

Astérisque

DOMINIQUE CERVEAU

**Feuilletages en droites, équations des eikonales et
autres équations différentielles**

Astérisque, tome 323 (2009), p. 101-122

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__323__101_0>

© Société mathématique de France, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FEUILLETAGES EN DROITES, ÉQUATIONS DES EIKONALES ET AUTRES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par

Dominique Cerveau

À José Mañuel Aroca, épicurien et grand connaisseur de la géométrie classique

Résumé. — Nous donnons des résultats qui lient les équations classiques des eikonales et les feuilletages en droites de l'espace affine.

Abstract (Foliations by straight lines, equations of the eikonales and other differential equations)

We give several results relating the classical eikonal equations and foliations by straight lines of the affine space.

Introduction

Les solutions globales de certaines équations aux dérivées partielles satisfont souvent des principes de rigidité étonnants. Ainsi un célèbre théorème de S. Bernstein affirme que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et a son graphe minimal, i.e f satisfait l'équation des surfaces minimales, alors f est une fonction affine. Dans cet article on s'intéresse en particulier aux solutions rationnelles $f : \mathbb{C}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$ de l'équations des eikonales $E(f) = c^2$ où $c \in \mathbb{C}$ et E désigne l'opérateur

$$(1) \quad E(f) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right)^2.$$

Cette équation est un cas spécial de l'équation différentielle :

$$(2) \quad \det \text{Hess} (f) = 0$$

où $\text{Hess} f$ désigne la matrice Hessienne de f .

Si f satisfait l'équation (2) l'application de Gauss :

$$(3) \quad G_f : z \rightsquigarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)$$

Classification mathématique par sujets (2000). — 37F75.

Mots clefs. — Eikonales, feuilletages en droites.

est dégénérée, i.e n'est pas de rang maximal. Si f est rationnelle l'adhérence de l'image de G_f est contenue dans une hypersurface algébrique. En particulier il existe un polynôme P irréductible tel que

$$(4) \quad P\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) = 0$$

et f est solution d'une équation différentielle ne mettant en jeu que les dérivées partielles du premier ordre. Par exemple toute solution rationnelle f de l'équation de Monge-Ampère :

$$(5) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}\right)^2 = 1$$

satisfait une équation de type 4.

Dans le cas réel il existe aussi un résultat de rigidité concernant les solutions globales de (5) ; plus précisément si

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

de classe C^2 est solution de l'équation de Monge-Ampère (5), alors f est un polynôme de degré plus petit ou égal à 2. Cet énoncé est attribué à Jörgen ; la démonstration qui s'appuie sur le théorème de Picard (une fonction entière qui évite deux points est constante) permet de donner une preuve alternative à l'énoncé de Bernstein. Cette idée est attribuée à E. Bombieri.

On a longtemps cru avec Hesse qu'un polynôme homogène f_ν sur $\mathbb{C}^n$ satisfaisant l'équation (2) dépendait en fait de moins de n variables, cas où l'on peut trouver un polynôme P satisfaisant (4) de degré 1. Cet énoncé est correct en petite dimension $n \leq 4$ mais ne l'est plus dès la dimension 5. L'exemple qui suit dû à Gordan et Noether [4] est très populaire car il intervient dans différents contextes [3]. Il s'agit de :

$$(6) \quad \varphi(z) = z_1^2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_2^2 z_5.$$

On remarque d'enblée que φ est linéaire dans les variables z_3, z_4, z_5 . Un calcul élémentaire montre que φ satisfait l'équation différentielle :

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z_5} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_4}\right)^2 = 0.$$

Comme l'application de Gauss G_φ est de rang maximal, l'adhérence de l'image de G_φ est la quadrique de $\mathbb{C}^5$ définie par $X_3 X_5 - X_4^2 = 0$. Par suite il n'existe pas de polynôme P non constant de degré 1 tel que l'on ait (4) : $P\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0$.

Revenons à l'équation des eikonales ; elle trouve son importance dans les fondements de l'optique géométrique et aussi en mécanique (Malus, Fresnel, Hamilton...). Si f rationnelle satisfait $E(f) = c^2$ alors l'image de l'application de Gauss G_f est contenue dans la quadrique $X_1^2 + \dots + X_n^2 = c^2$. Considérons, les coordonnées $z_1, \dots, z_n$ étant fixées (à l'action près du groupe engendré par les translations et le groupe orthogonal complexe $O(n, \mathbb{C})$) le champ de vecteur rationnel $X = \text{grad } f$ défini par :

$$(8) \quad X = \text{grad } f = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Comme on le sait au moins depuis Hamilton [5], si $\exp tX$ est le flot (local, là où il a sens) du champ de vecteur X alors

$$(9) \quad f \circ \exp tX(x) = f(x) + c^2 t$$

(10) et les trajectoires de X sont contenues dans des droites (en fait sont d'adhérence des droites).

On doit imaginer, tout du moins en réel, les niveau de f comme un front d'onde (fig 1) se déplaçant à la vitesse c^2 le long des droites paramétrées par :

$$(11) \quad t \rightsquigarrow z + tX(z).$$

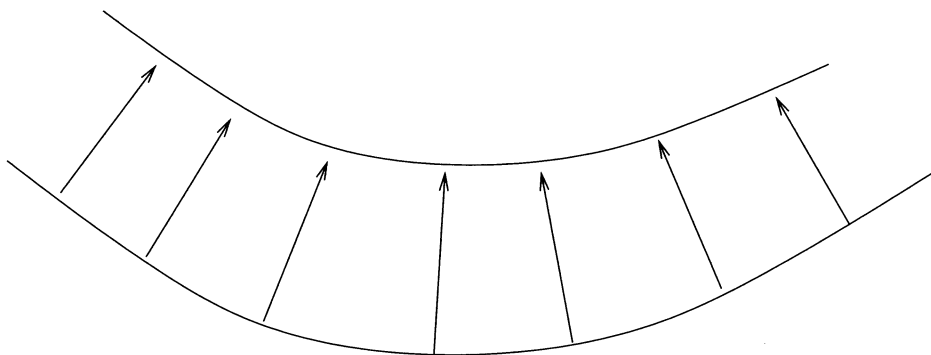


FIGURE 1.

On constate ainsi l'apparition naturelle de feuilletages algébriques de $\mathbb{C}^n$, et par suite de $\mathbb{CP}(n)$, dont les feuilles sont d'adhérence des droites. Ce sujet était très populaire chez les anciens géomètres en particulier pour l'étude des surfaces et l'intégration géométrique de certaines équations aux dérivées partielles. Dans ses « Leçons sur la théorie générale des surfaces », Gaston Darboux y consacre un volume entier « les congruences de droites et les équations aux dérivées partielles ». Il attribue à Malus le fait d'avoir le premier considéré « de tels assemblages de droites ».

En 1988 dans une courte note au C.R.A.S. [2] j'ai proposé la classification des feuilletages (singuliers) en « droites » de $\mathbb{C}^3$, répondant en cela à des préoccupations de René Thom et de l'astronome Pecker. J.V. Pereira m'a indiqué que cet énoncé était connu de Kummer. On trouvera en particulier dans cet article des résultats annoncés dans cette note ainsi qu'une application à l'étude des solutions rationnelles de l'équations des eikonales. Les énoncés précis sont dans le chapitre qui suit.

1. Champs de droites ou feuilletages en droites.

Exemples et premiers résultats

Un feuilletage $\mathcal{D}$ en droites de l'espace $\mathbb{CP}(n)$, ou de l'espace affine $\mathbb{C}^n$, est par définition un feuilletage algébrique (singulier) de dimension 1, tel qu'en tout point régulier m la feuille $\mathcal{L}_m$ passant par m soit contenue dans une droite D_m . Si $\text{Sing } \mathcal{D}$ désigne l'ensemble singulier de $\mathcal{D}$, $\text{Sing } \mathcal{D}$ est un ensemble de codimension supérieure ou égale à deux; visiblement $\mathcal{L}_m = D_m - \text{Sing } \mathcal{D}$ pour tout point régulier m . Si $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{CP}(n)$ est une carte affine la restriction $\mathcal{D}|_{\mathbb{C}^n}$ est donnée par un champ de vecteur polynomial :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

où les X_i sont des polynômes tels que p.g.c.d $(X_1, \dots, X_n) = 1$. On a :

$$\text{Sing } \mathcal{D} \cap \mathbb{C}^n = \{z \in \mathbb{C}^n | X_1(z) = \dots = X_n(z) = 0\}.$$

Si m est un point régulier de $\mathcal{D}$, par m passe évidemment une seule droite D_m tangente à $\mathcal{D}$. A l'inverse, et nous le préciserons plus loin, si m est un point singulier de $\mathcal{D}$ par m passent une infinité de droites qui sont, en dehors de $\text{Sing } \mathcal{D}$, des feuilles de $\mathcal{D}$.

