Astérisque

AST

Équations différentielles et singularités. En l'honneur de J. M. Aroca - Pages préliminaires

Astérisque, tome 323 (2009), p. I-XXVII

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__323__R1_0>

© Société mathématique de France, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

323

ASTÉRISQUE

2009

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SINGULARITÉS. EN L'HONNEUR DE J. M. AROCA

F. Cano, F. Loray, J. J. Morales-Ruiz,
P. Sad, M. Spivakovsky, éditeurs

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Felipe Cano
Facultad de Ciencias. Universidad de Valladolid. E-47005-Valladolid. Espagne
fcano@agt.uva.es

Frank Loray
IRMAR, UFR de Mathématiques, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France), France
frank.loray@univ-rennes1.fr

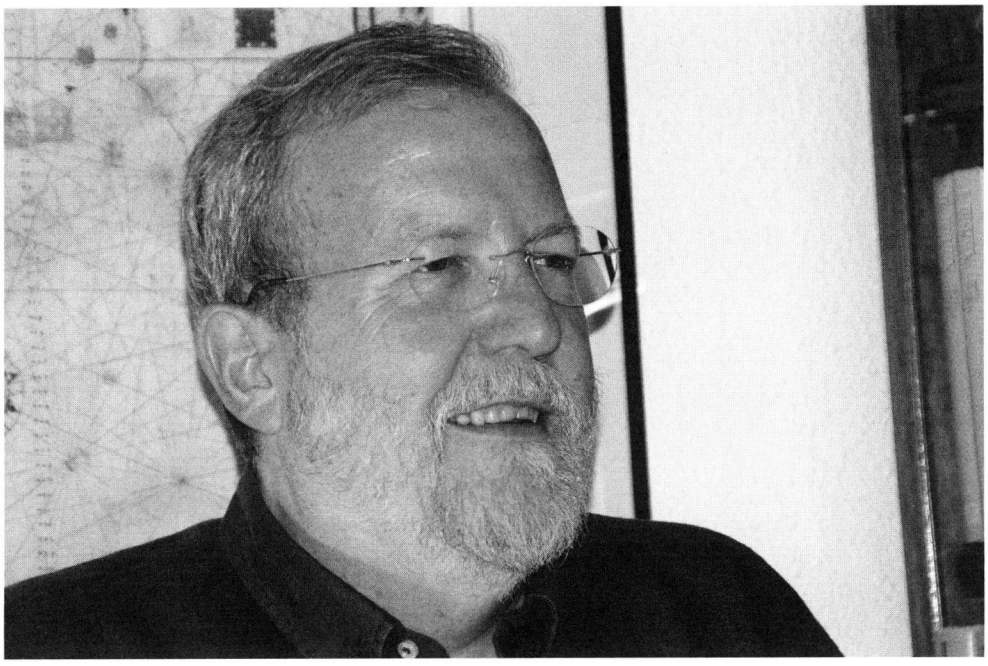
Juan José Morales-Ruiz
Dep. de Matematica Apl., 2 Univ. de Catalunya, C/Pau Gargallo 5, 08028 Barcelona, Espagne
morales@ma2.upc.es

Paulo Sad
IMPA, Estrada Dona Castorina, 110, 22460-320 Rio de Janeiro, Brazil
sad@impa.br

Mark Spivakovsky
Univ. Toulouse, Labo. de Mathématiques, 118, rte de Narbonne, 31062 Toulouse, France
spivakov@picard-ups.tlse.fr

***Classification mathématique par sujet* (2000).** — 03C99, 11S40, 12-xx, 12H05, 13F30, 13G05, 14B05, 14E05, 14J17, 14P10, 14P15, 15A18, 32A05, 32G34, 32H02, 32H50, 32S05, 32S25, 32S65, 34M35, 34M40, 34M55, 34Mxx, 37A20, 37C10, 37C85, 37F75, 37F99, 39A13, 46Bxx, 47-xx, 53C10, 58A10, 58A17, 58A30, 58H05, 58K05, 58K20, 58K50.

Mots-clefs. — algèbre de Rees, algèbre différentielle, algorithme de Godbillon-Vey, champs de vecteurs, classification analytique, classification topologique, clôture intégrale des idéaux, corps de Hardy, correspondance de Weil, courbe polaire, courbes elliptiques, courbes invariantes, dérivations étrangères, difféomorphisme analytique, dynamique locale, eikonales, ensembles semi-algébriques, enveloppe galoisienne, équations différentielles, équations différentielles ordinaires, équations aux q-différences, espace des jets, espace feuilleté, espaces d'arcs, feuilletages, feuilletages algébriques, feuilletages en droites, feuilletages holomorphes, feuilletages quasi-homogènes, feuilletages singuliers, fibrés vectoriels, forme normale, géométrie birationelle, graphes, groupe de Galois, groupoïde de Galois, irréductibilité, opérateurs de Stokes, pinceau de courbes, queues d'aronde, réduction des singularités, séries de Gevrey, séries de Poincaré motiviques, séries généralisées, singularités, singularités quasi-ordinaires, sous-espaces invariants, structures o-minimales, structures projectives, structures transverses, surfaces de Riemann, théorème d'Izumi, théorème de Frobenius, théorie de Galois différentielle, transséries, valeurs propres, valuations de Rees, valuations divisorielles.



ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SINGULARITÉS. EN L'HONNEUR DE J. M. AROCA

Résumé. — Ce volume contient 23 articles sur le sujet « Équations Différentielles et Singularités » écrits à l'occasion du congrès-hommage à J. M. Aroca qui s'est tenu à *Las Casas del Tratado* (Tordesillas), siège de l'*Instituto I. de Estudios de Iberoamérica y Portugal* de l'Université de Valladolid, du 4 au 8 septembre 2006.

***Abstract* (Differential Equations and Singularities. In honour of J. M. Aroca)**

This volume contains 23 papers about "Differential Equations and Singularities" written on the occasion of the congress in honour of J. M. Aroca, which took place in *Las Casas del Tratado* (Tordesillas) which house the *Instituto I. de Estudios de Iberoamérica y Portugal* of the University of Valladolid, September 4–8, 2006.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 2009

PRÉSENTATION

J. M. Aroca est un mathématicien qui a beaucoup contribué au développement des mathématiques en Espagne dans les 35 dernières années. Il a dédié une grande partie de son activité à la formation de chercheurs, avec plus de 30 élèves. Il a travaillé, et continue à le faire, sur un grand éventail de problèmes, allant de la résolution et classification des singularités, la géométrie algébrique, l'algèbre conmutative, la géométrie, les équations différentielles jusqu'aux systèmes dynamiques. Sa grande connaissance des Mathématiques classiques lui permet toujours d'illustrer ses recherches à l'aide d'exemples concrets et de calculs effectifs. En tant que comité scientifique du congrès

Differential Equations and Singularities. In honour of J. M. Aroca,

nous avons eu le plaisir de compter avec la participation d'une centaine de mathématiciens pour commémorer ses 60 ans ; une reconnaissance magnifique à sa générosité et à son humanisme.

Ce volume est composé d'articles écrits à l'occasion de cet hommage, qui s'est tenu à *Las Casas del Tratado* (Tordesillas), siège de l'*Instituto I. de Estudios de Iberoamérica y Portugal* de l'Université de Valladolid, du 4 au 8 septembre 2006. Nous tenons à remercier tous les auteurs qui ont bien voulu participer à la réalisation de cet ouvrage.

F. Cano, F. Loray, J. J. Morales-Ruiz, M. Spivakovsky, P. Sad

PARTICIPANTS

Primitivo Acosta, Fernando Alcalde, Clementa Alonso, Tomás Aranda, Fuensanta Aroca, José Manuel Aroca, Moulay Barkatou, Jesús del Blanco, David Blázquez, Fabio Enrique Brochero, José Omegar Calvo, César Camacho, Felipe Cano, José Cano, Manuel M. Carnicer, Guy Casale, Gabriel Casalmiglia, Dominique Cerveau, Nuria Corral, Vincent Cossart, Anne Duval, Guillaume Duval, Ruyong Feng, María Joséfa Fernández-Bermejo, Javier Fernández-Bobadilla, Pedro Fortuny, Alexis García-Zamora, Yohann Genzmer, Luis Giraldo, Xavier Gómez-Mont, Pablo

González-Sequeiros, Heisuke Hironaka, Jorge Jiménez, Alberto Lastra, Lê-Dung-Tráng, Alcides Lins Neto, Jean-Marie Lion, Alberto Llorente Mediavilla, Michèle Loday-Richaud, Santiago López de Medrano, Lorena López, Frank Loray, Álvaro Lozano, Ignacio Luengo, David Marín, Jean-François Mattei, Claudine Mitschi, Juan José Morales-Ruiz, Robert Moussu, Jorge Mozo, Dmitry Novikov, Oliver Oblanca, Jorge Olivares, Daniel Panazzolo, Emmanuel Paul, Daniel Peralta-Salas, Jorge Vitório Pereira, María Pérez, Ricardo Pérez-Marco, Olivier Piltant, Luc Pirio, Maria Przybylska, Roland Rabanal, Jean-Pierre Ramis, Helena Reis, Claudia Reynoso, Javier Ribón, Olivier Ripoll, Claude Roche, Jean-Philippe Rolin, Paulo Sad, Fernando Sanz, Javier Sanz, Jacques Sauloy, Bruno Scardua, Reinhard Schäfke, José Seade, Pedro Silva, Sergi Simon, Michael Singer, Marcio G. Soares, Mark Spivakovsky, Bernard Teissier, Loïc Teyssier, Hiroshi Umemura, Ferran Valdez, Joris van der Hoeven, Edson Vargas, Alberto Verjovsky, José Luis Vicente, Orlando Villamayor, Sergei Yakovenko, Haruo Yoshida, María-Angeles Zurro.

EXPOSÉS

H. HIRONAKA — *Differential companions and mobile components*

R. PÉREZ MARCO — *Log and tube-log Riemann surfaces and function theory*

J. RIBÓN — *Topological classification of families of diffeomorphisms*

V. COSSART — *Desingularization in dimension 3 and positive characteristic*

F. AROCA — *Computing solutions of PDE's using the Newton polyhedron*

D. PANAZZOLO — *Resolution of singularities of real-analytic vector fields in dimension three*

C. CAMACHO — *Foliations with Projective Transverse Structures*

J. V. PEREIRA — *On the Curvature of Planar Webs*

J.-F. MATTEI — *The topology of the leaves of singular germs of foliations of general type in the plane I*

