Astérisque

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

Échanges d'intervalles et surfaces de translation

Astérisque, tome 326 (2009), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 996, p. 387-409

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__387_0>

© Société mathématique de France, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Juin 2008
60e année, 2007–2008, n° 996, p. 387 à 409

ÉCHANGES D'INTERVALLES ET SURFACES DE TRANSLATION

par **Jean-Christophe YOCCOZ**

1. INTRODUCTION

Soit M une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$ et ω une 1-forme holomorphe sur M, non identiquement nulle. Notons Σ l'ensemble des zéros de ω. Les primitives locales de ω constituent un atlas sur $M - \Sigma$ dont les changements de carte sont localement des translations. Inversement, un tel atlas munit $M - \Sigma$ d'une structure complexe (qui se prolonge à M) et d'une 1-forme holomorphe pour cette structure. On appelle *surface de translation* cette structure géométrique. Elle définit naturellement sur $M - \Sigma$ une forme d'aire et un champ de vecteurs vertical (s'écrivant $\frac{\partial}{\partial y}$ dans les cartes).

Pour analyser la dynamique du flot vertical, on peut considérer l'application de premier retour sur un segment horizontal. L'application ainsi définie est un *échange d'intervalles* : une transformation biunivoque qui est localement une translation à l'exception d'un nombre fini de discontinuités.

Le cas du genre 1 est classique et bien connu : le champ de vecteurs est un champ constant, en général irrationnel : la transformation de premier retour à une ou deux discontinuités. Les échanges d'intervalles ayant une seule discontinuité sont simplement des rotations sur le cercle après identification des extrémités du segment.

Voici presque 30 ans, Rauzy [**51**] et Veech [**52**] ont défini pour les échanges d'intervalles un algorithme qui généralise l'algorithme de fraction continue si important pour étudier les propriétés diophantiennes des nombres irrationnels. La définition et quelques propriétés de cet outil fondamental sont rappelées au § 2. Veech s'en est servi pour démontrer de nombreuses propriétés profondes des échanges d'intervalles : cf. [**53**], [**54**], [**55**]. Une variante très utile de l'algorithme a été mise au point par Zorich [**59**].

Une des propriétés très surprenantes de presque tout échange d'intervalles (quand la combinatoire n'est pas celle d'une rotation) est le mélange faible : d'abord démontré par Katok-Stepin pour 3 intervalles (ou plus généralement dans le cas de genre 1), elle a ensuite été obtenue par Veech sous une hypothèse un peu moins restrictive sur la combinatoire, avant d'être prouvée en toute généralité par Avila-Forni. Ce résultat est présenté au § 4.

Auparavant, nous rappelons au § 3 quelques propriétés des surfaces de translation, leurs relations avec les échanges d'intervalles, et introduisons les espaces de modules $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ pour les surfaces de translation d'aire 1. Cet espace de modules est naturellement muni d'une action de $SL(2, \mathbb{R})$; on appelle flot de Teichmüller la restriction de cette action au sous-groupe diagonal. La relation entre flot de Teichmüller et algorithme de Rauzy-Veech est la même qu'entre flot géodésique sur la surface modulaire et algorithme usuel de fraction continue (le cas de genre un) : l'un s'obtient comme suspension de l'extension naturelle de l'autre.

Pour définir les espaces de modules $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$, on a fixé les multiplicités, $\kappa_1 - 1, \ldots, \kappa_s - 1$ des zéros $A_1 \ldots A_s$ de la 1-forme ω. Les espaces de modules ainsi définis ne sont pas toujours connexes, mais ils ont au plus 3 composantes connexes. Kontsevich et Zorich ont complètement classifié ces composantes au moyen de deux notions : hyperellipticité et parité du spin. Leur travail est présenté succinctement au § 6.

Au-dessus du flot de Teichmüller sur chaque composante de $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ est défini un cocycle, dit de Kontsevich-Zorich, dont les propriétés gouvernent dans une large mesure la dynamique de presque tout échange d'intervalles. Comme le flot de Teichmüller est ergodique sur chaque composante d'après un résultat fondamental de Masur et Veech, on peut en calculer les exposants de Lyapunov. La non-nullité de ceux-ci avait été démontrée par Forni et fait l'objet d'un séminaire Bourbaki antérieur [**37**]. Confirmant une conjecture de Zorich, Avila et Viana ont démontré la simplicité des exposants de Lyapunov pour le cocycle de Kontsevich-Zorich. Leur résultat est présenté au § 5.

Parce que le flot de Teichmüller s'intègre dans une action de $SL(2, \mathbb{R})$, son ergodicité implique qu'il est mélangeant. Avila, Gouezel et moi-même avons montré qu'il est même exponentiellement mélangeant. Cela implique une propriété de trou spectral et est discuté au § 7.

Les échanges d'intervalles, les surfaces de translation et leurs espaces de modules ont fait l'objet de très nombreuses recherches dans la décennie écoulée et les résultats présentés ci-après ne représentent qu'une partie de cette activité. J'ai choisi de présenter des résultats se rattachant plutôt à la théorie des systèmes dynamiques. Parmi les nombreux résultats importants non abordés par cet exposé, citons

– la détermination par Eskin et Okunkov du volume des espaces de modules [**12**] ;

- l'estimation asymptotique du nombre de connexion de selles par Eskin-Masur [**10**] et Eskin-Masur-Zorich [**11**] ;
- les travaux de Hubert, Lanneau, Lelièvre, Möller, Schmidt sur les groupes de Veech, stabilisateurs des points de l'espace des modules pour l'action de $SL(2,\mathbb{R})$ [**19**], [**20, 21**] [**22, 23**], [**24**] [**25**] à [**29**] ;
- la détermination indépendamment par McMullen [**42**] à [**45**] et Calta [**8**] des ensembles fermés transitifs pour l'action de $SL(2,\mathbb{R})$ sur les espaces de modules en genre 2, et en particulier la classification des orbites fermées de cette action (surfaces de Veech) ;
- ...

Le lecteur pourra consulter avec profit le très complet exposé de Zorich [**62**] pour une introduction à ces questions.

2. L'ALGORITHME DE RAUZY-VEECH-ZORICH POUR LES ÉCHANGES D'INTERVALLES

2.1. Échanges d'intervalles

Un échange d'intervalles est une transformation biunivoque d'un intervalle borné dans lui-même qui est localement une translation à l'exception d'un nombre fini de singularités.

Dans l'optique de l'algorithme décrit ci-dessous, il est préférable de nommer les intervalles de continuité. On se donne donc un alphabet fini $\mathcal{A}$, avec $d := \#\mathcal{A} \geq 2$, et deux bijections π_t, π_b de $\mathcal{A}$ sur $\{1,\dots,d\}$ qui indiquent l'ordre dans lequel sont rangés les sous-intervalles dans le domaine et dans l'image de la transformation. On supposera toujours que cette *donnée combinatoire* $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ est *irréductible* :

$$\pi_t^{-1}(\{1\dots k\} \neq \pi_b^{-1}(\{1,\dots k\}), \quad \forall 1 \leq k < d.$$

Sinon, la transformation considérée est une juxtaposition de deux transformations plus simples. Etant donné un *vecteur de longueurs* $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$, on pose $I = (0, \sum \lambda_\alpha)$ et

$$I_\alpha^\varepsilon = \Big(\sum_{\pi_\varepsilon\beta<\pi_\varepsilon\alpha} \lambda_\beta, \sum_{\pi_\varepsilon\beta\leq\pi_\varepsilon\alpha} \lambda_\beta \Big)$$

pour $\varepsilon = t, b$ et $\alpha \in \mathcal{A}$.

