

Astérisque

JOSEPH AYOUB

Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique (I)

Astérisque, tome 314 (2007)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_2007__314__R1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2007__314__R1_0)

© Société mathématique de France, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES SIX OPÉRATIONS DE
GROTHENDIECK ET LE
FORMALISME DES CYCLES
ÉVANESCENTS DANS LE MONDE
MOTIVIQUE (I)

Joseph Ayoub

J. Ayoub

LAGA, Université Paris 13, CNRS.

E-mail : ayoub@math.univ-paris13.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14-02, 14C25, 14F20, 14F35, 14F42, 18A40, 18F10, 18F20, 18F25, 18G55, 19E15.

Mots clefs. — Motifs, six opérations de Grothendieck, dualité de Verdier, cycles évanescents, \mathbb{A}^1 -homotopie des schémas, catégories de modèles.

LES SIX OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK ET LE FORMALISME DES CYCLES ÉVANESCENTS DANS LE MONDE MOTIVIQUE (I)

Joseph Ayoub

Résumé. — D'après les travaux de Morel, Voevodsky et d'autres mathématiciens, on dispose de la notion du *type d'homotopie motivique stable* d'un S -schéma lisse. Cet objet vit dans la *catégorie homotopique stable des S -schémas* $\mathbf{SH}(S)$.

Ce travail est divisé en deux volumes et chaque volume en deux chapitres. Dans le premier chapitre, on montre que du point de vue de la fonctorialité, les catégories $\mathbf{SH}(S)$ se comportent comme les catégories dérivées des faisceaux ℓ -adiques. En effet, le formalisme des opérations de Grothendieck f^* , f_* , $f_!$ et $f^!$ s'étend sans changement au monde motivique. Dans le second chapitre, on étudie les propriétés de constructibilité des motifs et on développe la dualité de Verdier. Le troisième chapitre est consacré à la théorie des motifs proches et motifs évanescents. Dans le dernier chapitre, on reprend la construction des catégories $\mathbf{SH}(S)$.

Abstract (The Grothendieck six operations and the vanishing cycles formalism in the motivic world)

By the work of Morel, Voevodsky and other mathematicians, one has the notion of the *stable motivic homotopy type* of a smooth S -scheme. This object lives in the *stable homotopy category of S -schemes* $\mathbf{SH}(S)$.

This work consists of two volumes and each of them is divided into two chapters. In the first chapter, we show that from the view point of functoriality, the categories $\mathbf{SH}(S)$ behave like the derived categories of ℓ -adic sheaves. Indeed, the formalism of Grothendieck operations f^* , f_* , $f_!$ and $f^!$ extends to the motivic world. In the second chapter, we study the constructibility of motives and develop Verdier duality. The third chapter deals with the theory of nearby motives and vanishing motives. In the last chapter, we give a self-contained treatment of the construction of the categories $\mathbf{SH}(S)$.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	vii
Introduction générale	ix
1. Les quatre opérations de Grothendieck dans un cadre motivique ..	1
1.1. Préliminaires 2-catégoriques I : Adjonctions et équivalences dans une 2-catégorie	6
1.2. Préliminaires 2-catégoriques II : Échanges entre 2-foncteurs. Foncteurs croisés	25
1.3. Préliminaires 2-catégoriques III : Un critère de prolongement pour les 2-foncteurs	47
1.4. Énoncé du résultat principal. Quelques préparations	71
1.5. Les équivalences de Thom. Les 2-foncteurs ${}^{\text{Liss}}H^!$ et ${}^{\text{Liss}}H_!$	89
1.6. Pureté. Construction du foncteur croisé $(H^*, H_*, H_!, H^!)$	115
1.7. Le morphisme de 2-foncteurs $H_! \mapsto H_*$. Fin de la démonstration	210
2. Compléments sur les 2-foncteurs homotopiques stables et les quatre opérations	239
2.1. Préliminaires généraux	242
2.2. Engendrement de sous-catégories et de t -structures dans un 2-foncteur homotopique stable.	339
2.3. Les 2-foncteurs monoïdaux homotopiques stables	385
2.4. Dérivateurs algébriques homotopiques et stables	436
Bibliographie	461

REMERCIEMENTS

Ce texte, en deux volumes, est essentiellement ma thèse de doctorat augmentée d'un quatrième chapitre traitant la construction et la fonctorialité des catégories motiviques introduites par Morel et Voevodsky.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Fabien Morel qui a dirigé cette thèse et qui m'a beaucoup appris sur les motifs, depuis leurs aspects les plus techniques jusqu'aux conjectures les plus inaccessibles.

Je remercie également Luc Illusie auprès duquel j'ai appris la cohomologie étale et le formalisme des cycles évanescents.

Pendant la préparation de ma thèse j'ai eu l'occasion d'échanger des idées avec beaucoup de mathématiciens : Yves André, Luca Barbieri Viale, Spencer Bloch, Frédéric Déglise, Denis-Charles Cisinski, Dennis Eriksson, Vladimir Guletski, Bruno Kahn, Bernhard Keller, Shun-Ichi Kimura, Bruno Klingler, Marc Levine, Carlo Mazza, Ania Otwinowska, Gereon Quick, Joël Riou, Markus Spitzweck, Alexandr Usnich, Claire Voisin. Je les remercie tous, ainsi que ceux que j'ai oublié de citer, pour ces échanges stimulants.

Je remercie également Jörg Wildeshaus et Jose Ignacio Burgos pour avoir organisé un groupe de travail au CRM sur une partie de ce travail. Leurs remarques ont contribué à la version actuelle du texte.

Je dédie ce travail à Andreea et mes parents Georges et Bouchra.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans ce travail, on étend au cadre motivique une grande partie du formalisme introduit par Grothendieck dans le cadre de la cohomologie étale. On trouvera par exemple la construction des quatre opérations associées à un morphisme quasi-projectif de schémas, les théorèmes de changement de base par un morphisme lisse et pour un morphisme propre, la dualité de Verdier et le formalisme des cycles évanescents. Le texte est divisé en deux volumes et chaque volume en deux chapitres. Chaque chapitre est précédé par une introduction détaillée qui, je l'espère, permettra aux lecteurs de localiser plus efficacement l'endroit des différents résultats.

Dans cette introduction générale, j'essaierai d'expliquer l'utilité de l'arsenal des résultats développés dans ce travail. J'ai à l'esprit au moins deux sortes d'applications :

A-Étude des motifs généraux par dévissage au cas de motifs plus simples. — Soit (P) une propriété des motifs que l'on cherche à établir. Une stratégie consiste à étudier les propriétés de permanence de (P) par rapport aux opérations de Grothendieck. Supposons par exemple que (P) est connue pour les motifs de Tate, qu'elle est préservée par les opérations f_* et qu'elle vérifie la propriété « 2 de 3 » dans les triangles distingués. On peut alors utiliser le théorème d'engendrement pour conclure (voir le deuxième chapitre). En effet, ce théorème affirme que les motifs sur un schéma X de type fini sur un corps k s'obtiennent par des colimites homotopiques à partir de certaines images directes de motifs de Tate.

Un autre exemple plus frappant concerne la conjecture de Schur-finitude qui prédit que tout motif est annulé par un foncteur de Schur convenable (variante triangulée de la conjecture de Kimura-O'Sullivan). Les résultats du troisième chapitre montrent que la propriété de Schur-finitude d'un motif est préservée par le foncteur « motifs proches ». D'autre part, Mazza et Guletski ont montré que la Schur-finitude possède la propriété de 2 sur 3 dans les triangles distingués. Ceci a permis de ramener la Schur-finitude pour les motifs généraux à la Schur-finitude des motifs des hypersurfaces lisses des espaces projectifs. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [Ayo07].

B-Construction de motifs et de classes de cohomologie motivique. Questions de rationalité. — Un des problèmes importants en géométrie algébrique est la construction d'extensions non-triviales de motifs, voire d'éléments intéressants dans

la cohomologie motivique d'une variété. L'exemple le plus connu est celui des polylogarithmes. L'approche classique consiste à construire une extension de structures de Hodge et un système compatible d'extensions de représentations galoisiennes ayant des « origines géométriques » communes. Parfois, il est possible de donner une construction uniforme de ces extensions en utilisant les opérations de Grothendieck pour les motifs. Le résultat est alors plus élégant, plus précis et plus satisfaisant. C'est effectivement le cas pour les polylogarithmes (voir [Ayo04] ainsi que la fin du troisième chapitre). Pour un autre exemple, le lecteur pourra consulter [Vol07], où l'auteur utilise le foncteur « motif proche » pour montrer qu'une certaine classe d'extensions de structures de Hodge $\alpha \in H_{Hdg}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) = \mathbb{C}^*$ provient d'une extension de motifs définie sur les corps des rationnels, déduisant ainsi que $\alpha \in \mathbb{Q}^*$.

D'une manière générale, le présent travail ramène en grande partie l'étude des motifs sur une base générale à l'étude des motifs sur un corps. Mais, contrairement à la situation en cohomologie étale ou en théorie de Hodge, les propriétés formelles de la catégorie des motifs sur un corps sont loin d'être comprises. Je pense notamment à l'existence d'un support abélien, *i.e.*, d'une t -structure motivique. Ceci restreint bien-entendu le champs des applications.

CHAPITRE 1

LES QUATRE OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK DANS UN CADRE MOTIVIQUE

Introduction. — En cohomologie étale, on sait associer à tout morphisme de schémas $f : X \longrightarrow Y$ (séparé et de type fini) quatre foncteurs :

$$Rf^*, Rf_*, Rf_!, Rf^!$$

reliant les deux catégories dérivées des faisceaux étales de Λ -modules $D(X, \Lambda)$ et $D(Y, \Lambda)$ (Λ étant un anneau commutatif fini). Ces quatre foncteurs forment ce qu'on appellera les 4 opérations de Grothendieck. Durant son *Motivic Homotopy Theory Program*, Vladimir Voevodsky a construit l'analogue des 4 opérations dans le cadre des catégories homotopiques stables des schémas. Malheureusement aucun texte décrivant cette construction n'est actuellement disponible, mis à part les notes de Pierre Deligne [Del01] où on trouve seulement quelques sorites généraux sur les adjonctions dans les 2-catégories ainsi que la définition d'un foncteur croisé et l'énoncé précis du théorème de Voevodsky. On propose dans ce premier chapitre une démonstration de ce théorème. Nous ignorons si la démarche que nous suivons est la même que celle suivie par Voevodsky. Notons quand même que nous construisons d'abord les foncteurs $f^!$ puis nous déduisons les foncteurs $f_!$ par adjonction alors que Voevodsky fait l'inverse (d'après une communication personnelle avec V. Voevodsky le 23 Avril 2003 à Paris). Mais il s'agit bien entendu d'une différence inessentielle ! Faisons maintenant un petit survol :

1- On commence le chapitre par une série de trois « préliminaires 2-catégoriques ». Le but de ces préliminaires est :

- d'une part, donner un langage souple pour énoncer les résultats intermédiaires aboutissant aux théorèmes principaux. Ce langage repose sur les notions de : 2-catégories, 2-foncteurs, adjonctions dans une 2-catégorie, adjonctions globales entre deux 2-foncteurs, structures d'échange sur un couple de 2-foncteurs et foncteurs croisés,
- d'autre part, démontrer tout ce qui est formellement démontrable afin d'alléger la démonstration proprement dite de notre théorème.

La première section et donc la première partie des préliminaires 2-catégoriques regroupe quelques sorites généraux sur les 2-catégories. La notion la plus importante est bien sûr celle de l'adjonction dans une 2-catégorie. Tous les résultats de cette section se trouvent dans [Del01].

2- Dans la deuxième section, on introduit la notion d'*échange* entre deux 2-foncteurs. Il s'agit là d'une notion qui sera utilisée constamment tout au long du texte. Supposons donnés deux 2-foncteurs (covariants pour simplifier) F et G d'une catégorie \mathcal{C} dans une 2-catégorie \mathfrak{D} , coïncidant sur les objets de \mathcal{C} . Fixons une classe \mathcal{E} de carrés de \mathcal{C} stable par compositions horizontales et verticales (exemple la classe des carrés commutatifs). Nous appellerons une structure d'échange sur le couple (F, G) la donnée pour tout carré de \mathcal{E} :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

d'un 2-morphisme : $F(f) \circ G(g') \longrightarrow G(g) \circ F(f')$ (par exemple). Ces 2-morphismes doivent vérifier deux conditions de compatibilités avec les compositions des carrés. En modifiant les variances des 2-foncteurs ainsi que le sens des 2-morphismes associés aux carrés de \mathcal{E} , on obtient 8 types de structures d'échange. L'exemple le plus connu de structure d'échange est peut-être celui donné par les morphismes de changement de base en cohomologie étale. On donne également deux méthodes de constructions de structures d'échange.

- Étant donné un échange sur (F, G) et, pour toute flèche g dans \mathcal{C} , un adjoint à $G(g)$ on peut une fois sur deux (selon le type des adjonctions et le type de l'échange) construire un échange sur $(F, {}^aG)$ (où aG est un 2-foncteur tel que pour tout g , ${}^aG(g)$ est un adjoint à $G(g)$).
- Étant donnés deux 2-foncteurs F et G et deux « échanges partiels » sur (F, G) , on donne des conditions suffisantes pour que ces échanges partiels proviennent d'un échange sur (F, G) . C'est le théorème de recollement des structures d'échange.

On définit ensuite ce qu'on entendra par foncteurs croisés. Notre définition est un peu plus générale que celle de Voevodsky. En gros, un foncteur croisé de \mathcal{C} vers \mathfrak{D} est la donnée de :

- quatre 2-foncteurs : $H^*, H_*, H_l, H^!$,
- quatre structures d'échange, une sur chaque couple : $(H^*, H^!)$, (H_*, H_l) , (H^*, H_l) , $(H_*, H^!)$. Les deux derniers échanges sont des isoéchanges.

Ces données vérifient un certain nombre de conditions assurant une forte stabilité de l'ensemble des quatre échanges par les constructions habituelles.

3- On termine les généralités avec un critère de prolongement de 2-foncteurs : On suppose donnés une catégorie \mathcal{C} , une 2-catégorie \mathfrak{D} et deux 2-foncteurs H_1 et H_2 définis

sur deux sous-catégories \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de \mathcal{C} . On donne des conditions suffisantes pour que les deux 2-foncteurs H_1 et H_2 proviennent d'un 2-foncteur H défini sur \mathcal{C} toute entière. La condition la plus importante est sans doute l'existence d'une structure d'échange sur (H_2, H_1) pour la classe des carrés commutatifs.

Ce théorème sera appliqué dans la sixième section pour construire le 2-foncteur $H^!$: La catégorie des S -schémas quasi-projectifs (Sch/S) jouera le rôle de \mathcal{C} . On prendra $\mathcal{C}_1 = (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}}$ (la catégorie des S -schémas quasi-projectifs avec seulement les immersions fermées comme morphismes), et $\mathcal{C}_2 = (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$ (la catégorie des S -schémas quasi-projectifs avec seulement les S -morphisms lisses comme morphismes). Dans la quatrième section on verra la définition de H_1 qu'on notera ${}^{\text{Imm}}H^!$. À la fin de la cinquième section on verra la construction de H_2 qu'on notera ${}^{\text{Liss}}H^!$. Enfin une bonne partie de la section six sera consacrée à la vérification des conditions d'application du théorème 1.3.1 plus précisément à la construction d'une structure d'échange sur le couple $({}^{\text{Liss}}H^!, {}^{\text{Imm}}H^!)$ pour la classe des carrés commutatifs.

4- Dans la section quatre, on commence par fixer les ingrédients élémentaires à partir desquels le 2-foncteur $H^!$ sera construit et on donne également les six axiomes que doit vérifier un 2-foncteur homotopique stable. Les ingrédients élémentaires sont peu nombreux, il s'agit de :

- Trois 2-foncteurs : H^* , H_* et ${}^{\text{Liss}}H_{\#}$ de but la 2-catégorie des catégories triangulées. Les deux premiers étant définis sur (Sch/S) , alors que le dernier est défini seulement sur $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$.
- Pour tout S -morphisme f , d'une structure d'adjonction entre $f^* = H^*(f)$ et $f_* = H_*(f)$, et lorsque f est lisse d'une structure d'adjonction entre $f_{\#} = H_{\#}(f)$ et f^* .

Les axiomes qui doivent être vérifiés sont assez naturels et sont vrais dans le cas étale ainsi que dans le cas des théories homotopiques stables des schémas. Notons que parmi ces axiomes on trouve :

- L'axiome de la localité qui affirme que pour un couple d'immersions complémentaires (i, j) (avec i fermée et j ouverte) le couple de 1-morphisme $(i^*, j_{\#})$ est conservatif.
- L'axiome de stabilité qui affirme que le 1-morphisme $p_{\#}s_*$ est une équivalence lorsque p est la projection de la droite affine sur un S -schéma X et s la section nulle.
- L'axiome d'homotopie qui affirme que le 2-morphisme (d'unité de l'adjonction) $\text{id} \longrightarrow p_*p^*$ est un 2-isomorphisme lorsque p est la projection de la droite affine.

On trouvera sous forme de scholie l'énoncé précis du théorème qu'on veut démontrer. Tout de suite après on établit plusieurs résultats faciles conséquences directes des axiomes. On mettra en évidence quelques structures d'échange et on construit les foncteurs $i^!$ pour i une immersion fermée. Ces derniers s'organisent en un 2-foncteur

$\mathrm{Imm}\mathbf{H}^!$. On montrera également que le 1-morphisme $i^!$ est adjoint à droite de i_* . Dans cette section, on n'utilisera jamais les axiomes de stabilité ni d'homotopie. Par contre, l'axiome de localité sera utilisé (notamment pour définir les $i^!$).

5- Dans la section cinq, on étudie les conséquences de l'axiome de stabilité. On construit ce qu'on appellera l'équivalence de Thom $\mathrm{Th}(E)$ associée à un fibré E . Dans le cas de la catégorie homotopique stable $\mathbf{SH}(X)$, l'équivalence de Thom $\mathrm{Th}(E)$ est simplement le foncteur « smash-produit » par l'espace de Thom associé à E . On établit ensuite quelques propriétés de cohérence pour les équivalences de Thom, notamment l'associativité. On définit ensuite pour tout S -morphisme lisse f , un 1-morphisme $f^!$ en posant :

$$f^! = \mathrm{Th}(\Omega_f) \circ f^*$$

avec Ω_f le module (localement libre) des différentielles relatives (à f). On vérifie ensuite (en utilisant les propriétés de cohérence des équivalences de Thom) que les 1-morphismes $f^!$ s'organisent naturellement en un 2-foncteur :

$${}^{\mathrm{Liss}}\mathbf{H}^! : (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{I}\mathfrak{R}$$

On termine la section par la construction de quelques structures d'échange.

6- La section six est sans aucun doute la section la plus pénible et la plus technique. On commence par la construction du 2-isomorphisme de pureté associé à ce qu'on appelle classiquement un couple lisse. Étant donné un diagramme commutatif de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

(avec s une immersion fermée et f et g des morphismes lisses), on construit un 2-isomorphisme :

$$s^! f^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) g^*$$

avec \mathcal{N} le \mathcal{O}_Y -module (localement libre) normal à l'immersion s . L'outil géométrique qui permet cette construction est l'espace de déformation au cône normal associé à l'immersion s . L'axiome d'homotopie intervient dans la construction du 2-isomorphisme de pureté d'une façon cruciale mais un peu cachée.

On passe ensuite à l'étude du 2-isomorphisme de pureté. On démontre assez facilement tous les résultats de compatibilité que l'on peut espérer pour ce 2-isomorphisme sauf sa compatibilité avec la composition des immersions fermées. Cette dernière propriété demandera beaucoup plus de travail et sera traitée dans une sous-section à part.

Une fois toutes les compatibilités établies, on passe à la définition de l'isoéchange sur $({}^{\mathrm{Liss}}\mathbf{H}^!, \mathrm{Imm}\mathbf{H}^!)$. La définition du 2-morphisme structural de cet échange repose

essentiellement sur le 2-isomorphisme de pureté. Pour vérifier que l'on a bien défini une structure d'échange on utilisera toutes les compatibilités établies pour les 2-isomorphismes de pureté.

À la fin de la section six, on appliquera le théorème 1.3.1 qui nous donne le 2-foncteur $H^!$, puis la proposition 1.2.7 qui nous permettra de construire un échange sur $(H^*, H^!)$. Ce dernier (par un argument général) produit un foncteur croisé sur (Sch/S) :

$$(H^*, H_*, H_!, H^!)$$

C'est le foncteur croisé recherché !

7- La septième section est sans doute la plus intéressante. On n'utilisera de ce qui précède que l'existence du foncteur croisé. Cette partie peut être lue indépendamment du reste. On utilisera à plusieurs reprises l'axiome d'homotopie.

On commence par définir pour tout S -morphisme quasi-projectif f un 2-morphisme :

$$\alpha_f : f_! \longrightarrow f_*$$

On établit ensuite quelques propriétés de cohérence pour ces 2-morphismes. On montrera en particulier que ces 2-morphismes définissent un morphisme de 2-foncteurs (dans le sens évident du terme).

On démontre ensuite que lorsque le S -morphisme f est projectif, le 2-morphisme α_f est un 2-isomorphisme. Ce résultat donne en particulier le théorème de changement de base pour un morphisme projectif. Nous ignorons si ce théorème peut être démontré directement dans le cas des catégories homotopiques stables des schémas.

Prérequis. — Ce chapitre est à quelques exceptions près « self-contained ». Pour ce qui est des trois premières sections, on supposera que le lecteur est familier avec les notions élémentaires de catégories. On conseille vivement les lecteurs qui connaissent peu les 2-catégories et les 2-foncteurs de lire les notes de Delignes [Del01]. Pour ce qui est des quatre dernières sections, on supposera que le lecteur est familier avec le langage des schémas comme dans [GD60] ou dans [Har77], et qu'il connaît la construction de l'espace de déformation au cône normal associé à une immersion fermée (voir le chapitre 5 de [Ful84]). Aucune propriété non élémentaire des schémas ne sera utilisée.

Enfin, bien que non nécessaire, une familiarité avec le formalisme des six opérations de Grothendieck dans le cas de la cohomologie ℓ -adique sera d'un grand secours pour la compréhension de ce texte. Notons également que le cas ℓ -adique fournit une motivation pour ce travail : la spécialisation des résultats prouvés ici au cas des catégories dérivées $D(X, \Lambda)$ des catégories abéliennes des faisceaux de Λ -modules (avec Λ un anneau fini) sur X_{et} , pourra fournir des simplifications notables dans l'établissement des théorèmes fondamentaux de [AGV73].

1.1. Préliminaires 2-catégoriques I : Adjonctions et équivalences dans une 2-catégorie

Dans ce travail, on ne considère que des 2-catégories au sens strict. Par contre on utilisera la notion de 2-foncteurs au sens faible. Pour plus de détails, le lecteur est prié de se référer à [Del01].

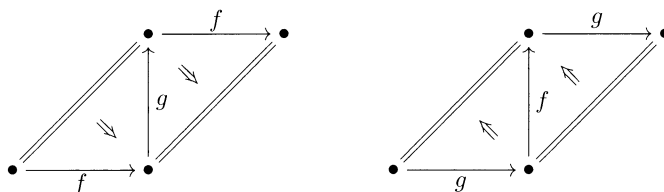
1.1.1. Adjonctions dans une 2-catégorie. — Soit \mathfrak{D} une 2-catégorie. On peut définir dans \mathfrak{D} une notion d'adjonction pour les 1-morphismes généralisant la notion d'adjonction habituelle pour les foncteurs dans la 2-catégorie des petites catégories \mathfrak{Cat} (voir [Mac71]).

Définition 1.1.1. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ un 1-morphisme de \mathfrak{D} . Un adjoint à droite de f est la donnée de :

1. un 1-morphisme $g : Y \longrightarrow X$,
2. deux 2-morphismes :

$$1 \xrightarrow{\eta} g \circ f \quad \text{et} \quad f \circ g \xrightarrow{\delta} 1$$

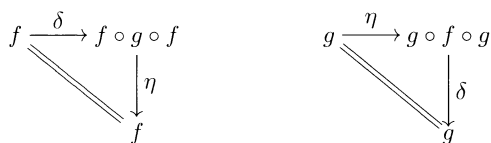
tels que la composée de chacun des deux diagrammes planaires :



soit l'identité.

Les deux 2-morphismes η et δ sont appelés respectivement l'unité et la counité de l'adjonction. Parfois, on ne mentionnera pas les 2-morphismes η et δ : nous dirons simplement « g est un adjoint à droite de f » ou « f est un adjoint à gauche de g ».

Remarque 1.1.2. — La condition imposée sur η et δ dans la définition ci-dessus n'est autre que la commutation des triangles (habituels) :



Remarque 1.1.3. — La dualité des 2-catégories échange la notion d'adjonction à droite et d'adjonction à gauche. Plus précisément les assertions ci-dessous sont équivalentes :

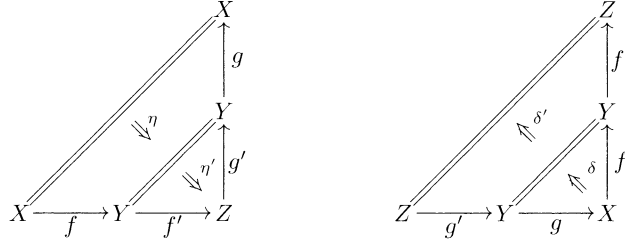
- f est un adjoint à gauche de g dans \mathfrak{D} ,
- f est un adjoint à droite de g dans $\mathfrak{D}^{1\text{-op}}$,
- f est un adjoint à droite de g dans $\mathfrak{D}^{2\text{-opp}}$,
- f est un adjoint à gauche de g dans $\mathfrak{D}^{1,2\text{-op}}$,
- g est un adjoint à droite de f dans \mathfrak{D} , etc.

Le lemme qui suit est un exercice facile laissé aux lecteurs :

Lemme 1.1.4. — *Soit une suite de 1-morphismes :*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Dans une 2-catégorie \mathfrak{D} . On suppose donné un adjoint à droite (g, η, δ) (resp. (g', η', δ')) de f (resp. f'). Alors le 1-morphisme $g \circ g'$ est un adjoint à droite de $f' \circ f$. De plus, l'unité et la counité sont données respectivement par les composées des diagrammes planaires :



Proposition 1.1.5. — *Soient \mathfrak{D} une 2-catégorie et X et Y deux objets de \mathfrak{D} . Soient f et f' deux 1-morphismes et α un 2-morphisme de \mathfrak{D} :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \Downarrow \alpha & \\ X & \xrightarrow{f'} & Y \end{array}$$

On suppose donnés des adjoints à droite (g, η, δ) et (g', η', δ') de f et f' respectivement. Il existe alors un unique 2-morphisme :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \beta \Uparrow & \\ Y & \xrightarrow{g'} & X \end{array}$$

rendant commutatif le diagramme de 2-morphismes :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & g \circ f & \\ \eta \nearrow & & \searrow \alpha \\ 1 & & g \circ f' \\ \eta' \searrow & & \nearrow \beta \\ & g' \circ f' & \end{array}$$

De plus, le 2-morphisme β est donné par la composée :

$$g' \xrightarrow{\eta} g \circ f \circ g' \xrightarrow{\alpha} g \circ f' \circ g' \xrightarrow{\delta'} g$$

et rend le diagramme de 2-morphismes :

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} & & f \circ g & & \\ & \nearrow \beta & & \searrow \delta & \\ f \circ g' & & & & 1 \\ & \searrow \alpha & & \nearrow \delta' & \\ & & f' \circ g' & & \end{array}$$

également commutatif.

Démonstration. — La proposition en question est un cas particulier de la proposition 1.1.9. On a préféré l'inclure ici pour pouvoir prouver l'unicité de l'adjoint dès le début. Le lecteur pourra donc ignorer la preuve de ce lemme.

On commence par prouver l'unicité. Soit β comme dans l'énoncé. Le diagramme commutatif de 2-morphisme donne par composition à gauche par g' le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & g \circ f \circ g' & \\ \eta \nearrow & & \searrow \alpha \\ g' & & g \circ f' \circ g' \\ \eta' \searrow & & \nearrow \beta \\ & g' \circ f' \circ g' & \end{array}$$

Ce carré s'insère dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & g \circ f \circ g' & & & & \\ & \nearrow \eta & & \searrow \alpha & & & \\ g' & & & & g \circ f' \circ g' & \xrightarrow{\delta'} & g \\ & \searrow \eta' & & \nearrow \beta & & \nearrow \beta & \\ & & g' \circ f' \circ g' & \xrightarrow{\delta'} & g' & & \end{array}$$

Mais la composée des flèches situées sur la partie inférieure du bord de ce diagramme vaut β . On voit donc que β est égal à la composée :

$$g' \xrightarrow{\eta} g \circ f \circ g' \xrightarrow{\alpha} g \circ f' \circ g' \xrightarrow{\delta'} g$$

Ceci prouve l'unicité de β et fournit un candidat. Il reste alors à prouver que ce candidat est le bon. Pour cela il faut calculer la composée :

$$1 \xrightarrow{\eta'} g' \circ f' \xrightarrow{\beta} g \circ f'$$

Par définition cette composée est égale à la composée suivante :

$$1 \xrightarrow{\eta'} g' \circ f' \xrightarrow{\eta} g \circ f \circ g' \circ f' \xrightarrow{\alpha} g \circ f' \circ g' \circ f' \xrightarrow{\delta'} g \circ f'$$

Mais on dispose d'un carré commutatif évident :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\eta} & g \circ f \\ \eta' \downarrow & & \downarrow \eta' \\ g' \circ f' & \xrightarrow{\eta} & g \circ f \circ g' \circ f' \end{array}$$

Notre composée est donc égale à la composée suivante :

$$1 \xrightarrow{\eta} g \circ f \xrightarrow{\eta'} g \circ f \circ g' \circ f' \xrightarrow{\alpha} g \circ f' \circ g' \circ f' \xrightarrow{\delta'} g \circ f'$$

Mais on a encore un carré commutatif évident :

$$\begin{array}{ccc} g \circ f & \xrightarrow{\eta'} & g \circ f \circ g' \circ f' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ g \circ f' & \xrightarrow{\eta'} & g \circ f' \circ g' \circ f' \end{array}$$

Notre composée est donc égale à la composée suivante :

$$1 \xrightarrow{\eta} g \circ f \xrightarrow{\alpha} g \circ f' \xrightarrow{\eta'} g \circ f' \circ g' \circ f' \xrightarrow{\delta'} g \circ f'$$

Finalement on remarque que la composée des deux dernières flèches de la suite précédente est l'identité par la définition des adjonctions. On obtient en fin de compte la composée :

$$1 \xrightarrow{\eta} g \circ f \xrightarrow{\alpha} g \circ f'$$

On a ainsi prouvé que notre candidat rend le diagramme (1) commutatif. Pour la dernière assertion on utilise un argument de dualité. En effet, la formule donnant β est inchangée par la 2-dualité des 2-catégories. \square

Le morphisme β sera noté ${}^a\alpha$. On a le lemme :

Lemme 1.1.6. — Soient f, f' et f'' dans $\text{Mor}_{\mathfrak{D}}(X, Y)$ (la catégorie des 1-morphismes de X vers Y) et g, g' et g'' des adjoints à droite respectifs. Soient aussi $\alpha : f \longrightarrow f'$ et $\alpha' : f' \longrightarrow f''$ des 2-morphismes. On a la formule :

$${}^a(\alpha' \circ \alpha) = ({}^a\alpha) \circ ({}^a\alpha')$$

Démonstration. — On note $\beta = {}^a\alpha$ et $\beta' = {}^a\alpha'$. Il suffit de montrer la commutativité du carré suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & g \circ f & \\
 \eta \nearrow & & \searrow \alpha' \circ \alpha \\
 1 & & g \circ f'' \\
 \eta'' \searrow & & \nearrow \beta \circ \beta' \\
 & g'' \circ f'' &
 \end{array}$$

où η'' est l'unité de l'adjonction entre f'' et g'' . Pour cela on factorise ce carré de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g \circ f & & \\
 & \eta \nearrow & & \searrow \alpha & \\
 & 1 & & g \circ f' & \\
 & \eta' \nearrow & & \searrow \alpha' & \\
 & g' \circ f' & & g \circ f'' & \\
 & \eta'' \nearrow & & \searrow \beta & \\
 & g' \circ f'' & & g'' \circ f'' & \\
 & \eta'' \nearrow & & \searrow \beta' & \\
 & g'' \circ f'' & & g'' \circ f'' &
 \end{array}$$

Tous les sous-carrés de ce diagrammes sont commutatifs. Ceci prouve le lemme. \square

Voici deux corollaires de ce qui précède :

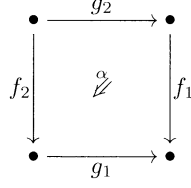
Corollaire 1.1.7 (Unicité de l'adjoint). — Soit $f : X \longrightarrow Y$ un 1-morphisme dans une 2-catégorie \mathfrak{D} . Soient (g, η, δ) et (g', η', δ') deux adjoints à droite de f . Il existe alors un unique 2-isomorphisme $u : g \longrightarrow g'$ échangeant η et η' . Ce même 2-isomorphisme est l'unique 2-isomorphisme échangeant δ et δ' .

Démonstration. — On applique la proposition 1.1.5 à $\alpha = \text{Id} : f \longleftarrow f$. On utilise le lemme 1.1.6 pour prouver que u est un isomorphisme. \square

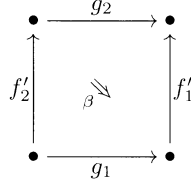
Corollaire 1.1.8. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ un 1-morphisme dans une 2-catégorie \mathfrak{D} . On suppose que f admet des adjoints à droites. Alors un adjoint à droite (g, η, δ) de f est complètement déterminé par g et η .

1.1.2. Adjonctions et les faces carrées. — On a la proposition suivante qui généralise la proposition 1.1.5.

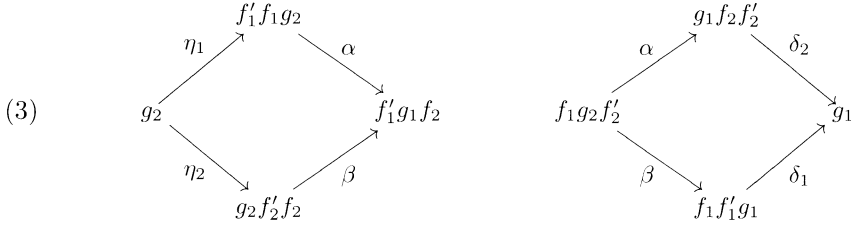
Proposition 1.1.9. — Supposons donnés un 2-morphisme dans une 2-catégorie \mathfrak{D} :



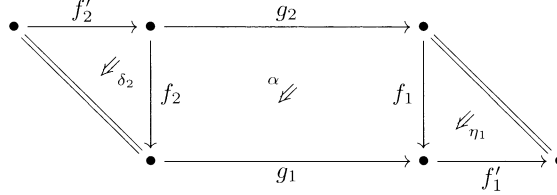
et des adjoints à droite (f'_1, η_1, δ_1) et (f'_2, η_2, δ_2) à f_1 et f_2 respectivement. Il existe alors un unique 2-morphisme :



rendant commutatif l'un des deux diagrammes suivants :

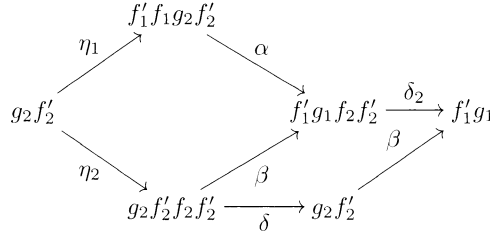


De plus ce 2-morphisme β est donné par la composée du diagramme planaire :



et rend les deux diagrammes (3) commutatifs.

Démonstration. — On commence par prouver l'unicité de β . Il suffit par 2-dualité de le faire dans le cas où le premier carré de 2-morphismes est commutatif. Pour cela on procède comme dans 1.1.5 et on forme le diagramme commutatif de 2-morphismes :



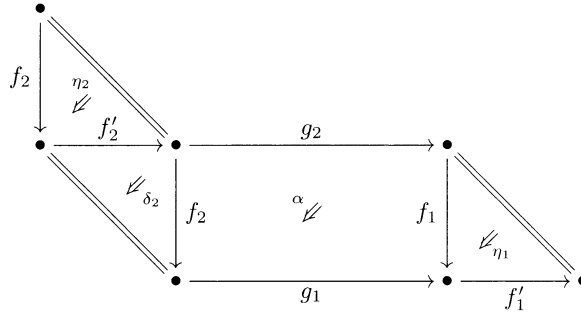
Étant donné que la composée $\delta_2 \circ \eta_2$ est l'identité on voit que β est forcément égale à la composée :

$$g_2 f'_2 \xrightarrow{\eta_1} f'_1 f_1 g_2 f'_2 \xrightarrow{\alpha} f'_1 g_1 f_2 f'_2 \xrightarrow{\delta_2} f'_1 g_1$$

Il reste donc à prouver que ce candidat (qu'on appellera β_0) convient. Explicitons la composée :

$$g_2 \longrightarrow g_2 f'_2 f_2 \xrightarrow{\beta_0} f'_1 g_1 f_2$$

en langage de diagramme planaire. On obtient :

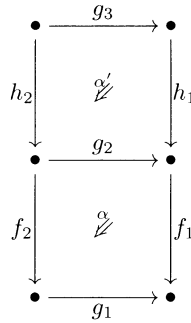


En utilisant alors la relation $\delta_2 \circ \alpha_2 = \text{id}_{f_2}$ on obtient ce qu'on cherche. \square

Définition 1.1.10. — Faute d'une meilleure terminologie, nous dirons que β est obtenu de α par adjonction suivant (f_1, f'_1) et (f_2, f'_2) .

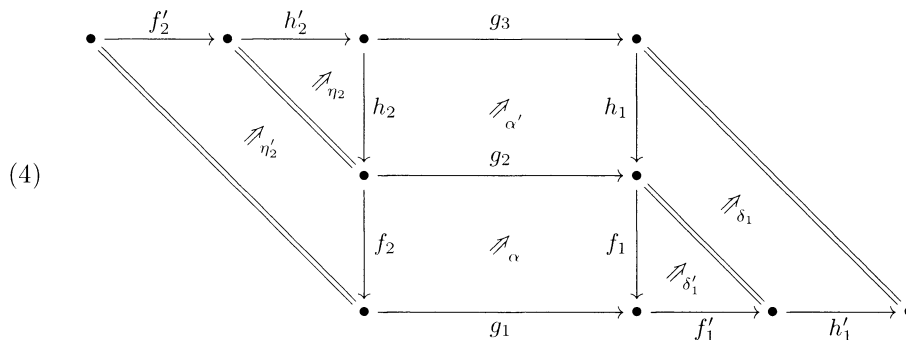
Proposition 1.1.11 (Compatibilité avec les compositions verticales)

Supposons donnés dans une 2-catégorie \mathfrak{D} un diagramme planaire :

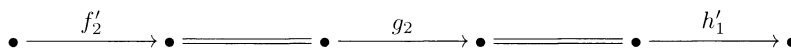


et des adjoints à **droite** (f'_1, η_1, δ_1) , (f'_2, η_2, δ_2) , $(h'_1, \eta'_1, \delta'_1)$ et $(h'_2, \eta'_2, \delta'_2)$ de f_1 , f_2 , h_1 et h_2 respectivement. On note β et β' les 2-morphismes obtenus à partir de α et α' à l'aide des adjonctions précédentes. On munit $f'_1 \circ h'_1$ et $f'_2 \circ h'_2$ des structures d'adjoints à droite de $f_1 \circ h_1$ et $f_2 \circ h_2$. Alors le 2-morphisme $\beta' \circ \beta$ est le 2-morphisme obtenu par adjonction de $\alpha \circ \alpha'$.

Démonstration. — Le 2-morphisme obtenu de $\alpha \circ \alpha'$ par adjonction est par définition la composée du diagramme planaire :



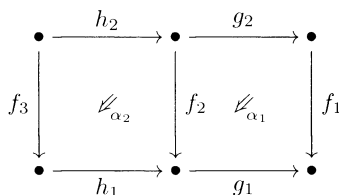
En découpant suivant la ligne brisée :



on voit que la composée du diagramme planaire (4) n'est autre que $\beta' \circ \beta$. \square

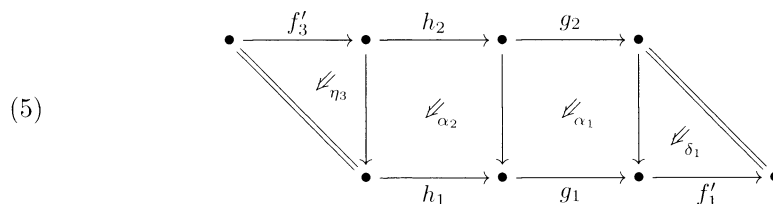
Proposition 1.1.12 (Compatibilité avec les compositions horizontales)

Supposons donnés dans une 2-catégorie \mathfrak{D} un diagramme planaire :



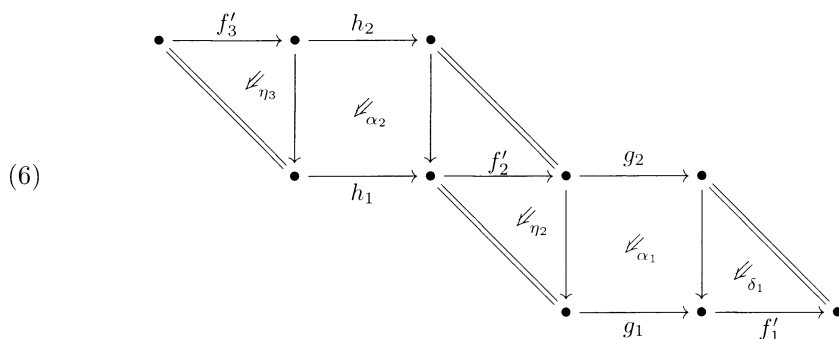
et des adjoints à **droite** (f'_1, η_1, δ_1) , (f'_2, η_2, δ_2) et (f'_3, η_3, δ_3) à f_1 , f_2 et f_3 . On note β_1 et β_2 les 2-morphismes obtenus de α_1 et α_2 par adjonction. Alors $\beta_1 \circ \beta_2$ est le 2-morphisme obtenu de $\alpha_2 \circ \alpha_1$ par les adjonctions (f_1, f'_1) et (f_3, f'_3) .

Démonstration. — Le 2-morphisme obtenu de $\alpha_2 \circ \alpha_1$ par adjonction est par définition la composée du diagramme planaire :



Les 1-morphismes verticaux étant de gauche à droite : f_3 , f_2 et f_1 . En insérant dans (5) au niveau de f_2 le diagramme planaire exprimant que f'_2 est adjoint à gauche de f_2

(et dont la composée vaut id_{f_2}) on voit que notre 2-morphisme est égal à la composée du diagramme planaire :

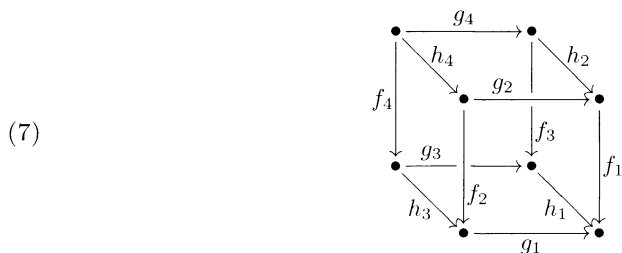


En découpant suivant la ligne du milieu on voit que la composée du diagramme planaire (6) n'est autre que $\beta_1 \circ \beta_2$. La proposition est prouvée. \square

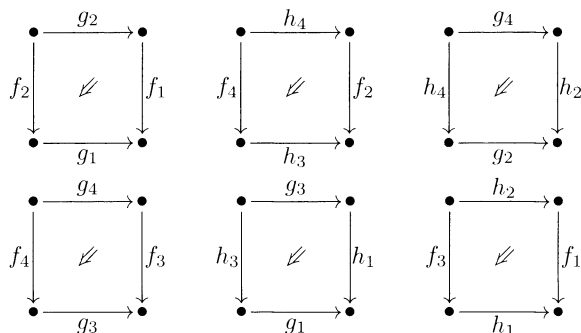
Remarque 1.1.13. — Par dualité il est possible d'obtenir plusieurs variantes des propositions 1.1.9, 1.1.11 et 1.1.12.

On a le corollaire intéressant de la proposition 1.1.12 :

Corollaire 1.1.14. — Supposons donné dans une 2-catégorie \mathfrak{D} un cube solide commutatif :



formé des six faces carrées :



On suppose donnés des adjoints à droites (f'_i, η_i, δ_i) à f_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Le cube solide :

$$(8) \quad \begin{array}{ccccc} & & g_4 & & \\ & \nearrow h_4 & & \nwarrow h_2 & \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & \nwarrow f'_4 & g_2 & \nearrow f'_3 & \\ & \bullet & & \bullet & \\ & \nearrow g_3 & & \nwarrow f'_2 & \\ & \bullet & & \bullet & \\ & \nwarrow h_3 & & \nearrow h_1 & \\ & & g_1 & & \end{array}$$

obtenu en appliquant la proposition 1.1.9 est commutatif.

Notons également les deux lemmes simples ci-dessous dont la preuve est laissée en exercice :

Lemme 1.1.15. — Supposons donnés dans une 2-catégorie \mathfrak{D} un 2-morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g_2} & \bullet \\ f_2 \downarrow & \alpha \Downarrow & \downarrow f_1 \\ \bullet & \xrightarrow{g_1} & \bullet \end{array}$$

et des adjoints à droites (f'_1, η_1, δ_1) , (f'_2, η_2, δ_2) , $(g'_1, \eta'_1, \delta'_1)$ et $(g'_2, \eta'_2, \delta'_2)$ de f_1 , f_2 , g_1 et g_2 . On muni $g'_2 \circ f'_1$ et $f'_2 \circ g'_1$ des structures d'adjoint à droites de $f_1 \circ g_2$ et $g_1 \circ f_2$ comme dans 1.1.9. On peut alors construire deux 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{g'_2} & \bullet \\ f'_2 \uparrow & \beta_1 \Downarrow & \uparrow f'_1 \\ \bullet & \xleftarrow{g'_1} & \bullet \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{g'_2} & \bullet \\ f'_2 \uparrow & \beta_2 \Downarrow & \uparrow f'_1 \\ \bullet & \xleftarrow{g'_1} & \bullet \end{array}$$

de la manière suivante.

- En prenant $\beta_1 = {}^a\alpha$.
- En formant le 2-morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g_2} & \bullet \\ f'_2 \uparrow & \Downarrow & \uparrow f'_1 \\ \bullet & \xrightarrow{g_1} & \bullet \end{array}$$

et en appliquant à nouveau la proposition 1.1.9 à ce 2-morphisme avec les adjonction (g_1, g'_1) et (g_2, g'_2) pour obtenir :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{g'_2} & \bullet \\ f'_2 \uparrow & \beta_2 \nearrow & \uparrow f'_1 \\ \bullet & \xleftarrow{g'_1} & \bullet \end{array}$$

Les deux 2-morphismes β_1 et β_2 sont alors égaux.

Lemme 1.1.16. — Supposons donnés dans une 2-catégorie \mathfrak{D} un 2-morphisme :

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g_2} & \bullet \\ f_2 \downarrow & \alpha \searrow & \downarrow f_1 \\ \bullet & \xrightarrow{g_1} & \bullet \end{array}$$

et des adjoints à droites (f'_1, η_1, δ_1) et (f'_2, η_2, δ_2) de f_1 et f_2 . Notons β le 2-morphisme obtenu de α par les adjonctions (f'_1, f_1) et (f'_2, f_2) . Notons de même α' le 2-morphisme obtenu de β par les même adjonctions. Alors $\alpha = \alpha'$.

1.1.3. Applications aux 2-foncteurs. — Cette sous-section est consacrée aux applications de ce qui précède aux 2-foncteurs. L'essentiel est résumé dans la proposition suivante :

Proposition 1.1.17. — Soient \mathcal{C} une catégorie et \mathfrak{D} une 2-catégorie. Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ un 2-foncteur covariant. On suppose que pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de \mathcal{C} , le 1-morphisme :

$$F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$$

admet un adjoint à droite. Il existe alors :

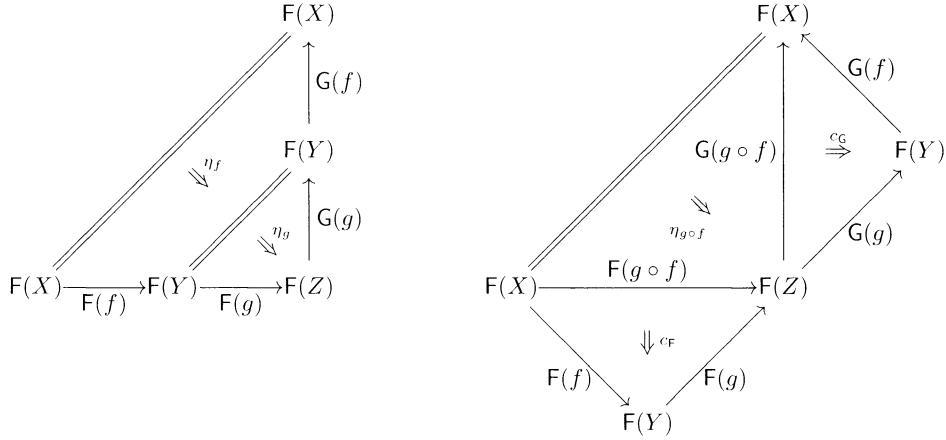
1. un 2-foncteur contravariant $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$,
2. un couple de 2-morphismes (η_f, δ_f) pour chaque flèche f de \mathcal{C} ,

tels que :

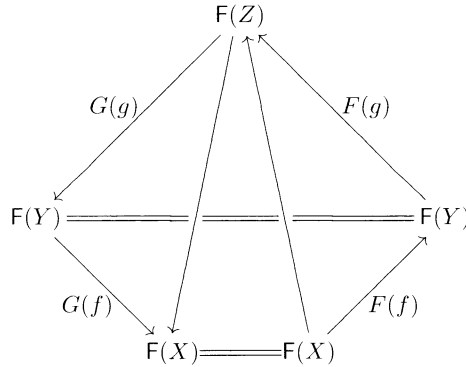
- pour tout objet X de \mathcal{C} , $F(X) = G(X)$,
- pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$, le triplet $(G(f), \eta_f, \delta_f)$ définit un adjoint à droite à $F(f)$,
- Pour toute suite de flèches composables de \mathcal{C} :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

la composition des deux diagrammes planaires ci-dessous donne le même 2-morphisme :



où c_F et c_G sont les 2-isomorphismes de connexion pour F et G respectivement. Cette condition s'exprime également par la commutation de diagramme solide :



De plus, ces données sont uniques à un isomorphisme unique près. On a également les conditions analogues pour les 2-morphismes de counités (δ_\bullet) .

