Astérisque

FERNANDO ALCALDE CUESTA
ALVARO LOZANO ROJO
MARTA MACHO STADLER

Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon

Astérisque, tome 323 (2009), p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__323__1_0>

© Société mathématique de France, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Astérisque
323, 2009, p. 1–16

DYNAMIQUE TRANSVERSE DE LA LAMINATION DE GHYS-KENYON

par

Fernando Alcalde Cuesta, Alvaro Lozano Rojo & Marta Macho Stadler

Résumé. — À partir d'un arbre apériodique et répétitif du graphe de Cayley du groupe abélien libre à deux générateurs décrit par Kenyon, Ghys a construit un exemple de lamination minimale par surfaces de Riemann avec des feuilles euclidiennes et hyperboliques. On démontre que la dynamique transverse de cette lamination est représentée (du point de vue de la mesure) par une machine à sommer binaire. En fait, on peut décrire sa dynamique topologique transverse et montrer ainsi que la lamination de Ghys-Kenyon est affable.

***Abstract* (Transverse dynamics of the Ghys-Kenyon lamination).** — Using an aperiodic and repetitive subtree of the Cayley graph of the free Abelian group with two generators, described by Kenyon, Ghys has constructed an example of minimal Riemann surface lamination having both Euclidean and hyperbolic leaves. We prove that the transverse dynamics of this lamination is represented (in a measurable way) by a 2-adic odometer. In fact, we can describe its topological transverse dynamics, and show that the Ghys-Kenyon lamination is affable.

1. Introduction

Il y a des laminations minimales par surfaces de Riemann où les types conformes des feuilles se mélangent. Le premier exemple a été construit par É. Ghys [**4**] à partir d'un arbre apériodique et répétitif décrit par R. Kenyon [**7**]. La construction comporte deux étapes distinctes, valables pour tout sous-graphe répétitif du graphe de Cayley $\mathcal{G}$ d'un groupe infini de type fini G. Il s'agit d'abord de construire un espace compact, muni d'un feuilletage par graphes, puis d'obtenir une lamination par surfaces de Riemann. Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ l'ensemble des sous-graphes infinis de $\mathcal{G}$ contenant l'élément neutre e de G. On munit $\mathcal{T}$ de la *topologie de Gromov-Hausdorff* pour laquelle deux sous-graphes

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 37A20; 37C85.
Mots clefs. — Espace feuilleté, structure transverse, graphe.

Financé par Ministerio de Ciencia y Tecnología BFM2002-04439, Ministerio de Educación y Ciencia MTM2004-08214 et Universidad del País Vasco UPV 00127.310-E-14790/2002.

© Astérisque 323, SMF 2009

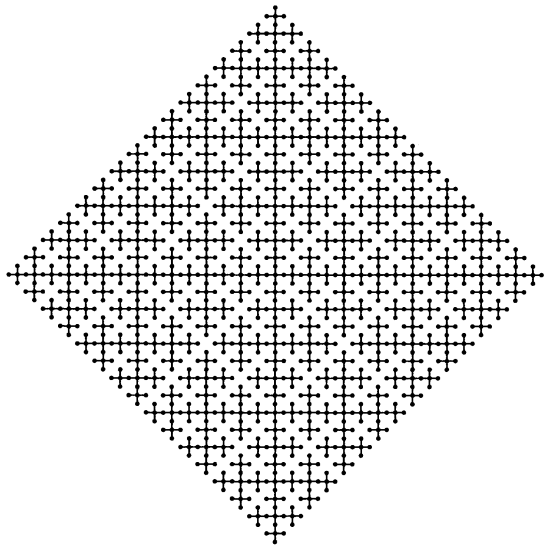

FIGURE 1. Arbre de Kenyon

de $\mathcal{G}$ sont proches s'ils coïncident sur une grande boule centrée en e. Puisqu'une boule ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, un procédé diagonal classique montre que $\mathcal{T}$ est compact. Grâce à l'action de G sur $\mathcal{G}$, on définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ qui identifie un arbre T et son translaté $T' = g^{-1}.T$ si $g \in T$. On peut d'ailleurs réaliser $\mathcal{T}$ comme un sous-espace d'un espace métrique compact $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{G})$, muni d'un feuilletage par graphes $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ dont toutes les feuilles sont rencontrées par $\mathcal{T}$. Alors $\mathcal{R}$ est induite par $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et les classes d'équivalence sont les ensembles de sommets des feuilles de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Pour tout graphe $T \in \mathcal{T}$, l'ensemble $X = \overline{\mathcal{R}[T]}$ est un fermé saturé pour $\mathcal{R}$, appelé l'*enveloppe de* T. Il est réalisable comme transversale complète d'un espace feuilleté compact $\boldsymbol{X}$, à savoir la fermeture de la feuille $L_T \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ passant par T. Les ensembles X et $\boldsymbol{X}$ sont minimaux si et seulement si le graphe T est *répétitif*, i.e. pour tout nombre réel $r > 0$, il existe un nombre réel $R > 0$ tel que toute boule de rayon $R > 0$ contient une boule qui est l'image par translation de la boule de centre e et rayon $r > 0$. Par ailleurs, l'holonomie de L_T est triviale si et seulement si T est *apériodique*, i.e. $T \neq g.T$ pour tout élément $g \neq e$ de G. Ces définitions s'inspirent de définitions analogues pour les pavages [**1, 9**].

Nous appellerons *espace feuilleté de Ghys-Kenyon* la fermeture $\boldsymbol{X}$ de la feuille L_{T_∞} passant par l'arbre de Kenyon T_∞ (voir la figure 1) dans l'espace $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\mathcal{T}}(\mathbb{Z}^{\mathbf{2}})$, munie du feuilletage induit par $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. Les feuilles sont des sous-arbres répétitifs et apériodiques du graphe de Cayley $\mathcal{Z}^2$ de $\mathbb{Z}^2$. En remplaçant ces arbres par des surfaces, on obtient la lamination $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\mathcal{L}})$ décrite par É. Ghys. Nous l'appellerons *lamination de*

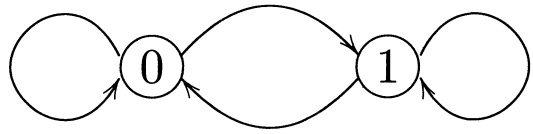

FIGURE 2. Machine à sommer binaire

Ghys-Kenyon. Dans ce travail, nous allons récuperer l'espace $\boldsymbol{X}$ par un procédé de construction de sous-arbres répétitifs et apériodiques de $\mathcal{Z}^2$ à partir de suites de 4 éléments. Grâce à ce codage, nous montrerons que la dynamique transverse de ce feuilletage est représentée par l'automate de la fig. 2.

Cela signifie que $\mathcal{R}$ est *stablement orbitalement équivalente* à la relation engendrée par la somme $S(x) = x + 1$ définie sur l'anneau des entiers 2-adiques, ou de manière équivalente par la transformation $T : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définie par :
i) si $\alpha_0 = 0$, alors $T(\alpha)_0 = 1$ et $T(\alpha)_n = \alpha_n$ pour tout $n \geqslant 1$,
ii) si $\alpha_0 = 1$, alors $T(\alpha)_0 = 0$ et $T(\alpha)_1 = T(\sigma(\alpha))_0$ avec $\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1}$.
Nous compléterons l'étude de l'exemple en décrivant sa dynamique topologique. Nous montrerons ainsi que $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ est *affable*, en ce sens que $\mathcal{R}$ est la limite inductive d'une suite de relations d'équivalence étales compactes [**5**]. La dynamique transverse de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ sera ainsi représentée par un système dynamique classique.

