

Astérisque

PIERRE CARTIER

Groupoïdes de Lie et leurs algébroïdes

Astérisque, tome 326 (2009), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 987, p. 165-196

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__165_0>

© Société mathématique de France, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GROUPOÏDES DE LIE ET LEURS ALGÈBROÏDES

par Pierre CARTIER

INTRODUCTION

Pourquoi des groupoïdes et des algèbroïdes, aux noms si laids ? La première apparition des groupoïdes est due à Brandt [3], et se rapporte à des problèmes d'arithmétique non-commutative. Si K est un corps de nombres algébriques, de degré fini sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, on appelle ordre dans K tout sous-anneau $\mathcal{O}$, engendrant K comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, et de type fini comme $\mathbb{Z}$ -module. Il existe un plus grand ordre $\mathcal{O}_K$, et les idéaux (fractionnaires) pour $\mathcal{O}_K$ forment un groupe multiplicatif, découvert par Kummer et Dedekind. Lorsque K est un corps non-commutatif (ou même plus généralement une algèbre simple sur $\mathbb{Q}$), de degré fini sur $\mathbb{Q}$, la définition d'un ordre demeure inchangée, et il existe des ordres maximaux. Les idéaux par rapport à l'un de ces ordres maximaux forment encore un groupe multiplicatif. Mais il existe plusieurs ordres maximaux, et la structure multiplicative des idéaux, pour tenir compte de la multiplicité des ordres maximaux, s'exprime par une espèce de groupe à plusieurs unités, et à multiplication associative partiellement définie, un *groupoïde*.

Cette structure exotique ne reçut guère d'attention jusque vers 1950. Après l'invention des catégories, on remarqua qu'un groupoïde est une (petite) catégorie dont toutes les flèches sont inversibles, et qu'un groupoïde à un seul objet est un groupe. Les foncteurs entre groupoïdes généralisent les homomorphismes entre groupes, mais dans le monde des catégories, il faut distinguer les isomorphismes (*stricto sensu*) des équivalences (dites faibles après Moerdijk [27]). On montre facilement qu'un groupoïde transitif⁽¹⁾ est faiblement équivalent à un groupe, mais ceci est trompeur.

⁽¹⁾ Où tous les objets sont isomorphes.

Vu la signification épistémologique des catégories, codifiant les objets d'une structure (groupes, variétés, etc.) les objets apparaissent isolés, et pour chaque couple d'objets x, y d'une catégorie $\mathcal{C}$, on a l'ensemble $\mathcal{C}(x, y)$ des flèches de x vers y . La définition d'un foncteur se fait aussi objet par objet. Pour aborder les problèmes de variation de structures, par exemple les diverses structures complexes sur une variété réelle, il faut « souder » les objets. Du coup, une catégorie $\mathcal{C}$ est formée de deux ensembles $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ correspondant aux objets et aux flèches respectivement, et la structure d'une catégorie est définie par des applications entre des ensembles construits par produits fibrés à partir de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$. Alors, on peut enrichir $\mathcal{C}$ en munissant $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ de diverses structures (topologiques, différentielles, etc.).

Le premier mathématicien à suivre cette direction fut Charles Ehresmann (vers 1950) suivi de ses élèves André Haefliger et Jean Pradines. Ehresmann était un géomètre et il voulait construire des groupoïdes géométriques pour étudier les espaces fibrés, les revêtements et les feuilletages. Un peu plus tard, Alain Connes [5] introduisit l'algèbre non-commutative de convolution d'un groupoïde, et ceci conduisit à considérer l'espace des feuilles d'un feuilletage comme un espace non-commutatif.

Un problème récurrent est l'étude d'espaces trop singuliers pour être des variétés, comme on en rencontre dans les problèmes de variation de structures : « orbifolds », variétés transverses, espace de feuilles d'un feuilletage... On s'est peu à peu aperçu que la classification de tels espaces se fait au moyen de groupoïdes topologiques (ou différentiables) définis à équivalence faible près. Déjà, pour définir une variété, il faut se donner un atlas (qui peut se représenter par un groupoïde) et lui permettre de changer à équivalence (faible) près. On arrive donc à une conception de variétés généralisées conçues comme groupoïdes à équivalence faible près. L'équivalence de Morita, familière en algèbre, s'étend aux groupoïdes topologiques, et a été appliquée aux C^* -algèbres par Hilsen et Skandalis [17].

Si les groupoïdes différentiables (ou de Lie) généralisent les groupes de Lie, il convient de développer leur théorie infinitésimale. Les algèbres de Lie deviennent des objets de la géométrie différentielle : les *algèbroïdes de Lie*, introduits par Pradines [28]. La théorie est assez parallèle à celle des groupes et algèbres de Lie, mais une difficulté majeure se présente : démontrer l'analogue du troisième théorème de Lie qui construit un groupe de Lie d'algèbre de Lie donnée. L'histoire mouvementée sera détaillée plus loin ; la solution définitive est très récente et due à M. Crainic et R.L. Fernandes [7].

Nous nous attacherons aussi à décrire certaines applications, tels le lien entre variétés de Poisson et groupoïdes symplectiques (étudiée par l'école d'Alan Weinstein) et une nouvelle présentation de la théorie de Galois des équations différentielles linéaires.

Remerciements

Tout d'abord, à mon amie Yvette Kosmann-Schwarzbach, qui m'a introduit à ces sujets et fourni une abondante documentation. Également à I. Moerdijk, J. Mrčun et A. Weinstein pour de nombreuses discussions. Je remercie enfin Ch.-M. Marle pour le prêt de ses notes sur la géométrie de Poisson. Quant à ma vaillante secrétaire Cécile Gourgues, elle était sur le pont avec son sourire coutumier.

1. GROUPOÏDES DE LIE

1.1. Définitions

Soit M_0 un ensemble. Par analogie à la notion de bimodule, appelons *bi-ensemble*⁽²⁾ de base M_0 , un système d'applications $\mathcal{M} = (M_1 \xrightarrow[s]{b} M_0)$ où s est appelée la source, et b le but. L'application (b, s) de M_1 dans $M_0 \times M_0$ s'appelle l'*ancree*. Le bi-ensemble unité $U(M_0)$ est défini par $M_1 = M_0$, $s = b = \mathbb{1}_{M_0}$; le produit $\mathcal{M} \times_{M_0} \mathcal{M}'$ des bi-ensembles $\mathcal{M} = (M_1 \xrightarrow[s]{b} M_0)$ et $\mathcal{M}' = (M'_1 \xrightarrow[b']{s'} M_0)$ sur la base M_0 est défini comme l'ensemble M'' produit fibré du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_1 & & M'_1 \\ & \searrow s & \swarrow b' \\ & M_0 & \end{array}$$

noté $M_1 \times_{b'} M'_1$ et formé des paires (μ, μ') dans $M_1 \times M'_1$ telles que $s(\mu) = b'(\mu')$, avec les applications $s''(\mu, \mu') = s'(\mu')$, $b''(\mu, \mu') = b(\mu)$.

Un *monoïde en bi-ensembles* est défini par la donnée d'un bi-ensemble $\mathcal{M}$, d'une loi de composition

$$m : \mathcal{M} \times_{M_0} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

et d'une unité

$$e : U(M_0) \rightarrow \mathcal{M}.$$

On impose la commutativité des diagrammes qui correspondent à l'associativité, et l'élément neutre. Un *groupe en bi-ensembles* est un monoïde en bi-ensembles $\mathcal{G} = (G_1 \xrightarrow[s]{b} G_0)$ qui possède une inversion $I : G_1 \rightarrow G_1$ telle que $s \circ I = b$, $b \circ I = s$ et qui satisfait à la propriété traduisant l'équation $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ dans un groupe.

⁽²⁾ Ce néologisme sert à rappeler cette analogie. Une terminologie plus usuelle est celle de graphe (orienté), où M_0 est l'ensemble des sommets, M_1 celui des arêtes, l'arête a allant de sa source $s(a)$ à son but $b(a)$.

Plus couramment, un monoïde (resp. groupe) en bi-ensembles est appelé une (petite) *catégorie* (resp. un *groupoïde*). Ces définitions alambiquées ont le mérite de s'étendre telles quelles au cas où les ensembles sont remplacés par des objets d'une catégorie, tels que les espaces topologiques, ou les variétés (différentiables, analytiques réelles ou complexes, algébriques...). On peut ainsi parler de catégorie (ou de groupoïde) topologique, différentiable... La seule difficulté est l'existence des produits fibrés :

- $M_2 := M_1 \times_b M_1$ pour définir la multiplication,
- $M_3 := M_1 \times_b M_1 \times_b M_1$ pour énoncer l'associativité.

Pas de difficulté pour les espaces topologiques.

Pour les variétés, on utilise deux variantes. Rappelons d'abord qu'une application $f : M \rightarrow M'$ de classe C^∞ entre variétés est dite *étale* (resp. *submersive*) si pour tout point m de M , l'application tangente $T_m f : T_m M \rightarrow T_{f(m)} M'$ est bijective (resp. surjective). Dans la définition d'un groupoïde différentiable⁽³⁾ $\mathcal{G}$ on supposera que s et b sont des submersions. D'après des résultats classiques, ceci assure que G_2 est une sous-variété localement fermée de $G_1 \times G_1$. Idem pour G_3 et même pour la sous-variété G_p de $G_1 \times \cdots \times G_1$ (p facteurs) définie de manière analogue. Un groupoïde de Lie est dit *étale*⁽⁴⁾ si les applications s et b sont étales.

Il convient de définir les morphismes de groupoïdes. Soient $\mathcal{G} = (G_1 \xrightleftharpoons[b]{s} G_0)$ et $\mathcal{H} = (H_1 \xrightleftharpoons[b]{s} H_0)$ deux groupoïdes. Un morphisme ϕ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ est donné par deux applications $\phi_i : H_i \rightarrow G_i$ (pour $i = 0, 1$) compatibles avec source, but, composition, unité et inversion en un sens évident. Dans le cas des groupoïdes de Lie, on impose en plus que ϕ_0 et ϕ_1 soient des morphismes de variétés.

1.2. Exemples de groupoïdes de Lie

a) Tout d'abord, pour toute variété M , on a défini le bi-ensemble $U(M) = (M \xrightleftharpoons[b]{\Pi} M)$. C'est de manière naturelle un groupoïde avec l'unité $e_x = x$ et la multiplication

$$(1.1) \quad e_x \cdot e_x = e_x$$

pour tout x dans M . On l'appelle le *groupoïde unité* de M .

Un autre groupoïde $V(M)$ associé à M est défini par

$$M_0 = M, \quad M_1 = M \times M, \quad s = pr_2, \quad b = pr_1,$$

⁽³⁾ Un groupoïde différentiable est dit aussi « groupoïde de Lie ».

⁽⁴⁾ Vu la correspondance entre faisceaux et espaces étalés, les groupoïdes étales forment une généralisation des *pseudo-groupes* étudiés par E. Cartan et Ch. Ehresmann : transformations locales d'un ouvert sur un ouvert, inversibles, et se composant.

où pr_1 et pr_2 sont les deux projections de $M \times M$ sur M . La multiplication est nécessairement de la forme

$$(1.2) \quad (x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$$

pour x, y, z dans M . On l'appelle le *groupoïde des paires* de M .

Plus généralement, soit $R \subset M \times M$ le graphe d'une relation d'équivalence dans M , telle que R soit une sous-variété de $M \times M$ et que les deux projections de R sur M soient des submersions. Alors R définit un sous-groupoïde $W(R)$ de $V(M)$. On retrouve les deux cas précédents en prenant R égal à la diagonale de $M \times M$ ou à $M \times M$ lui-même.

b) Examinons les liens entre groupes et groupoïdes. Tout d'abord, un groupoïde de Lie $\mathcal{G} = (G_1 \overset{s}{\rightrightarrows}_b G_0)$, dans lequel G_0 est réduit à un point, est un groupe de Lie. Lorsque $s = b$, alors G_1 est un fibré en groupes de Lie sur la base G_0 .

