

Astérisque

Représentations p -adiques de groupes p -adiques I : représentations galoisiennes et (φ, Γ) -modules - Pages préliminaires

Astérisque, tome 319 (2008), p. I-XV

http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__R1_0

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

319

ASTÉRISQUE

2008

REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES
DE GROUPES p -ADIQUES I :
REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES
ET (φ, Γ) -MODULES

Laurent BERGER, Christophe BREUIL & Pierre COLMEZ, éditeurs

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Laurent Berger

Université de Lyon, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France

`laurent.berger@umpa.ens-lyon.fr`

Christophe Breuil

C.N.R.S. & I.H.É.S., Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France

`breuil@ihes.fr`

Pierre Colmez

École polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France

Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

`colmez@math.polytechnique.fr`

Classification mathématique par sujet (2000). — 11F80, 11G99, 11S, 11S15, 11S20, 11S80, 12H25, 13K05, 14E22, 14F20, 14F30.

Mots-clés. — Équations différentielles p -adiques, actions de Frobenius, anneau de Robba, anneaux de Fontaine, Banach, cohomologie étale, faisceaux de Fontaine, familles de représentations p -adiques, filtrations de pentes, (φ, Γ) -modules, (φ, N) -modules filtrés, isomorphismes de comparaison, p -adique, représentations p -adiques, semi-stable, théorie de Hodge p -adique, théorie de Sen, topologies de Grothendieck.

*Nous dédions ces trois volumes de
représentations p -adiques de groupes p -adiques
à Jean-Marc Fontaine.*

*Son œuvre a inspiré la plupart
des questions qui y sont abordées.*

Les éditeurs : Laurent Berger, Christophe Breuil et Pierre Colmez.

REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES DE GROUPES p -ADIQUES I : REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ET (φ, Γ) -MODULES

Laurent BERGER, Christophe BREUIL & Pierre COLMEZ, éditeurs

Résumé. — Ce volume est le premier de trois volumes consacrés à la correspondance de Langlands p -adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. La correspondance proprement dite fait l'objet du deuxième volume (aspects locaux) et du troisième volume (aspects globaux et géométriques). Après une introduction aux trois volumes (Breuil), les articles de ce premier volume couvrent trois grands thèmes : l'étude des représentations p -adiques classiques et des (φ, Γ) -modules (Berger, Colmez et Kedlaya), celle des familles de représentations p -adiques (Berger et Colmez) et enfin celle des représentations p -adiques relatives (Andreatta, Brinon et Iovita).

Abstract (*p -adic representations of p -adic groups I : Galois representations and (φ, Γ) -modules*)

This volume is the first in a series of three dedicated to the p -adic Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. The correspondence itself is the subject of the second volume (local aspects) and of the third volume (global and geometric aspects). After an introduction to the three volumes (Breuil), the articles of this first volume have three broad themes : the study of classical p -adic representations and (φ, Γ) -modules (Berger, Colmez and Kedlaya), the study of families of p -adic representations (Berger and Colmez), and the study of relative p -adic representations (Andreatta, Brinon and Iovita).

TABLE DES MATIÈRES

Christophe BREUIL — <i>Introduction générale</i>	1
1. Retour sur la genèse du programme de Langlands p -adique	1
1.1. La conjecture de Fontaine-Mazur	1
1.2. Le cas GL_1	3
1.3. Représentations localement algébriques de $GL_n(F_p)$	4
1.4. La conjecture sur les multiplicités modulaires	5
1.5. Les premiers cas	6
1.6. Cas semi-stables non cristallins	7
1.7. Compatibilité local-global	8
1.8. La découverte de l'interprétation par les (φ, Γ) -modules	9
1.9. Fin de la genèse et développements ultérieurs	10
2. Contenu des trois volumes	10
Références	11
 Laurent BERGER — <i>Equations différentielles p-adiques et</i> <i>(φ, N)-modules filtrés</i>	13
Introduction	13
(φ, N, G_K) -modules filtrés et (φ, Γ_K) -modules	13
Application aux représentations p -adiques	14
I. Rappels et compléments	15
I.1. Les $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés	16
I.2. L'anneau de Robba	16
I.3. Les (φ, Γ_K) -modules sur l'anneau de Robba	18
II. Construction de (φ, Γ_K) -modules	20
II.1. Recollement de réseaux locaux	20
II.2. Des $(\varphi, N, G_{L/K})$ -modules filtrés aux (φ, Γ_K) -modules	22
III. Construction de (φ, N, G_K) -modules filtrés	24
III.1. L'algèbre de Lie de Γ_K	24