2. L'espace feuilleté de Gromov-Hausdorff

Soit S un système fini de générateurs de G. Le *graphe de Cayley* $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G,S)$ est un graphe localement fini non orienté, sans boucle, ni arête multiple, dont les sommets sont les éléments de G. Deux sommets g_1 et g_2 sont reliés par une arête si $g_1^{-1}g_2 \in S$. On appelle *longueur* de g le plus petit nombre d'éléments de S nécessaires pour écrire g, i.e. $\log_S(g) = \min\{n \geqslant 1 / g = s_1 ... s_n \text{ avec } s_i s_{i+1} \neq e\}$. La *distance des S-mots* est alors donnée par $d_S(g_1, g_2) = \log_S(g_1^{-1}g_2)$ pour tout couple $g_1, g_2 \in G$. Cette distance se prolonge en une distance sur $\mathcal{G}$ telle que toute arête est isométrique à l'intervalle $[0,1]$. Le graphe de Cayley $\mathcal{G}$ devient ainsi un espace métrique connexe par chemins sur lequel le groupe G agit par isométries.

2.1. Topologie de Gromov-Hausdorff. — Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ l'ensemble des sous-graphes T de $\mathcal{G}$ contenant l'élément neutre e de G. Notons $B_T(e,N)$ (resp. $\overline{B}_T(e,N)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre e et de rayon N et $\mathrm{val}_T(e)$ la valence de e, i.e. le nombre d'arêtes issues de e. Considérons l'ensemble $A = \{ N \geqslant 1 \ / \ B_T(e,N) = B_{T'}(e,N) \}$ et la quantité

$$R(T,T') = \begin{cases} \sup A & si\ A \neq \varnothing, \\ 0 & si\ A = \varnothing, \end{cases}$$

qui appartient à $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ pour tout couple $T, T' \in \mathcal{T}$. On définit alors la *distance de Gromov-Hausdorff* par $d(T,T') = e^{-R(T,T')}$. C'est une ultramétrique et donc $\mathcal{T}$ est totalement disconnexe. Puisque la boule fermée $\overline{B}_{\mathcal{G}}(e,N)$ ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, un procédé diagonal classique montre que $\mathcal{T}$ est compact. Les sous-graphes finis de $\mathcal{G}$ correspondent aux points isolés de $\mathcal{T}$. Nous noterons désormais $\mathcal{T}$ l'ensemble des sous-graphes *infinis* de $\mathcal{G}$ contenant l'élément neutre e. L'avantage de la nouvelle définition est mise en évidence par le fait que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ est alors homéomorphe à l'ensemble de Cantor, sauf si $G = \mathbb{Z}$.

2.2. Structure feuilletée. — L'espace $\mathcal{T}$ est muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ qui identifie deux graphes T et T' si $T' = g^{-1}.T$ avec $g \in T$. Toute classe d'équivalence $\mathcal{R}[T]$ peut être alors réalisée comme l'ensemble de sommets d'un graphe $\overline{\mathcal{R}}[T]$. Il suffit de joindre $T' = g^{-1}.T$ et $T'' = h^{-1}.T$ par une arête si $d_S(g,h) = 1$. Le graphe $\overline{\mathcal{R}}[T]$ est donc isomorphe au quotient de T par le groupe de translations $\mathrm{Iso}(T) = \{g \in \mathcal{G}/T = g.T\}$. C'est une feuille de l'espace feuilleté compact fourni par le résultat suivant :

Théorème de réalisation géométrique 2.2.1. — *Il y a un espace compact, métrisable et séparable $\boldsymbol{\mathcal{T}}$, muni d'un feuilletage par graphes $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, pour lequel $\mathcal{T}$ est une transversale complète et $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence induite sur $\mathcal{T}$.*

Démonstration. — Considérons le sous-espace $\widetilde{\mathcal{T}} = \{(T,g) \in \mathcal{T}\times\mathcal{G} \mid g$ est un sommet de $T\}$ de $\mathcal{T}\times\mathcal{G}$, muni de la pseudodistance $d((T_1,g_1),(T_2,g_2)) = d(g_1^{-1}.T_1, g_2^{-1}.T_2)$. Alors $\mathcal{T}$ est le quotient de $\widetilde{\mathcal{T}}$ par l'action diagonale de G sur $\mathcal{T}\times\mathcal{G}$. Chaque classe d'équivalence $\mathcal{R}[T]$ est obtenue par passage au quotient à partir de l'orbite de (T,e). L'ensemble $\widetilde{U}_{(T_1,g_1)} = \overline{B}_{\widetilde{\mathcal{T}}}((T_1,g_1),e^{-1}) = \{(T_2,g_2) \in \widetilde{\mathcal{T}}/\overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e,1) = \overline{B}_{g_2^{-1}.T_2}(e,1)\}$ est un ouvert-fermé qui se projette sur l'ouvert-fermé $U_{g_1^{-1}.T_1} = \overline{B}_{\mathcal{T}}(g_1^{-1}.T_1, e^{-1})$. Puisque $\overline{B}_{\mathcal{G}}(e,1)$ ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, les ensembles $\widetilde{U}_{(T_1,g_1)}$ et $U_{g_1^{-1}.T_1}$ définissent des partitions finies de $\widetilde{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{T}$ respectivement. Nous allons remplacer $\widetilde{\mathcal{T}}$ par l'ensemble $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ des couples (T,x) où x est un point quelconque de T qui peut appartenir à l'intérieur $\mathring{e}$ d'une arête e de T. L'application $\widetilde{\psi}_{(T_1,g_1)} : \big((T_2,g_2),x\big) \in \widetilde{U}_{(T_1,g_1)} \times \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e,1) \mapsto (T_2, g_2.x) \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ est injective en restriction aux ensembles $\widetilde{U}_{(T_1,g_1)} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e,\frac{1}{2})$ et $\widetilde{U}_{(T_1,g_1)} \times \mathring{e}$. Leurs images $\widetilde{V}_{(T_1,g_1)}$ et $\widetilde{V}^{\mathrm{e}}_{(T_1,g_1)}$ sont munies de topologies telles que les restrictions et leurs inverses $\widetilde{\varphi}_{(T_1,g_1)} : \widetilde{V}_{(T_1,g_1)} \to \widetilde{U}_{(T_1,g_1)} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e,\frac{1}{2})$ et $\widetilde{\varphi}^{\mathrm{e}}_{(T_1,g_1)} : \widetilde{V}^{\mathrm{e}}_{(T_1,g_1)} \to \widetilde{U}_{(T_1,g_1)} \times \mathring{e}$ sont des homéomorphismes. On munit $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ de la topologie faible pour laquelle $\widetilde{V}_{(T_1,g_1)}$ et $\widetilde{V}^{\mathrm{e}}_{(T_1,g_1)}$ forment un recouvrement ouvert fini. On vérifie aisément que :

i) l'espace $\widetilde{\mathcal{T}}$ est réalisé comme un sous-espace compact de $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$,

ii) l'action de G sur $\widetilde{\mathcal{T}}$ s'étend en une action de G sur $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$,

iii) les cartes locales $\widetilde{\varphi}_{(T_1,g_1)}$ et $\widetilde{\varphi}^{\mathrm{e}}_{(T_1,g_1)}$ forment un atlas feuilleté sur $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ qui définit un feuilletage par graphes $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$ invariant par l'action de G.

Soit $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ le quotient de $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ par l'action de G. Alors les applications

$$\psi_{g_1^{-1}.T_1} : (g_2^{-1}.T_2, x) \in U_{g_1^{-1}.T_1} \times \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e,1) \mapsto x^{-1}.(g_2^{-1}.T_2) \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$$

définissent des cartes locales

$$\varphi_{g_1^{-1}.T_1} : V_{g_1^{-1}.T_1} \to U_{g_1^{-1}.T_1} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad \varphi^{\mathrm{e}}_{g_1^{-1}.T_1} : V^{\mathrm{e}}_{g_1^{-1}.T_1} \to U_{g_1^{-1}.T_1} \times \mathring{\mathrm{e}}$$

et donc l'espace $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ possède un atlas feuilleté fini. Il est compact car les plaques sont relativement compactes et les transversales sont compactes. □

2.3. Structure transverse. — Nous allons préciser ici la notion de *dynamique transverse* (*mesurable* ou *topologique*) utilisée dans la introduction. D'abord, la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est définie par l'action d'un pseudogroupe de transformations Γ engendré par les translations $\tau_g : T \mapsto g^{-1}.T$ associées aux éléments de G. Chacune de ces applications est définie sur l'ouvert-fermé $D_g = \{T \in \mathcal{T}/g \in T\}$ de $\mathcal{T}$. Le théorème 2.2.1 montre que Γ est le *pseudogroupe d'holonomie de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ réduit à $\mathcal{T}$*. Nous utiliserons donc la notion de *dynamique transverse* introduite par A. Haefliger [**6**].