D. MARÍN — *The topology of the leaves of singular germs of foliations of general type in the plane II*

A. LINS NETO — *Homogeneous commuting vector fields in dimensions 2 and 3*

J. CANO — *The space of generalized power series solutions of an ODE*

I. LUENGO — *Surface singularities, rational homology spheres and rational cuspidal curves*

R. MOUSSU — *Hardy fields and solutions of differential equations*

J.-M. LION — *Un théorème de type Haefliger pour les feuilletages définissables*

J.-P. ROLIN — *Differential equations and o-minimal structures*

J. SEADE — *An extension of Milnor's fibration theorem*

J. VAN DER HOEVEN — *Formal resolution of differential equations using transseries*

J.-P. RAMIS — *Wild phenomena in Galois theories*

M. SINGER — *Galois Theory of Parameterized Linear Differential Equations and Linear Differential Algebraic Groups*

H. UMEMURA — *On a general differential Galois Theory*

G. CASALE — *Local irreducibility of the first Painlevé equation*

H. YOSHIDA — *Integrability of 2D homogeneous polynomial potentials*

J. MOZO — *Monomial summability : theory, applications and perspectives*

J. SAULOY — *Irregular singularities of analytic linear q-difference equations*

B. TEISSIER — *The construction of valuations*

D. CERVEAU — *Le théorème de Malgrange singulier*

M. SOARES — *Characteristic numbers of holomorphic foliations*

LÊ DUNG-TRÀNG — *Aroca's mathematics and mathematicians*

COMITÉ D'ORGANISATION

Jorge Mozo (coordinateur), Clementa Alonso, José Cano, Nuria Corral, Pedro Fortuny, Fernando Sanz.

TABLE DES MATIÈRES

Fernando Alcalde Cuesta, Alvaro Lozano Rojo & Marta Macho Stadler — ***Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon*** 1

1. Introduction 1
2. L'espace feuilleté de Gromov-Hausdorff 3
3. L'espace feuilleté de Ghys–Kenyon 8
4. Dynamique topologique 13

Références 16

Charef Beddani — ***Comparaison des valuations divisorielles*** 17

Introduction 17
1. Préliminaires 19
2. Comparaison des valuations divisorielles 22
3. Commentaires 28

Références 30

F. E. Brochero Martínez & L. López-Hernanz — ***Gevrey class of the infinitesimal generator of a diffeomorphism*** 33

1. Introduction 33
2. Technical estimations 35
3. Proof of theorem 1.1. 37
4. Case $0 \leq s < \frac{1}{n-1}$ 38

References 39

César Camacho & Luiz Henrique de Figueiredo — ***On the limit of families of algebraic subvarieties with unbounded volume*** .. 41

1. Introduction 41
2. The real case 44

3. The complex case 49
4. Algebraic curves as integrals of differential equations 54
References 59

José Cano & Pedro Fortuny Ayuso — ***The Space of Generalized Formal Power Series Solution of an Ordinary Differential Equation*** 61

1. Introduction 61
2. Newton polygon of an ODE 62
3. Main result 66
4. Parametric polynomials and parametric Newton polygon 69
5. Proof of the Main Theorem 75
References 80

Guy Casale — ***Une preuve galoisienne de l'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la première équation de Painlevé*** 83

1. Définitions et modèles géométriques 85
2. Structures transverses des extensions réductrices 87
3. Groupoïde de Galois 88
4. Quelques lemmes sur les groupoïdes de Lie 91
5. Quelques rappels sur les algèbres de Lie de champs de vecteurs 97
6. Irréductibilité de la première équation de Painlevé 98
Références 99

Dominique Cerveau — ***Feuilletages en droites, équations des eikonales et autres équations différentielles*** 101

Introduction 101
1. Champs de droites ou feuilletages en droites. Exemples et premiers résultats 104
2. Généralités sur les feuilletages en droites sur les espaces projectifs 106
3. Classification des feuilletages en droites dans $\mathbb{CP}(3)$ 109
4. L'équation dét Hess $f \equiv 0$ 110
5. L'équation des eikonales 112
6. Automorphismes des feuilletages en droites 118
7. Remarques et problèmes 122
Références 122

Marc Chaperon & Santiago López de Medrano — ***Some regularities and singularities appearing in the study of polynomials and operators*** 123

Introduction. 123
A. Singularities of Polynomial Multiplication. 126
B. Singularities of the characteristic polynomial function. 133
C. Singularities of eigenvalues of linear operators. 136
D. Singularities of linear operators and invariant subspaces. 145
Appendix A. Some Useful Singularities. 154
Appendix B. Some useful facts about Banach spaces 157
References 160

Nuria Corral — ***Polar pencil of curves and foliations*** 161

1. Introduction 161
2. Notations 163
3. Generic curves of the pencil 166
4. Base points of the polar pencil 171
5. Dicritical components 173
6. Resolution of singularities 176
7. Examples 178
References 179

Alcides Lins Neto — ***Homogeneous commuting vector fields on*** $\mathbb{C}^2$ 181

1. Introduction 181
2. Preliminary results 186
3. Proofs 188
References 195

Jean-Marie Lion & Patrick Speissegger — ***Un théorème de type Haefliger définissable*** 197

Introduction 197
1. Les structures o-minimales 199
2. Observations et proposition topologiques 203
3. Recouvrement d'un ouvert relativement compact M de $\mathbf{R}^m$ adapté à une forme différentielle définie au voisinage de $\overline{M} \setminus \{0\}$ 205
4. Preuve du théorème 1 209
5. Annexe : preuve de la proposition 10 217
Références 219