III.2. Équations différentielles p -adiques	26
IV. Pentes de Frobenius	28
IV.1. Rappels sur les pentes de Frobenius	28
IV.2. Calcul des pentes de $\mathcal{M}(D)$	29
V. Applications aux représentations p -adiques	30
V.1. Anneaux de Fontaine et représentations p -adiques	31
V.2. Représentations potentiellement semi-stables	32
V.3. Construction de $\mathbf{D}^\dagger(V)$	33
Appendice A. Liste des notations	36
Appendice B. Erratum à [2]	36
Références	37

Fabrizio ANDREATTA & Olivier BRINON — *Surconvergence des représentations p -adiques : le cas relatif*

1. Introduction	39
2. La méthode de Sen généralisée	43
3. La théorie de Sen pour $R[p^{-1}]$	55
4. La théorie de Sen pour les (φ, Γ) -modules	65
4.1. Rappels et définitions	65
4.2. Descente de $\widehat{\mathbf{B}}^\dagger$ à $\widehat{\mathbf{B}}_S^\dagger$	69
4.3. Décomplétion	73
4.4. Traces normalisées de Tate généralisées	76
4.5. Vérification de la propriété (TS2)	80
4.6. Vérification de la propriété (TS3)	84
4.7. Application : surconvergence des représentations p -adiques	92
4.8. Application : l'opérateur ψ	100
4.9. Appendicite aigüe	105
Références	115

Pierre COLMEZ — *Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham*

Introduction	117
0.1. Notations	117
0.2. La conjecture de monodromie p -adique de Fontaine	118
0.3. Principe de la démonstration	119
0.4. Démonstration de la conjecture de Fontaine	120
0.5. Remarques sur le théorème « de Dieudonné-Manin »	122
0.6. Remarques sur le théorème « $H_g^1 = H_{\text{st}}^1$ »	124
0.7. Organisation de l'article	124

0.8. Remerciements	125
1. Rappels et compléments sur les Espaces Vectoriels de Dimension finie ...	125
1.1. Espaces Vectoriels de Dimension finie	125
1.2. Le corps des éléments additifs	127
1.3. Le commutant de E dans $\mathcal{C}$	129
2. Sous-Espaces Vectoriels des Anneaux de Fontaine	132
2.1. Sous-Espaces Vectoriels de $\mathbb{V}^d$	132
2.2. Les Anneaux de Fontaine	134
2.3. Sous-Espace Vectoriels de $\mathbb{B}_m$	135
2.4. Sous-Espaces Vectoriels de $\widetilde{\mathbb{B}}_{\text{rig}}^+$	136
2.5. Sous-Espaces Vectoriels de $(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+)^d$	137
3. Autour du théorème de Dieudonné-Manin	140
3.1. Énoncé des résultats	140
3.2. Démonstration directe du corollaire 3.7	141
3.3. Démonstration du corollaire 3.5	144
3.4. Démonstration du théorème 3.2	146
4. Les anneaux de caractéristique p	148
4.1. Rappels sur les corps locaux	148
4.2. L'extension cyclotomique d'une extension finie de F	149
4.3. Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ et certains de ses sous-anneaux	151
4.4. L'anneau des normes	152
5. Les anneaux parfaits	153
5.1. Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}$ et certains de ses sous-anneaux	153
5.2. Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et certains de ses sous-anneaux	155
5.3. Les anneaux $\mathbf{B}_{\text{max}}^+$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$	157
5.4. L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$ et ses sous-anneaux	158
5.5. Le logarithme et l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^\dagger$	158
5.6. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$	160
6. Les anneaux imparfaits	161
6.1. Les anneaux $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{B}_K$	161
6.2. Les éléments π , π_K , π_n et $\pi_{K,n}$	162
6.3. Le corps $\mathbf{B}^\dagger$ et ses sous-anneaux	164
7. Anneaux imparfaits et séries de Laurent	165
7.1. L'anneau $\mathbf{A}_K$	165
7.2. L'anneau $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$	165
7.3. L'anneau $\mathbf{B}_K^{[0,r]}$	166
8. Traces de Tate normalisées	168
8.1. Sur $\widehat{K}_\infty$	168