Soient M une variété et G un groupe de Lie. On peut définir un groupoïde $\mathcal{P}$ avec $P_0 = M$, $P_1 = M \times M \times G$ et les applications structurales définies par

$$(1.3) \quad s(x, y; g) = y, \quad b(x, y; g) = x$$

$$(1.4) \quad (x, y; g) \cdot (y, z; h) = (x, z; gh).$$

Un groupoïde de ce type sera utilisé en 5.1.

Supposons maintenant que G agisse sur M . Un autre groupoïde $\mathcal{H}$ est défini par les règles $H_0 = M$, $H_1 = G \times M$ et les applications structurales

$$(1.5) \quad s(g, m) = m, \quad b(g, m) = g \cdot m$$

$$(1.6) \quad (g, m) \cdot (g', m') = (gg', m') \quad \text{si} \quad m = g' \cdot m'.$$

Soit $\mathcal{G} = (G_1 \overset{s}{\rightrightarrows}_b M)$ un groupoïde de Lie de base M . Pour tout point x de M , l'ensemble $\mathcal{G}_x$ des éléments g de G_1 tels que $s(g) = b(g) = x$ forme un groupe de Lie pour la multiplication. Le sous-ensemble de G_1 où s et b coïncident est la réunion Γ des $\mathcal{G}_x$. Pour la projection $\pi : \Gamma \rightarrow M$ induite par s (ou b), on obtient ainsi un fibré en groupes de Lie, de base M , dont les $\mathcal{G}_x$ sont les fibres.

Avec les notations précédentes, fixons un point x_0 de M , notons G le groupe $\mathcal{G}_{x_0}$ et P l'ensemble des éléments p de G_1 tels que $s(p) = x_0$. La multiplication dans $\mathcal{G}$ définit une action (à droite) de G sur P ; si l'on adjoint la restriction q de $b : G_1 \rightarrow M$ à P , le système (P, G, M, q) est un fibré principal de base M , groupe G et projection q .

Réciproquement, à partir d'un fibré principal (P, G, M, q) , on définit un groupoïde $\mathcal{P}$ de base M comme suit : P_1 est l'ensemble $(P \times P)/G$ des orbites de G opérant diagonalement dans $P \times P$, et comme M est l'espace P/G des orbites de G dans P , les deux projections pr_1 et pr_2 de $P \times P$ dans P définissent par passage aux orbites

respectivement les applications b et s de P_1 dans M . Enfin, si deux éléments λ et λ' de P_1 satisfont à la relation $s(\lambda) = b(\lambda')$, ils ont des représentants de la forme (p, p') pour λ et (p', p'') pour λ' et leur produit $\lambda\lambda'$ admet (p, p'') pour représentant ⁽⁵⁾.

Dans le cas des groupoïdes de Lie transitifs ⁽⁶⁾, les deux constructions sont réciproques, et la *théorie des groupoïdes de Lie transitifs est équivalente à celle des fibrés principaux*. Cette remarque a été le point de départ de l'intérêt d'Ehresmann pour les groupoïdes. Prenons par exemple le cas d'un fibré vectoriel E de base M . Si P est le fibré principal des repères de E , la fibre en $x \in M$ de P est l'ensemble des isomorphismes d'espaces vectoriels $\varphi : V \rightarrow E_x$, où V est la « fibre-type ». Si $\mathcal{P}$ est le groupoïde correspondant, d'espace des flèches P_1 , une flèche f de source x et but y (dans M) n'est autre qu'un isomorphisme de la fibre E_x sur la fibre E_y . Comme variété, P_1 s'identifie à un ouvert du fibré ⁽⁷⁾ vectoriel $pr_1^*(E) \otimes pr_2^*(E)^*$ sur $M \times M$.

c) Passons aux *relations d'équivalence* et aux *variétés quotients*. Soit $\mathcal{G} = (G_1 \xrightarrow[s]{b} M)$ un groupoïde de base M . L'ancre (b, s) de G_1 dans $M \times M$ a pour image le graphe d'une relation d'équivalence R dans M . L'espace quotient se note $\mathcal{G} \backslash M$ et s'appelle *l'espace des orbites du groupoïde* $\mathcal{G}$.

Par exemple, si $\mathcal{G}$ est associé à une action d'un groupe de Lie G sur une variété M (cf. formules (1.5) et (1.6)), alors les orbites de $\mathcal{G}$ sont celles du groupe G . Supposons que le groupe G soit dénombrable et discret, agissant librement sur M mais avec les orbites denses. La topologie quotient sur l'espace $G \backslash M$ des orbites est grossière, et si l'action de G est ergodique, même la structure mesurable de $G \backslash M$ est grossière. L'idée est que *le groupoïde $\mathcal{G}$ reflète plus fidèlement la structure de l'espace $G \backslash M$ des orbites*.

d) Examinons *le point de vue des atlas*. Soit X une variété. Contrairement aux habitudes ⁽⁸⁾, une *carte* sera une application $\varphi : U \rightarrow X$, injective et d'image ouverte, dont la source est un ouvert U d'un modèle (par exemple un espace numérique $\mathbb{R}^d$ pour les variétés différentiables).

Un *atlas* est une famille de cartes $(\varphi_i, U_i)_{i \in I}$ telle que X soit la réunion des images $\varphi_i(U_i)$. Introduisant l'espace $\mathbf{U}$ somme des U_i , dont les éléments sont les paires (i, x) avec $i \in I$, $x \in U_i$, l'atlas se résume en une seule application $\varphi : \mathbf{U} \rightarrow X$ donnée par $\varphi(i, x) = \varphi_i(x)$. Notons R l'ensemble des couples $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dans $\mathbf{U}$ tels que $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v})$.

⁽⁵⁾ Dans le cas du fibré trivial $P = M \times G$, on retrouve les constructions décrites par les formules (1.3) et (1.4).

⁽⁶⁾ Un groupoïde de Lie est dit *transitif* si l'ancre (b, s) de G_1 dans $M \times M$ est une surjection submersive.

⁽⁷⁾ On note pr_1 et pr_2 les projections de $M \times M$ sur M .

⁽⁸⁾ Il est plus courant de voir une carte comme une application d'un ouvert de la variété vers un ouvert d'un modèle.

Alors X est isomorphe au quotient U/R , et elle est donc adéquatement décrite par le groupoïde étale $W(R)$ (cf. 1.2a)).

Variations sur cette construction : soit M une variété munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$, correspondant à un sous-fibré intégrable $\mathcal{I}$ de TM . Une *carte transverse* est une application injective $\varphi : U \rightarrow M$ telle que, en chaque point u de U , l'application tangente soit un isomorphisme de $T_u U$ sur un sous-espace de $T_{\varphi(u)} M$ supplémentaire de $\mathcal{I}_{\varphi(u)}$. Un *atlas transverse* de $(M, \mathcal{F})$ est une collection de cartes transverses de la forme $(\varphi_i, U_i)_{i \in I}$ où chaque feuille rencontre l'une des images $\varphi_i(U_i)$. Construisons U , R et $W(R)$ comme ci-dessus, de sorte qu'on peut identifier U/R à l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$. En général, *la topologie sur $M/\mathcal{F}$ est inutilisable, et l'application de U_i dans $M/\mathcal{F}$ déduite de φ_i n'est pas injective*. Cependant, l'expérience montre que le groupoïde étale $W(R)$ donne une bonne description de l'espace des feuilles (cohomologie... ; voir Haefliger [16]).

Un « orbifold » (ou V -variété au sens de Satake) est décrit localement comme le quotient d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$ par l'action d'un groupe fini de transformations linéaires. Par exemple, l'espace M/Γ des orbites d'un groupe dénombrable discret Γ agissant continuellement et proprement ⁽⁹⁾ sur M . Les « orbifolds » sont les espaces d'orbites des groupoïdes $\mathcal{G} = (G_1 \overset{s}{\rightrightarrows} G_0)$ tels que G_0 et G_1 soient séparés et que l'ancre (b, s) soit une application propre ⁽¹⁰⁾ et à fibres discrètes de G_1 dans $G_0 \times G_0$.

e) Enfin le *lien avec l'homotopie*. Soit M une variété connexe. On note $\Pi(M)$ l'espace des classes d'homotopie (à extrémités fixes) de chemins continus (ou de classe C^∞) dans M . Avec une composition déduite de celle des chemins, $\Pi(M)$ devient un groupoïde étale sur M , qu'on appelle le *groupoïde de Poincaré* de M .

Choissant un point-base x_0 de M , le groupe $\Pi(M)_{x_0}$ n'est autre que le groupe fondamental $\pi_1(M; x_0) =: \pi$, et l'ensemble des éléments de $\Pi(M)$ de source x_0 est un modèle du revêtement universel $\tilde{M}$ de M . Le groupoïde $\Pi(M)$ se reconstruit comme l'espace des orbites de l'action diagonale de π dans $\tilde{M} \times \tilde{M}$.

Lorsque $(M, \mathcal{F})$ est une variété feuilletée, le *groupoïde de monodromie* se définit au moyen des chemins qui restent dans une feuille donnée F , avec l'homotopie relative à F (voir Haefliger [16] et Connes [5]). Ce groupoïde est adapté à l'étude longitudinale d'un feuilletage.

⁽⁹⁾ Ceci signifie que si K, L sont deux parties compactes de M , l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma(K)$ rencontre L est fini.

⁽¹⁰⁾ L'image réciproque d'une partie compacte de $G_0 \times G_0$ par l'ancre (b, s) est compacte dans G_1 .

1.3. Équivalence de Morita

a) Examinons tout d'abord l'équivalence de Morita en algèbre. Soient A et B deux anneaux. On dit que A et B sont *équivalents au sens de Morita* s'il existe un (A, B) -bimodule M avec les propriétés suivantes :

(α) *comme A -module à gauche, M est fidèle⁽¹¹⁾, projectif et de type fini ;*

(β) *comme B -module à droite, M est fidèle, et B coïncide avec l'anneau des endomorphismes du A -module M .*

La situation est symétrique en A et B , car M est automatiquement un B -module projectif et de type fini, et A est l'anneau des endomorphismes du B -module M .

Deux anneaux équivalents au sens de Morita ont les mêmes modules. De manière précise, au (A, B) -bimodule M , on associe un foncteur T_M de la catégorie $B\text{-mod}$ des B -modules (à gauche) dans $A\text{-mod}$ par

$$T_M(P) = M \otimes_B P.$$

Alors T_M est une équivalence de catégories.

Soit $\mathbf{Alg}_k$ la catégorie des algèbres (associatives avec unité) sur un corps k . La catégorie de Morita $\mathbf{Mor}_k$ a les k -algèbres pour objets, et les morphismes dans $\mathbf{Mor}_k$ d'une algèbre B dans une algèbre A sont les classes d'isomorphisme de (A, B) -bimodules qui satisfont à la propriété (α) ci-dessus. La composition des morphismes dans $\mathbf{Mor}_k$ est donnée par le produit tensoriel $M \otimes_B N$ (où M est un (A, B) -bimodule et N un (B, C) -bimodule). On définit un foncteur S de $\mathbf{Alg}_k$ dans $\mathbf{Mor}_k$: si $\varphi : B \rightarrow A$ est un homomorphisme de k -algèbres, le bimodule P_φ est A muni de l'action à gauche de A sur lui-même et de l'action à droite de B définie par $(a, b) \mapsto a\varphi(b)$. Un bimodule M satisfaisant à (α) et (β) définit un isomorphisme dans la catégorie $\mathbf{Mor}_k$, appelé une *équivalence de Morita*.