Démonstration. — On commence par construire le triplet $(G, \eta_\bullet, \delta_\bullet)$. On demandera bien sûr que $G(X) = F(X)$ pour tout objet X de \mathcal{C} . Pour chaque flèche $f : X \longrightarrow Y$ de \mathcal{C} , on fixe un adjoint à droite :

$$G(f) : F(Y) \longrightarrow F(X)$$

On notera η_f et δ_f l'unité et la counité de l'adjonction. On va définir une structure de 2-foncteur sur G . C'est-à-dire qu'on va construire les 2-isomorphismes de connexion c_G .

Soit une suite de flèches dans \mathcal{C} :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Le 1-morphisme $G(g \circ f)$ est adjoint à droite de $F(g \circ f)$. D'autre part, le lemme 1.1.4 nous dit que $G(f) \circ G(g)$ est adjoint à droite de $F(g) \circ F(f)$. On applique alors la proposition 1.1.5 au 2-isomorphisme de connexion :

$$c_F(f, g) : F(g \circ f) \xrightarrow{\sim} F(g) \circ F(f)$$

on obtient alors un 2-morphisme :

$${}^a c_F(f, g) : G(f) \circ G(g) \longrightarrow G(g \circ f)$$

Ce 2-morphisme est inversible par 1.1.6. On pose $c_G(f, g) = ({}^a c_F(f, g))^{-1}$. Muni de ces 2-isomorphismes, G devient un 2-foncteur contravariant. En effet la relation de cocycle pour les c_G découle de 1.1.6 et de la relation de cocycle pour c_F . Finalement la commutation du diagramme solide n'est autre que la commutation du carré de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccccc} & & G(g \circ f) \circ F(g \circ f) & & \\ & \nearrow \eta_{g \circ f} & & \searrow c_F(f, g) & \\ 1 & & & & G(g \circ f) \circ F(f) \circ F(g) \\ & \searrow \eta_g \circ \eta_f & & \nearrow c_G(f, g)^{-1} & \\ & & G(f) \circ G(g) \circ F(g) \circ F(f) & & \end{array}$$

qui est donné toujours par la proposition 1.1.5. On laisse l'unicité comme exercice pour les lecteurs. \square

Définition 1.1.18. — *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on dira que le 2-foncteur G muni des 2-morphismes η_\bullet et δ_\bullet est un adjoint à droite global du 2-foncteur F .*

1.1.4. Une règle de calcul. — Cette sous-section est basée sur le résultat simple suivant :

Lemme 1.1.19. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un 1-morphisme dans une 2-catégorie \mathfrak{D} . On suppose donné (g, η, δ) un adjoint à droite de f . Soit Z un objet de \mathfrak{D} .*

1. Les deux foncteurs :

$$f \circ : \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, X) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, Y) \quad g \circ : \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, Y) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, X)$$

forment un couple de foncteurs adjoints : $g \circ$ est adjoint à droite de $f \circ$.

2. Les deux foncteurs :

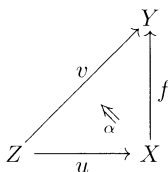
$$\circ g : \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(X, Z) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Y, Z) \quad \circ f : \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(X, Z)$$

forment un couple de foncteurs adjoints : $\circ f$ est adjoint à droite de $\circ g$.

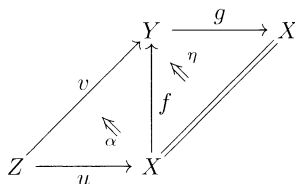
La description classique d'une adjonction nous dit alors qu'il existe une bijection :

$$\mathrm{hom}_{\mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z,X)}(f \circ v, u) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z,Y)}(v, g \circ u)$$

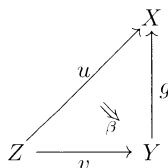
fonctorielle en $u \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, X))$ et $v \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(Z, Y))$ qui envoie un 2-morphisme $\alpha : f \circ v \longrightarrow u$:



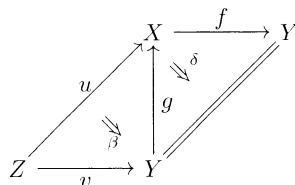
sur la composée du diagramme planaire :



La bijection inverse envoie un 2-morphisme $\beta : u \longrightarrow g \circ v$:



sur la composée du diagramme planaire :



Ceci nous permet d'énoncer la règle suivante :

Règle. — Soient \mathfrak{D} une 2-catégorie et supposons données deux suites de 1-morphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f_1} & \bullet & \xrightarrow{f_2} & \bullet & \dots & \bullet \xrightarrow{f_k} Y \\ X & \xrightarrow{g_1} & \bullet & \xrightarrow{g_2} & \bullet & \dots & \bullet \xrightarrow{g_l} Y \end{array}$$

Supposons que les f_i et le g_j admettent des adjoints à droites ${}^d f_i$ et ${}^d g_j$ respectivement. Se donner un 2-morphisme :

$$f_k \circ \cdots \circ f_1 \longrightarrow g_l \circ \cdots \circ g_1$$

équivaut à se donner un 2-morphisme :

$$f_i \circ \cdots \circ f_1 \circ {}^d g_1 \circ \cdots \circ {}^d g_{j-1} \longrightarrow {}^d f_{i+1} \circ \cdots \circ {}^d f_k \circ g_l \circ \cdots \circ g_j$$

pour n'importe quel i et j .

Comme illustration de ce principe on peut remarquer que le 2-morphisme β de la proposition 1.1.5 provient de cette construction. En effet, se donner $\beta : g' \longrightarrow g$ équivaut à se donner un 2-morphisme $f \circ g' \longrightarrow 1$ et donc aussi à se donner un 2-morphisme $f \longrightarrow f'$.

1.1.5. Équivalences dans une 2-catégorie

Définition 1.1.20. — Soient \mathfrak{D} une 2-catégorie et $f : X \longrightarrow Y$ un 1-morphisme de \mathfrak{D} . On dit que f est une équivalence s'il existe un adjoint à droite (g, η, δ) de f avec η et δ des 2-isomorphismes. Dans ce cas, $(g, \delta^{-1}, \eta^{-1})$ est un adjoint à gauche de f et on dira que g est un quasi-inverse à f .

Les deux résultats simples suivants seront donnés sans démonstration :

Lemme 1.1.21. — Soit un diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{e'} & \bullet \\ f' \downarrow & \alpha & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{e} & \bullet \end{array}$$

dans une 2-catégorie \mathfrak{D} . On suppose que e et e' sont des équivalences et on fixe e^{-1} et e'^{-1} des quasi-inverses à e et e' respectivement. On suppose également donnés des adjoints à droite g et g' pour f et f' respectivement. On considère les deux constructions suivantes.

1. De $\alpha : f \circ e' \longrightarrow e \circ f'$ on déduit par la règle de la sous-section 1.1.4 le 2-morphisme : $e' \circ g' \longrightarrow g \circ e$.
2. On prend : ${}^a \alpha : g' \circ e^{-1} \longrightarrow e'^{-1} \circ g$ puis on déduit par la règle de la sous-section 1.1.4 le 2-morphisme : $e' \circ g' \longrightarrow g \circ e$.

Ces deux constructions donnent le même 2-morphisme.

Supposons maintenant que le 2-morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{e'} & \bullet \\ f' \downarrow & \alpha & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{e} & \bullet \end{array}$$

est un 2-isomorphisme. On suppose comme ci-dessus que e et e' sont des équivalences et qu'il existe une suite d'adjonctions :

$$f = f_0, f_1, \dots, f_k$$

(i.e. f_{i+1} est un adjoint à droite de f_i). Il existe alors une suite d'adjonctions :

$$f' = f'_0, f'_1, \dots, f'_k$$

On a de plus la proposition suivante :

Proposition 1.1.22. — *On peut construire à partir de α des 2-isomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{e'} & \bullet \\ f'_k \downarrow & \alpha_k & \downarrow f_k \\ \bullet & \xrightarrow{e} & \bullet \end{array}$$

(le sens des 1-morphismes verticaux est descendant ou montant suivant que k est pair ou impair) par une suite de « mouvements élémentaires » variés parmi :

- on peut changer le sens du 2-morphisme en le remplaçant par son inverse,
- on peut remplacer un 2-morphisme ? par a ? puis appliquer la règle de la sous-section 1.1.4 à e et e' .

La suite de mouvements élémentaires n'est pas unique mais le 2-morphisme α_k est indépendant du choix de la suite choisie.

1.1.6. Autoéquivalences d'un 2-foncteur

Définition 1.1.23. — *Soient \mathcal{C} une catégorie, \mathfrak{D} une 2-catégorie et F un 2-foncteur :*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$$

Une autoéquivalence de F est la donnée :

- pour tout objet X de \mathcal{C} , d'une équivalence $E_X : F(X) \longrightarrow F(X)$,

– pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de \mathcal{C} , d'un 2-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{E_Y} & F(Y) \\ F(f) \downarrow & \alpha_f \nearrow & \downarrow F(f) \\ F(X) & \xrightarrow{E_X} & F(X) \end{array}$$

Ces données doivent vérifier la condition suivante. Pour toute suite de flèches dans \mathcal{C} :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

le diagramme solide :

$$\begin{array}{ccccc} F(Z) & \xrightarrow{E_Z} & F(Z) & & \\ & \searrow F(g) & & \searrow F(g) & \\ F(g \circ f) \downarrow & & F(Y) & \xrightarrow{E_Y} & F(Y) \\ & \nearrow F(f) & & \nearrow F(f) & \\ F(X) & \xrightarrow{E_X} & F(X) & & \end{array}$$

est commutatif.

Définition 1.1.24. — Soit un 2-foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. On suppose données deux autoéquivalences :

$$((E_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, (\alpha_f)_{f \in \text{Fleches}(\mathcal{C})}) \quad \text{et} \quad ((E'_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, (\alpha'_f)_{f \in \text{Fleches}(\mathcal{C})})$$

Un morphisme d'autoéquivalences de (E_X) vers (E'_X) est la donnée pour tout objet X de \mathcal{C} d'un 2-morphisme :

$$E_X \longrightarrow E'_X$$

tel que (si F est covariant par exemple) pour tout $f : X \longrightarrow Y$ le diagramme de 2-morphismes suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_Y \circ F(f) & \xrightarrow{\alpha_f} & F(f) \circ E_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ E'_Y \circ F(f) & \xrightarrow{\alpha'_f} & F(f) \circ E'_X \end{array}$$

est commutatif.

On a la proposition évidente :

Proposition 1.1.25. — Soit un 2-foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. On suppose données deux autoéquivalences :

$$((E_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, (\alpha_f)_{f \in \text{Fleches}(\mathcal{C})}) \quad \text{et} \quad ((E'_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}, (\alpha'_f)_{f \in \text{Fleches}(\mathcal{C})})$$

On définit :

- pour tout objet X de \mathcal{C} , un 1-isomorphisme E''_X comme étant la composée $E'_X \circ E_X$,
- pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de \mathcal{C} , un 2-morphisme α''_f comme étant la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc} F(Y) & \xrightarrow{E_Y} & F(Y) & \xrightarrow{E'_Y} & F(Y) \\ F(f) \downarrow & \alpha_f \swarrow & \downarrow & \alpha'_f \swarrow & \downarrow F(f) \\ F(X) & \xrightarrow{E_X} & F(X) & \xrightarrow{E'_X} & F(X) \end{array}$$

Ceci définit alors une autoéquivalence de F appelée la composée de (E_X) et (E'_X) .

Démonstration. — En effet le diagramme solide :

$$\begin{array}{ccccc} F(Z) & \xrightarrow{E_Z} & F(Z) & \xrightarrow{E'_Z} & F(X) \\ \downarrow F(g \circ f) & \searrow & \downarrow F(g) & \searrow & \downarrow F(g) \\ F(Y) & \xrightarrow{E_Z} & F(Y) & \xrightarrow{E'_Z} & F(Y) \\ \downarrow F(f) & \searrow & \downarrow F(f) & \searrow & \downarrow F(f) \\ F(X) & \xrightarrow{E_X} & F(X) & \xrightarrow{E'_X} & F(Z) \end{array}$$

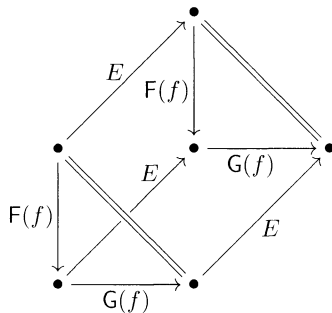
est commutatif car il est formé de deux sous-diagrammes solides commutatifs (ceux qui expriment que (E_X) et (E'_X) sont des autoéquivalences). \square

Proposition 1.1.26

1- Soient un 2-foncteur covariant :

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

et (E_X, α_f) une autoéquivalence de \mathbf{F} . On suppose que \mathbf{F} admet un adjoint global à droite \mathbf{G} . Il existe alors une unique autoéquivalence (E_X, β_f) de \mathbf{G} tel que pour toute flèche f de \mathbf{C} le diagramme solide :



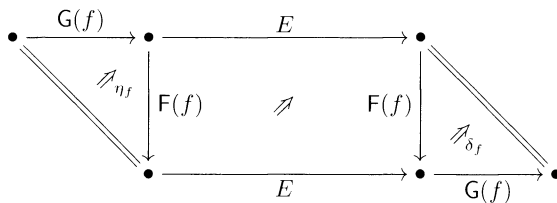
est commutatif. Les faces triangulaires de ce diagramme sont le 2-morphisme d'unité de l'adjonction. Les deux petites faces carrées sont les 2-isomorphismes α . La grande face carrée est l'identité du 1-morphisme E . De plus on a un diagramme solide commutatif analogue à celui ci-dessus pour la counité de l'adjonction.

2- La construction précédente est fonctorielle et covariante (pour les morphismes d'autoéquivalence).

3- La construction précédente est compatible avec la composition des autoéquivalences (d'une façon covariante).

Démonstration

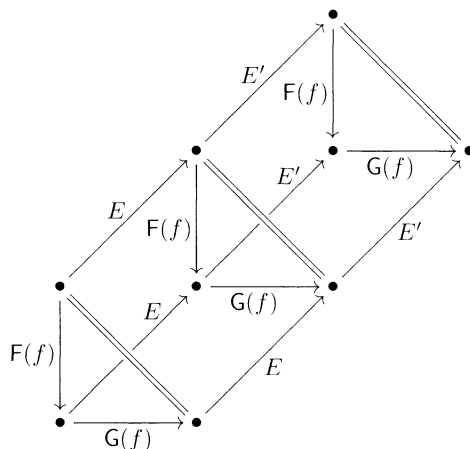
1- La formule qui donne l'inverse du 2-isomorphisme β_f à partir de α_f est la suivante :



Il faut vérifier que ça définit bien une autoéquivalence i.e que le diagramme solide de la définition est commutatif. Pour prouver ceci on utilise 1.1.17 et on procède exactement comme dans la preuve de la proposition 1.1.11.

2- La fonctorialité est claire.

3- Pour la composition il suffit de voir que le diagramme solide :



est commutatif. \square

1.2. Préliminaires 2-catégoriques II : Échanges entre 2-foncteurs. Foncteurs croisés

1.2.1. Structures d'échange. — Dans toute cette section, on suppose fixées deux catégories \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 tel que $\text{Ob}(\mathcal{C}_1) = \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$. On appelle *carré mixte* un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

tels que :

- X, X', Y et Y' soient des objets de \mathcal{C}_1 donc aussi de \mathcal{C}_2 ,
- g et g' des flèches de \mathcal{C}_1 ,
- f et f' des flèches de \mathcal{C}_2 .

On a les notions évidentes de compositions horizontales et verticales des carrés mixtes. On fixe une classe \mathcal{E} de carrés mixtes qui soit stable par compositions horizontales et verticales. Étant donnée une 2-catégorie \mathfrak{D} , on fait la définition suivante :

Définition 1.2.1. — Supposons donnés un 2-foncteur $F_1 : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathfrak{D}$ et un 2-foncteur $F_2 : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{D}$ tels que $F_1(X) = F_2(X) = F(X)$ pour tout X dans $\text{Ob}(\mathcal{C}_1) = \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$. Une structure d'échange par rapport à \mathcal{E} sur le couple (F_1, F_2) est

la donnée pour tout carré mixte (C) dans \mathcal{E} :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

d'un 2-morphisme $e(C)$ de \mathfrak{D} (appelé 2-morphisme d'échange associé au carré mixte (C)) :

$$\begin{array}{ccc} F(Y') & \xleftarrow{F_1(g')} & F(X') \\ \uparrow F_2(f') & \begin{array}{c} \swarrow \searrow \\ \nearrow \nwarrow \end{array} & \uparrow F_2(f) \\ F(Y) & \xleftarrow{F_1(g)} & F(X) \end{array}$$

Le sens des 2-morphismes $e(\cdot)$ est constant (i.e. indépendant du carré mixte). La famille de ces 2-morphismes doit vérifier les deux conditions de compatibilité suivantes.

Compatibilité avec la composition horizontale des carrés mixtes. — Pour tous carrés mixtes C_1 et C_2 horizontalement composables :

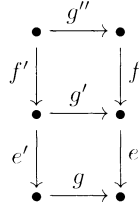
$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet & \xrightarrow{h'} & \bullet \\ f'' \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet & \xrightarrow{h} & \bullet \end{array}$$

Le diagramme solide :

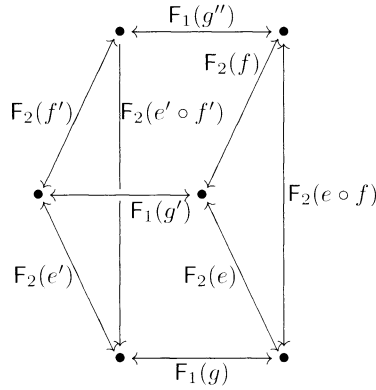
$$\begin{array}{ccccc} & & F_1(h' \circ g') & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \bullet & & F_1(g') & & F_1(h') & \bullet \\ F_2(f'') \uparrow & & \downarrow F_2(f') & & \downarrow F_2(f) \\ \bullet & \xleftarrow{F_1(h \circ g)} & & \xleftarrow{F_1(h)} & \bullet \\ & \swarrow & F_1(g) & & F_1(h) & \searrow \\ & & \bullet & & \end{array}$$

est commutatif.

Compatibilité avec la composition verticale des carrés mixtes. — *Pour tous carrés mixtes C' et C verticalement composables :*



le diagramme solide :



est commutatif.

On notera parfois l'échange sur (F_1, F_2) par la famille de ses 2-morphismes d'échange : $(e(C))_{C \in \mathcal{E}}$.

Remarque 1.2.2. — Dans la définition ci-dessus on a fait exprès de ne pas préciser les directions des foncteurs F_i . En effet nous tolérons toutes les combinaisons cohérentes pour les sens des 1-morphismes et des 2-morphismes. Il est facile de voir qu'il y a huit combinaisons possibles :

1. F_1 et F_2 de même variance (le cas codirectionnel) :
 - (a) F_1 et F_2 sont tous les deux covariants :
 - (i) Le sens du 2-morphisme d'échange est \swarrow .
 - (ii) Le sens du 2-morphisme d'échange est \searrow .
 - (b) F_1 et F_2 sont tous les deux contravariants :
 - (i) Le sens du 2-morphisme d'échange est \swarrow .
 - (ii) Le sens du 2-morphisme d'échange est \searrow .
2. F_1 et F_2 ont des variances différentes (le cas contradirectionnel) :
 - (a) F_1 est covariant et F_2 est contravariant :
 - (i) Le sens du 2-morphisme d'échange est \searrow .
 - (ii) Le sens du 2-morphisme d'échange est \swarrow .

- (b) F_1 est contravariant et F_2 est covariant :
- (i) Le sens du 2-morphisme d'échange est \searrow .
 - (ii) Le sens du 2-morphisme d'échange est \swarrow .

Ainsi dans la suite on dira par exemple : Un échange codirectionnel contravariant du type \swarrow .

Remarque 1.2.3. — La dualité permet d'échanger d'une façon transitive les différents types d'échanges entre 2-foncteurs : en remplaçant si nécessaire \mathcal{C}_1 par $\mathcal{C}_1^{\text{op}}$ et \mathcal{C}_2 par $\mathcal{C}_2^{\text{op}}$ on peut rendre notre foncteur codirectionnel et covariant. En remplaçant si nécessaire \mathfrak{D} par $\mathfrak{D}^{2\text{-op}}$ on peut supposer que F est de type \swarrow .

Remarque 1.2.4. — Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ un 2-foncteur covariant. On obtient une structure d'échange de type \swarrow sur le couple (F, F) par rapport à la classe des carrés commutatifs en prenant pour tout carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

le 2-isomorphisme : $c_F(f', g) \circ c_F(g', f)^{-1}$ où les $c_F(., .)$ désignent les 2-isomorphismes de connexion du 2-foncteur F . Le fait que ces 2-morphismes définissent bien un échange est conséquence de l'axiome de cocycle. On qualifiera cet échange codirectionnel de *trivial*. En utilisant la proposition 1.2.5 on pourra construire à partir de cet échange trivial des échanges moins triviaux.

On va décrire maintenant une construction fondamentale qui permet de construire des structures d'échange à partir d'autres structures d'échange.

Proposition 1.2.5. — Soient F_1 et F_2 deux 2-foncteurs covariants comme dans la définition 1.2.1. On suppose donné un échange $(e(C))_{C \in \mathcal{E}}$ du type \swarrow sur (F_1, F_2) . On suppose que F_1 admet un adjoint global à *gauche*. On en choisit un :

$$G^1 : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathfrak{D}$$

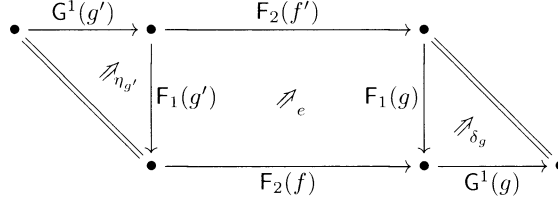
(avec les 2-morphismes η_f et δ_f pour une flèche f dans \mathcal{C}_1). Le couple (G^1, F_2) peut être muni d'un échange contradirectionnel du type \swarrow . Le 2-morphisme d'échange :

$$G^1(g)F_2(f) \longrightarrow F_2(f')G^1(g')$$

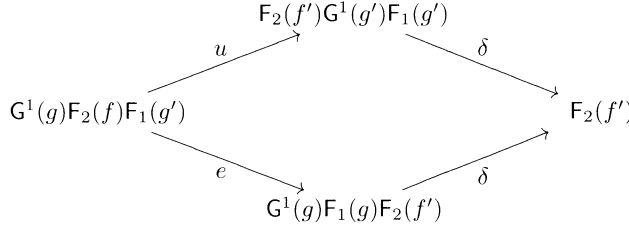
associé à un carré mixte dans \mathcal{E} :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

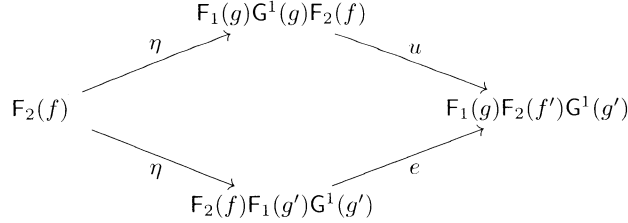
est défini par la composée du diagramme planaire :



le 2-morphisme e étant le 2-morphisme d'échange de la structure d'échange sur (F_1, F_2) associé au même carré mixte. On peut caractériser les 2-morphismes d'échange de la nouvelle structure ainsi obtenue par la condition suivante. Le 2-morphisme d'échange : $G^1(g) \circ F_2(f) \longrightarrow F_2(f') \circ G^1(g)$ est l'unique 2-morphisme u rendant commutatif l'un des deux losanges suivants :

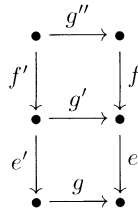


ou

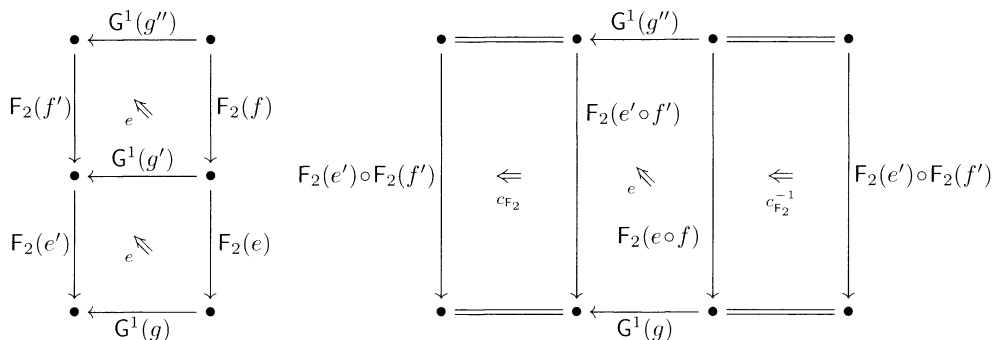


Démonstration. — On utilisera les propositions 1.1.11 et 1.1.12 de la section précédente. Pour montrer que les 2-morphismes définis dans l'énoncé munissent (G^1, F_2) d'une structure d'échange il faut vérifier la compatibilité avec les compositions des carrés mixtes dans \mathcal{E} .

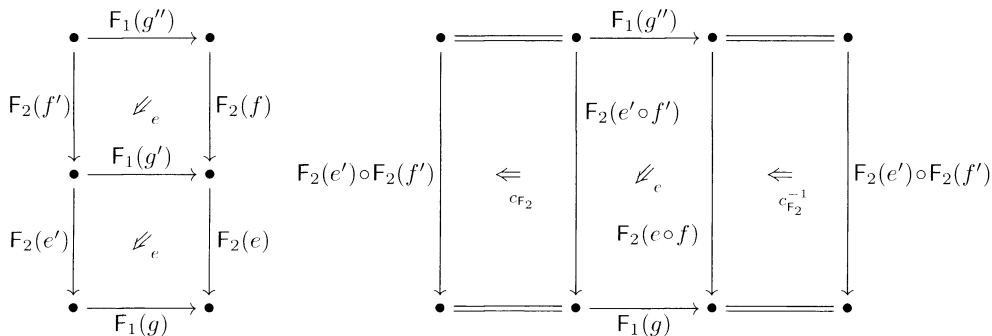
Compatibilité avec la composition verticale des carrés mixtes. — Soit le diagramme :



formé de deux carrés mixtes superposés verticalement. Il faut prouver que les composées des deux diagrammes planaires coïncident :

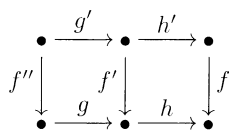


Les carrés précédents sont obtenus à l'aide des adjonctions $(G^1(g''), F_1(g''))$ et $(G^1(g), F_1(g))$ des carrés :

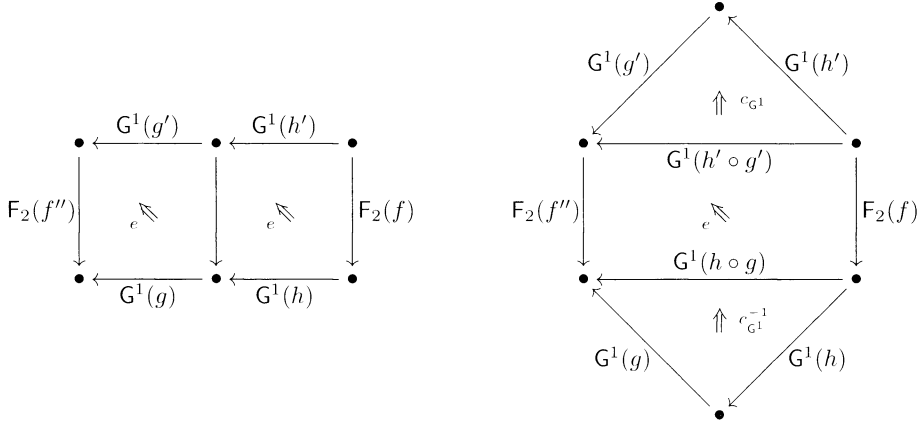


Mais la composée de ces deux diagrammes planaires est la même. D'où le résultat.

Compatibilité avec la composition horizontale des carrés mixtes. — Soit le diagramme :



formé de deux carrés mixtes. Il faut prouver que la composée des deux diagrammes planaires :



donne le même 2-morphisme. On fait exactement pareil que dans le cas précédent en utilisant en plus le fait que les 2-isomorphismes de connexions c_{G^1} sont obtenus de c_{F_1} par adjonction. \square

Remarque 1.2.6. — En utilisant la remarque 1.2.2 on peut déduire plein de variantes de la proposition précédente. Par exemple si l'on suppose que l'échange sur (F_1, F_2) est codirectionnel covariant de type \nearrow et que F_1 admet un adjoint global à **droite** G^1 , alors on peut munir (G^1, F_2) d'un échange contradirectionnel de type \searrow . Ceci s'obtient en utilisant la 2-dualité.

On termine cette sous-section par quelques règles qui permettent de déterminer rapidement le type de la structure d'échange qu'on obtient par la construction précédente.

Règle 1. — Supposons donnée une structure d'échange sur (F_1, F_2) . Il existe un seul type d'adjoint global (*i.e.* à droite ou à gauche) à F_1 (resp. F_2) qui permet la construction d'un échange sur (G^1, F_2) (resp. (F_1, G^2)) comme dans 1.2.5 (G^1 est l'adjoint de F_1 et G^2 celui de F_2). La nature de l'adjonction entre F_1 et G^1 (resp. F_2 et G^2) est déterminée par la variance de F_1 (resp. F_2) et le type d'échange sur (F_1, F_2) . On dira « bon adjoint global » pour un adjoint qui permet la construction 1.2.5.

Règle 2 (valable pour le cas codirectionnel). — Supposons donné un échange sur (F_1, F_2) avec F_1 et F_2 de même variance :

- Soit G^1 un bon adjoint global à F_1 . Pour obtenir le sens des 2-morphismes d'échange sur (G^1, F_2) à partir de celui des 2-morphismes d'échange sur (F_1, F_2) il suffit de tourner d'un angle droit suivant le sens des aiguilles d'une montre.
- Soit G^2 un bon adjoint global à F_2 . Pour obtenir le sens des 2-morphismes d'échange sur (F_1, G_1) à partir de celui des 2-morphismes d'échange sur (F_1, F_2)

il suffit de tourner d'un angle droit suivant le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

Règle 3 (valable pour le cas contradirectionnel). — Supposons donné un échange sur (F_1, F_2) avec F_1 et F_2 de variances opposées :

- Soit G^1 un bon adjoint global à F_1 . Pour obtenir le sens des 2-morphismes d'échange sur (G^1, F_2) à partir de celui des 2-morphismes d'échange sur (F_1, F_2) il suffit de tourner d'un angle droit suivant le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.
- Soit G^2 un bon adjoint global à F_2 . Pour obtenir le sens des 2-morphismes d'échange sur (F_1, G_1) à partir de celui des 2-morphismes d'échange sur (F_1, F_2) il suffit de tourner d'un angle droit suivant le sens des aiguilles d'une montre.

1.2.2. Recollement des structures d'échange. — Dans cette sous-section on va établir deux résultats qui permettront de recoller des structures d'échange. Pour établir ces résultats il faudra se restreindre à l'un des quatre cas suivants :

1. $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$,
2. $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}^{\text{op}}$,
3. $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}^{\text{op}}$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$,
4. $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}^{\text{op}}$,

avec \mathcal{C} une catégorie stable par produits fibrés et \mathcal{E} la classe des carrés commutatifs et cartésiens dans \mathcal{C} . On suppose donnée deux sous-catégories \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^2 de \mathcal{C} contenant tous les isomorphismes et stables par changement de base. On suppose également que \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 engendrent la catégorie \mathcal{C} . On notera \mathcal{C}_i^j la catégorie \mathcal{C}^j vue comme une sous-catégorie de \mathcal{C}_i (avec $i, j = 1, 2$). On suppose donnés une 2-catégorie \mathcal{D} et un 2-foncteur covariant :

$$F_i : \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{D}$$

pour chaque $j \in \{1, 2\}$. On notera jF_i la restriction du 2-foncteur F_i à \mathcal{C}_i^j .

Proposition 1.2.7. — *En plus de hypothèses précédentes on suppose satisfaite la condition⁽¹⁾ que toute flèche f de \mathcal{C} se factorise :*

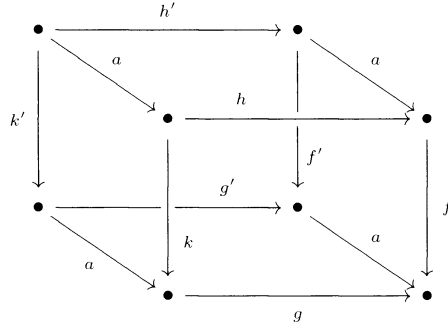
$$f = p \circ s$$

avec p dans \mathcal{C}_2 et s dans \mathcal{C}_1 . On suppose donné un échange codirectionnel de type \swarrow sur chacun des couples :

- $({}^1F_1, F_2)$,
- $({}^2F_1, F_2)$,

⁽¹⁾Cette condition est plus forte que la simple génération de \mathcal{C} par les \mathcal{C}_i .

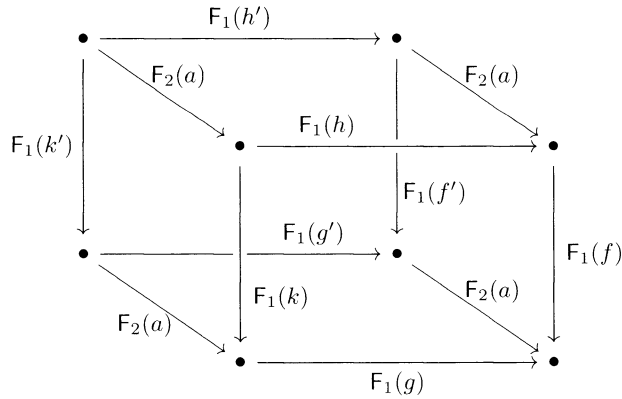
tels que pour tout cube :



ayant

- les deux faces parallèles au plan de la feuille : des carrés commutatifs de \mathcal{C}_1 avec g et h dans \mathcal{C}_1^1 et f et k dans \mathcal{C}_1^2 ,
- les quatre faces perpendiculaires au plan de la feuille : des carrés mixtes qui sont cartésiens dans \mathcal{C} et avec a dans \mathcal{C}_2 ,

le cube dans \mathfrak{D} :



formé en prenant pour 2-morphismes :

- sur les faces parallèles au plan de la feuille : les 2-isomorphismes d'échange relatifs à l'échange trivial sur le couple (F_1, F_1) ,
- sur les faces perpendiculaires au plan de la feuille et horizontales : les 2-morphismes d'échange relatifs à l'échange sur $(^1F_1, F_2)$,
- sur les faces perpendiculaires au plan de la feuille et verticales : les 2-morphismes d'échange relatifs à l'échange sur $(^2F_1, F_2)$,

est commutatif. Il existe alors un unique échange sur (F_1, F_2) prolongeant les deux échanges donnés.

Démonstration. — Soit (C) un carré mixte dans \mathcal{E} (i.e. cartésien une fois regardé dans \mathcal{C}) :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

Fixons une factorisation de g :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & g & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ \bullet & \xrightarrow{a_n} & \bullet & \xrightarrow{a_{n-1}} & \bullet & \dots & \bullet \xrightarrow{a_1} \bullet \end{array}$$

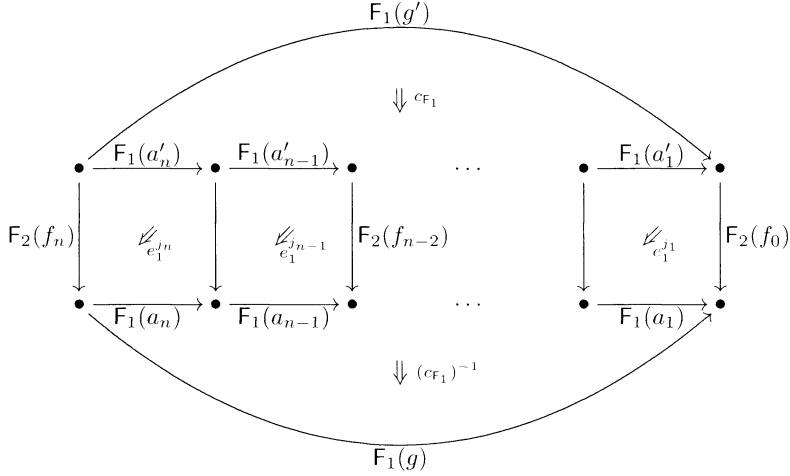
avec a_i dans \mathcal{C}_1^1 ou dans \mathcal{C}_1^2 . On peut toujours en trouver puisque \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^2 engendrent \mathcal{C} . On fixe une suite $j_k \in \{1, 2\}$ tel que a_k soit dans $\mathcal{C}_1^{j_k}$. Notons bien que cette suite n'est pas forcément unique. Les conditions sur \mathcal{C}_i et \mathcal{E} impliquent qu'une telle factorisation induit une factorisation fonctorielle du carré (C) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & g' & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ \bullet & \xrightarrow{a'_n} & \bullet & \xrightarrow{a'_{n-1}} & \bullet & \dots & \bullet \xrightarrow{a'_1} \bullet \\ f' = f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 = f \\ \bullet & \xrightarrow{a_n} & \bullet & \xrightarrow{a_{n-1}} & \bullet & \dots & \bullet \xrightarrow{a_1} \bullet \\ & \searrow & & \nearrow & & & \\ & & & g & & & \end{array}$$

et que a'_k est dans $\mathcal{C}_1^{j_k}$. On définit pour une factorisation fixée de g et un choix des j_k un 2-morphisme $e = e(f)$:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{F_1(g')} & \bullet \\ F_2(f') \downarrow & \not\cong_e & \downarrow F_2(f) \\ \bullet & \xrightarrow{F_1(g)} & \bullet \end{array}$$

En prenant la composée du diagramme planaire :



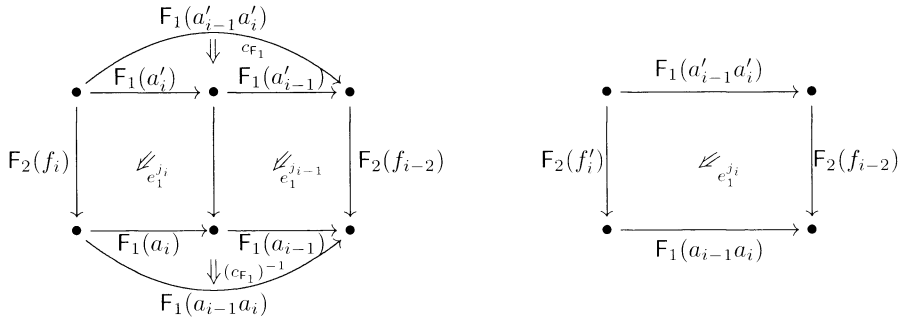
On prouvera d'abord que le 2-morphisme $e(f)$ est indépendant du choix de la factorisation de g ainsi que du choix des j_k . On commence pour cela par décrire deux manipulations élémentaires qu'on peut appliquer sur la factorisation de g sans changer la valeur du 2-morphisme $e(f)$.

Manipulation 1. — Supposons que pour un i on a : $j_i = j_{i-1}$. Alors on peut remplacer dans la factorisation de g les deux flèches a_i et a_{i-1} par leur composée : $a_{i-1} \circ a_i$ qu'on regardera alors comme une flèche de $\mathcal{C}_1^{j_i} = \mathcal{C}_1^{j_{i-1}}$.

Pour prouver ceci on remarque d'abord que par la relation de cocycle les 2-isomorphismes de connexions qui se trouvent dans la définitions de $e(f)$ se factorisent par les 2-isomorphismes de connexions :

$$F_1(a'_{i-1}a'_i) \longrightarrow F_1(a'_{i-1})F_1(a'_i) \quad \text{et} \quad F_1(a_{i-1})F_1(a_i) \longrightarrow F_1(a_{i-1}a_i)$$

On voit donc qu'il suffit de prouver que les composées des deux diagrammes plans :



sont égales. Mais ceci est clair par la compatibilité des 2-morphismes définissant l'échange sur $(^j F_1, F_2)$ avec la composition horizontale des carrés.

Manipulation 2. — Supposons qu'on est dans le cas $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ (on peut toujours se ramener à ce cas par 1-dualité. Désormais on supposera dans la suite $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$) et que $j_i = 2$ et $j_{i-1} = 1$. On sait par hypothèse que la flèche $a_i \circ a_{i-1}$ admet une factorisation par une flèche de \mathcal{C}_1^1 suivie par une flèche de \mathcal{C}_1^2 . On obtient donc un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{b_i} & \bullet \\ a_i \downarrow & & \downarrow b_{i-1} \\ \bullet & \xrightarrow{a_{i-1}} & \bullet \end{array}$$

avec b_i et a_{i-1} dans \mathcal{C}_1^1 et a_i et b_{i-1} dans \mathcal{C}_1^2 . L'opération qui consiste à remplacer a_i et a_{i-1} par b_i et b_{i-1} et de permuter les valeurs de j_i et j_{i-1} ne change pas la valeur de $e(f)$.

Pour montrer cela on commence par prendre les pull-back suivant f_{i-2} pour former un cube :

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{b'_i} & \bullet & & \bullet \\ & \searrow f_i & & \searrow f_{i-1} & \\ a'_i \downarrow & & \bullet & \xrightarrow{b_i} & \bullet \\ & & \downarrow b'_{i-1} & & \downarrow b_{i-1} \\ \bullet & \xrightarrow{a'_{i-1}} & \bullet & \xrightarrow{a_i} & \bullet \\ & \searrow f_{i-1} & & \searrow f_{i-2} & \\ & & \bullet & \xrightarrow{a_{i-1}} & \bullet \end{array}$$

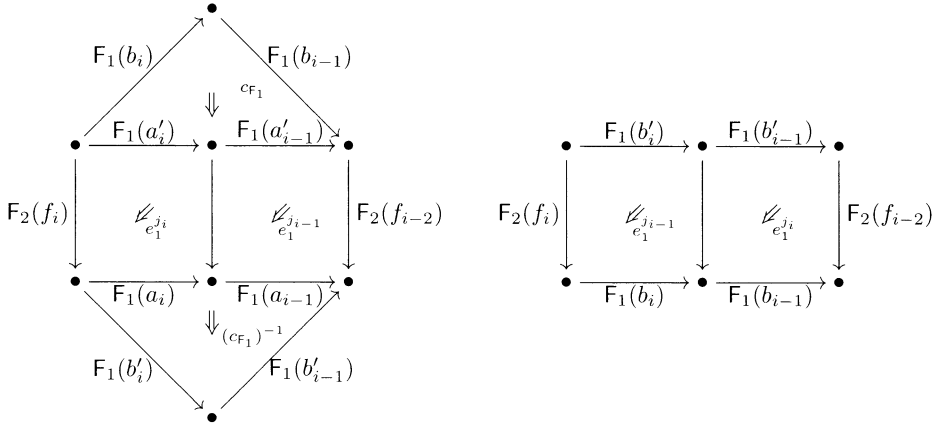
On en déduit alors un cube commutatif dans \mathfrak{D} :

$$(10) \quad \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{F_1(b'_i)} & \bullet & & \bullet \\ & \searrow F_2(f_i) & & \searrow F_2(f_{i-1}) & \\ F_1(a'_i) \downarrow & & \bullet & \xrightarrow{F_1(b_i)} & \bullet \\ & & \downarrow F_1(b'_{i-1}) & & \downarrow F_1(b_{i-1}) \\ \bullet & \xrightarrow{F_1(a'_{i-1})} & \bullet & \xrightarrow{F_1(a_i)} & \bullet \\ & \searrow F_2(f_{i-1}) & & \searrow F_2(f_{i-2}) & \\ & & \bullet & \xrightarrow{F_1(a_{i-1})} & \bullet \end{array}$$

Comme dans le paragraphe précédent, la relation de cocycle appliquée aux 2-isomorphismes de connexions qui se trouvent dans la définition de $e(f)$ montre que ces derniers se factorisent par les 2-isomorphismes de connexions :

$$F_1(b'_{i-1})F_1(b'_i) \longrightarrow F_1(a'_{i-1})F_1(a'_i) \quad \text{et} \quad F_1(a_{i-1})F_1(a_i) \longrightarrow F_1(b_{i-1})F_1(b_i)$$

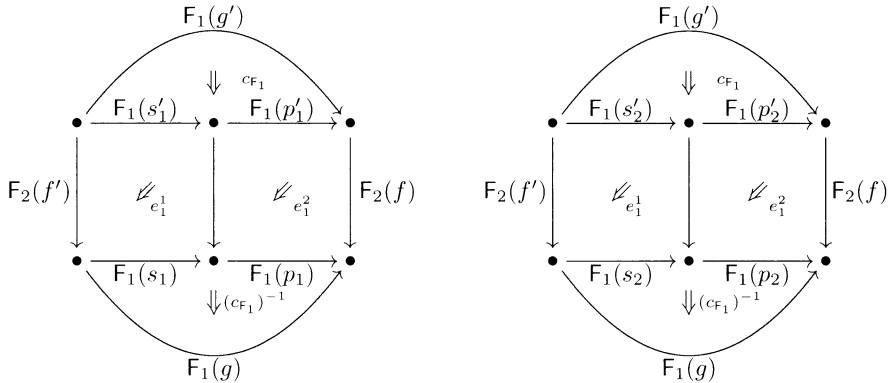
On voit donc qu'il suffit de prouver que les composées des deux diagrammes planaires suivants :



sont les mêmes. (Bien noter qu'on a permuté les places de j_i et j_{i-1} dans les deux rectangles et que f_{i-1} ne désigne pas la même flèche dans les deux diagrammes planaire.) Le fait que les composées sont les mêmes découle directement de la commutativité du cube (10).

Preuve de l'indépendance. — En utilisant le nombre de fois nécessaire les deux manipulations précédentes on se ramène au cas où $n = 2$. Plus précisément il suffira de prouver le cas particulier suivant :

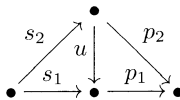
Étant données deux factorisations $g = p_1 \circ s_1 = p_2 \circ s_2$, les composées des deux diagrammes planaires :



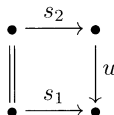
sont les mêmes.

Pour prouver cela on se ramène facilement (en utilisant la stabilité de \mathcal{C}_2 par changement de base ainsi que l'existence de factorisation à deux facteurs le premier étant dans \mathcal{C}_1 et le suivant dans \mathcal{C}_2) au cas où il existe une flèche u dans \mathcal{C}_2 rendant

le diagramme commutatif dans \mathcal{C} :



En utilisant le cube obtenu à partir de :



par pull-back suivant f ainsi que le cube commutatif dans \mathfrak{D} (comme dans l'énoncé) il est facile de terminer la preuve de l'indépendance. On laisse les détails en exercice.

Fin de la preuve. — Il nous reste à vérifier la compatibilité avec les compositions des carrés. Pour la composition horizontale c'est très facile en utilisant le résultat d'indépendance qu'on vient de prouver. Pour la composition verticale c'est également facile. Le lecteur pourra consulter la preuve de la proposition suivante pour plus de détails. \square

Dans le même esprit on a la proposition suivante qui ne sera (malheureusement) pas utilisée dans la suite. On a quand même choisi de l'inclure ici.

Proposition 1.2.8. — *On suppose données quatre structures d'échange codirectionnels de type \swarrow :*

- *un échange sur le couple $(F_1, {}^1F_2)$. On notera e_2^1 les 2-morphismes d'échange pour cette structure,*
- *un échange sur le couple $(F_1, {}^2F_2)$. On notera e_2^2 les 2-morphismes d'échange pour cette structure,*
- *un échange sur le couple $({}^1F_1, F_2)$. On notera e_1^1 les 2-morphismes d'échange pour cette structure,*
- *un échange sur le couple $({}^2F_1, F_2)$. On notera e_1^2 les 2-morphismes d'échange pour cette structure,*

tel que pour i et j dans $\{1, 2\}$ les deux échanges sur $({}^iF_1, {}^jF_2)$ obtenus par restriction de l'échange sur :

- $(F_1, {}^jF_2)$,
- $({}^iF_1, F_2)$,

coïncident. Sous ces hypothèses il existe un unique échange sur le couple (F_1, F_2) qui redonne les quatre structures d'échange ci-dessus par restriction aux catégories \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^2 .

Démonstration. — Supposons donné un carré mixte (C) :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

qui soit dans \mathcal{C} . Fixons une factorisation de g :

$$\begin{array}{ccccccc} & & g & & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ \bullet & \xrightarrow{a_n} & \bullet & \xrightarrow{a_{n-1}} & \bullet & \dots & \bullet \xrightarrow{a_1} \bullet \end{array}$$

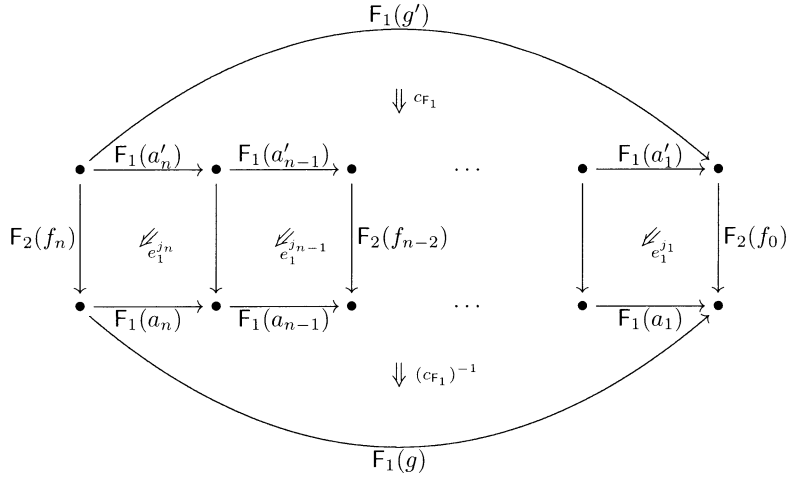
avec a_i dans \mathcal{C}_1^1 ou dans \mathcal{C}_1^2 . On peut toujours en trouver puisque \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^2 engendrent \mathcal{C} . On fixe une suite $j_k \in \{1, 2\}$ tel que a_k soit dans $\mathcal{C}_1^{j_k}$. Notons bien que cette suite n'est pas forcément unique. Les conditions sur \mathcal{C}_i et \mathcal{C} impliquent qu'une telle factorisation induit une factorisation fonctorielle du carré (C) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & g' & & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ \bullet & \xrightarrow{a'_n} & \bullet & \xrightarrow{a'_{n-1}} & \bullet & \dots & \bullet \xrightarrow{a'_1} \bullet \\ f' = f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 = f \\ \bullet & \xrightarrow{a_n} & \bullet & \xrightarrow{a_{n-1}} & \bullet & \dots & \bullet \xrightarrow{a_1} \bullet \\ & \searrow & & \nearrow & & & \\ & & g & & & & \end{array}$$

et que a'_k est dans $\mathcal{C}_1^{j_k}$. On définit pour une factorisation fixée de g et un choix des j_k un 2-morphisme $e = e(f)$:

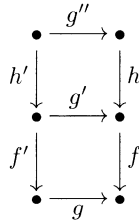
$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{F_1(g')} & \bullet \\ F_2(f') \downarrow & \swarrow_e & \downarrow F_2(f) \\ \bullet & \xrightarrow{F_1(g)} & \bullet \end{array}$$

En prenant la composée du diagramme planaire :

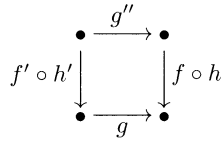


On va prouver que le 2-morphisme $e(f)$ est indépendant du choix de la factorisation de g ainsi que du choix des j_k .