Le flot du champ X satisfait l'équation différentielle

$$(12) \quad \dot{z}_i(t) = X_i(z(t)), \quad z(0) = m.$$

Dire que la trajectoire de m , paramétrée par $t \rightsquigarrow z(t)$, est rectiligne revient à dire que $\dot{z}(t)$ et $\ddot{z}(t)$ sont colinéaires. Comme

$$(13) \quad \begin{aligned} \ddot{z}_i(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial z_k}(z(t)) \cdot \dot{z}_k(t) = \sum_{k=1}^n X_k(z(t)) \cdot \frac{\partial X_i}{\partial z_k}(z(t)) \\ &= X(X_i)(z(t)) \end{aligned}$$

on constate que X définit un feuilletage en droites si et seulement si :

$$(14) \quad \sum X(X_i) \frac{\partial}{\partial z_i} = \mu \cdot \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

pour un certain polynôme μ , où $X(X_i)$ est la dérivée de X_i le long de X .

En particulier les quotients X_i/X_j sont des intégrales premières rationnelles du champ X .

A titre d'exemple considérons dans $\mathbb{C}^2$ un feuilletage en droites défini par le champ de vecteur local :

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Alors $a = X_2/X_1$ est solution de l'équation de Burger :

$$\frac{\partial a}{\partial z_1} + a \cdot \frac{\partial a}{\partial z_2} = 0.$$

Cet exemple d'équation différentielle non linéaire est bien connu des physiciens.

En dimension deux, dans $\mathbb{CP}(2)$, les pincesaux de droites sont des exemples de champs de droites. Nous verrons plus loin que ce sont les seuls.

En dimension trois c'est un peu plus compliqué. Dans $\mathbb{CP}(3)$, considérons un pinceau de plans donné dans la carte affine $\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3)\}$ par $z_1/z_2 = t$. On se donne une application rationnelle du type :

$$(15) \quad t \rightsquigarrow (tz_2(t), z_2(t), z_3(t)) = m(t)$$

Une telle application revient à se donner dans chaque plan $z_1/z_2 = t$ un point $m(t)$. Maintenant dans chacun de ces plans on considère le pinceau de droites de point de base $m(t)$. On feuillette ainsi $\mathbb{CP}(3)$ (ou $\mathbb{C}^3$) en droites ; l'ensemble singulier est constitué de l'union de l'axe des z_3 et de l'image de l'application (15), (fig 2) :

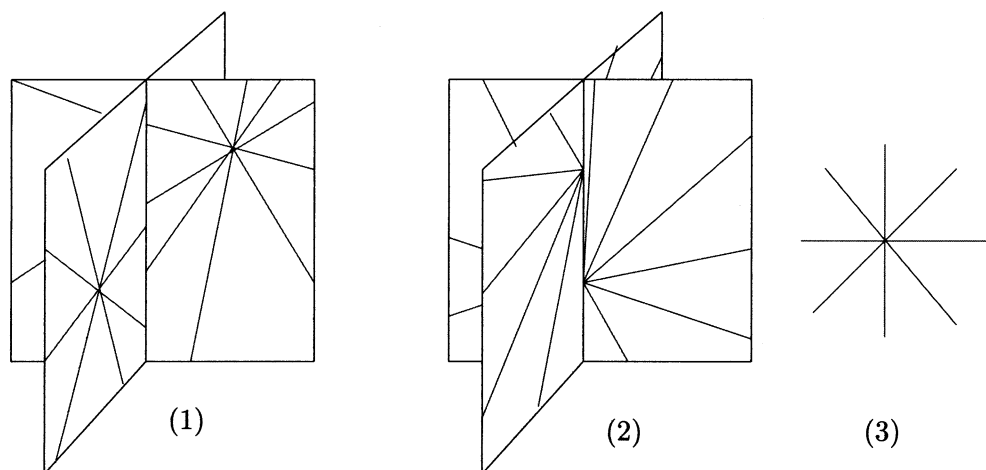


FIGURE 2.

Le premier cas est l'exemple générique. Dans le second, l'image de l'application (15) coïncide avec l'axe des z_3 . Dans ces deux éventualités nous dirons que nous avons un feuilletage radial dans les pages d'un livre ouvert. Dans le dernier l'application (15) est constante ; le champ de droites est « radial » au point $m = m(t)$.

Enfin introduisons la cubique gauche Σ paramétrée dans une carte affine par

$$(16) \quad t \rightsquigarrow (t, t^2, t^3) = \gamma(t).$$

Pour chaque couple de points $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ de Σ on mène la sécante à Σ par ces deux points, convenant que si $t_1 = t_2$ il s'agit de la tangente à Σ en $\gamma(t_1)$. On obtient ici encore un feuilletage de $\mathbb{CP}(3)$ (ou $\mathbb{C}^3$) que nous appellerons feuilletage associé à la cubique gauche Σ (fig 3).

Parmi nos résultats en voici deux qu'il est aisé d'énoncer. Bien que leur preuves ne fassent intervenir que des arguments anciens et classiques, nous n'en avons pas trouvé trace.

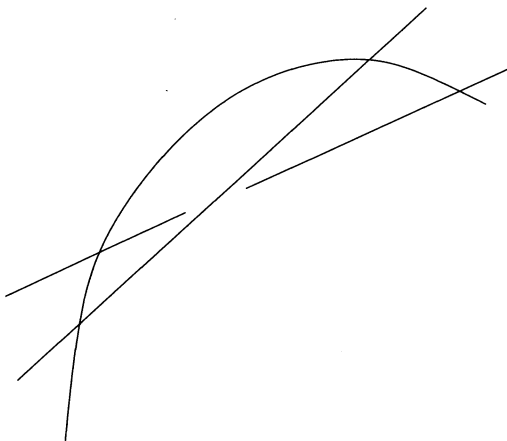


FIGURE 3.

Théorème 1.1. — Soit $\mathcal{D}$ un feuilletage en droites de $\mathbb{CP}(3)$. Alors $\mathcal{D}$ est linéairement conjugué à l'un des exemples précédents. Plus précisément $\mathcal{D}$ est de l'un des trois types suivants :

1. feuilletage radial en un point ;
2. feuilletage radial dans les pages d'un livre ouvert ;
3. feuilletage associé aux cordes d'une cubique gauche.

Nous étudierons quelques équations différentielles de type (2). En particulier en adaptant le théorème 1.1 on obtiendra le :

Théorème 1.2. — Soit $f : \mathbb{C}^3 \dashrightarrow \mathbb{C}$ une solution rationnelle de l'équation aux eikonales $E(f) = c^2$, $c \in \mathbb{C}^*$. Il existe deux formes linéaires $L_1 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$, $L_2 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3$ et $\ell \in \mathbb{C}(t)$ tels que :

$$f(z) = L_1 + \ell(L_2)$$

avec $\|\alpha\|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = c^2$, $\|\beta\|^2 = 0$, $\langle \alpha | \beta \rangle = \sum \alpha_i \beta_i = 0$. Si $c = 0$, alors f est affine, $f = L_1$ avec $\|\alpha\|^2 = 0$.

On en déduit facilement le :

Corollaire 1.3. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \dashrightarrow \mathbb{R}$ une solution rationnelle réelle de l'équation aux eikonales. Alors f est une fonction affine

2. Généralités sur les feuilletages en droites sur les espaces projectifs

Tous les champs de vecteurs holomorphes rencontrés seront supposés satisfaire $\text{cod Sing } X \geq 2$, condition à laquelle on se ramène en divisant par le p.g.c.d des composantes de X .

Commençons par un énoncé facile en dimension 2 dont on retrouvera l'argument naïf plusieurs fois.