On définit une matrice antisymétrique $\Omega = \Omega(\pi)$ par

$$\Omega_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \pi_t\alpha < \pi_t\beta, \pi_b\alpha > \pi_b\beta, \\ -1 & \text{si} \quad \pi_t\alpha > \pi_t\beta, \pi_b\alpha < \pi_b\beta, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

puis l'échange d'intervalles $T = T_{\pi,\lambda}$ par

$$T(x) = x + \sum_{\beta} \Omega_{\alpha\beta}\lambda_\beta, \quad x \in I_\alpha^t$$

de sorte que $T(I_\alpha^t) = I_\alpha^b$.

Les singularités de T (resp. de T^{-1}) sont les $d-1$ points de $I - \cup I_\alpha^t$ (resp. de $I - \cup I_\alpha^b$) et sont notées $u_1^t < \cdots < u_{d-1}^t$ (resp. $u_1^b < \cdots < u_{d-1}^b$). Une *connexion* est une relation $T^m(u_i^b) = u_j^t (m \geq 0, 1 \leq i, j < d)$ qui correspond à une orbite de T joignant deux singularités. Keane a montré [**32**] qu'un échange d'intervalles sans connexion est minimal, et qu'un échange d'intervalles dont les coordonnées du vecteur de longueurs sont rationnellement indépendantes est sans connexion.

Pour $d = 2$, un échange d'intervalles est sans connexion si et seulement s'il correspond à une rotation irrationnelle.

2.2. Le pas élémentaire de l'algorithme de Rauzy-Veech

Soit $T = T_{\pi,\lambda}$ un échange d'intervalles. Notons α_t, α_b les lettres telles que $\pi_t(\alpha_t) = \pi_b(\alpha_b) = d$.

Supposons T sans connexion. On a donc en particulier $u_{d-1}^t \neq u_{d-1}^b$. On pose $\widehat{I} = (0, \max(u_{d-1}^t, u_{d-1}^b))$ et on note $\widehat{T}$ l'application de premier retour dans $\widehat{I}$.

L'application $\widehat{T}$ est un échange d'intervalles sans connexion $T_{\hat{\pi},\hat{\lambda}}$ (sur le même alphabet $\mathcal{A}$). Si $u_{d-1}^t > u_{d-1}^b$, on a

$$\hat{\pi} = (\hat{\pi}_t, \hat{\pi}_b) =: R_t(\pi)$$

avec $\hat{\pi}_t = \pi_t$ et

$$\hat{\pi}_b\alpha = \begin{cases} \pi_b\alpha & \text{si} \quad \pi_b\alpha \leq \pi_b\alpha_t, \\ \pi_b\alpha + 1 & \text{si} \quad \pi_b\alpha_t < \pi_b\alpha < d, \\ \pi_b\alpha_t + 1 & \text{si} \quad \pi_b\alpha = d, \end{cases}$$

ainsi que

$$\begin{cases} \widehat{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha & \alpha \neq \alpha_t \\ \widehat{\lambda}_{\alpha_t} = \lambda_{\alpha_t} - \lambda_{\alpha_b}. \end{cases}$$

Les formules pour $u_{d-1}^b > u_{d-1}^t$ sont analogues, en échangeant b et t.

2.3. Diagrammes de Rauzy

Une *classe de Rauzy* sur un alphabet $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide de données combinatoires irréductibles qui est stable par R_t et R_b et minimal (pour l'inclusion) parmi les ensembles ayant cette propriété. Le *diagramme de Rauzy* associé est le graphe dont les sommets sont les éléments de la classe et les flèches (de type top ou bottom) joignent un sommet π à $R_t\pi$ et $R_b\pi$. Comme R_t et R_b sont biunivoques, chaque sommet est aussi extrémité d'une flèche de chaque type. Le *gagnant* d'une

flèche de type top (resp. bottom) issue de π est la lettre α_t telle que $\pi_t\alpha_t = d$ (resp. la lettre α_b telle que $\pi_b\alpha_b = d$), le *perdant* est la lettre α_b (resp. α_t). À une flèche γ de type top (resp. bottom) issue d'un sommet π est associée la matrice $B_\gamma \in SL(\mathbb{Z}^{\mathcal{A}})$ définie par

$$B_\gamma = 1 + E_{\alpha_b\alpha_t}$$

(resp. $B_\gamma = 1 + E_{\alpha_t\alpha_b}$), où $E_{\alpha\beta}$ désigne la matrice élémentaire dont le seul coefficient non nul, égal à 1, se trouve en position $\alpha\beta$. À un chemin $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_l$ dans le diagramme de Rauzy est associé le produit $B_\gamma = B_{\gamma_l} \dots B_{\gamma_1}$.

2.4. Les algorithmes de Rauzy-Veech et Zorich

Soit $T = T^{(0)} = T_{\pi^{(0)},\lambda^{(0)}}$ un échange d'intervalles sans connexion sur un intervalle $I = I^{(0)}$. Comme l'échange d'intervalles $\widehat{T} = T^{(1)}$ sur $\widehat{I} = I^{(1)}$ obtenu par le pas élémentaire décrit en 2.2. est sans connexion, on peut itérer le processus et construire une suite d'échanges d'intervalles $T^{(n)}$ opérant sur une suite décroissante d'intervalles $I^{(n)}$. On a $\bigcap_{n\geq 0} I^{(n)} = \phi$. On note $T^{(n)} = T_{\pi^{(n)},\lambda^{(n)}}$, et $\gamma(n, n+1)$ la flèche de $\pi^{(n)}$ vers $\pi^{(n+1)}$ (de type top ou bottom suivant qu'on a appliqué R_t ou R_b). Pour $m < n$, on note $\gamma(m, n)$ le chemin composé des $\gamma(l, l+1), m \leq l < n$. Les vecteurs de longueurs vérifient

$$\lambda^{(m)} = {}^tB_{\gamma(m,n)}\lambda^{(n)},$$
$$\Omega(\pi^{(n)})\lambda^{(n)} = B_{\gamma(m,n)}\Omega(\pi^{(m)})\lambda^{(m)}.$$

Pour chaque donnée combinatoire π, la matrice antisymétrique $\Omega(\pi)$ définit une forme symplectique sur l'image $H(\pi) := Im\Omega(\pi)$. La matrice $B_{\gamma(m,n)}$ définit alors un isomorphisme symplectique de $H(\pi^{(m)})$ sur $H(\pi^{(n)})$.

Suivant Zorich, il est souvent préférable d'accélérer l'algorithme ci-dessus, en regroupant en une seule étape les pas consécutifs qui correspondent à des flèches du même type. Lorsque $d = 2$, on retrouve ainsi l'algorithme d'Euclide, c'est-à-dire l'algorithme de fraction continue usuel.

2.5. Dynamique des algorithmes

Soit $\mathcal{R}$ une classe de Rauzy sur un alphabet $\mathcal{A}$. Le pas élémentaire de l'algorithme de Rauzy-Veech :

$$(\pi, \lambda) \mapsto (\widehat{\pi}, \widehat{\lambda})$$

(cf. 2.2) induit une application de $\mathcal{R} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}})$ dans lui-même notée Q_{RV}. Cette application admet une unique mesure invariante absolument continue [**53**] ; cette mesure est conservative et ergodique mais sa masse est infinie, ce qui ne permet pas de déployer tout l'arsenal de la théorie ergodique. C'est pourquoi il est souvent préférable de considérer l'application Q_Z (sur le même espace $\mathcal{R} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}})$), induite par la version

accélérée à la Zorich de l'algorithme. En effet, l'application Q_Z admet à nouveau une unique mesure invariante, absolument continue [**59**] ; mais cette mesure (ergodique) est maintenant finie.

3. LES SURFACES DE TRANSLATION ET LEURS ESPACES DE MODULES

3.1. Surfaces de translation

Soit M une surface topologique orientable compacte de genre $g > 0, \Sigma = \{A_1, \ldots, A_s\}$ une partie finie non vide de M et $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_s)$ un s-uplet de nombres entiers strictement positifs tel que $\Sigma(\kappa_i - 1) = 2g - 2$.

