

Astérisque

AST

**Séminaire Bourbaki - Volume 2006/2007 - Exposés
967-981 : Pages préliminaires**

Astérisque, tome 317 (2008), p. I-X

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__317__R1_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

317

ASTÉRISQUE

2008

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki. École normale supérieure,
45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.

URL : <http://www.bourbaki.ens.fr>

Mots-clefs et classification mathématique par sujet (2000)

Exposé n° 967. — Théorème de sous-espaces, transcendance, nombres automatiques, sommes des puissances, points entiers.

Exposé n° 968. — Théorie algorithmique des nombres, fonctions zêta, courbes elliptiques, formes modulaires, cohomologie p -adique

Exposé n° 969. — Structure de contact, livre ouvert.

Exposé n° 970. — Variétés de type général, théorèmes d'annulation, volume d'un diviseur, volume restreint, diviseur canonique, idéaux multiplicateurs, paires klt, lieu non klt, conjecture de Fujita, lieu de base augmenté.

Exposé n° 971. — Groupes, automates, marches aléatoires, spectres, croissance, groupes de torsion.

Exposé n° 972. — Équations différentielles ordinaires, équations de transport, coefficients discontinues, solutions renormalisées, fonctions BV .

Exposé n° 973. — Algebraic independence in positive characteristic, Drinfeld modules, t -modules and t -motives, arithmetic of σ -difference equations, Mahler's method.

Exposé n° 974. — Tissus, algébrisation, relations abéliennes

Exposé n° 975. — Équations de Hamilton-Jacobi, solutions de viscosité, unicité, systèmes lagrangiens, ensemble d'Aubry.

Exposé n° 976. — Variétés carquois, algèbre de Kac-Moody, espace de modules de fibrés vectoriels sur les surfaces.

Exposé n° 977. — Représentation automorphe, représentation galoisienne, courbe elliptique.

Exposé n° 978. — Entropie, semi-classique, géodésiques, fonctions propres, laplacien, mesures de Wigner.

Exposé n° 979. — Corps de fonctions, groupe de Brauer, points rationnels, sous-groupes de congruence.

Exposé n° 980. — Algèbre de Lie, quantification par déformation, formule de Campbell-Baker-Hausdorff, algèbre L_∞ .

Exposé n° 981. — Surfaces $K3$, espaces de modules, dimension de Kodaira, formes modulaires.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2006/2007
EXPOSÉS 967-981

Résumé. — Comme les précédents volumes de ce séminaire, celui-ci contient quinze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité : trois exposés de géométrie algébrique, deux de géométrie arithmétique, un concernant l'approximation diophantienne, deux de théorie des nombres, trois de géométrie différentielle, deux sur les groupes et les algèbres de Lie et deux liés à la physique mathématique.

Abstract (Séminaire Bourbaki, volume 2006/2007, exposés 967-981)

As in the preceding volumes of this seminar, one finds here fifteen survey lectures on topics of current interest : three lectures on algebraic geometry, two on arithmetic geometry, one about Diophantine approximation, two on number theory, three on differential geometry, two about groups or Lie algebras, and two about mathematical physics.

Résumés des exposés	vii
---------------------------	-----

NOVEMBRE 2006

967	Yuri F. BILU — <i>The Many Faces of the Subspace Theorem (after Adamczewski, Bugeaud, Corvaja, Zannier, ...)</i>	1
968	Antoine CHAMBERT-LOIR — <i>Compter (rapidement) le nombre de solutions d'équations dans les corps finis</i>	39
969	Vincent COLIN — <i>Livres ouverts en géométrie de contact (d'après Emmanuel Giroux)</i>	91
970	Olivier DEBARRE — <i>Systèmes pluricanoniques sur les variétés de type général (d'après Hacon-McKernan, Takayama, Tsuji)</i>	119
971	Andrzej ŻUK — <i>Groupes engendrés par les automates</i>	141