Proposition 2.1. — *Soit $\mathcal{D}$ un feuilletage en droites sur l'espace projectif $\mathbb{CP}(2)$. Alors $\mathcal{D}$ est radial, ie correspond à un pinceau de droites concourantes.*

Démonstration. — Soit $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}(2)$. Si $\mathcal{D}_{/\mathbb{C}^2}$ n'a pas de singularité alors les feuilles de $\mathcal{D}_{/\mathbb{C}^2}$ sont des droites parallèles. En particulier si $\mathcal{D}$ a une seule singularité il s'agit d'un pinceau de droites. En général si D_1 et D_2 sont deux droites tangentes à $\mathcal{D}$, elles se coupent en un point M . Un argument combinatoire immédiat montre que toutes les autres droites passent par M . $\square$

Nous donnons quelques énoncés précisant le comportement des feuilles d'un champ de droites aux points singuliers.

Lemme 2.2. — *Soit X un champ de vecteurs holomorphes définissant un feuilletage (singulier) d'une boule $B(0, \rho)$ dans $\mathbb{C}^n$. On suppose que chaque feuille régulière $\mathcal{L}_m$ est contenue dans une droite D_m . Si M est un point singulier de X , il existe au moins une droite D passant par M et tangente à X ; éventuellement D est contenue dans l'ensemble singulier de X .*

Démonstration. — On considère la variété d'incidence :

$I := \{(x, D), x \in D \subset \mathbb{CP}(n), D \text{ droite de } \mathbb{CP}(n)\}$. Soit $m_i \in B(0, \rho) - \text{Sing } X$ une suite de points réguliers convergant vers le point M . Comme la variété I est compacte, la suite (m_i, D_{m_i}) possède une sous suite convergente vers (M, D) . Par continuité X est tangent à D . $\square$

Nous précisons le lemme précédent :

Lemme 2.3. — *Soit X comme dans le lemme 2.2. On note $\mathcal{C}_M$ l'ensemble des droites D passant par M tel que X soit tangent à D (sur $B(0, \rho)$). Si le nombre de droites de $\mathcal{C}_M$ est fini alors M est non singulier.*

Démonstration. — On choisit des coordonnées $z_1, \dots, z_n$ en M telles que les droites $D_1, \dots, D_s$ de $\mathcal{C}_M$ ne soient pas contenues dans l'hyperplan horizontal $z_n = 0$ et telles que $\text{Sing } X \cap (z_n = 0)$ soit de codimension ≥ 3 . C'est possible.

Écrivons

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Supposons que X s'annule en $M = 0$; alors l'ensemble $\Sigma = \{(X_n = 0) \cap (z_n = 0)\}$ est non trivial. On choisit une suite $m_i \in \Sigma$ et convergeant vers M . Alors les D_{m_i} sont des droites horizontales et produisent des droites limites passant par M , horizontales et donc différentes des $D_1, \dots, D_s$. Ceci est absurde et par conséquent X est non singulier en M . $\square$

Corollaire 2.4. — *Si M est un point singulier de X l'ensemble $\mathcal{C}_M$ est un cône algébrique de dimension ≥ 2 .*

Démonstration. — $\mathcal{C}_M$ est un ensemble analytique ; comme c'est un cône, le théorème de Chow assure qu'il est algébrique. $\square$

Voici encore une précision qui sera utile pour décrire les singularités de feuilletages en droites.

Lemme 2.5. — *Soit X holomorphe sur $B(0, \rho)$ et non singulier sur $B(0, \rho) - \{0\}$. On suppose que les feuilles régulières $\mathcal{L}_m$ de X sont contenues dans des droites D_m , $m \in B(0, \rho) - \{0\}$. Soit D une droite tangente à X passant par 0. Si D est isolée dans le cône $\mathcal{C}_0$ (i.e. D est une composante irréductible de $\mathcal{C}_0$) alors 0 est un point régulier de X .*

Démonstration. — sans perdre de généralité on suppose que D est l'axe des z_n . On peut supposer aussi que $\rho > 1$. Soit H l'hyperplan $z_n = 1$. Alors au voisinage du point $M_0 = (0, \dots, 0, 1)$, le champ X est transverse à H . Par suite au voisinage de M_0 les feuilles sont paramétrées par les applications :

$$z'_n \rightsquigarrow (z_1 + z'_n \eta_1, \dots, z_{n-1} + z'_n \eta_{n-1}, 1 + z'_n)$$

où $z_n = 1 + z'_n$, les η_i sont holomorphes sur un voisinage de M_0 dans H et satisfont $\eta_i(M_0) = 0$.

Evidemment les applications précédentes sont globales en z_n . Comme la singularité éventuelle de X en 0 est isolée dans $B(0, \rho)$ ainsi que dans $\mathcal{C}_0$, les droites ci dessus ne se coupent pas dans $B(0, \rho)$ et forment un voisinage de 0. D'autre part elles définissent visiblement un feuilletage régulier au voisinage de 0. D'où le lemme. $\square$

L'énoncé qui suit décrit les feuilletages en droites locaux à singularité isolée.

Proposition 2.6. — *Soit X un champ de vecteur holomorphe sur la boule $B(0, \rho)$ dans $\mathbb{C}^n$ à singularité isolée en 0. On suppose que les trajectoires de X sont contenues dans des droites. Alors X définit le feuilletage radial en 0, ie à unité holomorphe multiplicative près $X = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$.*

Démonstration. — Nous voulons montrer que chaque droite D passant par 0 est tangente à X . Soit D une telle droite que l'on suppose être l'axe des z_1 . Ecrivons :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

les X_i étant holomorphes, $X_i(0) = 0$.

Plaçons nous sur l'ensemble analytique γ :

$$\gamma := \{X_2 = \dots = X_n = 0\}.$$

Comme X est à singularité isolée, γ est une courbe passant par 0 sur laquelle X_1 ne s'annule qu'en 0 quitte à restreindre. Soit $m_i \in \gamma$ une suite tendant vers 0 ; visiblement avec les notations habituelles D_{m_i} est parallèle à D et nécessairement (m_i, D_{m_i}) converge vers $(0, D)$. Par suite X est tangent à D . $\square$

Remarques. — 1. on retrouve ainsi la preuve de la proposition 2.1.

2. Evidemment l'énoncé se globalise. Un feuilletage en droites de $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{CP}(n)$ ayant un point singulier isolé est radial.

3. Classification des feuilletages en droites dans $\mathbb{CP}(3)$

Soit $\mathcal{D}$ un feuilletage en droite dans $\mathbb{CP}(3)$. On peut supposer que $\mathcal{D}$ n'a pas de singularité isolée. Comme tout feuilletage de $\mathbb{CP}(3)$ a des singularités, l'ensemble singulier $\text{Sing } \mathcal{D}$ est de dimension pure 1 et est donc composé de l'union $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_s$ de courbes irréductibles. Si $M \in \text{Sing } \mathcal{D}$, on note encore $\mathcal{C}_M$ l'union des droites D tangentes à $\mathcal{D}$ et qui passent par M . D'après le corollaire 2.4, $\mathcal{C}_M$ est un cône algébrique de dimension 2, avec éventuellement des branches de dimension 1. Mais le lemme 2.5 indique que l'ensemble :

$$\mathcal{C}_M^* = \overline{\mathcal{C}_M - \text{Sing } \mathcal{D}}$$

est une surface algébrique conique en M ; visiblement l'union :

$$(17) \quad \bigcup_{M \in \Gamma_i} \mathcal{C}_M^*$$

est l'espace $\mathbb{CP}(3)$ tout entier pour $i = 1, \dots, s$

Cette remarque implique que toute droite D tangente à $\mathcal{D}$ coupe en au moins un point chaque composante Γ_i du lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{D}$. En particulier on obtient comme conséquence la

Proposition 3.1. — Soit $\mathcal{D}$ un feuilletage en droites de $\mathbb{CP}(3)$ dont l'ensemble singulier contient une droite D . Alors $\mathcal{D}$ est radial dans les pages d'un livre ouvert.

Démonstration. — On considère le pinceau P des plans contenant D . Si $m \in \mathbb{CP}(3) - \text{Sing } \mathcal{D}$ la droite D_m coupe D . En particulier chaque plan π de P est $\mathcal{D}$ invariant et $\mathcal{D}/\pi$ est un pinceau linéaire de droites. $\square$

Remarque. — La description précise de ce type de feuilletages, en particulier des singularités, est donnée en 1.