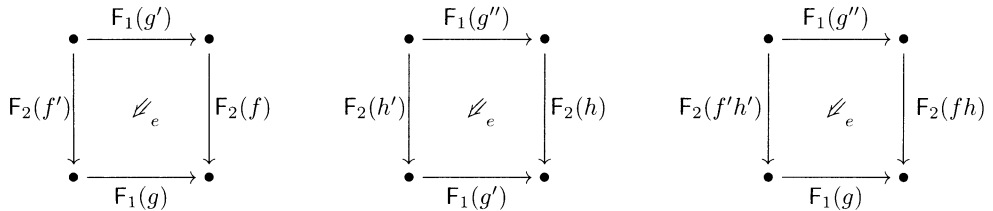
Étape 1. Compatibilité de e avec la composition verticale des carrés. — Supposons donné un diagramme :



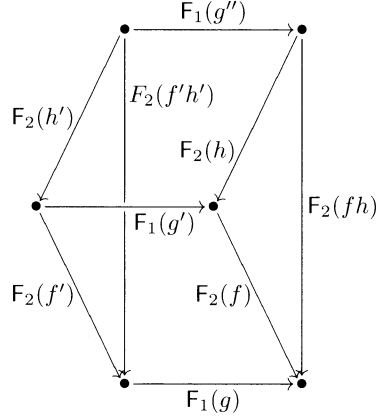
tel que les carrés soient dans \mathcal{E} . On forme la composée :



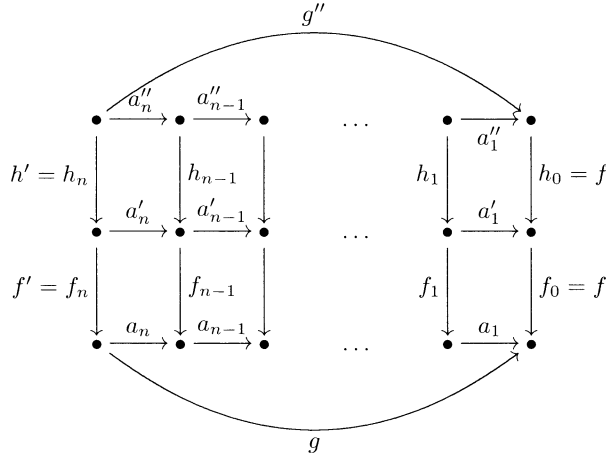
La factorisation de g induit par pull-back une factorisation de g' . On peut alors définir trois 2-morphismes :



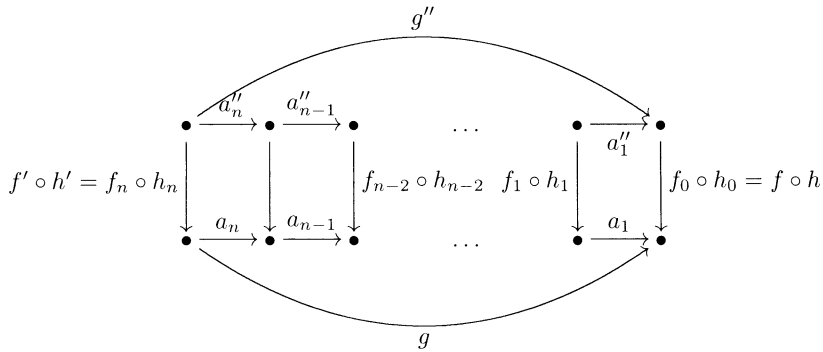
Le premier et le troisième étant le 2-morphisme associé à la factorisation de g et le choix des j_k de tout à l'heure. Le second 2-morphisme est celui associé à la factorisation de g' déduite par pull-back et au même choix des j_k . Nous affirmons que le solide suivant :



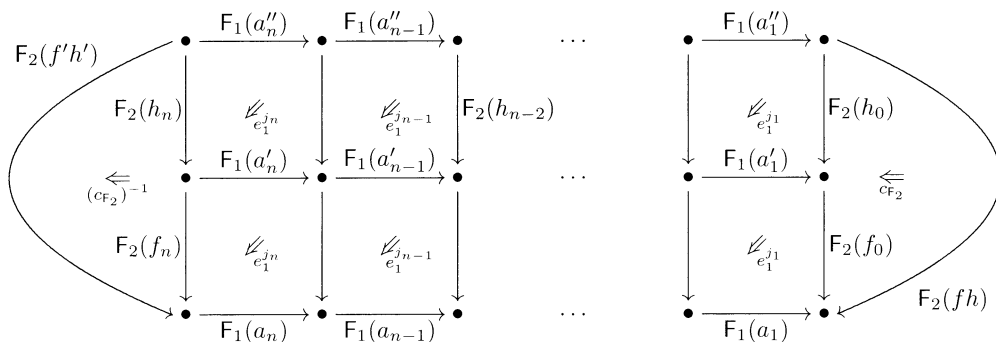
est commutatif. Pour voir cela on remarque que la factorisation de g induit des factorisations des carrés cartésiens précédents :



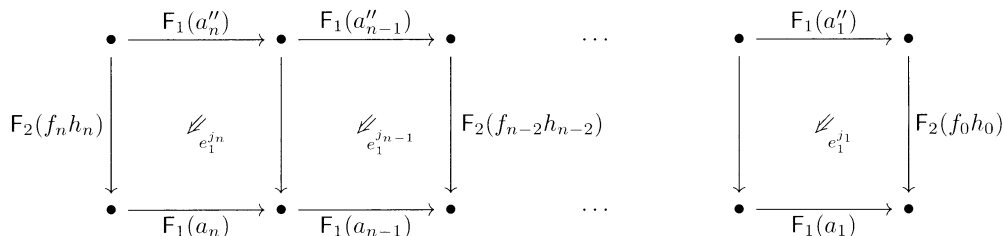
et



On voit alors facilement en simplifiant les 2-isomorphismes de connexion du 2-foncteur F_1 qu'il suffit de prouver que les composées des deux diagrammes planaires ci-dessous sont les mêmes :



et

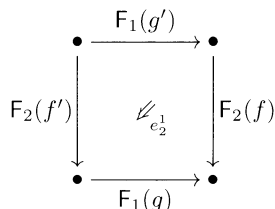


Mais ceci découle trivialement de la compatibilité des 2-morphismes d'échange e_1^1 et e_1^2 avec la composition verticale des carrés de \mathcal{E} . On voit donc que pour prouver que les 2-morphismes $e(f \circ h)$ sont indépendants du choix de la factorisation de g et des j_k il suffira de prouver ceci pour $e(f)$ et pour $e(h)$. En utilisant alors le fait que tout morphisme de \mathcal{C}_2 est une composée de morphismes dans \mathcal{C}_2^1 ou \mathcal{C}_2^2 on voit qu'il suffit de traiter les deux cas particuliers suivants :

- $e(f)$ est indépendant des choix si f est dans \mathcal{C}_2^1 ,
- $e(f)$ est indépendant des choix si f est dans \mathcal{C}_2^2 .

Par symétrie il suffit de traiter juste le premier cas.

Étape 2. Preuve de l'indépendance dans le cas où f est dans \mathcal{C}_2^1 . — En effet il suffira de prouver que $e(f)$ est égal à :



i.e., le 2-morphisme d'échange relatif à la structure d'échange sur $(F_1, {}^1F_2)$. Pour voir cela on utilise l'hypothèse que le 2-morphisme d'échange e_1^2 associé au carré mixte :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{a'_k} & \bullet \\ f_k \downarrow & & \downarrow f_{k-1} \\ \bullet & \xrightarrow{a_k} & \bullet \end{array}$$

coïncide avec le 2-morphisme d'échange e_2^{jk} associé au même carré mixte. Il vient que $e(f)$ est aussi égal à la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{c} F_1(g') \\ \Downarrow c_{F_1} \\ \begin{array}{ccccccc} \bullet & \xrightarrow{F_1(a'_n)} & \bullet & \xrightarrow{F_1(a'_{n-1})} & \bullet & \cdots & \bullet & \xrightarrow{F_1(a'_1)} & \bullet \\ F_2(f_n) \downarrow & \swarrow e_2^1 & \downarrow & \swarrow e_2^1 & \downarrow & F_2(f_{n-2}) & \downarrow & \swarrow e_2^1 & \downarrow F_2(f_0) \\ \bullet & \xrightarrow{F_1(a_n)} & \bullet & \xrightarrow{F_1(a_{n-1})} & \bullet & \cdots & \bullet & \xrightarrow{F_1(a_1)} & \bullet \\ & & & & & & \downarrow (c_{F_1})^{-1} & & \\ F_1(g) \end{array} \end{array}$$

En utilisant la compatibilité du 2-morphisme d'échange avec la composition horizontale on obtient ce qu'on veut.

Étape 3. Fin de la démonstration. — On a construit pour tout carré de \mathcal{E} un 2-morphisme. Il reste à voir que ces 2-morphismes définissent une structure d'échange sur le couple (F_1, F_2) . (Le fait que les restrictions redonnent les structures d'échange de départ est évident.) La compatibilité avec les compositions verticales des carrés découle de la première étape. Il nous reste donc à établir la compatibilité avec les compositions horizontales. On se donne un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{h'} & \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet \\ f'' \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{h} & \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

En prenant une factorisation de g et h en des morphismes de \mathcal{C}_1^1 et de \mathcal{C}_1^2 on en déduit une factorisation de $g \circ h$. En revenant à la définition et en utilisant l'indépendance par rapport au choix de la factorisation on prouve facilement ce que l'on veut. Les détails sont laissés en exercice. \square

À partir de ces données on peut construire 4 structures d'échange.

1. Deux structures d'échange sur (G^1, F_2) :
 - (a) une structure d'échange de type \nwarrow obtenue à partir de l'échange sur (F_1, F_2) et l'adjonction entre F_1 et G^1 . On notera a_2^1 les morphismes d'échange relatifs à cet échange.
 - (b) une structure d'échange de type \searrow obtenue à partir de l'échange sur (G^1, G^2) et l'adjonction entre G^2 et F_2 . On notera b_2^1 les morphismes d'échange relatifs à cet échange.
2. Deux structures d'échange sur (F_1, G^2) :
 - (a) une structure d'échange de type \nwarrow obtenue à partir de l'échange sur (G^1, G^2) et l'adjonction entre G^1 et F_1 . On notera a_1^2 les morphismes d'échange relatifs à cet échange.
 - (b) une structure d'échange de type \searrow obtenue à partir de l'échange sur (F_1, F_2) et l'adjonction entre F_2 et G^2 . On notera b_1^2 les morphismes d'échange relatifs à cet échange.

Définition 1.2.12. — Un foncteur croisé noté :

$$(G^1, F_1, F_2, G^2) : (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \longrightarrow \mathfrak{D}$$

est la donnée de :

1. deux 2-foncteurs covariants $F_i : \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathfrak{D}$,
2. un adjoint global à gauche G^1 de F_1 ,
3. un adjoint global à droite G^2 de F_2 ,
4. un échange sur (F_1, F_2) de type \swarrow ,
5. un échange sur (G^1, G^2) de type \swarrow .

tel que pour tout carré mixte de \mathcal{E} :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

les deux 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{G^1(g')} & \bullet \\ F_2(f') \downarrow & \swarrow a_2^1 & \downarrow F_2(f) \\ \bullet & \xleftarrow{G^1(g)} & \bullet \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{G^1(g')} & \bullet \\ F_2(f') \downarrow & \swarrow b_2^1 & \downarrow F_2(f) \\ \bullet & \xleftarrow{G^1(g)} & \bullet \end{array}$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. D'une façon équivalente (en remarquant que ${}^a(a_2^1) = b_1^2$ et ${}^a(b_2^1) = a_1^2$), les deux 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{F_1(g')} & \bullet \\ \uparrow G^2(f') & \searrow a_1^2 & \uparrow G^2(f) \\ \bullet & \xrightarrow{F_1(g)} & \bullet \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{F_1(g')} & \bullet \\ \uparrow G^2(f') & \searrow b_1^2 & \uparrow G^2(f) \\ \bullet & \xrightarrow{F_1(g)} & \bullet \end{array}$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Remarque 1.2.13. — La définition des foncteurs croisés adoptée est légèrement plus générale que celle de Voevodsky (voir [Del01]). En effet, un foncteur croisé selon Voevodsky est un foncteur croisé (G^1, F_1, F_2, G^2) comme dans 1.2.12 avec en plus $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$. L'intérêt de la définition 1.2.12 est de pouvoir parler des foncteurs croisés (partiaux) $(H^*, H_*, {}^{\text{Liss}}H_{\#}, {}^{\text{Liss}}H^*)$, $(H^*, H_*, {}^{\text{Imm}}H_!, {}^{\text{Imm}}H^!)$ et $(H^*, H_*, {}^{\text{Liss}}H_!, {}^{\text{Liss}}H^!)$. Voir pour cela les sous-sections 1.4.5 et 1.4.6 et la proposition 1.5.19.

On parlera d'isoéchange lorsque les 2-morphismes d'échange sont des 2-isomorphismes. On a alors la notion naturelle d'isoéchange inverse. La proposition suivante est très simple. Elle donne la méthode pratique de construction de foncteurs croisés.

Proposition 1.2.14. — Soient $G^1 : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathfrak{D}$ un 2-foncteur contravariant et $F_2 : \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathfrak{D}$ un 2-foncteur covariant. On suppose donné un échange sur (G^1, F_2) de type \searrow qui soit un isoéchange. On suppose également que G^1 et F_2 admettent chacun un adjoint global à droite qu'on notera F_1 et G^2 respectivement. Il existe alors :

- un échange sur (F_1, F_2) obtenu à partir de l'isoéchange (de type \searrow) sur (G^1, F_2) et l'adjonction entre F_1 et G^1 .
- un échange sur (G^1, G^2) obtenu à partir de l'isoéchange inverse (de type \swarrow) sur (G^1, F_2) et l'adjonction entre G^2 et F_2 .

La donnée de (G^1, F_1, F_2, G^2) ainsi que les adjonctions et les échanges ci-dessus définit un foncteur croisé. De plus, l'isoéchange sur (F_1, G^2) est obtenu par adjonction de celui de (G^1, F_2) .

1.3. Préliminaires 2-catégoriques III : Un critère de prolongement pour les 2-foncteurs

Cette section est consacrée à la preuve du théorème suivant :

Théorème 1.3.1

Données A. — Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des produits fibrés. Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux sous-catégories (non nécessairement pleines) de \mathcal{C} vérifiant les conditions suivantes.

1. Les isomorphismes sont dans \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Les flèches de \mathcal{C}_1 (resp. de \mathcal{C}_2) sont stables par pull-back suivant toute flèche de \mathcal{C} .
2. Toute flèche f de \mathcal{C} se factorise : $f = f_2 \circ f_1$ avec f_i dans \mathcal{C}_i pour $i = 1, 2$.
3. Pour toute flèche $B \longrightarrow A$ de \mathcal{C} la diagonale $B \longrightarrow B \times_A B$ est dans \mathcal{C}_1 .

Données B. — Supposons données une 2-catégorie \mathcal{D} et deux 2-foncteurs covariants :

$$H_i : \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{D}$$

tels que pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $H_1(X) = H_2(X) = H(X)$. On suppose également donné un isoéchange codirectionnel de type \swarrow sur le couple (H_1, H_2) pour la classe des carrés commutatifs ayant les flèches verticales dans \mathcal{C}_2 et les flèches horizontales dans \mathcal{C}_1 . Plus explicitement que pour tout carré commutatif (C) :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{i'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{i} & \bullet \end{array}$$

avec i, i' dans \mathcal{C}_1 et f, f' dans \mathcal{C}_2 , on a un 2-isomorphisme :

$$a(C) : H_2(f) \circ H_1(i') \xrightarrow{\sim} H_1(i) \circ H_2(f') \quad : \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{H_1(i')} & \bullet \\ \downarrow H_2(f') & \not\cong & \downarrow H_2(f) \\ \bullet & \xrightarrow{H_1(i)} & \bullet \end{array}$$

compatible aux 2-isomorphismes de connexions c_i des 2-foncteurs H_i de la manière habituelle (voir la définition 1.2.1). On supposera de plus que pour $i = \text{id}$ et $i' = \text{id}$ (resp. $f = \text{id}$ et $f' = \text{id}$) le 2-morphisme $a(C)$ est l'identité.

Conclusion. — Il existe alors un 2-foncteur :

$$H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

tel que $H(X) = H_1(X) = H_2(X)$ pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, ainsi que des isomorphismes de 2-foncteurs :

$$u_i : H \circ [\mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}] \longrightarrow H_i$$

pour $i = 1, 2$ qui soient l'identité sur les objets et tel que l'échange sur (H_1, H_2) soit la restriction de l'échange trivial sur (H, H) par les isomorphismes u_1 et u_2 . De plus le triplet (H, u_1, u_2) est unique à un isomorphisme unique près.

Démonstration de l'unicité. — On donne d'abord la preuve de l'unicité. Soit $H' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un autre 2-foncteur prolongeant les H_i et u'_i un isomorphisme de 2-foncteurs entre la restriction de H à \mathcal{C}_i et H_i . On supposera également que u'_i est l'identité sur les objets. On a ainsi pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$: $H'(X) = H(X)$. Si f est

une flèche de \mathcal{C} on choisit une factorisation $f = f_2 \circ f_1$ avec f_i des flèches de \mathcal{C}_i . On définit ensuite un 2-isomorphisme : $H'(f) \longrightarrow H(f)$ en prenant la composition :

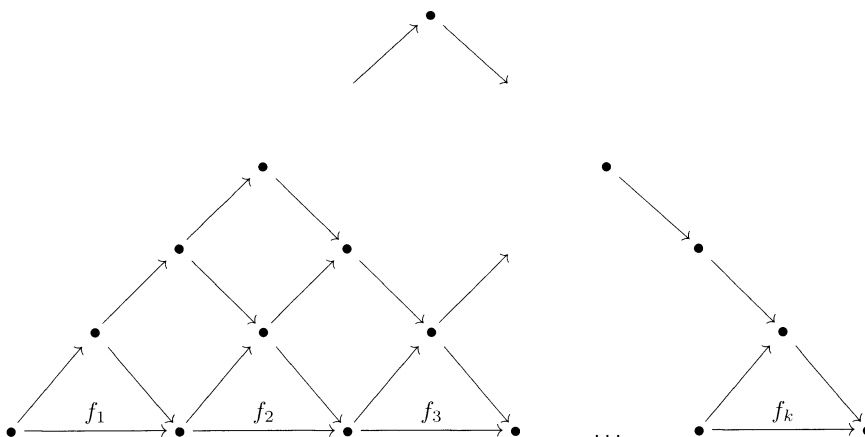
$$H'(f) \longrightarrow H'(f_2) \circ H'(f_1) \longrightarrow H_2(f_2) \circ H_1(f_1) \longrightarrow H(f_2) \circ H(f_1) \longrightarrow H(f)$$

Ce 2-isomorphisme ne dépendent que de f et pas du choix de la factorisation. De plus la famille de ces 2-isomorphismes (un pour chaque f) est compatible aux 2-isomorphismes de connexions. Elle fournit donc un isomorphisme entre H' et H . C'est en plus le seul isomorphisme commutant avec les u_i et u'_i . On laisse les détails aux lecteurs. \square

Le reste de la section sera consacré à la construction d'un 2-foncteur H . On sait déjà que $H(X) = H_1(X) = H_2(X)$ pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Le problème est donc de construire les 1-morphismes $H(f)$ pour $f \in \text{Fl}(\mathcal{C})$ ainsi que les 2-isomorphismes de connexion et de vérifier la compatibilité. On commence par introduire quelques catégories :

1.3.1. Les catégories Δ_k . — Soit $\bullet \xrightarrow{f_1} \bullet \xrightarrow{f_2} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{f_k} \bullet$ une suite de k morphismes composables de \mathcal{C} . On introduit la catégorie : $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ définie de la manière suivante.

- Les objets de $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ sont les diagrammes commutatifs qui ont la forme suivante :



tels que toutes les flèches \nearrow sont dans \mathcal{C}_1 et toutes les flèches \searrow sont dans \mathcal{C}_2 .

- Une flèche de $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ entre deux tels diagrammes est la donnée de $\frac{1}{2}k(k+1)$ flèches dans \mathcal{C}_2 reliant les objets qui ne sont pas sur la base et se trouvant au même niveau et tel que le diagramme résultant (en identifiant les bases des deux triangles entre eux) commute.

Pour clarifier cette définition nous traitons avec plus de détails le cas $k = 2$. Un objet de $\Delta_2(f_1, f_2)$ est un diagramme commutatif de la forme :

$$(12) \quad \begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & c_1 \nearrow & & \searrow c_2 & \\ & Y & & Z & \\ a_1 \nearrow & & & & \searrow b_2 \\ X_0 & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\ & b_1 \searrow & & \nearrow a_2 & \end{array}$$

avec a_1, a_2 et c_1 des flèches dans \mathcal{C}_1 et b_1, b_2 et c_2 des flèches dans \mathcal{C}_2 .

Prenons un autre objet de $\Delta_2(f_1, f_2)$:

$$(13) \quad \begin{array}{ccccc} & & T' & & \\ & c'_1 \nearrow & & \searrow c'_2 & \\ & Y' & & Z' & \\ a'_1 \nearrow & & & & \searrow b'_2 \\ X_0 & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\ & b'_1 \searrow & & \nearrow a'_2 & \end{array}$$

Une flèche dans $\Delta_2(f_1, f_2)$ de ce dernier objet vers le premier est la donnée de 3 flèches $p_T : T' \longrightarrow T$, $p_Y : Y' \longrightarrow Y$ et $p_Z : Z' \longrightarrow Z$ rendant l'union des deux diagrammes commutative et tels que p_T, p_Y et p_Z soient dans \mathcal{C}_2 .

La remarque suivante sera utile pour prouver la connexité des catégories $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$:

Remarque 1.3.2. — Supposons donné un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \uparrow & & \uparrow q \\ A & \xrightarrow{h} & B \\ p' \downarrow & & \downarrow q' \\ X' & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

avec p, q, p' et q' dans \mathcal{C}_2 et f, g et h quelconques dans \mathcal{C} . Soient $f = f_2 \circ f_1$ et $g = g_2 \circ g_1$ des factorisations de f et g avec $f_i, g_i \in \mathcal{C}_i$. Il existe alors une factorisation $h = h_2 \circ h_1$ comme ci-dessus et des flèches l et l' dans \mathcal{C}_2 tel que le diagramme

suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f_1} & \bullet & \xrightarrow{f_2} & Y \\
 p \uparrow & & l \uparrow & & q \uparrow \\
 A & \xrightarrow{h_1} & \bullet & \xrightarrow{h_2} & B \\
 p' \downarrow & & l' \downarrow & & q' \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{g_1} & \bullet & \xrightarrow{g_2} & Y'
 \end{array}$$

En effet, soit C_0 la limite inverse du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{f_2} & Y \\
 & & \uparrow q \\
 & & B \\
 & & \downarrow q' \\
 T' & \xrightarrow{g_2} & Y
 \end{array}$$

On obtient alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f_1} & T & \xrightarrow{f_2} & Y \\
 p \uparrow & & l_0 \uparrow & & q \uparrow \\
 A & \xrightarrow{a} & C_0 & \xrightarrow{b} & B \\
 p' \downarrow & & l'_0 \downarrow & & q' \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{g_1} & T' & \xrightarrow{g_2} & Y
 \end{array}$$

Les morphismes l_0 , l'_0 et b sont dans \mathcal{C}_2 . Choisissons maintenant une factorisation de a :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{h_1} & C \\
 & \searrow a & \downarrow m \\
 & & C_0
 \end{array}$$

avec h_1 dans \mathcal{C}_1 et m dans \mathcal{C}_2 . Ceci donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f_1} & T & \xrightarrow{f_2} & Y \\
 p \uparrow & & l \uparrow & & q \uparrow \\
 A & \xrightarrow{h_1} & C & \xrightarrow{m} & C_0 & \xrightarrow{b} & B \\
 p' \downarrow & & l' \downarrow & & l'_0 \downarrow & & q' \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{g_1} & T' & \xrightarrow{g_2} & Y
 \end{array}$$

Il est clair qu'on prenant $h_2 = b \circ m$ on obtient le résultat recherché.

Lemme 1.3.3. — *Les catégories $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ sont connexes.*

Démonstration. — On fera la démonstration pour $k = 2$. Le cas général est strictement pareil. Il s'agit d'appliquer le nombre de fois nécessaire la remarque précédente qui assure l'existence de bonnes factorisations. Prenons les deux objets 12 et 13 de $\Delta_2(f_1, f_2)$ considérés ci-dessus. Supposons construits un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & B \\ & \nearrow & & \searrow u & \nearrow v \\ X_0 & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\ & \nwarrow & & \swarrow & \nwarrow \end{array}$$

et des flèches $p : A \longrightarrow Y$, $q : B \longrightarrow Z$, $p' : A \longrightarrow Y'$ et $q' : B \longrightarrow Z'$ rendant commutative la réunion des trois diagrammes. On a ainsi le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{c_1} & T & \xrightarrow{c_2} & Z \\ p \uparrow & & & & \uparrow q \\ A & \xrightarrow{v \circ u} & B & & \\ p' \downarrow & & & & \downarrow q' \\ Y' & \xrightarrow{c'_1} & T' & \xrightarrow{c'_2} & Z' \end{array}$$

D'après la remarque 1.3.2, on peut compléter ce diagramme pour obtenir un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{c_1} & T & \xrightarrow{c_2} & Z \\ p \uparrow & & l \uparrow & & \uparrow q \\ A & \xrightarrow{w_1} & C & \xrightarrow{w_2} & B \\ p' \downarrow & & l' \downarrow & & \downarrow q' \\ Y' & \xrightarrow{c'_1} & T' & \xrightarrow{c'_2} & Z' \end{array}$$

avec w_2 , l et l' dans \mathcal{C}_2 , w_1 dans \mathcal{C}_1 et $w_1 \circ w_2 = v \circ u$. Ceci donne alors des flèches vers chacun des deux objets de départ qui partent de l'objet :

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \nearrow w_1 & & \searrow w_2 & \\ & A & & B & \\ & \nearrow & & \searrow u & \nearrow v \\ X_0 & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\ & \nwarrow & & \swarrow & \nwarrow \end{array}$$

Ceci prouve la connexité de la catégorie $\Delta_2(f_1, f_2)$. □

On peut définir deux foncteurs évidents reliant les catégories Δ_k :

1. $\Delta_{k_1+k_2}(f_1, \dots, f_{k_1+k_2}) \longrightarrow \Delta_{k_1}(f_1, \dots, f_{k_1}) \times \Delta_{k_2}(f_{k_1+1}, \dots, f_{k_1+k_2})$ qui consiste à effacer une partie du triangle de base $f_1 \dots f_{k_1+k_2}$ pour ne garder que les deux sous-triangles de base f_1, \dots, f_{k_1} et $f_{k_1+1}, \dots, f_{k_1+k_2}$.
2. $\phi_i : \Delta_k(f_1, \dots, f_i, f_{i+1}, \dots, f_k) \longrightarrow \Delta_{k-1}(f_1, \dots, f_{i-1}, f_i \circ f_{i+1}, f_{i+2}, \dots, f_k)$ qui consiste à composer les flèches situées dans chacune des deux bandes de base les deux cotés du sous-triangle de base (f_i, f_{i+1}) .

La proposition qui suit est triviale :

Proposition 1.3.4. — *On a des diagrammes commutatifs :*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{k_1+k_2+k_3} & \xrightarrow{\quad} & \Delta_{k_1+k_2} \times \Delta_{k_3} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{k_1} \times \Delta_{k_2+k_3} & \xrightarrow{\quad} & \Delta_{k_1} \times \Delta_{k_2} \times \Delta_{k_3} \end{array}$$

et pour $j < i < k$:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_k & \xrightarrow{\phi_i} & \Delta_{k-1} \\ \phi_j \downarrow & & \downarrow \phi_j \\ \Delta_{k-1} & \xrightarrow{\phi_{i-1}} & \Delta_{k-2} \end{array}$$

1.3.2. Foncteur associé à un chemin. — On appellera k -chemin une façon de parcourir un diagramme quelconque dans $\text{Ob}(\Delta_k)$ en respectant le sens des flèches. En d'autres termes, un chemin c'est le choix d'une suite $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2k})$ tels que :

- $\epsilon_i = -1$ ou $= +1$,
- $\sum_{i=1}^{2k} \epsilon_i = 0$,
- $\sum_{i=1}^l \epsilon_i \geq 0$ pour tout $1 \leq l \leq 2k$.

À une telle suite correspond le chemin qui consiste à prendre (lorsque on est sur le i -ème \bullet) la direction \nearrow si $\epsilon_i = +1$ et \searrow si $\epsilon_i = -1$. Les deux dernières conditions sur les ϵ_i assurent que :

- on part de $X_0 = \text{source}(f_1)$ pour arriver à $X_k = \text{but}(f_k)$,
- on ne descend jamais au-dessous de la base, *i.e.*, on reste dans le triangle.

Pour tout k -chemin $c = (\epsilon_i)_i$ on peut associer à un objet de $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ une suite de flèches composables de \mathcal{C} :

$$X_0 \xrightarrow{a_1} \bullet \xrightarrow{b_1} \bullet \xrightarrow{a_2} \bullet \quad \dots \quad \bullet \xrightarrow{a_k} \bullet \xrightarrow{b_k} X_k$$

qu'on appellera la section de l'objet suivant c . Elle est obtenue en oubliant toutes les flèches qui ne se trouvent pas sur le chemin. Les flèches a_i sont donc dans $\mathcal{C}_{(3+\epsilon_{2i-1})/2}$ et les b_i dans $\mathcal{C}_{(3+\epsilon_{2i})/2}$. De plus : $f_k \circ \dots \circ f_1 = b_{2k} \circ a_{2k} \circ \dots \circ b_1 \circ a_1$.

Cette association est fonctorielle au sens suivant. À une flèche de $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ on peut associer un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_0 & \xrightarrow{a'_1} & \bullet & \xrightarrow{b'_1} & \bullet & \xrightarrow{a'_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{a'_k} & \bullet & \xrightarrow{b'_k} & X_k \\
 \parallel & & \downarrow q_1 & & \downarrow p_2 & & \downarrow q_2 & & \downarrow p_k & & \downarrow q_k & & \parallel \\
 X_0 & \xrightarrow{a_1} & \bullet & \xrightarrow{b_1} & \bullet & \xrightarrow{a_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{a_k} & \bullet & \xrightarrow{b_k} & X_k
 \end{array}$$

obtenu en oubliant tout, sauf les flèches reliant les objets par lesquels on passe quand on suit notre chemin c .

Reprenons à présent les données de l'énoncé du théorème 1.3.1. Fixons un chemin $c = (\epsilon_i)_i$. On va construire à partir de c un foncteur :

$$\psi(c) : \Delta_k(f_1, \dots, f_k) \longrightarrow \mathcal{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_k))$$

Soit \mathcal{X} un objet de $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$, on notera $\psi(c)(\mathcal{X})$ le 1-morphisme de \mathfrak{D} donné par la composée :

$$\mathbf{H}_{\sigma_{2k}}(b_k) \circ \mathbf{H}_{\sigma_{2k-1}}(a_k) \circ \mathbf{H}_{\sigma_{2k-2}}(b_{k-1}) \circ \dots \circ \mathbf{H}_{\sigma_2}(b_1) \circ \mathbf{H}_{\sigma_1}(a_1)$$

où $\sigma_i = (3 + \epsilon_i)/2$ et :

$$X_0 \xrightarrow{a_1} \bullet \xrightarrow{b_1} \bullet \xrightarrow{a_2} \bullet \quad \dots \quad \bullet \xrightarrow{a_k} \bullet \xrightarrow{b_{2k}} X_k$$

est la section de \mathcal{X} suivant le chemin c .

Soit une flèche $m : \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}$ entre deux objets de $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$. À cette flèche on peut associer un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_0 & \xrightarrow{a'_1} & \bullet & \xrightarrow{b'_1} & \bullet & \xrightarrow{a'_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{a'_k} & \bullet & \xrightarrow{b'_k} & X_k \\
 \parallel & & \downarrow q_1 & & \downarrow p_2 & & \downarrow q_2 & & \downarrow p_k & & \downarrow q_k & & \parallel \\
 X_0 & \xrightarrow{a_1} & \bullet & \xrightarrow{b_1} & \bullet & \xrightarrow{a_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{a_k} & \bullet & \xrightarrow{b_k} & X_k
 \end{array}$$

avec les flèches verticales dans \mathcal{C}_2 . On définit un 2-isomorphisme $\psi(c)(m) : \psi(c)(\mathcal{X}') \xrightarrow{\sim} \psi(c)(\mathcal{X})$ en prenant la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{H}(X_0) & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_1}(a'_1)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_2}(b'_1)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_3}(a'_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2k-1}}(a'_k)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2k}}(b'_k)} & \mathbf{H}(X_k) \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 \mathbf{H}(X_0) & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_1}(a_1)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_2}(b_1)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_3}(a_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2k-1}}(a_k)} & \bullet & \xrightarrow{\mathbf{H}_{\sigma_{2k}}(b_k)} & \mathbf{H}(X_k)
 \end{array}$$

Les 1-morphismes verticaux étant les $H_2(p_?)$ et $H_2(q_?)$. Les 2-isomorphismes qui figurent dans le diagramme planaire précédent sont les suivants :

1. Le 2-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2t-1}}(a'_t)} & \bullet \\ H_2(p_t) \downarrow & \swarrow & \downarrow H_2(q_t) \\ \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2t-1}}(a_t)} & \bullet \end{array}$$

est :

$$\begin{aligned} & - a \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{a'_t} & \bullet \\ p_t \downarrow & & \downarrow q_t \\ \bullet & \xrightarrow{a_t} & \bullet \end{array} \right) \quad \text{lorsque } \sigma_{2t-1} = 1, \\ & - c_2(p_t, a_t) \circ c_2(a'_t, q_t)^{-1} \quad \text{lorsque } \sigma_{2t-1} = 2. \end{aligned}$$

2. Le 2-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2t}}(b'_t)} & \bullet \\ H_1(q_t) \downarrow & \swarrow & \downarrow H_1(p_{t+1}) \\ \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2t}}(b_t)} & \bullet \end{array}$$

est :

$$\begin{aligned} & - a \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{b'_t} & \bullet \\ q_t \downarrow & & \downarrow p_{t+1} \\ \bullet & \xrightarrow{b_t} & \bullet \end{array} \right) \quad \text{lorsque } \sigma_{2t} = 1., \\ & - c_2(q_t, b_t) \circ c_2(b'_t, p_{t+1})^{-1} \quad \text{lorsque } \sigma_{2t} = 2. \end{aligned}$$

On a le lemme :

Lemme 1.3.5. — La donnée des $\psi(c)(\mathcal{X})$ ainsi que des $\psi(c)(m)$ définit un foncteur covariant :

$$\psi(c) : \Delta_k(f_1, \dots, f_k) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(H(X_0), H(X_k))$$

De plus, toute flèche de $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ est envoyée sur un isomorphisme par $\psi(c)$.

Démonstration. — Il s'agit de prouver que les 1-isomorphismes $\psi(c)(m)$ sont compatibles à la composition. C'est-à-dire, pour toute suite : $\mathcal{X}'' \xrightarrow{n} \mathcal{X}' \xrightarrow{m} \mathcal{X}$ on a l'égalité : $\psi(c)(m) \circ \psi(c)(n) = \psi(c)(m \circ n)$. En prenant les sections suivant c on

obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_0 & \xrightarrow{a''_1} & \bullet & \xrightarrow{b''_1} & \bullet & \xrightarrow{a''_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{a''_k} & \bullet & \xrightarrow{b''_k} & \bullet & \xrightarrow{a''_{k+1}} & X_k \\
 \parallel & & \downarrow v_1 & & \downarrow u_2 & & \downarrow v_2 & & \downarrow u_k & & \downarrow v_k & & \parallel & & \\
 X_0 & \xrightarrow{a'_1} & \bullet & \xrightarrow{b'_1} & \bullet & \xrightarrow{a'_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{a'_k} & \bullet & \xrightarrow{b'_k} & \bullet & \xrightarrow{a'_{k+1}} & X_k \\
 \parallel & & \downarrow q_1 & & \downarrow p_2 & & \downarrow q_2 & & \downarrow p_k & & \downarrow q_k & & \parallel & & \\
 X_0 & \xrightarrow{a_1} & \bullet & \xrightarrow{b_1} & \bullet & \xrightarrow{a_2} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{a_k} & \bullet & \xrightarrow{b_k} & \bullet & \xrightarrow{a_{k+1}} & X_k
 \end{array}$$

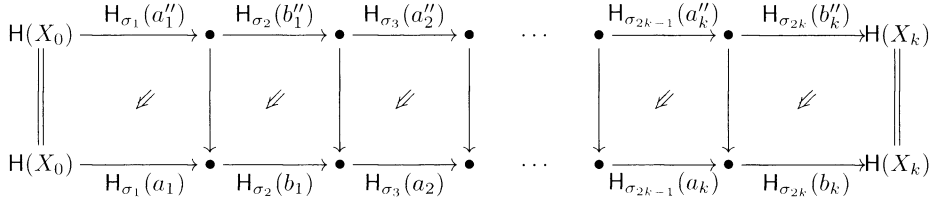
Les diagrammes solides :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{H_{\sigma_{2t-1}}(a''_t)} & \\
 \swarrow H_2(u_t) & & \searrow H_2(v_t) \\
 \bullet & \xrightarrow{H_2(p_t \circ u_t)} & \bullet \\
 \swarrow H_2(p_t) & & \searrow H_2(q_t) \\
 \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2t-1}}(a'_t)} & \bullet \\
 & \xrightarrow{H_{\sigma_{2t-1}}(a_t)} & \\
 & \xrightarrow{H_2(q_t \circ v_t)} &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{H_{\sigma_{2t}}(b''_t)} & \\
 \swarrow H_2(v_t) & & \searrow H_2(u_{t+1}) \\
 \bullet & \xrightarrow{H_2(q_t \circ v_t)} & \bullet \\
 \swarrow H_2(q_t) & & \searrow H_2(p_{t+1}) \\
 \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2t}}(b'_t)} & \bullet \\
 & \xrightarrow{H_{\sigma_{2t}}(b_t)} & \\
 & \xrightarrow{H_2(p_{t+1} \circ u_{t+1})} &
 \end{array}$$

En effet si $\sigma_\gamma = 2$ ceci découle de la relation de cocycle des morphismes de connexions pour H_1 . Si $\sigma_\gamma = 1$ ceci découle de la compatibilité des 2-isomorphismes $a(\cdot)$ avec la composition verticale des carrés (voir la définition 1.2.1). Ceci prouve donc que la composée du diagramme planaire :

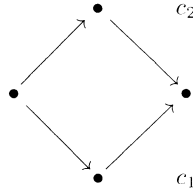
$$(14) \quad \begin{array}{ccccccc}
 H(X_0) & \xrightarrow{H_{\sigma_1}(a''_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_2}(b''_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_3}(a''_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k-1}}(a''_k)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k}}(b''_k)} & H(X_k) \\
 \parallel & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \parallel \\
 H(X_0) & \xrightarrow{H_{\sigma_1}(a'_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_2}(b'_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_3}(a'_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k-1}}(a'_k)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k}}(b'_k)} & H(X_k) \\
 \parallel & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \parallel \\
 H(X_0) & \xrightarrow{H_{\sigma_1}(a_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_2}(b_1)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_3}(a_2)} & \bullet & \dots & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k-1}}(a_k)} & \bullet & \xrightarrow{H_{\sigma_{2k}}(b_k)} & H(X_k)
 \end{array}$$

est égale à la composée du diagramme planaire :



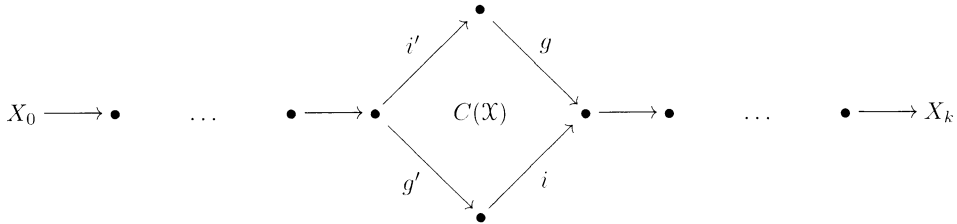
Mais la composée du diagramme planaire 14 est égale à $\psi(c)(m) \circ \psi(n)$. Ceci se voit en découpant le diagramme selon la ligne horizontale du milieu. Il vient qu'on a l'égalité : $\psi(c)(m \circ n) = \psi(c)(m) \circ \psi(c)(n)$. C'est exactement ce que l'on cherche à prouver. \square

Dans le reste de cette sous-section on va construire des transformations naturelles entre les $\psi(c)$ pour différents chemins c . Soient c_1 et c_2 deux k -chemins qui coïncident partout sauf en un bout de chemin :



C'est-à-dire, si $c_1 = (\epsilon_i^1)_i$ et $c_2 = (\epsilon_i^2)_i$ on a $\epsilon_i^1 = \epsilon_i^2$ pour tout $1 \leq i \leq k$ sauf pour $i = i_0, i_0 + 1$ où on a $\epsilon_{i_0}^1 = -\epsilon_{i_0}^2 = -1$ et $\epsilon_{i_0+1}^1 = -\epsilon_{i_0+1}^2 = +1$. On va construire une transformation naturelle : $t_{c_2, c_1} : \psi(c_2) \longrightarrow \psi(c_1)$ qui va être en fait un isomorphisme de foncteurs.

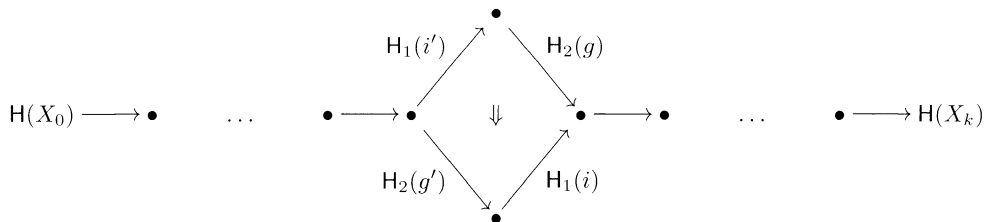
Fixons un objet \mathcal{X} de $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$. On prenant la section suivant c_1 et puis c_2 , on obtient un diagramme commutatif :



On prend alors pour $t(c_2, c_1)_{\mathcal{X}}$ le 2-isomorphisme :

$$t(c_2, c_1)_{\mathcal{X}} : \dots \circ H_1(i)H_2(g') \circ \dots \xrightarrow{a(C(\mathcal{X}))} \dots \circ H_2(g)H_1(i') \circ \dots$$

En d'autres termes le 2-isomorphisme $t(c_2, c_1)_X$ est le 2-isomorphisme représenté par :



Lemme 1.3.6. — Les 2-isomorphismes $t(c_2, c_1)_X$ définissent une transformation naturelle :

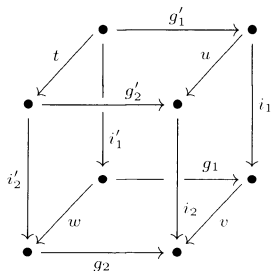
$$t(c_2, c_1) : \psi(c_2) \longrightarrow \psi(c_1)$$

De plus c'est un isomorphisme de foncteurs.

Démonstration. — Soit une flèche $\xi : X_1 \longrightarrow X_2$ de $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$. Il s'agit de vérifier la formule :

$$(15) \quad t(c_2, c_1)_{X_2} \psi(c_1)(\xi) = \psi(c_2)(\xi) t(c_2, c_1)_{X_1}$$

La flèche ξ induit un morphisme de carrés commutatifs dans $\mathcal{C} : C(X_1) \xrightarrow{\xi} C(X_2)$. On le représente par le cube :



Il est facile de voir que l'égalité (15) découle de la commutativité du diagramme solide :

(16)

obtenu en appliquant les 2-foncteurs H_1 et H_2 et en prenant les 2-isomorphismes $a(\text{Carré})$ pour les carrés mixtes *i.e.* (où il y a H_1 et H_2). Pour voir que le cube (16) est bien commutatif⁽²⁾, on le divise en deux parties selon les 1-morphismes en pointillés correspondant à $H_2(g'_2 \circ t) = H_2(u \circ g'_1)$ et $H_2(g_2 \circ w) = H_2(v \circ g_1)$. Mais les deux sous-diagrammes solides ainsi obtenus sont commutatifs par la compatibilité avec les compositions verticales (u, v, w et t sont dans \mathcal{C}_2 !). Le lemme est prouvé. \square

Les transformations $t(c_2, c_1)$ commutent entre elles. Plus précisément si c_1, c_2, c_3 et c_4 sont trois chemins qui coïncident partout sauf en $i_0, i_0 + 1$ et $i_1, i_1 + 1$ de telle sorte qu'on a :

$$c_1 : \nearrow \searrow \nearrow \quad c_2 : \nearrow \searrow \searrow \quad c_3 : \searrow \nearrow \nearrow \quad c_4 : \nearrow \searrow \nearrow \searrow$$

On a un diagramme commutatif de transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccc} \psi(c_4) & \xrightarrow{t(c_4, c_3)} & \psi(c_3) \\ t(c_4, c_2) \downarrow & & \downarrow t(c_3, c_1) \\ \psi(c_2) & \xrightarrow{t(c_2, c_1)} & \psi(c_1) \end{array}$$

Ceci nous permet alors de définir un isomorphisme de foncteurs :

$$t(c, c') : \psi(c) \xrightarrow{\sim} \psi(c')$$

pour tout couple de k -chemins (c, c') . Ces isomorphismes vérifient la relation :

$$(17) \quad t(c', c'') \circ t(c, c') = t(c, c'')$$

pour tout triplet (c, c', c'') de k -chemins.

1.3.3. Récapitulation. Fin des préliminaires. — Soit c_i un k_i -chemin pour $i = 1, 2$. On peut former un $(k_1 + k_2)$ -chemin en concaténant c_1 puis c_2 . On note $c_1 * c_2$ le chemin ainsi obtenu. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{k_1+k_2}(f_1, \dots, f_{k_1+k_2}) & \xrightarrow{\quad} & \Delta_{k_1}(f_1, \dots, f_k) \times \Delta_{k_2}(f_{k_1+1}, \dots, f_{k_1+k_2}) \\ \psi(c_1 * c_2) \downarrow & & \downarrow \psi(c_1) \times \psi(c_2) \\ \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_{k_1+k_2})) & \xleftarrow[\text{Composition}]{} & \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_{k_1})) \times \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_{k_1+1}), \mathbf{H}(X_{k_1+k_2})) \end{array}$$

Soit maintenant c_{\max} le k -chemin maximal, *i.e.*, celui donné par k (+1) suivis de k (−1). On a alors un foncteur évident :

$$\Delta_k(f_1, \dots, f_k) \longrightarrow \Delta_1(f)$$

⁽²⁾L'astuce utilisée pour prouver la commutativité du cube 16 sera reprise plusieurs fois dans la suite. Le lecteur sera parfois renvoyé à la preuve de la proposition 1.5.11.

où $f = f_k \circ \cdots \circ f_1$. Ce foncteur consiste à composer les flèches sur chacun des deux cotés obliques du triangle. Ce n'est autre que l'une des composées : ϕ_1^{k-1} ou $\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_{k-1}$. On obtient ainsi deux foncteurs :

$$\begin{aligned} \Delta_k(f_1, \dots, f_k) &\xrightarrow{\psi(c_{\max})} \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_k)) \\ \Delta_k(f_1, \dots, f_k) &\longrightarrow \Delta_1(f) \longrightarrow \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_k)) \end{aligned}$$

Ces deux foncteurs ne sont pas égaux en général. On va construire une transformation naturelle entre eux qui va être un isomorphisme. Soit \mathcal{X} un objet de $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$. Soit :

$$X_0 \xrightarrow{i_1} \bullet \quad \dots \quad \bullet \xrightarrow{i_k} \bullet \xrightarrow{p_1} \bullet \quad \dots \quad \bullet \xrightarrow{p_k} X_k$$

la section de \mathcal{X} selon c_{\max} . Notons que par le choix du chemin maximal tous les i_l sont dans \mathcal{C}_1 et tous les p_l sont dans \mathcal{C}_2 . La section de l'image de \mathcal{X} dans $\Delta_1(f)$ est simplement le diagramme :

$$X_0 \xrightarrow{i} \bullet \xrightarrow{p} X_k$$

Il s'agit de construire un 2-morphisme $\sigma_{\mathcal{X}}$ entre les deux 1-morphismes : $\mathbf{H}_2(p) \circ \mathbf{H}_1(i)$ et $\mathbf{H}_2(p_k) \circ \cdots \circ \mathbf{H}_2(p_1) \circ \mathbf{H}_1(i_k) \circ \mathbf{H}_1(i_1)$. On prendra bien sûr le morphisme : $c_1(i_1, \dots, i_k) c_2(p_1, \dots, p_k) : \mathbf{H}_2(p) \circ \mathbf{H}_1(i) \longrightarrow \mathbf{H}_2(p_k) \circ \cdots \circ \mathbf{H}_2(p_1) \circ \mathbf{H}_1(i_k) \circ \mathbf{H}_1(i_1)$

Montrons qu'il s'agit bien d'une transformation naturelle. Soit $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ une flèche de $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$. On en déduit alors les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \xrightarrow{i_1} & \bullet & \xrightarrow{i_2} & \bullet & \dots & \bullet \xrightarrow{i_k} \bullet \xrightarrow{p_1} \bullet \dots \bullet \xrightarrow{p_k} X_k \\ \parallel & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \parallel \\ X_0 & \xrightarrow{i'_1} & \bullet & \xrightarrow{i'_2} & \bullet & \dots & \bullet \xrightarrow{p'_k} X_k \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ X_0 & \xrightarrow{i} & \bullet & \xrightarrow{p} & X_k \\ \parallel & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \parallel \\ X_0 & \xrightarrow{i'} & \bullet & \xrightarrow{p'} & X_k \end{array}$$

Notre assertion est donc une conséquence directe de la compatibilité des 2-isomorphismes $a(C)$ avec la composition verticale des carrés commutatifs.