On a la propriété universelle suivante, qui exprime que la catégorie de Morita $\mathbf{Mor}_k$ est exactement celle qui transforme les équivalences de Morita en isomorphismes :

(U) *Si un foncteur T de $\mathbf{Alg}_k$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ transforme les équivalences de Morita en isomorphismes, il existe une unique factorisation de foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Alg}_k & \xrightarrow{S} & \mathbf{Mor}_k \xrightarrow{\bar{T}} \mathcal{C} \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{T} & \uparrow \end{array}$$

Plus précisément, si A et B sont équivalents au sens de Morita, on suppose que $T(A)$ et $T(B)$ sont isomorphes. Dans ces conditions, il existe un foncteur $\bar{T} : \mathbf{Mor}_k \rightarrow \mathcal{C}$ tels que les foncteurs T et $\bar{T} \circ S$ soient isomorphes.

⁽¹¹⁾ Le seul élément de A qui annule tout élément de M est 0.

b) Pour adapter ce qui précède au cas des groupoïdes de Lie, il faut définir l'*équivalence faible*, qui remplace l'équivalence de Morita, et la catégorie **GPD** des groupoïdes de Lie et fibrés principaux. Les détails sont dans Moerdijk et Mrčun [27].

Une *équivalence faible* entre groupoïdes $\mathcal{G} = (G_1 \xrightarrow[b]{s} G_0)$ et $\mathcal{H} = (H_1 \xrightarrow[b']{s'} H_0)$ est un morphisme $\phi = (\phi_0, \phi_1)$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$, avec $\phi_i : H_i \rightarrow G_i$ (pour $i = 0, 1$) satisfaisant aux conditions suivantes :

- l'application $b \circ pr_1$ de $G_1 \times_{\phi_0} H_0$ dans G_0 est une submersion surjective ;
- le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\phi_1} & G_1 \\ (b', s') \downarrow & & \downarrow (b, s) \\ H_0 \times H_0 & \xrightarrow{\phi_0 \times \phi_0} & G_0 \times G_0. \end{array}$$

Deux groupoïdes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont *faiblement équivalents* s'il existe deux équivalences faibles $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \leftarrow \mathcal{G}'$.

Dans le langage des catégories, ϕ est un foncteur de la catégorie $\mathcal{H}$ dans la catégorie $\mathcal{G}$. La première condition exprime que ϕ est *essentiellement surjectif* : tout objet de $\mathcal{G}$ est isomorphe à l'image par ϕ d'un objet de $\mathcal{H}$. La seconde propriété signifie que ϕ est *pleinement fidèle* : si x, y sont des objets de $\mathcal{H}$, le foncteur ϕ définit une bijection de $\mathcal{H}(x, y)$ sur $\mathcal{G}(\phi(x), \phi(y))$. Mais il faut préciser en tenant compte des structures différentielles sur les variétés G_0, G_1, H_0 et H_1 . Les deux propriétés « pleinement fidèle » et « essentiellement surjectif » caractérisent classiquement les foncteurs qui définissent des équivalences de catégories.

Par exemple, les groupoïdes associés à deux atlas d'une variété (ou deux atlas transverses d'une variété feuilletée) sont faiblement équivalents. Soit P un fibré principal de groupe G et de base M . Alors le groupoïde construit avec G et P selon les formules (1.5) et (1.6) est faiblement équivalent au groupoïde unité $U(M)$ qui représente fidèlement M . Le groupoïde $V(M)$ des paires défini en 1.2a) est faiblement équivalent au groupoïde trivial réduit à un point. Le groupoïde $W(R)$ défini en 1.2a) est faiblement équivalent à $U(M/R)$, donc représente adéquatement le quotient M/R (qui existe comme variété), etc.

Nous renvoyons à [27], pages 164 et 165, pour la définition des $\mathcal{G}$ -fibrés principaux au-dessus de $\mathcal{H}$ qui définissent les morphismes de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ dans la catégorie **GPD**. Cette catégorie est exactement celle qui rend inversibles les équivalences faibles.

2. ALGÈBROÏDES DE LIE

2.1. Rappels sur les algèbres de Lie

Rappelons qu'une algèbre de Lie sur un corps k est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sur k muni d'une application bilinéaire $(x, y) \mapsto [x, y]$ qui est *antisymétrique*⁽¹²⁾

$$(2.1) \quad [y, x] = -[x, y]$$

et satisfait à l'*identité de Jacobi*

$$(2.2) \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Compte tenu de l'antisymétrie, l'identité de Jacobi équivaut à l'identité dite de Leibniz

$$(2.3) \quad [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

qui exprime que l'application $ad x : y \mapsto [x, y]$ est une dérivation du crochet. Récemment, Loday [22] a proposé d'appeler *algèbres de Leibniz* les algèbres dont le crochet satisfait à (2.3), mais n'est pas nécessairement antisymétrique.

Une autre variante des algèbres de Lie est fournie par les *algèbres de Vinberg* (aussi appelées algèbres de pré-Lie par Gerstenhaber [14]). Le produit $x * y$ satisfait à l'identité à 4 termes, due à Vinberg

$$(2.4) \quad x * (y * z) - (x * y) * z = x * (z * y) - (x * z) * y,$$

et qui affaiblit l'associativité. Si l'on pose $[x, y] = x * y - y * x$, l'identité de Jacobi contient 12 termes se regroupant en somme de 3 paquets de 4 termes, dont chacun s'annule d'après l'identité de Vinberg⁽¹³⁾.

Une algèbre de Lie donne naissance à plusieurs structures algébriques.

a) *Le complexe de Chevalley-Eilenberg :*

Sur l'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet \mathfrak{g} = \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p \mathfrak{g}$ construite sur un espace vectoriel $\mathfrak{g}$, on dispose du coproduit

$$\Delta : \Lambda^\bullet \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda^\bullet \mathfrak{g} \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}$$

caractérisé par le fait que c'est un homomorphisme d'algèbres graduées⁽¹⁴⁾ satisfaisant à $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour x dans $\mathfrak{g}$.

Un crochet antisymétrique sur $\mathfrak{g}$ est une application

$$\mu : \Lambda^2 \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda^1 \mathfrak{g}$$

⁽¹²⁾ Si le corps k est de caractéristique 2, il faut supposer l'*alternance* $[x, x] = 0$ pour x dans $\mathfrak{g}$.

⁽¹³⁾ Signification géométrique : un groupe de Lie G , dont l'algèbre de Lie provient d'une algèbre de Vinberg, possède une connexion plate sur le fibré tangent TG , invariante par translations à droite.

⁽¹⁴⁾ Le produit tensoriel est le produit gradué satisfaisant à $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'$, où $|x|$ est le degré de x .

qui s'étend de manière unique en une codérivation ∂ de degré -1 dans la coalgèbre $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}$. Elle est donnée explicitement par ⁽¹⁵⁾

$$(2.5) \quad \partial(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_p.$$

Dans ces conditions, μ satisfait à l'identité de Jacobi ssi l'on a $\partial\partial = 0$.

De manière duale, ∂ se transpose en une dérivation d de l'algèbre $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$ construite sur le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$, et l'on a $dd = 0$. Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G , on peut identifier $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$ à l'espace des formes différentielles extérieures sur G invariantes par les translations à droite et d devient la différentielle extérieure.

b) *Crochet de Poisson* :

Notons $U\mathfrak{g}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ munie de sa filtration canonique

$$k = U_0 \mathfrak{g} \subset U_1 \mathfrak{g} (= \mathfrak{g}) \subset U_2 \mathfrak{g} \subset \cdots,$$

où $U_p \mathfrak{g}$ est engendré linéairement par les produits d'au plus p facteurs tirés de $\mathfrak{g}$. D'après le théorème PBW ⁽¹⁶⁾, on peut identifier $U_p \mathfrak{g} / U_{p-1} \mathfrak{g}$ à la puissance symétrique $S^p \mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$. Pour a dans $U_p \mathfrak{g}$ et b dans $U_q \mathfrak{g}$, le commutateur $[a, b] = ab - ba$ appartient à $U_{p+q-1} \mathfrak{g}$, et par passage au quotient, on définit un crochet de Poisson $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ de $S^p \mathfrak{g} \times S^q \mathfrak{g}$ dans $S^{p+q-1} \mathfrak{g}$. Il est défini par

$$(2.6) \quad \{x_1 \cdots x_p, y_1, \dots, y_q\} = \sum_{i,j} [x_i, y_j] x_1 \cdots \hat{x}_i \cdots x_p y_1 \cdots \hat{y}_j \cdots y_q.$$

De manière duale, et supposant $\mathfrak{g}$ de dimension finie, on peut identifier $S^\bullet \mathfrak{g} = \bigoplus_{p \geq 0} S^p \mathfrak{g}$ à l'algèbre des fonctions polynomiales sur le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$, et le crochet de Poisson algébrique définit la variété de Poisson $\mathfrak{g}^*$ (voir n° 3.4).

c) *Crochet de Schouten* :

Par analogie avec la formule (2.6), et en accord avec la philosophie de la « super-géométrie », on définit sur l'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}$ un *crochet de Schouten* $[a, b]_S$. Il applique $\Lambda^p \mathfrak{g} \times \Lambda^q \mathfrak{g}$ dans $\Lambda^{p+q-1} \mathfrak{g}$, et de manière explicite on a :

$$(2.7) \quad [x_1 \wedge \cdots \wedge x_p, y_1 \wedge \cdots \wedge y_q]_S = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [x_i, y_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge \hat{y}_j \wedge \cdots \wedge y_q.$$

Il satisfait à une forme d'identité de Jacobi dont je donne la variante « Leibniz » :

$$(2.8) \quad [a, [b, c]_S]_S = [[a, b]_S, c]_S + (-1)^{(p-1)(q-1)} [b, [a, c]_S]_S,$$

pour a, b, c dans $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}$ avec a de degré p et b de degré q . L'antisymétrie est donnée par

$$(2.9) \quad [b, a]_S = (-1)^{pq+p+q} [a, b]_S.$$

⁽¹⁵⁾ Le chapeau sur x_i et x_j demande de supprimer ces termes.

⁽¹⁶⁾ De Poincaré, Birkhoff et Witt.

2.2. Algèbres de Lie-Rinehart

Les champs de vecteurs sur une variété différentiable M forment une algèbre de Lie $\mathcal{X} = \mathcal{X}(M)$ sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, mais de plus c'est un module sur la $\mathbb{R}$ -algèbre $A = C^\infty(M)$ (associative et commutative) formée des fonctions de classe C^∞ sur M . Les deux structures sont liées par une relation du type « Leibniz »

$$(2.10) \quad [X, fY] = f[X, Y] + \mathcal{L}_X(f) \cdot Y$$

(X et Y sont des champs de vecteurs, f une fonction et $\mathcal{L}_X$ la dérivée de Lie). Cela conduit à la définition d'une *algèbre de Lie-Rinehart* $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ sur la $\mathbb{R}$ -algèbre A , où $\mathcal{X}$ désigne une algèbre de Lie (sur $\mathbb{R}$) munie d'une structure de A -module, et $\mathcal{L}$ un homomorphisme de $\mathcal{X}$ dans l'algèbre de Lie des $\mathbb{R}$ -dérivations de A satisfaisant à (2.10) et à

$$(2.11) \quad \mathcal{L}_{fX}(g) = f \cdot \mathcal{L}_X(g)$$

(f et g sont des éléments de A).

Cette notion a été introduite par Rinehart [30], mais aussi dans des notes non publiées de Grothendieck sur l'algébrisation du calcul différentiel (voir aussi l'exposé VII par P. Gabriel dans [11]).

2.3. Définition des algébroïdes de Lie

Nous allons « géométriser » la définition précédente. Selon Pradines [28], un *algébroïde de Lie* sur une variété M est un fibré vectoriel $\mathcal{G}$ de base M , muni des données suivantes :

a) une structure d'algèbre de Lie réelle sur l'espace $\Gamma(\mathcal{G})$ des sections de classe C^∞ de $\mathcal{G}$;

b) un homomorphisme de fibrés vectoriels $\rho : \mathcal{G} \rightarrow TM$ (appelé l'*ancree*).