Pour terminer la classification, on utilise avec les notations habituelles le :

Lemme 3.2. — L'ensemble singulier $\text{Sing } \mathcal{D}$ a au plus 2 composantes.

Démonstration. — soit m un point régulier et $D = D_m$ la droite tangente à $\mathcal{D}$ passant par m . Choisissons des coordonnées affines (z_1, z_2, z_3) telles que $m = (0, 0, 0)$ et D soit l'axe des z_3 . Comme dans le lemme 2.5 nous paramétrons les feuilles de $\mathcal{D}$ par les applications :

$$z_3 \rightsquigarrow (z_1 + z_3\eta_1, z_2 + z_3\eta_2, z_3) = F(z_1, z_2, z_3)$$

où les η_i sont des fonctions rationnelles en (z_1, z_2) régulières en $(0, 0)$.

Puisque $\mathcal{D}$ est régulier en 0, l'application F est un difféomorphisme local en 0 ; en particulier le déterminant Jacobien :

$$\det JF = 1 + z_3 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial z_2} \right) (z_1, z_2) + z_3^2 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \eta_2}{\partial z_2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \eta_2}{\partial z_1} \right) (z_1, z_2)$$

est non nul en $(0, 0, 0)$. Ceci implique qu'à (z_1, z_2) fixés $\det JF$ ne s'annule qu'en deux valeurs de z_3 au plus. Comme toute droite de $\mathcal{D}$ coupe chaque composante du lieu singulier et qu'en chaque point singulier passent une infinité de droites de $\mathcal{D}$, on en déduit que $\text{Sing } \mathcal{D}$ a au plus deux composantes irréductibles. $\square$

Supposons que $\text{Sing } \mathcal{D} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Soit $L \subset \mathbb{CP}(3)$ une droite évitant $\text{Sing } \mathcal{D}$ et donc non tangente à $\mathcal{D}$. En particulier, pour tout point $m \in L$ la droite D_m est transverse à L et coupe Γ_i en un seul point $M_i(m)$. Ceci démontre que Γ_1 et Γ_2 sont rationnelles.

D'après (17) l'ensemble des droites constituant $\mathcal{D}$ est précisément l'ensemble des droites joignant Γ_1 à Γ_2 . En particulier les courbes Γ_1 et Γ_2 ne sont pas situées dans un même plan. On remarque aussi que si M_1 est un point générique de Γ_1 , le cône $\mathcal{C}_{M_1}$ contient Γ_2 : en effet, toute droite D de $\mathcal{C}_{M_1}$ doit couper Γ_2 .

Choisissons un 2-plan général π et soient $\{M_1, \dots, M_t\} = \Gamma_1 \cap \pi$, $\{m_1, \dots, m_s\} = \Gamma_2 \cap \pi$.

Les droites $[m_i M_k] \subset \pi$ joignant m_i à M_k sont dans $\mathcal{D}$. Mais sur chaque droite régulière, il y a au plus 2 points singuliers. Par suite s ou t vaut 1, ie l'une des composantes Γ_i est une droite ; cas décrit par la proposition 3.1.

Dans la suite on suppose que $\text{Sing } \mathcal{D}$ se réduit à une seule courbe irréductible Γ ; toujours d'après la proposition 3.1 on suppose encore que Γ n'est pas une droite. Considérons deux points distincts M_1 et M_2 de Γ .

Les cônes $\mathcal{C}_{M_1}$ et $\mathcal{C}_{M_2}$ se coupent le long d'une courbe qui est donc nécessairement Γ . Par suite une droite générique de $\mathcal{C}_{M_1}$ coupe Γ en M_1 et en un autre point de Γ . Les feuilles de $\mathcal{D}$ sont donc exactement les cordes de Γ (privées des singularités) et les tangentes à Γ . Evidemment cela implique que Γ est une courbe gauche. Nous allons montrer que Γ est une cubique gauche. Comme toujours choisissons π un plan général. Alors $\Gamma \cap \pi = \{M_1, \dots, M_s\}$ avec $s \geq 3$ puisque Γ est irréductible non plane. Les droites D_{ij} joignant les M_i à M_j sont des droites de $\mathcal{D}$. Par connexité de Γ , en chaque M_i on a la même configuration pour les droites D_{ij} ; d'autre part les droites D_{ij} se coupent en des points de $\Gamma \cap \pi$. Comme sur chaque D_{ij} on ne peut avoir que deux M_k , c'est à dire M_i et M_j , nécessairement $s = 3$.

Maintenant à transformation linéaire près il n'y a qu'une courbe gauche de degré 3 dans $\mathbb{CP}^3$: la cubique gauche rationnelle $\sum$ paramétrée par (16). Nous avons ainsi démontré le théorème 1.1.

4. L'équation $\det \text{Hess } f \equiv 0$

Considérons une solution rationnelle $f : \mathbb{C}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$ non triviale de l'équation (2) $\det \text{Hess } f \equiv 0$. Lorsque l'application de Gauss G_f de f est de rang générique $n - 1$ nous dirons que f est une solution maximale de (2). L'idéal $H(f)$ des polynômes

$Q \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ tels que $Q \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$ est alors engendré par un polynôme irréductible P ; c'est le cas comme nous l'avons vu pour le polynôme de Gordan et Nöether.

Les polynômes P que l'on peut ainsi obtenir ne sont certainement pas quelconques. Soient f solution maximale de (2) et P un polynôme générateur de $H(f)$. La restriction de l'application de Gauss G_f à un hyperplan général paramètre les zéros de P : ainsi l'ensemble $(P = 0)$ est une hypersurface unirationnelle.

Examinons plus précisément le cas de la dimension deux. Il existe alors une application rationnelle :

$$r : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2 \\ t \rightsquigarrow r(t) = (r_1(t), r_2(t)) , \quad r_i \in \mathbb{C}(t)$$

génériquement injective telle que $\overline{r(\mathbb{CP}(1))} = \overline{(P = 0)} \subset \mathbb{CP}(2)$.

Par suite on dispose d'une factorisation :

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z_1}(z_1, z_2) &= r_1(\tau(z_1, z_2)) \\ \frac{\partial f}{\partial z_2}(z_1, z_2) &= r_2(\tau(z_1, z_2)) \end{cases}$$

où $\tau : \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}$ est rationnelle.

Un calcul élémentaire montre que :

$$(19) \quad \frac{\partial r_1}{\partial t}(\tau(z)) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z_2} = \frac{\partial r_2}{\partial t}(\tau(z)) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z_1}.$$

En particulier le long d'un niveau $\tau = \text{cste}$, la pente $\frac{\partial \tau}{\partial z_2} / \frac{\partial \tau}{\partial z_1}$ est constante. Ainsi les niveaux de τ sont des droites, ce qui produit un feuilletage en droite de $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}(2)$. Il y a deux cas, suivant que le point base de ce feuilletage soit ou non à distance finie, qui conduisent à τ de l'un des deux types :

$$(20) \quad \begin{cases} \tau(z) = \delta_1(a_1 z_1 + a_2 z_2) \\ \tau(z) = \delta_2 \left(\frac{z_1 - b_1}{z_2 - b_2} \right) \end{cases}$$

où les $a, b \in \mathbb{C}$ et $\delta_i \in \mathbb{C}(t)$.

Par une intégration élémentaire on obtient la :

Proposition 4.1. — Soit $f : \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}$ une solution rationnelle maximale de $\det \text{Hess } f = 0$. Alors f est de l'un des types suivants :

1. $f = \ell_1(a_1 z_1 + a_2 z_2) + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3$;
 2. $f = \ell_2 \left(\frac{z_1 - b_1}{z_2 - b_2} \right) \cdot (z_2 - b_2) + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3$,
- où les a_i, b_i, c_i sont des constantes et $\ell_i \in \mathbb{C}(t)$.