8.2. Sur $\widetilde{\mathbf{E}}_K$	169
8.3. Sur $\widetilde{\mathbf{A}}_K$	170
8.4. Sur $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$	171
8.5. Sur $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{[0,r]}$	173
9. Action de Γ_K	174
9.1. Invariants	174
9.2. Le Γ_K -module $\mathbf{A}_K^{(0,r]}$	174
9.3. Le Γ_K -module $(\mathbf{A}_K^{(0,r]})^{\psi=0}$	176
9.4. Décomposition de $\widetilde{\mathbf{A}}_K^{(0,r]}$	177
9.5. Décomposition de $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{[0,r]}$	178
10. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine	178
10.1. Descente presque étale	178
10.2. Décomplétion	180
10.3. Cocycles se trivialisant dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$	180
10.4. Cohomologie de $t\mathbf{B}_K^{[0,r]}$	181
10.5. Un résultat du type « $H_g^1 = H_{\text{st}}^1$ » pour $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$	182
10.6. Un résultat du type « $H_g^1 = H_{\text{st}}^1$ » pour $\mathbf{U}_{h,a}$ et $\mathbf{U}'_{h,a}$	183
Références	184

Pierre COLMEZ — Conducteur d'Artin d'une représentation de de Rham	187
Introduction	187
0.1. Notations	187
0.2. La filtration de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ par valuation de convergence	188
0.3. Conducteurs d'Artin et de Swan des représentations de de Rham ...	188
0.4. $(\varphi, N, \mathcal{G}_K)$ -modules et représentations p -adiques	189
1. Conducteur d'Artin d'un élément de $\overline{K}$	191
1.1. Définition	191
1.2. Conducteur d'Artin d'une uniformisante	191
2. Conducteur d'Artin et valuation de convergence de séries entières	192
2.1. Valuation de convergence raffinée d'une série entière	192
2.2. Le sous-anneau $C[[T]]^{(r)}$ de $C[[T]]$	193
2.3. Conducteur d'Artin d'uniformisantes et valuation de convergence ...	194
3. Valuation de convergence d'un élément de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$	195
3.1. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$	195
3.2. Valuation de convergence d'un élément de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$	197
3.3. $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ et $C[[T]]$	197
4. $\overline{K}$ comme sous-anneau de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$	199