Faisons une petite récapitulation pour fixer les notations avant de continuer. On a défini :

1. Des catégories $\Delta_k(f_1, \dots, f_k)$ pour toute suite de k morphismes composables.
2. Des foncteurs évidents :

$$s_{k_1, k_2} : \Delta_{k_1 + k_2} \longrightarrow \Delta_{k_1} \times \Delta_{k_2}$$

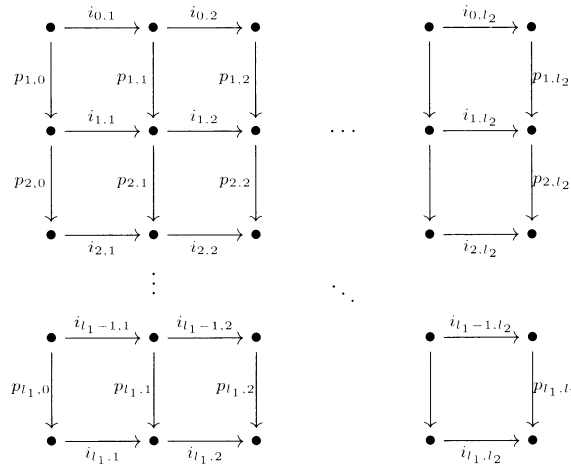
- $\phi_i : \Delta_k \longrightarrow \Delta_{k-1}$. On notera aussi $\phi_{i,l}$ la composée $\phi_i \circ \phi_{i+1} \circ \cdots \circ \phi_{i+l} = \phi_i \circ \cdots \circ \phi_i = \phi_i^l$. On a évidemment la formule : $\phi_{i,l_1+l_2-1} = \phi_{i,l_1} \circ \phi_{i,l_1-1} \circ \phi_{i+l_1,l_2-1} = \phi_i \circ \phi_{i,l_1-1} \circ \phi_{i+l_1,l_2-1}$.
- 3. Des foncteurs $\psi(c) = \psi_k(c) : \Delta_k \longrightarrow \text{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathbf{H}(X_0), \mathbf{H}(X_k))$ attachés à des k -chemins c . On notera c_{\max}^l le l -chemin maximal.
- 4. Des isomorphismes de foncteurs (des transformations naturelles) :
 - $t(c, c') : \psi_k(c) \xrightarrow{\sim} \psi_k(c')$, où c et c' sont deux k -chemins,
 - $\psi_{k_1+k_2}(c_1 * c_2) = \text{Composition}[(\psi_{k_1}(c_1), \psi_{k_2}(c_2)) \circ s_{k_1,k_2}]$, avec c_i des k_i -chemins,
 - $\tau : \psi_{k-l+1}(c_1 * c_{\max}^1 * c_2) \circ \phi_{i,l-1} \xrightarrow{\sim} \psi_k(c_1 * c_{\max}^l * c_2)$ tel que la somme des longueurs de c_1 et c_2 est égale à $k-l$ et c_1 est de longueur i .

On termine les préliminaires par un dernier lemme de compatibilité :

Lemme 1.3.7. — Soient l_1 et l_2 deux entiers positifs. On pose $l = l_1 + l_2$. On a un diagramme commutatif d'isomorphismes de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc}
 \psi_{k-l+1}(c_1 * c_{\max}^1 * c_2) \circ \phi_{i,l-1} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \psi_k(c_1 * c_{\max}^{l_1+l_2} * c_2) \\
 \parallel & & \uparrow \sim \\
 & & \psi_k(c_1 * c_{\max}^{l_1} * c_{\max}^{l_2} * c_2) \\
 & & \uparrow \sim \\
 & & \psi_{k-l+2}(c_1 * c_{\max}^1 * c_{\max}^1 * c_2) \circ \phi_{i,l_1-1} \circ \phi_{i+l_1,l_2-1} \\
 & & \uparrow \sim \\
 \psi_{k-l+1}(c_1 * c_{\max}^1 * c_2) \circ \phi_i \circ \phi_{i,l_1-1} \circ \phi_{i+l_1,l_2-1} & \longrightarrow & \psi_{k-l+2}(c_1 * c_{\max}^2 * c_2) \circ \phi_{i,l_1-1} \circ \phi_{i+l_1,l_2-1}
 \end{array}$$

Démonstration. — On peut évidemment supposer que les chemins c_1 et c_2 sont vides. C'est-à-dire : $k = l = l_1 + l_2 + 2$. Soit \mathfrak{X} un objet de Δ_k . On reproduit la portion du diagramme \mathfrak{X} qui correspond au rectangle compris entre les deux chemins $c_{\max}^{l_1}$ et $c_{\max}^{l_1+l_2}$:



avec les $i_?$ dans \mathcal{C}_1 et les $p_?$ dans \mathcal{C}_2 . Les autres flèches du diagramme \mathcal{X} seront notées de la manière évidente par rapport aux notations précédentes. Par exemple les flèches qui précèdent $i_{0,1}$ sont :

$$i_{0,-l_1+1}, i_{0,-l_1+2}, \dots, i_{0,0}$$

On posera $i_- = i_{0,0} \circ \dots \circ i_{0,1-l_1}$ et $p_+ = p_{l_1+l_2,l_2} \circ \dots \circ p_{l_1+1,l_2}$. On aura également besoin du carré composé :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{i_0} & \bullet \\ p_0 \downarrow & & \downarrow p_{l_2} \\ \bullet & \xrightarrow{i_{l_1}} & \bullet \end{array}$$

Finalement on pose $i = i_0 \circ i_-$ et $p = p_+ \circ p_{l_2}$.

On définit un 2-isomorphisme :

$$H_2(p_{l_1,l_2}) \dots H_2(p_{1,l_2}) H_1(i_{0,l_2}) \dots H_1(i_{0,1}) \longrightarrow H_1(i_{l_1,l_2}) \dots H_1(i_{l_1,1}) H_2(p_{l_1,0}) \dots H_2(p_{1,0})$$




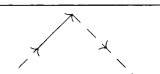
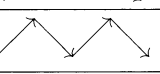
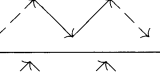
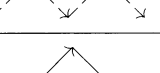
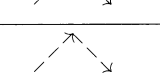
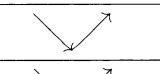

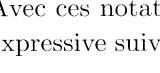
en prenant la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{0,1})} & \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{0,2})} & \bullet \\ \downarrow H_2(p_{1,0}) & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow H_2(p_{1,2}) \\ \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{1,1})} & \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{1,2})} & \bullet \quad \dots \\ \downarrow H_2(p_{2,0}) & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow H_2(p_{2,2}) \\ \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{2,1})} & \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{2,2})} & \bullet \\ & \vdots & & \ddots & \\ \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{l_1-1,1})} & \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{l_1-1,2})} & \bullet \\ \downarrow H_2(p_{l_1,0}) & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow H_2(p_{l_1,l_2}) \\ \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{l_1,1})} & \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{l_1,2})} & \bullet \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{0,l_2})} & \bullet \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow H_2(p_{1,l_2}) \\ \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{1,l_2})} & \bullet \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow H_2(p_{2,l_2}) \\ \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{2,l_2})} & \bullet \\ & \vdots & \\ \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{l_1-1,l_2})} & \bullet \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow H_2(p_{l_1,l_2}) \\ \bullet & \xrightarrow{H_1(i_{l_1,l_2})} & \bullet \end{array}$$

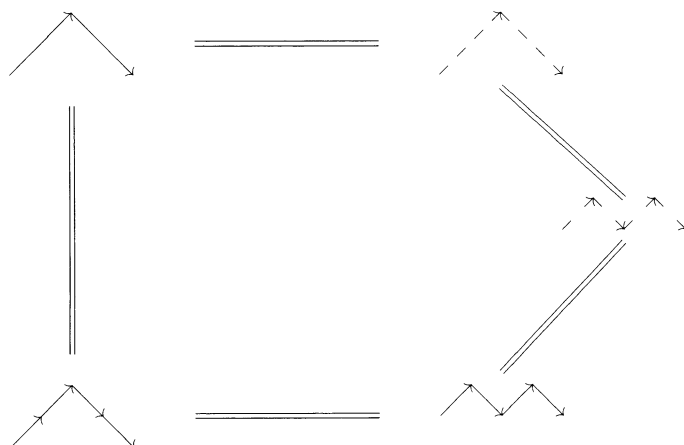
Nous affirmons qu'il suffit de prouver que le carré :

$$(18) \quad \begin{array}{ccc} H_2(p_{l_1,l_2}) \dots H_2(p_{1,l_2}) \circ H_1(i_{0,l_2}) \dots H_1(i_{0,1}) & \longrightarrow & H_2(p_{l_2}) \circ H_1(i_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1(i_{l_1,l_2}) \dots H_1(i_{l_1,1}) \circ H_2(p_{l_1,0}) \dots H_2(p_{1,0}) & \longrightarrow & H_1(i_{l_1}) \circ H_2(p_0) \end{array}$$

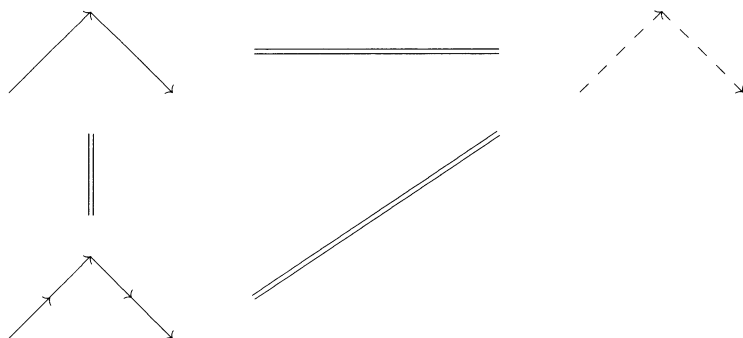
est commutatif. Pour voir cela il est commode d'introduire un petit lexique afin de mieux visualiser l'effet des différentes transformations naturelles :

	$\psi_1(c_{\max}^1) \circ \phi_{1,l-1} = H_2(p) \circ H_1(i)$
	$\psi_l(c_{\max}^l) = H_2(p_{l_1+l_2,l_2}) \circ \cdots \circ H_1(i_{0,-l_1})$
	$\psi_2(c_{\max}^2) \circ \phi_{1,l_1-1} \circ \phi_{l_1+1,l_2-1} = H_2(p_+) \circ H_2(p_{l_2}) \circ H_1(i_0) \circ H_1(i_-)$
	$H_2(p_{l_2+l_1,l_2}) \circ \cdots \circ H_2(p_{l_2}) \circ H_1(i_0) \circ \cdots \circ H_1(i_{0,1-l_1})$
	$\psi_2(c_{\max}^1 * c_{\max}^1) \circ \phi_{1,l_1-1} \circ \phi_{1+l_1,l_2-1} = H_2(p_+) \circ H_1(i_{l_1}) \circ H_2(p_0) \circ H_1(i_-)$
	$H_2(p_{l_2+l_1,l_2}) \circ \cdots \circ H_1(i_{l_1}) \circ H_2(p_0) \circ \cdots \circ H_1(i_{0,1-l_1})$
	$\psi_l(c_{\max}^{l_1} * c_{\max}^{l_2}) = H_2(p_{l_1+l_2,l_2}) \circ \cdots \circ H_1(i_{0,-l_1})$
	$H_2(p_{l_2}) \circ H_1(i_0)$
	$H_2(p_{l_1,l_2}) \circ \cdots \circ H_2(p_{1,l_2}) \circ H_1(i_{0,l_2}) \circ \cdots \circ H_1(i_{0,1})$
	$H_1(i_{l_1}) \circ H_2(p_0)$
	$H_1(i_{l_1,l_2}) \cdots H_1(i_{l_1,1}) H_2(p_{l_1,0}) \cdots H_2(p_{1,0})$

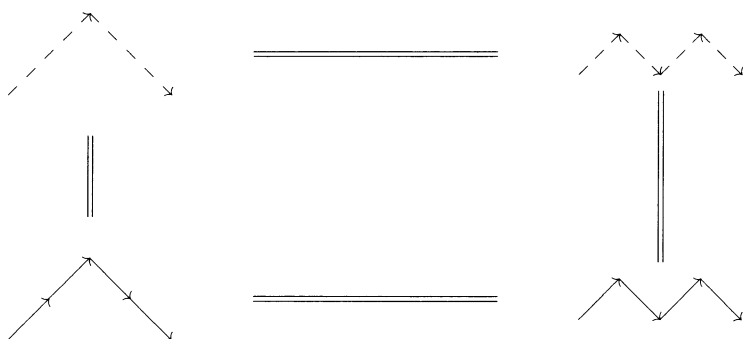
Avec ces notations le diagramme de l'énoncé appliqué à \mathfrak{X} s'écrit sous la forme plus expressive suivante :



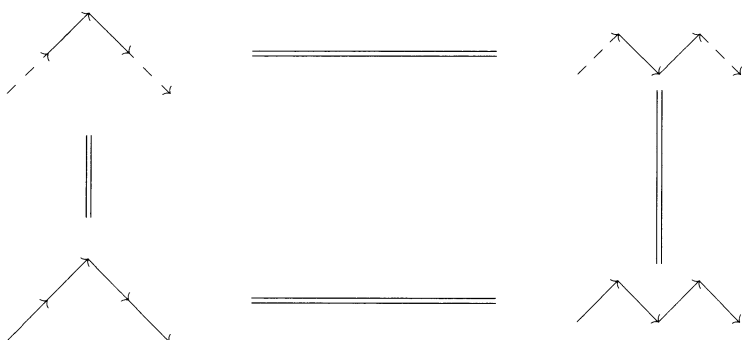
On voit en particulier que ce diagramme se factorise par un triangle commutatif :



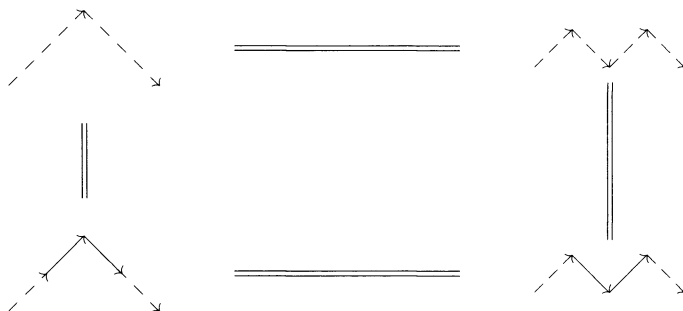
Il suffit donc de prouver que le carré :



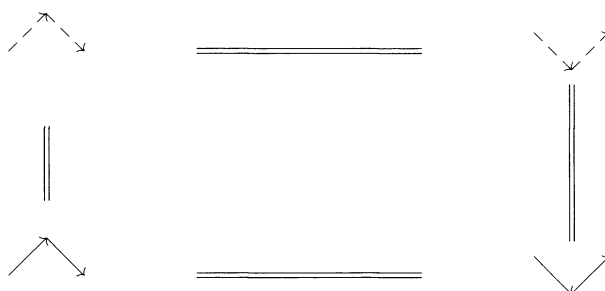
est commutatif. Mais à son tour ce carré se factorise par le carré commutatif :



On est donc ramené à prouver que le carré :



est commutatif. On voit donc qu'il suffit de prouver que le carré :



est commutatif. Mais ce carré n'est autre que le carré (18).

Pour terminer, il reste à prouver que le carré (18) est commutatif. La preuve de ce fait est laissée en exercice aux lecteurs. Il suffit d'utiliser le nombre de fois nécessaire les diagrammes solides de compatibilité des 2-isomorphismes $a(\cdot)$ avec la composition des carrés commutatifs. \square

1.3.4. La construction du 2-foncteur H . — Pour prolonger notre foncteur, on spécialise les résultats précédents pour $k = 1, 2$ et 3 . On définit l'image $\text{Im}(F)$ d'un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ par :

- $\text{Ob}(\text{Im}(F)) = \text{Ob}(\mathcal{A})$,
- pour $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, l'ensemble $\text{hom}_{\text{Im}(F)}(A, B)$ est l'image de $\text{hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(B))$.

Le lecteur vérifie facilement que ces données définissent bien une catégorie et que le foncteur F se factorise uniquement :

$$\mathcal{A} \longrightarrow \text{Im}(F) \longrightarrow \mathcal{B}$$

Le point clef est le lemme 1.3.8 ci-dessous.

Lemme 1.3.8. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de \mathcal{C} . L'image de $\triangle_1(f)$ par le foncteur $\psi(c_{\max}^1)$ est une catégorie directe.

Démonstration. — Étant donnés deux objets :

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ a_1 \nearrow & & \searrow a_2 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & W & \\ b_1 \nearrow & & \searrow b_2 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

et deux flèches $c, d : W \longrightarrow V$ induisant un morphisme de $\Delta_1(f)$, il s'agit de montrer que $\psi(c_{\max}^1)(c) = \psi(c_{\max}^1)(d)$.

On forme les deux objets suivants :

$$\begin{array}{ccc} & V \times_Y V & \\ \Delta \circ a_1 \nearrow & & \searrow a_2 \circ pr_i \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & W \times_Y W & \\ \Delta \circ b_1 \nearrow & & \searrow b_2 \circ pr_i \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

avec Δ le morphisme diagonal et pr_i la projection sur le i -ème facteur (pour $i \in \{1, 2\}$). Il est clair que le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} W & \xleftarrow{pr_1} & W \times_Y W & \xrightarrow{pr_2} & W \\ c \downarrow & & \downarrow c \times d & & \downarrow d \\ V & \xleftarrow{pr_1} & V \times_Y V & \xrightarrow{pr_2} & V \end{array}$$

induit un diagramme commutatif dans $\Delta_1(f)$. Étant donné que $\psi(c_{\max}^1)$ envoie les flèches de $\Delta_1(f)$ sur des isomorphismes, on voit immédiatement qu'il suffit de considérer le cas où c et d sont les projections sur les premier et second facteur d'un produit fibré sur Y . On peut donc supposer que $W = V \times_Y V$. On se ramène immédiatement au cas où $X = V$ et $a = \text{id}$. On a donc à comparer les deux morphismes $\psi(c_{\max}^1)(pr_1)$ et $\psi(c_{\max}^1)(pr_2)$ entre les $\psi(c_{\max}^1)$ des deux objets :

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \parallel \nearrow & & \searrow a \\ V & \xrightarrow{a} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & V \times_Y V & \\ \Delta \nearrow & & \searrow a \circ pr_i \\ V & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Par définition, $\psi(c_{\max}^1)(pr_i)$ est la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc} H(V) & \xrightarrow{H_1(\Delta)} & H(V \times_Y V) & \xrightarrow{H_2(a \circ pr_i)} & H(Y) \\ \parallel & & \downarrow H_2(pr_i) & \swarrow & \parallel \\ H(V) & \xlongequal{\quad} & H(V) & \xrightarrow{H_2(a)} & H(Y) \end{array}$$

C'est aussi la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccc}
 H(V) & \xrightarrow{H_1(\Delta)} & H(V \times_Y V) \\
 \parallel & \searrow & \downarrow H_2(pr_i) \\
 H(V) & \xlongequal{\quad} & H(V) \leftarrow H_2(a \circ pr_i) \\
 \downarrow H_2(a) & \swarrow & \downarrow H_2(a) \\
 H(Y) & \xlongequal{\quad} & H(Y)
 \end{array}$$

Étant donné que la face carrée identité coïncide avec la face déduite de l'échange a (voir à la fin des données B dans l'énoncé du théorème 1.3.1) on déduit que notre 2-morphisme est simplement la face carrée :

$$\begin{array}{ccc}
 H(V) & \xrightarrow{H_1(\Delta)} & H(V \times_Y V) \\
 \downarrow H_2(a) & \searrow & \downarrow H_2(a \circ pr_i) \\
 H(Y) & \xlongequal{\quad} & H(Y)
 \end{array}$$

Cette face est bien indépendante de $i \in \{1, 2\}$. □

On va définir le 2-foncteur H . Si $f : X \longrightarrow Y$ est une flèche de \mathcal{C} , nous poserons :

$$H(f) = \varinjlim_{\Delta_1(f)} (\Delta_1(f) \rightarrow \mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(H(X), H(Y)))$$

Cette limite inductive existe au vu du lemme précédent et du fait que :

- le foncteur $\psi(c_{\max}^1)$ envoie toute flèche de $\Delta_1(f)$ sur un 2-isomorphisme de \mathfrak{D} ,
- la catégorie $\Delta_1(f)$ est connexe.

En fait dans la suite on utilisera constamment les deux propriétés précédentes pour Δ_2 et Δ_3 . Plus précisément :

- les foncteurs $\psi(c)$, $\psi(c) \circ \phi_i$, ... etc envoient toute flèche de Δ_k sur un 2-isomorphisme de \mathfrak{D} ,
- les catégories Δ_k sont connexes et leur image par ces foncteurs sont des sous-catégories directes.

Notons que la propriété de l'image d'être directe se déduit immédiatement du lemme 1.3.8 et du fait que les foncteurs en question sont naturellement isomorphes à $\psi(c_{\max}^1) \circ (\Delta_k \rightarrow \Delta_1)$.

Pour une suite de morphismes composables dans \mathcal{C} :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

on prendra comme 2-isomorphisme de connexion la composée $c(f, g)$ des 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{c}
 \mathrm{H}(g \circ f) = \varinjlim_{\Delta_1(g \circ f)} (\Delta_1(g \circ f) \rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathrm{H}(X), \mathrm{H}(z))) \\
 \parallel \\
 \varinjlim_{\Delta_2(f, g)} (\Delta_2(f, g) \rightarrow \Delta_1(g \circ f) \rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathrm{H}(X), \mathrm{H}(Z))) \\
 \downarrow \sim \\
 \varinjlim_{\Delta_2(f, g)} (\psi_2(c_{\max}^2) : \Delta_2(f, g) \rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathrm{H}(X), \mathrm{H}(Z))) \\
 \sim \downarrow l(c_{\max}^2, c^1 * c^1) \\
 \varinjlim_{\Delta_2(f, g)} (\psi(c^1 * c^1) : \Delta_2(f, g) \rightarrow \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(\mathrm{H}(X), \mathrm{H}(Z))) \\
 \parallel \\
 \varinjlim_{\Delta_1(f) \times \Delta_1(g)} (\mathrm{Composition} \circ (\psi(c_1) \times \psi(c_1))) \\
 \parallel \\
 \mathrm{H}(g) \circ \mathrm{H}(f)
 \end{array}$$

Pour montrer que ceci définit bien un 2-foncteur, il reste à vérifier la relation de cocycle entre les $c(., .)$. Plus précisément pour une suite :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$$

il faut prouver l'égalité : $c(f, hg) \circ c(g, h) = c(f, g) \circ c(gf, h)$. Pour cette fin, on considère le diagramme commutatif de catégories :

$$\begin{array}{ccccc}
 \Delta_1(hgf) & \longleftarrow & \Delta_2(gf, h) & \longrightarrow & \Delta_1(gf) \times \Delta_1(h) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \Delta_2(f, hg) & \longleftarrow & \Delta_3(f, g, h) & \longrightarrow & \Delta_2(f, g) \times \Delta_1(h) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta_1(f) \times \Delta_1(hg) & \longleftarrow & \Delta_1(f) \times \Delta_2(gh) & \longrightarrow & \Delta_1(f) \times \Delta_1(g) \times \Delta_1(h)
 \end{array}$$

Spécialisons le diagramme du lemme 1.3.7 aux cas $k = 3$ et $(k_1, k_2) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$. On obtient ainsi deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 \psi_1(c_{\max}^1) \circ \phi_{1,2} & \xrightarrow{\quad} & \psi_3(c_{\max}^3) \\
 \parallel & & \uparrow \\
 & & \psi_3(c_{\max}^1 * c_{\max}^2) \\
 & & \uparrow \\
 & & \psi_2(c_{\max}^1 * c_{\max}^1) \circ \phi_2 \\
 & & \uparrow \\
 \psi_1(c_{\max}^1) \phi_{1,2} & \xrightarrow{\quad} & \psi_2(c_{\max}^2) \circ \phi_2
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 \psi_1(c_{\max}^1) \circ \phi_{1,2} & \xrightarrow{\quad} & \psi_3(c_{\max}^3) \\
 \parallel & & \uparrow \\
 & & \psi_3(c_{\max}^2 * c_{\max}^1) \\
 & & \uparrow \\
 & & \psi_2(c_{\max}^1 * c_{\max}^1) \circ \phi_1 \\
 & & \uparrow \\
 \psi_1(c_{\max}^1) \phi_{1,2} & \xrightarrow{\quad} & \psi_2(c_{\max}^2) \circ \phi_1
 \end{array}$$

En identifiant les flèches horizontales supérieures des deux diagrammes ci-dessus, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \psi_3(c_{\max}^3) & & \\
 & \swarrow & & \nwarrow & \\
 \psi_3(c_{\max}^1 * c_{\max}^2) & & & & \psi_3(c_{\max}^2 * c_{\max}^1) \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 \psi_2(c_{\max}^1 * c_{\max}^1) \circ \phi_2 & & & & \psi_2(c_{\max}^1 * c_{\max}^1) \circ \phi_1 \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 \psi_2(c_{\max}^2) \circ \phi_2 & & & & \psi_2(c_{\max}^2) \circ \phi_1 \\
 \swarrow & & \psi_1(c_{\max}^1) \circ \phi_{1,2} & & \searrow
 \end{array}$$

En utilisant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \psi_3(c_{\max}^1 * c_{\max}^1 * c_{\max}^1) & & \\
 & \swarrow & \uparrow & \nwarrow & \\
 \psi_3(c_{\max}^1 * c_{\max}^2) & \longrightarrow & \psi_3(c_{\max}^3) & \longleftarrow & \psi_3(c_{\max}^2 * c_{\max}^1)
 \end{array}$$

On obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \psi_3(c_{\max}^1 * c_{\max}^1 * c_{\max}^1) & & \\
 & \swarrow & & \nwarrow & \\
 \psi_3(c_{\max}^1 * c_{\max}^2) & & & & \psi_3(c_{\max}^2 * c_{\max}^1) \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 \psi_2(c_{\max}^1 * c_{\max}^1) \circ \phi_2 & & & & \psi_2(c_{\max}^1 * c_{\max}^1) \circ \phi_1 \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 \psi_2(c_{\max}^2) \circ \phi_2 & & \psi_1(c_{\max}^1) \circ \phi_{1,2} & & \psi_2(c_{\max}^2) \circ \phi_1
 \end{array}$$

En passant à la limite inductive, ceci donne alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(h) \circ H(g) \circ H(f) & & \\
 & \swarrow & & \nwarrow & \\
 H(h) \circ H(g \circ f) & & & & H(h \circ g) \circ H(f) \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & & H(h \circ g \circ f) & &
 \end{array}$$

Le fait que cela coïncide avec le diagramme de cocycle est évident. Le théorème 1.3.1 est prouvé.

1.3.5. Les données A du critère 1.3.1 dans le cas géométrique. — Soit S un schéma de base. Dans la littérature on peut trouver plusieurs définitions des S -schémas « projectifs » et « quasi-projectifs ». La meilleure (du point de vue de l'auteur) est celle de Grothendieck [GD61]. Malheureusement cette définition n'est pas très adaptée à notre construction sauf si l'on suppose S raisonnable. Le lecteur doit donc faire un choix : se restreindre à des schémas de bases raisonnables ou prendre une notion moins bonne de S -schémas projectifs. Ainsi dans la suite la catégorie (Sch/S) désignera l'une des deux catégories suivantes :

- Lorsque S est quelconque, on peut prendre pour (Sch/S) la catégorie des S -schémas quasi-projectifs au sens du Hartshorne [Har77], *i.e.*, les S -schémas de présentation finie qui admettent une immersion dans \mathbb{P}_S^n pour n assez grand.

- Si on accepte de supposer que S est un schéma admettant une famille ample de fibrés en droites, on peut prendre pour (Sch/S) la catégorie des S -schémas quasi-projectifs au sens Grothendieck [GD61], *i.e.*, les S -schémas de présentation finie qui admettent une immersion dans $\mathbb{P}(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} un \mathcal{O}_S -module cohérent (pas forcément localement libre).

Quelque soit le choix adopté on a le lemme suivant (voir [BGI71], exposé : « Existence de résolutions globales » par L. Illusie) :

Lemme 1.3.9. — *Tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans (Sch/S) se factorise de la manière suivante :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}(\mathcal{L}) \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & Y \end{array}$$

avec i une immersion, \mathcal{L} un \mathcal{O}_Y -module localement libre et p la projection canonique.

Dans la section 1.6 on appliquera le théorème 1.3.1 dans le cas où $\mathcal{C} = (\text{Sch}/S)$, $\mathcal{C}_1 = (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}}$ la sous-catégorie où les flèches sont les immersions fermées, et $\mathcal{C}_2 = (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$ la sous-catégorie où les flèches sont les morphismes lisses. Il est clair que ces catégories vérifient les trois premières conditions qui assurent la validité du théorème 1.3.1.

1.4. Énoncé du résultat principal. Quelques préparations

1.4.1. Énoncé du résultat principal. — Soit S un schéma de base quasi-compact et séparé (mais non nécessairement noethérien). Tous les S -schémas considérés dans la suite seront quasi-compacts et de présentation finie. On notera (Sch/S) la catégorie des S -schémas quasi-projectifs (voir la sous-section 1.3.5 pour plus de détails). On notera également $\mathfrak{T}\mathfrak{R}$ la 2-catégorie des catégories triangulées. Dans toute la suite du chapitre on fixera un 2-foncteur contravariant :

$$\mathbf{H}^* : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

Pour X un S -schéma de (Sch/S) , on notera simplement $\mathbf{H}(X)$ la catégorie triangulée $\mathbf{H}^*(X)$. On notera également f^* le 1-morphisme $\mathbf{H}^*(f)$ pour f un morphisme dans (Sch/S) et c^* les 2-isomorphismes de connexions $c^*(f, g) : (g \circ f)^* \xrightarrow{\sim} f^* \circ g^*$ pour f et g deux morphismes composables dans Sch/S . Le 1-morphisme f^* est un foncteur triangulé par la définition de la 2-catégorie $\mathfrak{T}\mathfrak{R}$. Comme c'est expliqué dans les notes de Deligne [Del01], on peut sans restreindre la généralité, demander à \mathbf{H}^* d'être *strictement unital*, *i.e.*, $c^*(\text{Id}, f)$ et $c^*(f, \text{Id})$ sont l'identité. Dans la suite tous nos 2-foncteurs seront implicitement supposés unitaux. On considère les six propriétés suivantes :

1. $\mathbf{H}(\emptyset) = 0$ (la catégorie triangulée triviale).

2. Adjoint à droite : pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans (Sch/S) , le 1-morphisme $f^* : \mathbf{H}(Y) \longrightarrow \mathbf{H}(X)$ admet un adjoint à droite f_* (i.e., f_* est un foncteur triangulé qui est adjoint à droite du foncteur f^*). De plus, pour i une immersion (pas forcément fermée) le 2-morphisme de counité : $i^*i_* \longrightarrow \text{Id}$ est un 2-isomorphisme.
3. Adjoint à gauche : si $f : X \longrightarrow Y$ est un S -morphisme lisse dans (Sch/S) , le 1-morphisme f^* admet un adjoint à gauche $f_\#$. De plus pour tout carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec f lisse, le 2-morphisme d'échange (qui sera défini dans la sous-section 1.4.5) : $f'_\# g'^* \longrightarrow g^* f_\#$ est un 2-isomorphisme.

4. Localité : soient $j : U \longrightarrow X$ une immersion ouverte dans Sch/S et $i : Z \longrightarrow X$ une immersion fermée complémentaire dans Sch/S . La paire (j^*, i^*) est conservative.
5. Invariance par homotopie : si $p : \mathbb{A}_X^1 \longrightarrow X$ est la projection canonique, le 2-morphisme d'unité :

$$\text{Id} \longrightarrow p_* p^*$$

est un 2-isomorphisme.

6. Stabilité : si s est la section nulle de la projection canonique $p : \mathbb{A}_X^1 \longrightarrow X$, l'endofoncteur $p_\# s_*$ de $\mathbf{H}(X)$ est une équivalence de catégories.

Définition 1.4.1. — Nous dirons que le 2-foncteur \mathbf{H} est un 2-foncteur homotopique stable s'il vérifie les axiomes 1 à 6 ci-dessus.

Dans la suite du chapitre, le 2-foncteur \mathbf{H} sera supposé un 2-foncteur homotopique stable. On montrera alors, que \mathbf{H}^* s'étend d'une façon « unique » en un foncteur croisé au sens de 1.2.12. De plus on aura $f_* = f_!$ pour f projectif et $f^! = f^*$ à une équivalence près pour f lisse. Ce résultat a été annoncé par Voevodsky (non publié). Voici l'énoncé précis de ce qu'on prouvera :

Scholie 1.4.2. — Supposons donné un 2-foncteur homotopique stable :

$$\mathbf{H}^* : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

1- Il existe⁽³⁾ :

– un 2-foncteur contravariant $\mathbf{H}^! : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$,

⁽³⁾Nous ignorons si ces données sont déterminés par le 2-foncteur \mathbf{H}^* à un unique isomorphisme près.

- un 2-foncteur covariant $H_* : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ qui est un adjoint global à droite de H^* ,
- un 2-foncteur covariant $H_! : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ qui est un adjoint global à gauche de $H^!$,
- une structure de foncteur croisé sur le quadruplet $(H^*, H_*, H_!, H^!)$ relativement à la classe des carrés cartésiens de (Sch/S) .

2- Pour tout S -schéma quasi-projectif X et tout \mathcal{O}_X -module cohérent localement libre \mathcal{M} , il existe une autoéquivalence $\text{Th}(\mathcal{M})$ de la restriction du foncteur croisé précédent à la catégorie (Sch/X) . Si le \mathcal{O}_X -module \mathcal{M} s'insère dans une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

on dispose d'un isomorphisme d'autoéquivalences de foncteurs croisés :

$$\text{Th}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \text{Th}(\mathcal{L}) \circ \text{Th}(\mathcal{N})$$

3- Soit $f : X \longrightarrow Y$ un S -morphisme lisse. Notons Ω_f le \mathcal{O}_X -module localement libre des différentielles relatives. Il existe alors des 2-isomorphismes :

- $f_! \xrightarrow{\sim} f_{\#} \text{Th}^{-1}(\Omega_f)$
- $f^! \xrightarrow{\sim} \text{Th}(\Omega_f) f^*$

avec $\text{Th}^{-1}(\Omega_f)$ l'équivalence inverse à $\text{Th}(\Omega_f)$.

4- Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans (Sch/S) il existe un 2-morphisme : $f_! \longrightarrow f_*$. Lorsque f est projectif ce 2-morphisme est inversible.

5- On a le théorème de changement de base pour un morphisme projectif, i.e., pour tout carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

dans (Sch/S) avec f un S -morphisme projectif, les 2-morphismes d'échange :

- $g^* f_* \xrightarrow{\sim} f'_* g'^*$,
- $f'_! g'^! \xrightarrow{\sim} g^! f_!$.

sont inversibles.

Dans le reste de cette section nous dériverons quelques conséquences plus ou moins directes des axiomes.

1.4.2. Les 2-morphismes de connexions. Unités et counités des adjonctions

Cette sous-section sert à fixer les notations. Avant de commencer la liste des ingrédients de base qui serviront à construire le foncteur croisé annoncé dans la sous-section

précédente, on introduit deux sous-catégories de (Sch/S) qui joueront un rôle important d'ici la fin de la preuve.

- La sous-catégorie $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$, dont les objets sont les objets de (Sch/S) et les flèches sont les S -morphisms lisses.
- La sous-catégorie $(\text{Sch}/S)^{\text{Imm}}$, dont les objets sont les objets de (Sch/S) et les flèches sont les S -immersions fermées.

Si F est un 2-foncteur de source (Sch/S) on désignera par ${}^{\text{Liss}}F$ et ${}^{\text{Imm}}F$ les restrictions de F à $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$ et $(\text{Sch}/S)^{\text{Imm}}$ respectivement. Parfois, on notera un 2-foncteur F qui n'est défini que sur $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$ ou sur $(\text{Sch}/S)^{\text{Imm}}$ par ${}^{\text{Liss}}F$ ou ${}^{\text{Imm}}F$ pour mettre en évidence le fait qu'il est défini seulement sur une sous-catégorie de (Sch/S) .

Soit maintenant une suite : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de morphismes dans (Sch/S) . Rappelons qu'on a noté :

$$c^* = c^*(f, g) : (g \circ f)^* \xrightarrow{\sim} f^* \circ g^*$$

le 2-isomorphisme de connexion du 2-foncteur H^* associé à la suite des S -morphisms composables (f, g) .

D'après 1.1.17 et l'axiome 2 de la sous-section précédente il existe (à un isomorphisme unique près) un adjoint à droite global au 2-foncteur H^* . On en fixe un qu'on notera :

$$H_* : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

Pour une suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de morphismes dans (Sch/S) on notera :

$$c_* = c_*(f, g) : (g \circ f)_* \xrightarrow{\sim} g_* \circ f_*$$

le 2-isomorphisme de connexion de ce 2-foncteur associé à la suite de S -morphisms composables (f, g) .

De même, par l'axiome 3, il existe (à un isomorphisme unique près) un adjoint à gauche global au 2-foncteur ${}^{\text{Liss}}H^*$. On en fixe un qu'on notera :

$${}^{\text{Liss}}H_{\#} : (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

Pour une suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de S -morphisms lisses dans (Sch/S) on notera :

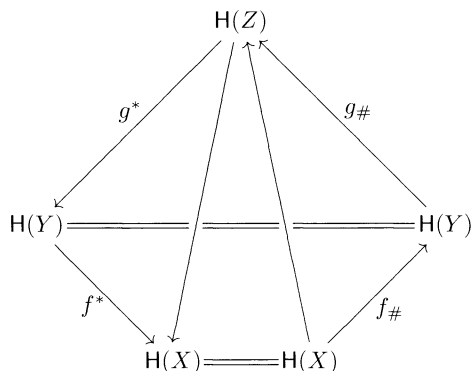
$$c_{\#} = c_{\#}(f, g) : (g \circ f)_{\#} \xrightarrow{\sim} g_{\#} \circ f_{\#}$$

le 2-isomorphisme de connexion de ce 2-foncteur associé à la suite de S -morphisms lisses composables (f, g) .

Soit maintenant $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans (Sch/S) . On notera $\eta_*^*(f) : \text{id}_{H(Y)} \longrightarrow f_* f^*$ et $\delta_*^*(f) : f^* f_* \longrightarrow \text{id}_{H(X)}$ les 2-morphisms d'unité et de counité de l'adjonction entre f^* et f_* .

De même, lorsque f est lisse, on notera $\eta_{\#}^*(f) : \text{id} \rightarrow f^* f_{\#}$ et $\delta_{\#}^*(f) : f_{\#} f^* \rightarrow \text{id}$ les 2-morphismes d'unité et de counité de l'adjonction entre $f_{\#}$ et f^* .

On a les diagrammes solides commutatifs standards exprimant les compatibilités des 2-morphismes d'unité et de counité avec les 2-isomorphismes de connexions des différents 2-foncteurs. Voici un exemple (type) de ces diagrammes (pour les unités de l'adjonction globale entre ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_{\#}$ et ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^*$ et une suite de S -morphisms lisses $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$) :



1.4.3. « Localement pour la topologie de Nisnevich ». — La proposition suivante est un corollaire simple de l'axiome de localité :

Proposition 1.4.3. — Soient X un S -schéma quasi-projectif et $(u_i : U_i \longrightarrow X)_i$ un recouvrement Nisnevich fini de X . Soit A un objet de $\mathbf{H}(X)$. On suppose que $u_i^* A$ est nul pour tous les indices i . Alors A est nul.

Démonstration. — Le recouvrement Nisnevich $(u_i : U_i \longrightarrow X)_i$ étant fini et nos schémas étant de présentation finie sur S , on peut trouver une suite finie et croissante d'ouverts Zariski quasi-compacts :

$$\emptyset = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{N-1} \subset V_N = X, \quad \text{pour un certain entier naturel } N,$$

tel que pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, le recouvrement $(u_i)_i$ est sîné au-dessus d'un sous-schéma fermé de présentation finie $Z_n \subset V_n$ complémentaire de l'ouvert $V_{n-1} \subset V_n$. Plus précisément, il existe un triangle commutatif :

$$(19) \quad \begin{array}{ccc} & \coprod_i U_i & \\ & \downarrow & \\ Z_n & \longrightarrow & X \end{array}$$

Pour prouver celà, on se ramène immédiatement au cas où X est noethérien et réduit. L'existence des V_n s'obtient alors par récurrence noethérienne.

Notons z_n l'immersion localement fermée de Z_n dans X . Par hypothèse, les objets $u_i^* A$ sont nuls. On déduit alors, en utilisant la factorisation (19), que $z_n^* A = 0$ pour

$n \in \{1, \dots, N\}$. Si v_n désigne l'immersion ouverte de V_n dans X , l'axiome 4 (de localité) appliqué à la paire (V_{n-1}, Z_n) montre l'implication :

$$(v_{n-1}^* A = 0) \implies (v_n^* A = 0) \quad \text{pour } n \in \{1, \dots, N\}$$

Mais $v_0^* A = 0$, étant donné que v_0 est l'immersion du schéma \emptyset (utiliser l'axiome 1). Par une récurrence immédiate, on déduit que $v_N^* A = 0$, ce qui termine la preuve. \square

On a le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.4. — *Soient X un S -schéma quasi-projectif et $(u_i : U_i \longrightarrow X)_i$ un recouvrement Nisnevich fini de X . Soit $a : A \longrightarrow B$ une flèche dans $\mathbf{H}(X)$. On suppose que $u_i^*(a) : u_i^* A \longrightarrow u_i^* B$ est un isomorphisme pour tous les indices i . Alors a est un isomorphisme.*

Démonstration. — On choisit un triangle distingué basé sur a :

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow$$

Il suffit alors de prouver que C est nul. Mais comme les u_i^* sont des foncteurs triangulés on a des triangles distingués :

$$u_i^* A \longrightarrow u_i^* B \longrightarrow u_i^* C \longrightarrow$$

La première flèche du triangle est un isomorphisme par hypothèse. On en déduit que les $u_i^* C$ sont tous nuls. Donc par la proposition 1.4.3 l'objet C est nul. Ceci prouve que a est un isomorphisme. \square

1.4.4. Le foncteur prolongement par le vide. Le foncteur sections à support. — On commence par une définition générale qui sera pratique dans la suite :

Définition 1.4.5. — *Supposons donnés trois 1-morphismes :*

$$a, b, c : T_1 \longrightarrow T_2$$

dans $\mathfrak{T}\mathfrak{R}$. En d'autres termes, T_1 et T_2 sont deux catégories triangulées et a, b et c sont trois foncteurs triangulés de T_1 dans T_2 . Une suite de 2-morphismes composables :

$$a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\gamma} a[+1]$$

est appelée un 2-triangle distingué lorsque pour tout objet P de T_1 la suite :

$$a(P) \xrightarrow{\alpha} b(P) \xrightarrow{\beta} c(P) \xrightarrow{\gamma} a(P)[+1]$$

est un triangle distingué de T_2 .

Le lemme qui suit est une conséquence de l'axiome de localité (se référer aux notes de Deligne [Del01] pour plus de détails). Le principe de démonstration est le même que celui de la démonstration de la proposition 1.4.9.

Lemme 1.4.6. — Soient $j : U \longrightarrow X$ une immersion ouverte (entre S -schémas quasi-projectifs) et $i : Z \longrightarrow X$ une immersion fermée complémentaire. Il existe un unique 2-morphisme φ tel que la suite :

$$j_{\#}j^* \xrightarrow{\delta_{\#}^*(j)} \mathrm{Id}_{\mathbf{H}(X)} \xrightarrow{\eta_*^*(i)} i_*i^* \xrightarrow{\varphi} j_{\#}j^*[+1]$$

soit un 2-triangle distingué.

Le lemme suggère alors de poser pour $j : U \longrightarrow X$ une immersion ouverte, $j_! = j_{\#} : \mathbf{H}(U) \longrightarrow \mathbf{H}(X)$ et $j^! = j^* : \mathbf{H}(X) \longrightarrow \mathbf{H}(U)$. On a ainsi la chaîne d'adjonctions habituelle :

$$j_! \quad , \quad j^! = j^* \quad , \quad j_*$$

et le triangle distingué habituel :

$$j_!j^!A \longrightarrow A \longrightarrow i_*i^*A \xrightarrow{[+1]} j_!j^!A[+1]$$

Le 1-morphisme $j_!$ est appelé classiquement *prolongement par le vide*.

On garde les notations de 1.4.6. On va construire un foncteur $i^! : \mathbf{H}(X) \longrightarrow \mathbf{H}(Z)$ adjoint à droite du foncteur $i_* : \mathbf{H}(Z) \longrightarrow \mathbf{H}(X)$. C'est le foncteur 'sections à support dans Z '. Si $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(X))$ on voudrait avoir un triangle distingué dans $\mathbf{H}(X)$:

$$i_*i^!A \longrightarrow A \longrightarrow j_*j^*A \xrightarrow{[+1]} i_*i^!A[+1]$$

L'idée est donc de définir $i^!A$ comme étant $i^*\mathrm{C\hat{o}ne}(A \rightarrow j_*j^*A)[-1]$. La difficulté est de rendre cette construction fonctorielle. Pour cela on a les deux lemmes qui suivent :

Lemme 1.4.7. — Si i et j sont comme dans le lemme 1.4.6, alors le 1-morphisme j^*i_* est nul.

Démonstration. — Ce 1-morphisme est un adjoint à droite de $i^*j_{\#}$. Il suffit donc de prouver que ce dernier est nul. Mais le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

est cartésien. Donc par l'axiome 3, on a : $i^*j_{\#} \simeq \emptyset_{\#}\emptyset^* = 0$ car la catégorie $\mathbf{H}(\emptyset)$ est nulle par l'axiome 1. \square

Lemme 1.4.8. — Supposons choisi pour tout objet A de $\mathbf{H}(X)$ un triangle distingué dans $\mathbf{H}(X)$:

$$A \longrightarrow j_*j^*A \xrightarrow{\theta} C(A) \longrightarrow A[+1]$$

Alors, pour tout morphisme $\alpha : A \longrightarrow B$ dans $\mathbf{H}(X)$ il existe un unique morphisme $C(\alpha) : C(A) \longrightarrow C(B)$ rendant commutatif le carré :

$$\begin{array}{ccc} C(A) & \longrightarrow & A[+1] \\ C(\alpha) \downarrow & & \downarrow \alpha[+1] \\ C(B) & \longrightarrow & B[+1] \end{array}$$

Ce même morphisme rend également le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & j_* j^* A & \xrightarrow{\theta} & C(A) & \longrightarrow & A[+1] \\ \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & C(\alpha) \downarrow & & \downarrow \alpha[+1] \\ B & \longrightarrow & j_* j^* B & \xrightarrow{\theta} & C(B) & \longrightarrow & B[+1] \end{array}$$

commutatif. Les associations $A \rightarrow C(A)$ et $\alpha \rightarrow C(\alpha)$ définissent alors un endofoncteur triangulé de $\mathbf{H}(X)$.

Démonstration. — L'existence de $C(\alpha)$ rendant le deuxième diagramme commutatif, est assurée par les axiomes des catégories triangulées. Il s'agit de prouver l'unicité de $C(\alpha)$ rendant le premier carré commutatif. Pour cela on prend une autre flèche $C'(\alpha)$ rendant ce carré commutatif. Le morphisme $\beta = C'(\alpha) - C(\alpha)$ se trouve alors dans le noyau du morphisme : $\text{hom}(C(A), C(B)) \longrightarrow \text{hom}(C(A), B[+1])$. Mais on a une suite exacte de groupes abéliens :

$$\text{hom}(C(A), j_* j^* B) \longrightarrow \text{hom}(C(A), C(B)) \longrightarrow \text{hom}(C(A), B[+1])$$

Donc pour prouver que β est nul, il suffira de prouver que $\text{hom}(C(A), j_* j^* B) = 0$. Par adjonction, il suffit de prouver que $\text{hom}(j^* C(A), j^* B) = 0$. Mais en appliquant j^* au triangle de l'énoncé on obtient :

$$j^* A \longrightarrow j^* j_* j^* A \longrightarrow j^* C(A) \longrightarrow j^* A[+1]$$

Comme j est une immersion, le morphisme d'adjonction : $j^* j_* j^* A \longrightarrow j^* A$ est un isomorphisme. Comme c'est une rétraction à $j^* A \longrightarrow j^* j_* j^* A$ ce dernier est un isomorphisme et $j^* C(A) = 0$.

L'unicité de $C(\alpha)$ entraîne facilement que $A \rightarrow C(A)$ définit un foncteur de $\mathbf{H}(X)$ dans lui même. Pour voir que c'est un foncteur triangulé, on utilise bien sûr l'axiome de l'octaèdre. Les détails sont laissés aux lecteurs. \square

Proposition 1.4.9

1- Pour $i : Z \longrightarrow X$ il existe un 1-morphisme $i^! : \mathbf{H}(X) \longrightarrow \mathbf{H}(Z)$ et un 2-triangle distingué :

$$i_* i^! \xrightarrow{\delta_*^!} \text{Id}_{\mathbf{H}(X)} \xrightarrow{\eta_*^*} j_* j^* \xrightarrow{\theta} i_* i^! A[+1]$$

De plus le couple formé du foncteur $i^!$ ainsi que le 2-triangle ci-dessus est unique à un isomorphisme unique près.

2- Si $\alpha : A \rightarrow B$ est une flèche de $\mathbf{H}(X)$ le morphisme $i_*i^!(\alpha) : i_*i^!A \rightarrow i_*i^!B$ est l'unique morphisme de $\mathbf{H}(Y)$ rendant le carré :

$$\begin{array}{ccc} i_*i^!A & \longrightarrow & A \\ i_*i^!\alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ i_*i^!B & \longrightarrow & B \end{array}$$

commutatif. De plus il fournit un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} i_*i^!A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & j_*j^*A & \longrightarrow & i_*i^!A[+1] \\ i_*i^!\alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & j_*j^*\alpha \downarrow & & \downarrow i_*i^!\alpha \\ i_*i^!B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & j_*j^*A & \longrightarrow & i_*i^!B[+1] \end{array}$$

3- Enfin, le 1-morphisme $i^!$ est adjoint à droite du 1-morphisme i_* . Le 2-morphisme de counité : $i_*i^! \longrightarrow \text{id}$ est celui qui figure dans le 2-triangle distingué. Le 2-morphisme d'unité est un 2-isomorphisme.