Néanmoins, si l'holonomie est triviale, la dynamique transverse est représentée par la relation d'équivalence induite sur toute transversale complète. Rappelons qu'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un espace borélien standard X est *mesurable discrète* si les classes d'équivalence sont dénombrables et si le graphe est un borélien de $X \times X$. On appelle *transformation partielle de $\mathcal{R}$* tout isomorphisme borélien $\varphi : A \to B$ entre parties boréliennes de X dont le graphe $G(\varphi) = \{(x,y) \in X \times X/y = \varphi(x)\} \subset \mathcal{R}$. Une mesure borélienne μ sur X est dite *invariante pour $\mathcal{R}$* si elle est invariante pour toute transformation partielle φ, i.e. $\mu(\varphi^{-1}(B')) = \mu(B')$ pour tout borélien $B' \subset B$. La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ est mesurable discrète car les classes d'équivalence sont dénombrables et le graphe de $\mathcal{R}$ est un borélien de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ en tant que réunion des graphes des transformations partielles τ_g définies sur les ouverts-fermés $\overline{B}_{\mathcal{T}}(T, e^{-1})$ (avec $g \in \overline{B}_T(e,1)$) et de leurs compositions.

Définition 2.3.1. — Deux relations d'équivalence mesurées $(\mathcal{R}, X, \mu)$ et $(\mathcal{R}', X', \mu')$ sont dites :

i) *orbitalement équivalentes* si X et X' contiennent des boréliens Y et Y' saturés pour $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ et de mesure totale pour lesquels il existe un isomorphisme borélien $\varphi : Y \to Y'$ tel que $\varphi(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}'[\varphi(x)]$ pour μ-presque tout $x \in Y$ et $f_*\mu \sim \mu'$;

ii) *stablement orbitalement équivalentes* si X et X' contiennent des boréliens Y et Y' dont les saturés pour $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont de mesure totale tels que les relations d'équivalence induites $\mathcal{R}|_Y$ et $\mathcal{R}'|_{Y'}$ sont orbitalement équivalentes. Nous dirons alors que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ représentent une même *dynamique mesurable.*

Toute relation d'equivalence $\mathcal{R}$ sur un espace borélien ou topologique X est munie d'une structure naturelle de groupoïde caractérisée par les données suivantes : l'inclusion $\varepsilon : x \in X \mapsto (x,x) \in \mathcal{R}$ de l'espace des unités X dans $\mathcal{R}$, les projections $\beta : (x,y) \in \mathcal{R} \mapsto x \in X$ et $\alpha : (x,y) \in \mathcal{R} \mapsto y \in X$, l'ensemble des couples composables $\mathcal{R} * \mathcal{R} = \{((x,y),(x',y')) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}/\alpha(x,y) = y = x' = \beta(x',y')\}$, la multiplication partielle $\mu : ((x,y),(x',y')) \in \mathcal{R} * \mathcal{R} \mapsto (x,y') \in \mathcal{R}$ et l'inversion $\iota : (x,y) \in \mathcal{R} \to (y,x) \in \mathcal{R}$. La relation d'equivalence $\mathcal{R}$ est dite *topologique* si elle l'est comme groupoïde, c'est-à-dire si le graphe de $\mathcal{R}$ est muni d'une topologie (qui en fait un espace localement compact séparé) telle que $\alpha, \beta : \mathcal{R} \to X$ et $\mu : \mathcal{R} * \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ sont continues et $\iota : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ est un homéomorphisme. Une telle relation d'équivalence est dite *β-discrète* si X est ouvert dans $\mathcal{R}$. Pour tout ouvert U de $\mathcal{T}$ et tout élément g de G, notons $O(U,g) = \{(T, g^{-1}.T) \in \mathcal{R}/T \in U \cap D_g\}$ le graphe de la translation τ_g restreinte à U. Les ensembles $O(U,g)$ engendrent une topologie sur $\mathcal{R}$, plus fine que celle induite par la topologie produit sur $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, qui en fait une relation d'équivalence topologique β-discrète.

Définition 2.3.2. — Deux relations d'équivalence β-discrètes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sur X et X' sont dites *stablement orbitalement équivalentes* (resp. *isomorphes*) si X et X' contiennent des ouverts Y et Y' qui rencontrent toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ tels que les relations d'équivalence induites $\mathcal{R}|_Y$ et $\mathcal{R}'|_{Y'}$ sont orbitalement équivalentes (resp. isomorphes).

2.4. Réalisation géométrique. — La donnée d'un système fini de générateurs S de G fournit un système fini de générateurs $\Sigma = \{\tau_g/g \in S\}$ de Γ. Par analogie avec l'action d'un groupe, l'orbite $\Gamma(T) = \mathcal{R}[T]$ est l'ensemble des sommets d'un graphe $\overline{\Gamma}(T) = \overline{\mathcal{R}}[T]$, muni de la distance d_Σ définie par la longueur des Σ-mots. Nous dirons alors que $(\mathcal{R}, \mathcal{T}, \Sigma)$ est une *relation d'équivalence graphée* et que $(\Gamma, \mathcal{T}, \Sigma)$ un *pseudogroupe graphé*. Dans [**8**], le deuxième auteur a prouvé l'extension suivante du théorème 2.2.1 :

Théorème de réalisation géométrique 2.4.1. — *Soit Γ un pseudogroupe de transformations d'un espace localement compact, métrisable et séparable X, muni d'un système fini de générateurs Σ. Si la fonction de valence* val $: X \to \mathbb{N}$ *est continue, il existe un espace feuilleté localement compact, métrisable et séparable $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$ tel que X est un fermé qui rencontre toute les feuilles de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et Γ est le pseudogroupe de holonomie de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ réduit à X. En outre, si X est compact, alors $\boldsymbol{X}$ l'est aussi.*

Théorème de épaississement 2.4.2. — *Soit $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$ un espace feuilleté par graphes localement finis tel que Γ admet un système de générateurs dont les domaines et les rangs sont ouverts et fermés dans X. Il existe une lamination par surfaces de Riemann $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\mathcal{L}})$ dont le pseudogroupe de holonomie réduit à X est égal à Γ.*

Démonstration. — Fixons un entier $k \geqslant 1$ et un réel $\varepsilon > 0$. Considérons la sphère S^2_ε de rayon ε, munie de la métrique usuelle, puis ôtons une famille de boules géodésiques $\overline{B}(s_1, 2r), \ldots, \overline{B}(s_k, 2r)$ de même rayon $2r > 0$ et deux à deux disjointes. Considérons

le cylindre $C = S^1_r \times [0, \frac{3}{4}[$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, l'application exponentielle permet de définir un difféomorphisme entre la couronne $C_i = \overline{B}(s_i, 2r) - B(s_i, r)$ et le cylindre $S^1_r \times [0, r]$ qui identifie chaque sphère géodésique de centre s_i et rayon $r \leqslant t \leqslant 2r$ avec le cercle $S^1_r \times \{2r - t\}$. En recollant k copies du cylindre C à la sphère trouée, on obtient une surface $P(k)$ appelée une *pieuvre à k bras*. Les métriques riemanniennes sur les deux parties de la pieuvre se recollent en une métrique riemannienne qui coïncide avec les métriques de départ hors d'un voisinage tubulaire de $C_1 \cup \cdots \cup C_k$. Un choix convenable du rayon $r > 0$ permet de supposer que le cylindre $S^1_r \times]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$ ne coupe pas ce voisinage. Nous noterons $P'(k)$ la pieuvre obtenue en remplaçant l'intervalle $[0, \frac{3}{4}[$ par le sous-intervalle $[0, \frac{1}{2}[$.