Frank Loray & David Marín Pérez — ***Projective structures and projective bundles over compact Riemann surfaces*** 223

1. Projective structures 224
2. $\mathbb{P}^1$-bundles and Riccati foliations 236
3. The genus 1 case 245

References 251

Robert Moussu & Jean-Philippe Rolin — ***Une preuve combinatoire du théorème de Frobenius*** 253

1. Introduction 253
2. Théorème de Frobenius formel sur $\mathbb{K}$ 254
3. Démonstration du théorème de Frobenius classique sur $\mathbb{K}$ 256
4. Théorème de Frobenius singulier sur $\mathbb{K}$, codimension 1 257
5. Théorème de Frobenius singulier formel sur $\mathbb{K}$, codimension > 1 259

Références 260

Percy Fernández-Sánchez & Jorge Mozo-Fernández — ***On generalized surfaces in*** $(\mathbb{C}^3, 0)$ 261

1. Introduction 261
2. Pre-simple and simple singularities 263
3. Generalized surfaces 265

References 268

Emmanuel Paul — ***The Galoisian envelope of a germ of foliation: the quasi-homogeneous case*** 269

Introduction 269
1. The Galois envelope of a subgroup of Diff($\mathbb{C}$,0) 273
2. A geometric criterion for Galois reducibility 276
3. An algorithmic criterion for Galois reducibility 279
4. Relationship between geometric and algorithmic invariants for Galois reducible foliations 285
5. Open problems 288

References 289

Jorge Vitório Pereira & Paulo Sad — ***Rigidity of Fibrations*** 291

1. Introduction 291
2. Variation of Indexes 293
3. The Rigidity of a generic $\mathcal{F}_\Gamma$: Proof of Theorem 1 297

References 299

Jean-Pierre Ramis & Jacques Sauloy — ***The q-analogue of the wild fundamental group (II)*** 301

1. Introduction 301
2. Linear analytic q-difference equations 303
3. The wild fundamental group 310
4. Conclusion 323

References 324

Javier Ribón — ***Unfoldings of tangent to the identity diffeomorphisms*** 325

1. Introduction 325
2. Notations 326
3. Real flows 327
4. Topological classification of MP-diffeomorphisms 329
5. Analytic classification of elements of $\mathrm{Diff}_{p1}(\mathbb{C}^2, 0)$ 341
6. Compactification of the Ecalle-Voronin invariants 363

References 369

Guillaume Rond — ***Séries de Poincaré motiviques d'un germe d'hypersurface irréductible quasi-ordinaire*** 371

1. Séries de Poincaré motiviques 371
2. Singularités quasi-ordinaires 373
3. Définitions 377
4. Étude des troncations d'arcs ne se relevant pas en arcs pour lesquels un des $x_i(t)$ est nul 378
5. Calcul de $\chi_{p,l_1,\ldots,l_m}$ et $\varphi_{p,l_1,\ldots,l_m}$ 381
6. Étude de l'union (1) 386
7. Étude des troncations d'arcs pour lesquels un des $x_i(t)$ est nul 388
8. Résultat principal 389
9. Cas où les $a_i(1) \geq 1$ pour tout i 391

Références 395

Jacques Sauloy — ***Équations aux q-différences et fibrés vectoriels holomorphes sur la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$*** 397

1. Introduction 397
2. Constructions locales 406
3. Le phénomène de Stokes 416

4. Constructions globales 424
Références 427

Márcio G. Soares — ***Singularities of logarithmic foliations and connectedness of the union of logarithmic components*** 431
1. Introduction 431
2. Deformations of generic logarithmic foliations 435
References 439

Hiroshi Umemura — ***On the definition of the Galois groupoid*** 441
1. Introduction 441
2. Differential fields and dynamical systems 442
3. Groupoids 443
4. Lie groupoids and D-groupoids 445
5. Examples of Galois groupoids 447
6. Relation with our previous definition 451
References 451

Joris van der Hoeven — ***Transserial Hardy fields*** 453
1. Introduction 453
2. Preliminaries 456
3. Transserial Hardy fields 465
4. Analytic resolution of differential equations 472
5. Differentially algebraic Hardy fields 478
Glossary 485
References 486

RÉSUMÉS

F. ALCALDE CUESTA, A. LOZANO ROJO & M. MACHO STADLER — *Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon*

À partir d'un arbre apériodique et répétitif du graphe de Cayley du groupe abélien libre à deux générateurs décrit par Kenyon, Ghys a construit un exemple de lamination minimale par surfaces de Riemann avec des feuilles euclidiennes et hyperboliques. On démontre que la dynamique transverse de cette lamination est représentée (du point de vue de la mesure) par une machine à sommer binaire. En fait, on peut décrire sa dynamique topologique transverse et montrer ainsi que la lamination de Ghys-Kenyon est affable.

C. BEDDANI — *Comparaison des valuations divisorielles*

En utilisant la notion de la connexité en codimension un, nous allons donner dans cet article une nouvelle démonstration géométrique du théorème d'Izumi dans deux cas particuliers. Ensuite, nous allons proposer la conjecture suivante : soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local intègre normal complet et ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles centrées en $\mathfrak{m}$, alors il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R, tel que les centres de ν_1 et ν_2 dans l'éclatement normalisé de $\mathrm{Spec}R$ le long de I sont liés en codimension 1. À la fin de ce travail, nous présentons quelques commentaires concernant cette conjecture.