On note que les solutions polynomiales de (2) sont de type 1. Dans le cas 1 le polynôme P générateur de l'idéal $H(f)$ est affine. Dans le cas 2 on peut tirer explicitement en fonction de f ce même polynôme P . Il n'y a pas d'énoncé général dès la dimension 3 décrivant les solutions de (2) ; toutefois dans la situation spéciale où l'on recherche les solutions de (2) sous forme polynomiales on dispose du :

Théorème 4.2 ([1]). — Soit $f \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ un polynôme solution de $\det \text{Hess } f = 0$. Alors à conjugaison linéaire près f est de l'un des types suivants :

1. $\varphi_1 = \varepsilon z_1 + \varphi(z_2, z_3)$, $\varphi \in \mathbb{C}[z_2, z_3]$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$;
2. $\varphi_2 = a_1(z_1) + z_2 a_2(z_1) + z_3 a_3(z_1)$, $a_i \in \mathbb{C}[z_1]$.

Faisons quelques commentaires ; dans les deux cas f est affine dans une ou deux variables. Le graphe de l'application de Gauss de l'application φ_1 est contenu dans $z_1 = \varepsilon$; si φ_1 est maximale le polynôme P est alors $z_1 - \varepsilon$. Si φ_1 est non maximale il en est de même pour φ ; dans ce cas φ_1 est du type $\varepsilon z_1 + \varphi(z_2)$ à conjugaison linéaire près. Le graphe de l'application de Gauss est une droite. Dans le cas 2 en général φ_2 est maximale. Si $P(z_2, z_3) = 0$ est l'équation de la courbe paramétrée par $t \rightsquigarrow (a_2(t), a_3(t))$ on a visiblement $P\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_3}\right) = 0$.

5. L'équation des eikonales

Soit f une fonction holomorphe définie sur un ouvert V de $\mathbb{C}^n$ satisfaisant l'équation aux eikonales $E(f) = c^2$, $c \in \mathbb{C}$. Considérons le champ de gradient de f :

$$(8) \quad X = \text{grad } f = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_i},$$

les coordonnées z_i étant fixées.

Soit $t \rightsquigarrow z(t)$ une trajectoire de X :

$$(21) \quad \dot{z}_i(t) = \frac{\partial f}{\partial z_i}(z(t)).$$

Suivant Hamilton considérons l'accélération le long d'une trajectoire :

$$(22) \quad \ddot{z}_i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_k}(z(t)) \cdot \dot{z}_k(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_k}(z(t)) \cdot \frac{\partial f}{\partial z_k}(z(t)).$$

Si maintenant on dérive par rapport à z_i l'équation $E(f) = c^2$, on obtient :

$$(23) \quad 2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_k} \cdot \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0.$$

Ce qui implique la nullité des $\ddot{z}_i$; en résulte que, chaque fois qu'il est défini, le flot φ_t de X est affine en t ce qui indique en particulier que le feuilletage associé à X est un feuilletage en droites.

On remarque que, chaque fois que cela a un sens :

$$(24) \quad f \circ \varphi_t(z) = f(z) + c^2 t$$

et :

$$(25) \quad \varphi_t(z) = z + t \cdot X(z) = z + t \frac{\partial f}{\partial z}(z)$$

avec des notations évidentes. Ainsi les fonctions $\frac{\partial f}{\partial z_i} : V \rightarrow \mathbb{C}$ sont intégrales premières du champ X :

$$(26) \quad \frac{\partial f}{\partial z_i} \left(z + t \frac{\partial f}{\partial z}(z) \right) = \frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$$

autre traduction de l'égalité (23).

Remarquons de suite que tout champ de droites n'est pas associé à une solution de l'équation aux eikonales. Considérons en effet le champ de droites dans $\mathbb{C}^3$ possédant les intégrales premières z_3 et $\frac{z_1 - r_1(z_3)}{z_2 - r_2(z_3)}$ où r_1 et r_2 sont rationnelles. Alors si $X = \text{grad } f$ correspond à ce feuilletage on aura nécessairement $\frac{\partial f}{\partial z_3} \equiv 0$ et par suite r_1 et r_2 constants.

Nous allons maintenant, dans le cas de la dimension 3, utiliser le théorème 3 pour classer les solutions rationnelles de l'équation aux eikonales.

Soit $f = \frac{P}{Q}$, solution de $E(f) = c^2$ où P et Q sont des polynômes sans facteur commun.

Lemme 5.1. — *Si $c \neq 0$, le feuilletage $\mathcal{F}$ en droites produit par $X = \text{grad } f$ n'est pas associé aux cordes d'une cubique gauche.*

Démonstration. — Elle se fait par l'absurde. Remarquons que l'application de Gauss associée au feuilletage $\mathcal{F}$ par les cordes d'une cubique gauche est génériquement de rang ≥ 2 , et ceci pour tout choix de champ de vecteurs Z rationnel définissant $\mathcal{F}$. En particulier l'image de l'application de Gauss :

$$G_f : z \sim \longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3} \right)$$

est dense dans la quadrique de $\mathbb{CP}(3)$ donnée par :

$$(27) \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2$$

Soit z_0 un point générique de $\mathbb{C}^3$ où $f = \frac{P}{Q}$ est holomorphe. On a l'égalité entre fonctions rationnelles de t :

$$(28) \quad \frac{P}{Q} \left(z_0 + t \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right) = \frac{P}{Q}(z_0) + c^2 t.$$

Ecrivons P et Q sous forme d'une somme de polynômes homogènes :

$$(29) \quad \begin{aligned} P &= P_0 + \cdots + P_\nu \\ Q &= Q_0 + \cdots + Q_\mu \end{aligned}$$

les polynômes P_ν et Q_μ étant non identiquement nuls. Remarquons, puisque $c \neq 0$, qu'un polynôme homogène non trivial ne peut s'annuler identiquement sur la quadrique (27); il existe donc un dense de z_0 pour lesquels on a $P_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right)$ et $Q_\mu \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right)$ non nuls. L'égalité (28) se traduit alors au niveau des termes de plus haut degré par :

$$\cdots + t^\nu P_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right) = \cdots + c^2 t^{\mu+1} Q_\mu \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right)$$

qui implique $\nu = \mu + 1$.

Puisque G_f est dominante, le polynôme $P_\nu - c^2 Q_{\nu-1}$ s'annule sur la quadrique (27). D'où l'existence d'un polynôme $K \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ tel que :

$$(30) \quad P_\nu - c^2 Q_{\nu-1} = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - c^2).K$$

Une fois encore on développe K en somme de polynômes homogènes :

$$K = K_\alpha + \dots + K_\beta \quad , \quad \alpha \leq \beta.$$

et l'on observe en calculant les termes de plus haut et plus bas degré de (30) que $\alpha = \nu - 1$ et $\nu = \beta + 2$. Ce qui est absurde. $\square$

Dans le lemme qui suit on traite le cas où $c = 0$ en utilisant une approche plus géométrique.

Lemme 5.2. — *Le feuilletage en droites associé à une solution rationnelle de l'équation aux eikonales $E(f) = 0$ n'est pas du type cordes d'une cubique gauche.*

Démonstration. — Sous les hypothèses du lemme f est intégrale première de son gradient $X = \text{grad } f$. Supposons que le feuilletage associé à X ait pour trajectoires génériques les cordes d'une cubique gauche Γ . Comme on l'a vu les $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ sont aussi intégrales premières du champ X . Par suite les fibres $f^{-1}(c)$ de f sont des surfaces réglées par les trajectoires de X et le long de ces trajectoires le plan tangent à $f^{-1}(c)$ est « constant ». En résulte que les $f^{-1}(c)$ sont des cônes invariants par X , et donc les cônes $\mathcal{C}_M, M \in \Gamma$. Ceci vient du fait que les cordes de la cubique Γ feuillettent $\mathbb{CP}(3) - \Gamma$ et ne peuvent donc se rencontrer en dehors de Γ . Mais la famille des cônes $\mathcal{C}_M$ ne feuillettent pas $\mathbb{CP}(3) - \Gamma$; il s'agit en fait d'un bi-feuilletage et par chaque point de $\mathbb{CP}(3) - \Gamma$ passent deux tels cônes. D'où une contradiction. $\square$

Supposons que le champ $X = \text{grad } f$ soit tangent à un pinceau de plans $L_1/L_2 = cst$ où les L_i sont affines non constants. Quitte à faire une translation on peut supposer les L_i linéaires et l'on écrira :

$$(31) \quad \begin{aligned} L_1 &= \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 \\ L_2 &= \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3. \end{aligned}$$