Une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ) est un atlas maximal de cartes sur $M - \Sigma$ par des ouverts de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ qui vérifie

(i) les changements de cartes sont localement des translations ;

(ii) pour chaque $1 \leq i \leq s$, il existe un voisinage V_i de A_i, un voisinage W_i de $0 \in \mathbb{C}$ et un revêtement ramifié d'ordre κ_i

$$p_i : (V_i, A_i) \to (W_i, 0)$$

tel que les restrictions injectives de p_i soient des cartes de l'atlas.

De façon équivalente, on se donne une structure complexe sur M, et une 1-forme holomorphe ω ne s'annulant pas sur $M - \Sigma$ et admettant en A_i un zéro d'ordre $\kappa_i - 1$; les cartes de l'atlas sont obtenues par intégration de ω. Une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ) induit canoniquement

- une orientation sur M ;
- une forme d'aire, ne s'annulant pas sur $M - \Sigma$;
- un champ de vecteurs vertical $\frac{\partial}{\partial y}$ et un champ de vecteurs horizontal $\frac{\partial}{\partial x}$ sur $M - \Sigma$.

3.2. L'espace de Teichmüller

L'*espace de Teichmüller* $Q(M, \Sigma, \kappa)$ est l'ensemble des structures de surface de translation sur (M, Σ, κ) modulo l'action du groupe des homéomorphismes de M qui sont isotopes à l'identité rel. Σ. L'intégration de la 1-forme holomorphe (donc fermée) associée à une structure de surface de translation définit une *application de période* :

$$\Theta : Q(M, \Sigma, \kappa) \to \text{ Hom } (H_1(M, \Sigma, \mathbb{Z}), \mathbb{R}^2) = H^1(M, \Sigma, \mathbb{C}).$$

On peut munir $Q(M, \Sigma, \kappa)$ d'une topologie qui fait de Θ un homéomorphisme local. L'application Θ permet de transférer sur $Q(M, \Sigma, \kappa)$ une structure de variété complexe (de dimension $d := 2g + s - 1$) et une forme volume canonique.

Si ζ est une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ) et $g \in GL(2, \mathbb{R})$, l'atlas obtenu en composant par g les cartes de ζ est encore une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ). On en déduit une action à gauche de $GL(2, \mathbb{R})$ sur $Q(M, \Sigma, \kappa)$.

3.3. L'espace des modules et le flot de Teichmüller

Le *groupe modulaire* $\mathrm{Mod}(M, \Sigma)$ des classes d'isotopie rel. Σ agit sur l'espace de Teichmüller $Q(M, \Sigma, \kappa)$. Cette action préserve le volume canonique et commute avec l'action de $GL(2, \mathbb{R})$. L'espace quotient est l'*espace des modules* et est noté $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$. Comme l'action de $\mathrm{Mod}(M, \Sigma)$ est proprement discontinue mais en général pas libre, $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ est un orbifold. L'espace des modules est muni d'une action de $GL(2, \mathbb{R})$.

Une surface de translation est automatiquement munie d'une forme d'aire, dont l'intégrale sur la surface définit une fonction sur $Q(M, \Sigma, \kappa)$ et $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$. On désignera par $Q^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ (resp. $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$) l'hypersurface correspondant à une aire totale égale à 1. Ces hypersurfaces héritent d'une mesure canonique, et sont invariantes par l'action de $SL(2, \mathbb{R})$, action qui préserve cette mesure canonique.

Le flot de Teichmüller est la restriction au sous-groupe diagonal $\mathrm{diag}(e^t, e^{-t})$ de l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$. Le résultat suivant est fondamental :

THÉORÈME 3.1 (Masur [**40**], Veech [**53**]). — *La masse totale de $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ est finie. Le flot de Teichmüller est ergodique, et même mélangeant, sur chaque composante connexe de $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$.*

Les composantes connexes de $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ ont été déterminées par Kontsevich et Zorich (voir § 6 ci-dessous) ; il y en a entre 1 et 3 suivant les valeurs de g, κ.

Pour $g = s = 1$, on retrouve des objets très classiques : l'espace de Teichmüller s'identifie à $GL(2, \mathbb{R})$, l'espace des modules à $GL(2, \mathbb{R})/GL(2, \mathbb{Z})$, l'espace des modules normalisé à $SL(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{Z})$ et le flot de Teichmüller au flot géodésique sur la surface modulaire.

3.4. Les surfaces de translation comme suspensions d'échanges d'intervalles

Soit ζ une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ). Soit S un segment horizontal. L'application de premier retour sur S du flot engendré par le champ de vecteurs vertical $\frac{\partial}{\partial y}$ est un échange d'intervalles ; cependant, si S ne rencontre pas toutes les orbites du flot, cet échange d'intervalles ne représente pas toute la dynamique du flot. Par ailleurs, comme le montre déjà l'exemple d'un flot irrrationnel sur un tore, un choix arbitraire de S peut créer un échange d'intervalles inutilement compliqué. Ceci conduit à la définition suivante : un segment horizontal S est *bon* si

(i) son extrémité gauche est $A_1 \in \Sigma$;
(ii) l'intérieur de S rencontre toute connexion verticale (un segment vertical dont les deux extrémités, éventuellement confondues, appartiennent à Σ) ;
(iii) son extrémité droite soit est un point de Σ, soit est reliée à un point de Σ par un segment vertical qui ne rencontre pas l'intérieur de S.

Lorsque la surface de translation ne possède pas de connexion verticale, ou ne possède pas de connexion horizontale, il existe toujours de bons segments horizontaux.

Comment reconstruire une surface de translation à partir de l'application de retour du flot vertical sur un bon segment horizontal ?

Soit $T = T_{\pi,\lambda}$ un échange d'intervalles ; on se donne aussi un *vecteur de suspension* $\tau = (\tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ vérifiant

$$(1) \qquad v_k^t := \sum_{\pi_t \alpha \leq k} \tau_\alpha > 0, \quad v_k^b := \sum_{\pi_b \alpha \leq k} \tau_\alpha < 0, \quad 1 \leq k < d.$$

Dans les cas favorables, les deux lignes polygonales joignant dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ le point 0 au point $\sum_\alpha \lambda_\alpha + i \sum_\alpha \tau_\alpha$ via les points $u_k^t + iv_k^t, 1 \leq k < d$ (resp. $u_k^b + iv_k^b, 1 \leq k < d$) délimitent un polygone et on obtient une surface de translation en identifiant les côtés parallèles de ce polygone. Une construction dite de « zippered rectangles » due à Veech permet d'aboutir au même résultat dans tous les cas.

Notons $M_{\pi,\lambda,\tau}$ la surface de translation ainsi construite ; l'intervalle I sur lequel T opère devient un bon segment horizontal sur $M_{\pi,\lambda,\tau}$ et T est l'application de retour du flot vertical sur I. Inversement, soit S un bon segment horizontal sur une surface de translation $(M, \Sigma, \kappa, \zeta)$; écrivons l'application de premier retour sur S comme un échange d'intervalles $T_{\pi,\lambda}$; il existe un unique choix de vecteur de suspension τ tel que $(M, \Sigma, \kappa, \zeta)$ soit isomorphe à $M_{\pi,\lambda,\tau}$ (l'isomorphisme étant l'identité sur S).

L'ensemble Σ pour $M_{\pi,\lambda,\tau}$ est constitué des images des sommets du polygone. Le genre g de $M_{\pi,\lambda,\tau}$, le cardinal s de Σ et le cardinal d de $\mathcal{A}$ sont reliés par la formule $d = 2g + s - 1$. Les formes linéaires $\lambda_\alpha + i\tau_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$, forment une base de $H^1(M, \Sigma, \mathbb{C})$; l'image $H(\pi)$ de $\Omega(\pi)$ s'identifie alors à l'homologie absolue de M.

3.5. Flot de Teichmüller et algorithme de Rauzy-Veech

Le flot de Teichmüller est, à un ensemble de codimension un près et à un revêtement fini près, obtenu par suspension de l'algorithme de Rauzy-Veech, ou plutôt de son extension naturelle.