Notons $X^{\mathrm{val}=k}$ l'ensemble des sommets $x \in X$ tels que $\mathrm{val}(x) = k$ et Σ_x l'ensemble d'arêtes σ issues de x. Soit σ^{-1} l'arête opposée, issue de l'extremité $\sigma(x)$ de σ. Pour tout $x \in X^{\mathrm{val}=k}$, l'ensemble Σ_x permet d'étiqueter les bras de $P(k)$. Soit $\boldsymbol{M}$ le quotient de la réunion disjointe $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^{\mathrm{val}=k} \times P(k)$ par la relation d'équivalence qui identifie le point (x, z, t) du cylindre $\{x\} \times S^1_r \times]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$ contenu dans le bras de la pieuvre $\{x\} \times P(k)$ d'étiquette $\sigma \in \Sigma_x$ avec le point $(\sigma(x), \overline{z}, 1 - t)$ du cylindre $\sigma(x) \times S^1_r \times]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$ contenu dans le bras de la pieuvre $\sigma(x) \times P(k')$ d'étiquette $\sigma^{-1} \in \Sigma_{\sigma(x)}$. Ici $\overline{z}$ est le conjugué de z et $k' = \mathrm{val}(\sigma(x))$. Soit π la projection. La donnée d'un atlas feuilleté sur X (construit par le procédé décrit dans [**8**]) entraîne l'existence d'un atlas feuilleté sur $\boldsymbol{M}$ définissant une lamination $\boldsymbol{\mathcal{L}}$. La feuille L_x passant par x est la réunion des surfaces $\pi(\{y\} \times P(\mathrm{val}(y)))$ associés aux sommets y de la feuille de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ passant par x. En géneral, ces surfaces ne sont pas difféomorphes aux pieuvres $P(\mathrm{val}(y))$ car certaines arêtes issues de y peuvent être des boucles. Néanmoins, en remplaçant $P(\mathrm{val}(y))$ par $P'(\mathrm{val}(y))$, nous obtiendrons des vraies plaques $\pi(\{y\} \times P'(\mathrm{val}(y)))$ difféomorphes aux pieuvres $P'(\mathrm{val}(y))$. En ajoutant les images des bras $\{y\} \times S^1_r \times]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$ d'étiquette $\sigma \in \Sigma_y$, on décrit la feuille L_x comme réunion de plaques de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$. Puisque les bras des pieuvres sont recollés à l'aide des difféomorphismes qui préservent l'orientation, L_x est une surface de Riemann orientable. L'inclusion naturelle de $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^{\mathrm{val}=k}$ dans $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} X^{\mathrm{val}=k} \times P(k)$ passe au quotient en un plongement fermé de l'espace de sommets X dans $\boldsymbol{M}$. En identifiant X avec son image dans $\boldsymbol{M}$, on voit que la trace de la feuille L_x coïncide avec l'ensemble de sommets de la feuille de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ passant par x. □

2.5. Graphes répétitifs et ensembles minimaux. — Le but de ce paragraphe est de caractériser les ensembles minimaux de $(\boldsymbol{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$ et $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\mathcal{L}})$ en adaptant la *propriété d'isomorphisme local* des pavages [**1, 9**].

Définition 2.5.3. — i) Fixons un couple $T, T' \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$. Nous dirons qu T' *contient une copie fidèle de la boule* $B_T(x, r)$ et nous écrirons $B_T(x, r) \hookrightarrow T'$ s'il existe $g \in G$ tel que $g.B_T(x, r) = B_{T'}(g.x, r) \subset T'$.

ii) Nous dirons qu'un graphe $T \in \boldsymbol{\mathcal{T}}$ est *répétitif* si pour tout entier $r > 0$, il existe un entier $R > 0$ tel que $B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$ pour tout couple $x, y \in T$.

Nous adaptons ici une version uniforme de la propriété d'isomorphisme local usuelle. En fait, pour les pavages de type fini, les deux propriétés sont équivalentes. L'analogue pour les graphes fait partie du critère de minimalité suivant (dont l'équivalence (*ii*) $\Leftrightarrow$ (*iii*) a été prouvée dans [**2, 4**]) :

Théorème 2.5.4. — *Pour tout $T \in \mathcal{T}$, considérons l'ensemble fermé $X = \overline{\mathcal{R}[T]}$ saturé pour $\mathcal{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *le graphe T est répétitif;*

ii) *pour tout $r > 0$, il existe $R > 0$ tel que $B_T(e,r) \hookrightarrow B_T(y,R)$ pour tout $y \in T$;*

iii) *l'ensemble X est minimal.*

Démonstration. — Il suffit de prouver (iii) $\Rightarrow$ (i), mais il convient avant de rappeler brièvement (iii) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela, à tout réel $r > 0$, on lui associe une suite croissante d'ouverts $U_R = \{\ T' \in X\ /\ B_T(e,r) \hookrightarrow B_{T'}(e,R)\ \}$ (avec $R \geqslant 1$) qui recouvrent X. Puisque X est compact, il existe $R > 0$ tel que $X = U_R$. Pour tout $x \in T$, le graphe $x^{-1}.T \in U_R$ et donc $B_T(e,r) \hookrightarrow B_{x^{-1}.T}(e,R)$, c'est-à-dire qu'il existe $g \in G$ tel que : $g.B_T(e,r) = B_{x^{-1}.T}(g,r) \subset B_{x^{-1}.T}(e,R)$. Alors on a :

$$h.B_T(e,r) = x.B_{x^{-1}.T}(g,r) = B_T(h,r) \subset x.B_{x^{-1}.T}(e,R) = B_T(x,R)$$

avec $h = xg$ et $B_T(e,r) \hookrightarrow B_T(x,R)$. Pour démontrer (iii) $\Rightarrow$ (i), fixons un réel $r > 0$ et un point $x \in T$. Comme auparavant, l'ensemble X est recouvert par une suite croissante d'ouverts $U_R^x = \{T' \in X / B_T(x,r) \hookrightarrow B_{T'}(e,R)\}$ et il existe $R > 0$, qui dépend de r et x, tel que $B_T(x,r) \hookrightarrow B_T(y,R)$ pour tout $y \in T$. Pour conclure, il faut pouvoir choisir $R > 0$ indépendant du point x. Remarquons tout d'abord que pour tout sommet g de $\mathcal{G}$, la boule $B_{\mathcal{G}}(g,r) = g.B_{\mathcal{G}}(e,r)$. Rappelons aussi que la compacité $\mathcal{T}$ provient du fait que $B_{\mathcal{G}}(e,r)$ ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes. Il en est de même pour $B_{\mathcal{G}}(g,r)$. En fait, à translation près, il n'y a qu'un nombre fini de boules de rayon $r > 0$ distinctes. Considérons une famille finie de points $x_1, \ldots, x_n \in T$ de manière que les boules $B_T(x_i,r)$ représentent toutes les classes de translations possib ! les. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $y \in T$, on a $B_T(x_i,r) \hookrightarrow B_T(y,R(r,x_i))$. Si on pose $R = \max\{R(r,x_1), \ldots, R(r,x_n)\}$, alors $B_T(x,r) \hookrightarrow B_T(y,R)$ pour tout couple $x, y \in T$. □

3. L'espace feuilleté de Ghys–Kenyon

Nous donnons ici une nouvelle construction de l'*espace feuilleté de Ghys-Kenyon* [**4**], que n'utilise pas l'*arbre de Kenyon* [**4, 7**], mais ses règles de construction.

3.1. L'arbre de Kenyon et l'espace feuilleté de Ghys–Kenyon. — Nous allons commencer par rappeler la construction de l'arbre de Kenyon. Soient $\mathcal{Z}^2$ le graphe de Cayley de $\mathbb{Z}^2$, muni du système de générateurs $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$, et T_1 le sous-arbre de $\mathcal{Z}^2$ décrit dans la figure 3.