Démonstration. — Il reste à prouver le dernier point. Montrons que $i^!$ est adjoint à droite du foncteur i_* . Calculons pour cela le groupe abélien : $\text{hom}(U, i^!A)$ pour $U \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Z))$ et $A \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$. Par la dernière partie de l'axiome 2 on a : $\text{hom}(U, i^!A) = \text{hom}(i_*U, i_*i^!A)$. Ainsi notre groupe s'insère dans une suite exacte longue :

$$\text{hom}^{-1}(i_*U, j_*j^*A) \longrightarrow \text{hom}(U, i^!A) \longrightarrow \text{hom}(i_*U, A) \longrightarrow \text{hom}(i_*U, j_*j^*A)$$

On voit donc qu'il suffit de montrer que $\text{hom}^k(i_*U, j_*j^*A) = 0$ pour $k = 0, -1$. Comme U est un objet général de $\mathbf{H}(Z)$, il suffit alors de prouver que $\text{hom}(i_*U, j_*j^*A) = 0$. Mais j_* admet j^* pour adjoint à gauche. On en déduit que $\text{hom}(i_*U, j_*j^*A) = \text{hom}(j^*i_*U, j^*A) = 0$ car $j^*i_* = 0$ par le lemme 1.4.7. \square

Corollaire 1.4.10. — Il existe à un unique isomorphisme près un 2-foncteur :

$$\text{Imm}\mathbf{H}^! : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

qui soit un adjoint global à droite du 2-foncteur $\text{Imm}\mathbf{H}_*$. On notera $c^!(f, g)$ les 2-isomorphismes de connexion de ce 2-foncteur.

1.4.5. Une structure de foncteurs croisés sur $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*, \text{Liss}\mathbf{H}_\#, \text{Liss}\mathbf{H}^*)$. — Notre point de départ est la structure d'échange triviale relativement à la classe des carrés commutatifs de (Sch/S) sur le couple $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}^*)$. Cette structure d'échange est induite

par les 2-isomorphismes de connexion. En effet il s'agit de deux isoéchanges inverses l'un de l'autre de type \swarrow et \nearrow qui à un carré commutatif de S -schéma :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

associe respectivement les deux 2-isomorphismes inverses l'un de l'autre :

$$\begin{aligned} g'^* \circ f^* &\xrightarrow{c^*(g', f)^{-1}} (f \circ g')^* = (g \circ f')^* \xrightarrow{c^*(f', g)} f'^* \circ g^* \\ f'^* \circ g^* &\xrightarrow{c^*(f', g)^{-1}} (g \circ f')^* = (f \circ g')^* \xrightarrow{c^*(g', f)} g'^* \circ f^* \end{aligned}$$

On définit à l'aide de la proposition 1.2.5 une structure d'échange de type \nwarrow sur le couple (H^*, H_*) à partir de la structure d'échange de type \nearrow sur (H^*, H^*) et l'adjonction globale entre H_* et H^* . Si (C) est un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

on appellera $Ex_*^*(C)$ le 2-morphisme d'échange :

$$Ex_*^*(C) : g^* f_* \longrightarrow f'_* g'^*$$

Par définition $Ex_*^*(C)$ est la composée :

$$\begin{aligned} g^* f_* &\xrightarrow{\eta_*(f')} f'_* f'^* g^* f_* \xrightarrow{c^*(f'g)^{-1}} f'_*(g \circ f')^* f_* \\ &= f'_*(f \circ g')^* f_* \xrightarrow{c^*(g'f)} f'_* g'^* f^* f_* \xrightarrow{\delta_*(f)} f'_* g'^* \end{aligned}$$

Remarque 1.4.11. — Il existe a priori une autre structure d'échange sur le couple (H^*, H_*) . Elle est obtenue à partir de la structure d'échange triviale sur (H_*, H_*) de type \swarrow et l'adjonction globale entre H_* et H^* . Le 2-morphisme d'échange de cette structure associé au carré commutatif de tout à l'heure est égal à la composée :

$$\begin{aligned} g^* f_* &\xrightarrow{\eta_*(g')} g^* f_* g'_* g'^* \xrightarrow{c_*(g'f)^{-1}} g^*(f \circ g')_* g'^* \\ &= g^*(g \circ f')_* g'^* \xrightarrow{c_*(f'g)} g^* g'_* f'^* g'^* \xrightarrow{\delta_*(g)} f'_* g'^* \end{aligned}$$

Le fait que ces deux structures d'échange coïncident, est une conséquence du lemme 1.1.15.

Par restriction on a une structure d'échange de type \nearrow sur $(\mathbf{H}^*, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^*)$. En utilisant l'adjonction globale entre ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^*$ et ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_\#$ on obtient une structure d'échange (pour la classe des carrés commutatifs avec morphismes verticaux lisses) de type \nearrow sur le couple de 2-foncteurs $(\mathbf{H}^*, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_\#)$. On notera $Ex_\#^*(.)$ les 2-morphismes d'échange de cette structure. Pour un carré commutatif (C) de S -morphisms :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec f et f' lisses, le 2-morphisme d'échange :

$$Ex_\#^*(C) : f'_\# g'^* \longrightarrow g^* f_\#$$

est la composée :

$$\begin{aligned} f'_\# g'^* &\xrightarrow{\eta_\#^*(g)} g^* g_\# f'_\# g'^* \xrightarrow{c^*(f',g)^{-1}} g^*(g \circ f')_\# g'^* \\ &= g^*(f \circ g')_\# g'^* \xrightarrow{c^*(g',f)} g^* f_\# g'_\# g'^* \xrightarrow{\delta_\#^*(g')} g^* f_\# \end{aligned}$$

On a également la formule ${}^a(Ex_\#^*(C)) = Ex_\#^*(C)$ (voir la proposition 1.1.5 pour la définition de l'opération ${}^a(.)$). Lorsque le carré (C) est cartésien l'axiome 3 nous dit que le 2-morphisme d'échange $Ex_\#^*(C)$ est un 2-isomorphisme. En d'autres termes, la restriction de cet échange à la sous-classe formée des carrés cartésiens est un isoéchange. D'après la proposition 1.2.14 on a alors :

Proposition 1.4.12. — *On a un foncteur croisé de (Sch/S) et $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$ vers $\mathfrak{I}\mathfrak{R}$ par rapport à la classe des carrés cartésiens dont les flèches verticales sont des morphismes lisses. Ce foncteur croisé est défini par les données :*

- le 2-foncteur \mathbf{H}^* et son adjoint global à droite \mathbf{H}_* ,
- le 2-foncteur ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^*$ et son adjoint global à gauche ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_\#$,
- la structure d'échange triviale sur $(\mathbf{H}^*, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^*)$,
- la structure d'échange sur $(\mathbf{H}_*, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_\#)$ déduite de l'isoéchange de type \nwarrow inverse de l'isoéchange sur $(\mathbf{H}^*, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_\#)$ (par rapport aux carrés cartésiens) et de l'adjonction globale entre \mathbf{H}_* et \mathbf{H}^* .

Pour un carré cartésien (C) :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

avec f lisse, le 2-morphisme d'échange de la structure d'échange sur $(H_*, {}^{\text{Liss}}H^*)$ est donné par Ex_*^* appliqué au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f'} & \bullet \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet \end{array}$$

Le 2-isomorphisme d'échange de la structure d'échange sur $(H^*, {}^{\text{Liss}}H_{\#})$ est donné par le 2-morphisme $Ex_{\#}^*(C)$. Finalement le 2-morphisme d'échange $Ex_{*,\#}(C)$ relatif à la structure d'échange sur $(H_*, {}^{\text{Liss}}H_{\#})$ est donné par la composée :

$$f_{\#}g'_* \longrightarrow g_*g^*f_{\#}g'_* \xrightarrow{(Ex_{\#}^*)^{-1}} g_*f'_{\#}g'^*g'_* \longrightarrow g_*f'_{\#}$$

En particulier, on a le résultat suivant, dont l'analogie dans [AGV73] est connu sous le nom du « théorème de changement de base par un morphisme lisse » :

Proposition 1.4.13. — Soit un carré cartésien dans Sch/S :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec g lisse. Le 2-morphisme d'échange $Ex_*^* : g^*f_* \xrightarrow{\sim} f'_*g'^*$ est inversible. En d'autres termes l'échange sur $({}^{\text{Liss}}H^*, H_*)$ est un isoéchange (par rapport aux carrés cartésiens).

1.4.6. Une structure de foncteurs croisés sur $(H^*, H_*, {}^{\text{Imm}}H_!, {}^{\text{Imm}}H^!)$. — Dans la même veine, on continue avec le « cas trivial » du « théorème de changement de base pour un morphisme propre ».

Lemme 1.4.14. — Soit un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g'} & Z \\ i' \downarrow & & \downarrow i \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

avec i une immersion fermée. Le 2-morphisme d'échange $Ex_*^* : g^*i_* \xrightarrow{\sim} i'_*g'^*$ est inversible.

Démonstration. — Fixons A un objet de $\mathbf{H}(Z)$. Soit $j : U \longrightarrow X$ l'immersion de l'ouvert complémentaire de $i(Z)$. Notons aussi j l'immersion ouverte de $Y \times_X U$ dans Y . L'objet g^*i_*A est à support dans T car $j^*g^*i_*A \simeq g^*j^*i_*A \simeq 0$. Donc le 2-morphisme d'unité : $g^*i_*A \longrightarrow i'_*i'^*g^*i_*A$ est un 2-isomorphisme. Mais notre 2-morphisme d'échange est égal à la composée :

$$g^*i_*A \xrightarrow{\sim} i'_*i'^*g^*i_*A \longrightarrow i'_*g'^*i'^*i_*A \longrightarrow i'_*g'^*A$$

Le deuxième 2-morphisme est un 2-isomorphisme puisque c'est une composée de deux 2-morphismes de connexions c^* . Le troisième 2-morphisme est aussi un 2-isomorphisme par l'axiome 2. Le lemme est prouvé. \square

L'échange sur $(\mathbf{H}^*, {}^{\mathrm{Imm}}\mathbf{H}_*)$ par rapport à la classe des carrés cartésiens défini par les 2-morphismes Ex_*^* est donc un isoéchange de type \searrow . En utilisant la proposition 1.2.14 :

Proposition 1.4.15. — *On a un foncteur croisé de (Sch/S) et $(\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{Imm}}$ vers $\mathfrak{I}\mathfrak{R}$ par rapport à la classe des carrés cartésiens dont les flèches verticales sont des immersions fermées. Ce foncteur croisé est défini par les données :*

- le 2-foncteur \mathbf{H}^* et son adjoint global à droite \mathbf{H}_* ,
- le 2-foncteur ${}^{\mathrm{Imm}}\mathbf{H}^!$ et son adjoint global à gauche ${}^{\mathrm{Imm}}\mathbf{H}_*$,
- la structure d'échange triviale sur $(\mathbf{H}_*, {}^{\mathrm{Imm}}\mathbf{H}_*)$,
- la structure d'échange sur $(\mathbf{H}^*, {}^{\mathrm{Imm}}\mathbf{H}^!)$ déduite de l'isoéchange de type \searrow inverse de l'échange sur $(\mathbf{H}^*, {}^{\mathrm{Imm}}\mathbf{H}_*)$ (par rapport aux carrés cartésiens) et de l'adjonction globale entre ${}^{\mathrm{Imm}}\mathbf{H}_*$ et ${}^{\mathrm{Imm}}\mathbf{H}^!$,

Pour un carré cartésien (C) :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f'} & \bullet \\ i' \downarrow & & \downarrow i \\ \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet \end{array}$$

avec i une immersion fermée, le 2-morphisme d'échange de la structure d'échange sur $(\mathbf{H}_*, {}^{\mathrm{Imm}}\mathbf{H}^!)$ est donné par $Ex_*^!(C) = {}^a(Ex_*^*(C))$. C'est donc la composée :

$$f'_*i'^! \xrightarrow{\eta_*^!(i)} i'^!i_*f'_*i'^! \xrightarrow{C_*(f',i)^{-1}} i'^!(i \circ f')_*i'^! = i'^!(f \circ i')_*i'^! \xrightarrow{C_*(i',f)} i'^!f'_*i'^!i'^! \xrightarrow{\delta_*^!(i')} i'^!f'_*$$

L'échange sur $(\mathbf{H}^*, {}^{\mathrm{Imm}}\mathbf{H}^!)$ est donné par les 2-morphismes d'échange $Ex^{!,*}(C)$: $f'^*i'^! \longrightarrow i'^!f^*$ égaux à la composée :

$$f'^*i'^! \xrightarrow{\eta_*^!(i)} i'^!i'_*f'^*i'^! \xrightarrow{Ex_*^*(C)^{-1}} i'^!f^*i'_*i'^! \xrightarrow{\delta_*^!(i)} i'^!f^*$$

Voici une caractérisation des 2-morphismes d'échange $Ex^{!,*}$:

Proposition 1.4.16

1- Soit un carré cartésien (C) :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{i'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

On suppose que i est une immersion fermée. Le 2-morphisme $e = Ex^{!,*}$ est l'unique 2-morphisme $e : f'^*i^! \longrightarrow i^!f^*$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$(20) \quad \begin{array}{ccc} f^*i_*i^! & \longrightarrow & f^* \\ Ex_*^* \downarrow & & \parallel \\ i'_*f'^*i^! & & \\ e \downarrow & & \\ i'_*i^!f^* & \longrightarrow & f^* \end{array}$$

2- Formons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{i'} & Y & \xleftarrow{j'} & V \\ f' \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ Z & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & U \end{array}$$

avec j les inclusions des ouverts complémentaires à i . Le carré de droite est également cartésien. Le morphisme $e = Ex^{!,*}$ fournit pour tout $A \in H(X)$ un morphisme de triangles distingués :

$$(21) \quad \begin{array}{ccccccc} f^*A & \longrightarrow & f^*j_*j^*A & \longrightarrow & f^*i_*i^!A[+1] & \longrightarrow & f^*A[+1] \\ \parallel & & \downarrow & & Ex_*^* \circ Ex^{!,*} \downarrow & & \parallel \\ f^*A & \longrightarrow & j_*j^*f^*A & \longrightarrow & i_*i^!f^*A[+1] & \longrightarrow & f^*A[+1] \end{array}$$

Démonstration. — La preuve de cet énoncé est facile. La preuve de l'existence et l'unicité du morphisme e est totalement analogue à celle du fait que $A \rightarrow C(A)$ est un foncteur (voir lemme 1.4.8)⁽⁴⁾. On prouvera donc seulement que $Ex^{!,*} = e$. Mais pour cela il suffit de prouver que le diagramme obtenu en remplaçant e par $Ex^{!,*}$ dans le diagramme 20 de l'énoncé est commutatif. Mais ceci découle de la proposition (1.2.5). \square

⁽⁴⁾Il faut utiliser en plus le fait que Ex_*^* est un 2-isomorphisme, ce qui découle du lemme 1.4.14.

Corollaire 1.4.17. — *Supposons que f est lisse. Le 2-morphisme d'échange $Ex^{\dagger,*}$ est inversible.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition 1.4.13 et le lemme 1.4.14 et d'utiliser le morphisme de triangles distingués 21 de la proposition 1.4.16. \square

Par adjonction on a également :

Corollaire 1.4.18. — *Sous les hypothèses du corollaire 1.4.17, le 2-morphisme d'échange :*

$$Ex_{*,\#} : f_{\#}i'_* \longrightarrow i_*f'_{\#}$$

relativement à l'échange sur $(H_, {}^{\text{Liss}}H_{\#})$ est inversible.*

1.4.7. Sur le 2-morphisme θ . — Supposons donné un diagramme de S -schémas :

$$Y \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} U$$

avec i une immersion fermée et j une immersion ouverte complémentaire. On a défini dans la proposition 1.4.9 un 2-morphisme θ :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{j^*} & \bullet \\ i'! \downarrow & \theta \swarrow & \downarrow j_* \\ \bullet & \xrightarrow{i_*[-1]} & \bullet \end{array}$$

caractérisé par la propriété d'être l'unique 2-morphisme tel que pour tout A dans $\text{Ob}(H(\bullet))$ le triangle :

$$i_*i'!A \xrightarrow{\delta} A \xrightarrow{\eta} j_*j^*A \xrightarrow{\theta} i_*i'!A[+1]$$

est un triangle distingué. Dans cette sous section on construira deux diagrammes solides commutatifs décrivant des compatibilités du 2-morphisme θ avec différents 2-morphismes d'échange.

Proposition 1.4.19. — *Soit $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas dans (Sch/S) . On forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens :*

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' & \xleftarrow{j'} & U' \\ f \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & U \end{array}$$

On a un cube commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & i'^! & \\
 & & & \longrightarrow & \\
 & & \bullet & & \bullet \\
 & \swarrow f^* & \downarrow & \searrow f^* & \\
 \bullet & \xrightarrow{i^!} & \bullet & & \bullet \\
 \downarrow j^* & & \downarrow j'^* & & \downarrow i'_* [+1] \\
 \bullet & \xrightarrow{j_*} & \bullet & \xrightarrow{j'_*} & \bullet \\
 & \swarrow f^* & \downarrow & \searrow f^* & \\
 & & \bullet & & \bullet
 \end{array}$$

dont les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-morphismes θ et ceux perpendiculaires au plan de la feuille sont des 2-morphismes d'échange. En d'autres termes le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 f^* j_* j^* & \xrightarrow{\theta} & f^* i_* i^! [+1] \\
 Ex_*^* \downarrow & & \downarrow Ex_*^* \\
 j'_* f^* j^* & & i'_* f^* i^! [+1] \\
 \downarrow & & \downarrow Ex_*^* \\
 j'_* j'^* f^* & \xrightarrow{\theta} & i'_* i'^! f^* [+1]
 \end{array}$$

est commutatif. De plus, ce dernier s'insère dans un morphisme de 2-triangles distingués (de 1-morphismes) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f^* i_* i^! & \xrightarrow{\delta} & f^* & \xrightarrow{\eta} & f^* j_* j^* & \xrightarrow{\theta} & f^* i_* i^! [+1] \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 i'_* i'^! f^* & \xrightarrow{\delta} & f^* & \xrightarrow{\eta} & j'_* j'^* f^* & \xrightarrow{\theta} & i'_* i'^! f^* [+1]
 \end{array}$$

Lorsque f est lisse tous les 2-morphismes verticaux sont des 2-isomorphismes.

Démonstration. — Puisque le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 f^* & \longrightarrow & f^* j_* j^* \\
 \parallel & & \downarrow Ex_*^* \\
 & & j'_* f^* j^* \\
 & & \downarrow \\
 f^* & \longrightarrow & j'_* j'^* f^*
 \end{array}$$

et d'après les axiomes d'une catégorie triangulée il existe pour tout objet A de $\mathbf{H}(X)$ une flèche a_A rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f^* i_* i^! A & \xrightarrow{\delta} & f^* A & \xrightarrow{\eta} & f^* j_* j^* A & \xrightarrow{\theta} & f^* i_* i^! A[+1] \\
 \vdots \downarrow a & & \parallel & & \downarrow j'_* f^* j^* A & & \vdots \downarrow a[1] \\
 i'_* i'^! f^* A & \xrightarrow{\delta} & f^* A & \xrightarrow{\eta} & j'_* j'^* f^* A & \xrightarrow{\theta} & i'_* i'^! f^* A[+1]
 \end{array}$$

Il suffit alors de prouver que a_A est égale à l'évaluation en A de la composée :

$$f^* i_* i^! \xrightarrow{Ex^*} i'_* f^* i^! \xrightarrow{Ex^{!,*}} i'_* i'^! f^*$$

Compte tenu de 1.4.8 il suffit de prouver que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 f^* i_* i^! & \xrightarrow{\quad} & f^* \\
 \downarrow & & \parallel \\
 i'_* f^* i^! & & \\
 \downarrow & & \\
 i'_* i'^! f^* & \xrightarrow{\quad} & f^*
 \end{array}$$

est commutatif⁽⁵⁾. Mais ceci découle de la proposition 1.2.5. □

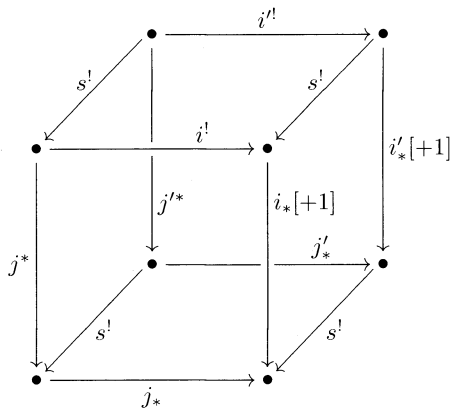
On a également le même énoncé pour les 1-morphismes « sections à support » :

Proposition 1.4.20. — *Soit $s : T \longrightarrow X$ une immersion fermée de S -schémas. On forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens :*

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{i'} & T & \xleftarrow{j'} & V \\
 s \downarrow & & \downarrow s & & \downarrow s \\
 Y & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & U
 \end{array}$$

⁽⁵⁾Strictement parlant, le lemme 1.4.8 ne suffit pas pour compléter l'argument. Il faudrait prouver un résultat un petit peu plus général qui se démontre exactement de la même façon que le lemme en question. On espère que le lecteur pourra pallier lui-même cette difficulté.

On a un cube commutatif :



dont les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-morphismes θ et ceux perpendiculaires au plan de la feuille sont des 2-morphismes d'échange. En d'autres termes, le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 j'_* j'^* s^! & \xrightarrow{\theta} & i'_* i'^! s^! [+1] \\
 \downarrow Ex^!_* & & \downarrow \\
 j'_* s^! j^* & & i'_* s^! i'^! [+1] \\
 \downarrow Ex^!_* & & \downarrow Ex^!_* \\
 s^! j_* j^* & \xrightarrow{\theta} & s^! i_* i'^! [+1]
 \end{array}$$

est commutatif. De plus, ce dernier s'insère dans un morphisme de triangles distingués (de 1-morphismes) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 i'_* i'^! s^! & \xrightarrow{\delta} & s^! & \xrightarrow{\eta} & j'_* j'^* s^! & \xrightarrow{\theta} & i'_* i'^! s^! [+1] \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 s^! i_* i'^! & \xrightarrow{\delta} & s^! & \xrightarrow{\eta} & s^! j_* j^* & \xrightarrow{\theta} & s^! i_* i'^! [+1]
 \end{array}$$

De plus, tous les 2-morphismes verticaux sont des 2-isomorphismes.

Démonstration. — Puisque le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 s^! & \xrightarrow{\quad} & j'_* j'^* s^! \\
 \parallel & & \downarrow Ex^!_* \\
 & & j'_* s^! j^* \\
 & & \downarrow Ex^!_* \\
 s^! & \xrightarrow{\quad} & s^! j_* j^*
 \end{array}$$

par les axiomes d'une catégorie triangulée il existe pour tout objet A de $\mathbf{H}(X)$ une flèche a_A rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc}
 i'_* i'^! s^! A & \xrightarrow{\delta} & s^! A & \xrightarrow{\eta} & j'_* j'^* s^! A & \xrightarrow{\theta} & i'_* i'^! s^! A[+1] \\
 \vdots \downarrow a & & \parallel & & \downarrow j'_* j'^* A & & \downarrow a[1] \\
 s^! i'_* i'^! A & \xrightarrow{\delta} & s^! A & \xrightarrow{\eta} & s^! j'_* j'^* A & \xrightarrow{\theta} & s^! i'_* i'^! A[+1]
 \end{array}$$

Il suffit alors de prouver que a_A est égale à l'évaluation en A de la composée :

$$i'_* i'^! s^! \xrightarrow{Ex_*^*} i'_* s^! i'^! \xrightarrow{Ex^{!,*}} s^! i'_* i'^!$$

Compte tenu du lemme 1.4.8, il suffit de prouver que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 i'_* i'^! s^! & \xrightarrow{\quad} & s^! \\
 \downarrow & & \parallel \\
 i'_* s^! i'^! & & \\
 \downarrow & & \\
 s^! i'_* i'^! & \xrightarrow{\quad} & s^!
 \end{array}$$

est commutatif. Mais ceci découle de 1.2.5. La dernière assertion découle du fait que $Ex^{!,*}$ est un 2-isomorphisme dans notre situation puisque j et j' sont des immersions ouvertes (voir le corollaire 1.4.17). \square

1.5. Les équivalences de Thom. Les 2-foncteurs $\text{Liss}\mathbf{H}^!$ et $\text{Liss}\mathbf{H}_!$

1.5.1. Définition. — Soit une suite de S -morphisms : $X \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} X$ tel que $p \circ s = \text{Id}_X$ et p lisse. On définit un 1-morphisme $\text{Th}(s, p) : \mathbf{H}(X) \rightarrow \mathbf{H}(X)$ par la formule : $\text{Th}(s, p) = p_{\#} \circ s_*$.

Définition 1.5.1. — Le 1-morphisme $\text{Th}(s, p)$ est appelé le 1-morphisme de Thom associé à la section s du morphisme lisse p . Il admet un adjoint à droite $\text{Th}^{-1}(s, p)$ défini par $\text{Th}^{-1}(s, p) = s^! \circ p^*$ et appelé le 1-morphisme de Thom inverse associé à la section s du morphisme lisse p .

Proposition 1.5.2. — Soit $f : X' \longrightarrow X$ un S -morphisme. On choisit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{s'} & V' & \xrightarrow{p'} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

à carrés cartésiens. Il existe un 2-isomorphisme :

$$\phi(f) : \mathrm{Th}(s', p') f^* \xrightarrow{\sim} f^* \mathrm{Th}(s, p)$$

défini par la composition du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}(X') & \xrightarrow{s'_*} & \mathrm{H}(V') & \xrightarrow{p'_\#} & \mathrm{H}(X') \\ f^* \uparrow & \searrow (Ex'_*)^{-1} & \uparrow f'^* & \searrow Ex'_\# & \uparrow f^* \\ \mathrm{H}(X) & \xrightarrow{s_*} & \mathrm{H}(V) & \xrightarrow{p_\#} & \mathrm{H}(X) \end{array}$$

Démonstration. — Le fait que c'est un 2-isomorphisme est clair par le théorème de changement de base pour une immersion fermée (voir le lemme 1.4.14)⁽⁶⁾ ainsi que l'axiome 3. \square

En utilisant les adjonctions entre $\mathrm{Th}(\cdot, \cdot)$ et $\mathrm{Th}^{-1}(\cdot, \cdot)$ on déduit par la proposition 1.1.9 un 2-morphisme :

$$\phi_{-1}(f) : f^* \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \longrightarrow \mathrm{Th}^{-1}(s', p') f^*$$

Toujours par 1.1.9, on a le lemme :

Lemme 1.5.3. — Le losange (de compatibilité avec l'unité) suivant :

$$\begin{array}{ccc} & f^* \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) & \\ \eta \nearrow & & \searrow \phi_{-1}(f) \\ f^* & & \mathrm{Th}^{-1}(s', p') f^* \mathrm{Th}(s, p) \\ \eta \searrow & & \nearrow \sim \\ & \mathrm{Th}^{-1}(s', p') \mathrm{Th}(s', p') f^* & \end{array}$$

est commutatif. Il existe également un losange commutatif analogue pour la counité.

⁽⁶⁾En fait, la définition même de ce 2-morphisme repose sur le lemme 1.4.14.

Par définition le 2-morphisme $\phi_{-1}(f)$ est la composée du diagramme planaire :

$$(22) \quad \begin{array}{ccccc} & & & & \mathbf{H}(X') \\ & & & & \uparrow s^! \\ & & & & \mathbf{H}(V') \\ & & & & \uparrow p^* \\ \mathbf{H}(X') & \xrightarrow{s'_*} & \mathbf{H}(V') & \xrightarrow{p'_{\#}} & \mathbf{H}(X') \\ \uparrow f^* & \Downarrow (Ex^*)^{-1} & \uparrow f'^* & \Downarrow Ex_{\#} & \uparrow f^* \\ \mathbf{H}(X) & \xrightarrow{s_*} & \mathbf{H}(V) & \xrightarrow{p_{\#}} & \mathbf{H}(X) \\ \uparrow s^! & \Downarrow & & \Downarrow & \\ \mathbf{H}(V) & & & & \\ \uparrow p^* & & & & \\ \mathbf{H}(X) & & & & \end{array}$$

En découpant (22) suivant la ligne :

$$\bullet \xrightarrow{p^*} \bullet \equiv \bullet \xrightarrow{f'^*} \bullet \equiv \bullet \xrightarrow{s'^!} \bullet$$

on voit que $\phi_{-1}(f)$ est la composée du diagramme planaire :

$$(23) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{H}(X') & \xleftarrow{s'^!} & \mathbf{H}(V') & \xleftarrow{p'^*} & \mathbf{H}(X') \\ \uparrow f^* & \nearrow Ex^{!,*} & \uparrow f'^* & \nearrow c^*(\cdot)c^*(\cdot)^{-1} & \uparrow f^* \\ \mathbf{H}(X) & \xleftarrow{s^!} & \mathbf{H}(V) & \xleftarrow{p^*} & \mathbf{H}(X) \end{array}$$

On a en particulier le lemme suivant :

Lemme 1.5.4. — *Si f est lisse le 2-morphisme :*

$$\phi_{-1}(f) : f^* \text{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(s', p') f^*$$

est inversible.

Démonstration. — En effet, en utilisant la représentation planaire de $\phi_{-1}(f)$ par (23) on voit qu'il suffit de montrer que le 2-morphisme d'échange $Ex^{!,*}$ qui figure dans

le diagramme est un 2-isomorphisme. Mais ceci découle du corollaire 1.4.17 et de l'hypothèse que f est lisse. \square

Dans le même esprit on a :

Proposition 1.5.5. — Soit $i : Z \longrightarrow X$ une S -immersion fermée. On choisit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{s'} & W & \xrightarrow{p'} & Z \\ i \downarrow & & \downarrow i' & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

à carrés cartésiens. Il existe un 2-isomorphisme :

$$\phi(f) : \mathrm{Th}(s, p)i_* \longrightarrow i_*\mathrm{Th}(s', p')$$

défini par la composition du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}(Z) & \xrightarrow{s'_*} & \mathrm{H}(W) & \xrightarrow{p'_\#} & \mathrm{H}(Z) \\ i_* \downarrow & \nearrow Ex_{*,*} & \downarrow i'_* & \nearrow Ex_{*,\#} & \downarrow i_* \\ \mathrm{H}(X) & \xrightarrow{s_*} & \mathrm{H}(V) & \xrightarrow{p_\#} & \mathrm{H}(X) \end{array}$$

Démonstration. — Le fait que $Ex_{\#,*}$ est inversible découle du corollaire 1.4.18. \square

Notons également le lemme utile suivant :

Lemme 1.5.6. — Supposons donné un voisinage Nisnevich de X dans V :

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ t \nearrow & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{s} & V \end{array}$$

avec u étale. Il existe alors un 2-isomorphisme $\mathrm{Th}(t, p \circ u) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s, p)$. De plus, si le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{t} & U \\ \parallel & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{s} & V \end{array}$$

est cartésien, cet isomorphisme est défini par la composition du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}(X) & \xrightarrow{t_*} & \mathrm{H}(U) & \xrightarrow{(pu)_\#} & \mathrm{H}(X) \\ \parallel & \nwarrow Ex_{*,\#} & \downarrow u_\# & \nwarrow Ex_{\#,\#} & \parallel \\ \mathrm{H}(X) & \xrightarrow{s_*} & \mathrm{H}(V) & \xrightarrow{p_\#} & \mathrm{H}(X) \end{array}$$

Démonstration. — Lorsque $X \simeq X \times_V U$ le résultat découle immédiatement du corollaire 1.4.18. Dans le cas contraire, on remarque que qu'il existe un voisinage ouvert $j : U_0 = U - (X \times_V U - X) \subset U$ de X dans U tel que les carrés suivants sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{t_0} & U_0 \\ \parallel & & \downarrow u \circ j \\ X & \xrightarrow{s} & V \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{t_0} & U_0 \\ \parallel & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{t} & U \end{array}$$

Il vient de ce qui précède que $\text{Th}(s, p) \simeq \text{Th}(t_0, p \circ u \circ j) \simeq \text{Th}(t, p \circ u)$. \square

On a le théorème :

Théorème 1.5.7. — *Les 1-morphismes $\text{Th}(s, p)$ et $\text{Th}^{-1}(s, p)$ sont deux équivalences inverses l'une de l'autre. Le 1-morphisme $\text{Th}(s, p)$ (resp. $\text{Th}^{-1}(s, p)$) sera dorénavant appelé l'équivalence de Thom (resp. inverse) associée à la section s du morphisme lisse p .*

Démonstration. — Il s'agit de prouver que les 2-morphismes d'unité et de counité :

$$\text{id} \longrightarrow \text{Th}^{-1}(s, p) \circ \text{Th}(s, p) \quad \text{et} \quad \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}^{-1}(s, p) \longrightarrow \text{id}$$

sont inversibles.

Soit $(f_i : U_i \longrightarrow X)_i$ un recouvrement de X pour la topologie de Nisnevich (en particulier les f_i sont des S -morphisms lisses). Par 1.4.4, il suffit de prouver que les 2-morphismes :

$$f_i^* \longrightarrow f_i^* \text{Th}^{-1}(s, p) \circ \text{Th}(s, p) \quad \text{et} \quad f_i^* \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}^{-1}(s, p) \longrightarrow f_i^*$$

sont inversibles pour tous les indices i . On considère pour tout i la suite :

$$U_i \xrightarrow{s_i} U_i \times_X V \xrightarrow{p_i} U_i$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} U_i & \xrightarrow{s_i} & U_i \times_X V & \xrightarrow{p_i} & U_i \\ f_i \downarrow & & \downarrow f'_i & & \downarrow f_i \\ X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

On sait que les deux 2-morphismes :

$$f_i^* \mathrm{Th}(s, p) \longrightarrow \mathrm{Th}(s_i, p_i) f_i^* \quad \text{et} \quad f_i^* \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \longrightarrow \mathrm{Th}^{-1}(s_i, p_i) f_i^*$$

sont des 2-isomorphismes par 1.5.2 et 1.5.4. En utilisant donc les deux losanges commutatifs du lemme 1.5.3 :

$$\begin{array}{ccc}
 & f_i^* \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) & \\
 \eta \nearrow & & \searrow \phi_{-1}(f_i) \\
 f_i^* & & \mathrm{Th}^{-1}(s_i, p_i) f_i^* \mathrm{Th}(s, p) \\
 \eta \searrow & & \nearrow \sim \\
 & \mathrm{Th}^{-1}(s_i, p_i) \mathrm{Th}(s_i, p_i) f_i^* & \\
 & \phi(f_i) &
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 & f_i^* \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) & \\
 \phi(f_i) \nearrow & & \searrow \delta \\
 \mathrm{Th}(s_i, p_i) f_i^* \mathrm{Th}^{-1}(s, p) & & f_i^* \\
 \phi_{-1}(f_i) \searrow & & \nearrow \delta \\
 & \mathrm{Th}(s_i, p_i) \mathrm{Th}^{-1}(s_i, p_i) f_i^* &
 \end{array}$$

On voit qu'il suffit de prouver que les 2-morphismes :

$$\mathrm{id} \longrightarrow \mathrm{Th}^{-1}(s_i, p_i) \circ \mathrm{Th}(s_i, p_i) \quad \text{et} \quad \mathrm{Th}(s_i, p_i) \circ \mathrm{Th}^{-1}(s_i, p_i) \longrightarrow \mathrm{id}$$

sont des 2-isomorphismes. En d'autres termes, il suffit de prouver que $\mathrm{Th}(s_i, p_i)$ est une équivalence pour tous les indices i . En choisissant donc un recouvrement Nisnevich assez fin de X et en remplaçant V par un voisinage Nisnevich de X (ce qui est légitime au vu du lemme 1.5.6) on voit qu'il suffit de traiter le cas où il existe un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{s} & V \\
 \parallel & & \downarrow q \\
 X & \xrightarrow{o} & \mathbb{A}_X^n
 \end{array}$$

avec o l'inclusion de la section nulle. En appliquant encore une fois le lemme 1.5.6 on se ramène au cas $V = \mathbb{A}_X^n$. Lorsque $n = 1$, c'est bien une équivalence par l'axiome de stabilité.

Notons p_n la projection de \mathbb{A}_X^n sur X et o_n la section nulle. On a un diagramme à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{o_1} & \mathbb{A}_X^1 & \xrightarrow{p_1} & X \\
 o_{n-1} \downarrow & & o'_{n-1} \downarrow & & o_{n-1} \downarrow \\
 \mathbb{A}_X^{n-1} & \xrightarrow{o'_1} & \mathbb{A}_X^n & \xrightarrow{p'_1} & \mathbb{A}_X^{n-1} \\
 p_{n-1} \downarrow & & p'_{n-1} \downarrow & & p_{n-1} \downarrow \\
 X & \xrightarrow{o_1} & \mathbb{A}_X^1 & \xrightarrow{p_1} & X
 \end{array}$$

Il vient que $\text{Th}(o_n, p_n) = p_n \# o_n \simeq p_1 \# p'_{n-1} \# o'_{n-1} \# o_1 = p_1 \# \text{Th}(o'_{n-1}, p'_{n-1}) o_1$. Par la proposition 1.5.5, on a un isomorphisme $\text{Th}(o'_{n-1}, p'_{n-1}) o_1 \simeq o_1 \# \text{Th}(o_{n-1}, p_{n-1})$. On en déduit en fin de compte un isomorphisme $\text{Th}(o_n, p_n) \simeq \text{Th}(o_1, p_1) \circ \text{Th}(o_{n-1}, p_{n-1})$ et par récurrence un isomorphisme $\text{Th}(o_n, p_n) \simeq \text{Th}(o_1, p_1)^{\circ n}$. Le résultat est maintenant clair. \square

Corollaire 1.5.8. — Soient X un S -schéma quasi-projectif et $X \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} X$ une suite de S -morphisms tels que $p \circ s = \text{id}_X$ et p lisse. Pour tout objet $X' \longrightarrow X$ de (Sch/X) on forme le diagramme à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & \xrightarrow{s'} & V' & \xrightarrow{p'} & X' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X
 \end{array}$$

avec $V' = V \times_X X'$. Le couple de familles $((\text{Th}(s', p'))_{X' \rightarrow X}, (\phi(f))_{f: X'' \rightarrow X'})$ définit une autoéquivalence du 2-foncteur $\mathbf{H}^*_{|(\text{Sch}/X)}$ restriction du 2-foncteur \mathbf{H}^* à (Sch/X) .

Démonstration. — Il s'agit de prouver que la composée des 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{H}(X'') & \xrightarrow{s''_*} & \mathbf{H}(V'') & \xrightarrow{p''_{\#}} & \mathbf{H}(X'') \\
 f^* \uparrow & \searrow (Ex'_*)^{-1} & \uparrow f'^* & \searrow Ex_{\#} & \uparrow f^* \\
 \mathbf{H}(X') & \xrightarrow{s'_*} & \mathbf{H}(V') & \xrightarrow{p'_{\#}} & \mathbf{H}(X')
 \end{array}$$

commute aux 2-isomorphismes de connexions du 2-foncteur \mathbf{H}^* . Pour une suite de X -morphisms composables :

$$X''' \xrightarrow{f'} X'' \xrightarrow{f} X'$$

on forme le diagramme à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 X''' & \xrightarrow{s'''} & V''' & \xrightarrow{p'''} & X''' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X'' & \xrightarrow{s''} & V'' & \xrightarrow{p''} & X'' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{s'} & V' & \xrightarrow{p'} & X'
 \end{array}$$

avec $V'' = V \times_X X''$ et $V''' = V \times_X X'''$. On voit qu'il suffit de prouver que les deux 2-morphismes $Ex_{\#}^*$ et Ex_*^* commutent à la composition horizontale des carrés cartésiens. Mais ceci est clair puisque c'est les 2-morphismes d'échange de deux structures d'échange. \square

1.5.2. Propriétés des équivalences de Thom. — On résume quelques propriétés des équivalences de Thom dans l'énoncé suivant :

Théorème 1.5.9. — Soit une suite de S -morphisms : $X \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} X$ tels que $p \circ s = \text{id}_X$ et p lisse. Pour tout X -schéma $X' \longrightarrow X$ on considère un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & \xrightarrow{s'} & V' & \xrightarrow{p'} & X' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X
 \end{array}$$

à carrés cartésiens. Pour tout X -morphisme $f : X' \longrightarrow X$, on a des 2-isomorphismes :

- $\phi(f) : \text{Th}(s'', p'') f^* \xrightarrow{\sim} f^* \text{Th}(s', p')$,
- $\psi(f) : f_* \text{Th}(s'', p'') \xrightarrow{\sim} \text{Th}(s', p') f_*$,
- $\chi(f) : f_{\#} \text{Th}(s'', p'') \xrightarrow{\sim} \text{Th}(s', p') f_{\#}$ si f est lisse,
- $\zeta(i) : \text{Th}(s'', p'') i^! \xrightarrow{\sim} i^! \text{Th}(s', p')$ si $i = f$ est une immersion.

La famille des équivalences $(\text{Th}(s', p'))_{X' \rightarrow X}$ munie des 2-isomorphismes $\phi(\cdot)$ (resp. $\psi(\cdot)$, $\chi(\cdot)$ et $\zeta(\cdot)$) définit une autoéquivalence sur le 2-foncteur \mathbf{H}^* (resp. \mathbf{H}_* , ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_{\#}$ et ${}^{\text{Imm}}\mathbf{H}^!$) restreint aux X -schémas. De plus, ces autoéquivalences sont compatibles avec toutes les structures d'échange construites jusqu'à présent.

Démonstration. — Pour construire les autoéquivalences on se sert de la proposition 1.1.26 et du corollaire 1.5.8. Pour se convaincre de la compatibilité avec les échanges construits dans la section 1.4, il suffit de remarquer que tous les échanges ont été obtenus à partir de l'échange trivial sur $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}^*)$ en :

- utilisant le procédé de la proposition 1.2.5,
- prenant l'isoéchange inverse dans le cas d'un isoéchange,

- faisant une restriction (soit au niveau de la classe des carrés, soit aux niveaux des catégories sources).

D'après la proposition 1.2.11 il suffit alors de prouver que nos autoéquivalences sont compatibles avec l'échange de $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}^*)$. En d'autres termes on est ramené à prouver que l'autoéquivalence de Thom est compatible avec les 2-isomorphismes de connexion de \mathbf{H}^* . Ceci est la définition même d'une autoéquivalence. \square

Remarque 1.5.10. — On déduit du théorème précédent un énoncé analogue concernant les équivalences de Thom inverses. On obtient ainsi les 2-isomorphismes :

- $\phi_{-1}(f) : \text{Th}^{-1}(s'', p'') f^* \xrightarrow{\sim} f^* \text{Th}^{-1}(s', p') ,$
- $\psi_{-1}(f) : f_* \text{Th}^{-1}(s'', p'') \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(s', p') f_* ,$
- $\chi_{-1}(f) : f_{\#} \text{Th}^{-1}(s'', p'') \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(s', p') f_{\#}$ si f est lisse,
- $\zeta_{-1}(i) : \text{Th}^{-1}(s'', p'') i^! \xrightarrow{\sim} i^! \text{Th}^{-1}(s', p') si $i = f$ est une immersion.$

La dernière assertion reste également vraie pour les équivalences de Thom inverses.

Supposons donné maintenant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & t \nearrow & \downarrow q & \searrow p \circ q & \\ X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

avec s une immersion fermée, p et q lisses et $p \circ s = \text{id}_X$. Il vient alors que :

$$p \circ q \circ t = p \circ s = \text{id}_X$$

et que t est une immersion fermée. On peut former le diagramme :

$$X \xrightarrow{u = t \times \text{id}} W \times_V X \xrightarrow{r = pr_2} X$$

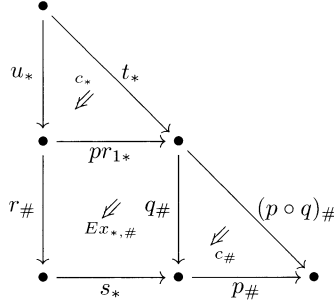
On a alors que u est une immersion fermée, r est lisse et $r \circ u = \text{id}_X$. On va construire un 2-isomorphisme (de composition) :

$$C : \text{Th}(t, p \circ q) \xrightarrow{\sim} \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(u, r)$$

Pour cela on forme le diagramme commutatif de S -schémas :

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ \downarrow u & \searrow t & & & \\ W \times_V X & \xrightarrow{pr_1} & W & & \\ \downarrow r & & \downarrow q & \searrow p \circ q & \\ X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

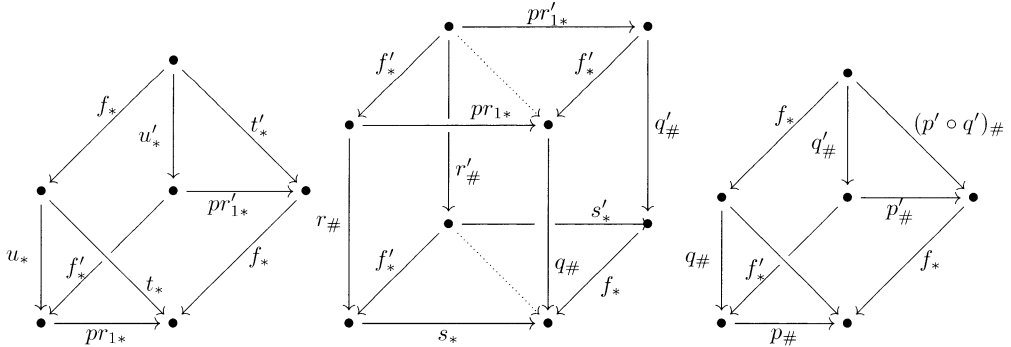
et on prend la composée du diagramme planaire :



Le 2-morphisme ainsi obtenu est inversible car $Ex_{*, \#}$ est un isomorphisme puisque q est lisse et s une immersion fermée (voir le corollaire 1.4.18). On a la proposition suivante qui complète le théorème 1.5.9 :

Proposition 1.5.11. — *Sous les hypothèses du théorème 1.5.9, les 2-isomorphismes qu'on vient de construire, définissent un isomorphisme d'autoéquivalences entre l'autoéquivalence $(\mathrm{Th}(t', p' \circ q'))_{X' \rightarrow X}$ et l'autoéquivalence composée $(\mathrm{Th}(s', p') \circ \mathrm{Th}(u', r'))_{X' \rightarrow X}$, ceci pour les restrictions des 2-foncteurs : H^* , H_* , ${}^{\mathrm{Liss}}H_{\#}$ et ${}^{\mathrm{Imm}}H^!$ à la catégorie (Sch/X) .*

Démonstration. — En utilisant les deux dernières assertions de la proposition 1.1.26, on voit qu'il suffit de prouver la proposition pour l'autoéquivalence sur la restriction de H_* à (Sch/X) . En revenant à la définition on voit qu'il suffit de prouver la commutativité des trois diagrammes solides :

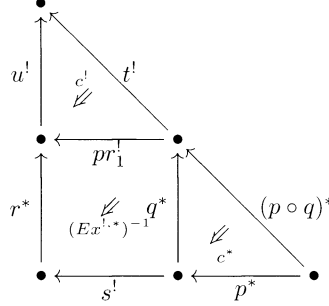


La commutation du premier diagramme solide découle facilement de l'axiome de cocycle pour le 2-foncteur H_* . La commutation du troisième diagramme est la compatibilité de l'échange sur $(H_*, H_{\#})$ avec la composition verticale des carrés. Finalement, pour montrer la commutation du cube on le divise selon les plan des deux lignes en pointillé. Ces lignes correspondent aux 1-morphismes $(pr_1 \circ f')_* = (f \circ pr'_1)_*$ et $(s \circ f')_* = (s' \circ f)_*$. La commutation des deux diagrammes ainsi obtenus découle cette fois de la compatibilité de l'échange avec la composition horizontale des carrés. \square

Remarque 1.5.12. — En prenant l'inverse de l'adjoint du 2-isomorphisme de composition C , on obtient un 2-isomorphisme de composition pour les équivalences de Thom inverses :

$$C_{-1} : \text{Th}^{-1}(t, p \circ q) \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(u, r) \circ \text{Th}^{-1}(s, p)$$

On vérifie immédiatement que ce 2-morphisme est donné par la composée du diagramme planaire :



On a également l'analogue de la proposition 1.5.11.

Dans la suite de ce paragraphe on se bornera à énoncer les propriétés des 2-isomorphismes de composition (ainsi que les 2-isomorphismes dérivés) pour les équivalences de Thom $\text{Th}(-)$. Les énoncés analogues pour les équivalences de Thom inverses s'obtiennent alors facilement par adjonction.