Sur la surface de translation $M_{\pi,\lambda,\tau}$ du numéro précédent est en effet privilégiée une séparatrice horizontale sortante issue du point A_1 de Σ, correspondant à l'extrémité gauche de l'intervalle I sur lequel opère $T_{\pi,\lambda}$; cette extrémité est préservée au cours de l'algorithme de Rauzy-Veech. Ce marquage de $M_{\pi,\lambda,\tau}$ correspond à un revêtement $\widetilde{\mathcal{M}}(M, \Sigma, \kappa)$ de degré κ_1.

Soit $\mathcal{R}$ une classe de Rauzy, $\mathcal{D}$ le diagramme associé. Pour chaque élément π de $\mathcal{R}$, notons $W(\pi)$ l'ensemble des triplets (π, λ, τ) qui vérifient (1), $\lambda_\alpha > 0$ pour $\alpha \in A$ et

$$1 \leq \sum_a \lambda_\alpha \leq 1 + \min(\lambda_{\alpha_t}, \lambda_{\alpha_b})$$

avec $\pi_t \alpha_t = \pi_b \alpha_b = d$. Pour chaque flèche $\gamma : \pi \to \pi'$ de $\mathcal{D}$, on recolle une partie des bords de $W(\pi)$ et $W(\pi')$ en identifiant (π, λ, τ) à $(\pi', {}^t B_\gamma^{-1}\lambda, {}^t B_\gamma^{-1}\tau)$ (car ces deux données produisent des surfaces de translations isomorphes). Le flot de Teichmüller dans $W(\pi)$ se traduit par

$$(\pi, \lambda, \tau) \to (\pi, e^t\lambda, e^{-t}\tau)$$

donc peut être effectivement vu comme suspension de l'extension naturelle $\widehat{Q}_{RV}$ de Q_{RV}, version projective de l'identification ci-dessus. À chaque classe de Rauzy est associée ainsi une composante connexe d'un espace de modules $\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}(M, \Sigma, k)$.

4. MÉLANGE FAIBLE POUR LES ÉCHANGES D'INTERVALLES

4.1. Ergodicité, unique ergodicité, mélange faible

Un échange d'intervalles sans connexion est minimal. Lorsque $d = 2$, une rotation minimale du cercle est automatiquement ergodique et même uniquement ergodique.

Ce n'est plus le cas pour des échanges d'intervalle pour lesquels la surface obtenue par suspension est de genre ≥ 2. Il existe des échanges de 4 intervalles qui sont sans connexion mais pas ergodiques (pour la mesure de Lebesgue) [**34**], [**33**].

Cependant, Masur [**40**] et Veech [**53**] ont montré que presque tout échange d'intervalles est uniquement ergodique ; plus précisément, pour toute donnée combinatoire π, et pour Lebesgue presque tout $\lambda, T_{\pi,\lambda}$ est uniquement ergodique.

À l'inverse, Katok a montré [**30**] qu'un échange d'intervalles n'est jamais mélangeant. Rappelons qu'une transformation T préservant une mesure m est mélangeante si on a

$$\lim_{n \to +\infty} m(T^{-n}(A) \cap B) = m(A)m(B)$$

pour toutes parties boréliennes A, B. L'ergodicité équivaut à

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n (m(T^{-k}(A) \cap B) - m(A)m(B)) = 0.$$

Une notion intermédiaire et importante entre ergodicité et mélange est le mélange faible, qui requiert

$$\lim \frac{1}{n} \sum_1^n |m(T^{-k}(A) \cap B) - m(A)m(B)| = 0.$$

Une définition équivalente est que $T \times T$ est ergodique pour $m \times m$. Une autre définition équivalente est que l'opérateur induit par T sur $L^2(m)$ n'a pas de fonction propre non constante.

4.2. Résultats

Bien sûr, une rotation n'est jamais faiblement mélangeante, les fonctions exponentielles $\exp 2\pi i n x$ étant fonctions propres.

On dira qu'une donnée combinatoire π est rotationnelle si $\pi_t(\alpha) - \pi_b(\alpha) \mod d$ est indépendant de α.

Du point de vue du mélange faible, les rotations sont exceptionnelles, comme le montrent les résultats qui suivent (chacun améliorant le précédent) :

THÉORÈME 4.1 (Katok-Stepin [**31**]). — *Si le genre de la surface obtenue par suspension est* 1, *mais* π *n'est pas rotationnelle, presque tout* $T_{\pi,\lambda}$ *est faiblement mélangeant.*

THÉORÈME 4.2 (Veech [**54**]). — *Si* $(1, \ldots, 1) \notin H(\pi)$, *presque tout* $T_{\pi,\lambda}$ *est faiblement mélangeant.*

THÉORÈME 4.3 (Avila-Forni [**2**]). — *Si* π *n'est pas rotationnelle, presque tout* $T_{\pi,\lambda}$ *est faiblement mélangeant.*

Avila et Forni ont aussi obtenu la version en temps continu.

THÉORÈME 4.4 (Avila-Forni [**2**]). — *Pour toutes données* (M, Σ, κ) *avec* $g \geq 2$, *le flot vertical de presque toute structure de surface de translation dans* $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ *est faiblement mélangeant.*

4.3. Quelques mots sur les démonstrations

Nous nous restreignons au cas des échanges d'intervalles. Soit $\mathcal{R}$ une classe de Rauzy. Veech montre [**54**] qu'il existe un ouvert non vide $U \subset \mathcal{R} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}})$ possédant la propriété suivante. Supposons qu'un échange d'intervalles $T_{\pi,\lambda}$ agissant sur un intervalle I, un d-uplet $h \in \mathbb{T}^{\mathcal{A}}$ et une fonction non constante $\varphi : I \to T$ vérifient

$$\varphi(Tx) = \varphi(x) + h_\alpha, x \in I_\alpha^t.$$

Alors, on a

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ Q_{RV}^n(\pi,\lambda) \in U}} \|B_{\gamma(n)} h\|_{\mathbb{T}^{\mathcal{A}}} = 0.$$

Ici, $\gamma(n)$ désigne le chemin dans le diagramme de Rauzy associé à $\mathcal{R}$ qui correspond aux n premières étapes de l'algorithme de Rauzy-Veech pour $T_{\pi,\lambda}$; comme la matrice $B_{\gamma(n)}$ est à coefficients entiers, elle opère sur $\mathbb{T}^{\mathcal{A}}$ et $\|x\|_{\mathbb{T}^{\mathcal{A}}}$ désigne la distance à l'origine sur ce tore.

Ce critère de Veech, appliqué à la diagonale de $\mathbb{T}^{\mathcal{A}}$, permet d'obtenir facilement le théorème de Katok-Stepin et celui de Veech. Il est aussi à la base de la démonstration d'Avila-Forni, mais la preuve dans ce cas est considérablement plus difficile.

5. EXPOSANTS DE LYAPUNOV DU COCYCLE DE ZORICH

5.1. Les cocycles de Zorich et Kontsevich-Zorich

Soient M, Σ, κ comme dans la section 3.1. Sur le produit $Q^{(1)}(M, \Sigma, \kappa) \times H^1(M, \mathbb{R})$ de l'espace de Teichmüller (pour les structures de surfaces de translation d'aire 1) par le premier groupe de cohomologie, considérons le flot

$$(t, \zeta, \eta) \mapsto (\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.\zeta, \eta)$$

avec $t \in \mathbb{R}, \zeta \in Q^{(1)}(M, \Sigma, \kappa), \eta \in H^1(M, \mathbb{R})$.

Le groupe modulaire Mod (M, Σ) agit naturellement sur $Q^{(1)}(M, \Sigma, \kappa) \times H^1(M, \mathbb{R})$ et cette action commute au flot considéré. En passant au quotient, on obtient un flot linéaire sur un fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$, qui se projette sur le flot de Teichmüller sur $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$. Le cocycle déterminant ce flot est appelé cocycle de Kontsevich-Zorich [**35**].