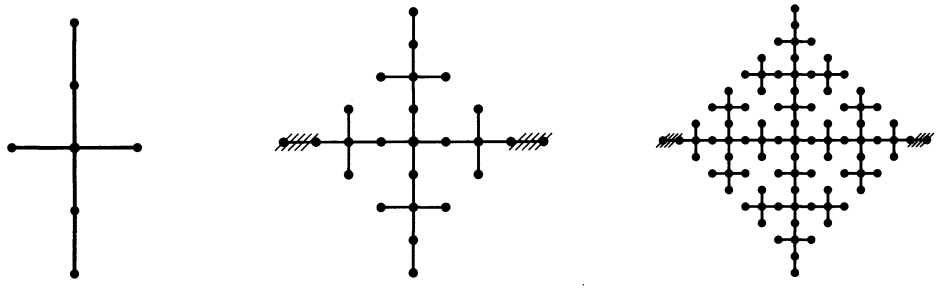

FIGURE 3. Les arbres T_1, T_2 et T_3

Cet arbre est translaté ensuite par le vecteur $(0,2)$, puis l'image est tournée à l'aide des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$. L'élagage des arêtes terminales contenues dans l'axe horizontal fournit un arbre T_2. Si on répète ce procédé, on obtient de même un arbre T_3. Par récurrence, on obtient une suite d'arbres T_n qui rencontrent les axes horizontal et vertical suivant les intervalles $[-2^n+1, 2^n-1] \times \{0\}$ et $\{0\} \times [-2^n, 2^n]$ respectivement. Nous appellerons *arbre de Kenyon* la réunion $T_\infty = \bigcup_{n\geqslant 1} T_n \subset \mathcal{Z}^2$. C'est un arbre apériodique et répétitif ayant 4 bouts.

Nous appellerons *minimal de Ghys-Kenyon* l'ensemble $X = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$. D'après les théorèmes 2.2.1 et 2.4.1, il existe un feuilletage par graphes $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ d'un espace compact $\boldsymbol{X}$ pour lequel X est une transversale complète et $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence induite par $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. Nous appellerons *espace feuilleté de Ghys-Kenyon* ce minimal de l'espace feuilleté de Gromov-Hausdorff $(\boldsymbol{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$. En fait, grâce au théorème 2.4.2, on peut remplacer $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$ par une vraie lamination par surfaces de Riemann $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\mathcal{L}})$, appelée *lamination de Ghys-Kenyon.*

3.2. Codage des feuilles. — Nous allons reconstruire le minimal de Ghys–Kenyon à l'aide d'une application $\Phi : \mathcal{S}_4 \to X$ qui, à toute suite $\alpha = \alpha_0\alpha_1\cdots \in \mathcal{S}_4 = \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_4^{\mathbb{N}}$, associe un arbre apériodique et répétitif $\Phi(\alpha)$ dans l'enveloppe de T_∞. Nous construirons $\Phi(\alpha)$ de proche en proche en partant du sommet $x_0 = 0$ et de l'arbre trivial $P_0 = \{0\}$. Pour cela, nous commençons par identifier les éléments de $\mathbb{Z}_4$ avec les racines quatrièmes de l'unité grâce à l'application $\mathbf{r} : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{C}$ définie par $\mathbf{r}(k) = e^{\frac{\pi}{2}ik}$. Nous joignons les sommets x_0 et $x_1 = \mathbf{r}(\alpha_0)$ par une arête de $\mathcal{Z}^2$, puis nous prenons la réunion des images de cette arête par les rotations de centre x_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$. Nous obtenons ainsi un arbre $P_1 = \Phi(\alpha_0)$. Considérons ensuite l'unique arête de $\mathcal{Z}^2$ qui joint le sommet $x_2 = x_1 + 2\mathbf{r}(\alpha_1)$ avec un sommet de P_1. Nous appelons $P_2 = \Phi(\alpha_0\alpha_1)$ la réunion de l'arbre P_1 et leurs images par les rotations de centre x_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$. Par récurrence, nous avons une suite de sommets $x_n = x_{n-1} + 2^{n-1}\mathbf{r}(\alpha_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i\mathbf{r}(\alpha_i)$ et une suite croissante de sous-arbres finis P_n de $\mathcal{Z}^2$. Alors $\Phi(\alpha) = \bigcup_{n\geqslant 0} P_n = \bigcup_{n\geqslant 0} \Phi(\alpha_0\ldots\alpha_{n-1})$ est un arbre apériodique et répétitif ayant au plus 2 bouts. Nous appellerons *squelette de* $\Phi(\alpha)$ la suite de sommets $x_0x_1\ldots x_n\ldots$ identifiée au chemin d'arêtes obtenu en joignant les

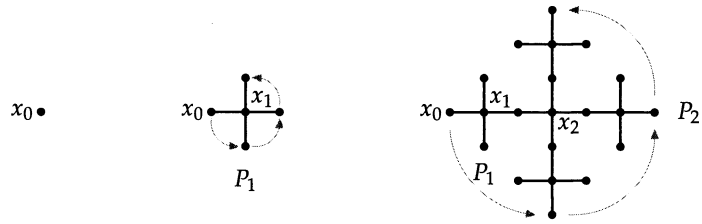

FIGURE 4. Construction de l'arbre $\Phi(\alpha)$

sommets x_n et x_{n+1} par 2^n arêtes dans la direction $\mathbf{r}(\alpha_i)$. Nous venons de définir une application $\Phi : \mathcal{S}_4 \to \mathcal{T}$.

Proposition 3.1. — *Le minimal de Ghys-Kenyon X est l'enveloppe $\overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$ de tout arbre codé $\Phi(\alpha)$. Il se décompose en la réunion disjointe de la classe $\mathcal{R}[T_\infty]$ et de l'ensemble saturé $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{S}_4}\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]$.*

Démonstration. — Vérifions d'abord que $X = \overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$ pour toute suite $\alpha \in \mathcal{S}_4$. En effet, $T_\infty \in \overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$ car $B_{T_\infty}(0, 2^n - 1) = B_{\Phi(\alpha)}(x_n, 2^n - 1) - x_n = B_{\Phi(\alpha)-x_n}(0, 2^n - 1)$. Donc $X = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]} \subset \overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$. Mais puisque $\Phi(\alpha)$ est répétitif, on a l'égalité. Pour montrer la deuxième affirmation, on constante que les arbres T_∞ et $\Phi(\alpha)$ sont distincts car ils n'ont pas le même nombre de bouts. Leurs classes d'équivalence $\mathcal{R}[T_\infty]$ et $\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]$ le sont aussi. Il faut donc vérifier que tout arbre $T \in X - \mathcal{R}[T_\infty]$ est équivalent à un arbre $\Phi(\alpha)$. En remplaçant T par un translaté $T - v$, nous pourrons supposer que $\mathrm{val}(T) = \mathrm{val}_T(0) = 1$. Nous construirons alors de proche en proche une suite $\alpha \in \mathcal{S}_4$ telle que $T = \Phi(\alpha)$. Psar hypothèse, la sphère $S_T(0,1) = \partial\overline{B}_T(0,1)$ est réduite à un point x_1 et $\alpha_0 = \mathbf{r}^{-1}(x_1)$. Supposons connus les codes $\alpha_0 \dots \alpha_n$ et les points $x_0 \dots x_n$ du squelette. Alors la sphère $S_T(x_n, 2^n) = \partial\overline{B}_T(x_n, 2^n)$ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

i) $S_T(x_n, 2^n)$ est réduite à un seul point $x_{n+1} = x_n + 2^n v$ où $v \in \mathbb{Z}^4$. Dans ce cas, nous définirons $\alpha_n = \mathbf{r}^{-1}(v)$.

ii) $S_T(x_n, 2^n)$ contient deux points x^0_{n+1} et x^1_{n+1}. Dans ce cas, il existe $i \in \{0, 1\}$ tel que $B_T(x^i_{n+1}, 2^{n+2} - 1) = B_{T_\infty}(0, 2^{n+2} - 1)$ (voir la figure 5) et nous définirons $x_{n+1} = x^{1-i}_{n+1} = x_n + 2^n v$ et $\alpha_n = \mathbf{r}^{-1}(v)$ avec $v \in \mathbb{Z}^4$.