En utilisant le 2-isomorphisme de composition on peut déduire un 2-isomorphisme de commutation :

Corollaire 1.5.13. — *Les équivalences de Thom commutent entre elles. Plus précisément si $X \xrightarrow{s_1} V_1 \xrightarrow{p_1} X$ et $X \xrightarrow{s_2} V_2 \xrightarrow{p_2} X$ sont deux suites comme avant, il existe un 2-isomorphisme :*

$$Cm : \text{Th}(s_1, p_1) \circ \text{Th}(s_2, p_2) \longrightarrow \text{Th}(s_2, p_2) \circ \text{Th}(s_1, p_1)$$

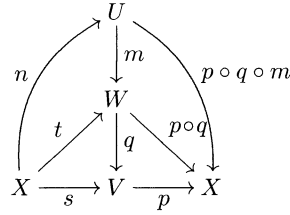
De plus, les Cm définissent un isomorphisme d'autoéquivalences entre $(\text{Th}(s'_1, p'_1) \circ \text{Th}(s'_2, p'_2))_{X' \rightarrow X}$ et $(\text{Th}(s_2, p_2) \circ \text{Th}(s'_1, p'_1))_{X' \rightarrow X}$, ceci pour les restrictions des 2-foncteurs : \mathbf{H}^ , \mathbf{H}_* , ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_\#$ et ${}^{\text{Imm}}\mathbf{H}^!$ à la catégorie (Sch/X) .*

Démonstration. — On pose $V = V_1 \times_X V_2$. On a une suite : $X \xrightarrow{s = s_1 \times s_2} V \xrightarrow{p = p_1 \times p_2} X$. Remarquons que cette suite est obtenue par composition de $X \xrightarrow{s_1} V_1 \xrightarrow{p_1} X$ avec $V_1 \xrightarrow{1 \times s_2} V \xrightarrow{pr_1} V_1$. De plus, quand on restreint à X on obtient la deuxième suite de l'énoncé. On a ainsi un 2-isomorphisme $C : \text{Th}(s, p) \longrightarrow \text{Th}(s_1, p_1) \text{Th}(s_2, p_2)$. Par symétrie on a également un 2-isomorphisme $C : \text{Th}(s, p) \longrightarrow \text{Th}(s_2, p_2) \text{Th}(s_1, p_1)$. On obtient le 2-isomorphisme recherché comme composée :

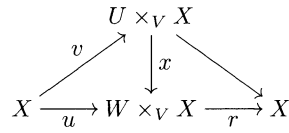
$$\text{Th}(s_1, p_1) \circ \text{Th}(s_2, p_2) \xrightarrow{C^{-1}} \text{Th}(s, p) \xrightarrow{C} \text{Th}(s_2, p_2) \circ \text{Th}(s_1, p_1)$$

La dernière assertion découle immédiatement de la proposition 1.5.11. \square

Soit maintenant un diagramme commutatif de S -schémas :



On peut former le diagramme commutatif :



et puis la suite :

$$X \xrightarrow{w} (U \times_V X) \times_{W \times_V X} X = U \times_W X \xrightarrow{y} X$$

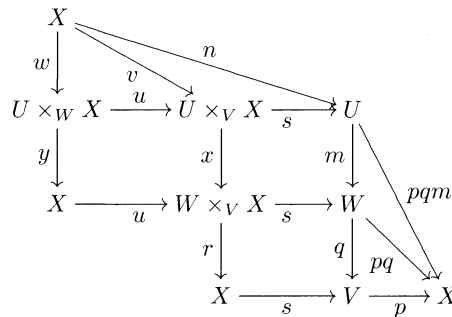
On a la proposition suivante :

Proposition 1.5.14. — *Le carré de 2-isomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Th}(n, p \circ q \circ m) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(t, p \circ q) \circ \mathrm{Th}(w, y) \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 \mathrm{Th}(s, p) \circ \mathrm{Th}(v, r \circ x) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(s, p) \circ \mathrm{Th}(u, r) \circ \mathrm{Th}(w, y)
 \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — On forme le diagramme commutatif de S -schémas :



On en déduit un diagramme planaire dans \mathfrak{TR} :

$$(24) \quad \begin{array}{ccccc} H(X) & & & & \\ \downarrow w_* & \searrow v_* & \searrow n_* & & \\ H(U \times_W X) & \xrightarrow{u_*} & H(U \times_V X) & \xrightarrow{s_*} & H(U) \\ \downarrow y_\# & \searrow Ex_{*,\#} & \downarrow x_\# & \searrow Ex_{*,\#} & \downarrow m_\# \\ H(X) & \xrightarrow{u_*} & H(W \times_V X) & \xrightarrow{s_*} & H(W) \\ & & \downarrow r_\# & \searrow Ex_{*,\#} & \downarrow q_\# \\ & & H(X) & \xrightarrow{s_*} & H(V) \xrightarrow{p_\#} H(X) \end{array}$$

$(p \circ q \circ m)_\#$
 $(p \circ q)_\#$

Nous allons prouver que la composée du diagramme planaire (24) est égale aux deux composées suivantes :

$$(25) \quad \text{Th}(n, p \circ q \circ m) \longrightarrow \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(v, r \circ x) \longrightarrow \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(u, r) \circ \text{Th}(w, y)$$

et

$$(26) \quad \text{Th}(n, p \circ q \circ m) \longrightarrow \text{Th}(t, p \circ q) \circ \text{Th}(w, y) \longrightarrow \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(u, r) \circ \text{Th}(w, y)$$

Ceci prouvera notre proposition.

Prouvons d'abord que la composée de (24) est égale au 2-morphisme (25). Pour cela on divise notre diagramme planaire (24) suivant la ligne :

$$\bullet \xrightarrow{w_*} \bullet \xrightarrow{y_\#} \bullet \xrightarrow{u_*} \bullet \xrightarrow{s_*} \bullet \xrightarrow{(p \circ q)_\#} \bullet$$

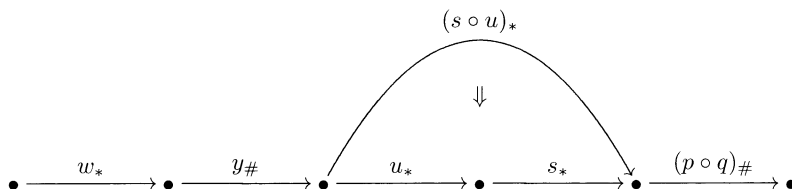
Si on attache un 2-morphisme de connexion :

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \xrightarrow{w_*} & \bullet & \xrightarrow{y_\#} & \bullet & \xrightarrow{u_*} & \bullet \xrightarrow{s_*} \bullet \xrightarrow{(p \circ q)_\#} \bullet \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & (s \circ u)_* & & \end{array}$$

à la partie du diagramme planaire (24) située au-dessus de la ligne choisie il est facile de voir (en utilisant la compatibilité des 2-morphismes $Ex_{*,\#}$ avec la composition des carrés) qu'on obtient le 2-isomorphisme :

$$\text{Th}(n, p \circ q \circ m) \xrightarrow{\sim} \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(v, r \circ x)$$

Puis en attachant le 2-morphisme de connexion (égal à l'inverse du précédent) :

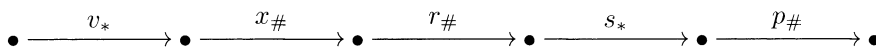


à la partie du diagramme planaire (24) située au dessous de la ligne choisie, on obtient par définition :

$$\mathrm{Th}(s, p) \circ \mathrm{Th}(v, r \circ x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s, p) \circ \mathrm{Th}(u, r) \circ \mathrm{Th}(w, y)$$

Ceci achève la première moitié de la démonstration.

Il reste donc à prouver que la composée du diagramme planaire (24) est égale au 2-morphisme (26). Pour cela on divise (24) suivant la ligne :



et on fait exactement comme avant mais en introduisant un 2-isomorphisme de connexion ainsi que son inverse au niveau de la composée : $\bullet \xrightarrow{x\#} \bullet \xrightarrow{r\#} \bullet$. \square

On déduit de la proposition précédente la compatibilité suivante entre les 2-isomorphismes de composition et les 2-isomorphismes de commutation :

Corollaire 1.5.15. — *On suppose donné un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ t \nearrow & \downarrow q & \searrow p \circ q \\ X & \xrightarrow{s} V & \xrightarrow{p} X \end{array}$$

comme avant et on garde les notations précédentes. Soit $X \xrightarrow{z} R \xrightarrow{k} X$ une troisième suite. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Th}(t, p \circ q) \circ \mathrm{Th}(z, k) & \xrightarrow{Cm} & \mathrm{Th}(z, k) \circ \mathrm{Th}(t, p \circ q) \\ C \downarrow & & \downarrow C \\ \mathrm{Th}(s, p) \circ \mathrm{Th}(u, r) \circ \mathrm{Th}(z, k) & \xrightarrow{Cm} \mathrm{Th}(s, p) \circ \mathrm{Th}(z, k) \circ \mathrm{Th}(u, r) \xrightarrow{Cm} & \mathrm{Th}(z, k) \circ \mathrm{Th}(s, p) \circ \mathrm{Th}(u, r) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — On va appliquer la proposition précédente aux trois diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 W \times_X R \\
 \downarrow pr_1 \\
 X \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} X
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 W \times_X R \\
 \downarrow q \times id \\
 V \times R \\
 \downarrow pr_2 \\
 R \xrightarrow{k} X
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 W \times_X R \\
 \downarrow q \times id \\
 V \times R \\
 \downarrow pr_2 \\
 V \xrightarrow{p} X
 \end{array}
 \end{array}$$

Les diagrammes ci-dessus sont des triangles commutatifs. Les flèches courbes sont des compositions de flèches droites. Les flèches droites sont :

- De X à $W \times_X R$: $t \times z$
- De $W \times_X R$ à W : pr_1
- De W à V : q
- De V à X : p
- De X à V : s
- De W à X : $p \circ q \circ pr_1$
- De V à X : $p \circ q$
- De X à $V \times R$: $s \times z$
- De $V \times R$ à V : pr_2
- De V à X : p
- De $V \times R$ à R : k
- De R à X : k
- De $V \times R$ à X : $p' \circ pr_1$
- De $V \times R$ à X : $p' \circ pr_2$

On en déduit les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 (W \times_V X) \times_X R & & (W \times_V X) \times_X R \\
 \swarrow u \times z & \downarrow pr_1 & \swarrow u \times s' \\
 X \xrightarrow{u} W \times_V X \xrightarrow{r} X & & X \xrightarrow{z} R \xrightarrow{k} X
 \end{array}$$

Dans la suite de la preuve, on se permet de noter simplement $\text{Th}(\text{immersion fermée}, -)$ lorsque le nom de la projection lisse est long à écrire. Les trois carrés commutatifs qu'on obtient par application de la proposition 1.5.14 s'organisent alors de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Th}(z, k) \text{Th}(t, pq) & \longrightarrow & \text{Th}(z, k) \text{Th}(s, p) \text{Th}(u, r) \\
 & \nearrow & & \nearrow & \\
 & \text{Th}(t \times z, -) & \longrightarrow & \text{Th}(s \times z, -) \text{Th}(u, r) & \\
 \swarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 \text{Th}(t, pq) \text{Th}(z, k) & \text{Th}(s, p) \text{Th}(u \times z, -) \longrightarrow \text{Th}(s, p) \text{Th}(z, k) \text{Th}(u, r) & & & \\
 \downarrow & \swarrow & & & \\
 \text{Th}(s, p) \text{Th}(u, r) \text{Th}(z, k) & & & &
 \end{array}$$

Ceci prouve le corollaire. \square

Dans la définition des 2-isomorphismes de connexions du 2-foncteur $\mathbf{H}^!$, on rencontre naturellement une version modifiée du 2-isomorphisme de composition.

Définition 1.5.16. — Supposons donné un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & t \nearrow & \downarrow q & \searrow p \circ q & \\ X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

avec s une immersion fermée, p et q lisses et $p \circ s = \text{id}_X$. Avec les notations précédentes, on pose C' le 2-isomorphisme composé :

$$C' : \text{Th}(t, p \circ q) \xrightarrow{C} \text{Th}(s, p) \circ \text{Th}(u, r) \xrightarrow{Cm} \text{Th}(u, r) \circ \text{Th}(s, p)$$

Le 2-isomorphisme C' est appelé le 2-isomorphisme de composition modifié. L'inverse de l'adjoint de C' sera noté C'_{-1} . C'est la composée :

$$C'_{-1} : \text{Th}^{-1}(t, p \circ q) \xrightarrow{C_{-1}} \text{Th}^{-1}(u, r) \circ \text{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{Cm_{-1}} \text{Th}^{-1}(s, p) \circ \text{Th}^{-1}(u, r)$$

On a de même pour ce 2-isomorphisme :

Théorème 1.5.17. — Sous les hypothèses du théorème 1.5.9, les 2-isomorphismes C' définissent un isomorphisme d'autoéquivalences entre l'autoéquivalence $(\text{Th}(t', p' \circ q'))_{X' \rightarrow X}$ et l'autoéquivalence composée $(\text{Th}(u', r') \circ \text{Th}(s', p'))_{X' \rightarrow X}$, ceci pour les restrictions des 2-foncteurs : H^* , H_* , ${}^{\text{Liss}}H_{\#}$ et ${}^{\text{Imm}}H^!$ à la catégorie (Sch/X) .

De plus, sous les hypothèses de la proposition 1.5.14, le carré de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \text{Th}(n, p \circ q \circ m) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(w, y) \circ \text{Th}(t, p \circ q) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \text{Th}(v, r \circ x) \circ \text{Th}(s, p) & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(w, y) \circ \text{Th}(u, r) \circ \text{Th}(s, p) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Le résultat est une conséquence facile de la proposition 1.5.14 et du corollaire 1.5.15. \square

1.5.3. Cas particulier des fibrés vectoriels. Les 2-foncteurs ${}^{\text{Liss}}H^!$ et ${}^{\text{Liss}}H_!$

Soit \mathcal{L} un \mathcal{O}_X -module localement libre de dimension finie. On note

$$p : \mathbb{V}(\mathcal{L}) \longrightarrow X$$

le fibré vectoriel associé. C'est le spectre de la \mathcal{O}_X -algèbre symétrique $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Sym}^i \mathcal{L}$ associé à \mathcal{L} . Si $s : X \longrightarrow \mathbb{V}(\mathcal{L})$ est la section nulle, on notera $\text{Th}(\mathcal{L})$ l'équivalence $\text{Th}(s, p)$. Lorsque $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ on posera aussi $\text{Th}(\mathcal{O}_X)A[-2] = A(+1)$. Le 1-morphisme $\text{Th}(\mathcal{O}_X)[-2] : A \longrightarrow A(+1)$ est connu sous le nom de *twist à la Tate*.

La proposition 1.5.14 et le théorème 1.5.17 donnent facilement le théorème suivant.

Théorème 1.5.18. — Soit une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules localement libres :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

Il existe alors un 2-isomorphisme de composition :

$$C : \text{Th}(\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Th}(\mathcal{N}) \circ \text{Th}(\mathcal{L})$$

et un 2-isomorphisme de composition modifié :

$$C' : \text{Th}(\mathcal{M}) \longrightarrow \text{Th}(\mathcal{L}) \circ \text{Th}(\mathcal{N})$$

De plus si $0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}$ est une filtration du \mathcal{O}_X -module localement libre \mathcal{M} en trois crans tel que le gradué soit aussi localement libre, on a deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \text{Th}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{C} & \text{Th}(\mathcal{M}_2) \circ \text{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_2) \\ C \downarrow & & \downarrow C \\ \text{Th}(\mathcal{M}_1) \circ \text{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_1) & \xrightarrow{C} & \text{Th}(\mathcal{M}_1) \circ \text{Th}(\mathcal{M}_2/\mathcal{M}_1) \circ \text{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_2) \\ \\ \text{Th}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{C'} & \text{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_2) \circ \text{Th}(\mathcal{M}_2) \\ C' \downarrow & & \downarrow C' \\ \text{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_1) \circ \text{Th}(\mathcal{M}_1) & \xrightarrow{C'} & \text{Th}(\mathcal{M}_3/\mathcal{M}_2) \circ \text{Th}(\mathcal{M}_2/\mathcal{M}_1) \circ \text{Th}(\mathcal{M}_1) \end{array}$$

1.5.3.1. Le 2-foncteur ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^!$. — Le théorème 1.5.18 nous permettra de définir sur $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$ un 2-foncteur ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^!$. Bien sûr on veut que $\mathbf{H}^!(X) = \mathbf{H}(X)$ pour tout S -schéma X . On posera pour un morphisme lisse f :

$$f^! = \text{Th}(\Omega_f) \circ f^*$$

où Ω_f est le faisceau des différentielles relatives.

Définissons les 2-isomorphismes de connexions. Pour une suite de S -morphisms lisses $\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$, on prendra $c^!(f, g)$ la composée :

$$\begin{array}{ccc} (g \circ f)^! & & f^! g^! \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Th}(\Omega_{g \circ f})(g \circ f)^* & \xrightarrow{c^*(f, g)} & \text{Th}(\Omega_{g \circ f}) f^* g^* \xrightarrow{C'} \text{Th}(\Omega_f) \text{Th}(f^* \Omega_g) f^* g^* \xrightarrow{\phi(f)^{-1}} \text{Th}(\Omega_f) f^* \text{Th}(\Omega_g) g^* \end{array}$$

avec C' le 2-isomorphisme de composition modifié associé à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow f^* \Omega_g \longrightarrow \Omega_{g \circ f} \longrightarrow \Omega_f \longrightarrow 0$$

Il nous faut vérifier l'axiome de cocycle. Soient les trois morphismes lisses composables :

$$\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{h} \bullet$$

Il s'agit de vérifier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (hgf)^! & \longrightarrow & (gf)^!h^! \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^!(hg)^! & \longrightarrow & f^!g^!h^! \end{array}$$

Notons pour cela le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathrm{Th}(\Omega_g)g^*\mathrm{Th}(\Omega_h) & \longrightarrow & f^*\mathrm{Th}(\Omega_g)\mathrm{Th}(g^*\Omega_h)g^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(f^*\Omega_g)f^*g^*\mathrm{Th}(\Omega_h) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(f^*\Omega_g)f^*\mathrm{Th}(g^*\Omega_h)g^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(f^*\Omega_g)(g \circ f)^*\mathrm{Th}(\Omega_h) & & \mathrm{Th}(f^*\Omega_g)\mathrm{Th}(f^*g^*\Omega_h)f^*g^* \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathrm{Th}(f^*\Omega_g)\mathrm{Th}(f^*g^*\Omega_h)(g \circ f)^* & \end{array}$$

La commutation du sous-diagramme inférieur étant la compatibilité des 2-isomorphismes ϕ avec la composition. On en déduit donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Th}(\Omega_f)f^*\mathrm{Th}(\Omega_g)g^*\mathrm{Th}(\Omega_h)h^* & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\Omega_f)f^*\mathrm{Th}(\Omega_g)\mathrm{Th}(g^*\Omega_h)(hg)^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(\Omega_f)\mathrm{Th}(f^*\Omega_g)(g \circ f)^*\mathrm{Th}(\Omega_h)h^* & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\Omega_f)\mathrm{Th}(f^*\Omega_g)\mathrm{Th}(f^*g^*\Omega_h)(hg)^* \end{array}$$

Et en fin de compte le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} f^!g^!h^! & \longrightarrow & f^!\mathrm{Th}(\Omega_g)\mathrm{Th}(g^*\Omega_h)(hg)^* & \longrightarrow & f^!\mathrm{Th}(\Omega_{hg})(gh)^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(\Omega_f)\mathrm{Th}(f^*\Omega_g)(gf)^*h^! & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\Omega_f)\mathrm{Th}(f^*\Omega_g)\mathrm{Th}(f^*g^*\Omega_{hg})(hg)^* & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\Omega_f)\mathrm{Th}(f^*\Omega_{gh})(hg)^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(\Omega_{gf})(gf)^*h^! & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\Omega_{gf})\mathrm{Th}((gf)^*\Omega_h)(hg)^* & \longrightarrow & (hg)^! \end{array}$$

où le carré inférieur à droite est simplement le deuxième carré commutatif du théorème 1.5.18 associé à la filtration : $(gf)^*\Omega_h \subset f^*\Omega_{hg} \subset \Omega_{hgf}$. Ceci prouve ce que l'on veut.

1.5.3.2. *Le 2-foncteur ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_!$.* — On définit également sur $(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}}$ un 2-foncteur ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_!$ tel que $\mathbf{H}_!(X) = \mathbf{H}(X)$ pour tout S -schéma X . Pour un S -morphisme lisse f on définit le 1-morphisme $\mathbf{H}_!(f) = f_!$ par la formule :

$$f_! = f_{\#} \circ \text{Th}^{-1}(\Omega_f)$$

Le 1-morphisme $f_!$ est donc adjoint à gauche à $f^!$. Les 2-morphismes d'unité et de counité sont respectivement :

$$\begin{array}{ccc} \text{id} \longrightarrow & \text{Th}(\Omega_f)\text{Th}^{-1}(\Omega_f) & \text{et} \quad f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_f)\text{Th}(\Omega_f)f^* \longrightarrow f_{\#}f^* \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \text{Th}(\Omega_f)f^*f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_f) & \text{id} \end{array}$$

D'après 1.1.17 il existe un unique adjoint global à gauche ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_!$ de ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^!$ tels que :

- $\mathbf{H}_!(f) = f_! = f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_f)$ pour tout S -morphisme lisse f ,
- les 2-morphismes d'unité et de counité sont ceux donnés ci-dessus.

Les 2-isomorphismes de connexions relativement à la suite $\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$ sont donnés par la composée des 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} (g \circ f)_! & & \\ \parallel & & \\ (g \circ f)_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_{g \circ f}) \xrightarrow{c_{\#}(f, g)} g_{\#}f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_{g \circ f}) & & g_!f_! \\ & & \parallel \\ \xrightarrow{C'_{-1}} g_{\#}f_{\#}\text{Th}^{-1}(f^*\Omega_g)\text{Th}^{-1}(\Omega_f) \longrightarrow g_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_g)f_{\#}\text{Th}^{-1}(\Omega_f) & & \end{array}$$

1.5.4. Une structure de foncteurs croisés sur $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_!, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^!)$. — Pour l'énoncé qui suivra, on utilisera la structure de foncteurs croisés sur le quadruplet $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_{\#}, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^*)$ relativement à la classe des carrés cartésiens à flèches verticales lisses.

Proposition 1.5.19. — *Il existe une structure de foncteurs croisés sur le quadruplet :*

$$(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_!, {}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^!)$$

tel pour tout carré cartésien de S -schémas (C) :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

avec f lisse, on a :

1. Le 2-morphisme d'échange $Ex_{*,!}(C) : f_! g'_* \longrightarrow g_* f'_!$ relatif à l'échange sur $(H_*, {}^{\text{Liss}}H_!)$ et associé au carré (C) est donné par la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{g'_*} & \bullet \\
 \text{Th}^{-1}(\Omega_{f'}) \downarrow & \searrow & \downarrow \text{Th}^{-1}(\Omega_f) \\
 \bullet & \xrightarrow{g'_*} & \bullet \\
 f'_\# \downarrow & \searrow_{Ex_{*,\#}(C)} & \downarrow f_\# \\
 \bullet & \xrightarrow{g_*} & \bullet
 \end{array}$$

2. Le 2-morphisme d'échange $Ex^{*,!}(C) : g'^* f^! \longrightarrow f'^! g^*$ relatif à l'échange sur $(H^*, {}^{\text{Liss}}H^!)$ et associé au carré (C) est donné par la composée du diagramme planaire :

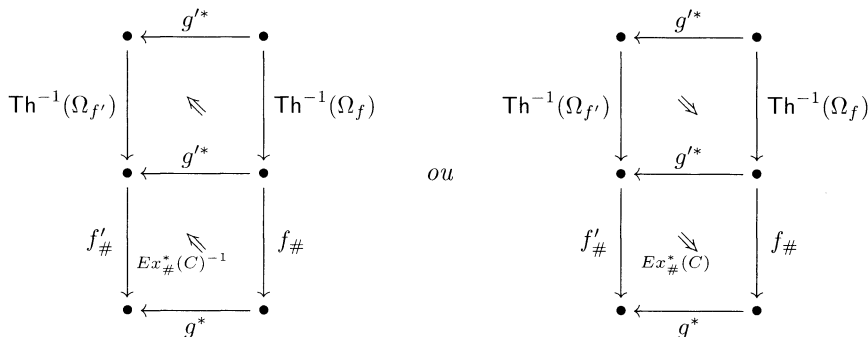
$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xleftarrow{g'_*} & \bullet \\
 \text{Th}(\Omega_{f'}) \uparrow & \swarrow & \uparrow \text{Th}(\Omega_f) \\
 \bullet & \xleftarrow{g'^*} & \bullet \\
 f'^* \uparrow & \swarrow_{Ex^{*,*}(C)} & \uparrow f^* \\
 \bullet & \xleftarrow{g^*} & \bullet
 \end{array}$$

3. Le 2-isomorphisme d'échange $Ex_*^!(C) : f^! g_* \xleftarrow{\sim} g'_* f'^!$ relatif à l'isoéchange sur $(H_*, {}^{\text{Liss}}H^!)$ et associé au carré (C) est donné par la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{g'_*} & \bullet \\
 \text{Th}(\Omega_{f'}) \uparrow & \searrow & \uparrow \text{Th}(\Omega_f) \\
 \bullet & \xrightarrow{g'_*} & \bullet \\
 f'^* \uparrow & \searrow_{Ex_*^!(C)^{-1}} & \uparrow f^* \\
 \bullet & \xrightarrow{g_*} & \bullet
 \end{array}
 \quad \text{ou} \quad
 \begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{g'_*} & \bullet \\
 \text{Th}(\Omega_{f'}) \uparrow & \searrow & \uparrow \text{Th}(\Omega_f) \\
 \bullet & \xrightarrow{g'_*} & \bullet \\
 f'^* \uparrow & \searrow_{Ex_*^!(C)} & \uparrow f^* \\
 \bullet & \xrightarrow{g_*} & \bullet
 \end{array}$$

selon le sens de l'isoéchange (\nearrow ou \searrow).

4. Le 2-morphisme d'échange $Ex_{*,!}(C) : f_!g'_* \longrightarrow g_*f'_!$ relatif à l'échange sur $(\mathbf{H}_*, \text{Liss}\mathbf{H}_!)$ et associé au carré (C) est donné par la composée du diagramme planaire :



selon le sens de l'isoéchange (\lrcorner ou \lrcorner^{-1}).

Démonstration. — Il s'agit de vérifier les deux points suivants :

1. Les 2-morphismes définis par les diagrammes planaires de l'énoncé définissent bien des structures d'échange.
2. Les échanges s'organisent en un foncteur croisé.

Pour cela, il suffira de prouver (compte tenu que les quatre derniers diagrammes planaires de l'énoncé définissent des 2-isomorphismes) les deux points suivants :

1. La famille des 2-morphismes $Ex^{*,!}(C)$ pour (C) variant dans la classe des carrés cartésiens à morphismes verticaux lisses définit une structure d'échange sur le couple $(\mathbf{H}^*, \text{Liss}\mathbf{H}^!)$.
2. Les autres 2-morphismes : $Ex_{*,!}(C)$, $Ex_{*}^!(C)$ et $Ex_{!}^*(C)$ sont obtenus par applications itérées de 1.2.5 à partir de $Ex^{*,!}(C)$ (on se permet de prendre l'inverse lorsqu'il existe pour tous les carrés cartésiens).

Le second point est clair par les propositions 1.1.9 , 1.1.11 et 1.1.12 et la définition même des 2-isomorphismes de commutation avec les équivalences de Thom. Il nous reste donc à établir le premier point, *i.e.*, à vérifier la compatibilité des 2-morphismes $Ex^{*,!}(C)$ avec la composition des carrés cartésiens. Là encore on distingue deux cas suivant la nature de la composition :

1. La compatibilité avec la composition horizontale des carrés.
2. La compatibilité avec la composition verticale des carrés.

Le premier point est très facile, on le laisse en exercice. On s'intéresse donc à établir la compatibilité avec la composition verticale des carrés. On se donne donc un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc}
 & g'' & \\
 h' \downarrow & & \downarrow h \\
 & g' & \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 & g &
 \end{array}$$

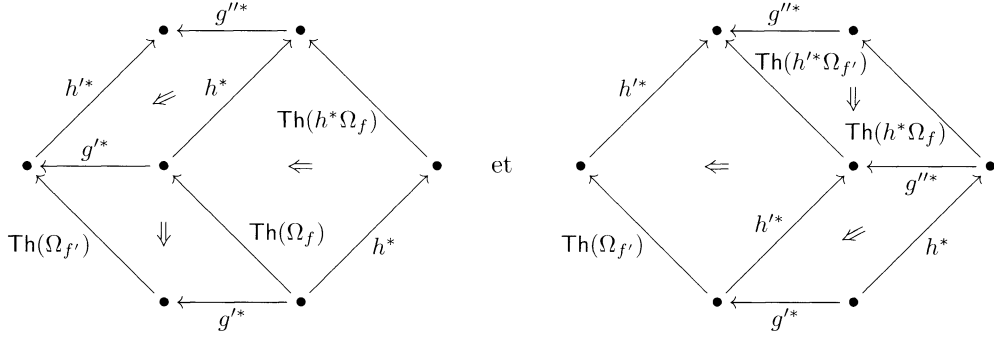
Il s'agit de prouver que les deux diagrammes planaires :

$$(27) \quad \begin{array}{ccccc}
 & & g''^* & & \\
 & h'^! & \swarrow & h'^! & \\
 & g'^* & \swarrow & c^! & (fh)^! \\
 & f'^! & \swarrow & f'^! & \\
 & & g^* & &
 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc}
 & g''^* & \\
 h'^! & \swarrow & \\
 c^! & \swarrow & (f'h')^! \\
 f'^! & \swarrow & \Downarrow_{Ex^{*,!}} \\
 & g^* & \\
 & (fh)^! &
 \end{array}$$

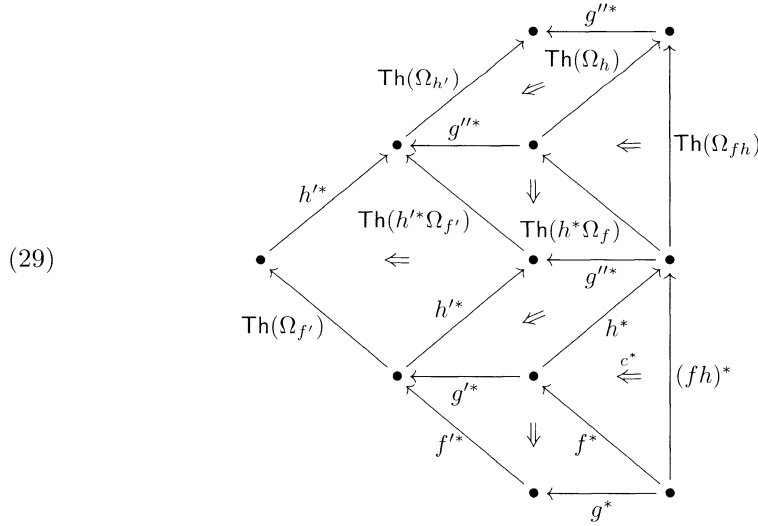
définissent le même 2-morphisme. Pour prouver cela on va expliciter les 2-morphismes qui figurent dans le premier diagramme planaire. On obtient alors le diagramme planaire suivant :

$$(28) \quad \begin{array}{ccccc}
 & & g''^* & & \\
 & \text{Th}(\Omega_{h'}) & \swarrow & \text{Th}(\Omega_h) & \\
 & g''^* & \swarrow & c^* & \text{Th}(\Omega_{fh}) \\
 & h'^* & \swarrow & h^* & \\
 & g'^* & \swarrow & \text{Th}(h^*\Omega_f) & \\
 & \text{Th}(\Omega_{f'}) & \swarrow & \text{Th}(\Omega_f) & \\
 & f'^* & \swarrow & f^* & \\
 & & g^* & &
 \end{array}$$

Le fait que les équivalences de Thom munies des 2-isomorphismes de commutations avec les $\mathbf{H}^*(.)$ forment une autoéquivalence de 2-foncteurs (compatible avec la structure d'échange triviale donnée par les $Ex^{*,*}$) implique que les composées des deux diagrammes planaires :



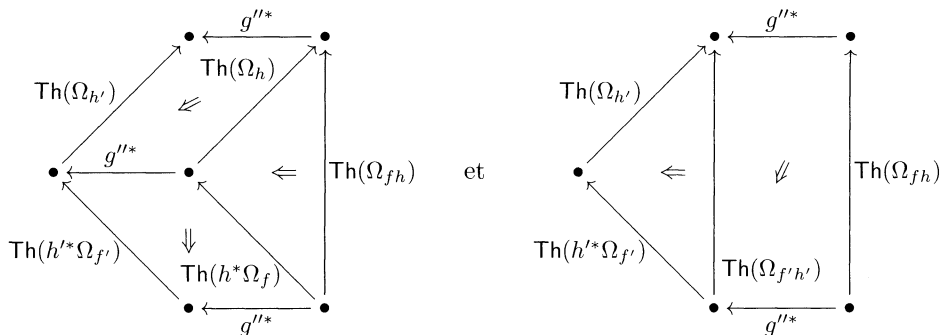
sont les mêmes. En remplaçant dans (28) le premier des deux diagrammes planaires ci-dessus par le deuxième, nous obtenons le diagramme planaire suivant :



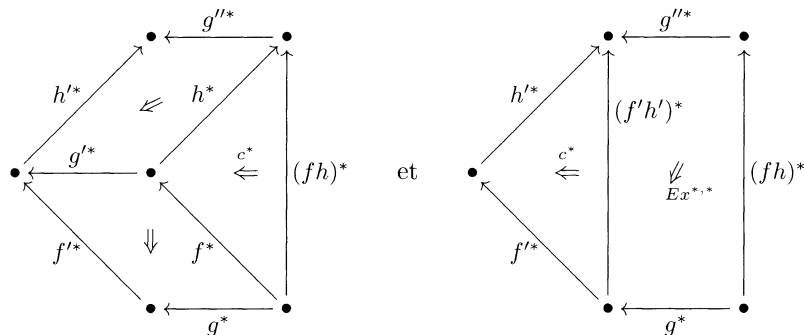
En utilisant maintenant le fait que les 2-isomorphismes :

$$\text{Th}(\Omega_{fh}) \xrightarrow{C'} \text{Th}(\Omega_h)\text{Th}(h^*\Omega_f)$$

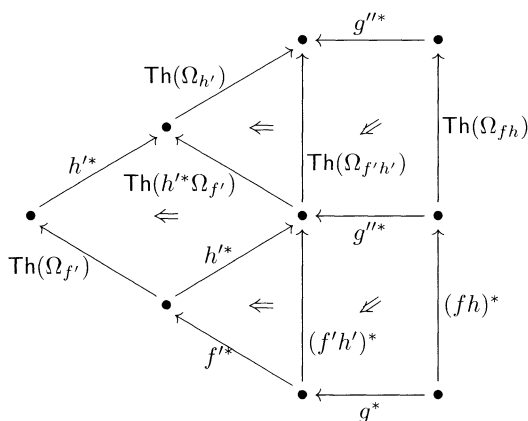
s'organisent en un isomorphisme d'autoéquivalences de 2-foncteurs (voir le théorème 1.5.17), on voit que les deux diagrammes planaires :



définissent le même 2-morphisme. De même l'axiome de cocycle pour les 2-isomorphismes de connexion du 2-foncteur H^* nous dis que les deux diagrammes planaires :



définissent le même 2-morphisme. En remplaçant dans (29) on obtient en fin de compte le diagramme planaire suivant :



dont la composée est exactement celle du second diagramme planaire de (27). La proposition est prouvée. \square

1.5.5. L'action des automorphismes sur les équivalences de Thom

On termine cette section par l'étude de la fonctorialité des équivalences $\text{Th}(s, p)$ et $\text{Th}^{-1}(s, p)$ par rapport à la paire (s, p) . Le problème est le suivant. Soit X un S -schéma quasi-projectif. On se donne deux suites :

$$X \xrightarrow{s} V \xrightarrow{p} X \quad \text{et} \quad X \xrightarrow{s'} V' \xrightarrow{p'} X$$

avec s, s' des immersions fermées, p, p' lisses et $p \circ s = p' \circ s' = \text{id}_X$. Supposons donné un isomorphisme $a : V' \xrightarrow{\sim} V$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{s'} & V' & \xrightarrow{p'} & X \\ \parallel & & \downarrow a & & \parallel \\ X & \xrightarrow{s} & V & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Comme a est inversible, le diagramme ci-dessus est à carrés cartésiens. En utilisant la proposition 1.5.2 et le lemme 1.5.3, on déduit deux 2-isomorphismes :

$$\omega(a) : \text{Th}(s', p') \xrightarrow{\sim} \text{Th}(s, p) \quad \text{et} \quad \omega_{-1}(a) : \text{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(s', p')$$

ainsi que deux carrés commutatifs :

$$(30) \quad \begin{array}{ccc} \text{id} & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}^{-1}(s, p)\text{Th}(s, p) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \omega_{-1}(a) \\ \text{Th}^{-1}(s', p')\text{Th}(s', p') & \xrightarrow{\omega(a)} & \text{Th}^{-1}(s', p')\text{Th}(s, p) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{id} & \xrightarrow{\sim} & \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s, p) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \omega_{-1}(a) \\ \text{Th}(s', p')\text{Th}^{-1}(s', p') & \xrightarrow{\omega(a)} & \text{Th}(s, p)\text{Th}^{-1}(s', p') \end{array}$$

On vérifie immédiatement que le couple $(\text{Th}(-), \omega(-))$ (resp. $(\text{Th}^{-1}(-), \omega_{-1}(-))$) définit un foncteur covariant (resp. contravariant) de la catégorie des suites $X \longrightarrow \bullet \longrightarrow X$ (et les isomorphismes $\bullet \simeq \bullet$) vers celle des équivalences de $\mathbf{H}(X)$. Le résultat suivant est facile; il est laissé en exercice :

Proposition 1.5.20. — *Indiquons par 1 pour désigner le pull-back suivant un X -schéma $X_1 \longrightarrow X$. Les 2-isomorphismes $\omega(a_1)$ définissent un isomorphisme d'autoéquivalences entre l'autoéquivalence $(\text{Th}(s'_1, p'_1))_{X_1 \rightarrow X}$ et l'autoéquivalence $(\text{Th}(s_1, p_1))_{X_1 \rightarrow X}$, ceci pour les restrictions des 2-foncteurs \mathbf{H}^* , \mathbf{H}_* , $\text{Liss}\mathbf{H}_\#$ et $\text{Imm}\mathbf{H}^!$ à la catégorie (Sch/X) .*

Supposons maintenant que $(s, p) = (s', p')$. En d'autres termes, a est un automorphisme du couple (s, p) . On a alors deux automorphismes $\omega(a)$ et $\omega_{-1}(a)$ de $\mathrm{Th}(s, p)$ et $\mathrm{Th}^{-1}(s, p)$ respectivement. On a le lemme suivant :

Lemme 1.5.21

1- Les deux composées suivantes :

$$\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\omega(a)} \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$$

$$\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\omega(a)} \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$$

sont égales.

2- Les deux composées suivantes :

$$\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\omega_{-1}(a)} \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$$

$$\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\omega_{-1}(a)} \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$$

sont égales.

Démonstration. — On démontre uniquement la partie **1**. Appliquons la première composée à $\mathrm{Th}(s, p)$. On obtient :

$$(31) \quad \begin{aligned} & \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) \\ & \xrightarrow{\omega(a) \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{id}} \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s, p) \end{aligned}$$

En utilisant les carrés commutatifs (30), il est facile de voir que les deux 2-isomorphismes suivants :

$$\mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\omega(a) \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{id}} \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p)$$

$$\mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\mathrm{id} \circ \mathrm{id} \circ \omega(a)} \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p)$$

coïncident avec $\mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\mathrm{id} \circ \omega_{-1}(a) \circ \mathrm{id}} \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p)$.

En particulier, ils sont égaux. Ceci montre que la composée de (31) coïncide avec :

$$(32) \quad \begin{aligned} & \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) \\ & \xrightarrow{\mathrm{id} \circ \mathrm{id} \omega(a)} \mathrm{Th}(s, p) \mathrm{Th}^{-1}(s, p) \mathrm{Th}(s, p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s, p) \end{aligned}$$

qui n'est autre que la seconde composée de l'énoncé auquel on a appliqué $\mathrm{Th}(s, p)$. Le lemme découle alors du fait que $\mathrm{Th}(s, p)$ est une équivalence. \square

Définition 1.5.22. — Étant donné un automorphisme $a : V \xrightarrow{\sim} V$ compatible avec (s, p) , on note $\omega(V, a)$ (resp. $\omega_{-1}(V, a)$) l'automorphisme de $\mathrm{id}_{H(X)}$ défini via l'une des deux composées de la partie 1 (resp. la partie 2) du lemme 1.5.21.

Lemme 1.5.23. — Sous les hypothèses de la définition précédente, on a $\omega(V, a) = \omega_{-1}(V, a)$. De plus, si l'on applique $\mathrm{Th}(s, p)$ (resp. $\mathrm{Th}^{-1}(s, p)$) à $\omega(V, a)$ (resp. $\omega_{-1}(V, a)$) on obtient $\omega(a)$ (resp. $\omega_{-1}(a)$). De même, si l'on applique $\omega(V, a)$ (resp. $\omega_{-1}(V, a)$) à $\mathrm{Th}(s, p)$ (resp. $\mathrm{Th}^{-1}(s, p)$) on obtient $\omega(a)$ (resp. $\omega_{-1}(a)$).

Démonstration. — L'égalité $\omega(V, a) = \omega_{-1}(V, a)$ découle immédiatement des carrés commutatifs (30). Les autres assertions découlent du lemme 1.5.21. \square

Remarque 1.5.24. — Les deux transformations naturelles $\omega(V, -)$ et $\omega_{-1}(V, -)$ sont de variances opposées par rapport à a . Comme elles sont égales, on déduit que $\omega(V, a.b) = \omega(V, b.a)$ ou encore que les $\omega(V, -)$ commutent entre elles. Ceci est en fait tout à fait normal, étant donné que $\mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{H(X)})$ est un groupe abélien. Ainsi, la représentation $\omega(V, -) : \mathrm{Aut}(s, p) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{H(X)})$ se factorise à travers $\mathrm{Aut}(s, p)/(\mathrm{Aut}(s, p))'$ avec $(\mathrm{Aut}(s, p))'$ le sous-groupe distingué des commutateurs (appelé aussi le sous-groupe dérivé).

Proposition 1.5.25. — Indiquons par 1 pour désigner le pull-back suivant un X -schéma $X_1 \longrightarrow X$. Les 2-isomorphismes $\omega(V_1, a_1)$ définissent un automorphisme d'autoéquivalences entre les autoéquivalences identités de $H(X_1)$, ceci pour les restrictions des 2-foncteurs $H^*, H_*, {}^{\mathrm{Liss}}H_{\#}$ et ${}^{\mathrm{Imm}}H^!$ à la catégorie (Sch/X) .

Définition 1.5.26. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini. Soit a un automorphisme de \mathcal{M} . On posera $\omega(a) = \omega(\mathbb{V}(a))$, $\omega_{-1}(a) = \omega_{-1}(\mathbb{V}(a))$, $\omega(\mathcal{M}, a) = \omega(\mathbb{V}(\mathcal{M}), \mathbb{V}(a))$ et $\omega_{-1}(\mathcal{M}, a) = \omega_{-1}(\mathbb{V}(\mathcal{M}), \mathbb{V}(a))$. Pour $u \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)$, on posera aussi $\omega(\mathcal{M}, u) = \omega(\mathbb{V}(\mathcal{M}), \mathbb{V}(u \times -))$ et $\omega_{-1}(\mathcal{M}, u) = \omega_{-1}(\mathbb{V}(\mathcal{M}), \mathbb{V}(u \times -))$.

Remarque 1.5.27. — Supposons que X est le spectre d'un corps k et soit \mathcal{M} un k -espace vectoriel de dimension fini. D'après la remarque 1.5.24, la représentation $\omega(\mathcal{M}, -) : \mathbb{G}l(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{H(k)})$ se factorise par le déterminant $\det : \mathbb{G}l(\mathcal{M}) \longrightarrow k^\times$.

1.6. Pureté. Construction du foncteur croisé $(H^*, H_*, H!, H^!)$

On commence la section par un lemme simple qui sera utilisé (ainsi que son corollaire) plusieurs fois dans la suite. Ce résultat utilise d'une manière essentielle

l'axiome d'homotopie. Soit X un S -schéma. On considère le diagramme commutatif dans (Sch/S) :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_X^1 & \xleftarrow{j} & \mathbb{E}_X^1 \\ & \searrow & \downarrow p & \swarrow q & \\ & & X & & \end{array}$$

avec j l'inclusion de la droite affine époutée \mathbb{E}_X^1 complémentaire dans \mathbb{A}_X^1 de la section nulle i . Voici notre lemme :

Lemme 1.6.1. — *Le 2-morphisme :*

$$i^!p^* \longrightarrow i^*p^*$$

déduit de la composée :

$$(33) \quad i_*i^!p^* \xrightarrow{\delta} p^* \xrightarrow{\eta} i_*i^*p^*$$

et du fait que la counité $i^*i_* \rightarrow \text{id}$ est un 2-isomorphisme, est nul. En particulier la composée (33) est elle aussi nulle.

Démonstration. — En remarquant que $p_*i_* \simeq \text{id}$, on voit qu'il suffit de prouver que la composée :

$$p_*i_*i^!p^* \xrightarrow{\delta} p_*p^* \xrightarrow{\eta} p_*i_*i^*p^*$$

est nulle. Soit $i_1 : X \longrightarrow \mathbb{A}_X^1$ la section unité de p . Montrons que le carré de 2-morphismes ci-dessous :

$$(34) \quad \begin{array}{ccc} p_*p^* & \xrightarrow{\eta} & p_*i_*i^*p^* \\ \eta \downarrow & & \downarrow \sim \\ p_*i_{1*}i_1^*p^* & \xrightarrow{\sim} & \text{id}_{X*}\text{id}_X^* \end{array}$$

est commutatif (les 2-morphismes désignés par un \sim étant des composées de 2-isomorphismes de connexions). L'axiome d'homotopie nous dit que le 2-morphisme :

$$\text{id}_{H(X)} \xrightarrow{\eta} p_*p^*$$

est inversible. Il suffit donc de prouver que le bord du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \eta & & \\ & \searrow & \eta & \searrow & \\ \text{id}_{H(X)} & & p_*p^* & \xrightarrow{\eta} & p_*i_*i^*p^* \\ & \searrow \eta & \downarrow \eta & & \downarrow \sim \\ & & p_*i_{1*}i_1^*p^* & \xrightarrow{\sim} & \text{id}_{X*}\text{id}_X^* \end{array}$$

est commutatif. Il faut donc prouver que les deux composées :

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{H(X)} &\xrightarrow{\eta} p_* p^* \xrightarrow{\eta} p_* i_* i^* p^* \longrightarrow \mathrm{id}_{X_*} \mathrm{id}_X^* \\ \mathrm{id}_{H(X)} &\xrightarrow{\eta} p_* p^* \xrightarrow{\eta} p_* i_{1*} i_1^* p^* \longrightarrow \mathrm{id}_{X_*} \mathrm{id}_X^* \end{aligned}$$

sont égales. Mais par le lemme 1.1.4, les deux composées ci-dessus sont égales au 2-morphisme d'unité de l'adjonction entre id_{X_*} et id_X^* . Ceci prouve la commutation du carré (34). Donc pour prouver le lemme, il suffira de prouver que la composée :

$$p_* i_* i^! p^* \xrightarrow{\delta} p_* p^* \xrightarrow{\eta} p_* i_{1*} i_1^* p^*$$

est nulle. Mais cette composée provient de la composée :

$$(35) \quad i_* i^! p^* \xrightarrow{\delta} p^* \xrightarrow{\eta} i_{1*} i_1^* p^*$$

par application de p^* . Il suffira donc de prouver que la composée de (35) est nulle. Par adjonction, on est ramené à montrer que la composée :

$$i_1^* i_* i^! p^* \xrightarrow{\delta} i_1^* p^* = i_1^* p^*$$

est nulle. Ceci est évident⁽⁷⁾ puisque $i_1^* i_* \simeq 0$. □

Voici un corollaire du lemme précédent.

Corollaire 1.6.2. — *Soit A un objet de $H(X)$. Lorsqu'on applique i^* au triangle distingué :*

$$i_* i^! p^* A \xrightarrow{\delta} p^* A \xrightarrow{\eta} j_* q^* A \xrightarrow{\theta} i_* i^! p^* A[+1]$$

⁽⁷⁾ On peut voir cela en utilisant par exemple le théorème de changement de base pour une immersion fermée (voir le lemme 1.4.14) appliqué au carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{A}_X^1 \end{array}$$

on obtient un triangle distingué scindé. En particulier, le morphisme :

$$i^* j_* q^* A \xrightarrow{\theta} i^! p^* A[+1]$$

admet une section⁽⁸⁾.

1.6.1. Les 2-morphismes π . — On fixe un triangle commutatif de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec s une immersion fermée et f et g des morphismes lisses. On comparera les deux 1-morphismes g^* et $s^! f^*$ de $\text{Mor}_{\mathfrak{T}\mathfrak{H}}(\mathbf{H}(Z), \mathbf{H}(Y))$. Plus précisément on construira un 2-isomorphisme (appelé *2-isomorphisme de pureté*) :

$$(36) \quad \Pi : s^! f^* \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*$$

avec \mathcal{N}_s le fibré normal de l'immersion régulière s . Notre outil géométrique est l'espace de déformation au cône normal qui sera noté C (voir le chapitre 5 de [Ful84]). Rappelons que C est un ouvert de l'éclaté du sous-schéma fermé $Y \times 0$ dans $X \times_S \mathbb{A}_S^1$. Le choix d'un isomorphisme de S -schémas en groupes $\mathbb{A}_S^1 \simeq \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t])$ induit un isomorphisme canonique entre $C \times_{\mathbb{A}^1} 0$ et $\mathbb{V}(\mathcal{N}_s.t^{-1})$ qu'on identifiera avec $\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)$ via l'isomorphisme $-\times t^{-1} : \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_s.t^{-1}$. Dans la suite, un tel isomorphisme $\mathbb{A}_S^1 \simeq \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t])$ sera fixé une fois pour toute. La construction du 2-isomorphisme de pureté ne dépendra pas de ce choix (voir la remarque 1.6.4).

On résume la déformation dans la figure :

$$(37) \quad \begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & & \mathbb{A}_Y^1 \xrightarrow{\hat{s}} C & & \mathbb{E}_Y^1 \xrightarrow{\tilde{s}} \mathbb{E}_X^1 \\ & \searrow g_0 & \downarrow f_0 & \xrightarrow{i} & \searrow \hat{g} & \downarrow \hat{f} & \xleftarrow{j} \searrow \tilde{g} & \downarrow \tilde{f} \\ & & Z & & \mathbb{A}_Z^1 & & \mathbb{E}_Z^1 \\ & & & & \downarrow p & & \swarrow q \\ & & & & Z & & \end{array}$$

où l'on note i les immersions fermées déduites par pull-back de l'immersion de la section nulle de \mathbb{A}^1 et j les immersions ouvertes déduites de l'immersion du complémentaire \mathbb{E}^1 de la section nulle de \mathbb{A}^1 . Le fait que g est un morphisme lisse implique la

⁽⁸⁾Nous ignorons s'il existe une section fonctorielle en $A \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$, i.e., s'il existe un 2-morphisme inverse à droite de θ . Toutefois, lorsque \mathbf{H} provient d'un dérivateur algébrique homotopique stable (voir le second chapitre pour la définition de cette notion) une telle section peut être construite à l'aide du formalisme des foncteurs cycles proches du troisième chapitre.

lissité des S -morphisms \hat{f} et f_0 . Le 2-isomorphisme de pureté sera déduit d'un certain 2-morphisme $\pi : j_* q^* [s^! f^*] \longrightarrow i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1]$. Cette sous-section est consacrée à la construction et à l'étude de ce 2-morphisme.