F.E. BROCHERO MARTÍNEZ & L. LÓPEZ-HERNANZ — *Gevrey class of the infinitesimal generator of a diffeomorphism*

Soit F un difféomorphisme analytique de $\mathbb{C}^m$ tangent à l'identité à l'ordre n. Le générateur infinitésimal de F est le champ de vecteurs formel X tel que $\mathrm{Exp}X = F$. Dans cet article nous donnons une preuve élémentaire du fait que X appartient à la classe Gevrey d'ordre $1/n$.

C. CAMACHO & L. H. DE FIGUEIREDO — *On the limit of families of algebraic subvarieties with unbounded volume*

On prouve que la limite d'une suite d'ensembles semi-algébriques génériques donnés par un nombre fini de formules existe toujours et est un ensemble semi-algébrique, ensemble qui peut être donné explicitement comme une expression booléenne impliquant les primitives des formes additives de formules.

J. CANO & P. FORTUNY AYUSO — *The Space of Generalized Formal Power Series Solution of an Ordinary Differential Equation*

Nous montrons que l'ensemble des troncations de séries généralisées qui sont solutions d'une équation différentielle ordinaire est contenu dans un ensemble semi-algébrique dont la dimension est bornée par le double de l'ordre de l'équation différentielle.

G. CASALE — *Une preuve galoisienne de l'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la première équation de Painlevé*

Cet article fait suite à un précédent. Nous utilisons le groupoïde de Galois calculé dans *loc. cit.* pour prouver que la première équation de Painlevé est irréductible au sens de Painlevé-Nishioka-Umemura. Pour cela nous prouvons que l'algèbre de Lie du groupoïde de Galois d'une équation réductible admet une suite croissante d'idéaux dont le premier est composé des champs tangents au feuilletage (donné par l'équation), le dernier est l'algèbre de Lie du groupoïde de Galois et les quotients de deux idéaux successifs sont de type linéaire. Ce n'est pas le cas pour P_1.

D. CERVEAU — *Feuilletages en droites, équations des eikonales et autres équations différentielles*

Nous donnons des résultats qui lient les équations classiques des eikonales et les feuilletages en droites de l'espace affine.

M. CHAPERON & S. LÓPEZ DE MEDRANO — *Some regularities and singularities appearing in the study of polynomials and operators*

Nous appliquons le point de vue de la théorie des singularités aux deux problèmes suivants : comment la décomposition d'un polynôme P comme produit de polynômes se comporte-t-elle quand on perturbe P? Comment les valeurs propres, vecteurs propres et plus généralement sous-espaces invariants d'un opérateur A se comportent-ils quand on perturbe A? Nous caractérisons les situations régulières et décrivons complètement celles qui sont singulières mais pas trop dégénérées.

N. CORRAL — *Polar pencil of curves and foliations*

Le pinceau polaire $\Lambda_{\mathcal{F}}$ d'un feuilletage singulier $\mathcal{F}$ est le pinceau de courbes composé par les courbes polaires de $\mathcal{F}$. Nous allons étudier la relation entre le comportement de $\Lambda_{\mathcal{F}}$ par éclatement et les invariants associés à $\mathcal{F}$. Le résultat principal ici donne une description d'une résolution de singularités de $\Lambda_{\mathcal{F}}$ en termes des invariants d'équiréduction de $\mathcal{F}$ lorsque $\mathcal{F}$ est un feuilletage général de Zariski.

A. LINS NETO — *Homogeneous commuting vector fields on* $\mathbb{C}^2$

Dans le résultat principal de ce papier on donne une méthode de construction de tous les paires de champs de vecteurs homogènes de même degré $d \geq 2$ qui commutent (théorème 1). Comme application, on classifie les paires de champs de vecteurs homogènes commutantes dans $\mathbb{C}^2$ de degrés $d = 2$ et $d = 3$ (corollaires 1 et 2). Nous obtenons aussi des conditions nécessaires dans les cas quasi-homogènes et quand les degrés sont différents (théorème 2).

J.-M. LION & P. SPEISSEGGER — *Un théorème de type Haefliger définissable*

Soit $M \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété définissable dans une structure o-minimale $\mathcal{A}$ et soit $\omega \in \Lambda(M)$ une 1-forme différentielle $\mathcal{A}$-définissable. Nous montrons que si ω définit un feuilletage de codimension un sur M alors il existe un recouvrement fini de M par des ouverts $\mathcal{A}$-définissables $M_1, \ldots, M_r$ qui vérifient la propriété suivante : pour chaque i, tout lacet C^1 inclus dans M_i est tangent à $\ker(\omega)$ en un point.

F. LORAY & D. MARÍN PÉREZ — *Projective structures and projective bundles over compact Riemann surfaces*

Une structure projective sur une surface de Riemann C de genre g est donnée par un atlas dont les applications de transition sont à valeurs dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. De manière équivalente, une structure projective est donnée par un fibré en $\mathbb{P}^1$ sur C équipé d'une section σ et d'un feuilletage $\mathcal{F}$ transverse à la fois aux fibres $\mathbb{P}^1$ et à la section σ. À partir de cette dernière description géométrique, nous survolons quelques problèmes et résultats classiques sur les structures projectives. Nous rappelons quelques propriétés de base sur les fibrés en $\mathbb{P}^1$. Nous donnons une description complète des structures projectives (qui sont en fait affines) sur le tore avec une famille verselle explicite de fibrés feuilletés.