MARS 2007

972	Camillo DE LELLIS — <i>Ordinary differential equations with rough coefficients and the Renormalization Theorem of Ambrosio (after Ambrosio, DiPerna, Lions)</i>	175
973	Federico PELLARIN — <i>Aspects de l'indépendance algébrique en caractéristique non nulle (d'après Anderson, Brownawell, Denis, Papanikolas, Thakur, Yu, ...)</i>	205
974	Jorge Vitório PEREIRA — <i>Algebraization of codimension one Webs (after Trépreau, Hénaut, Pirio, Robert, ...)</i>	243
975	Jean-Michel ROQUEJOFFRE — <i>Propriétés qualitatives des solutions des équations de Hamilton-Jacobi (d'après A. Fathi, A. Siconolfi, P. Bernard)</i>	269
976	Olivier SCHIFFMANN — <i>Variétés carquois de Nakajima (d'après Nakajima, Lusztig, Varagnolo, Vasserot, Crawley-Boevey, ...)</i> ..	295

JUIN 2007

977	Henri CARAYOL — <i>La conjecture de Sato-Tate (d'après Clozel, Harris, Shepherd-Barron, Taylor)</i>	345
978	Yves COLIN de VERDIÈRE — <i>Semi-classical measures and entropy (after Nalini Anantharaman and Stéphane Nonnenmacher)</i>	393

979	David HARARI — <i>Points rationnels sur les sous-variétés des variétés abéliennes au-dessus d'un corps de fonctions (d'après Poonen et Voloch)</i>	415
980	Charles TOROSSIAN — <i>La conjecture de Kashiwara-Vergne (d'après Alekseev et Meinrenken)</i>	441
981	Claire VOISIN — <i>Géométrie des espaces de modules de courbes et de surfaces K3 (d'après Gritsenko-Hulek-Sankaran, Farkas-Popa, Mukai, Verra, ...)</i>	467

Yuri F. BILU — *The Many Faces of the Subspace Theorem (after Adamczewski, Bugeaud, Corvaja, Zannier, ...)*

The Subspace Theorem of Schmidt and Schlickewei is, probably, the top achievement of the 20th century theory of Diophantine approximations. Recently, this theorem found spectacular applications to several difficult problems of the Diophantine analysis. In this talk we shall discuss some of them, focusing on the three particular topics:

- the work of Corvaja and Zannier on Diophantine equations of the type $F(a_1^n + \cdots + a_m^n, y) = 0$;
- the same authors' beautiful proof of the classical theorem of Siegel on integral points on curves, and extensions of their method to surfaces and higher dimensional varieties;
- the solution, by Adamczewski and Bugeaud, of the difficult problem of complexity of algebraic numbers.

Antoine CHAMBERT-LOIR — *Compter (rapidement) le nombre de solutions d'équations dans les corps finis*

Le nombre de solutions dans les corps finis d'un système d'équations polynomiales obéit à une très forte régularité, reflétée par exemple par la rationalité de la fonction zêta d'une variété algébrique sur un corps fini, ou la modularité de la fonction L de Hasse-Weil d'une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$.

Depuis une vingtaine d'années des méthodes efficaces ont été inventées pour calculer effectivement ce nombre de solutions, notamment en vue d'applications à la cryptographie.

L'exposé en présentera quelques-unes, généralement fondées sur l'utilisation de la formule des traces de Lefschetz dans une théorie cohomologique convenable, et expliquera leurs avantages respectifs.

Vincent COLIN — *Livres ouverts en géométrie de contact (d'après Emmanuel Giroux)*

Ces dernières années, Emmanuel Giroux a montré comment l'étude des variétés de contact closes de dimension $2n + 1$ se ramène à celle des livres ouverts dont les pages sont des variétés de Stein, la reliure une variété de contact de dimension $2n - 1$ et la monodromie un difféomorphisme symplectique.

En dimension trois, cette description est purement topologique et a porté ses fruits dans de nombreux domaines : topologie, géométrie de contact et étude dynamique des champs de Reeb.

En dimension supérieure, elle permet de formuler la géométrie de contact en termes de géométrie symplectique. Dans ce cas, le travail de Giroux repose sur la construction, donnée par Ibort-Martinez-Presas et inspirée par les travaux de Donaldson, de sections approximativement holomorphes pour des fibrés en droites hermitiens sur une variété de contact.