La version discrète de ce cocycle, qui est plus concrète, avait auparavant été introduite par Zorich [**59**], [**60**]. Soit $\mathcal{R}$ une classe de Rauzy sur un alphabet $\mathcal{A}$. Sur le fibré vectoriel

$$\bigcup_{\pi \in \mathcal{R}} \{\pi\} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}) \times H(\pi)$$

au-dessus du domaine $\mathcal{A} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{a})$ de Q_{RV}, considérons le cocycle

$$(\pi, \lambda, v) \mapsto (Q_{RV}(\pi, \lambda), B_\gamma v),$$

où γ est la flèche du diagramme de Rauzy associé à $\mathcal{R}$ qui correspond au pas élémentaire de l'algorithme à partir de (π, λ). On a vu que la mesure naturelle invariante par Q_{RV} est de masse infinie. Il est donc préférable d'accélérer le temps de l'algorithme et de considérer plutôt

$$(\pi, \lambda, v) \mapsto (Q_Z(\pi, \lambda), B_{\widehat{\gamma}} v),$$

où le chemin $\widehat{\gamma}$ est la concaténation des flèches associées aux pas de l'algorithme de Rauzy-Veech constituant un seul pas de l'algorithme de Zorich. Ce produit fibré au-dessus de Q_Z est appelé cocycle de Zorich.

On a rappelé que le flot de Teichmüller s'obtient, à revêtement fini près et à un ensemble de codimension un près, comme suspension de l'extension naturelle de l'algorithme de Rauzy-Veech ; les cocycles de Kontsevich-Zorich et de Zorich se correspondent par suspension. Leurs propriétés dynamiques sont donc étroitement reliées, puisque seul un reparamétrage du temps les différencie.

5.2. Exposants de Lyapunov

Considérons une composante connexe $\mathscr{C}$ d'un espace de modules $\mathscr{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$. La restriction du flot de Teichmüller à $\mathscr{C}$ est ergodique (et même mélangeante) pour la mesure canonique, qui est de masse totale finie. Le théorème d'Oseledets garantit donc l'existence d'exposants de Lyapunov

$$\theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq \theta_{2g}$$

pour le cocycle de Kontsevich-Zorich.

Le caractère symplectique de ce cocycle implique qu'on a $\theta_i + \theta_{2g+1-i} = 0$ pour $1 \leq i \leq 2g$.

Le résultat suivant a fait l'objet d'un séminaire Bourbaki [**37**] :

THÉORÈME 5.1 (Forni [**15**]). — *Le cocycle de Kontsevich-Zorich est hyperbolique : on a* $\theta_g > 0$.

Un résultat plus précis, conjecturé par Zorich, a ensuite été obtenu par Avila et Viana :

THÉORÈME 5.2 (Avila-Viana [**4**]). — *Les exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich sont simples : on a*

$$\theta_1 > \cdots > \theta_g > \theta_{g+1} = -\theta_g > \cdots > \theta_{2g} = -\theta_1.$$

Il est facile de voir que $\theta_1 = 1$. L'inégalité stricte $\theta_1 > \theta_2$ (qui équivaut à l'hyperbolicité du flot de Teichmüller) est plus simple et avait été obtenue auparavant par Veech [**56**].

Kontsevich [**35**] a par ailleurs établi une formule pour la somme $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_g$ des exposants de Lyapunov positifs, qui correspond au taux de dilatation maximal des sous-espaces lagrangiens dans $H^1(M, \mathbb{R})$.

Les exposants de Lyapunov pour le cocyle de Zorich sont proportionnels à ceux du cocycle de Kontsevich-Zorich, donc vérifient les mêmes conclusions (à part $\theta_1 = 1$!).

5.3. Conséquences

Les résultats qui suivent ont été découverts numériquement par Zorich [**60**], [**61**], qui a aussi montré comment les déduire des théorèmes (à l'époque encore conjecturaux) de Forni et Avila-Viana.

Soit ζ une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ), générique pour la mesure canonique sur $\mathcal{Q}(M, \Sigma, \kappa)$. Il existe alors des sous-espaces

$$\{0\} = E_0 \subset E_1(\zeta) \subset \cdots \subset E_g(\zeta) \subset H_1(M, \mathbb{R})$$

avec $\dim E_i(\zeta) = i$ qui ont la propriété suivante. Pour $T > 0$, soit $\gamma(T)$ un lacet obtenu en complétant un segment horizontal (pour la métrique plate définie par ζ) de longueur T par un chemin de longueur bornée (indépendante de T) ; on a

$$\limsup_{T \to +\infty} \frac{\log \operatorname{dist}([\gamma(T)], E_i(\zeta))}{\log T} = \theta_{i+1}, \quad 0 \leq i < g,$$

et

$$\sup_T \operatorname{dist}([\gamma(T)], E_g(\zeta)) < +\infty,$$

où $[\gamma(T)]$ est la classe de $\gamma(T)$ dans $H_1(M, \mathbb{R})$.

La version discrète de ce phénomène est la suivante. Soit $T = T_{\pi,\lambda}$ un échange d'intervalles, le vecteur de longueurs λ étant générique pour la mesure de Lebesgue. Considérons la fonction φ à valeurs dans $\mathbb{Z}^{\mathcal{A}}$ qui vaut e_α sur I_α^t, $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ désignant la base canonique de $\mathbb{Z}^{\mathcal{A}}$. Les sommes de Birkhoff

$$S_n \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ T^i$$

vérifient alors la propriété suivante. Pour tout x, on a

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\log \operatorname{dist}(S_n \varphi(x), E_i(\pi, \lambda))}{\log n} = \theta_{i+1}, \quad 0 \leq i < g$$

et

$$\sup_n \operatorname{dist}(S_n \varphi(x), E_g(\pi, \lambda)) < +\infty,$$

où $E_0 = \{0\} \subset E_1(\pi, \lambda) \subset \cdots \subset E_g(\pi, \lambda) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ sont des sous-espaces avec $\dim E_i(\pi, \lambda) = i$.

5.4. Éléments de la preuve du théorème d'Avila-Viana

La simplicité des exposants de Lyapunov a déjà une assez longue histoire. Dans le cadre probabiliste d'un produit de matrices aléatoires, on citera le travail pionnier de Furstenberg [**16**] et les résultats de Guivarc'h-Raugi [**18**] et Goldsheid-Margulis [**17**] et, dans un cadre déterministe, ceux de Ledrappier [**38**], Bonatti-Gomez-Mont-Viana [**6**], Bonatti-Viana [**7**].

La simplicité des exposants de Lyapunov est obtenue à partir de deux ingrédients :

- le caractère chaotique du flot de Teichmüller ou, de façon équivalente (cf. § 3.5), des applications Q_Z ou Q_{RV} ; cette propriété a été établie par Veech.
- deux propriétés du cocycle de Zorich appelées « torsion » et « pincement » que nous présentons ci-dessous.

La propriété de *torsion* du cocycle de Zorich est la suivante. Soit $\mathcal{R}$ une classe de Rauzy, π un élément de R, F un sous-espace vectoriel de $H(\pi)$ de dimension $k, F_1, \ldots, F_l$ des sous-espaces vectoriels de $H(\pi)$ de codimension k. Il existe alors un lacet γ basé en π dans le diagramme de Rauzy associé à $\mathcal{R}$ tel que le sous-espace $B_\gamma F$ soit transverse à chacun des F_i.

Pour définir la propriété de *pincement*, introduisons sur $H(\pi)$ un produit scalaire auxiliaire ; pour un lacet γ basé en π, notons $\sigma_1^2(\gamma) \geq \sigma_2^2(\gamma) \geq \ldots$ les valeurs propres, comptées avec multiplicité de l'opérateur $B(\gamma)^* B(\gamma)$. On demande que, pour toute constante $C > 1$ et tout $\pi \in R$, il existe un lacet γ basé en π tel qu'on ait $\sigma_i(\gamma) > C\sigma_{i+1}(\gamma)$ pour $0 < i < \dim H(\pi)$.