L'identité à respecter est la suivante :

$$(2.12) \quad [a, fb] = f[a, b] + \mathcal{L}_{\rho(a)}(f) \cdot b$$

si a, b sont des sections de $\mathcal{G}$, et f une fonction (de classe C^∞) sur M .

Dans ces conditions, ρ définit un homomorphisme d'algèbres de Lie réelles de $\Gamma(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{X}(M)$.

Naturellement, $\Gamma(\mathcal{G})$ est une $(\mathbb{R}, C^\infty(M))$ -algèbre de Lie-Rinehart.

2.4. Exemples d'algébroïdes de Lie

Lorsque M est réduite à un point, d'où $C^\infty(M) = \mathbb{R}$, on retrouve la notion d'algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

L'exemple prototype est celui où $\mathcal{G}$ est le fibré tangent à M , et ρ l'identité. Alors $\Gamma(\mathcal{G})$ est l'algèbre de Lie $\mathcal{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M .

Soit donné un feuilletage $\mathcal{F}$ sur M , correspondant à un sous-fibré intégrable $\mathcal{G}$ de TM . Prenons pour ρ l'inclusion de $\mathcal{G}$ dans TM . On obtient ainsi un algébroïde de Lie sur M caractérisant le feuilletage.

Réciproquement, pour tout algébroïde de Lie $(\mathcal{G}, \rho)$, posons $\mathcal{I}_x = \rho_x(\mathcal{G}_x) \subset T_x M$ pour tout point x de M . Si la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{I}_x$ est localement constante, on a un sous-fibré $\mathcal{I}$ de TM , de fibre $\mathcal{I}_x$ en x , et $\mathcal{I}$ définit un feuilletage. Dans le cas général, même si $\mathcal{I}$ n'est pas un sous-fibré, il est associé à un feuilletage généralisé au sens de Sussmann [33].

Considérons un fibré en algèbres de Lie $\mathcal{G}$ sur M ; le crochet correspond à un homomorphisme de fibrés vectoriels $[\cdot, \cdot] : \Lambda^2 \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ et induit sur $\Gamma(\mathcal{G})$ une structure d'algèbre de Lie. Ce crochet sur $\Gamma(\mathcal{G})$ est linéaire par rapport à $C^\infty(M)$, c'est-à-dire qu'on a une algèbre de Lie sur l'anneau $C^\infty(M)$. L'ancre correspondante est $\rho = 0$, pour respecter la relation (2.12).

Réciproquement, soit $(\mathcal{G}, \rho)$ un algébroïde de Lie tel que le rang de ρ soit localement constant. Alors le noyau $\mathcal{G}_0$ de ρ et son image $\mathcal{I}$ sont des fibrés vectoriels sur M . De plus, $\mathcal{G}_0$ est un fibré en algèbres de Lie, et $\mathcal{I}$ définit un feuilletage comme vu plus haut.

Dans la section suivante, nous montrerons comment associer des algébroïdes de Lie aux variétés symplectiques ou de Poisson.

2.5. Cohomologie des algébroïdes de Lie

Considérons un algébroïde de Lie $\mathcal{G}$, de base M et d'ancre ρ . On appelle p -forme une section ω du fibré vectoriel $\Lambda^p \mathcal{G}^*$, où $\mathcal{G}^*$ est le fibré dual de $\mathcal{G}$. Cela correspond à une application p -linéaire antisymétrique $\omega(a_1, \dots, a_p)$ où $a_1, \dots, a_p$ sont des sections de $\mathcal{G}$, et la valeur $\omega(a_1, \dots, a_p)$ est une fonction sur M . Lorsque $\mathcal{G} = TM$, on retrouve la notion de p -forme différentielle extérieure sur M .

On prouve alors l'existence d'un opérateur $d_{\mathcal{G}}$ transformant une p -forme en une $(p+1)$ -forme, satisfaisant à la relation

$$\begin{aligned}
 (d_{\mathcal{G}}\omega)(a_0, \dots, a_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \mathcal{L}_{\rho(a_i)} (\omega(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p)) \\
 (2.13) \quad &+ \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([a_i, a_j], a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_p).
 \end{aligned}$$

On a $d_{\mathcal{G}} d_{\mathcal{G}} \omega = 0$, et l'on peut donc définir la cohomologie $H^{\bullet}(M, \mathcal{G})$. Lorsque $\mathcal{G} = TM$, on retrouve la cohomologie de de Rham de la variété M ; plus généralement, si $\mathcal{G}$ est un sous-fibré associé à un feuilletage $\mathcal{F}$, on retrouve la cohomologie longitudinale de $\mathcal{F}$. Enfin, si l'algébroïde $\mathcal{G}$ se réduit à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on a $\rho = 0$, la moitié des termes disparaissant dans (2.13), et l'on retrouve la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

2.6. Crochet de Schouten

Soit encore $\mathcal{G}$ un algébroïde de Lie, de base M et d'ancre ρ . On appelle *p-vecteur* toute section (de classe C^{∞}) du fibré vectoriel $\Lambda^p \mathcal{G}$ sur M ; l'espace de ces *p-vecteurs* se note $\mathcal{X}^p(\mathcal{G})$. Lorsque $\mathcal{G} = TM$, on retrouve la notion classique de champ de *p-vecteurs*, et lorsque M est réduite à un point, on a $\mathcal{X}^p(\mathcal{G}) = \Lambda^p \mathfrak{g}$ où $\mathcal{G}$ est défini par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Au n° 2.1, on a défini le crochet de Schouten sur $\Lambda^{\bullet} \mathfrak{g}$; le crochet de Schouten sur les champs de *p-vecteurs* est aussi une notion classique. Ces deux notions sont unifiées grâce à la définition d'un crochet de Schouten sur les *p-vecteurs* associés à un algébroïde de Lie $\mathcal{G}$. Si $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ sont des sections de $\mathcal{G}$, on a

$$(2.14) \quad [a_1 \wedge \dots \wedge a_p, b_1 \wedge \dots \wedge b_q]_S = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (-1)^{i+j} [a_i, b_j] \wedge a_1 \wedge \dots \wedge \hat{a}_i \wedge \dots \wedge a_p \wedge b_1 \wedge \dots \wedge \hat{b}_j \wedge \dots \wedge b_q.$$

Le crochet de Schouten envoie $\mathcal{X}^p(\mathcal{G}) \times \mathcal{X}^q(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{X}^{p+q-1}(\mathcal{G})$ et satisfait aux relations (2.8) et (2.9). Autrement dit, si l'on donne aux éléments de $\mathcal{X}^p(\mathcal{G})$ la parité opposée à celle de p , on dispose d'une *superalgèbre de Lie*.

Dans $\mathcal{X}^{\bullet}(\mathcal{G}) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{X}^p(\mathcal{G})$ on dispose aussi du *produit extérieur* qui est commutatif au sens gradué

$$(2.15) \quad b \wedge a = (-1)^{pq} a \wedge b,$$

pour a de degré p et b de degré q . Le lien entre le crochet de Schouten et le produit extérieur est donné par la formule de type « Leibniz » :

$$(2.16) \quad [a, b \wedge c]_S = [a, b]_S \wedge c + (-1)^{(p-1)q} b \wedge [a, c]_S$$

pour a de degré p et b de degré q . On peut montrer que le crochet de Schouten $[a, b]_S$ sur $\mathcal{X}^{\bullet}(\mathcal{G})$ est le seul qui satisfasse aux relations (2.9) et (2.16) et qui redonne les cas particuliers

$$(2.17) \quad [a, b]_S = [a, b], \quad [a, f]_S = \mathcal{L}_{\rho(a)} f$$

pour deux sections a, b de $\mathcal{G}$ et une fonction f sur M . Ces cas particuliers expriment les données structurelles d'un algébroïde de Lie.

Les propriétés du crochet de Poisson défini en 2.1b) conduisent à la notion d'*algèbre de Poisson* P sur un corps k : on y dispose d'un produit bilinéaire $(f, g) \mapsto fg$ qui en fait une algèbre associative et commutative avec unité, et d'un crochet $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ qui en fait une algèbre de Lie ; de plus, ces deux produits sont reliés par une identité du type « Leibniz »

$$(2.18) \quad \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Lorsque P est l'algèbre symétrique $S^\bullet \mathfrak{g}$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le crochet de Poisson défini en 2.1b) est le seul qui en fasse une algèbre de Poisson pour laquelle on ait $\{x, y\} = [x, y]$ pour x, y dans $\mathfrak{g}$.

De manière analogue, une *algèbre de Gerstenhaber* est une algèbre graduée $A^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} A_p$ munie d'un produit associatif ab et d'un crochet $[a, b]_S$ satisfaisant aux relations (2.8), (2.9), (2.15) et (2.16). Ainsi $\mathcal{X}^\bullet(\mathcal{G})$ est une algèbre de Gerstenhaber caractérisée par les cas particuliers (2.17).

2.7. Opérations des vecteurs sur les formes

Dans l'algèbroïde de Lie $\mathcal{G}$, on peut associer à toute section a de $\mathcal{G}$ deux opérateurs $i(a)$ et $\mathcal{L}_a^\mathcal{G}$ agissant sur les p -formes. On dit que $i(a)$ est le *produit intérieur* et $\mathcal{L}_a^\mathcal{G}$ la *dérivée de Lie* ; ils sont donnés par les règles

$$(2.19) \quad (i(a)\omega)(a_1, \dots, a_{p-1}) = \omega(a, a_1, \dots, a_{p-1})$$

$$(2.20) \quad (\mathcal{L}_a^\mathcal{G}\omega)(a_1, \dots, a_p) = \mathcal{L}_{\rho(a)}(\omega(a_1, \dots, a_p)) - \sum_{i=1}^p \omega(a_1, \dots, [a, a_i], \dots, a_p)$$

pour une p -forme ω . Le lien avec la différentielle $d_\mathcal{G}$ est donné par

$$(2.21) \quad \mathcal{L}_a^\mathcal{G} = i(a)d_\mathcal{G} + d_\mathcal{G}i(a).$$

Ces définitions sont bien connues dans le cas $\mathcal{G} = TM$.

On étend ces constructions au cas des q -vecteurs par les formules

$$(2.22) \quad i(a_1 \wedge \dots \wedge a_q) = i(a_1) \dots i(a_q)$$

$$(2.23) \quad \mathcal{L}_{a_1 \wedge \dots \wedge a_q}^\mathcal{G} = i(a_1 \wedge \dots \wedge a_q)d_\mathcal{G} - (-1)^q d_\mathcal{G}i(a_1 \wedge \dots \wedge a_q).$$

Le crochet de Schouten trouve son explication dans les formules

$$(2.24) \quad [\mathcal{L}_a^\mathcal{G}, i(b)] = i([a, b]_S)$$

$$(2.25) \quad [\mathcal{L}_a^\mathcal{G}, \mathcal{L}_b^\mathcal{G}] = \mathcal{L}_{[a, b]_S}^\mathcal{G},$$

où a et b sont des multivecteurs. Si $a \in \mathcal{X}^q(\mathcal{G})$, les opérateurs $i(a)$ et $\mathcal{L}_a^{\mathcal{G}}$ sont respectivement de degrés $-q$ et $1 - q$ et ci-dessus le commutateur de deux opérateurs D, D' de degrés respectifs δ, δ' est donné par

$$(2.26) \quad [D, D'] = DD' - (-1)^{\delta\delta'} D'D.$$

Pour toutes ces notions, voir mon cours [4].

2.8. Algébroïdes de Courant

Sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ une forme bilinéaire symétrique $(x | y)$ est dite invariante si l'on a

$$(2.27) \quad ([t, x] | y) + (x | [t, y]) = 0$$

pour t, x, y dans $\mathfrak{g}$. Par exemple, la forme de Killing

$$(2.28) \quad B(x, y) = \text{Tr}(ad x \cdot ad y)$$

a cette propriété.