On pose $\langle \alpha | \beta \rangle = \sum \alpha_i \beta_i, \|\alpha\|^2 = \sum \alpha_i^2$ et $\|\beta\|^2 = \sum \beta_i^2$. En écrivant explicitement que L_1/L_2 est intégrale première du champ X , on obtient :

$$(32) \quad \left\{ (\beta_1 L_1 - \alpha_1 L_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + (\beta_2 L_1 - \alpha_2 L_2) \frac{\partial}{\partial z_2} + (\beta_3 L_1 - \alpha_3 L_2) \frac{\partial}{\partial z_3} \right\} (f) = Y(f) = 0.$$

Ainsi le champ linéaire Y s'annule sur la droite $L_1 = L_2 = 0$ et possède f pour intégrale première. Le fait que ses composantes soient liées produit une forme linéaire non triviale :

$$(33) \quad L_3 = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \gamma_3 z_3$$

telle que $Y(L_3) = 0$. Remarquant que

$$Y(L_3) = \langle \beta | \gamma \rangle L_1 + \langle \alpha | \gamma \rangle L_2$$

on en déduit que :

$$\langle \alpha | \gamma \rangle = \langle \beta | \gamma \rangle = 0.$$

Remarquons aussi que :

$$(34) \quad \begin{cases} Y(L_1) = \langle \alpha | \beta \rangle L_1 - \|\alpha\|^2 L_2 \\ Y(L_2) = \|\beta\|^2 L_1 - \langle \alpha | \beta \rangle L_2. \end{cases}$$

Ainsi Y agit linéairement sur l'espace vectoriel $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(L_1, L_2)$; comme cette action est de trace nulle on peut choisir L_1 et L_2 de sorte que :

$$(35) \quad \begin{cases} Y(L_1) = \lambda L_2 \\ Y(L_2) = -\lambda L_1. \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$. Ceci revient donc à supposer que $\|\alpha\|^2 = \|\beta\|^2 = 0$ et $\langle \alpha | \beta \rangle = \lambda$. On note alors, puisque L_1 et L_2 sont indépendants, que λ est non nul. En particulier le corps des intégrales premières rationnelles de Y est engendré par L_3 et la forme quadratique $L_1 L_2$; on note aussi que L_1, L_2 et L_3 sont indépendants ($\lambda \neq 0$). Par conséquent les trajectoires de Y sont les coniques :

$$(36) \quad \begin{cases} L_3 = \text{cste} \\ L_1 L_2 = \text{cste}. \end{cases}$$

Le feuilletage $\mathcal{F}$ associé à f (ses feuilles sont les fibres de f) est invariant par Y ; s'il est défini par la 1-forme polynomiale

$$(37) \quad \omega = A_1 dz_1 + A_2 dz_2 + A_3 dz_3$$

son lieu singulier :

$$(38) \quad \text{Sing } \mathcal{F} = \{A_1 = A_2 = A_3 = 0\}$$

est aussi invariant par Y , et donc formé de trajectoires de Y . Le feuilletage associé à $X = \text{grad } f$ est donné par le champ Z

$$(39) \quad Z = A_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + A_3 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Mais d'après le théorème 1.1 son lieu singulier est constitué de la droite $L_1 = L_2 = 0$ et éventuellement d'une courbe rationnelle Γ coupant le plan générique $L_1 = tL_2$ en un seul point en dehors de l'axe $L_1 = L_2 = 0$. Visiblement Γ ne peut-être une fibre générique de $(L_1 L_2, L_3)$ qui coupe deux fois chaque $L_1 = tL_2$ en dehors de l'axe $L_1 = L_2 = 0$; ni une fibre spécial (contenue dans $L_1 L_2 = 0$) qui n'apparaît pas comme lieu singulier de feuilletages en droites. Ne reste que la possibilité où le lieu singulier du champ de droites Z est précisément l'axe $L_1 = L_2 = 0$

On sait que dans cette situation le champ $X = \text{grad } f$ possède les deux intégrales premières L_1/L_2 et $\frac{L_3 - r(L_1/L_2)}{L_1}$ où $r \in \mathbb{C}(t)$ est une certaine fonction rationnelle.

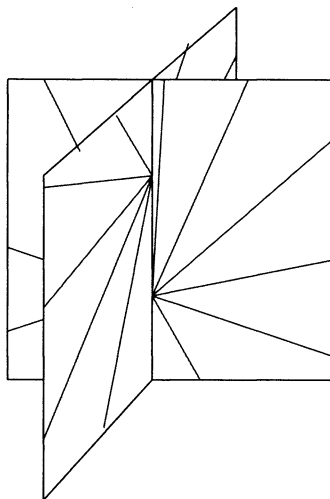


FIGURE 4.

Comme f est intégrale première du champ Y , il existe une fonction rationnelle $\varphi \in \mathbb{C}(t_1, t_2)$ telle que :

$$(41) \quad f = \varphi(L_1 L_2, L_3).$$

De sorte que $X = \text{grad } f$ s'écrit :

$$(42) \quad X = \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \{L_1 \text{grad } L_2 + L_2 \text{grad } L_1\} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \text{grad } L_3.$$

En écrivant explicitement que $\frac{L_3 - r(L_1/L_2)}{L_1}$ est intégrale première du champ X on obtient :

$$\langle \alpha | \beta \rangle \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(L_1 L_2, L_3) \cdot \left(L_3 - r \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \right) - \|\gamma\|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}(L_1 L_2, L_3) = 0.$$

Comme $\langle \alpha | \beta \rangle = \gamma$ est non nul et comme L_1, L_2, L_3 sont indépendants nécessairement $\|\gamma\|^2 \neq 0$ (utiliser $\langle \gamma | \beta \rangle = \langle \gamma | \alpha \rangle = 0$). Finalement $L_3 - r(\frac{L_1}{L_2})$ apparaît comme fonction de L_3 et de la forme quadratique $L_1 L_2$; ce qui est absurde sauf si r est constante. Mais dans ce cas le champ $\text{grad } f$ est radial.

Lorsque $\text{grad } f$ est radial :

$$\text{grad } f = h \cdot \sum_{i=1}^3 z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad h \in \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3)$$

on a :

$$(43) \quad z_i \frac{\partial h}{\partial z_j} - z_j \frac{\partial h}{\partial z_i} = 0.$$

En particulier il existe $\ell \in \mathbb{C}(t)$ telle que :

$$h = \ell(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$$

Par suite $f = L(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$. L'équation des eikonales se traduit par

$$4tL'(t)^2 = c^2$$

qui s'intègre en $L(t) = \pm c\sqrt{t} + \text{cste}$. La solution produite n'est pas rationnelle comme on le voit et comme le savait Malus...

Il reste finalement un cas à examiner, celui où le champ de droite $X = \text{grad } f$ est tangent à un pinceaux d'hyperplans parallèles $L_3 = \text{cste}$; on pose

$$L_3 = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \gamma_3 z_3.$$

Les formes linéaires $a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3$ avec $\|a\|^2 = c^2$ sont solutions de $E(f) = c^2$ et font partie du cas précédent.

Puisque :

$$\gamma_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \gamma_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} = 0$$

le champ de vecteur $Y = \sum \gamma_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ annule f . Considérons deux formes linéaires indépendantes

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 \\ L_2 &= \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 \end{aligned}$$

telles que $\langle \alpha | \gamma \rangle = \langle \beta | \gamma \rangle = 0$. Ces deux formes linéaires engendrent le corps des intégrales premières de Y si bien que

$$(44) \quad f = \varphi(L_1, L_2) \quad \text{où} \quad \varphi \in \mathbb{C}(t_1, t_2).$$

L'équation aux eikonales $E(f) = c^2$ se traduit par :

$$(45) \quad \|\alpha\|^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \right)^2 + \|\beta\|^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \right)^2 + 2 \langle \alpha | \beta \rangle \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} = c^2.$$

Remarquons que $\|\alpha\|^2, \|\beta\|^2$ et $\langle \alpha, \beta \rangle$ ne peuvent être simultanément nuls puisque L_1 et L_2 sont indépendantes. Par suite $\varphi \in \mathbb{C}(t_1, t_2)$ satisfait :

$$\det \text{Hess } \varphi \equiv 0.$$

La proposition 4.1 assure qu'il existe deux formes linéaires u_1 et u_2 en deux variables telles que φ soit de l'un des deux types :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varepsilon u_1 + \ell(u_2) \\ \varphi_2 &= \varepsilon u_1 + \ell\left(\frac{u_1}{u_2}\right) u_2, \quad \ell \in \mathbb{C}(t), \varepsilon \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Quitte à effectuer un changement de notation on peut donc supposer que f est de l'un des deux types :

$$(46) \quad f_1 = \varepsilon L_1 + \ell(L_2)$$

$$(47) \quad f_2 = \varepsilon L_1 + \ell\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \cdot L_2 \quad \varepsilon \in \{0, 1\}.$$