Avila et Viana établissent ces propriétés du cocycle de Zorich par récurrence sur le nombre d'intervalles échangés. Pour $d = 2$, ces propriétés résultent de propriétés élémentaires de l'algorithme classique de fraction continue. Dans l'étape de récurrence, on cherche à établir les propriétés de torsion et de pincement pour un diagramme de Rauzy $\mathcal{D}$ à partir des mêmes propriétés pour les diagrammes plus simples.

La relation entre un diagramme de Rauzy $\mathcal{D}$ et des diagrammes plus simples s'exprime par l'opération de *réduction*. Supposons que l'un des intervalles I_α^t soit de longueur négligeable ; la lettre α ne peut alors être gagnante. On efface donc dans $\mathcal{D}$ toutes les flèches dont le gagnant est α. Les composantes connexes du graphe restant sont, à quelques décorations près, des diagrammes de Rauzy $\mathcal{D}'$ dont l'alphabet est contenu dans $\mathcal{A} - \{\alpha\}$. Au niveau de $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$, cela correspond à des compactifications partielles de l'espace des modules par des espaces de modules plus simples. Le genre g' du diagramme de Rauzy $\mathcal{D}'$ est toujours au plus égal au genre g de $\mathcal{D}$. L'opération de réduction est facile à contrôler lorsque $g' = g$, plus délicate lorsque $g' < g$.

6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES MODULES

Les composantes connexes des espaces de modules $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ ont été classifiées par M. Kontsevich et A. Zorich [**36**]. Nous décrivons dans cette section leur résultat. Comme les surfaces considérées sont toujours connexes, il suffit de traiter le cas où tous les κ_i sont > 1, ce que nous supposons dans cette section.

6.1. Composantes hyperelliptiques

Soient d un entier ≥ 4 et $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré $d+1$ dont les racines sont simples. En compactifiant la surface $\{w^2 = P(z)\}$ par un ou deux points à l'infini suivant que d est pair ou impair, on obtient une surface de Riemann de genre $g = [\frac{d}{2}]$. De plus, la 1-forme holomorphe $\omega = \frac{dz}{w}$ ne s'annule pas à distance finie ; lorsque d est pair, ω a un zéro d'ordre $d-2 = 2g-2$ au point à l'infini ; lorsque d est impair, ω a un zéro d'ordre $\frac{d-3}{2} = g-1$ en chacun des deux points à l'infini. Les surfaces de translation ainsi définies correspondent donc aux cas

- $d = 2g, s = \#\Sigma = 1, \kappa_1 = 2g-1$;
- $d = 2g+1, s = \#\Sigma = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = g$.

Pour $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ les polynômes $P(z)$ et $a^{-2}P(az+b)$ produisent des surfaces de translation isomorphes. On dispose donc de d paramètres complexes indépendants ; c'est aussi la dimension (complexe) des espaces de modules pertinents. Pour chaque entier $d \geq 4$, les surfaces de translation ainsi construites décrivent une composante connexe de l'espace des modules approprié, qu'on appellera hyperelliptique.

Les cas $d = 4$ et $d = 5$ correspondent aux deux choix pour κ en genre 2 : un zéro double ou deux zéros simples pour la 1-forme ω. Dans ces deux cas, l'espace des modules est connexe et donc égal à sa composante hyperelliptique. Cela peut se voir par exemple en considérant les classes de Rauzy avec $d = \#\mathcal{A} \in \{4, 5\}$. En fait, de façon générale, les classes de Rauzy correspondant aux composantes hyperelliptiques sont celles qui contiennent la donnée combinatoire $\pi^* = (\pi_t, \pi_b)$ telle que $\pi_t(\alpha) + \pi_b(\alpha) = d+1$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$.

6.2. Parité du spin

On suppose ici que tous les κ_i sont impairs ≥ 3. Une structure de surface de translation sur (M, Σ, k) définit une structure complexe sur M et un diviseur canonique $\Sigma(\kappa_i - 1)A_i$ pour cette structure. Comme les κ_i sont supposés impairs, on peut former le diviseur $D = \frac{1}{2}\Sigma(\kappa_i - 1)A_i$ et définir ainsi une structure spin ; la parité de cette structure est celle de la dimension de l'espace des fonctions méromorphes f telles que $(f) + D \geq 0$.

On renvoie à [Mi], [At], [Mu] pour plus d'informations. La parité de la structure spin est invariante par déformation et est donc un invariant de chaque composante connexe de l'espace des modules (lorsque tous les κ_i sont impairs !). On peut d'ailleurs la calculer comme suit : on choisit une base symplectique $a_i, b_i, 1 \leq i \leq g$ pour $H_1(M, \mathbb{Z})$. Pour chaque lacet γ sur $M - \Sigma$, ((M, Σ, κ) étant muni d'une structure de surface de translation), on définit l'indice $\operatorname{ind}(\gamma)$ comme le degré mod 2 de l'application de S^1 dans S^1 qui associe à t l'angle entre $\dot{\gamma}(t)$ et la direction horizontale en $\gamma(t)$. Il ne

dépend que de la classe de γ dans $H_1(M,\mathbb{Z})$ car les κ_i sont impairs. La parité de la structure spin est alors donnée par

$$\sum_{i=1}^{g}(\mathrm{ind}\,(a_i)+1)(\mathrm{ind}\,(b_i)+1) \mod 2.$$

6.3. Classification

Le résultat de Kontsevich et Zorich est que hyperellipticité et parité du spin classifient les composantes. Plus précisément :

1. Lorsque l'un des κ_i est pair, l'espace des modules $\mathcal{M}(M,\Sigma,k)$ est connexe sauf si $s=2,\kappa_1=\kappa_2=g$ pair ≥ 4 ; il y a alors une composante hyperelliptique et une composante non hyperelliptique.
2. Si tous les κ_i sont impairs, avec $s\geq 3$ ou $s=2,\kappa_1\neq\kappa_2$, il y a deux composantes, distinguées par la parité du spin.
3. Lorsque $s=1,g\geq 4$ ou $s=2,\kappa_1=\kappa_2,g$ impair ≥ 5, il y a 3 composantes, l'une hyperelliptique et les deux autres non hyperelliptiques, distinguées par la parité du spin.
4. Lorsque $g=2,s=1$, l'espace des modules est connexe. Lorsque $g=3$ et $s=1$ ou $s=2,\kappa_1=\kappa_2=3$, il y a deux composantes, l'une hyperelliptique, l'autre pas (celle-ci est de spin impair).

6.4. Méthode de démonstration

La confluence des zéros de la 1-forme organise, pour chaque genre g, les différents espaces de modules comme les strates d'une stratification. La strate minimale est alors celle pour laquelle $s=1$: la 1-forme a un seul zéro de multiplicité $2g-2$.

Kontsevich et Zorich ramènent l'analyse des strates supérieures à celle de la strate minimale en prouvant le résultat suivant : pour toute strate S', et toute composante connexe C de la strate minimale, il existe une et une seule composante de S' dont l'adhérence contienne C.

Reste à classifier, pour chaque genre g, les composantes de la strate minimale. Cela se fait par récurrence sur g. Étant donnée une surface de translation avec un seul zéro A_1 de multiplicité $2g-2$, une procédure locale d'abord décrite dans [**11**] permet d'attacher une anse : on dédouble A_1 en deux zéros A_1',A_1'' (de multiplicités k_1',k_1''), on fend la surface suivant le segment joignant ces deux zéros et on recolle les deux côtés de la fente aux deux extrémités d'un cylindre. On obtient ainsi une surface de genre $g+1$ avec un seul point marqué (le recollement du cylindre ayant identifiéò A_1' et A_1'') de multiplicité maximale $2g$. La parité du spin de la surface obtenue dépend de la parité de k_1'.