La généralisation aux algébroïdes de cette situation est due à Courant [6] et à Liu, Weinstein et Xu [21]. La présentation que nous en donnons est due à Roytenberg [31].

Un *algébroïde de Courant* est un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur une variété M , muni des données suivantes :

- un produit scalaire symétrique, non-dégénéré sur les fibres de $\mathcal{E}$, définissant un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur son dual $\mathcal{E}^*$;
- une structure d'algèbre de Leibniz (cf. section 2.1) sur l'espace $\Gamma(\mathcal{E})$ des sections de $\mathcal{E}$;
- une ancre $\rho : \mathcal{E} \rightarrow TM$ satisfaisant aux règles

$$(2.29) \quad \mathcal{L}_{\rho(a)}(b | c) = (a | [b, c] + [c, b])$$

$$(2.30) \quad \mathcal{L}_{\rho(a)}(b | c) = ([a, b] | c) + (b | [a, c])$$

pour des sections a, b, c de $\mathcal{E}$.

Un algébroïde de Courant *n'est pas* un algébroïde de Lie, car le crochet n'est pas antisymétrique. Cependant, il satisfait aux règles

$$(2.31) \quad \rho([a, b]) = [\rho(a), \rho(b)]$$

$$(2.32) \quad [a, fb] = f[a, b] + \mathcal{L}_{\rho(a)}(f) \cdot b.$$

Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ un sous-fibré contenu dans son orthogonal $\mathcal{D}^\perp$ pour le produit scalaire $(a | b)$; supposons que l'espace $\Gamma(\mathcal{D})$ des sections de $\mathcal{D}$ soit stable pour le crochet dans $\Gamma(\mathcal{E})$. Alors $\mathcal{D}$ est un algébroïde de Lie, car l'antisymétrie du crochet dans $\Gamma(\mathcal{D})$ résulte de la formule (2.29). Nous verrons plus loin le lien avec les variétés de Dirac (section 3.5).

3. VARIÉTÉS DE POISSON

3.1. Crochet de Poisson sur les variétés symplectiques

Rappelons qu'une *variété symplectique* se compose d'une variété M et d'une 2-forme différentielle extérieure ω qui est *fermée* ($d\omega = 0$) et *non-dégénérée*. Dire que ω est non-dégénérée signifie qu'il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels $\omega^\flat : TM \rightarrow T^*M$ caractérisé par

$$(3.1) \quad \omega^\flat(X) = -i(X)\omega$$

pour tout champ de vecteurs X sur M . Autrement dit, on a

$$(3.2) \quad \langle \omega^\flat(X), Y \rangle = \omega(Y, X)$$

si X, Y sont deux champs de vecteurs, pour l'accouplement naturel entre 1-formes et champs de vecteurs.

On note $\Lambda^\sharp$ l'isomorphisme de T^*M sur TM inverse de $\omega^\flat$. Il se prolonge en un isomorphisme de $\Lambda^p T^*M$ sur $\Lambda^p TM$ pour tout entier $p \geq 0$. En particulier, pour $p = 2$, on note Λ le 2-vecteur image de la 2-forme ω par $\Lambda^\sharp$. On a alors

$$(3.3) \quad \langle \alpha \wedge \beta, \Lambda \rangle = \langle \beta, \Lambda^\sharp \alpha \rangle$$

si α et β sont des 1-formes différentielles.

Si f est une fonction sur M , on appelle *champ de vecteurs hamiltonien* le champ $X_f = \Lambda^\sharp(df)$. En mécanique, on dispose d'une variété symplectique (M, ω) appelée *espace des phases*, et d'une fonction H sur M , appelée le *hamiltonien*. Le flot du champ de vecteurs X_H décrit l'évolution d'un système, vue comme une courbe dans l'espace des phases paramétrée par le temps.

Par construction, on a

$$(3.4) \quad i(X_f)\omega = -df,$$

et l'on introduit le crochet de Poisson $\{f, g\} = \mathcal{L}_{X_f}(g)$ de deux fonctions f et g , d'où les expressions équivalentes

$$(3.5) \quad \{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = \langle dg, X_f \rangle = \langle df \wedge dg, \Lambda \rangle.$$

Noter aussi la formule

$$(3.6) \quad [X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

Dans un système mécanique, si f représente une grandeur mesurable sur le système en évolution, la dérivée temporelle est donnée par la loi

$$(3.7) \quad \dot{f} = \{H, f\}.$$

La variété symplectique la plus remarquable est l'espace cotangent $M = T^*N$ d'une variété N . La *forme de Liouville* sur M est la 1-forme η caractérisée par

$$(3.8) \quad \langle \eta_\xi, \zeta \rangle = \langle \xi, T_\xi \pi(\zeta) \rangle$$

avec les notations suivantes :

- x est un point de N
- ξ appartient à $T_x^*N \subset M$
- ζ appartient à $T_\xi M$ et $\eta_\xi \in T_\xi^*M$ est la valeur de la forme η en ξ
- π est la projection de $M = T^*N$ sur N , d'où $\pi(\xi) = x$
- $T_\xi \pi$ est l'application de $T_\xi M$ dans $T_x N$ déduite de π .

On pose ensuite $\omega = d\eta$, d'où $d\omega = 0$ et l'on montre que ω est non-dégénérée.

Dans le cas général, introduisons sur M des coordonnées locales $x^1, \dots, x^m$, puis les champs de vecteurs $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Si l'on développe ω sous la forme $\frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ au moyen d'une matrice antisymétrique (ω_{ij}) , la relation $d\omega = 0$ s'écrit

$$(3.9) \quad \partial_i \omega_{jk} + \partial_j \omega_{ki} + \partial_k \omega_{ij} = 0.$$

Si (Λ^{ij}) est la matrice inverse de la matrice $(-\omega_{ij})$, on a

$$(3.10) \quad \Lambda = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Lambda^{ij} \partial_i \wedge \partial_j$$

$$(3.11) \quad \Lambda^{ij} = \{x^i, x^j\}$$

$$(3.12) \quad \{f, g\} = \sum_{i,j} \Lambda^{ij} \partial_i f \cdot \partial_j g.$$

Dans le cas d'un espace cotangent $M = T^*N$, introduisons des coordonnées locales $q^1, \dots, q^n$ sur N . Sur M , on a un système de coordonnées locales⁽¹⁷⁾ $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ tel que la forme de Liouville soit

$$(3.13) \quad \eta = \sum_{i=1}^n p_i dq^i,$$

d'où

$$(3.14) \quad \omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i.$$

On en déduit l'expression de Λ , soit

$$(3.15) \quad \Lambda = \sum_{i=1}^n \partial_{p_i} \wedge \partial_{q^i},$$

⁽¹⁷⁾ On ne distingue pas entre la fonction q^i sur N et la fonction $q^i \circ \pi$ sur M , où $\pi : M \rightarrow N$ est la projection.

d'où les crochets de Poisson

$$(3.16) \quad \{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial q^i} \right).$$

En particulier, on a

$$(3.17) \quad \{p_i, p_j\} = \{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, q^j\} = \delta_i^j.$$

Le *théorème de Darboux* affirme que, dans toute variété symplectique (M, ω) , on peut trouver, au voisinage de tout point de M , des coordonnées locales $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ telles que la formule (3.14) soit valable, donc aussi les formules (3.15) à (3.17). On dit qu'un tel système de coordonnées est *canonique*.

3.2. Variétés de Poisson

On vient de voir que, si M est une variété symplectique, on peut définir un crochet de Poisson $\{f, g\}$ pour deux fonctions f et g sur M (de classe C^∞). Alors l'application bilinéaire $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ de $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$ fait de $C^\infty(M)$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$, et la relation de Leibniz

$$(3.18) \quad \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

est satisfaite. Autrement dit, $C^\infty(M)$ est une algèbre de Poisson.

De manière générale, une *variété de Poisson* est une variété M dans laquelle on a défini un crochet de Poisson $\{f, g\}$ qui fait de $C^\infty(M)$ une algèbre de Poisson. On prouve alors l'existence d'un champ de 2-vecteurs $\Lambda \in \mathcal{X}^2(M)$ caractérisé par

$$(3.19) \quad \{f, g\} = \langle df \wedge dg, \Lambda \rangle.$$

On dit que Λ est le *champ de Poisson*. Ces définitions sont dues à Lichnérowicz [20].

À toute fonction f sur M , on associe encore le champ de vecteurs hamiltonien $X_f \in \mathcal{X}(M)$ caractérisé par

$$(3.20) \quad \{f, g\} = \mathcal{L}_{X_f}(g) = \langle dg, X_f \rangle,$$

et la formule (3.6) est encore valable. Au moyen de coordonnées locales $x^1, \dots, x^m$ sur M , on peut exprimer Λ sous la forme (3.10) et les formules (3.11) et (3.12) sont encore valables. Pour décrire un crochet de Poisson, il suffit donc de donner les crochets de Poisson $\{x^i, x^j\}$ des coordonnées. Se pose le problème de satisfaire à l'identité de Jacobi

$$(3.21) \quad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

ou la forme équivalente⁽¹⁸⁾

$$(3.6) \quad [X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

Il revient au même de vérifier l'identité de Jacobi pour trois coordonnées $f = x^i$, $g = x^j$, $h = x^k$. On trouve

$$(3.22) \quad \sum_m (\Lambda^{im} \partial_m \Lambda^{jk} + \Lambda^{jm} \partial_m \Lambda^{ki} + \Lambda^{km} \partial_m \Lambda^{ij}) = 0.$$

Noter que si la matrice (Λ^{ij}) est inversible, d'inverse $(-\omega_{ij})$, la formule (3.22) est équivalente à (3.9). De manière plus intrinsèque, la formule (3.22) s'écrit

$$(3.23) \quad [\Lambda, \Lambda]_S = 0$$

avec le crochet de Schouten. Dans le cas symplectique, où Λ est en quelque sorte l'inverse de $-\omega$, la relation $[\Lambda, \Lambda]_S = 0$ équivaut à $d\omega = 0$.

En résumé, *une variété de Poisson est un couple (M, Λ) où M est une variété, et Λ une section de $\Lambda^2 TM$ telle que $[\Lambda, \Lambda]_S = 0$.*

Le théorème de Darboux se généralise au cas des variétés de Poisson d'après Weinstein [37] et Marle (non publié). Dans le cas régulier, où l'application $\Lambda^\sharp$ de T^*M dans TM définie par (3.3) est de rang constant $2r$ au voisinage d'un point x_0 de M , on peut trouver au voisinage de x_0 un système de coordonnées $q^1, \dots, q^r, p_1, \dots, p_r, z^1, \dots, z^s$ (avec $\dim M = 2r + s$) tel que

$$(3.24) \quad \{f, g\} = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} \right)$$

(comme dans le cas symplectique). Les seuls crochets de Poisson non nuls entre coordonnées sont donc $\{p_i, q^i\} = -\{q^i, p_i\} = 1$. Dans le cas non régulier, il faut ajouter au membre de droite de (3.24) une expression de la forme $\sum_{\alpha, \beta} J^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} \frac{\partial g}{\partial z^\beta}$ avec une matrice antisymétrique $(J^{\alpha\beta})$ formée de fonctions de $z^1, \dots, z^s$ et s'annulant au point choisi x_0 .

3.3. Algébroïde de Lie associé à une variété de Poisson

Soit M une variété de Poisson, de champ de Poisson Λ . Rappelons que $\Lambda^\sharp$ est un homomorphisme de fibrés vectoriels, de T^*M dans TM , caractérisé par la relation

$$(3.25) \quad \langle \alpha, \Lambda^\sharp(\beta) \rangle = \langle \beta \wedge \alpha, \Lambda \rangle$$

pour deux 1-formes différentielles α, β . En particulier, on a $\Lambda^\sharp(df) = X_f$.