R. MOUSSU & J.-P. ROLIN — *Une preuve combinatoire du théorème de Frobenius*

On considère un sous-corps $\mathbb{K}$ du corps des nombres complexes. Nous montrons qu'un système de Pfaff intégrable et non singulier à coefficients dans $\mathbb{K}\{x\}$ admet une famille d'intégrales premières à coefficients dans $\mathbb{K}\{x\}$. Ce résultat reste vrai pour un système singulier de codimension 1. Pour un système singulier de codimension > 1, nous obtenons des intégrales premières formelles à coefficients dans $\mathbb{K}[[x]]$.

P. FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ — *On generalized surfaces in* $(\mathbb{C}^3, 0)$

Dans cet article, on étudie les germes de feuilletages holomorphes de codimension un, non dicritiques et singuliers en $(\mathbb{C}^3, 0)$, qui n'ont pas de selles-nœuds dans la réduction des leurs singularités. Ces feuilletages s'appellent *surfaces généralisées.* Le résultat principal affirme que la réduction des singularités d'une surface généralisée coïncide avec la réduction de son ensemble de séparatrices.

E. PAUL — *The Galoisian envelope of a germ of foliation: the quasi-homogeneous case*

Nous donnons des critères géométriques et algorithmiques pour qu'un feuilletage quasi-homogène en dimension deux possède une enveloppe galoisienne propre. Nous rappelons cette notion récemment introduite par B. Malgrange et nous décrivons l'enveloppe galoisienne d'un groupe de germes de difféomorphismes analytiques. Les critères géométriques sont obtenus à partir d'invariants analytiques transverses, tandis que les critères algorithmiques utilisent les formes normales.

J.V. PEREIRA & PAULO SAD — *Rigidity of Fibrations*

Nous considérons l'ensemble Γ des points du plan projectif obtenu comme intersection de deux courbes du même degré. Nous éclatons cet ensemble pour obtenir la surface S_Γ et nous considérons sur S_Γ le feuilletage $\mathcal{F}_\gamma$ obtenu à partir du pinceau de deux courbes précédentes. Sous des conditions de généricité $\mathcal{F}_\gamma$ est isolé dans l'espace des feuilletages de S_Γ.

J.-P. RAMIS & J. SAULOY — *The q-analogue of the wild fundamental group (II)*

Dans un article précédent nous avons défini les q-analogues des dérivations étrangères et leurs propriétés de base. Dans cet article nous démontrons le théorème de densité et d'indépendance que nous y avions annoncé.

J. RIBÓN — *Unfoldings of tangent to the identity diffeomorphisms*

Cet article est consacré à la classification des déploiements à un paramètre des difféomorphismes analytiques tangents à l'identité, en d'autres termes, les éléments φ de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ qui sont de la forme $(x, f(x, y))$, avec $(\partial f/\partial y)(0, 0) = 1$. Nous fournissons une classification topologique en l'absence de phénomènes de petits diviseurs et la classification analytique des déploiements de codimension finie. Les preuves sont basées sur l'étude des structures stables qui sont invariants par l'action des difféomorphismes. L'outil principal est le recours aux flots réels. Une propriété de non-errance est nécessaire, à savoir la propriété de Rolle dans le cas topologique et la stabilité infinitésimale dans le cas analytique. On prouve aussi que, sous des hypothèses génériques, la classe analytique d'un déploiement φ ne dépend que des classes analytiques des germes de difféomorphismes en dimension 1 obtenus en localisant le long d'une composante irréductible de l'ensemble des points fixes de φ.

G. ROND — *Séries de Poincaré motiviques d'un germe d'hypersurface irréductible quasi-ordinaire*

Nous donnons ici une description combinatoire, faisant intervenir les exposants caractéristiques de la singularité, des arcs tronqués tracés sur un germe d'hypersurface quasi-ordinaire. Cela nous permet d'obtenir une expression inductive des séries de Poincaré de ce type de singularité.

J. SAULOY — *Équations aux q-différences et fibrés vectoriels holomorphes sur la courbe elliptique* $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$

Nous présentons diverses applications des fibrés vectoriels aux équations aux q-différences, dans la lignée de la correspondance de Weil.

M. G. SOARES — *Singularities of logarithmic foliations and connectedness of the union of logarithmic components*

On montre que le lieu singulier d'un feuilletage logarithmique peut avoir des composantes de dimension 1 à $n-2$. On montre aussi que, dans l'espace des feuilletages de codimension un de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, de degré fixé, la réunion des composantes logarithmiques est connexe.

H. UMEMURA — *On the definition of the Galois groupoid*

Nous esquissons la démonstration du fait que deux théories de Galois, la théorie de Malgrange et la nôtre, sont équivalentes dans le cas absolu, i.e. quand le corps de base consiste uniquement en des constantes.

J. VAN DER HOEVEN — *Transserial Hardy fields*

Il est bien connu que des corps de Hardy peuvent être étendus par des intégrales, des exponentielles et des solutions d'équations différentielles Pfaffiennes du type $f' = P(f)/Q(f)$. D'un point de vue formel, la théorie des transséries permet la résolution d'équations différentielles algébriques plus générales. Toutefois, cette théorie n'admettait pas encore de contre-partie analytique satisfaisante jusqu'à présent. Dans cet article, nous introduisons la notion de corps de transséries transsériel. Ces corps combinent les avantages des corps de Hardy et de la théorie des transséries. En particulier, nous démontrons que le corps des transséries vérifiant une équation différentiello-algébrique sur $\mathbb{R}\{\{x^{-1}\}\}$ possède une structure de corps de Hardy transsériel. Réciproquement, nous donnerons une condition suffisante pour l'existence d'une structure transsérielle sur un corps de Hardy donné.