Cette construction permet de montrer qu'il y a au moins autant de composantes connexes qu'annoncées dans la section 6.3. Pour voir qu'il n'y en a pas plus, on procède à nouveau par récurrence sur g et il faut cette fois « arracher » une anse, ce qui se fait en présentant la surface comme suspension d'un échange d'intervalles dont la donnée combinatoire a des propriétés appropriées.

7. MÉLANGE EXPONENTIEL DU FLOT DE TEICHMÜLLER

7.1. Soit $\mathscr{C}$ une composante connexe d'un espace de modules $\mathscr{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$. Rappelons que $\mathscr{C}$ est muni d'une mesure canonique, de masse totale finie, préservée par l'action du groupe $SL(2, \mathbb{R})$. Notons $L_0^2(\mathscr{C})$ l'espace des fonctions de carré intégrable et de moyenne nulle sur $\mathscr{C}$. On dispose donc d'une représentation unitaire $\rho = \rho_{\mathscr{C}}$ de $SL(2, \mathbb{R})$ dans $L_0^2(\mathscr{C})$.

L'ergodicité du flot de Teichmüller, démontrée par Masur et Veech (cf. 3.3), implique l'ergodicité de l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathscr{C}$, et celle-ci signifie que ρ ne contient pas la représentation triviale. L'examen des représentations unitaires irréductibles de $SL(2, \mathbb{R})$ permet alors de conclure que le flot de Teichmüller est mélangeant, c'est-à-dire qu'on a

$$\lim_{t \to \infty} \int \varphi \circ g^t \cdot \psi = 0$$

pour tous $\varphi, \psi \in L_0^2\ (\mathscr{C})$, (g^t) désignant le flot de Teichmüller.

L'ergodicité de l'action de $SL(2, \mathbb{R})$, c'est l'absence d'un vecteur invariant dans $L_0^2(\mathscr{C})$. On dit que ρ a un *trou spectral* si la propriété plus forte suivante est vérifiée : il existe des éléments $g_1 \dots g_N$ de $SL(2, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout vecteur unitaire v de $L_0^2(\mathscr{C})$, on ait

$$\sup \|g_i v - v\| \geq \varepsilon.$$

La propriété de trou spectral est équivalente à une propriété de la décomposition de ρ en représentations unitaires irréductibles. Rappelons qu'outre la représentation triviale, celles-ci se répartissent suivant Bargmann en série discrète, principale et complémentaire. C'est cette dernière qui nous intéresse ; elle est paramétrée par un réel $s \in (0, 1)$, l'espace de Hilbert étant donnée par

$$H_s = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \|f\|^2 := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)\bar{f}(y)}{|x-y|^{1-s}} dxdy < +\infty\}$$

et l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f(x) = (cx+d)^{-1-s} f\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big).$$

La propriété de trou spectral pour ρ est équivalente à la propriété suivante : il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'aucune représentation de la série complémentaire avec $1 - \varepsilon < s < 1$ n'intervienne dans la décomposition de ρ.

Il se trouve que la propriété de trou spectral est équivalente à une propriété dynamique, le mélange exponentiel pour le flot de Teichmüller. Cette dernière propriété sighifie qu'il existe $\delta > 0$ tel qu'on ait

$$\int \varphi \circ g^t \cdot \psi \leq C(\varphi, \psi) e^{-\delta t} \tag{2}$$

pour $t \geq 0$ et φ, ψ de classe C^∞ à support compact et de moyenne nulle sur $\mathscr{C}$.

THÉORÈME 7.1 ([**3**]). — *Le flot de Teichmüller est exponentiellement mélangeant pour toute composante $\mathscr{C}$ de tout espace de modules $\mathscr{M}^{(1)}(M, \Sigma, k)$.*

L'inégalité (2) est en fait valable pour une classe bien plus large que C^∞ à support compact : la régularité Hölder suffit, avec une condition de croissance à l'infini.

7.2. Le mélange exponentiel est caractéristique des systèmes dynamiques les plus chaotiques. C'est par exemple une propriété classique des difféomorphismes d'Anosov du tore $\mathbb{T}^n$ préservant la mesure de Lebesgue. On sait depuis Veech [**56**] que le flot de Teichmüller est hyperbolique (cela équivaut à l'inégalité $\theta_1 > \theta_2$ de 5.2). Pour obtenir le mélange exponentiel du flot de Teichmüller, il y a par rapport au cas des difféomorphismes d'Anosov deux difficultés :

- on a affaire à un flot plutôt qu'à un difféomorphisme ;
- défaut d'uniformité et de compacité.

Que la première difficulté soit sérieuse apparaît dès qu'on observe qu'une suspension en temps constant d'un difféomorphisme d'Anosov ne peut être mélangeante. C'est Dolgopyat [Do] qui a le premier développé des outils permettant de montrer le mélange exponentiel pour certains flots d'Anosov. Baladi et Vallée [**5**] ont développé ces techniques dans un cadre assez proche de celui du flot de Teichmüller, et ces techniques sont adaptées dans l'article [**3**].

7.3. La maîtrise des problèmes d'uniformité et de compacité repose sur une estimation « diophantienne » que nous présentons ci-dessous. Fixons un diagramme de Rauzy $\mathscr{D}$ et un sommet π de $\mathscr{D}$. Munissons l'ensemble $\{T_{\pi,\lambda}, \sum \lambda_\alpha = 1\}$ de la mesure de Lebesgue normalisée en probabilité. À chaque $T \in \Delta_\pi$ sans connexion, on associe (cf. 2.4) un chemin γ^T dans $\mathscr{D}$ issu de π et une suite $(T^{(n)})$ d'échanges d'intervalles qui sont les applications de premier retour de T sur une suite décroissante d'intervalles $(I^{(n)})$. Notons $Q^{(n)}$ le plus grand temps de retour de T dans $I^{(n)}$. Pour chaque entier n, notons n^+ le plus petit entier (dépendant de T) tel que tous les coefficients de la matrice $B_{\gamma(n,n^+)}$ soient strictement positifs.

THÉORÈME 7.2 ([**3**]). — *Il existe des constantes $c > 0, \Theta > 0$, ne dépendant que de $\mathcal{D}$, telles que l'inégalité suivante soit vérifiée : pour tout chemin fini γ_0 dans $\mathcal{D}$ issu de π (de longueur n) et toute constante $A \geq 2$, on a*

$$\mathbb{P}(Q^{(n^+)} \geq AQ^{(n)} | \gamma^T(0,n) = \gamma_0) \leq C(\log A)^{\Theta} A^{-1}.$$

La démonstration utilise comme dans [**4**] (cf. § 5.4) une récurrence sur le nombre d'intervalles via des opérations de réduction.

On notera que de telles conditions diophantiennes apparaissent dans [**39**], où les résultats fondamentaux de Forni [**14**] sur l'équation cohomologique sont précisés ; mais l'estimation de mesure de [**39**] est bien plus faible que l'estimation ci-dessus.

RÉFÉRENCES

[1] M. F. ATIYAH – Riemann surfaces and spin structures, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **4** (1971), p. 47–62.

[2] A. AVILA & G. FORNI – Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows, *Ann. of Math.* **165** (2007), p. 637–664.

[3] A. AVILA, S. GOUËZEL & J.-C. YOCCOZ – Exponential mixing for the Teichmüller flow, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **104** (2006), p. 143–211.

[4] A. AVILA & M. VIANA – Simplicity of Lyapunov spectra : proof of the Zorich-Kontsevich conjecture, *Acta Math.* **198** (2007), p. 1–56.

[5] V. BALADI & B. VALLÉE – Exponential decay of correlations for surface semi-flows without finite Markov partitions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), p. 865–874.

[6] C. BONATTI, X. GÓMEZ-MONT & M. VIANA – Généricité d'exposants de Lyapunov non-nuls pour des produits déterministes de matrices, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **20** (2003), p. 579–624.

[7] C. BONATTI & M. VIANA – Lyapunov exponents with multiplicity 1 for deterministic products of matrices, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24** (2004), p. 1295–1330.