On va utiliser $\Lambda^\sharp$ comme ancre d'un algébroïde de Lie $\mathcal{P}$, dont le fibré vectoriel sous-jacent est donné par $\mathcal{P} = T^*M$, d'où $\mathcal{P}^* = TM$. Il reste à définir le crochet $[\alpha, \beta]_{\mathcal{P}}$ de deux 1-formes. D'après ce qu'on a vu en 2.6, il s'agit de définir le crochet de

⁽¹⁸⁾ Rappelons qu'on a $X_f = \sum_{i,j} \Lambda^{ij} \partial_i f \cdot \partial_j$.

Schouten sur les sections de $\Lambda^\bullet \mathcal{P}$, c'est-à-dire sur l'espace $\mathcal{U}^\bullet(M) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{U}^p(M)$ des formes différentielles. Mais, d'après ce qu'on a vu en 2.7, tout revient à définir une différentielle $d_{\mathcal{P}}$ sur les sections de $\Lambda^p \mathcal{P}^*$, c'est-à-dire sur les champs de p -vecteurs. On posera

$$(3.26) \quad d_{\mathcal{P}} v = [\Lambda, v]_S$$

(crochet de Schouten des champs de multivecteurs). Comme Λ est de degré 2, l'opérateur $d_{\mathcal{P}}$ augmente le degré de 1, et l'identité de Jacobi (2.8) jointe à la condition d'intégrabilité $[\Lambda, \Lambda]_S = 0$ implique $d_{\mathcal{P}} d_{\mathcal{P}} v = 0$. Cela permet de définir la *cohomologie de Poisson* d'une variété de Poisson (M, Λ) puisque $d_{\mathcal{P}}$ applique $\mathcal{X}^p(M)$ dans $\mathcal{X}^{p+1}(M)$ et vérifie $d_{\mathcal{P}} d_{\mathcal{P}} = 0$.

On peut alors suivre les définitions de 2.7. Tout d'abord, pour toute 1-forme α , on définit le produit intérieur $i(\alpha)$ sur $\mathcal{X}^p(M)$ par

$$(3.27) \quad i(\alpha) \cdot (X_1 \wedge \cdots \wedge X_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \langle \alpha, X_j \rangle X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_p.$$

On étend cela aux q -formes de sorte que

$$(3.28) \quad i(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q) = i(\alpha_1) \dots i(\alpha_q).$$

Toutes ces opérations sont de l'algèbre bien connue sur les multivecteurs et les formes en un point. Pour toute q -forme ω , on pose

$$(3.29) \quad \mathcal{L}_{\omega}^{\mathcal{P}} = i(\omega) d_{\mathcal{P}} - (-1)^q d_{\mathcal{P}} i(\omega)$$

et le crochet de Schouten sur $\mathcal{U}^\bullet(M) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{U}^p(M)$ est caractérisé par la formule

$$(3.30) \quad [\mathcal{L}_{\omega}^{\mathcal{P}}, i(\varphi)] = i([\omega, \varphi]_S)$$

pour le commutateur gradué d'opérateurs. Au niveau des 1-formes, le crochet de Schouten est caractérisé par la formule (2.12) (avec $\rho = \Lambda^\#$) jointe à $[df, dg]_S = d\{f, g\}$. De manière explicite, on a

$$(3.31) \quad \langle [\alpha, \beta]_S, X \rangle = \langle \alpha, [\Lambda, \langle \beta, X \rangle]_S \rangle - \langle \beta, [\Lambda, \langle \alpha, X \rangle]_S \rangle - \langle \alpha \wedge \beta, [\Lambda, X]_S \rangle$$

lorsque α, β sont des 1-formes et X un champ de vecteurs.

3.4. Feuilletage symplectique d'une variété de Poisson

Sur une variété de Poisson (M, Λ) la donnée de l'ancre $\Lambda^\# : T^*M \rightarrow TM$ définit comme en 2.4 un feuilletage $\mathcal{F}$ (au sens de Sussmann) sur la variété M . Si F est une feuille de ce feuilletage, on montre qu'il existe sur F une 2-forme ω_F fermée et non-dégénérée. Si f et g sont deux fonctions sur M , de restrictions respectives f_F et g_F à F , on montre que le crochet de Poisson de f_F et g_F sur la variété symplectique

(F, ω_F) est la restriction à F du crochet de Poisson $\{f, g\}$ calculé dans (M, Λ) . Pour cette raison, le feuilletage $\mathcal{F}$ est appelé le *feuilletage symplectique* de (M, Λ) .

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie connexe G . Le groupe G agit par la représentation adjointe sur $\mathfrak{g}$ et, par dualité, on obtient la *représentation coadjointe* de G dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$. Vers 1970, Kostant, Kirillov et Souriau ont construit une structure symplectique G -invariante sur chaque orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$. Il fut découvert un peu plus tard que ces orbites forment le feuilletage symplectique d'une structure de Poisson sur $\mathfrak{g}^*$ ainsi caractérisée : identifiant $\mathfrak{g}$ à l'ensemble des fonctions linéaires sur $\mathfrak{g}^*$, alors le crochet de Poisson se réduit sur $\mathfrak{g}$ au crochet de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Cette construction se généralise. Soit $\mathcal{G}$ un algébroïde de Lie de base M et d'ancre ρ . Le dual $\mathcal{G}^*$ du fibré vectoriel $\mathcal{G}$ est une variété, et les sections de $\mathcal{G}$ s'identifient aux fonctions de classe C^∞ sur $\mathcal{G}^*$ qui sont linéaires sur chaque fibre $\mathcal{G}_x^*$ (pour x dans M). Alors $\mathcal{G}^*$ est une variété de Poisson, de sorte que le crochet de Poisson sur $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ induise sur le sous-espace $\Gamma(\mathcal{G})$ le crochet de l'algébroïde $\mathcal{G}$. Lorsque M est réduit à un point, on retrouve le cas précédent $\mathcal{G}^* = \mathfrak{g}^*$, et lorsque $\mathcal{G} = TM$, on retrouve la structure symplectique (donc de Poisson) sur $\mathcal{G}^* = T^*M$, le fibré cotangent de M .

3.5. Structures de Dirac

Si (M, ω) est une variété symplectique, ou (M, Λ) une variété de Poisson, ces structures s'induisent mal sur des sous-variétés. Pour formuler de manière plus générale la méthode de réduction symplectique, et aussi pour préciser la méthode de Dirac pour traiter des systèmes mécaniques avec contraintes, on a interpolé entre les cas symplectique et de Poisson.

Soit M une variété, et identifions les fibrés TM et T^*M à des sous-fibrés de leur somme directe $\mathcal{E} = TM \oplus T^*M$. Etant données deux sections $s_i = (X_i, \alpha_i)$ de $\mathcal{E}$, où X_i est un champ de vecteurs sur M et α_i une 1-forme différentielle, on utilise les définitions suivantes :

$$(3.32) \quad (s_1 | s_2) = \langle \alpha_1, X_2 \rangle + \langle \alpha_2, X_1 \rangle$$

$$(3.33) \quad \rho(s_i) = X_i$$

$$(3.34) \quad [s_1, s_2] = ([X_1, X_2], \mathcal{L}_{X_1} \alpha_2 - i(X_2) d\alpha_1).$$

On obtient ainsi un algébroïde de Courant (voir n° 2.8).

Une *structure de Dirac* sur M est un sous-fibré $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$, égal à son orthogonal $\mathcal{D}^\perp$ pour le produit scalaire $(s_1 | s_2)$, et tel que l'espace $\Gamma(\mathcal{D})$ de ses sections soit stable pour le crochet $[s_1, s_2]$. Autres manières équivalentes de décrire $\mathcal{D}$:

— Se donner un sous-fibré R de TM et une forme bilinéaire antisymétrique ω sur R telle que les sections de $\mathcal{D}$ se composent des paires (X, α) avec une section X de R , et $\omega(X, Y) = \alpha(Y)$ pour toute section Y de R . Lorsque $R = TM$, ω est une 2-forme, et la stabilité de $\Gamma(\mathcal{D})$ par rapport au crochet équivaut à $d\omega = 0$ (cas pré-symplectique).

— De manière symétrique, un sous-fibré S de T^*M et une section Λ de $\Lambda^2 S^*$. Alors les sections de $\mathcal{D}$ se composent des paires (X, α) avec une section α de S et $\Lambda(\alpha, \beta) = \beta(X)$ pour toute section β de S . Cas particulier $S = T^*M$, d'où $\Lambda \in \mathcal{X}^2(M)$ et la stabilité de $\Gamma(\mathcal{D})$ par rapport au crochet équivaut à $[\Lambda, \Lambda]_S = 0$.

Dans tous les cas, $\mathcal{D}$ devient, pour l'ancre et le crochet induits par ceux de $\mathcal{E}$, un algèbroïde de Lie. On retrouve comme cas particuliers l'algèbroïde associé à un tenseur de Poisson, et aussi un algèbroïde sur T^*M dans le cas pré-symplectique (voir Koszul [18]).

4. PROBLÈMES D'INTÉGRATION

4.1. Algèbroïde de Lie d'un groupoïde

Soit $\mathcal{G} = (G_1 \overset{s}{\underset{b}{\rightrightarrows}} M)$ un groupoïde de Lie de base M . Nous plongeons M comme sous-variété de G_1 au moyen de la section unité $e : M \rightarrow G_1$. On définit comme suit un fibré vectoriel sur M : en tout point x de M , on a les applications tangentes $T_x s$ et $T_x b$ de $T_x G_1$ dans $T_x M$. On note $\mathcal{E}_x$ le noyau de $T_x s$ (c'est un supplémentaire de $T_x M$ dans $T_x G_1$), et ρ_x la restriction de $T_x b$ à $\mathcal{E}_x$. On a donc un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur M et une ancre $\rho : \mathcal{E} \rightarrow TM$. Pour achever de définir un algèbroïde de Lie, il reste à construire le *crochet de deux sections* de $\mathcal{E}$. Mais toute section ξ de $\mathcal{E}$ sur M s'étend de manière unique en un champ de vecteurs Ξ sur G_1 avec les deux propriétés suivantes :

- en chaque point g de G_1 , le vecteur Ξ_g de $T_g G_1$ est tangent à la fibre de s passant par g ;
- Ξ est invariant par les translations à droite.

Il est alors clair que les champs de vecteurs sur G_1 , tangents aux fibres de s , et invariants à droite, forment une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}(G_1)$.

Voici quelques exemples :

a) Pour le groupoïde des paires $V(M) = M \times M$ défini en 1.2a), l'algèbroïde de Lie est TM , avec l'application identique pour ancre.

b) Comme en 1.2b), considérons un fibré principal P de base M et de groupe G et le groupoïde correspondant $(P \times P)/G$. Pour construire l'algèbroïde correspondant, on part du fibré TP sur P , avec l'action (à droite) de G sur P et TP . Par passage au quotient par G , on obtient un fibré vectoriel $\mathcal{E} = TP/G$ de base $M = P/G$. Les sections de $\mathcal{E}$ sur M s'identifient aux champs de vecteurs sur P invariants par G ; elles forment donc une algèbre de Lie. Les *connexions* sur P correspondent aux sections de l'ancre $\rho : \mathcal{E} \rightarrow TM$.

c) Plus particulièrement, supposons que P soit le fibré des repères d'un fibré vectoriel E sur M . Le groupoïde correspondant de base M a pour flèches de x vers y les isomorphismes de fibres de E_x sur E_y . L'algébroïde correspondant $At(E)$ est une extension

$$0 \rightarrow End(E) \rightarrow At(E) \rightarrow TM \rightarrow 0$$

où $End(E)$ est le fibré en algèbres de Lie des endomorphismes des fibres de E . Ce fibré $At(E)$ a été introduit par Atiyah [1] dans le contexte des variétés holomorphes et il en a déduit une construction des classes caractéristiques.

d) Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété M . En 1.2b) on a décrit le groupoïde correspondant $G \times M \rightrightarrows M$. Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G , l'action infinitésimale de $\mathfrak{g}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(M)$. On peut voir ceci comme une ancre $\beta : M \times \mathfrak{g} \rightarrow TM$ pour le fibré vectoriel trivial $M \times \mathfrak{g}$ sur M . Au moyen d'un crochet de Lie *ad hoc* sur les sections de $M \times \mathfrak{g}$ (c'est-à-dire l'espace $C^\infty(M, \mathfrak{g})$ des applications de M dans $\mathfrak{g}$), on décrit un algébroïde de Lie ; c'est celui associé au groupoïde $G \times M \rightrightarrows M$.

e) L'exemple le plus trivial. Si G est un groupe de Lie vu comme groupoïde sur un espace à un point, son algébroïde de Lie est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G .