Voici la construction du 2-morphisme π . Rappelons qu'on dispose d'un 2-morphisme θ :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{j^*} & \bullet \\ i^! \downarrow & \theta \swarrow & \downarrow j_* \\ \bullet & \xrightarrow{i_*[+1]} & \bullet \end{array}$$

défini comme étant l'unique 2-morphisme tel que pour tout A dans $\text{Ob}(H(\bullet))$ le triangle :

$$i_* i^! A \xrightarrow{\delta} A \xrightarrow{\eta} j_* j^* A \xrightarrow{\theta} i_* i^! A[+1]$$

est distingué (voir la proposition 1.4.9). En appliquant θ au 1-morphisme $\hat{s}^! \hat{f}^* p^*$ on obtient un 2-morphisme :

$$\theta : j_* j^* [\hat{s}^! \hat{f}^* p^*] \longrightarrow i_* i^! [\hat{s}^! \hat{f}^* p^*][+1]$$

D'autre part, on a un premier 2-isomorphisme « évident » :

$$j_* j^* \hat{s}^! \hat{f}^* p^* \xrightarrow{\sim} j_* \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* \xrightarrow{\sim} j_* q^* s^! f^*$$

et un deuxième 2-isomorphisme « évident » :

$$i^! \hat{s}^! \hat{f}^* p^* \xrightarrow{\sim} s_0^! i^! \hat{f}^* p^* \xrightarrow{\sim} s_0^! f_0^* i^! p^* \xrightarrow{\sim} s_0^! f_0^* (-1)[-2]$$

On définit ainsi un 2-morphisme :

$$(38) \quad \pi_0 : j_* q^* [s^! f^*] \longrightarrow i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1]$$

par la condition que le carré ci-dessous soit commutatif :

$$(39) \quad \begin{array}{ccc} j_* j^* [\hat{s}^! \hat{f}^* p^*] & \xrightarrow{\theta} & i_* i^! [\hat{s}^! \hat{f}^* p^*][+1] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi_0} & i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1] \end{array}$$

On fait la définition suivante :

Définition 1.6.3. — On appelle $\pi : j_* q^* [s^! f^*] \longrightarrow i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1]$ le 2-morphisme composé :

$$(40) \quad j_* q^* [s^! f^*] = j_* \text{id}_{H(\mathbb{E}_Y^1)} q^* [s^! f^*] \xrightarrow{\omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1})} j_* \text{id}_{H(\mathbb{E}_Y^1)} q^* [s^! f^*] = j_* q^* [s^! f^*] \xrightarrow{\pi_0} i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1]$$

avec t l'indéterminée tel que $\mathbb{A}_S^1 = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t])$ (voir la sous-section 1.5.5 et plus précisément la remarque 1.5.26 pour la définition de $\omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1})$). Dans le langage des diagrammes planaires, le 2-morphisme π est la composée :

$$(41) \quad \begin{array}{ccccccc} & & H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y) \\ & \nearrow i^! & \nearrow \nearrow (Ex^{1,*})^{-1} & \nearrow i^! & \nearrow \nearrow & \nearrow i^! & \searrow i_*[+1] \\ H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C) & \xrightarrow{\hat{s}^!} & H(\mathbb{A}_Y^1) & & \\ & \searrow j^* & \nearrow \nearrow & \searrow j^* & \nearrow \nearrow (Ex^{1,*})^{-1} & \searrow j^* & \\ & \searrow c^* & H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_X^1) & \xrightarrow{\tilde{s}^!} & H(\mathbb{E}_Y^1) \\ & \nearrow q^* & \nearrow \nearrow & \nearrow q^* & \nearrow \nearrow Ex^{1,*} & \nearrow q^* & \nearrow \omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) \\ H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) & \xrightarrow{s^!} & H(Y) & & \end{array}$$

modulo l'égalité $i^! p^* = (-1)[-2]$ et le 2-isomorphisme $[+1]s_0^! f_0^* \simeq s_0^! f_0^* [+1]$. À part θ , tous les 2-morphismes de ce diagramme planaire sont des 2-isomorphismes.

Remarque 1.6.4. — Le 2-morphisme π ne dépend pas du choix de l'isomorphisme de S -schémas en groupes $\mathbb{A}_S^1 \simeq \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t])$. En effet, si l'on fait un autre choix : $\mathbb{A}_S^1 \simeq \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t'])$ il existe une section $u \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^\times)$ avec $t' = u.t$. Les deux isomorphismes $\mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \simeq C \times_{\mathbb{A}^1} 0$ différeront par la multiplication par u . On aura ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\omega(q^* \mathcal{N}_s, t'^{-1})} & j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi_0} & i_* s_0^! f_0^* (-1)[-1] \\ \omega(q^* \mathcal{N}_s, u^{-1}) \downarrow & & \parallel & & \downarrow \omega_{-1}(\mathcal{N}_s, u^{-1}) \\ j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1})} & j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi'_0} & i_* s_0^! f_0^* (-1)[-1] \end{array}$$

En utilisant que $\omega_{-1}(\mathcal{N}_s, u^{-1}) = \omega(\mathcal{N}_s, u^{-1})$, il est facile de déduire que la composée des deux lignes horizontales du diagramme ci-dessus sont égales.

On peut également déduire de π un autre 2-morphisme par adjonction :

$$(42) \quad i^* j_* q^* [s^! f^*] \longrightarrow s_0^! f_0^* (-1)[-1]$$

On notera également π ce 2-morphisme.

On prouvera d'ici la fin de la sous-section trois compatibilités pour les 2-morphismes π sous leur formes (40) et (42). Notons que ces compatibilités sont également vraies pour le 2-morphisme π_0 .

1.6.1.1. Compatibilité avec les restrictions suivant des morphismes lisses. — Supposons donné un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t} & R \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ Y & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

avec v lisse. Les déformations aux cônes normaux sont compatibles, *i.e.*, on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{t_0} & \mathbb{V}(u^* \mathcal{N}_s) & & \mathbb{A}_T^1 \xrightarrow{\hat{t}} D & & \mathbb{E}_T^1 \xrightarrow{\tilde{t}} \mathbb{E}_R^1 \\ u_0 \downarrow & & \downarrow v_0 & & \hat{u} \downarrow & & \tilde{u} \downarrow \\ Y & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & & \mathbb{A}_Y^1 \xrightarrow{\hat{s}} C & & \mathbb{E}_Y^1 \xrightarrow{\tilde{s}} \mathbb{E}_X^1 \\ & \searrow g_0 & \downarrow f_0 & \xrightarrow{i} & \searrow \hat{g} & \downarrow \hat{f} & \xleftarrow{j} \searrow \tilde{g} & \downarrow \tilde{f} \\ & & Z & & \mathbb{A}_Z^1 & & \mathbb{E}_Z^1 \\ & & & & \downarrow p & & \downarrow q \\ & & & & Z & & \end{array}$$

à carrés cartésiens. On a la proposition :

Proposition 1.6.5. — *Le carré ci dessous est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \hat{u}^* j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi} & \hat{u}^* i_* [s_0^! f_0^*] (-1)[-1] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ j_* q^* [t^! (f \circ v)^*] & \xrightarrow{\pi} & i_* [t_0^! (f_0 \circ v_0)^*] (-1)[-1] \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées des diagrammes planaires :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H(R) & \xrightarrow{t^!} & H(T) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_T^1) \\
 & \nearrow (fv)^* & \uparrow v^* & \nearrow Ex^{!,*} & \uparrow u^* & \nearrow & \uparrow \hat{u}^* & \nearrow Ex_*^* & \uparrow \hat{u}^* \\
 H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) & \xrightarrow{s^!} & H(Y) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_Y^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_Y^1)
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H(\mathbb{V}(u^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{t_0^!} & H(T) & \xrightarrow{i_*} & H(\mathbb{A}_T^1) \\
 & \nearrow (f_0 v_0)^* & \uparrow v_0^* & \nearrow Ex^{!,*} & \uparrow u_0^* & \nearrow & \uparrow \hat{u}_0^* \\
 H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y) & \xrightarrow{i_*} & H(\mathbb{A}_Y^1)
 \end{array}$$

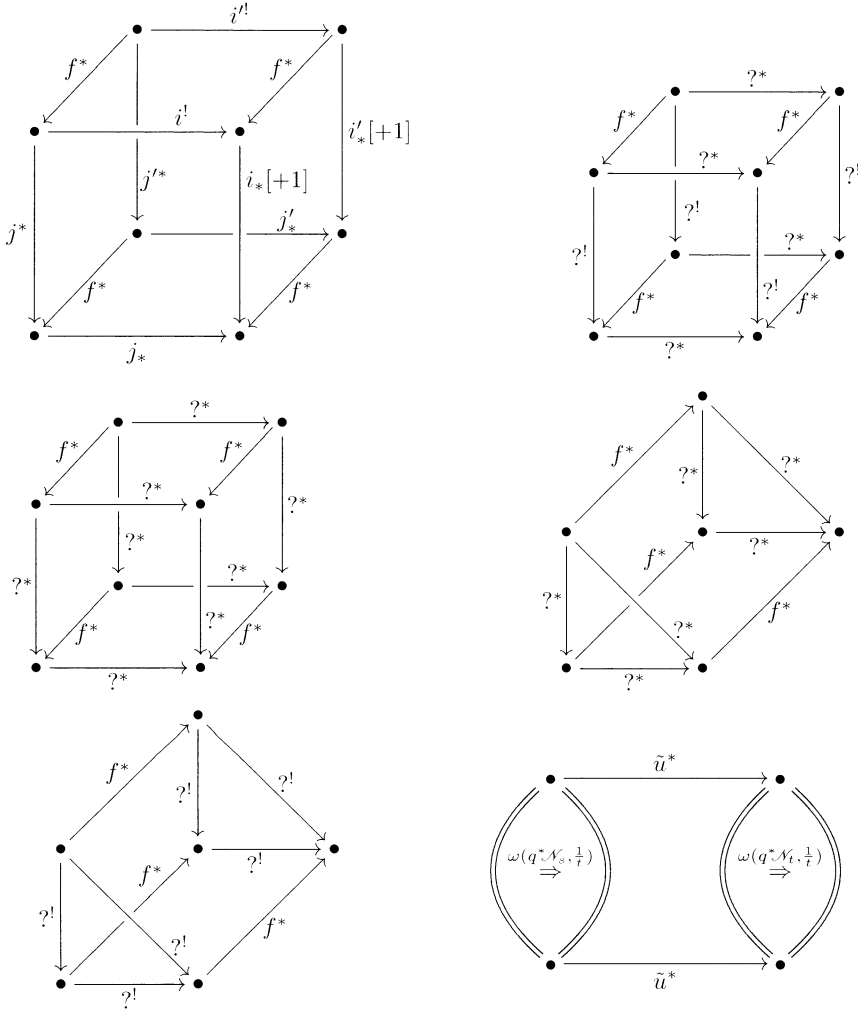
Noter bien qu'il y a des redondances dans les notations : $u_0 = u$, $\hat{u} = \hat{u}_0$, etc.

Démonstration. — On construit un diagramme solide à partir du diagramme planaire (41) et :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H(Z) & \xrightarrow{(f_0 v_0)^*} & H(\mathbb{V}(u^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{t_0^!} & H(T) \\
 & \nearrow t^! & \nearrow \nearrow (Ex^{!,*})^{-1} & \nearrow t^! & \nearrow & \nearrow & \nearrow i_*[+1] \\
 & & H(D) & \xrightarrow{\hat{t}^!} & H(\mathbb{A}_T^1) & & H(\mathbb{A}_T^1) \\
 H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{(\hat{f}\hat{v})^*} & H(D) & \xrightarrow{\hat{t}^!} & H(\mathbb{A}_T^1) & \nearrow \theta & \\
 \uparrow p^* & \nearrow j^* & \nearrow & \nearrow j^* & \nearrow \nearrow (Ex^{!,*})^{-1} & \nearrow j^* & \nearrow j_* \\
 & \nearrow c^* & H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{(\tilde{f}\tilde{v})^*} & H(\mathbb{E}_R^1) & \xrightarrow{\tilde{t}^!} & H(\mathbb{E}_T^1) \\
 & \nearrow q^* & \nearrow & \nearrow q^* & \nearrow \nearrow Ex^{!,*} & \nearrow q^* & \nearrow \omega(q^* \mathcal{N}_t, t^{-1}) \\
 H(Z) & \xrightarrow{(fv)^*} & H(R) & \xrightarrow{t^!} & H(T) & &
 \end{array}$$

en identifiant les 1-morphismes hachurés ainsi que la face qu'ils délimitent et en reliant les sommets ne se trouvant pas sur la partie commune par des 1-morphismes f^* , \hat{f}^* , \tilde{f}^* et f_0^* (qu'on notera f^* dans cette preuve pour simplifier) et en mettant sur les nouvelles faces créées des 2-morphismes de connexions c^* si cette face est un triangle ou un 2-morphisme d'échange (Ex_*^* ou $Ex^{*,*}$ ou $Ex^{!,*}$) si cette face est un carré. On invite le lecteur à se convaincre qu'il existe une unique façon de construire un tel diagramme solide et que la proposition équivaut à dire que ce diagramme solide est commutatif. Pour prouver la commutation de ce diagramme on utilise sa subdivision

naturelle en diagrammes solides du type :



La commutation du premier cube est le contenu de la proposition 1.4.19. Pour prouver la commutation des cubes du deuxième type on fait comme dans la preuve de la proposition 1.5.11⁽⁹⁾. La commutation des cubes du troisième type et des solides du quatrième type découle de l'axiome de cocycle. La commutation des solides du cinquième type découle de la compatibilité des morphismes d'échange $Ex_*^!$ avec la composition horizontale des carrés. Enfin la commutation du dernier solide découle de la proposition 1.5.25. \square

⁽⁹⁾Plus précisément on utilise « la technique » d'insertion d'une face diagonale découpant le cube en deux solides commutatifs.

On a également l'énoncé analogue pour la forme (42) du 2-morphisme π :

Proposition 1.6.6. — *Le carré ci dessous est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} u^* i^* j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi} & u_0^* [s_0^! f_0^*](-1)[-1] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ i^* j_* [q^* t^! (f \circ v)^*] & \xrightarrow{\pi} & [t_0^! (f_0 \circ v_0)^*](-1)[-1] \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées des diagrammes planaires :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbf{H}(R) & \xrightarrow{t^!} & \mathbf{H}(T) & \xrightarrow{q^*} & \mathbf{H}(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & \mathbf{H}(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^*} & \mathbf{H}(T) \\ & \nearrow (fv)^* & & \nearrow v^* & \nearrow Ex^{1,*} & & \nearrow u^* & \nearrow \hat{u}^* & \nearrow Ex_*^* & & \nearrow \hat{u}^* & & \nearrow u^* \\ & (c^*)^{-1} & & & & & & & & & & & \\ \mathbf{H}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathbf{H}(X) & \xrightarrow{s^!} & \mathbf{H}(Y) & \xrightarrow{q^*} & \mathbf{H}(\mathbb{E}_Y^1) & \xrightarrow{j_*} & \mathbf{H}(\mathbb{A}_Y^1) & \xrightarrow{i^*} & \mathbf{H}(Y) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{H}(\mathbb{V}(u^* \mathcal{N}_s)) \xrightarrow{t_0^!} \mathbf{H}(T) \\ & \nearrow (f_0 v_0)^* & \nearrow v_0^* \nearrow Ex^{1,*} \nearrow u_0^* \\ & (c^*)^{-1} & \\ \mathbf{H}(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & \mathbf{H}(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \xrightarrow{s_0^!} \mathbf{H}(Y) \end{array}$$

1.6.1.2. *Compatibilité avec les restrictions quelconques au niveau de la base.* — On considère un triangle commutatif de S -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec f et g lisses et s une immersion fermée. On suppose donné un S -morphisme : $Z' \xrightarrow{a} Z$. On forme le morphisme de triangles commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array} & \xleftarrow{a} & \begin{array}{ccc} Y' = Y \times_Z Z' & \xrightarrow{s'} & X' = X \times_Z Z' \\ & \searrow g' & \downarrow f' \\ & & Z' \end{array} \end{array}$$

Les déformations aux cônes normaux associées aux deux immersions fermées s et s' sont compatibles dans le sens qu'on a des morphismes de triangles commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc}
Y \xrightarrow{s_0} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & & Y' \xrightarrow{s'_0} \mathbb{V}(a^*\mathcal{N}_s) & & \mathbb{E}_Y^1 \xrightarrow{\tilde{s}} \mathbb{E}_X^1 & & \mathbb{E}_{Y'}^1 \xrightarrow{\tilde{s}'} \mathbb{E}_{X'}^1 \\
\downarrow g_0 & \swarrow a_0 & \downarrow f'_0 & & \downarrow \tilde{f} & \swarrow \tilde{a} & \downarrow \tilde{f}' \\
Z & & Z' & & \mathbb{E}_Z^1 & & \mathbb{E}_{Z'}^1
\end{array}$$

On a la proposition :

Proposition 1.6.7. — On a un diagramme commutatif de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} \hat{a}^* j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi} & \hat{a}^* i_* [s^!_0 f^*_0](-1)[-1] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ j_* q^* [s^! f^*] a^* & \xrightarrow{\pi} & i_* [s^!_0 f^*_0] a^* (-1)[-1] \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées des diagrammes planaires :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{H}(Z') & \xrightarrow{f'^*} & \mathrm{H}(X') & \xrightarrow{s'^!} & \mathrm{H}(Y') & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{H}(\mathbb{E}_{Y'}^1) & \xrightarrow{j_*} & \mathrm{H}(\mathbb{A}_{Y'}^1) \\
\uparrow a^* & & \nearrow Ex^{*,*} & \uparrow a^* & \nearrow Ex^{!,*} & \uparrow a^* & \nearrow Ex^{*,*} & \uparrow \tilde{a}^* & \nearrow Ex^* & \uparrow \hat{a}^* \\
\mathrm{H}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{H}(X) & \xrightarrow{s^!} & \mathrm{H}(Y) & \xrightarrow{q^*} & \mathrm{H}(\mathbb{E}_Y^1) & \longrightarrow & \mathrm{H}(\mathbb{A}_Y^1)
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{H}(Z') & \xrightarrow{f_0^*} & \mathrm{H}(\mathbb{V}(a^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & \mathrm{H}(Y') & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{H}(\mathbb{A}_{Y'}^1) \\
\uparrow a_0^* & & \nearrow Ex^{*,*} & \uparrow a_0^* & \nearrow Ex^{!,*} & & \uparrow a_0^* \\
\mathrm{H}(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & \mathrm{H}(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & \mathrm{H}(Y) & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{H}(\mathbb{A}_Y^1)
\end{array}$$

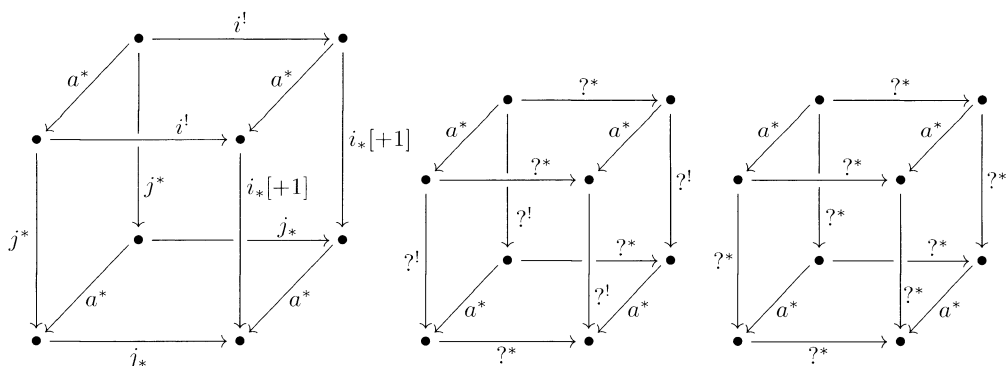
Démonstration. — On construit un diagramme solide à partir de (41) et :

$$(44) \quad \begin{array}{ccccccc} & & H(Z') & \xrightarrow{f_0'^*} & H(\mathbb{V}(a^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0'^!} & H(Y') \\ & \nearrow i^! & & \nearrow \nearrow (Ex^{1,*})^{-1} & \nearrow i^! & \nearrow & \nearrow i^! \\ & & H(\mathbb{A}_{Z'}^1) & \xrightarrow{\hat{f}'^*} & H(C') & \xrightarrow{\hat{s}'^!} & H(\mathbb{A}_{Y'}^1) \\ & \searrow \hat{j}^* & & \searrow \nearrow & \searrow j^* & \searrow \nearrow (Ex^{1,*})^{-1} & \searrow j^* \\ & & H(\mathbb{E}_{Z'}^1) & \xrightarrow{\tilde{f}'^*} & H(\mathbb{E}_{X'}^1) & \xrightarrow{\tilde{s}'^!} & H(\mathbb{E}_{Y'}^1) \\ & \nearrow q^* & & \nearrow q^* & \nearrow q^* & \nearrow q^* & \nearrow j_* \\ & & H(Z') & \xrightarrow{f'^*} & H(X') & \xrightarrow{s'^!} & H(Y') \end{array}$$

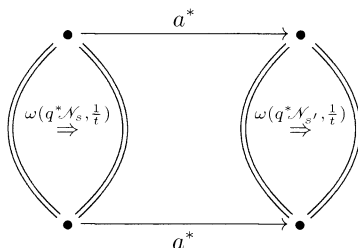
$\begin{array}{c} \uparrow \theta \\ H(\mathbb{A}_{Y'}^1) \\ \downarrow j_* \end{array}$

$\omega(q^* \mathcal{N}_{s'}, t^{-1})$

en reliant les sommets par des 1-morphismes a^* , \hat{a}^* , \tilde{a}^* et a_0^* (qu'on notera a^* dans cette preuve pour simplifier) et en mettant sur les nouvelles faces (carrées) créées des 2-morphismes d'échange $(Ex^*_*$ ou $Ex^{*,!}$ ou $Ex^{*,*})$. On invite le lecteur à se convaincre qu'il existe une unique façon de construire un tel diagramme solide et que la proposition équivaut à dire que ce diagramme solide est commutatif. Pour prouver la commutation de ce diagramme on utilise sa subdivision naturelle en cubes solides du type :



ainsi que le solide :



La commutation du premier cube est le contenu de la proposition 1.4.19. Pour prouver la commutation des cubes du deuxième type on fait comme dans la preuve de la proposition 1.5.11. Les cubes du troisième type sont commutatifs par l'axiome de cocycle. Enfin le dernier solide est commutatif par la proposition 1.5.25. \square

On a également l'énoncé analogue pour la forme (42) du 2-morphisme π :

Proposition 1.6.8. — *Le carré ci-dessous est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} a^* i^* j_* q^* s^! f^* & \xrightarrow{\pi} & a_0^* s_0^! f_0^* (-1)[-1] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ i^* j_* q^* s^! f^* a^* & \xrightarrow{\pi} & s_0^! f_0^* a_0^* (-1)[-1] \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées des diagrammes planaires :

$$\begin{array}{ccccccccccc} H(Z') & \xrightarrow{f'^*} & H(R) & \xrightarrow{i'^!} & H(T) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^*} & H(T) \\ \uparrow a^* & & \uparrow \text{\scriptsize Ex^{**}} & & \uparrow a^* & & \uparrow \text{\scriptsize $Ex^{!,*}$} & & \uparrow \hat{a}^* & & \uparrow \text{\scriptsize Ex^*} & & \uparrow \hat{a}^* & & \uparrow a^* \\ H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) & \xrightarrow{s^!} & H(Y) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_Y^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_Y^1) & \xrightarrow{i^*} & H(Y) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(u^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0'^!} & H(T) \\ \uparrow a_0^* & & \uparrow \text{\scriptsize Ex^{**}} & & \uparrow a_0^* & & \uparrow \text{\scriptsize $Ex^{!,*}$} & & \uparrow a_0^* \\ H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y) \end{array}$$

1.6.1.3. Compatibilité avec les sections à support. — On garde les notations du paragraphe 1.6.1.2. On supposera en plus que le S -morphisme a est une *immersion fermée*. On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.6.9. — *On a un diagramme commutatif de 2-morphismes :*

$$\begin{array}{ccc} j_* q^* s^! f'^* a^! & \xrightarrow{\pi} & i_* s_0'^! f_0'^* a^! (-1)[-1] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \hat{a}^! j_* q^* s^! f^* & \xrightarrow{\pi} & \hat{a}^! i_* s_0^! f_0^* (-1)[-1] \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées des diagrammes planaires :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H(Z') & \xrightarrow{f'^*} & H(X') & \xrightarrow{s'!} & H(Y') & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_{Y'}^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_{Y'}^1) \\
 \uparrow a^! & & \Downarrow Ex^{!,*} & \uparrow a^! & \Downarrow & \uparrow a^! & \Downarrow Ex^{!,*} & \uparrow \tilde{a}^! & \Downarrow Ex_*^! & \uparrow \hat{a}^! \\
 H(Z) & \xrightarrow{f_*} & H(X) & \xrightarrow{s^!} & H(Y) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_Y^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_Y^1)
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc}
 H(Z') & \xrightarrow{f_0'^*} & H(\mathbb{V}(a^*\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0'^!} & H(Y') & \xrightarrow{i_*} & H(\mathbb{A}_{Y'}^1) \\
 \uparrow a_0^* & & \Downarrow Ex^{!,*} & \uparrow a_0^* & \Downarrow & \uparrow a_0^* & \Downarrow Ex_*^! & \uparrow \hat{a}_0^* \\
 H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y) & \xrightarrow{i_*} & H(\mathbb{A}_Y^1)
 \end{array}$$

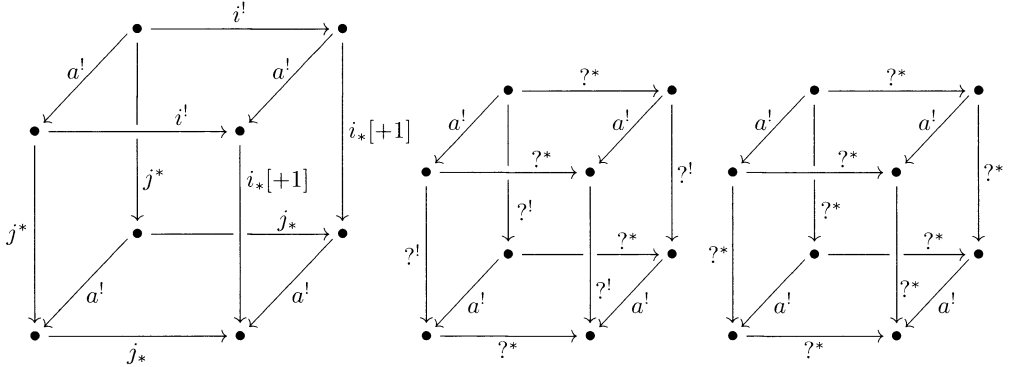
Démonstration. — On construit un diagramme solide à partir de (41) et :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H(Z') & \xrightarrow{f_0'^*} & H(\mathbb{V}(a^*\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0'^!} & H(Y') \\
 & \nearrow i^! & & \nearrow \nearrow (Ex^{!,*})^{-1} & \nearrow i^! & \nearrow \nearrow & \nearrow i^! \\
 H(\mathbb{A}_{Z'}^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C') & \xrightarrow{\hat{s}'^!} & H(\mathbb{A}_{Y'}^1) & & H(\mathbb{A}_{Y'}^1) \\
 \nearrow j^* & \nearrow \nearrow & \nearrow j^* & \nearrow \nearrow (Ex^{!,*})^{-1} & \nearrow j^* & \nearrow \nearrow & \nearrow j^* \\
 & \searrow c^* & H(\mathbb{E}_{Z'}^1) & \xrightarrow{\tilde{f}'^*} & H(\mathbb{E}_{X'}^1) & \xrightarrow{\tilde{s}'^!} & H(\mathbb{E}_{Y'}^1) \\
 \nearrow q^* & \nearrow \nearrow & \nearrow q^* & \nearrow \nearrow Ex^{!,*} & \nearrow q^* & \nearrow \nearrow & \nearrow q^* \\
 H(Z') & \xrightarrow{f'^*} & H(X') & \xrightarrow{s'^!} & H(Y') & & H(Y')
 \end{array}$$

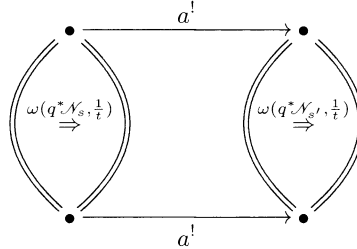
(45)

en reliant les sommets par des 1-morphismes $a^!$, $\hat{a}^!$, $\tilde{a}^!$ et $a_0^!$ (qu'on notera $a^!$ dans cette preuve pour simplifier) et en mettant sur les nouvelles faces (carrées) créées des 2-morphismes d'échange ($Ex_*^!$ ou $Ex^{!,!}$ ou $Ex^{!,*}$). On invite le lecteur à se convaincre

qu'il existe une unique façon de construire un tel diagramme solide et que la proposition équivaut à dire que ce diagramme solide est commutatif. Pour prouver la commutation de ce diagramme on utilise sa subdivision naturelle en cubes solides du type :



ainsi que le solide :



La commutation du premier cube est le contenu de la proposition 1.4.20. Pour prouver la commutation des cubes du deuxième et troisième type on fait comme dans la preuve de la proposition 1.5.11. Enfin, la commutation du dernier solide vient de la proposition 1.5.25. \square

Notons que l'analogue de la proposition précédente pour le 2-morphisme :

$$\pi : i^* j_* q^* s^! f^* \longrightarrow s_0^! f_0^*(-1)[-1]$$

fait intervenir le 2-morphisme d'échange $Ex^{!,*} : i^* a^! \longrightarrow a^! i^*$. Comme i est une immersion fermée on ne sait pas que $Ex^{!,*}$ est un 2-isomorphisme⁽¹⁰⁾. Pour cela on n'établira pas cet analogue de la proposition 1.6.9.

1.6.1.4. Compatibilité avec l'oubli de structure. — Le résultat de compatibilité ci-dessous est encore plus simple que les deux derniers. En fait, il est complètement trivial mais on a préféré le mentionner. On suppose donné en plus des données de base de cette sous-section un \mathcal{S} -morphisme lisse :

$$b : Z \longrightarrow B$$

⁽¹⁰⁾ On peut montrer que le 2-morphisme $Ex^{!,*}$ en question devient inversible lorsqu'on l'applique à $j_* q^*$.

On s'intéresse à comparer les deux 2-morphismes π associés aux deux triangles commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow b \circ g & \downarrow b \circ f \\ & & B \end{array}$$

La déformation au cône normal du second diagramme se résume dans la figure :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & & \mathbb{A}_Y^1 \xrightarrow{\hat{s}} C & & \mathbb{E}_Y^1 \xrightarrow{\tilde{s}} \mathbb{E}_X^1 \\ & \searrow b \circ g_0 & \downarrow b \circ f_0 & \xrightarrow{i} & \searrow \hat{b} \circ \hat{g} & \downarrow \hat{b} \circ \hat{f} & \xleftarrow{j} & \searrow \tilde{b} \circ \tilde{g} & \downarrow \tilde{b} \circ \tilde{f} \\ & & B & & \mathbb{A}_B^1 & & & & \mathbb{E}_B^1 \\ & & & & \downarrow p & & \swarrow q & & \\ & & & & B & & & & \end{array}$$

On a la proposition :

Proposition 1.6.10. — *Le diagramme de 2-morphismes suivant :*

$$\begin{array}{ccc} j_* q^* [s^! (b \circ f)^*] & \xrightarrow{\pi} & i_* [s_0^! (b \circ f_0)^*] (-1) [-1] \\ c^* \downarrow \sim & & \sim \downarrow c^* \\ j_* q^* [s^! f^*] b^* & \xrightarrow{\pi} & i_* [s_0^! f_0^*] b^* (-1) [-1] \end{array}$$

est commutatif. (Faire attention que les deux 2-morphismes π sont associés à deux triangles de S -schémas différents.)

1.6.2. Le cas particulier d'un fibré vectoriel sur Y . — On se place dans le cas particulier suivant. On suppose donné un fibré vectoriel :

$$f : V = \mathbb{V}(\mathcal{M}) \longrightarrow Y$$

où \mathcal{M} est un \mathcal{O}_Y -module localement libre de présentation finie. On notera $s : Y \longrightarrow V$ la section nulle de f . On a un triangle commutatif de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & V \\ & \searrow & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

Le faisceau normal à s est canoniquement isomorphe à \mathcal{M} . On le notera comme dans la sous-section précédente \mathcal{N}_s . La déformation au cône normal est résumée dans

la figure ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & & \mathbb{A}_Y^1 \xrightarrow{\hat{s}} C & & \mathbb{E}_Y^1 \xrightarrow{\tilde{s}} \mathbb{E}_Y^1 \\
 & \searrow & \downarrow f_0 & \xrightarrow{i} & \downarrow \hat{f} & \xleftarrow{j} & \downarrow \tilde{f} \\
 & & Y & & \mathbb{A}_Y^1 & & \mathbb{E}_Y^1 \\
 & & \searrow & & \downarrow p & \nwarrow q & \\
 & & & & Y & &
 \end{array}$$

Ce qui est spécial à la situation est le lemme suivant :

Lemme 1.6.11. — Soit t l'indéterminée tel que $\mathbb{A}_S^1 = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t])$. On a alors une égalité de \mathbb{A}_Y^1 -schémas :

$$C = \mathbb{V}(p^* \mathcal{M} \cdot t^{-1})$$

(avec p la projection : $\mathbb{A}_Y^1 \longrightarrow Y$).

Démonstration. — Il s'agit d'un calcul élémentaire. Par définition même C est un ouvert de l'éclaté de $0 \times Y$ dans \mathbb{A}_Y^1 qui est affine sur \mathbb{A}_Y^1 est qui est donné par le spectre de la $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y^1}$ -algèbre quasi-cohérente :

$$\begin{aligned}
 \text{Spec} \left(\sum_{i \geq 0} (\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \cdot t + \mathcal{M} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1})^i / t^i \right) &= \text{Spec} \left(\sum_{i \geq 0} (\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} + \mathcal{M} \cdot t^{-i} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1})^i \right) \\
 &= \text{Spec} \left(\sum_{i, j \geq 0} \mathcal{M}^{i+j} t^{-i} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \right)
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \cdot t^{-1}$ on voit que $\mathcal{M}^{i+j} \cdot t^{-i} \subset \mathcal{M}^{i+j} \cdot t^{-i-j}$. On obtient en fin de compte que C est égal au spectre de la $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1}$ -algèbre :

$$\sum_{i \geq 0} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \mathcal{M}^i t^{-i} = \sum_{i, k \geq 0} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \mathcal{M}^{i+k} t^{-i} = \sum_{i \geq 0} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1} \mathcal{M}^i t^{-i}$$

Mais C est aussi le spectre de cette algèbre vue comme $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1}$ -algèbre. Le résultat est maintenant clair. \square

Remarquons que *via* l'identification du lemme précédent l'isomorphisme de \mathbb{E}_Y^1 -fibrés vectoriels $\mathbb{E}_Y^1 \longrightarrow C \times_{\mathbb{A}_Y^1} \mathbb{E}_Y^1$ induit par j correspond à l'inverse de $\mathbb{V}(q^* \mathcal{M} \subset q^* \mathcal{M} t^{-1})$. Notons $b : C \longrightarrow \mathbb{A}_Y^1$ l'isomorphisme :

$$C = \mathbb{V}(p^* \mathcal{M} t^{-1}) \xrightarrow{\mathbb{V}(- \times t^{-1})} \mathbb{V}(p^* \mathcal{M}) = \mathbb{A}_Y^1$$

On a alors un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_V^1 & \xrightarrow{c} & \mathbb{E}_V^1 \\ j \downarrow & & \downarrow u \\ C & \xrightarrow{b} & \mathbb{A}_V^1 \end{array}$$

avec u l'inclusion évidente et c l'isomorphisme de fibrés vectoriels :

$$\mathbb{E}_V^1 = \mathbb{V}(q^*\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathbb{V}(- \times t^{-1})} \mathbb{V}(q^*\mathcal{M}) = \mathbb{E}_V^1$$

De plus, l'isomorphisme canonique $\mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{M}$ induit l'isomorphisme $\mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \simeq \mathbb{V}(\mathcal{M}) = V$ qui n'est autre que le pull-back de b suivant l'immersion de la section nulle de \mathbb{A}^1 . On a en fin de compte un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & \xrightarrow{i} & C & \xleftarrow{j} & \mathbb{E}_V^1 \\ a \downarrow & & \downarrow b & & \downarrow c \\ V & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{A}_V^1 & \xleftarrow{u} & \mathbb{E}_V^1 \end{array}$$

Dorénavant on notera u par j et ι par i . La déformation au cône normal est alors isomorphe à :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{s} & V & & \mathbb{A}_Y^1 & \xrightarrow{\tilde{s}} & \mathbb{A}_V^1 & & \mathbb{E}_Y^1 & \xrightarrow{\tilde{s}} & \mathbb{E}_V^1 \\ & \searrow & \downarrow f & \xrightarrow{i} & \searrow & \downarrow \tilde{f} & \xleftarrow{j} & \searrow & \downarrow \tilde{f} \\ & Y & & & \mathbb{A}_Y^1 & & & & \mathbb{E}_Y^1 \\ & & & & \downarrow p & & & & \swarrow q \\ & & & & Y & & & & \end{array}$$

L'isomorphisme étant induit par l'identité sur Y , \mathbb{A}_Y^1 et \mathbb{E}_Y^1 ainsi que les isomorphismes a , b et c .

On déduit de là un diagramme commutatif⁽¹¹⁾ :

$$\begin{array}{ccccccc} j_*\tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* & \longrightarrow & j_* j^* \tilde{s}^! \tilde{f}^* p^* & \xrightarrow{\theta} & i_* i^! \tilde{s}^! \tilde{f}^* p^* [+1] & \longrightarrow & i_* s^! f^* i^! p^* [+1] \\ Ex^{!,*} \downarrow & & \downarrow Ex^{!,*} & & \downarrow Ex^{!,*} & & \downarrow Ex^{!,*} \\ j_* \tilde{s}^! c^* \tilde{f}^* q^* & \longrightarrow & j_* j^* \hat{s}^! b^* \tilde{f}^* p^* & \xrightarrow{\theta} & i_* i^! \hat{s}^! b^* \tilde{f}^* p^* [+1] & \longrightarrow & i_* s_0^! a^* f^* i^! p^* [+1] \\ c^* \downarrow & & \downarrow c^* & & \downarrow c^* & & \downarrow c^* \\ j_* \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* & \longrightarrow & j_* j^* \hat{s}^! \hat{f}^* p^* & \xrightarrow{\theta} & i_* i^! \hat{s}^! \hat{f}^* p^* [+1] & \longrightarrow & i_* s_0^! f_0^* i^! p^* [+1] \end{array}$$

⁽¹¹⁾ On fera attention que le symbole c^* est utilisé dans ce diagramme pour désigner deux objets distincts : le 1-morphisme $H^*(c)$ et le 2-isomorphisme de connexion du 2-foncteur H^* .

Remarquons d'autre part que la composée :

$$\tilde{s}^! \tilde{f}^* \xrightarrow{Ex^{!,*}} \tilde{s}^! c^* \tilde{f}^* \xrightarrow{c^*} \tilde{s}^! \tilde{f}^*$$

est par définition le 2-isomorphisme $\omega_{-1}(c)$ sur les équivalences de Thom inverses qui est égale à l'automorphisme $\omega_{-1}(q^* \mathcal{M}, t^{-1}) = \omega(q^* \mathcal{M}, t^{-1})$ du foncteur identité de $H(\mathbb{E}_Y^!)$ appliqué à $\mathrm{Th}^{-1}(q^* \mathcal{M})$ (voir le lemme 1.5.23). On en déduit donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} j_* \mathrm{id}_{H(\mathbb{E}_Y^!)} q^* s^! f^* & \longrightarrow & j_* \mathrm{id}_{H(\mathbb{E}_Y^!)} \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* & \equiv & j_* \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* \\ \downarrow \omega(q^* \mathcal{M}, \frac{1}{t}) & & \downarrow \omega(q^* \mathcal{M}, \frac{1}{t}) & & \downarrow Ex^{!,*} \\ j_* \mathrm{id}_{H(\mathbb{E}_Y^!)} q^* s^! f^* & \longrightarrow & j_* \mathrm{id}_{H(\mathbb{E}_Y^!)} \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* & \equiv & j_* \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* \\ & & & & \downarrow c^* \end{array}$$

En mettant ces deux diagrammes ensemble, on a ainsi démontré la commutativité du carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\theta} & i_* [s^! f^*](-1)[-1] \\ \downarrow \omega(q^* \mathcal{M}, \frac{1}{t}) & & \downarrow \\ j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi_0} & i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1] \end{array}$$

En remarquant que $\omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) = \omega(q^* \mathcal{M}, t^{-1})$ on obtient la proposition suivante :

Proposition 1.6.12. — Notons $a : \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \xrightarrow{\sim} V$ l'isomorphisme canonique induisant un isomorphisme $s^! f^* \simeq s_0^! f_0^*$. Le triangle suivant :

$$\begin{array}{ccc} j_* q^* [s^! f^*] & \xrightarrow{\pi} & i_* [s_0^! f_0^*](-1)[-1] \\ \theta \downarrow & \nearrow \sim & \\ i_* [s^! f^*](-1)[-1] & & \end{array}$$

est commutatif.

Voici un corollaire de la proposition 1.6.12 :

Corollaire 1.6.13. — La composée des 2-morphismes suivants :

$$s^! f^* \longrightarrow i^* j_* q^* s^! f^* \xrightarrow{\pi} s_0^! f_0^* (-1)[-1]$$

est nulle. De plus ces deux 2-morphismes constituent deux cotés d'un 2-triangle distingué.

1.6.3. Le 2-isomorphisme de pureté. — On reprend les notations de la sous-section 1.6.1 surtout le diagramme (37) décrivant la déformation au cône normal. On va construire à partir de π un 2-isomorphisme :

$$(46) \quad \Pi : s^! f^* \xrightarrow{\sim} s_0^! f_0^*$$

ou avec le langage des diagrammes planaires, une face carrée inversible :

$$(47) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{H}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{H}(X) \\ f_0^* \downarrow & \swarrow_{\Pi} & \downarrow s^! \\ \mathrm{H}(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & \mathrm{H}(Y) \end{array}$$

C'est presque le 2-isomorphisme de pureté recherché. En effet, pour obtenir le 2-isomorphisme de pureté (36) (qu'on notera également Π) :

on remarque que f_0 est égal à la composée : $f_0 = pr \circ g$ avec pr la projection du fibré normal sur Y :

$$pr : \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \longrightarrow Y$$

et on compose (46) à droite avec le 2-isomorphisme :

$$s_0^! f_0^* \xrightarrow{c^*} s_0^! pr^* g^* = \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*$$

Dans la suite on étudiera essentiellement le 2-isomorphisme de pureté sous sa forme (46). Pour le construire, on procède en deux étapes. On construit d'abord pour tout objet A de $\mathrm{H}(Z)$ un isomorphisme dans $\mathrm{H}(Y)$ entre $s^! f^*(A)$ et $s_0^! f_0^*(A)$ sans se préoccuper de la fonctorialité de la construction par rapport à A . En utilisant l'existence de tels isomorphismes pour un diagramme bien choisi on prouve que la composée des 2-morphismes :

$$p^*[s^! f^*] \longrightarrow j_* q^*[s^! f^*] \xrightarrow{\pi} i_*[s_0^! f_0^*](-1)[-1]$$

est nulle. On utilise ceci ainsi que le corollaire 1.6.2 pour déduire une unique factorisation de π :

$$j_* q^*[s^! f^*] \longrightarrow i_*[s^! f^*](-1)[-1] \longrightarrow i_*[s_0^! f_0^*](-1)[-1]$$

et de là notre 2-isomorphisme Π .

Soit A un objet de $\mathrm{H}(Z)$. On part donc du morphisme :

$$i^* j_* q^*[s^! f^* A] \xrightarrow{\pi} s_0^! f_0^* A(-1)[-1]$$

D'après le corollaire 1.6.2, on sait que le morphisme :

$$i^* j_* q^*[s^! f^* A] \xrightarrow{\theta} s^! f^* A(-1)[-1]$$

admet des sections. On choisit une section $\sigma_A : s^! f^* A(-1)[-1] \longrightarrow i^* j_* q^* [s^! f^* A]$ et on définit τ_A par la composée :

$$s^! f^* A(-1)[-1] \xrightarrow{\sigma_A} i^* j_* q^* [s^! f^* A] \xrightarrow{\theta} s_0^! f_0^* A(-1)[-1]$$

Ce morphisme⁽¹²⁾ dépend donc *a priori* du choix de la section σ_A . On a le lemme :

Lemme 1.6.14. — *Pour tout objet A de $H(Z)$ et toute section σ_A (comme ci-dessus) le morphisme :*

$$\tau_A : s^! f^* A \longrightarrow s_0^! f_0^* A$$

est inversible. De plus, si on se donne un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t} & R \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ Y & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

avec v lisse, on peut choisir la section :

$$\sigma'_A : s^! (f \circ v)^* A(-1)[-1] \longrightarrow i^* j_* q^* s^! (f \circ v)^* A$$

de telle sorte que le carré suivant (voir les notations de la sous-section 1.6.1.1) :

$$\begin{array}{ccc} u^* s^! f^* A & \xrightarrow{\tau_A} & u_0^* s_0^! f_0^* A \\ \downarrow Ex^{!,*} & & \downarrow Ex^{!,*} \\ t^! v^* f^* A & & t_0^! v_0^* f_0^* A \\ \downarrow (c^*)^{-1} & & \downarrow (c^*)^{-1} \\ t^! (f \circ v)^* A & \xrightarrow{\tau'_A} & t_0^! (f_0 \circ v_0)^* A \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. — On divise la preuve en deux étapes :

Étape 1. — On commence par prouver la dernière assertion du lemme. Par la proposition 1.6.6, on a un diagramme commutatif :

$$(48) \quad \begin{array}{ccc} u^* i^* j_* q^* s^! f^* A & \xrightarrow{u^* \pi} & u_0^* s_0^! f_0^* A(-1)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ i^* j_* q^* t^! v^* f^* A & & t_0^! v_0^* f_0^* A(-1)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ i^* j_* q^* t^! (f \circ v)^* A & \xrightarrow{\pi} & t_0^! (f_0 \circ v_0)^* A(-1)[-1] \end{array}$$

⁽¹²⁾ Bien sûr, le morphisme τ_A n'est autre que le 2-isomorphisme Π évalué en A . Sauf qu'on n'a pas encore construit le 2-isomorphisme de pureté Π .

Il suffit donc de choisir la section $\sigma'_A : t^!(f \circ v)^* A(-1)[-1] \longrightarrow i^* j_* q^* t^!(f \circ v)^* A$ de telle sorte que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 u^* s^! f^* A(-1)[-1] & \xrightarrow{u^* \sigma_A} & u^* i^* j_* q^* s^! f^* A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 t^! v^* f^* A(-1)[-1] & & i^* j_* q^* t^! v^* f^* A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 t^!(f \circ v)^* A(-1)[-1] & \xrightarrow{\sigma'_A} & i^* j_* q^* t^!(f \circ v)^* A
 \end{array}$$

soit commutatif. Mais comme les flèches verticales sont des isomorphismes on voit que le choix d'une section $\sigma_A : s^! f^* A(-1)[-1] \longrightarrow i^* j_* q^* s^! f^* A$ détermine une section⁽¹³⁾ $\sigma'_A : t^!(f \circ v)^* A(-1)[-1] \longrightarrow i^* j_* q^* t^!(f \circ v)^* A$ et celle-là convient.

Étape 2. — Prouvons que τ_A est un isomorphisme. Par le corollaire 1.4.4, il suffit de prouver ceci localement pour la topologie de Nisnevich sur X . Soit

$$v : R = U_1 \coprod \dots \coprod U_n \longrightarrow X$$

un recouvrement Nisnevich de X . La première étape de la démonstration montre qu'on peut choisir une section σ'_A de sorte que le morphisme $\tau'_A = \theta \circ \sigma'_A$ rend commutatif le carré :

$$\begin{array}{ccc}
 u^* s^! f^* A & \longrightarrow & u_0^* s_0^! f_0^* A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 t^!(f \circ v)^* A & \xrightarrow{\tau'_A} & t_0^!(f_0 \circ v_0)^* A
 \end{array}$$

On voit donc que pour prouver que τ_A est un isomorphisme il suffit de prouver que τ'_A en est un. Il suffit de prouver ce que l'on veut pour chaque U_i . Quitte à remplacer X par chacun des U_i , il vient qu'on peut supposer qu'il existe un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{s} & X \\
 g \downarrow & & \downarrow h \\
 Z & \xrightarrow{z} & \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n
 \end{array}$$

avec h lisse et z la section nulle. Considérons le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccccc}
 g_0^* z^! r^* & \longrightarrow & g_0^* t^! j_* q^* z^! r^* & \xrightarrow{\pi} & g_0^* z_0^! r_0^*-1 \\
 \downarrow & & \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 s^! f^* & \longrightarrow & i^* j_* q^* s^! f^* & \xrightarrow{\pi} & s_0^! f_0^*-1
 \end{array}$$

⁽¹³⁾ Il n'est pas complètement évident que le morphisme σ'_A est une section à θ . Pour démontrer ça, il faut utiliser un diagramme commutatif analogue au diagramme (48) avec des 2-morphismes θ à la place des 2-morphismes π .

avec $r : \mathbb{A}_Z^n \longrightarrow Z$ la projection canonique (les 2-morphismes verticaux étant les 2-isomorphismes habituels). On voit facilement que le carré de gauche est commutatif. En invoquant encore une fois la proposition 1.6.6, on voit que le carré de droite est aussi commutatif. Donc le diagramme total est commutatif et par le corollaire 1.6.13 appliqué au triangle :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{z} & \mathbb{A}_Z^n \\ & \searrow & \downarrow r \\ & & Z \end{array}$$

la composée :

$$z^! r^* \longrightarrow i^* j_* q^* z^! r^* \xrightarrow{\pi} z_0^! r_0^* (-1)[-1]$$

est nulle. On en déduit donc que la composée :

$$s^! f^* \longrightarrow i^* j_* q^* s^! f^* \xrightarrow{\pi} s_0^! f_0^* (-1)[-1]$$

est aussi nulle. Ceci montre en particulier que τ_A est indépendant du choix du scindage σ_A . Finalement puisque g_0^* est un foncteur triangulé on voit par la deuxième partie de 1.6.13 que pour tout A , la suite :

$$s^! f^* A \longrightarrow i^* j_* q^* s^! f^* A \xrightarrow{\pi} s_0^! f_0^* A(-1)[-1]$$

constitue deux cotés d'un triangle distingué. Ceci prouve que le morphisme τ_A est inversible. \square

L'énoncé suivant est une conséquence directe du corollaire 1.6.13 :

Proposition 1.6.15. — *Supposons que l'immersion $s : Y \longrightarrow X$ est l'inclusion de la section nulle d'un fibré vectoriel sur Y . On note $a : \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \longrightarrow X$ l'isomorphisme canonique de Y -schémas entre X et le fibré normal à l'immersion s . Pour chaque A de $H(Z)$ et tout scindage σ_A , l'isomorphisme $\tau_A : s^! f^* A \longrightarrow s_0^! f_0^* A$ est égal à la composée :*

$$s^! f^* A \xrightarrow{Ex^{!,*}} s_0^! a^* f^* A \longrightarrow s_0^! f_0^* A$$

En particulier, il ne dépend pas du choix du scindage.