Dans le cas (46) l'équation des eikonales se traduit par :

$$(48) \quad \varepsilon \|\alpha\|^2 + \ell'(L_2)^2 \|\beta\|^2 + 2\ell'(L_2) <\alpha|\beta> = c^2.$$

En particulier si ℓ' est non constante on aura $<\alpha|\beta> = \|\beta\|^2 = 0$ et $\varepsilon \|\alpha\|^2 = c^2$; on peut alors, si $c \neq 0$, supposer que $\varepsilon = 1$. Si $c = 0$ alors f est affine. Dans le cas (47) l'équation des eikonales conduit à :

$$(48) \quad \|\alpha\|^2(\varepsilon + \ell'(t))^2 + \|\beta\|^2(\ell(t) - t\ell'(t))^2 + 2<\alpha|\beta>(\varepsilon + \ell'(t))(\ell(t) - t\ell'(t)) = c^2.$$

Elle ne produit pas de nouvelles solutions rationnelles comme nous allons le voir en l'intégrant explicitement. En dérivant (48) on obtient :

$$(49) \quad \ell''(t)\{\ell'(t)(\|\alpha\|^2 - 2<\alpha|\beta>t - t^2\|\beta\|^2) + \ell(t)(t\|\beta\|^2 + <\alpha|\beta>) + \|\alpha\|^2\varepsilon - \varepsilon t<\alpha|\beta>\} = 0.$$

Evidemment (49) possède des solutions affines mais qui sont de type (46). Après simplification par ℓ'' on obtient une équation différentielle linéaire avec second membre. On remarque que $t \rightsquigarrow -\varepsilon t$ en est une solution particulière. L'équation sans second membre :

$$(50) \quad y'(\|\alpha\|^2 - 2<\alpha|\beta>t - t^2\|\beta\|^2) + y(t\|\beta\|^2 + <\alpha|\beta>) = 0$$

s'intègre en :

$$(51) \quad y(t) = \text{cste} (t^2\|\beta\|^2 + 2<\alpha|\beta>t - \|\alpha\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

qui produit donc des solutions explicites de (48). Ces solutions ne sont pas rationnelles sauf lorsque $t^2\|\beta\|^2 + 2<\alpha|\beta>t - \|\alpha\|^2$ est un carré ; ce cas conduit encore à une solution de type 46.

On obtient in fine le :

Théorème 5.3. — *Les solutions rationnelles de $E(f) = c^2$, $c \neq 0$ sont de type $L_1 + \ell(L_2)$ où les L_i sont des formes linéaires, $L_1 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3$, $L_2 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3$, satisfaisant $\|\alpha\|^2 = c^2$, $\|\beta\|^2 = 0$, $<\alpha|\beta> = 0$; ℓ est une fonction rationnelle. Les solutions rationnelles de $E(f) = 0$ sont affines.*

6. Automorphismes des feuilletages en droites

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage en droites de $\mathbb{CP}(3)$; nous allons décrire quelques groupes $\text{Aut}\mathcal{F}$ où

$$\text{Aut}\mathcal{F} := \{\varphi \in \text{Aut}\mathbb{CP}(3) \mid \varphi^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\}.$$

Rappelons que $\text{Aut}\mathbb{CP}(3) \cong PGL(4, \mathbb{C})$; visiblement $\text{Aut}\mathcal{F}$ est un sous groupe algébrique de $\text{Aut}\mathcal{F}$. Si φ est un élément de $\text{Aut}\mathcal{F}$ alors $\varphi(\text{Sing}\mathcal{F}) = \text{Sing}\mathcal{F}$; dit autrement $\text{Aut}\mathcal{F}$ est un sous groupe de $\text{Aut}(\text{Sing}\mathcal{F})$ le groupe des automorphismes de $\mathbb{CP}(3)$ qui préservent $\text{Sing}\mathcal{F}$. Le groupe $\text{Aut}\mathcal{F}$ décrit les mouvements permis qui respectent la géométrie imposée par le feuilletage.

Proposition 6.1. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage en droites associé à une cubique gauche Γ ; alors :

$$\text{Aut } \mathcal{F} = \text{Aut}(\text{Sing } \mathcal{F}) = \text{Aut } \Gamma \cong \text{PGL}(2, \mathbb{C}).$$

Démonstration. — Si $\sigma : \mathbb{CP}(1) \rightarrow \mathbb{CP}(3)$ est une paramétrisation de Γ , alors chaque élément de $\text{Aut } \mathbb{CP}(1) \cong \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ se relève à Γ et s'étend en un automorphisme de $\mathbb{CP}(3)$. Comme un élément $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{CP}(3)$ dont la restriction à Γ est l'identité en lui-même, on a $\text{Aut } \Gamma \cong \text{PGL}(2, \mathbb{C})$. Maintenant si $\varphi \in \text{Aut } \Gamma$ il est clair que l'image par φ d'une corde de Γ est une corde de Γ ; ainsi $\varphi \in \text{Aut } \mathcal{F}$. $\square$

On note que $\text{Aut } \mathcal{F}$ agit transitivement sur $\mathbb{CP}(3) - \Gamma$ et sur Γ .

Lorsque $\mathcal{F}$ est le feuilletage radial en un point 0, il est clair que $\text{Aut } \mathcal{F}$ est exactement le sous groupe des automorphismes de $\mathbb{CP}(3)$ qui fixent 0.

Examinons le cas où $\mathcal{F}$ est radial dans les pages d'un livre ouvert $z_1/z_2 = \text{cste}$. Commençons par le cas dégénéré où le lieu singulier de $\mathcal{F}$ se réduit à l'axe $z_1 = z_2 = 0$. On sait qu'alors $\mathcal{F}$ a deux intégrales premières de base : z_2/z_1 et $\frac{z_3 - r(\frac{z_2}{z_1})}{z_1}$ où r est une certaine fonction rationnelle non constante. Si l'on éclate l'axe $z_1 = z_2 = 0$ dans $\mathbb{CP}(3)$, on obtient un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur la variété éclatée $\widetilde{\mathbb{CP}(3)}$ dont le lieu singulier est donné dans la carte $(z_1, t = \frac{z_2}{z_1}, z_3)$ par :

$$\text{Sing } \widetilde{\mathcal{F}} = \{z_1 = 0, z_3 = r(t)\}$$

Notons que si $\varphi \in \text{Aut } \mathcal{F}$, alors φ préserve l'axe $z_1 = z_2 = 0$; on peut donc relever φ à $\widetilde{\mathbb{CP}(3)}$ et obtenir un biholomorphisme $\widetilde{\varphi} \in \text{Aut } \widetilde{\mathcal{F}}$. Visiblement $\widetilde{\varphi}$ préserve le diviseur exceptionnel ($z_1 = 0$) et laisse invariant $\text{Sing } \widetilde{\mathcal{F}}$. De la même façon si X est un champ de vecteurs sur $\mathbb{CP}(3)$ dont le flot φ_s est dans $\text{Aut } \mathcal{F}$ alors X s'écrit :

$$(52) \quad (a_1 z_1 + a_2 z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + (b_1 z_1 + b_2 z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} + (c_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3) \frac{\partial}{\partial z_3} \\ + (A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3) \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \right).$$

La restriction de l'éclaté $\widetilde{X}$ de X au diviseur exceptionnel $z_1 = 0$ s'écrit :

$$(53) \quad (b_1 + (b_2 - a_1)t - a_2 t^2) \frac{\partial}{\partial t} + (c_0 + c_3 z_3 + A_3 z_3^2) \frac{\partial}{\partial z_3}$$

et doit être tangent à $\text{Sing } \widetilde{\mathcal{F}}$. Ce sera évidemment le cas si (53) est identiquement nul. Dans cette éventualité X est du type :

$$(54) \quad a_1 \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + (c_1 z_1 + c_2 z_2) \frac{\partial}{\partial z_3} + \\ (A_1 z_1 + A_2 z_2) \cdot \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \right),$$

et son éclaté $\widetilde{X}$ s'écrit :

$$(55) \quad \widetilde{X} = z_1 \left\{ a_1 + A_1 z_1 + A_2 z_1 t \right\} \frac{\partial}{\partial z_1} + (A_1 + c_1 + t(c_2 + A_2 z_3)) \frac{\partial}{\partial z_3} \Big\}.$$

Comme $\widetilde{X}$ doit respecter $\widetilde{\mathcal{F}}$, dans chaque plan générique on a :

$$(55) \quad [R_1, \widetilde{X}] = h.R_1 \quad \text{où} \quad R_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_3 - r(t)) \frac{\partial}{\partial z_3}$$

définit $\widetilde{\mathcal{F}}$ et h est un polynôme en z_1, z_2 à paramètre t . En écrivant explicitement (55) on constate que $A_1 = A_2 = 0$.