Par récurrence, nous aurons une suite $\alpha \in \mathcal{S}_4$ telle que $T = \Phi(\alpha)$. □

Considérons l'ouvert-fermé $X^{\leqslant 2} = \{T \in X/\ \mathrm{val}(T) \leqslant 2\}$, le G_δ dense $Y = X - \mathcal{R}[T_\infty] = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{S}_4}\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]$ et le borélien $Y^{\leqslant 2} = Y \cap X^{\leqslant 2}$. D'après la preuve de la proposition ci-dessus, l'application de codage $\Phi : \mathcal{S}_4 \to Y^{\leqslant 2}$ est surjective.

3.3. Relation cofinale. — Si on munit $\mathcal{S}_4 = \mathbb{Z}_4^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit, engendrée par les cylindres $C^{i_0\dots i_n}_{\beta_0\dots\beta_n} = \{\alpha \in \mathcal{S}_4/\alpha_{i_0} = \beta_0, \dots, \alpha_{i_n} = \beta_n\}$, $\mathcal{S}_4$ est homéomorphe

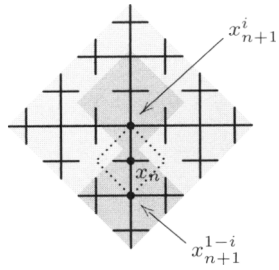

FIGURE 5. Le $(n+1)$-ième code

à l'ensemble de Cantor. Soit $\sigma : \mathcal{S}_4 \to \mathcal{S}_4$ le déplacement de Bernoulli donné par $\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1}$ pour toute suite $\alpha \in \mathcal{S}_4$ et tout entier $n \geqslant 0$. Deux suites α et β dans $\mathcal{S}_4$ sont *cofinales* s'il existe $n \geqslant 0$ tel que $\sigma^n(\alpha) = \sigma^n(\beta)$, c'est-à-dire $\alpha_m = \beta_m$ pour tout $m \geqslant n$. Pour tout couple de suites finies $\alpha_0 \dots \alpha_n$ et $\beta_0 \dots \beta_n$, les arbres finis $\Phi(\alpha_0 \dots \alpha_n)$ et $\Phi(\beta_0 \dots \beta_n)$ sont reliés par $\Phi(\beta_0 \dots \beta_n) = \Phi(\alpha_0 \dots \alpha_n) - v$ où le vecteur $v = \sum_{i=0}^n 2^i \mathbf{r}(\alpha_i) - \sum_{i=0}^n 2^i \mathbf{r}(\beta_i) = \sum_{i=0}^n 2^i \big(\mathbf{r}(\alpha_i) - \mathbf{r}(\beta_i)\big)$. Un argument simple montre alors que :

Proposition 3.2. — *Deux arbres codés $\Phi(\alpha)$ et $\Phi(\beta)$ sont $\mathcal{R}$-équivalents si et seulement si les suites α et β sont cofinales.*

La remarque précédente montre aussi que Φ est injective, ce qui nous donne :

Proposition 3.3. — *L'application $\Phi : \mathcal{S}_4 \to Y^{\leqslant 2}$ est une bijection*

Signalons que l'expansion binaire des éléments de $\mathbb{Z}_4$ fournit un homéomorphisme entre $\mathcal{S}_4 = \mathbb{Z}_4^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{S}_2 = \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$, induit par les substitutions $0 \to 00$, $1 \to 10$, $2 \to 01$ et $3 \to 11$ obtenues en remplaçant $k \in \mathbb{Z}_4$ par un couple d'éléments $a(k)$ et $b(k)$ de $\mathbb{Z}_2$ tels que $k = a(k) + 2b(k)$. Évidemment les relations cofinales sur $\mathcal{S}_4 = \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{S}_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ deviennent isomorphes. Il y a d'ailleurs une équivalence orbitale entre la relation cofinale $\mathcal{R}_{\text{cof}}$ sur $\mathcal{S}_2$ et la relation d'équivalence engendrée par la transformation $T : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ décrite dans l'introduction. Sauf les suites $000\dots$ et $111\dots$ qui appartiennent à une même orbite, les classes de cofinalité coïncident avec les orbites de T.

3.4. Dynamique borélienne. — Empruntée de la théorie des pavages, la notion de *motif* est le bon outil pour décrire la σ-algèbre des boréliens de X. Tout sous-arbre fini P de $\mathcal{Z}^2$ contenant l'origine sera appelé un *motif* de $\mathcal{Z}^2$. Nous dirons que $T \in \mathcal{T}$ *contient le motif P autour d'un sommet p* si $P + p \subset T$ et nous définirons $X_{P,p} = \{T \in X / P + p \subset T\}$. Si $p = 0$, nous écrirons simplement X_P. Comme pour les pavages [**1**], les ensembles X_P sont des ouverts-fermés de X. Néanmoins, les motifs ne suffisent pas pour engendrer la topologie de X. En effet, la boule $B = \overline{B}_X(\Phi(00\dots), e^{-1})$ est

l'ensemble des arbres T tels que $\overline{B}_T(0,1) = \overline{B}_{\Phi(00\ldots)}(0,1) = {}^0\bullet\!-\!\bullet$, mais il n'y a aucun motif P tel que $X_P \subset B$. En fait,

$$B = X_{0\,\bullet\!-\!\bullet} - \big(X_{\substack{\bullet\\|\\\bullet\,0}} \cup X_{\bullet\!-\!\bullet\,0} \cup X_{\substack{\bullet\,0\\|\\\bullet}}\big).$$

En général, pour tout arbre $T \in X$ et tout entier $r > 0$, la boule $\overline{B}_X(T, e^{-r})$ est l'ouvert-fermé $X_{(P,A)}$ associé au *motif fin* (P, A) où $P = \overline{B}_T(e, r)$ et A est l'ensemble des arêtes du graphe $\overline{B}_{Z^2}(e, r) - B_T(e, r-1)$ qui rencontrent P. Par conséquent, les ouverts-fermés X_P engendrent la σ-algèbre des boréliens.

L'application de codage Φ n'est pas continue, car S_4 est compact, mais $Y^{\leqslant 2}$ ne l'est pas. Néanmoins, Φ a deux propriétés importantes :

Proposition 3.4. — *L'application $\Phi : \mathcal{S}_4 \to Y^{\leqslant 2}$ est borélienne ouverte.*

Démonstration. — Pour tout motif P, l'ensemble $\Phi^{-1}(X_P) = \bigcup_{\alpha_0\ldots\alpha_n \in \mathcal{P}} C^{0\ldots n}_{\alpha_0\ldots\alpha_n}$ où $\mathcal{P} = \{\alpha_0\ldots\alpha_n / P \subset \Phi(\alpha_0\ldots\alpha_n)\}$. Par ailleurs, on a $\Phi(C^{0\ldots n}_{\alpha_0\ldots\alpha_n}) = X_{\Phi(\alpha_0\ldots\alpha_n)}$. □

Nous pouvons maintenant affirmer que *la dynamique transverse borélienne de la lamination de Ghys-Kenyon est représentée par une machine à sommer binaire.*

3.5. Propiétés ergodiques. — Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence mesurable discrète sur X, munie d'une mesure quasi-invariante ergodique μ. Par analogie avec la classification des facteurs de F. J. Murray et J. von Neumann, on peut distinguer trois types de relations :

1) *Type* I_n *(avec $n = 1, 2, \ldots, \infty$)* : si $\mathcal{R}$ est transitive (avec cardinal $\#X = n$).

2) *Type* II_n *(avec $n = 1$ ou ∞)* : si $\mathcal{R}$ n'est pas transitive et si μ est équivalente à une mesure (finie ou infinie) invariante pour $\mathcal{R}$.