ABSTRACTS

F. ALCALDE CUESTA, A. LOZANO ROJO & M. MACHO STADLER — *Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon*

Using an aperiodic and repetitive subtree of the Cayley graph of the free Abelian group with two generators, described by Kenyon, Ghys has constructed an example of minimal Riemann surface lamination having both Euclidean and hyperbolic leaves. We prove that the transverse dynamics of this lamination is represented (in a measurable way) by a 2-adic odometer. In fact, we can describe its topological transverse dynamics, and show that the Ghys-Kenyon lamination is affable.

C. BEDDANI — *Comparaison des valuations divisorielles*

Using the notion of connexity in codimension one, we give in this paper a new geometric proof of Izumi's theorem in two special cases. We also propose the following conjecture: let $(R, \mathfrak{m})$ be a complete, normal local domain and ν_1, ν_2 two divisorial valuations centered in $\mathfrak{m}$. Then there exists an $\mathfrak{m}$-primary ideal I of R such that the centers of ν_1 and ν_2 in the normalised blowing up of Spec$R$ along I are linked in codimension 1. At the end of the paper, we make some comments about this conjecture.

F.E. BROCHERO MARTÍNEZ & L. LÓPEZ-HERNANZ — *Gevrey class of the infinitesimal generator of a diffeomorphism*

Let F be an analytic diffeomorphism in $\mathbb{C}m$ tangent to the identity of order n. The infinitesimal generator of F is the formal vector field X such that $\mathrm{Exp}X = F$. In this paper we provide an elementary proof of the fact that X belongs to the Gevrey class of order $1/n$.

C. CAMACHO & L. H. DE FIGUEIREDO — *On the limit of families of algebraic subvarieties with unbounded volume*

We prove that the limit of a sequence of generic semi-algebraic sets given by a finite number of formulas always exists and is a semi-algebraic set that can be explicitly given as a Boolean expression involving the primitives of the additive forms of the formulas.

J. CANO & P. FORTUNY AYUSO — *The Space of Generalized Formal Power Series Solution of an Ordinary Differential Equation*

We prove that the set of truncations of generalized power series solutions of an ordinary differential equations is contained in a semi-algebraic set of dimension bounded by twice the order of the differential equation.

G. CASALE — *Une preuve galoisienne de l'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la première équation de Painlevé*

This article follows a previous one. The Galois groupoid computed in *loc. cit.* is used to prove irreducibility in Painlevé-Nishioka-Umemura sense of the first Painlevé equation. We prove that the Lie algebra of the Galois groupoid of a reducible equation gets an increasing sequence of ideals such that: the first is the algebra of vector fields tangent to the foliation given by the equation, the last is the Lie algebra of the Galois groupoid, the quotient of two successive ideals is a Lie Algebra with linear type. This is not the case for P_1.

D. CERVEAU — *Feuilletages en droites, équations des eikonales et autres équations différentielles*

We give several results relating the classical eikonal equations and foliations by straight lines of the affine space.

M. CHAPERON & S. LÓPEZ DE MEDRANO — *Some regularities and singularities appearing in the study of polynomials and operators*

We apply the viewpoint of singularity theory to the following problems: how does the decomposition of a polynomial P as the product of polynomials behave under perturbations of P? How do the eigenvalues, eigenspaces and more generally invariant subspaces of an operator A behave under perturbations of A? We give a characterization of the regular situations and describe completely the singular ones in some moderately degenerate situations.

N. CORRAL — *Polar pencil of curves and foliations*

The polar pencil $\Lambda_{\mathcal{F}}$ of a singular foliation $\mathcal{F}$ is the pencil of curves formed by the polar curves of $\mathcal{F}$. We study the relationship between the behaviour of $\Lambda_{\mathcal{F}}$ under blowing-up and the invariants associated to $\mathcal{F}$. The main result here describes a resolution of singularities of $\Lambda_{\mathcal{F}}$ in terms of the equireduction invariants of $\mathcal{F}$, for a Zariski-general foliation $\mathcal{F}$.

A. LINS NETO — *Homogeneous commuting vector fields on* $\mathbb{C}^2$

In the main result of this paper we give a method to construct all pairs of homogeneous commuting vector fields on $\mathbb{C}^2$ of the same degree $d \geq 2$ (Theorem 1). As an application, we classify, up to linear transformations of $\mathbb{C}^2$, all pairs of commuting homogeneous vector fields on $\mathbb{C}^2$, when $d = 2$ and $d = 3$ (corollaries 1 and 2). We obtain also necessary conditions in the cases of quasi-homogeneous vector fields and when the degrees are different (theorem 2).

J.-M. LION & P. SPEISSEGGER — *Un théorème de type Haefliger définissable*

Let $\mathcal{A}$ be an o-minimal expansion of the real field, M a submanifold of R^n and ω a differentiable 1-form on M. We assume that M and ω are definable in $\mathcal{A}$ and ω defines a foliation on M of codimension one. Then there are definable, open subsets M_i of M, for $i = 1, \ldots, r$, such that every C^1 loop contained in M_i is tangent to $\ker(\omega)$ at some point.