Par contre tous les flots des champs :

$$a_1 \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + (c_1 z_1 + c_2 z_2) \frac{\partial}{\partial z_3}$$

laissent invariant $\mathcal{F}$.

Lorsque la fonction rationnelle r est suffisamment générique la composante neutre $\text{Aut}_0 \mathcal{F}$ de $\text{Aut } \mathcal{F}$ se limite au groupe résoluble de dimension 3 :

$$(56) \quad \exp \left\{ a_1 \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + (c_1 z_1 + c_2 z_2) \frac{\partial}{\partial z_3} \right\}$$

c'est ce que nous allons voir maintenant tout en classifiant les cas exceptionnels. Considérons un champ X (52) dont l'éclaté $\widetilde{X}$ est non identiquement nul sur le diviseur exceptionnel ; alors $\text{Sing } \widetilde{\mathcal{F}}$ est invariant par le champ donné par (53). Dit autrement la fonction rationnelle r est solution de l'équation différentielle de Riccati :

$$(57) \quad (b_1 + (b_2 - a_1)t - a_2 t^2)y' - (c_0 + c_3 y + A_3 y^2) = 0.$$

Ce qui prouve l'affirmation ci-dessus. L'équation (57) possède les solutions constantes r_1 et r_2 , racines du trinôme

$$(58) \quad c_0 + c_0 y + A_3 y^2 = 0.$$

Notons que le champ (53) ne peut s'annuler sur $\text{Sing } \mathcal{F}$ sans être identiquement nul, cas traité précédemment. Si (58) a deux racines distinctes on peut supposer qu'elles sont en 0 et ∞ . A changement de coordonnées linéaires près (57) prend alors l'une des deux formes suivantes :

$$(59) \quad t^2 y' + y = 0$$

$$(60) \quad t y' + \lambda y = 0.$$

Mais (59) n'a d'autre solutions rationnelles que $y = 0$, cas exclus tandis que (60) a des solutions rationnelles $y = r(t)$ non constantes si et seulement si $\lambda \in \mathbb{Z}$, auquel cas toujours à conjugaison près, de telles solutions sont de type $r(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Si (58) a une racine double (le cas $A_3 = 0$ se ramène au précédent) (57) équivaut à

$$(61) \quad a(t)y' + y^2 = 0, \quad \text{où } a \text{ est un polynôme de degré deux.}$$

Le seul cas où (61) possède une solution rationnelle $r(t)$ non constante est celui où $a(t)$ à une racine double ; dans cette éventualité (61) est conjuguée à :

$$(62) \quad t^2 y' - y^2 = 0.$$

qui s'intègre en $y(t) = \frac{t}{1+\mu t}$, $\mu \in \mathbb{C}$.

La fonction rationnelle r est ici l'un des $\frac{t}{1+\mu t}$ et quitte à composer par $\frac{t}{1-\mu t}$ on supposera que $r(t) = t$. Nous étudions donc le groupe $\text{Aut } \mathcal{F}_n$ où $\mathcal{F}_n$ est le feuilletage en droites associé à la fonction t^n . En écrivant l'invariance de $\text{Sing } \widetilde{\mathcal{F}}$ par (53) on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Aut } {}_0\mathcal{F}_1 = \exp \left\{ (a_1 z_1 + a_2 z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + (b_1 z_1 + b_2 z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} \right. \\ \left. + (b_1 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + (b_2 - a_1) z_3) \frac{\partial}{\partial z_3} \right. \\ \left. + (A_1 z_1 + A_2 z_2 - a_2 z_3) \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \right) \right\} a_i, b_i, c_i, A_i \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

et pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \text{Aut } {}_0\mathcal{F}_n = \exp \left\{ (a_1 z_1 + a_2 z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} \right. \\ \left. + \left(b_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + c_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2 + n(b_2 - a_1) z_3 \right) \frac{\partial}{\partial z_3} \right. \\ \left. + (A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3) \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Les $\text{Aut } {}_0\mathcal{F}_n$ sont tous de dimension 9 et agissent transitivement sur $\mathbb{CP}(3) - \overline{(z_1 = z_2 = 0)}$

Venons en au cas générique d'un feuilletage en droites $\mathcal{F}$ dans les pages d'un livre ouvert, cas où le lieu singulier $\text{Sing } \mathcal{F}$ se compose de deux courbes rationnelles ($z_1 = z_2 = 0$) et la courbe $t \rightsquigarrow (r_1(t), tr_1(t), r_3(t)) = R(t)$. Bien sûr pour R générique $\text{Aut } {}_0\mathcal{F}$ est trivial puisque l'image de R en général n'est pas trajectoire d'un champ de vecteur sur $\mathbb{CP}(3)$. La description des $\text{Aut } {}_0\mathcal{F}$ dans le cas contraire est « zoologique ». L'exemple le plus simple est le suivant.

Supposons que $t \rightsquigarrow R(t)$ soit affine, ie paramètre une droite générale D . On peut supposer que D est donnée par $z_1 = 1, z_3 = 0$. Alors $\text{Aut } \mathcal{F}$ coïncide avec le sous groupe de $\text{Aut } \mathbb{CP}(3)$ qui laisse invariant $\text{Sing } \mathcal{F}$. Il est isomorphe au projectivisé du groupe $G \subset GL(4, \mathbb{C})$, où G est engendré par les matrices :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = A, B \in GL(2, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il agit encore transitivement sur $\mathbb{CP}(3) - \text{Sing } \mathcal{F}$.

7. Remarques et problèmes

La description des solutions rationnelles de l'équation aux eikonales en dimension 3 donne bien sûr celle des équations différentielles de type :

$$Q\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}\right) = 0,$$

où Q est une forme quadratique de rang maximum. Ces solutions ne sont jamais maximales.

On peut s'interroger sur les solutions Liouvilliennes de l'équation aux eikonales. C'est tout à fait naturel puisque les $c.\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$ en sont des solutions. De même on peut s'intéresser aux solutions globales réelles de classe C^2 ; on conjecture qu'elles sont affines. La classification des champs de droites en dimension supérieure à 4 et ses conséquences sur l'équation des eikonales restent ouvertes ; soit P un polynôme irréductible tel qu'il existe une solution maximale f rationnelle de $P\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$. On sait que $P = 0$ est unirationnelle ; il s'agit de classer de tels polynômes P .

Remerciements à Paulo Sad, à Frank Loray qui a fait les dessins et Marie-Annick Paulmier qui a assuré la frappe.

Références

- [1] M. DE BONDY & A. VAN DEN ESSEN – Singular Hessians, *J. Algebra* **282** (2004), p. 195–204.
- [2] D. CERVEAU – Feuilletages réglés, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307** (1988), p. 33–36.
- [3] J. DÉSERTE & D. CERVEAU – Feuilletages et actions de groupes sur les espaces projectifs, *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* **103** (2005).
- [4] P. GORDAN & M. NÖTHER – Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet, *Math. Ann.* **10** (1876), p. 547–568.
- [5] W. R. HAMILTON – Mathematical papers, vol. I, Geometrical optics, Cambridge University Press (1931). and *Transactions of the Royal Irish Academy* **15** (1828), pp. 69–174.

D. CERVEAU, IUF et IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France, membre de l'ANR
 Symplexe • E-mail : dominique.cerveau@univ-rennes1.fr