3) *Type* III : s'il n'existe pas de mesure invariante équivalente à μ.

Si μ_4 est la mesure de probabilité équidistribuée sur $\mathcal{S}_4$, alors $\mathcal{R}_{\mathrm{cof}}$ est de type II_1.

Proposition 3.5. — *La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur X est de type* II_1.

Démonstration. — Pour tout $n \geqslant 1$, notons B_n la boule de centre T_∞ et de rayon n contenue dans $\mathcal{R}[T_\infty]$. L'isomorphisme entre $\overline{\mathcal{R}}[T_\infty]$ et T_∞ identifie B_n avec $B_{T_\infty}(0, n)$. Soit μ_n la mesure de comptage sur B_n. Pour tout motif P, on a :

$$\mu_n(X_P) = \frac{\#B_n \cap X_P}{\#B_n} = \frac{\#\{\, p \in B_{T_\infty}(0,n) \ / \ P + p \subset T_\infty \,\}}{\#B_{T_\infty}(0,n))} = \frac{A(P,n)}{V(n)}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que μ_n converge faiblement vers une mesure de probabilité μ. Puisque X_P est un ouvert-fermé, on a :

$$\mu(X_P) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(X_P) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(P,n)}{V(n)} = \textit{fréquence du motif } P.$$

D'autre part, pour tout sommet $v \in P$, l'ensemble $X_P - v = X_{P-v}$ est l'image de X_P par la translation $\tau_v(T) = T - v$. Si T_∞ contient le motif P autour d'un point

$p \in B_{T_\infty}(0, n-r)$, il contient aussi le motif $P - v$ autour du point $p + v \in B_{T_\infty}(0, n)$ avec $r > \| v \|$. Donc

$$|\mu_n(X_P - v) - \mu_n(X_P)| \leqslant \frac{V(n) - V(n-r)}{V(n)} \leqslant \frac{V(n+r) - V(n-r)}{V(n)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais puisque la fonction $V(n)$ est à croissance sous-exponentielle, il vient $\lim_{n\to\infty} |\mu_n(X_P - v) - \mu_n(X_P)| = 0$ et donc μ est invariante pour $\mathcal{R}$. □

Proposition 3.6. — *L'application Φ définit une équivalence orbitale stable entre les relations d'équivalence mesurées $\mathcal{R}_{\text{cof}}$ sur $\mathcal{S}_4$ et $\mathcal{R}$ sur X.*

Démonstration. — Puisque le saturé de $Y^{\leqslant 2}$ est de mesure totale, il nous suffit de démontrer que $\Phi : \mathcal{S}_4 \to Y^{\leqslant 2}$ envoie μ_4 sur une mesure équivalente à $\mu|_{Y^{\leqslant 2}}$. Par l'invariance de μ, on a $\mu(X^{\leqslant 2}) = \frac{3}{4}$ et donc $\mu_{X^{\leqslant 2}} = \frac{4}{3}\mu|_{X^{\leqslant 2}}$ est une mesure de probabilité sur $X^{\leqslant 2}$ invariante pour $\mathcal{R}|_{X^{\leqslant 2}}$. L'inverse de Φ envoie la mesure induite par $\mu_{X^{\leqslant 2}}$ sur une mesure de probabilité sur $\mathcal{S}_4$ invariante pour $\mathcal{R}_{\text{cof}}$. L'unicité ergodique de μ_4 entraîne que $\Phi_*\mu_4 = \mu_{X^{\leqslant 2}}|_{Y^{\leqslant 2}}$. □

Théorème 3.5.1. — *La dynamique transverse mesurable de la lamination de Ghys-Kenyon $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\mathcal{L}})$ est répresentée par une machine à sommer binaire. En outre, elle est uniquement ergodique.*

Un très joli résultat d'É. Ghys [**3**] permet de parler du type topologique des feuilles génériques de $\boldsymbol{\mathcal{L}}$. De notre cas, on a que :

i) il y a un ensemble saturé résiduel et de mesure totale dont toutes les feuilles ont exactement un bout ;

ii) il y a un ensemble saturé maigre et de mesure nulle constitué par une infinité non dénombrable des feuilles ayant deux bouts ;

iii) il y a une seule feuille avec quatre bouts.

Le point essentiel est de vérifier qu'il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des feuilles ayant deux bouts et l'ensemble des suites de $\mathcal{S}_4$ contenant un nombre fini de détours et une infinité d'aller et retours. Pour toute suite $\alpha \in \mathcal{S}_4$, nous appelons *aller et retour* (resp. *détour*) tout couple $\alpha_n\alpha_{n+1}$ avec $\alpha_n \neq \alpha_{n+1}$ ayant la même (resp. distincte) parité. Cela permet de montrer que l'ensemble des feuilles à deux bouts est non dénombrable de mesure nulle. D'après le lemme 2.6 de [**2**], l'ensemble des feuilles ayant un bout est résiduel.

4. Dynamique topologique

Toutes les $\mathcal{R}$-classes du minimal de Ghys-Kenyon sont obtenues à partir des mêmes motifs par un même procédé d'inflation. Nous utiliserons l'inclusion de ces motifs dans les motifs qui résultent de l'inflation pour décrire sa dynamique topologique.

4.1. Relations d'équivalence affables. — Une relation d'équivalence β-discrète $\mathcal{R}$ sur un espace localement compact séparé X est dite *compacte* [**5**] si $\mathcal{R} - \Delta$ est compact où Δ est la diagonale de $X \times X$.

Définition 4.1.1 ([**5**]). — Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur un espace totalement disconnexe X est dite *affable* s'il existe une suite croissante de relations d'équivalence compactes $\mathcal{R}_n$ telle que $\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n$. Si on munit $\mathcal{R}$ de la topologie limite inductive, alors $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$ est une relation d'équivalence β-discrète *approximativement finie* (AF en abrégé).

Un *diagramme de Bratteli* est un graphe orienté $\mathcal{B} = (V, E)$ dont les ensembles de sommets et d'arêtes admettent des décompositions $V = \bigsqcup_{n\geqslant 0} V_n$ et $E = \bigsqcup_{n\geqslant 0} E_n$ où V_n et E_n sont des ensembles finis non vides tels que pour toute arête $e \in E_n$, l'origine $\alpha(e) \in V_n$ et l'extremité $\beta(e) \in V_{n+1}$ [**5**]. On appelle *source* tout sommet v tel que $\beta^{-1}(v) = \varnothing$. Soit $X_{\mathcal{B}}$ l'espace des chemins infinis $e_n e_{n+1} e_{n+2} \dots$ (avec $\alpha(e_{i+1}) = \beta(e_i)$) issus d'une source $\alpha(e_n)$ de $\mathcal{B}$. La relation d'équivalence *cofinal* $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ sur $X_{\mathcal{B}}$ (qui identifie $e_n e_{n+1} \dots$ et $e'_m, e'_{m+1} \dots$ s'il existe $N \geqslant m, n$ tel que $e'_i = e_i$ pour tout $i \geqslant N$) est affable. En fait, d'après [**5**], toute relation d'équivalence AF sur X est isomorphe à la relation cofinale $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ sur $X_{\mathcal{B}}$ définie par un diagramme de Bratteli ! $\mathcal{B}$.

4.2. Affabilité du minimal de Ghys-Kenyon. — Soit $\mathcal{P}_n = \{A_n^0, A_n^1, A_n^2, A_n^3, B_n^0, B_n^1, C_n\}$ la famille de *motifs basiques de taille* n définis par $A_n^k = \overline{B}_{T_\infty}(0, 2^n - 1) \cup e_n^k$, $B_n^k = \overline{B}_{T_\infty}(0, 2^n - 1) \cup e_n^k \cup e_n^{k+2}$ et $C_n = \overline{B}_{T_\infty}(0, 2^n)$ où e_n^k est l'arête qui rélie $(2^n - 1)\mathbf{r}(k)$ et $2^n\mathbf{r}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_4$ (voir la figure 6). Deux éléments T et T' de $X - X_{C_n}$ sont *$\mathcal{R}_n$-équivalents* s'il existe un motif basique $P \in \mathcal{P}_n - \{C_n\}$ et deux sommets $v, v' \in P$ avec $\| v \|, \| v \| < 2^n$ tels que $P \subset T - v = T' - v'$. D'autre part, la relation $\mathcal{R}_n$ est triviale sur X_{C_n}.