4.2. Groupoïdes symplectiques

Le problème des variétés de Poisson est de les agrandir en variétés symplectiques. Soit (M, Λ) une variété de Poisson, avec le crochet de Poisson $\{f, g\}_\Lambda$ sur $C^\infty(M)$. Une *réalisation symplectique* de (M, Λ) est une variété symplectique (S, ω) , avec le crochet de Poisson $\{f, g\}_\omega$ sur $C^\infty(S)$ et une application $\phi : S \rightarrow M$ qui soit surjective, submersive et respecte le crochet de Poisson

$$(4.1) \quad \{f \circ \phi, g \circ \phi\}_\omega = \{f, g\}_\Lambda \circ \phi$$

pour f, g dans $C^\infty(M)$. On doit à Weinstein [38] la construction d'une réalisation symplectique⁽¹⁹⁾ avec $\dim S = 2 \dim M$.

La bonne notion est celle de *groupoïde symplectique*⁽²⁰⁾. C'est un groupoïde $G_1 \overset{s}{\rightrightarrows}_b M$ muni d'une forme symplectique ω sur G_1 telle que

$$(4.2) \quad pr_1^*(\omega) + pr_2^*(\omega) = m^*(\omega).$$

Ici pr_1 et pr_2 sont les projections de $G_2 = G_1 \times_s G_1$ sur G_1 et m est la multiplication.

Deux exemples :

⁽¹⁹⁾ Résultat en fait anticipé dans S. Lie.

⁽²⁰⁾ Voir les pages 223 et suivantes de [13].

- Si M est une variété, on pose $G_1 = T^*M$, s et b sont la projection de T^*M sur M . Dire que G_1 est un groupoïde revient donc à dire que c'est un fibré en groupes de Lie, mais les fibres sont des espaces vectoriels de dimension finie, donc des groupes de Lie. L'algébroïde correspondant est T^*M lui-même, avec l'ancrage nul, et le crochet nul.
- Si G est un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le fibré cotangent T^*G est une variété symplectique. Si (g, α) est un point de T^*G , avec $g \in G$ et $\alpha \in T_g^*G$, la source et le but sont définis par

$$(4.3) \quad s(g, \alpha) = g^{-1}\alpha, \quad b(g, \alpha) = \alpha g^{-1}$$

et appartiennent à $T_1^*G = \mathfrak{g}^*$. Donc, la base du groupoïde T^*G est $\mathfrak{g}^*$, et les flèches de $u \in \mathfrak{g}^*$ vers $v \in \mathfrak{g}^*$ sont les éléments g de G tels que $(ad^*g)(u) = v$.

Composition évidente.

Les groupoïdes symplectiques ont de merveilleuses propriétés :

a) La section unité $e(M) \subset G_1$ (qu'on identifiera à M) est une sous-variété lagrangienne de G_1 . En particulier, la restriction à M de la forme symplectique ω est nulle, et $\dim G_1 = 2 \dim M$.

b) En chaque point u de G_1 , les espaces tangents aux fibres pour s et b passant par u sont de dimension égale à celle de M , et orthogonaux l'un à l'autre pour le produit scalaire sur $T_u G_1$ induit par ω .

c) Si f et g sont deux fonctions sur M , on a $\{f \circ s, g \circ b\} = 0$ pour le crochet de Poisson sur G_1 .

On montre ensuite qu'il existe sur M une unique structure de Poisson telle que l'application source $s : G_1 \rightarrow M$ soit une réalisation symplectique de la variété de Poisson M . Par exemple, dans le cas du fibré cotangent T^*G à un groupe de Lie, la structure de Poisson sur la base $\mathfrak{g}^*$ est celle décrite à la section 3.4.

4.3. Le troisième théorème de Lie

Nous nous contenterons d'un bref historique⁽²¹⁾. Classiquement, le troisième théorème de Lie affirme que, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ réelle de dimension finie, il existe un groupe de Lie G , connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le problème analogue est d'associer à tout algébroïde de Lie $(\mathcal{G}, \rho)$ de base M un groupoïde de Lie de base M , dont les fibres $s^{-1}(x)$ (pour $x \in M$) soient connexes et simplement connexes.

Dans [29], Pradines en 1968 résout le problème *localement*, et annonce de manière erronée le résultat global. Auparavant, en 1966, A. Douady et M. Lazard ont traité dans [12] un problème partiel : si l'on a un fibré en algèbres de Lie $\mathcal{G}$ sur une variété

⁽²¹⁾ Voir [13], pages 256 à 262.

M , et si l'on associe à chaque point x de M le groupe de Lie G_x , connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathcal{G}_x$, organiser la famille des groupes G_x en une variété G au-dessus de M . La difficulté est que la topologie de ces groupes change, et que G n'est pas toujours séparée même lorsque M est séparée.

Pendant environ 40 ans, on a donné des contre-exemples [10] et des résultats partiels jusqu'aux résultats définitifs de Crainic et Fernandes [7] en 2003, donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité d'un algebroïde de Lie. Pour obtenir dans tous les cas un objet global correspondant à l'objet infinitésimal constitué d'un algebroïde de Lie, il faut introduire des 2-groupoïdes. Le résultat définitif a été récemment annoncé par Chen Chang Zhu [40].

On a vu à la section 3.3 comment associer un algebroïde de Lie $(T^*M, \Lambda^\sharp)$ à une variété de Poisson (M, Λ) . K. Mackenzie et Ping Xu ont montré que cet algebroïde s'intègre en un groupoïde de Lie si et seulement si la variété de Poisson est la base d'un groupoïde symplectique. Ceci a permis à Crainic et Fernandes d'appliquer dans [8] leurs méthodes au cas de l'intégrabilité des variétés de Poisson au moyen des groupoïdes symplectiques.

5. APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

5.1. Monodromie d'une équation différentielle linéaire

Soient V un espace vectoriel complexe de dimension finie, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et A une application holomorphe de Ω dans $\text{End}(V)$. On lui associe l'équation différentielle

$$(5.1) \quad \frac{dF}{dz} = A \cdot F \quad (\text{E})$$

où F est une fonction holomorphe à valeur dans V , définie dans un ouvert de Ω . En général, il n'existe pas de solution définie dans tout Ω , les solutions sont multiformes. Voici la parade. Notons $\tilde{\Omega}$ un revêtement universel de Ω et p la projection de $\tilde{\Omega}$ sur Ω . La *résolvante* de l'équation différentielle est une application holomorphe U de $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$ dans le groupe $G = GL(V)$ des transformations linéaires inversibles de V . Elle est caractérisée par les conditions

$$(5.2) \quad U(\tilde{z}, \tilde{z}) = 1 \quad \text{pour} \quad \tilde{z} \in \tilde{\Omega}$$

$$(5.3) \quad \frac{dU(\tilde{z}', \tilde{z})}{d\tilde{z}'} = A(p(\tilde{z}')) U(\tilde{z}', \tilde{z}).$$

On en déduit les relations

$$(5.4) \quad U(\tilde{z}'', \tilde{z}') U(\tilde{z}', \tilde{z}) = U(\tilde{z}'', \tilde{z})$$

$$(5.5) \quad \frac{dU(\tilde{z}', \tilde{z})}{d\tilde{z}} = -U(\tilde{z}', \tilde{z}) A(p(\tilde{z})).$$

Soit Γ le groupe des automorphismes $\tilde{z} \mapsto \tilde{z}g$ de la variété holomorphe $\tilde{\Omega}$ tels que

$$(5.6) \quad p(\tilde{z}g) = p(\tilde{z})$$

pour tout $\tilde{z}$ dans $\tilde{\Omega}$. On a alors

$$(5.7) \quad U(\tilde{z}'g, \tilde{z}g) = U(\tilde{z}', \tilde{z})$$

pour tout g dans Γ . Le groupoïde fondamental $\Pi(\Omega)$ de Ω peut se décrire comme le quotient de $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$ par l'action diagonale de Γ . Les formules précédentes montrent que U peut être vu comme un homomorphisme du groupoïde $\Pi(\Omega)$ dans le groupoïde $\mathcal{G} = (G_1 \overset{s}{\rightrightarrows}_b G_0)$ défini comme en 1.2b) par

$$\begin{aligned} G_0 &= \Omega \\ G_1 &= \Omega \times \Omega \times G \end{aligned}$$

composition :

$$(5.8) \quad (a, b; g)(b, c; g') = (a, c; gg')$$

source et but :

$$(5.9) \quad s(a, b; g) = b, \quad b(a, b; g) = a.$$

Explicitement, on a la *formule de Dyson* pour calculer la résolvante :

si $(\gamma(t) \mid 0 \leq t \leq 1)$ est un chemin dans Ω allant de a à b , représentant un élément $[\gamma]$ du groupoïde $\Pi(\Omega)$, et si l'on pose $a(t) = A(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, on a

$$(5.10) \quad U([\gamma]) = \sum_{n \geq 0} \int_{\Delta_n} a(t_n) \cdots a(t_1) dt_1 \cdots dt_n,$$

où le domaine d'intégration est le simplexe $\Delta_n = \{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq 1\}$ dans $\mathbb{R}^n$.

5.2. Groupe de Galois différentiel

On suppose désormais que $A(z)$ est une fonction rationnelle et que l'on a $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$, où S est l'ensemble des pôles de $A(z)$. La théorie de Picard-Vessiot définit un groupe de Galois différentiel associé à l'équation (E). Le *théorème classique de Schlesinger* décrit ainsi ce groupe : choisissons un point-base z_0 et notons Δ le sous-groupe de $G = GL(V)$ formé des monodromies $U(\gamma)$ pour les lacets γ en z_0 . Dans le cas de Fuchs⁽²²⁾, le groupe de Galois différentiel est le *plus petit sous-groupe algébrique de G contenant Δ* . Mais on n'a rien de tel en dehors du cas de Fuchs.

⁽²²⁾ C'est celui où $A(z)$ est de la forme $\sum_{s \in S} A_s/(z-s)$ avec des A_s fixes pour s dans S (les pôles sont d'ordre 1).

Voici la difficulté : dans le cas de l'équation $dF = Fdz$ définissant l'exponentielle, on a $\Omega = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{C}^\times$ et $A(z) = 1$ et comme l'espace $\mathbb{C}$ est simplement connexe, on a $\Delta = (1)$, alors que la théorie de Picard-Vessiot affirme que le groupe de Galois différentiel est $\mathbb{C}^\times$. Ceci a poussé Ramis à introduire la monodromie sauvage, associée aux lignes de Stokes.

Présentons maintenant une solution simple basée sur les groupoïdes, proche des considérations de Malgrange [25]. On a défini plus haut la monodromie comme un homomorphisme de groupoïdes :

$$U : \Pi(\Omega) \rightarrow \Omega \times \Omega \times G.$$

Mais $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$ et G (isomorphe à $GL(d, \mathbb{C})$) sont des variétés algébriques complexes affines. Le *groupoïde de Galois de l'équation (E)* est par définition la plus petite sous-variété algébrique de $\Omega \times \Omega \times G$ contenant l'image $U(\Pi(\Omega))$; c'est un sous-groupoïde $\text{Gal}(E)$ du groupoïde $\mathcal{G}$. Dans le cas de Fuchs, moyennant le choix d'un point-base z_0 dans Ω , le groupe $\text{Gal}(E)_{z_0}$ associé au groupoïde $\text{Gal}(E)$ coïncide avec le groupe algébrique défini plus haut.