4.1. L'anneau $K[X]_P$	199
4.2. Le plongement de $K[X]_P$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$	200
4.3. Calcul de $c_{\mathrm{dR},K}(\pi_L)$	201
5. $\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$ et sa filtration par valuation de convergence	203
5.1. Les anneaux $\mathbf{B}_{\max}^+$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$	203
5.2. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$ et $K \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$	205
5.3. Le sous-anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$	206
5.4. L'anneau $\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$	207
6. Représentations de de Rham	209
6.1. Le $(\varphi, N, \mathcal{G}_K)$ -module attaché à une représentation de de Rham	209
6.2. Ramification et valuation de convergence	209
6.3. Application aux E -représentations	211
Références	212
Pierre COLMEZ — Représentations triangulines de dimension 2	213
Introduction	213
0.1. Notations	213
0.2. L'espace des paramètres $\mathcal{S}_{\mathrm{irr}}$	214
0.3. (φ, Γ) -modules	215
0.4. Représentations triangulines	215
0.5. Remerciements	218
1. (φ, Γ) -modules et représentations de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$	218
1.1. (φ, Γ) -modules étales et représentations galoisiennes	218
1.2. Le théorème de Dieudonné-Manin de Kedlaya	219
1.3. Application aux représentations galoisiennes	220
2. Calculs de groupes de cohomologie	221
2.1. Le complexe associé à un (φ, Γ) -module	221
2.2. Le (φ, Γ) -module associé à un caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ et sa cohomologie . . .	221
2.3. Calcul de $H^1(\delta)$ dans le cas $v_p(\delta(p)) < 0$	222
2.4. L'opérateur $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \rightarrow H^1(\delta)$	224
2.5. Dimension de $H^1(\delta)$	226
2.6. Calcul de $H^0(t^{-k}\mathcal{R}(\delta)/\mathcal{R}(\delta))$	227
2.7. L'application $\iota_k : H^1(\delta) \rightarrow H^1(x^{-k}\delta)$	229
3. Construction de (φ, Γ) -modules étales sur $\mathcal{E}^+$	231
3.1. (φ, Γ) -modules de rang 1 sur $\mathcal{R}$	231
3.2. (φ, Γ) -modules triangulables	231
3.3. Le (φ, Γ) -module $D(s)$	232
3.4. Le module $D(s, k)$	234

3.5. Le (φ, Γ) -module $\Delta(s)$	236
4. Application aux représentations galoisiennes	237
4.1. Définition des représentations triangulines	237
4.2. Poids de Hodge-Tate de $V(s)$	238
4.3. Irréductibilité de $V(s)$	240
4.4. Représentations potentiellement semi-stables et représentations de Weil-Deligne	241
4.5. Cristallinité de $V(s)$	242
4.6. Semi-stabilité de $V(s)$	245
5. Densité des triangulines et des cristallines	247
5.1. Étude locale de l'espace des triangulines	247
5.2. La fougère infinie	250
A. Compléments à [12]	253
A.1. Compléments sur $\mathcal{R}$	253
A.2. Anneaux de Fontaine	255
Références	257
Kiran KEDLAYA — <i>Slope filtrations for relative Frobenius</i>	259
Introduction	260
0.1. Context	260
0.2. About the results	262
0.3. Structure of the paper	263
Acknowledgments	263
1. Statement of the filtration theorem	263
1.1. The Robba ring	263
1.2. Frobenius lifts on the Robba ring	264
1.3. ϕ -modules	266
1.4. Degrees, slopes, and stability	268
1.5. Étale ϕ -modules	272
1.6. Pure ϕ -modules	273
1.7. The slope filtration theorem	276
2. Classification over an extended Robba ring	279
2.1. Overview	279
2.2. The extended Robba ring	282
2.3. Construction of fixed vectors	285
2.4. Twisted polynomials and their Newton polygons	286
2.5. Classification of pure ϕ -modules	288
2.6. The local calculation	290
3. Descending the slope filtration	292

3.1. Overview	293
3.2. Splitting étale ϕ -modules	293
3.3. The use of faithfully flat descent	294
3.4. Interlude: tensoring over Bézout domains	296
3.5. Projections	297
References	299

Laurent BERGER & Pierre COLMEZ — *Familles de représentations de de Rham et monodromie p -adique*

1. Introduction	303
2. Préliminaires	305
2.1. Algèbres de coefficients et produits tensoriels complétés	305
2.2. Descente étale	307
2.3. Représentations p -adiques et anneaux de Fontaine	308
3. La méthode de Sen	308
3.1. Les conditions de Tate-Sen	308
3.2. Dévissages en cohomologie continue	310
3.3. Application aux S -représentations	313
4. Deux applications de la méthode de Sen	314
4.1. Le corps $\mathbf{C}_p$ et l'opérateur de Sen	314
4.2. Les anneaux surconvergents et les (φ, Γ) -modules	315
4.3. Le module $D_{\text{dif}}(V)$	320
5. Représentations de de Rham	321
5.1. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{HT}}$ et les représentations de Hodge-Tate	321
5.2. Le corps $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ et les représentations de de Rham	323
5.3. Les périodes d'une famille de représentations de de Rham	325
6. Représentations semi-stables et monodromie p -adique	327
6.1. Construction de $N_{\text{dR}}(V)$	327
6.2. Monodromie p -adique	329
6.3. Application aux familles de représentations de de Rham	331
7. Un théorème de Wintenberger	333
7.1. Continuité des périodes de Sen	333
Références	335