Olivier DEBARRE — *Systèmes pluricanoniques sur les variétés de type général (d'après Hacon–McKernan, Takayama, Tsuji)*

Les sections holomorphes de la puissance tensorielle m -ième du fibré des n -formes différentielles holomorphes sur une variété projective lisse complexe X de dimension n permettent de définir une application rationnelle de X dans un espace projectif. On dit que X est de type général si cette application est génériquement injective pour tout $m \geq m_0$. Utilisant des idées de Tsuji, Hacon–McKernan et Takayama ont indépendamment montré que l'on peut choisir une constante m_0 qui ne dépend que de n . Les techniques utilisées ont aussi permis de grandes avancées vers la complétion du Programme du Modèle Minimal de Mori.

Andrzej ŻUK — *Groupes engendrés par les automates*

Les groupes d'automates forment une classe de groupes qui contient plusieurs groupes dénombrables remarquables. Leur étude a permis de résoudre des problèmes importants dans la théorie des groupes. Ses applications récentes s'étendent à l'algèbre, la géométrie, l'analyse et les probabilités.

Camillo DE LELLIS — *Ordinary differential equations with rough coefficients and the Renormalization Theorem of Ambrosio (after Ambrosio, DiPerna, Lions)*

In a seminal paper of almost 20 years ago, R.J. DiPerna and P.-L. Lions initiated the theory of renormalized solutions to study the well-posedness of Ordinary Differential Equations and Transport Equations with discontinuous coefficients. In a recent work L. Ambrosio solved the long-standing open problem of extending this theory to BV coefficients, the most common functional-analytic closure of classical functions with jump discontinuities.

Besides its intrinsic interest, Ambrosio's Theorem has been used to solve relevant problems in Partial Differential Equations and it opened the way to a series of new questions.

Federico PELLARIN — *Aspects de l'indépendance algébrique en caractéristique non nulle (d'après Anderson, Brownawell, Denis, Papanikolas, Thakur, Yu, ...)*

On conjecture que si $\ell_1, \dots, \ell_n$ sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants et d'exponentielles algébriques, alors ils sont algébriquement indépendants. De même, on conjecture l'indépendance algébrique de π et des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs ≥ 3 . Dans cet exposé, nous décrivons comment des analogues appropriés de ces conjectures, avec $\mathbb{F}_q(T)$ jouant le rôle de $\mathbb{Q}$, ont été récemment démontrés.

Jorge Vitório PEREIRA — *Algebraization of codimension one Webs (after Trépreau, Hénaut, Pirio, Robert, ...)*

Jean-Marie Trépreau, extending previous results by Bol and Chern-Griffiths, proved recently that codimension one webs with sufficiently many abelian relations are after a change of coordinates projectively dual to algebraic curves when the ambient dimension is at least three.

In sharp contrast, Luc Pirio and Gilles Robert, confirming a guess of Alain Hénaut, independently established that a certain planar 9-web is exceptional in the sense that it admits the maximal number of abelian relations and is non-algebraizable. After that a number of exceptional planar k -webs, for every $k \geq 5$, have been found by Pirio and others.

I will briefly review the subject history, sketch Trépreau's proof, describe some of the "new" exceptional webs and discuss related recent works.

Jean-Michel ROQUEJOFFRE — *Propriétés qualitatives des solutions des équations de Hamilton-Jacobi (d'après A. Fathi, A. Siconolfi, P. Bernard)*

Les équations de Hamilton-Jacobi, outre leur rôle dans l'étude des systèmes hamiltoniens, ont une place importante dans la modélisation en physique, en mécanique, en science des matériaux... mais aussi en imagerie et en finance.

La théorie des solutions de viscosité, mise en place par Crandall et Lions dans les années 80, fournit un cadre naturel d'étude du problème de Cauchy pour ces équations. D'importants progrès dans la compréhension de leurs propriétés qualitatives ont été réalisés par Fathi à la fin des années 90 : nous présenterons dans cet exposé quelques-unes des idées sous-jacentes. Nous discuterons en particulier des questions suivantes : régularité, unicité (Fathi), sous-solutions critiques (Fathi-Siconolfi, Bernard).