Revenons à l'exemple de l'équation $dF = Fdz$ sur $\mathbb{C}$. On a $\tilde{\Omega} = \mathbb{C}$, car $\mathbb{C}$ est simplement connexe, et la résolvante est $U(z', z) = \exp(z' - z)$. Par suite, le groupoïde $U(\Pi(\Omega))$ se compose des triplets

$$(z', z, \exp(z' - z)).$$

Comme l'exponentielle n'est pas une fonction algébrique, la seule variété algébrique de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ contenant cette image est la variété entière, d'où

$$\text{Gal}(E) = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times.$$

On a donc $\text{Gal}(E)_{z_0} = \mathbb{C}^\times$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$. Par contre, le groupe Δ associé au point z_0 se compose des nombres $\exp(z_0 - z_0) = 1$, et c'est le groupe algébrique réduit à 1. Le point est que *les opérations d'intersection* (avec $z = z' = z_0$) *et d'adhérence de Zariski ne commutent pas*.

5.3. Une version moderne de la théorie de Picard-Vessiot

Dans l'exposé classique de la théorie de Picard-Vessiot par Kolchin, l'accent est mis sur les corps différentiels. C'était l'époque où la géométrie algébrique se basait sur les *corps* de fonctions rationnelles, à la Zariski-Weil. La géométrie algébrique moderne, née des labeurs de Grothendieck, s'appuie sur les *anneaux*.

Reprenons l'exemple $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$, où S est fini. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des fonctions rationnelles à pôles situés dans S . On a $\mathcal{O} = \mathbb{C} \left[z, \frac{1}{D} \right]$ avec $D = \prod_{s \in S} (z - s)$. Dans l'anneau $\mathcal{O}$, on dispose de la dérivation $D_{\mathcal{O}} = \frac{d}{dz}$. Une *extension différentiellement*

simple de $(\mathcal{O}, D_{\mathcal{O}})$ est une paire $(\mathcal{J}, D_{\mathcal{J}})$ formée d'un anneau commutatif $\mathcal{J}$ et d'une dérivation $D_{\mathcal{J}}$ avec les hypothèses suivantes :

- $\mathcal{O}$ est un sous-anneau de $\mathcal{J}$;
- la dérivation $D_{\mathcal{J}}$ de $\mathcal{J}$ étend la dérivation $D_{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$;
- il n'existe aucun idéal de $\mathcal{J}$ stable par $D_{\mathcal{J}}$ et distinct de 0 et $\mathcal{J}$.

Fixons une telle extension.

L'application $A : \Omega \rightarrow \text{End}(V)$ peut être vue comme un élément de $\mathcal{O} \otimes \text{End}(V)$, sous-anneau de $\mathcal{J} \otimes \text{End}(V)$. L'équation différentielle (E) $dF = AFdz$ s'étend en une équation du type

$$(5.11) \quad (D_{\mathcal{J}} \otimes \mathbb{I})(U) = A \cdot U \quad (\text{E}_{\mathcal{J}})$$

avec l'inconnue U dans $\mathcal{J} \otimes \text{End}(V)$.

Dans ces conditions, on dit que $(\mathcal{J}, D_{\mathcal{J}})$ est une *extension de Picard-Vessiot associée à l'équation (E)* si l'équation $(\text{E}_{\mathcal{J}})$ a une solution U inversible dans l'anneau $\mathcal{J} \otimes \text{End}(V)$, engendrant $\mathcal{J}$ au sens suivant : tout sous-anneau $\mathcal{J}_0$ de $\mathcal{J}$ contenant $\mathcal{O}$ et tel que U soit un élément inversible de $\mathcal{J}_0 \otimes \text{End}(V)$ coïncide avec $\mathcal{J}$. Fixons une telle extension, dont on montre facilement l'existence, et l'unicité à isomorphisme près.

Soit alors Γ le groupe des automorphismes de l'anneau $\mathcal{J}$ qui fixent les éléments de $\mathcal{O}$ et commutent à $D_{\mathcal{J}}$. On définit une représentation linéaire fidèle

$$\rho : \Gamma \rightarrow GL(V)$$

caractérisée par

$$(5.12) \quad (g \otimes \mathbb{I})(U) = U \cdot (1 \otimes \rho(g)) \quad \text{pour } g \in \Gamma.$$

Le groupe de Galois différentiel « algébrique » est le sous-groupe algébrique $\rho(\Gamma)$ de $GL(V)$. Il est conjugué dans $GL(V)$ au groupe de Galois « monodromique » $\text{Gal}(E)_{z_0}$ associé à un point-base z_0 de Ω (et défini en 5.2).

5.4. Généralisations

a) Tout ce qui précède s'étend sans difficulté au cas où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^d$, et où le système différentiel est

$$(5.13) \quad \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} = A_i(z) F(z) \quad (1 \leq i \leq d, \quad z = (z^1, \dots, z^d)).$$

Les applications $A_i : \Omega \rightarrow \text{End}(V)$ sont holomorphes et satisfont à la condition d'intégrabilité

$$(5.14) \quad \frac{\partial A_i}{\partial z^j} - \frac{\partial A_j}{\partial z^i} = [A_i, A_j].$$

b) On peut même, avec Deligne, considérer le cas où Ω est une variété holomorphe (ou algébrique) et l'équation différentielle est formulée pour un fibré vectoriel E de base Ω , avec une connexion intégrable ∇ .

c) On doit à H. Umemura [34], [35] et B. Malgrange [25] la définition des groupoïdes de Galois associés à des feuilletages, ce qui fournit une théorie de Galois différentielle pour des équations différentielles non-linéaires.

Quelques mots sur la bibliographie. — Tout d'abord, voici quelques ouvrages de fond sur le sujet des groupoïdes et des algébroïdes de Lie, et de la géométrie des variétés de Poisson : [2, 9, 13, 15, 19, 23, 24, 26, 36]. Pour comprendre la philosophie des groupoïdes, voir l'article de propagande : [39]. Le lien avec la géométrie non-commutative est l'objet du livre [32].

RÉFÉRENCES

- [1] M. F. ATIYAH – Complex analytic connections in fibre bundles, *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), p. 181–207.
- [2] O. BABELON, P. CARTIER & Y. KOSMANN-SCHWARZBACH (éds.) – *Proceedings of Lectures on integrable systems (Sophia-Antipolis, 1991)*, World Scientific Publishing Co. Inc., 1994.
- [3] W. BRANDT – Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, *Math. Ann.* **97** (1926), p. 360–366.
- [4] P. CARTIER – Some fundamental techniques in the theory of integrable systems, in *Lectures on integrable systems (Sophia-Antipolis, 1991)*, World Scientific Publishing Co. Inc., 1994, p. 1–41.
- [5] A. CONNES – A survey of foliations and operator algebras, in *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 38, Amer. Math. Soc., 1982, p. 521–628.
- [6] T. J. COURANT – Dirac manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **319** (1990), p. 631–661.
- [7] M. CRAINIC & R. L. FERNANDES – Integrability of Lie brackets, *Ann. of Math.* **157** (2003), p. 575–620.
- [8] ———, Integrability of Poisson brackets, *J. Differential Geom.* **66** (2004), p. 71–137.
- [9] P. DAZORD & A. WEINSTEIN (éds.) – *Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 20, Springer, 1991.
- [10] P. DAZORD – Obstruction à un troisième théorème de Lie non linéaire pour certaines variétés de Poisson, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **306** (1988), p. 273–278.

- [11] M. DEMAZURE & A. GROTHENDIECK (éds.) – *Schémas en groupe. I : Propriétés générales des schémas en groupe. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA3)*, Lecture Notes in Math., vol. 151, Springer, 1970.
- [12] A. DOUADY & M. LAZARD – Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes, *Invent. Math.* **1** (1966), p. 133–151.
- [13] J.-P. DUFOUR & N. T. ZUNG – *Poisson structures and their normal forms*, Progress in Math., vol. 242, Birkhäuser, 2005.
- [14] M. GERSTENHABER – The cohomology structure of an associative ring, *Ann. of Math.* **78** (1963), p. 267–288.
- [15] S. GUTT, J. RAWNSLEY & D. STERNHEIMER (éds.) – *Poisson geometry, deformation quantisation and group representations*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 323, Cambridge Univ. Press, 2005.
- [16] A. HAEFLIGER – Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), p. 248–329.
- [17] M. HILSUM & G. SKANDALIS – Morphismes K -orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes), *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **20** (1987), p. 325–390.
- [18] J.-L. KOSZUL – Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie, *Astérisque* numéro hors-série (1985), p. 257–271, The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984).
- [19] P. LIBERMANN & C. MARLE – *Symplectic geometry and analytical mechanics*, D. Reidel, 1987.
- [20] A. LICHNEROWICZ – Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Differential Geom.* **12** (1977), p. 253–300.
- [21] Z.-J. LIU, A. WEINSTEIN & P. XU – Dirac structures and Poisson homogeneous spaces, *Comm. Math. Phys.* **192** (1998), p. 121–144.
- [22] J.-L. LODAY – Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz, *Enseign. Math.* **39** (1993), p. 269–293.
- [23] K. C. H. MACKENZIE – *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 124, Cambridge Univ. Press, 1987.
- [24] ———, *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 213, Cambridge Univ. Press, 2005.
- [25] B. MALGRANGE – Le groupoïde de Galois d'un feuilletage, in *Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2*, Monogr. Enseign. Math., vol. 38, Enseignement Math., 2001, p. 465–501.
- [26] I. MOERDIJK & J. MRČUN – *Introduction to foliations and Lie groupoids*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 91, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [27] ———, Lie groupoids, sheaves and cohomology, in *Poisson geometry, deformation quantisation and group representations*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 323, Cambridge Univ. Press, 2005, p. 145–272.

- [28] J. PRADINES – Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **263** (1966), p. A907–A910.
- [29] ———, Troisième théorème de Lie sur les groupoïdes différentiables, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **267** (1968), p. A21–A23.
- [30] G. S. RINEHART – Differential forms on general commutative algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), p. 195–222.
- [31] D. ROYTENBERG – Courant algebroids, derived brackets and even symplectic manifolds, Thèse, UC Berkeley, 1999, arXiv:math.DG/9910078.
- [32] A. CANNAS DA SILVA & A. WEINSTEIN – *Geometric models for noncommutative algebras*, Berkeley Math. Lect. Notes, vol. 10, Amer. Math. Soc., 1999.
- [33] H. J. SUSSMANN – Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **180** (1973), p. 171–188.
- [34] H. UMEMURA – Differential Galois theory of infinite dimension, *Nagoya Math. J.* **144** (1996), p. 59–135.
- [35] ———, Invitation to Galois theory, in *Differential equations and quantum groups*, IRMA Lect. Notes Math. Theor. Phys., vol. 9, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, p. 269–289.
- [36] I. VAISMAN – *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Progress in Math., vol. 118, Birkhäuser, 1994.
- [37] A. WEINSTEIN – The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential Geom.* **18** (1983), p. 523–557.
- [38] ———, Symplectic groupoids and Poisson manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **16** (1987), p. 101–104.
- [39] ———, Groupoids : unifying internal and external symmetry. A tour through some examples, *Notices Amer. Math. Soc.* **43** (1996), p. 744–752.
- [40] C. C. ZHU – Lie II theorem for Lie algebroids, via stacky Lie groupoids, prépublication arXiv:math.DG/0701024.

Pierre CARTIER

C.N.R.S., I.H.É.S. et I.M.J.
 35, route de Chartres
 91440 Bures-sur-Yvette
E-mail : cartier@ihes.fr