Fabrizio ANDREATTA & Adrian IOVITA — *Global applications of relative (ϕ, Γ) -modules I*

1. Introduction	339
Acknowledgements	344
2. Preliminaries	345

2.1. The basic rings	345
2.2. RAE	346
2.3. The rings $\tilde{\mathbf{E}}_{S_\infty}$, $\mathbf{E}_S$, $\tilde{\mathbf{E}}_{S'_\infty}$ and $\mathbf{E}'_S$	347
2.4. The rings $\tilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{S_\infty}^\dagger$, $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}_S^\dagger$, $\tilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{S'_\infty}^\dagger$, $\mathbf{A}'_S$ and $\mathbf{A}'_S{}^\dagger$	350
Overconvergent coefficients	350
2.4.1. Noetherian coefficients	351
2.5. (φ, Γ) -modules and Galois representations	354
2.6. The weak topology on the (φ, Γ) -modules	356
3. Galois cohomology and (φ, Γ) -modules	357
3.1. The maps	358
4. Étale cohomology and relative (φ, Γ) -modules	362
4.1. Some Grothendieck topologies and associated sheaves	362
The site $\mathfrak{X}_M$	362
The sites $\mathcal{U}^{M, \text{fet}}$ and $\mathcal{U}_{M, \text{fet}}$	363
The site $\hat{\mathfrak{X}}_M$	364
4.2. Morphisms of Grothendieck topologies	364
Notation	365
4.3. Stalks [14, p. 214]	365
4.4. Pointed étale sites	371
The site $\mathcal{X}_{\text{et}}^\bullet$	371
The site $\hat{\mathfrak{X}}_M^\bullet$	371
4.5. Comparison between algebraic cohomology and formal cohomology ..	374
5. A geometric interpretation of classical (φ, Γ) -modules	376
5.1. Categories of inverse systems	377
5.2. Example	378
5.3. Fontaine sheaves on $\mathfrak{X}_M$ and $\hat{\mathfrak{X}}_M$	379
Notation	380
5.4. Comparison between algebraic and formal cohomology of continuous sheaves	381
5.5. Proof of theorem 5.1	385
6. The cohomology of Fontaine sheaves	386
6.1. Remarks on various Grothendieck topologies	387
The site $\hat{\mathfrak{X}}_{M, \text{Zar}}$	387
Stalks	387
6.1.1. The site $\mathcal{U}_{M, \text{fet}}$	388
6.2. The sheaf $\mathcal{H}_{\text{Gal}_M}^i(\mathcal{F})$	389
6.2.1. The standard resolution	389
6.3. The sheaf $\mathcal{H}_{\text{Gal}_M, \text{cont}}^i$	390
6.3.1. The site $\hat{\mathcal{U}}_{M, *}(\infty)$	391

6.4. Proof of Theorem 6.16	395
Analysis of $\text{Ker}(\alpha)$ and $\text{Ker}(\beta)$	397
Analysis of the image of $\text{Coker}(S/pS \rightarrow \text{Ker}_{S,T})$ in $\text{Coker}(\alpha)$	398
6.4.1. End of proof of 6.16	398
6.5. Proof of theorem 6.1	400
Appendix A. Galois cohomology via the Tate-Sen method	400
A.1. The axioms	400
A.2. Notation	402
A.3. Decompletion	404
A.4. Sen's theory for $\widehat{R}[p^{-1}]$	407
A.5. Sen's theory for $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}$ and $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{R}}^{\dagger}$	410
A.5.1. The operators $\tau_m^{(i)}$ and $t_m^{(i)}$ on (φ, Γ) -modules	412
A.5.2. The structure of δ -functors	414
Appendix B. Artin-Schreier theory	415
References	419