Proposition 4.1. — *Les relations d'équivalence $\mathcal{R}_n$ sont compactes et ouvertes dans $\mathcal{R}$ et donc $\mathcal{R}_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ est affable et ouverte dans $\mathcal{R}$.*

Démonstration. — Montrons que $\mathcal{R}_n$ est ouverte dans $\mathcal{R}$. Pour tout couple $(T, T') \in \mathcal{R}_n$, il existe un motif $P \in \mathcal{P}_n$ et deux sommets $v, v' \in P$ avec $\| v \|, \| v' \| < 2^n$ tels que $P \subset T - v = T' - v'$. Choisissons $N > 0$ tel que $P + v \subseteq B_T(0, N)$, puis considérons l'ouvert $U = \{T'' \in X / B_{T''}(0, N) = B_T(0, N)\}$ de X et l'ouvert $O(U, w)$ de $\mathcal{R}$ où $w = v - v'$. Pour tout $T'' \in U$, le couple $(T'', T'' - w) \in \mathcal{R}_n$ car T'' contient le motif P autour de v. Donc $(T, T') \in O(U, v) \subset \mathcal{R}_n$. Alors $\mathcal{R}_n$ est la réunion des ouverts $O(U, w)$ associés motifs $P \in \mathcal{P}_n$ et aux sommets $v, v' \in P$ tels que $\| v \|, \| v' \| < 2^n$. En remplaçant U par l'ouvert-fermé $X_{P,v}$ et $O(U, w)$ par le graphe de la translation $T'' \mapsto T'' - w$ définie sur $X_{P,v}$, nous aurons que R_n est compacte. □

Toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_\infty$ sont égales, sauf celle de T_∞ qui se décompose en la réunion de la classe triviale $\{T_\infty\}$ et de quatre classes isomorphes

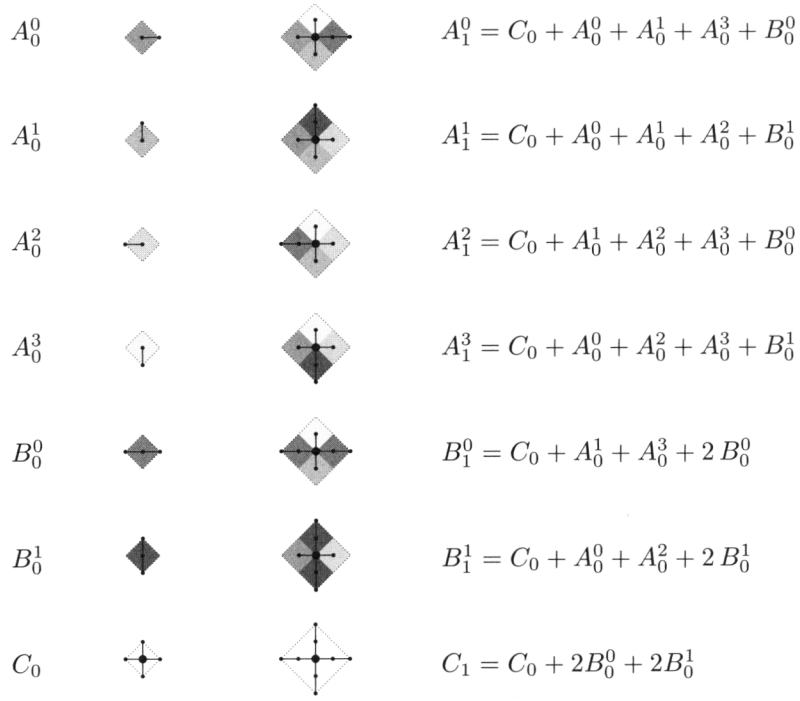

FIGURE 6. Les familles $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ et les règles d'inflation

aux composantes connexes de $T_\infty - \{0\}$. La dynamique topologique de $\mathcal{R}_\infty$ est représentée par le diagramme de Bratteli $\mathcal{B} = (V, E)$ où $V_0 = \{0\}$, $V_{n+1} = \mathcal{P}_n = \{A_n^0, A_n^1, A_n^2, A_n^3, B_n^0, B_n^1, C_n\}$ et $P \in \mathcal{P}_n$ est relié par une arête de E_{n+1} à $Q \in \mathcal{P}_{n+1}$ si et seulement si Q contient une copie fidèle de P. L'isomorphisme $\Psi : X \to X_{\mathcal{B}}$ entre $\mathcal{R}_\infty$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ est donné par $\Psi(T) = (e_0, e_1, \dots)$ où $\beta(e_n)$ est l'unique motif $P \in \mathcal{P}_{n+1}$ pour lequel $T - v$ appartient à l'ouvert-fermé $X_{(P,A)}$ avec $v \in P$ et A formé des arêtes de $\overline{B}_{T_\infty}(0, 2^{n+1})$ qui n'appartiennent pas à P. Pour tout $T \in X$ avec $\mathrm{val}(T) = 4$, l'origine 0 est l'intersection des translatés de quatre motifs basiques de taille n. Nous modifierons alors $\mathcal{R}_n$ pour que 0 devienne équivalent aux autres points du translaté de A_n^0 ou de B_n^0. Nous obtiendrons ainsi une suite de relations d'équivalence compactes $\mathcal{R}'_n \supset \mathcal{R}_n$. Alors $\mathcal{R}'_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}'_n$ est affable. Puisque les bouts de la feuille de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ passant par T_∞ sont partout denses, $\mathcal{R}[T_\infty]$ se décompose en la réunion de quatre orbites denses et donc $\mathcal{R}'_\infty$ est minimale. Nous pouvons maintenant appliquer le corollaire 4.17 de [**5**] :

Théorème 4.2.1. — *La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est affable et la dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon est répresentée par un système dynamique minimal sur l'ensemble de Cantor.*

Références

[1] J. BELLISSARD, R. BENEDETTI & J.-M. GAMBAUDO – Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labeling, *Comm. Math. Phys.* **261** (2006), p. 1–41.

[2] E. BLANC – Propriétés génériques des laminations, Thèse, UCB Lyon 1, 2001.

[3] É. GHYS – Topologie des feuilles génériques, *Ann. of Math. (2)* **141** (1995), p. 387–422.

[4] ———, Laminations par surfaces de Riemann, in *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, Panor. Synthèses, vol. 8, Soc. Math. France, 1999, p. 49–95.

[5] T. GIORDANO, I. PUTNAM & C. SKAU – Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor dynamical systems, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24** (2004), p. 441–475.

[6] A. HAEFLIGER – Pseudogroups of local isometries, in *Differential geometry (Santiago de Compostela, 1984)*, Res. Notes in Math., vol. 131, Pitman, 1985, p. 174–197.

[7] R. KENYON – A group of paths in $\mathbb{R}^2$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), p. 3155–3172.

[8] Á. LOZANO ROJO – The Cayley foliated space of a graphed pseudogroup, in *XIV Fall Workshop on Geometry and Physics*, Publ. R. Soc. Mat. Esp., vol. 10, R. Soc. Mat. Esp., Madrid, 2006, p. 267–272.

[9] C. RADIN & M. WOLFF – Space tilings and local isomorphism, *Geom. Dedicata* **42** (1992), p. 355–360.

F. ALCALDE CUESTA, Departamento de Xeometría e Topoloxía, Universidade de Santiago de Compostela, 15782 Santiago de Compostela (Espagne)

A. LOZANO ROJO, Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, 48940 Leioa (Espagne)

M. MACHO STADLER, Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, 48940 Leioa (Espagne)