F. LORAY & D. MARÍN PÉREZ — *Projective structures and projective bundles over compact Riemann surfaces*

A projective structure on a compact Riemann surface C of genus g is given by an atlas with transition functions in $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. Equivalently, a projective structure is given by a $\mathbb{P}^1$-bundle over C equipped with a section σ and a foliation $\mathcal{F}$ which is both transversal to the $\mathbb{P}^1$-fibers and the section σ. From this latter geometric bundle picture, we survey on classical problems and results on projective structures. By the way, we will recall some basic facts about $\mathbb{P}^1$-bundles. We will give a complete description of projective (actually affine) structures on the torus with an explicit versal family of foliated bundle picture.

R. MOUSSU & J.-P. ROLIN — *Une preuve combinatoire du théorème de Frobenius*

Let $\mathbb{K}$ be a subfield of the field of complex numbers. We show that an integrable and non singular Pfaff system with coefficients in $\mathbb{K}\{x\}$ has a family of first integrals with coefficients in $\mathbb{K}\{x\}$. The result remains true for singular system of codimension 1. For a singular system of codimension > 1, we obtain formal first integrals with coefficients in $\mathbb{K}[[x]]$.

P. FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ — *On generalized surfaces in* $(\mathbb{C}^3, 0)$

In this paper we study germs of codimension one holomorphic, non-dicritical, singular foliations in $(\mathbb{C}^3, 0)$ having no saddle-nodes in their reduction of singularities. These are called *generalized surfaces.* The main result says that the reduction of the singularities of a generalized surface agrees with the reduction if its separatrix set.

E. PAUL — *The Galoisian envelope of a germ of foliation: the quasi-homogeneous case*

We give geometric and algorithmic criterions in order to have a proper Galois envelope for a germ of quasi-homogeneous foliation in an ambient space of dimension two. We recall this notion recently introduced by B. Malgrange, and describe the Galois envelope of a group of germs of analytic diffeomorphisms. The geometric criterions are obtained from transverse analytic invariants, whereas the algorithmic ones make use of formal normal forms.

J.V. PEREIRA & PAULO SAD — *Rigidity of Fibrations*

We consider a set Γ of points in the projective plane obtained as the intersection of two curves of the same degree. We blow-up the projective plane at that points to get S_Γ. We consider the foliation $\mathcal{F}_\gamma$ in S_Γ obtained from the pencil of the two curves above. Under generic conditions $\mathcal{F}_\gamma$ is isolated in the space of foliations of S_Γ.

J.-P. RAMIS & J. SAULOY — *The q-analogue of the wild fundamental group (II)*

In a previous paper, we defined q-analogues of alien derivations and stated their basic properties. In this paper, we prove the density theorem and the freeness theorem announced there.

J. RIBÓN — *Unfoldings of tangent to the identity diffeomorphisms*

This paper is devoted to classify one dimensional unfoldings of tangent to the identity analytic diffeomorphisms, in other words elements φ of $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ of the form $(x, f(x, y))$ with $(\partial f/\partial y)(0, 0) = 1$. We provide the topological classification in absence of small divisors phenomena and an analytic classification of the finite codimension unfoldings. Such results are based on the study of the stable structures preserved by the diffeomorphisms. The main tool is the use of real flows. In both the topological and the analytic cases a non-wandering property is required, namely the Rolle property in the topological setting and infinitesimal stability in the analytic one. We also prove that under generic hypotheses the analytic class of an unfolding φ depends only on the analytic classes of the germs of 1-dimensional diffeomorphisms obtained by localizing along an irreducible component of the fixed points set of φ.

G. ROND — *Séries de Poincaré motiviques d'un germe d'hypersurface irréductible quasi-ordinaire*

We give here a combinatorial description, using caracteristic exponents of the singularity, of the troncated arcs on a quasi-ordinary hypersurface germ. This allows us to give an inductive expression of the Poincaré series of this kind of singularity.

J. SAULOY — *Équations aux q-différences et fibrés vectoriels holomorphes sur la courbe elliptique* $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$

We present some applications of vector bundles to q-difference equations, in continuation of Weil's correspondence.

M. G. SOARES — *Singularities of logarithmic foliations and connectedness of the union of logarithmic components*

We show that the singular locus of a logarithmic foliation may have components of any dimension between 0 and $n-2$. Moreover, it is shown that the union of the logarithmic components of the space of codimension one foliations of $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, of fixed degree, is connected.

H. UMEMURA — *On the definition of the Galois groupoid*

We sketch a proof of equivalence of two general differential Galois theories, Malgrange's theoy and ours, if the base field consists only of constants.

J. VAN DER HOEVEN — *Transserial Hardy fields*

It is well known that Hardy fields can be extended with integrals, exponentials and solutions to Pfaffian first order differential equations $f' = P(f)/Q(f)$. From the formal point of view, the theory of transseries allows for the resolution of more general algebraic differential equations. However, until now, this theory did not admit a satisfactory analytic counterpart. In this paper, we will introduce the notion of a transserial Hardy field. Such fields combine the advantages of Hardy fields and transseries. In particular, we will prove that the field of differentially algebraic transseries over $\mathbb{R}\{\{x^{-1}\}\}$ carries a transserial Hardy field structure. Inversely, we will give a sufficient condition for the existence of a transserial Hardy field structure on a given Hardy field.