm
F-75230 Paris Cedex 05
E-mail : gille@ens.fr