[8] K. CALTA – Veech surfaces and complete periodicity in genus two, *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), p. 871–908.

[9] D. DOLGOPYAT – On decay of correlations in Anosov flows, *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 357–390.

[10] A. ESKIN & H. MASUR – Asymptotic formulas on flat surfaces, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **21** (2001), p. 443–478.

[11] A. ESKIN, H. MASUR & A. ZORICH – Moduli spaces of abelian differentials : the principal boundary, counting problems, and the Siegel-Veech constants, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **97** (2003), p. 61–179.

[12] A. ESKIN & A. OKOUNKOV – Asymptotics of numbers of branched coverings of a torus and volumes of moduli spaces of holomorphic differentials, *Invent. Math.* **145** (2001), p. 59–103.

[13] A. ESKIN, A. OKOUNKOV & R. PANDHARIPANDE – The theta characteristic of a branched covering, prépublication arXiv:math.AG/0312186.

[14] G. FORNI – Solutions of the cohomological equation for area-preserving flows on compact surfaces of higher genus, *Ann. of Math.* **146** (1997), p. 295–344.

[15] ———, Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus, *Ann. of Math.* **155** (2002), p. 1–103.

[16] H. FURSTENBERG – Noncommuting random products, *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), p. 377–428.

[17] I. Y. GOL'DSHEĬD & G. A. MARGULIS – Lyapunov exponents of a product of random matrices, *Uspekhi Mat. Nauk* **44** (1989), p. 13–60.

[18] Y. GUIVARC'H & A. RAUGI – Products of random matrices : convergence theorems, in *Random matrices and their applications (Brunswick, Maine, 1984)*, Contemp. Math., vol. 50, Amer. Math. Soc., 1986, p. 31–54.

[19] P. HUBERT & E. LANNEAU – Veech groups without parabolic elements, *Duke Math. J.* **133** (2006), p. 335–346.

[20] P. HUBERT, E. LANNEAU & M. MOLLER – The Arnoux-Yoccoz Teichmüller disc, prépublication arXiv:math/0611655.

[21] ———, Completely periodic directions and orbit closures of many pseudo-Anosov Teichmüller discs in $q(1,1,1,1)$, prépublication arXiv:0707.0738.

[22] P. HUBERT & S. LELIÈVRE – Noncongruence subgroups in $\mathscr{H}(2)$, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), p. 47–64.

[23] ———, Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathscr{H}(2)$, *Israel J. Math.* **151** (2006), p. 281–321.

[24] P. HUBERT, H. MASUR, T. A. SCHMIDT & A. ZORICH – Problems on billiards, flat surfaces and translation surfaces, in *Problems on mapping class groups and related topics*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 74, Amer. Math. Soc., 2006, p. 233–243.

[25] P. HUBERT & T. A. SCHMIDT – Veech groups and polygonal coverings, *J. Geom. Phys.* **35** (2000), p. 75–91.

[26] ———, Invariants of translation surfaces, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **51** (2001), p. 461–495.

[27] ———, Infinitely generated Veech groups, *Duke Math. J.* **123** (2004), p. 49–69.

[28] ———, Geometry of infinitely generated Veech groups, *Conform. Geom. Dyn.* **10** (2006), p. 1–20.

[29] ———, An introduction to Veech surfaces, in *Handbook of dynamical systems. Vol. 1B*, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006, p. 501–526.

[30] A. KATOK – Interval exchange transformations and some special flows are not mixing, *Israel J. Math.* **35** (1980), p. 301–310.

[31] A. KATOK & A. M. STEPIN – Approximations in ergodic theory, *Uspehi Mat. Nauk* **22** (1967), p. 81–106.

[32] M. KEANE – Interval exchange transformations, *Math. Z.* **141** (1975), p. 25–31.

[33] ———, Non-ergodic interval exchange transformations, *Israel J. Math.* **26** (1977), p. 188–196.

[34] H. B. KEYNES & D. NEWTON – A "minimal", non-uniquely ergodic interval exchange transformation, *Math. Z.* **148** (1976), p. 101–105.

[35] M. KONTSEVICH – Lyapunov exponents and Hodge theory, in *The mathematical beauty of physics (Saclay, 1996)*, Adv. Ser. Math. Phys., vol. 24, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997, p. 318–332.

[36] M. KONTSEVICH & A. ZORICH – Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 631–678.

[37] R. KRIKORIAN – Déviations de moyennes ergodiques, flots de Teichmüller et cocycle de Kontsevich-Zorich (d'après Forni, Kontsevich, Zorich...), Séminaire Bourbaki, vol. 2003/04, exposé n° 927, *Astérisque* **299** (2005), p. 59–93.

[38] F. LEDRAPPIER – Positivity of the exponent for stationary sequences of matrices, in *Lyapunov exponents (Bremen, 1984)*, Lecture Notes in Math., vol. 1186, Springer, 1986, p. 56–73.

[39] S. MARMI, P. MOUSSA & J.-C. YOCCOZ – The cohomological equation for Roth-type interval exchange maps, *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), p. 823–872.

[40] H. MASUR – Interval exchange transformations and measured foliations, *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 169–200.

[41] C. T. MCMULLEN – Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), p. 857–885.

[42] ———, Teichmüller geodesics of infinite complexity, *Acta Math.* **191** (2003), p. 191–223.

[43] ———, Teichmüller curves in genus two : discriminant and spin, *Math. Ann.* **333** (2005), p. 87–130.

[44] ———, Teichmüller curves in genus two : the decagon and beyond, *J. reine angew. Math.* **582** (2005), p. 173–199.

[45] ———, Prym varieties and Teichmüller curves, *Duke Math. J.* **133** (2006), p. 569–590.

[46] ———, Teichmüller curves in genus two : torsion divisors and ratios of sines, *Invent. Math.* **165** (2006), p. 651–672.

[47] ———, Dynamics of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ over moduli space in genus two, *Ann. of Math.* **165** (2007), p. 397–456.

[48] J. MILNOR – Remarks concerning spin manifolds, in *Differential and Combinatorial Topology (in Honor of Marston Morse)*, Princeton, 1995.

[49] A. NOGUEIRA & D. RUDOLPH – Topological weak-mixing of interval exchange maps, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **17** (1997), p. 1183–1209.

[50] V. I. OSELEDETS – A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** (1968), p. 197–231.

[51] G. RAUZY – Échanges d'intervalles et transformations induites, *Acta Arith.* **34** (1979), p. 315–328.

[52] W. A. VEECH – Interval exchange transformations, *J. Analyse Math.* **33** (1978), p. 222–272.

[53] ———, Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps, *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 201–242.

[54] ———, The metric theory of interval exchange transformations. I. Generic spectral properties, *Amer. J. Math.* **106** (1984), p. 1331–1359.

[55] ———, The metric theory of interval exchange transformations. II. Approximation by primitive interval exchanges, *Amer. J. Math.* **106** (1984), p. 1361–1387.

[56] ———, The Teichmüller geodesic flow, *Ann. of Math.* **124** (1986), p. 441–530.

[57] J.-C. YOCCOZ – Continued fraction algorithms for interval exchange maps : an introduction, in *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, Springer, 2006, p. 401–435.

[58] ———, Échanges d'intervalles, cours au Collège de France, `http://www.college-de-france.fr/default/EN/all/equ_dif`.

[59] A. ZORICH – Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **46** (1996), p. 325–370.

[60] ———, Deviation for interval exchange transformations, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **17** (1997), p. 1477–1499.

[61] ———, How do the leaves of a closed 1-form wind around a surface ?, in *Pseudoperiodic topology*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 197, Amer. Math. Soc., 1999, p. 135–178.

[62] ———, Flat surfaces, in *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, Springer, 2006, p. 437–583.

Jean-Christophe YOCCOZ

Collège de France
3, rue d'Ulm
F-75231 Paris Cedex 05
E-mail : `jean-c.yoccoz@college-de-france.fr`