Olivier SCHIFFMANN — *Variétés carquois de Nakajima (d'après Nakajima, Lusztig, Varagnolo, Vasserot, Crawley-Boevey, ...)*

Motivé par l'étude des espaces de modules de fibrés vectoriels sur certaines surfaces complexes (les espaces «ALE»), Nakajima a introduit, au début des années 90, une nouvelle classe de variétés algébriques symplectiques $\mathfrak{M}_Q$ associées à tout carquois fini Q . Il réalise dans la cohomologie de ces variétés $\mathfrak{M}_Q$ (et dans celle de certaines sous-variétés lagrangiennes naturelles $\mathfrak{L}_Q \subset \mathfrak{M}_Q$) les représentations intégrables de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}_Q$ correspondant à Q , ainsi que leurs bases cristallines, etc. On obtient ainsi, dans le cadre des algèbres enveloppantes (éventuellement quantiques) une théorie parallèle à celle développée par Kazhdan-Lusztig et Ginzburg pour décrire la correspondance de Langlands des algèbres de Hecke affines. Plus récemment, les variétés carquois ont permis à Nakajima et Yoshioka de démontrer certaines conjectures de Nekrasov en symétrie miroir reliant l'intégrale de classes de cohomologie de l'espace de modules des instantons sur $\mathbb{R}^4$ au prépotentiel de Seiberg-Witten.

Henri CARAYOL — *La conjecture de Sato-Tate (d'après Clozel, Harris, Shepherd-Barron, Taylor)*

Soit E une courbe elliptique, sans multiplication complexe, définie sur un corps de nombres F . À chaque place v de F où E a bonne réduction correspondent deux valeurs propres conjuguées du Frobenius, dont l'une admet un argument $\theta_v \in [0, \pi]$. La conjecture de Sato-Tate prédit comment doivent être répartis les θ_v dans $[0, \pi]$. Cette conjecture est maintenant prouvée pour F totalement réel et E admettant, en au moins une place, une réduction de type multiplicatif. La preuve repose sur une extension des méthodes de Taylor-Wiles (enrichies d'idées entièrement nouvelles) au cas des groupes unitaires et elle fait aussi usage d'une famille particulière d'hypersurfaces projectives.

Yves COLIN de VERDIÈRE — *Semi-classical measures and entropy (after Nalini Anantharaman and Stéphane Nonnenmacher)*

Let X be a compact Riemannian manifold with < 0 curvature and $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ an orthonormal basis of Laplace eigenfunctions on X . A “semi-classical measure” is any weak limit of a sequence of Wigner measures of the ϕ_j 's. The main result is a lower bound for the Kolmogorov-Sinai entropy of such measures which implies that there do not exist sequences of eigenfunctions concentrating on a finite union of closed geodesics.

David HARARI — *Points rationnels sur les sous-variétés des variétés abéliennes au-dessus d'un corps de fonctions (d'après Poonen et Voloch)*

Soit K un corps global de caractéristique > 0 . On présente des résultats de Poonen et Voloch sur une conjecture d'«intersection adélique» pour les sous-variétés d'une variété abélienne définie sur K .

Charles TOROSSIAN — *La conjecture de Kashiwara-Vergne (d'après Alekseev et Meinrenken)*

En 1978, M. Kashiwara et M. Vergne ont conjecturé dans un de leurs articles une propriété remarquable et universelle sur la série de Campbell-Hausdorff d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension finie. Cette propriété conjecturale admet comme corollaire l'isomorphisme de Duflo entre le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et les invariants de l'algèbre symétrique.

Cette conjecture a été démontrée en toute généralité par A. Alekseev et E. Meinrenken en 2005 et publiée en 2006 à *Inventiones*.

Claire VOISIN — *Géométrie des espaces de modules de courbes et de surfaces K3 (d'après Gritsenko-Hulek-Sankaran, Farkas-Popa, Mukai, Verra, ...)*

L'exposé concernera principalement les espaces de modules $\mathcal{F}_g$ de surfaces K3 «de genre g ». Parallèlement à ce qui est connu depuis les années 80 pour les espaces de modules de courbes stables $\overline{\mathcal{M}}_g$ (Harris-Mumford) et de variétés abéliennes principalement polarisées $\mathcal{A}_g$ (Tai), Gritsenko-Hulek-Sankaran ont montré récemment que ces espaces sont de type général pour g suffisamment grand. On a par contre, en petit genre, l'unirationalité de $\mathcal{F}_g$ et $\overline{\mathcal{M}}_g$ (Mukai, Verra...). Enfin, Farkas et Popa ont utilisé les courbes sections hyperplanes de surfaces K3 pour étudier les diviseurs effectifs sur $\overline{\mathcal{M}}_g$ et la conjecture de la pente de Harris et Morrison.