La proposition suivante contient l'argument clef permettant la construction du 2-isomorphisme de pureté :

Proposition 1.6.16. — *La composée⁽¹⁴⁾ des 2-morphismes :*

$$p^* s^! f^* \longrightarrow j_* q^* s^! f^* \xrightarrow{\pi} i_* s_0^! f_0^* (-1)[-1]$$

est le 2-morphisme nul.

⁽¹⁴⁾Le premier 2-morphisme n'est autre que le 2-morphisme évident qui provient de :

$$p^* \xrightarrow{\eta} j_* j^* p^* \xrightarrow{c^*} j_* q^* .$$

Démonstration. — La démonstration se fera en plusieurs étapes :

Étape 1. Réduction du problème. — Il suffit bien sûr de prouver que la composée des morphismes :

$$p^*s^!f^*A \longrightarrow j_*q^*s^!f^*A \xrightarrow{\pi} i_*s_0^!f_0^*A(-1)[-1]$$

est nulle pour tout objet A de $H(Z)$. Par la construction même du 2-morphisme π_0 (voir le diagramme (39)), on a un carré commutatif dont les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} j_*q^*s^!f^*A & \xrightarrow{\pi_0} & i_*s_0^!f_0^*A(-1)[-1] \\ \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\ j_*j^*\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A & \xrightarrow{\theta} & i_*i^!\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A[+1] \end{array}$$

On forme le diagramme :

$$(49) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \pi & & & \\ & & & \curvearrowright & & & \\ p^*s^!f^*A & \longrightarrow & j_*q^*s^!f^*A & \xrightarrow{\omega(q^*\mathcal{N}_s, \frac{1}{t})} & j_*q^*s^!f^*A & \xrightarrow{\pi_0} & i_*s_0^!f_0^*A(-1)[-1] \\ & \nearrow \text{---} & & \uparrow \sim & & & \uparrow \sim \\ & & \hat{s}^!\hat{f}^*p^*A & \longrightarrow & j_*j^*\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A & \xrightarrow{\theta} & i_*i^!\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A[+1] \end{array}$$

La composée des flèches horizontales inférieures est nulle étant donné qu'ils constituent deux côtés d'un 2-triangle distingué (voir la proposition 1.4.9). On veut prouver que la composée des flèches horizontales supérieures est nulle et on sait que les flèches verticales pleines sont des isomorphismes. Il suffit donc de construire un isomorphisme :

$$(50) \quad \alpha : \hat{s}^!\hat{f}^*p^*A \xrightarrow{\sim} p^*s^!f^*A$$

rendant commutatif la partie gauche du diagramme (49), ou encore le diagramme obtenu par adjonction :

$$\begin{array}{ccc} j^*p^*s^!f^*A & \longrightarrow & q^*s^!f^*A \xrightarrow{\omega(q^*\mathcal{N}_s, \frac{1}{t})} q^*s^!f^*A \\ \uparrow j^*(\alpha) & & \uparrow \\ j^*\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A & \xlongequal{\quad} & j^*\hat{s}^!\hat{f}^*p^*A \end{array}$$

En utilisant la définition de la première flèche verticale pleine de (49) (voir le début de la sous-section 1.6.1) on voit que l'isomorphisme $j^*(\alpha)$ doit coïncider avec la composée :

$$(51) \quad \begin{aligned} j^* \hat{s}^! \hat{f}^* p^* A &\xrightarrow{Ex^{!,*}} \tilde{s}^! j^* \hat{f}^* p^* A \xrightarrow{c^*} \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* A \xrightarrow{Ex^{*,*}} \tilde{s}^! q^* f^* A \\ &\xrightarrow{(Ex^{!,*})^{-1}} q^* s^! f^* A \xleftarrow{\omega(q^* \mathcal{N}_s, \frac{1}{t})} q^* s^! f^* A \xrightarrow{c^*} j^* p^* s^! f^* A \end{aligned}$$

Le reste de la preuve est consacré à la construction d'un isomorphisme α comme dans (50) tel que l'isomorphisme $j^*(\alpha)$ soit égal à la composée de (51).

Étape 2. Application du lemme 1.6.14. — Dans cette étape on applique le lemme 1.6.14 au triangle suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_Y^1 & \xrightarrow{\hat{s}'} & C' \\ & \searrow \hat{g}' & \downarrow \hat{f}' \\ & & \mathbb{P}_Z^1 \end{array}$$

avec C' l'espace de déformation au cône normal associé à l'immersion s mais paramétré par la droite projective (au lieu de la droite affine !). On supposera que le cône normal de s se trouve au-dessus de la section $o = [1 : 0]$ de \mathbb{P}_Z^1 . On notera $\mathcal{N}_{\hat{s}'}$ (resp. $\mathcal{N}_{\hat{s}}$, etc) le faisceau normal de l'immersion \hat{s}' (resp. \hat{s} , etc) de telle sorte qu'on a un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_Y^1 & \xrightarrow{\hat{s}'_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}'}) \\ & \searrow \hat{g}'_0 & \downarrow \hat{f}'_0 \\ & & \mathbb{P}_Z^1 \end{array}$$

On appellera l la projection de la droite projective : $\mathbb{P}_Z^1 \longrightarrow ?$. Soit A l'objet de $H(Z)$ fixé dans la première étape. Le lemme 1.6.14 (appliqué à l^*A) nous dit que modulo le choix d'une section, on peut trouver un isomorphisme :

$$(52) \quad \hat{\tau}' : \hat{s}^! \hat{f}'^* l^* A \xrightarrow{\sim} \hat{s}_0^! \hat{f}'_0^* l^* A$$

On a une immersion fermée de losanges commutatifs d'immersions ouvertes :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{A}_Y^1 & \\ j \nearrow & & \searrow u' \\ \mathbb{E}_Y^1 & & \mathbb{P}_Y^1 \\ u \searrow & & \nearrow j' \\ & \mathbb{A}_Y^1 & \end{array} \xrightarrow{s} \begin{array}{ccc} & C & \\ j \nearrow & & \searrow u' \\ \mathbb{E}_X^1 & & C' \\ u \searrow & & \nearrow j' \\ & \mathbb{A}_X^1 & \end{array}$$

L'immersion ouverte j' est complémentaire à la section nulle. L'immersion ouverte u' est complémentaire à la section à l'infinie. L'immersion j est celle qui figure dans le diagramme (37). Les immersions s seront notées \hat{s}' , \tilde{s}' , \hat{s} et \tilde{s} , etc. En passant au cône normal, on a une immersion de losanges d'immersions ouvertes :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{A}_Y^1 & \\
 j \nearrow & & \searrow u' \\
 \mathbb{E}_Y^1 & & \mathbb{P}_Y^1 \\
 u \searrow & & \nearrow j' \\
 & \mathbb{A}_Y^1 &
 \end{array}
 \xrightarrow{s_0}
 \begin{array}{ccc}
 & \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}}) & \\
 j \nearrow & & \searrow u' \\
 \mathbb{V}(q^*\mathcal{N}_s) & & \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{s}'}) \\
 u \searrow & & \nearrow j' \\
 & \mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_s) &
 \end{array}$$

Les immersions s_0 seront aussi notées \hat{s}'_0 , \tilde{s}'_0 , \hat{s}_0 et \tilde{s}_0 , etc. En utilisant la seconde partie du lemme 1.6.14, on déduit de (52) trois autres isomorphismes :

- $\hat{s}^! \hat{f}^* p^* A \xrightarrow{\hat{\tau}} \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* A$,
- $\tilde{s}^! \tilde{f}^* p^* A \xrightarrow{\tilde{\tau}'} \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* p^* A$,
- $\hat{s}^! \tilde{f}^* q^* A \xrightarrow{\tilde{\tau}} \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A$,

ainsi que des carrés commutatifs. Bien entendu, le morphisme \tilde{f}' n'est autre que la projection de \mathbb{A}_X^1 sur \mathbb{A}_Z^1 . Les autres morphismes ont tous été définis soit durant la preuve soit dans le diagramme (37).

Étape 3. L'isomorphisme τ . — On va déduire de $\tilde{\tau}'$ un isomorphisme⁽¹⁵⁾ $\tau : s^! f^* A \longrightarrow s_0^! f_0^* A$. On commence par définir un isomorphisme qu'on appellera (par abus de notations) « $p^* \tau$ » : $p^* s^! f^* A \longrightarrow p^* s_0^! f_0^* A$ en imposant la commutativité du carré :

$$\begin{array}{ccc}
 p^* s^! f^* A & \longrightarrow & p^* s_0^! f_0^* A \\
 \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\
 \tilde{s}^! \tilde{f}^* p^* A & \xrightarrow{\sim} & \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* p^* A
 \end{array}$$

Le morphisme p n'est autre que la projection de la droite affine. Les isomorphismes verticaux sont des composées de 2-isomorphismes de connexions et de Ex^1* . En utilisant l'axiome d'homotopie⁽¹⁶⁾, on a pour U et V dans $\mathbf{H}(Z)$ des isomorphismes :

$$\mathrm{hom}(p^*U, p^*V) \simeq \mathrm{hom}(U, p_*p^*V) \simeq \mathrm{hom}(U, V)$$

⁽¹⁵⁾ Bien sûr le lemme 1.6.14 nous donne de tels isomorphismes, mais l'isomorphisme τ qu'on va construire, jouira d'une propriété spéciale qu'on ne saurait attraper en appliquant tout simplement 1.6.14.

⁽¹⁶⁾ Par le choix de l'espace de déformation au cône normal paramétrisé par la droite projective.

Il existe alors un unique isomorphisme :

$$(53) \quad \tau : s^! f^* A \longrightarrow s_0^! f_0^* A$$

tel que $p^*(\tau) = \ll p^* \tau \gg$.

Ainsi, on dispose en plus des quatre isomorphismes $\hat{\tau}'$, $\tilde{\tau}'$, $\hat{\tau}$ et $\tilde{\tau}$ d'un isomorphisme τ . Dans la suite, le lecteur pourra bien oublier les isomorphismes $\hat{\tau}'$ et $\tilde{\tau}'$: on se servira uniquement des trois isomorphismes :

$$\hat{\tau}, \quad \tilde{\tau} \quad \text{et} \quad \tau$$

ainsi que les deux carrés commutatifs :

$$(54) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* A & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A \\ \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\ q^* s^! f^* A & \xrightarrow{q^* \tau} & q^* s_0^! f_0^* A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* A & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A \\ \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\ j^* \tilde{s}^! \tilde{f}^* p^* A & \xrightarrow{j^* \hat{\tau}} & j^* \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* p^* A \end{array}$$

Précisons ici que nous avons considéré l'espace de déformation C' paramétré par \mathbb{P}^1 uniquement dans le but d'obtenir simultanément ces deux carrés commutatifs (ceci n'étant pas possible en appliquant directement le lemme 1.6.14).

Étape 4. Construction de l'isomorphisme α . — On dispose d'un isomorphisme évident $e : \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(q^* \mathcal{N}_s)$ induit par le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_Y^1 & \xrightarrow{\tilde{s}} & \mathbb{E}_X^1 \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ Y & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

Par le lemme 1.6.17 ci-dessous, il existe un isomorphisme $b : \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \longrightarrow \mathbb{V}(p^* \mathcal{N}_s)$. Les isomorphismes e et b s'insèrent dans un carré cartésien d'isomorphismes de fibrés vectoriels :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) & \xrightarrow{e} & \mathbb{V}(q^* \mathcal{N}_s) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \mathbb{V}(- \times t^{-1}) \\ \mathbb{V}(j^* \mathcal{N}_{\tilde{s}}) & \xrightarrow{b \times_{\mathbb{A}^1} \mathbb{E}^1} & \mathbb{V}(q^* \mathcal{N}_s) \end{array}$$

On a donc un carré commutatif d'équivalences de Thom inverses :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Th}^{-1}(q^* \mathcal{N}_s) & \xrightarrow{\omega_{-1}(e)} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \\ \omega_{-1}(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) \uparrow & & \uparrow \sim \\ \mathrm{Th}^{-1}(q^* \mathcal{N}_{\tilde{s}}) & \xrightarrow{\omega_{-1}(b \times_{\mathbb{A}^1} \mathbb{E}^1)} & \mathrm{Th}^{-1}(j^* \mathcal{N}_{\tilde{s}}) \end{array}$$

Ceci permet de considérer le diagramme commutatif de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc}
 q^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(q^* \mathcal{N}_s) \tilde{g}^* q^* & \xrightarrow{\omega_{-1}(e)} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \tilde{g}^* q^* \\
 \omega_{-1}(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) \uparrow & & \uparrow \omega_{-1}(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) & & \uparrow \\
 q^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(q^* \mathcal{N}_s) \tilde{g}^* q^* & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(j^* \mathcal{N}_{\tilde{s}}) \tilde{g}^* q^* \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 j^* p^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* & \longrightarrow & j^* \mathrm{Th}^{-1}(p^* \mathcal{N}_s) \hat{g}^* p^* & \xrightarrow{j^* \omega_{-1}(b)} & j^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \hat{g}^* p^*
 \end{array}$$

Ainsi en définissant les 2-isomorphismes : $p^* s_0^! f_0^* \xrightarrow{\sim} \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^*$ et $q^* s_0^! f_0^* \xrightarrow{\sim} \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^*$ par les composées :

$$\begin{aligned}
 p^* s_0^! f_0^* &\simeq p^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(p^* \mathcal{N}_s) \hat{g}^* p^* \xrightarrow{\omega_{-1}(b)} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \hat{g}^* p^* \simeq \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* \\
 q^* s_0^! f_0^* &\simeq q^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(q^* \mathcal{N}_s) \tilde{g}^* q^* \xrightarrow{\omega_{-1}(e)} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}}) \tilde{g}^* q^* \simeq \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^*
 \end{aligned}$$

on obtient un diagramme commutatif :

$$(55) \quad \begin{array}{ccccc}
 j^* \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* & \xleftarrow{\sim} & j^* p^* s_0^! f_0^* & \xleftarrow{\sim} & q^* s_0^! f_0^* \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \omega_{-1}(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) = \omega(q^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) \\
 \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* & \xleftarrow{\sim} & & & q^* s_0^! f_0^*
 \end{array}$$

On prend pour α la composée des isomorphismes suivants :

$$\alpha : \hat{s}^! \hat{f}^* p^* A \xrightarrow[\hat{\tau}]{\sim} \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* A \xleftarrow{\sim} p^* s_0^! f_0^* A \xleftarrow[p^* \tau]{\sim} p^* s^! f^* A$$

Prouvons que ce α convient, c'est-à-dire que si l'on applique j^* on obtient bien l'isomorphisme composé (51). Pour cela, on remarque (en utilisant le second carré de (54) ainsi que (55)) que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 j^* \hat{s}^! \hat{f}^* p^* A & \xrightarrow{j^* \hat{\tau}_A} & j^* \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* p^* A & \xleftarrow{\sim} & q^* s_0^! f_0^* A & \xleftarrow{q^* \tau_A} & q^* s^! f^* A \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow \omega(q^* \mathcal{N}_s, \frac{1}{t}) & & \downarrow \omega(q^* \mathcal{N}_s, \frac{1}{t}) \\
 \hat{s}^! \hat{f}^* q^* A & \xrightarrow{\hat{\tau}_A} & \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* q^* A & \xleftarrow{\sim} & q^* s_0^! f_0^* A & \xleftarrow[q^* \tau_A]{\sim} & q^* s^! f^* A
 \end{array}$$

Il suffit alors de prouver que la composée :

$$\hat{s}^! \hat{f}^* q^* A \xrightarrow{\hat{\tau}_A} \hat{s}_0^! \hat{f}_0^* q^* A \xleftarrow{\sim} q^* s_0^! f_0^* A \xleftarrow{\tau_A} q^* s^! f^* A$$

est égale au morphisme évident :

$$\hat{s}^! \hat{f}^* q^* A \xrightarrow{\sim} \hat{s}^! q^* f^* A \xrightarrow{(Ex^{!,*})^{-1}} q^* s^! f^* A$$

En d'autre termes il faut que le carré :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{s}^! \tilde{f}^* q^* A & \xrightarrow{\tilde{\tau}_A} & \tilde{s}_0^! \tilde{f}_0^* q^* A \\ \sim \uparrow & & \uparrow \sim \\ q^* s^! f^* A & \xrightarrow{\tau_A} & q^* s_0^! f_0^* A \end{array}$$

soit commutatif. Mais ceci est exactement le premier carré commutatif dans (54) de l'étape précédente. \square

Pour terminer la preuve de la proposition 1.6.16 il nous reste à établir le lemme suivant :

Lemme 1.6.17. — *Le faisceau normal de l'immersion \hat{s} est canoniquement isomorphe à $(p^* \mathcal{N}_s) t^{-1}$ avec t l'indéterminé tel que $\mathbb{A}_S^1 = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[t])$. De plus, l'isomorphisme de fibrés vectoriels $\mathbb{V}(j^* \mathcal{N}_{\hat{s}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}}) \simeq \mathbb{V}(q^* \mathcal{N}_s)$ correspond via cette identification à $- \times t^{-1} : q^* \mathcal{N}_s \longrightarrow (q^* \mathcal{N}_s).t^{-1}$. On a ainsi le carré cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}}) \simeq \mathbb{V}(q^* \mathcal{N}_s) & \xrightarrow{\mathbb{V}(- \times t^{-1})} & \mathbb{V}(q^* \mathcal{N}_s) \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}}) & \xrightarrow{b} & \mathbb{V}(p^* \mathcal{N}_s) \end{array}$$

avec j les inclusions évidentes et b l'isomorphisme induit par $- \times t : p^* \mathcal{N}_s \longrightarrow (p^* \mathcal{N}_s) t^{-1} = \mathcal{N}_{\hat{t}}$.

Démonstration. — Notons $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ le faisceau d'idéaux définissant l'immersion fermée $s : Y \longrightarrow X$. Le schéma C correspond à l'ouvert affine (relativement à X) associé à t dans l'éclaté de l'idéal $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_X^1} \mathcal{I} + \mathcal{O}_{\mathbb{A}_X^1}.t \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}_X^1}$. Ainsi, le \mathbb{A}_X^1 -schéma C est le spectre de la $\mathcal{O}_X[t]$ -algèbre quasi-cohérente :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_C &= \sum_{i \geq 0} \frac{(\mathcal{O}_X[t].\mathcal{I} + \mathcal{O}_X[t].t)^i}{t^i} = \sum_{i \geq 0} \frac{\sum_{u+v=i} \mathcal{O}_X[t].\mathcal{I}^u.t^v}{t^i} \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{u+v=i} \mathcal{O}_X[t].\mathcal{I}^u.t^{-u} = \sum_{i \geq 0} \mathcal{O}_X[t].\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right)^i \end{aligned}$$

De plus, l'idéal de l'immersion fermée $\hat{s} : \mathbb{A}_Y^1 \longrightarrow C$ est égal à :

$$\mathcal{O}_C.\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right) = \sum_{i \geq 1} \mathcal{O}_X[t].\left(\frac{\mathcal{I}}{t}\right)^i$$

On a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_X^1}$ -modules :

$$\mathcal{N}_{\hat{s}} = \frac{\mathcal{O}_C \cdot (\frac{\mathcal{I}}{t})}{\mathcal{O}_C \cdot (\frac{\mathcal{I}}{t})^2} = \frac{\sum_{i \geq 1} \mathcal{O}_X[t] \cdot (\frac{\mathcal{I}}{t})^i}{\sum_{i \geq 2} \mathcal{O}_X[t] \cdot (\frac{\mathcal{I}}{t})^i} \xleftarrow{\sim} \frac{\mathcal{O}_X[t] \cdot (\frac{\mathcal{I}}{t})}{\mathcal{O}_X[t] \cdot (\frac{\mathcal{I}}{t}) \cap \sum_{i \geq 2} \mathcal{O}_X[t] \cdot (\frac{\mathcal{I}}{t})^i}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{O}_X[t] \cdot \frac{\mathcal{I}}{t} \cap \sum_{i \geq 2} \mathcal{O}_X[t] \cdot (\frac{\mathcal{I}}{t})^i = \mathcal{O}_X[t] \cdot \frac{\mathcal{I}^2}{t}$. On a ainsi construit un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_X^1}$ -modules :

$$(\mathcal{N}_{\hat{s}}[t]).t^{-1} = \mathcal{O}_X[t] \cdot (\mathcal{I} / \mathcal{I}^2).t^{-1} \longrightarrow \mathcal{N}_{\hat{s}}$$

cet isomorphisme provient d'un unique isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_Y^1}$ -modules. Les autres assertions du lemme découlent immédiatement de la construction. \square

Remarque 1.6.18. — Faisons une remarque sur la démonstration de la proposition 1.6.16. Le fait d'avoir utilisé l'espace de déformation paramétré par la droite projectif semble indiquer qu'on aurait mieux fait d'utiliser cet espace depuis le début ! Ceci n'est pas forcément vrai. En fait on est obligé de passer par les deux espaces de déformation puisque :

- La réduction de l'étape 1 n'est pas utile si on travaillait avec l'espace de déformation paramétré par la droite projective car un isomorphisme a entre $\hat{s}^! \hat{f}^* p^*$ et $p^* s^! f^*$ n'aurait pas existé⁽¹⁷⁾.
- Si on travaillait exclusivement sur l'espace de déformation paramétré par la droite affine on n'aurait pas pu utiliser l'axiome de l'homotopie dans l'étape 3 pour descendre l'isomorphisme $\tilde{\tau}$.

On est en mesure maintenant de prouver le théorème :

Théorème 1.6.19. — *On garde les notations ambiantes (spécialement ceux du lemme 1.6.14). Il existe un unique 2-morphisme :*

$$\Pi : s^! f^* \longrightarrow s_0^! f_0^*$$

rendant le triangle :

$$\begin{array}{ccc} j_* q^* s^! f^* & \xrightarrow{\pi} & i_* s_0^! f_0^*(-1)[-1] \\ \downarrow & \nearrow \Pi & \\ i_* s^! f^*(-1)[-1] & & \end{array}$$

commutatif. De plus ce 2-morphisme est inversible.

⁽¹⁷⁾ En effet le faisceau normal à \hat{s} (dans le cas de l'espace de déformation paramétré par la droite projectif) n'est pas isomorphe à $p^* \mathcal{N}$ mais plutôt à $p^* \mathcal{N} \otimes \mathcal{O}(1)$.

Démonstration. — En effet, soit A dans $\text{Ob}(H(Z))$. En utilisant le triangle distingué :

$$q^*s^!f^*A \longrightarrow j_*q^*s^!f^*A \longrightarrow i_*s^!f^*A(-1)[-1] \longrightarrow$$

et la proposition 1.6.16, on déduit (par les axiomes d'une catégorie triangulée) pour tout A une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} j_*q^*s^!f^*A & \xrightarrow{\pi} & i_*s_0^!f_0^*A(-1)[-1] \\ \downarrow & \nearrow \Pi & \\ i_*s^!f^*A(-1)[-1] & & \end{array}$$

Le morphisme Π provient d'un unique morphisme :

$$\Pi : s^!f^*A \longrightarrow s_0^!f_0^*A$$

L'unicité de ce morphisme découle de l'unicité de la factorisation qui s'obtient en appliquant i^* au triangle de l'énoncé :

$$i^*j_*q^*s^!f^*A \longrightarrow s^!f^*A(-1)[-1] \longrightarrow s_0^!f_0^*A(-1)[-1]$$

et en utilisant le fait que $i^*j_*q^*s^!f^*A \simeq s^!f^*A \oplus s^!f^*A(-1)[-1]$. Il reste à prouver que ces morphismes définissent un 2-morphisme (*i.e.*, une transformation naturelle). Soit $A \longrightarrow B$ une flèche dans $H(Z)$. On a un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} i^*j_*q^*s^!f^*A & \longrightarrow & s^!f^*A(-1)[-1] & \longrightarrow & s_0^!f_0^*A(-1)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ i^*j_*q^*s^!f^*B & \longrightarrow & s^!f^*B(-1)[-1] & \longrightarrow & s_0^!f_0^*B(-1)[-1] \end{array}$$

Le carré total et le petit carré de gauche sont commutatifs car les flèches horizontales proviennent d'un 2-morphisme dans les deux cas. Mais comme $i^*j_*q^*s^!f^*C \simeq s^!f^*C \oplus s^!f^*C(-1)[-1]$ pour C égal à A ou B , on a également la commutation du petit carré de droite. Ceci montre que Π est une transformation naturelle. Enfin, pour voir que Π est un isomorphisme pour tout A il suffit de remarquer que Π appliqué à A coïncide avec les τ_A du lemme 1.6.14. \square

On termine cette sous-section par des résultats de compatibilité pour les 2-isomorphismes :

- $\Pi : s^!f^* \xrightarrow{\sim} s_0^!f_0^*$
- $\Pi : s^!f^* \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*$

Rappelons que le deuxième 2-isomorphisme est obtenu à partir du premier en prenant la composée :

$$(56) \quad s^!f^* \longrightarrow s_0^!f_0^* \xrightarrow{c^*} s_0^!pr^*g^*$$

avec $pr : \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \longrightarrow Y$ la projection du fibré normal de l'immersion s . Ces résultats de compatibilité se dérivent des trois résultats de compatibilité pour le 2-morphisme π de la sous-section précédente.

Proposition 1.6.20 (Compatibilité avec les restrictions suivant des morphismes lisses)

Sous les hypothèses de 1.6.1.1, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} u^* s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & u_0^* s_0^! f_0^* \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ t^!(f \circ v)^* & \xrightarrow{\Pi} & t_0^!(f_0 \circ v_0)^* \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$\begin{aligned} u^* s^! f^* &\xrightarrow{Ex^{!,*}} t^! v^* f^* \xrightarrow{(c^*)^{-1}} t^!(f \circ v)^* \\ u_0^* s_0^! f_0^* &\xrightarrow{Ex^{!,*}} t_0^! v_0^* f_0^* \xrightarrow{(c^*)^{-1}} t_0^!(f_0 \circ v_0)^* \end{aligned}$$

En d'autres termes, le cube ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) \\ & & \parallel & & \downarrow v^* \\ H(Z) & \xrightarrow{(fv)^*} & H(R) & & \downarrow s^! \\ \downarrow (f_0 v_0)^* & & \downarrow f_0^* & & \downarrow s_0^! \\ & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{t^!} & H(Y) \\ & \swarrow v_0^* & & \swarrow u^* = u_0^* & \\ H(\mathbb{V}(u^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{t_0^!} & H(T) & & \end{array}$$

Les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-isomorphismes de pureté. Les autres sont des 2-isomorphismes de connexions ou des 2-isomorphismes d'échange de type $Ex^{!,*}$.

Démonstration. — On considère le diagramme de 2-morphismes suivant :

$$\begin{array}{ccccc} u^* i^* j_* q^* s^! f^* & \xrightarrow{\theta} & u^* s^! f^* (-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & u_0^* s_0^! f_0^* (-1)[-1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ i^* j_* q^* t^!(f \circ v)^* & \xrightarrow{\theta} & t^!(f \circ v)^* (-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & t_0^!(f_0 \circ v_0)^* (-1)[-1] \end{array}$$

La proposition 1.6.6 nous dit que le carré total est commutatif. Il suffit alors, compte tenu de 1.6.2, de voir que le petit carré de droite est commutatif. Ceci est un exercice facile. \square

Corollaire 1.6.21. — *Sous les hypothèses de 1.6.1.1, on a un carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} u^* s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & u^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ t^!(f \circ v)^* & \xrightarrow[\Pi]{} & \mathrm{Th}^{-1}(u^* \mathcal{N}_s)(g \circ u)^* \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$\begin{aligned} u^* s^! f^* &\xrightarrow{Ex^{!,*}} t^! v^* f^* \xrightarrow{(c^*)^{-1}} t^!(f \circ v)^* \\ u^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* &\longrightarrow \mathrm{Th}^{-1}(u^* \mathcal{N}_s) u^* g^* \xrightarrow{(c^*)^{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(u^* \mathcal{N}_s)(g \circ u)^* \end{aligned}$$

Démonstration. — En effet le carré de l'énoncé se factorise de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} u^* s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & u_0^* s_0^! f_0^* & \longrightarrow & u^* s_0^! pr^* g^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ t^!(f \circ v)^* & \xrightarrow[\Pi]{} & t_0^!(f_0 \circ v_0)^* & \longrightarrow & t_0^! pr'^* (g \circ u)^* \end{array}$$

Le premier carré est commutatif par la proposition précédente. La commutation du second carré est laissée en exercice. \square

On a également la proposition suivante ainsi que son corollaire qui se démontrent exactement de la même manière que la proposition précédente et son corollaire :

Proposition 1.6.22. — *(Compatibilité avec les restrictions quelconques au niveau de la base) Sous les hypothèses de 1.6.1.2, on a un carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} a^* s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & a_0^* s_0^! f_0^* \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ s'^! f'^* a^* & \xrightarrow{\Pi} & s_0'^! f_0'^* a_0^* \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$\begin{aligned} a^* s^! f^* &\longrightarrow s'^! a^* f^* \longrightarrow s'^! f'^* a^* \\ a_0^! s_0^! f_0^* &\longrightarrow s_0'^! a_0^! f_0^* \longrightarrow s_0'^! f_0'^* a_0^! \end{aligned}$$

En d'autres termes, le cube ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) \\
 & \swarrow a_0^* = a^* & \downarrow & \swarrow a^* & \downarrow s^! \\
 H(Z') & \xrightarrow{f'^*} & H(X') & & \\
 \downarrow f_0^* & & \downarrow f_0^* & & \downarrow s'^! \\
 & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0^!} & H(Y) \\
 & \swarrow a_0^* & \downarrow & \swarrow a^* = a_0^* & \\
 H(\mathbb{V}(a^*\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0'^!} & H(Y') & &
 \end{array}$$

Les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-isomorphismes de pureté. Les autres sont des 2-isomorphismes d'échange de type $Ex^{*,*}$ ou $Ex^{*,!}$.

Corollaire 1.6.23. — Sous les hypothèses de 1.6.1.2, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 a^* s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 s'^! f'^* a^* & \xrightarrow{\Pi} & \mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) g'^* a^*
 \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$\begin{aligned}
 a^* s^! f^* &\longrightarrow s'^! a^* f^* \longrightarrow s'^! f'^* a^* \\
 a^! \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* &\longrightarrow \mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) a^! g^* \longrightarrow \mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) g'^* a^!
 \end{aligned}$$

Proposition 1.6.24. — (Compatibilité avec les sections à support) Sous les hypothèses de 1.6.1.3, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 s'^! f'^* a^! & \xrightarrow{\Pi} & s_0'^! f_0'^* a_0^! \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 a^! s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & a_0^! s_0^! f_0^*
 \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$\begin{aligned}
 s'^! f'^* a^! &\xrightarrow{Ex^{!,*}} s'^! a^! f^* \longrightarrow a^! s^! f^* \\
 s_0'^! f_0'^* a_0^! &\xrightarrow{Ex^{!,*}} s_0'^! a_0^! f_0^* \longrightarrow a_0^! s_0^! f_0^*
 \end{aligned}$$

En d'autres termes le cube ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) \\
 & \swarrow a'_0 = a' & \downarrow & \swarrow a' & \downarrow s' \\
 H(Z') & \xrightarrow{f'^*} & H(X') & & \\
 \downarrow f_0'^* & & \downarrow f_0^* & & \downarrow s_0' \\
 & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0'} & H(Y) \\
 \downarrow f_0'^* & \swarrow a'_0 & \downarrow & \swarrow a' = a'_0 & \\
 H(\mathbb{V}(a^*\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{s_0'^!} & H(Y') & &
 \end{array}$$

Les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-isomorphismes de pureté. Les autres sont des 2-isomorphismes d'échange de type $Ex^{!,*}$ ou $Ex^{!,!}$.

Démonstration. — Considérons le diagramme ci-dessus :

$$\begin{array}{ccccc}
 j_*q^*s'^!f'^*a' & \longrightarrow & i_*s'^!f'^*a'(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & i_*s_0'^!f_0'^*a'(-1)[-1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & i_*a's'^!f^*(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & i_*a's_0'^!f_0^*(-1)[-1] \\
 & & \downarrow Ex_*^! & & \downarrow Ex_*^! \\
 a'j_*q^*s'^!f^* & \longrightarrow & a'i_*s'^!f^* & \longrightarrow & a'i_*s_0'^!f_0^*
 \end{array}$$

Le carré total est commutatif par 1.6.9. Le petit carré de gauche est lui aussi commutatif. Finalement le petit carré à droite en bas est commutatif et ses flèches verticales sont des 2-isomorphismes. On construit ainsi en prenant les inverses de $Ex_*^!$ un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 j_*q^*s'^!f'^*a' & \longrightarrow & i_*s'^!f'^*a'(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & i_*s_0'^!f_0'^*a'(-1)[-1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 a'j_*q^*s'^!f^* & \longrightarrow & i_*a's'^!f^*(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & i_*a's_0'^!f_0^*(-1)[-1]
 \end{array}$$

Par construction, le carré total est commutatif et le petit carré de gauche aussi. Par adjonction entre i_* et i^* on déduit alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 i^*j_*q^*s'^!f'^*a' & \longrightarrow & s'^!f'^*a'(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & s_0'^!f_0'^*a'(-1)[-1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 i^*a'j_*q^*s'^!f^* & \longrightarrow & a's'^!f^*(-1)[-1] & \xrightarrow{\Pi} & a's_0'^!f_0^*(-1)[-1]
 \end{array}$$

On a toujours la commutativité du carré total et du petit carré de gauche. Les flèches verticales sont bien entendu des 2-isomorphismes. Étant donné que pour tout A le morphisme :

$$i^* j_* q^* (s^! f'^* a^! A) \longrightarrow s^! f'^* a^! A(-1)[-1]$$

est scindé, on déduit que le petit carré de droite du dernier diagramme est lui aussi commutatif. C'est exactement ce que l'on cherche à prouver. \square

Corollaire 1.6.25. — *Sous les hypothèses de 1.6.1.3, on a un carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} s^! f'^* a^! & \xrightarrow{\Pi} & \mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) g'^* a^! \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ a^! s^! f^* & \xrightarrow{\Pi} & a^! \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux sont de gauche à droite les composées :

$$s^! f'^* a^! \xrightarrow{Ex^{!,*}} s^! a^! f^* \longrightarrow a^! s^! f^*$$

$$\mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) g'^* a^! \xrightarrow{Ex^{!,*}} \mathrm{Th}^{-1}(a^* \mathcal{N}_s) a^! g^* \longrightarrow a^! \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*$$

Proposition 1.6.26 (Compatibilité avec l'oubli de structure). — *Sous les hypothèses de 1.6.1.4, on a un carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} s^!(b \circ f)^* & \xrightarrow{\Pi} & s_0^!(b \circ f)^* \\ c^* \downarrow \sim & & \sim \downarrow c^* \\ s^! f^* b^* & \xrightarrow{\Pi} & s_0^! f_0^* b^* \end{array}$$

Corollaire 1.6.27 (Compatibilité avec l'oubli de structure). — *Sous les hypothèses de 1.6.1.4, on a un carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} s^!(b \circ f)^* & \xrightarrow{\Pi} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(b \circ g)^* f^* \\ c^* \downarrow \sim & & \sim \downarrow c^* \\ s^! f^* b^* & \xrightarrow{\Pi} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) g^* b^* \end{array}$$

Proposition 1.6.28. — *Soient $f : V = \mathbb{V}(\mathcal{M}) \longrightarrow Y$ un fibré vectoriel sur Y (avec \mathcal{M} localement libre) et s l'immersion de la section nulle. Le fibré normal \mathcal{N}_s est canoniquement isomorphe à \mathcal{M} et le 2-isomorphisme de pureté :*

$$s^! f^* \xrightarrow{\sim} s_0^! f_0^*$$

est égal au 2-isomorphisme induit par $\mathcal{N}_s \simeq \mathcal{M}$.

Démonstration. — Ceci découle directement du théorème 1.6.19 et de la proposition 1.6.12. \square

1.6.4. Compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la composition des immersions fermées. — On suppose donné un diagramme commutatif de S -schémas :

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{t} & Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow h & \searrow g & \searrow f & \\ & & & & Z \end{array}$$

avec f , g et h lisses et s et t des immersions fermées. En prenant les cônes normaux relativement aux immersions s , $s \circ t$ et $s_0 \circ t$ on obtient respectivement les trois diagrammes commutatifs⁽¹⁸⁾ :

$$\begin{array}{ccc} T \xrightarrow{t} Y \xrightarrow{s_0} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & & T \xrightarrow{t_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) \xrightarrow{s_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{s \circ t}) \\ \searrow h \quad \searrow g \quad \searrow f_0 & & \searrow h \quad \searrow g_1 \quad \searrow f_1 \\ & & Z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{t_1} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) & \xrightarrow{s'_1} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0 \circ t}) \\ & \searrow h & \searrow g_1 & \searrow f'_1 & \\ & & & & Z \end{array}$$

et donc trois 2-isomorphismes de pureté. Le but de cette sous-section est de comprendre la relation entre ces trois 2-isomorphismes : ce que l'on appellera la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la composition des immersions fermées.

On aura besoin de l'espace de déformation au cône normal de l'immersion s . Il sera encore noté C . On gardera alors les notations du diagramme (37). Le fait qu'on puisse prouver la compatibilité de l'isomorphisme de pureté en utilisant seulement l'espace de déformation C est assez surprenant étant donné qu'il existe au moins trois autres espaces de déformations qu'on peut associer à la situation, à savoir : le double

⁽¹⁸⁾Nous nous excusons pour les mauvaises notations. Avec les notations de la sous-section précédente (*i.e.*, indiquer par 0 pour marquer le passage au cône normal d'une immersion) on a : $(s_1 \circ t_1) = (s \circ t)_0$ et $(s'_1 \circ t_1) = (s_0 \circ t)_0$.

espace de déformation pour le couple (t, s) , l'espace de déformation du cône normal de l'immersion t et celui de l'immersion $s \circ t$.

On va définir deux 2-isomorphismes : $(s \circ t)^! f^* \xrightarrow{\sim} (s_0 \circ t)^! f_0^*$. Le premier, qu'on notera Π_1 , est la composée :

$$(57) \quad \Pi_1 : (s \circ t)^! f^* \xrightarrow{c^!} t^! s^! f^* \xrightarrow{\Pi} t^! s_0^! f_0^* \xrightarrow{(c^!)^{-1}} (s_0 \circ t)^! f_0^*$$

En langage de diagrammes planaires, Π_1 est la composée :

$$(58) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{H}(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & & \\ & \nearrow f_0^* & & \searrow s_0^! & (s_0 t)^! \\ \mathbf{H}(Z) & & & & \mathbf{H}(Y) \xrightarrow{(c^!)^{-1}} \mathbf{H}(T) \\ & \searrow f^* & \nearrow \Pi \Uparrow & \nearrow c^! & \nearrow t^! \\ & & \mathbf{H}(X) & \nearrow s^! & (st)^! \end{array}$$

Pour définir le second 2-isomorphisme (qui sera noté Π_2), on remarque que le faisceau normal de l'immersion $s_0 \circ t$ est canoniquement isomorphe à $t^* \mathcal{N}_s \oplus \mathcal{N}_t$. En effet, l'extension associée à la composée $s_0 \circ t$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & t^* \mathcal{N}_{s_0} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{s_0 \circ t} & \longrightarrow & \mathcal{N}_t \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \\ & & t^* \mathcal{N}_s & & & & \end{array}$$

est canoniquement scindée *via* le morphisme $\mathcal{N}_t \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 \circ t}$ associé au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{s_0 \circ t} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\ \parallel & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{t} & Y \end{array}$$

On en déduit de là un 2-isomorphisme $\gamma : (s_1 \circ t_1)^! f_1^* \xrightarrow{\sim} (s'_1 \circ t_1)^! f_1'^*$ par la composée :

$$\begin{array}{ccccccc} (s_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 \circ t}) h^* & \xrightarrow{C_{-1}} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) h^* \\ & & \downarrow \sim & & \\ & & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_{s_0}) h^* & \xrightarrow{(C_{-1})^{-1}} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 \circ t}) h^* \xrightarrow{\sim} & (s'_1 \circ t_1)^! f_1'^* \end{array}$$

où les deux C_{-1} désignent les 2-isomorphismes de composition pour les équivalences de Thom inverses associés respectivement aux deux suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow t^* \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_{s \circ t} \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow t^* \mathcal{N}_{s_0} \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 \circ t} \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow 0$$

On définit notre 2-isomorphisme Π_2 par la composée :

$$(59) \quad \Pi_2 : (s \circ t)^! f^* \xrightarrow{\Pi} (s_1 \circ t_1)^! f_1^* \xrightarrow{\gamma} (s'_1 \circ t_1)^! f_1'^* \xrightarrow{\Pi^{-1}} (s_0 \circ t)^! f_0^*$$

Bien sûr, le premier 2-isomorphisme de pureté est celui associé à l'immersion $s \circ t$ alors que le second est celui associé à $s_0 \circ t$. En termes de diagrammes planaires Π_2 est la composée :

$$(60) \quad \begin{array}{ccccc} & H(Z) & \xlongequal{\quad} & H(Z) & \\ & \swarrow f^* & & \searrow f_1^* & \\ H(X) & \xRightarrow[\Pi]{} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow{\gamma} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0 t})) & \xRightarrow[\Pi^{-1}]{} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\ & \searrow (st)^! & \swarrow (s_1 t_1)^! & \searrow (s'_1 t_1)^! & \swarrow (s_0 t)^! & \\ & H(T) & \xlongequal{\quad} & H(T) & \end{array}$$

Le résultat principal de cette sous-section s'énonce alors :

Théorème 1.6.29. — *Les deux 2-isomorphismes Π_1 et Π_2 sont égaux.*

Avant de se lancer dans la preuve, rappelons que l'on avait noté C l'espace de déformation au cône normal associée à l'immersion fermée $s : Y \longrightarrow X$. On a les inclusions des diagrammes :

$$(61) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_T^1 & \xrightarrow{\hat{t}} & \mathbb{A}_Y^1 \xrightarrow{\hat{s}} C \\ & & \downarrow \hat{f} \\ & & \mathbb{A}_Z^1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \nearrow i & & \nwarrow j \\ T \xrightarrow{t} Y \xrightarrow{s_0} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & & \mathbb{E}_T^1 \xrightarrow{\tilde{t}} \mathbb{E}_Y^1 \xrightarrow{\tilde{s}} \mathbb{E}_X^1 \\ & \downarrow f_0 & \downarrow \tilde{f} \\ & Z & \mathbb{E}_Z^1 \end{array}$$

1.6.4.1. *Le 2-morphisme π' . Réduction du problème.* — On aura besoin d'un analogue du 2-morphisme π de la sous-section 1.6.1. On définit à partir du 2-morphisme π un 2-morphisme π' :

$$\pi' : j_* q^*(s \circ t)! f^* \longrightarrow i_*(s_0 \circ t)! f_0^*(-1)[-1]$$

par la condition que le diagramme suivant soit commutatif :

$$(62) \quad \begin{array}{ccc} \hat{t}^! j_* q^* s^! f^* & \xrightarrow{\pi} & \hat{t}^! i_* s_0^! f_0^*(-1)[-1] \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ j_* q^*(s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{\pi'} & i_*(s_0 \circ t)^! f_0^*(-1)[-1] \end{array}$$

Les 2-isomorphismes verticaux étant de gauche à droite les composées :

$$\hat{t}! j_* q^* s! \xrightarrow{Ex_*^!} j_* \hat{t}! q^* s! \xrightarrow{(Ex_*^!, *)^{-1}} j_* q^* t! s! \xrightarrow{(c^!)^{-1}} j_* q^* (s \circ t)!$$

et

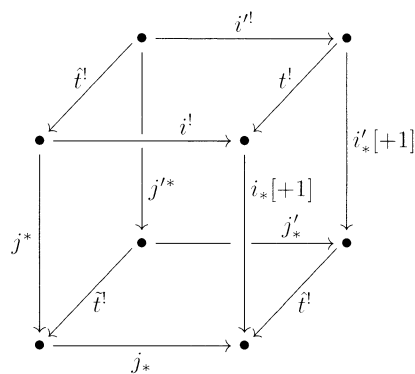
$$\hat{t}! i_* s_0! \xrightarrow{Ex_*^!} i_* t! s_0! \xrightarrow{(c^!)^{-1}} i_*(s_0 \circ t)!$$

En utilisant la commutation de $\omega(q^* \mathcal{N}_S, t^{-1})$ avec le 1-morphisme $\tilde{t}^!$ (voir la proposition 1.5.25), on voit que le 2-morphisme π' est la composée du diagramme planaire :

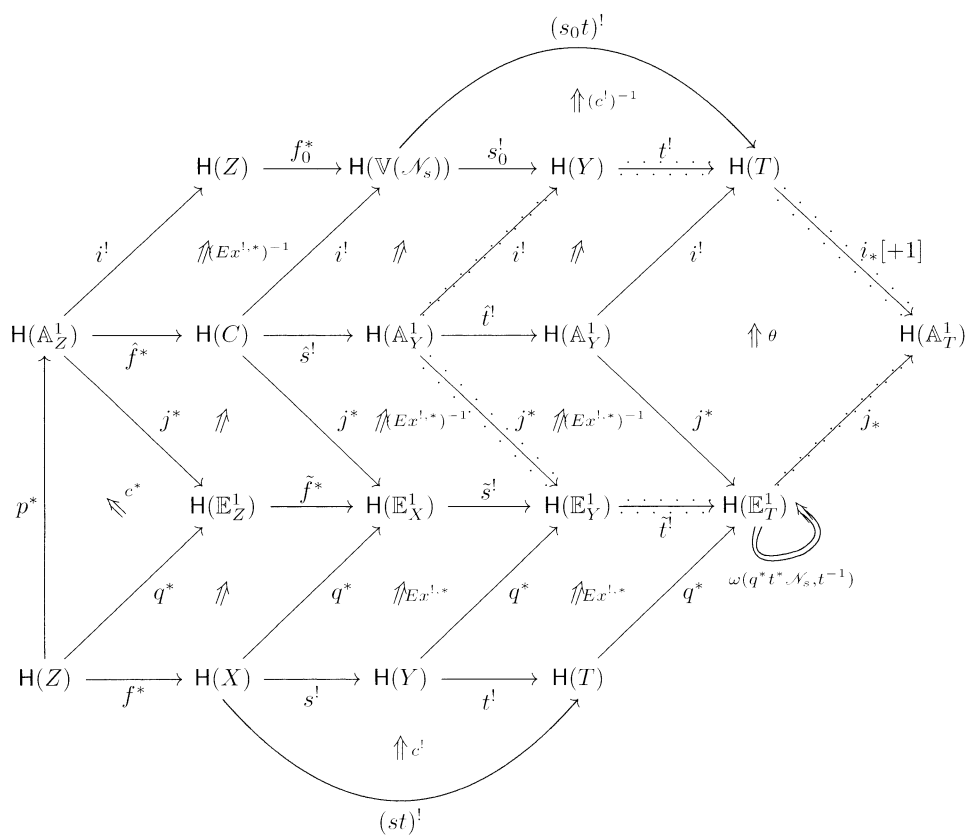
(63)

[illegible]

En utilisant la commutativité du cube :



on peut remplacer la partie en pointillé dans le diagramme planaire (63) par celle en pointillé dans le diagramme planaire ci-dessous sans changer la composition :



Enfin, en utilisant la compatibilité des morphismes d'échange $Ex^{1,*}$ avec la composition des carrés on voit que π' est aussi la composée du diagramme planaire :

$$(64) \quad \begin{array}{ccccccc} & & H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{(s_0 t)^!} & H(T) \\ & \nearrow i^! & \nearrow \nearrow (Ex^{1,*})^{-1} & \nearrow i^! & \nearrow \nearrow & \nearrow i^! & \searrow i_*[+1] \\ H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C) & \xrightarrow{(\hat{s} \hat{t})^!} & H(\mathbb{A}_T^1) & & H(\mathbb{A}_T^1) \\ & \searrow j^* & \nearrow \nearrow & \searrow j^* & \nearrow \nearrow (Ex^{1,*})^{-1} & \searrow j^* & \nearrow j_* \\ & \searrow \searrow c^* & H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_X^1) & \xrightarrow{(\tilde{s} \tilde{t})^!} & H(\mathbb{E}_T^1) \\ & \nearrow q^* & \nearrow \nearrow & \nearrow q^* & \nearrow \nearrow Ex^{1,*} & \nearrow q^* & \nearrow \nearrow \omega(q^* t^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) \\ H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) & \xrightarrow{(st)^!} & H(T) & & \end{array}$$

Revenons maintenant à la preuve du théorème 1.6.29. On forme les deux triangles (un pour chaque $i \in \{1, 2\}$) :

$$(\star_i) \quad \begin{array}{ccc} j_* q^* (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{\pi'} & i_*(s_0 \circ t)^! f_0^* (-1)[-1] \\ \theta \downarrow & \nearrow \Pi_i & \\ i_*(s \circ t)^! f^* (-1)[-1] & & \end{array}$$

On a le lemme :

Lemme 1.6.30. — Pour prouver le théorème 1.6.29, il suffira de prouver que les deux triangles (\star_1) et (\star_2) sont commutatifs.

Démonstration. — En effet, puisque $i^* j_* q^* A \simeq A \oplus A(-1)[-1]$ (voir le corollaire 1.6.2) il existe au plus un seul 2-morphisme (?) tel que le triangle :

$$\begin{array}{ccc} j_* q^* (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{\pi'} & i_*(s_0 \circ t)^! f_0^* (-1)[-1] \\ \theta \downarrow & \nearrow (?) & \\ i_*(s \circ t)^! f^* (-1)[-1] & & \end{array}$$

soit commutatif. Donc si les deux triangles (\star_1) et (\star_2) sont commutatifs, on a forcément l'égalité $\Pi_1 = \Pi_2$. \square

1.6.4.2. *La commutation du premier triangle.* — On va prouver que le triangle :

$$\begin{array}{ccc}
 j_* q^* (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{\pi'} & i_* (s_0 \circ t)^! f_0^* (-1)[-1] \\
 \theta \downarrow & \nearrow \Pi_1 & \\
 i_* (s \circ t)^! f^* (-1)[-1] & &
 \end{array}
 \quad (\star_1)$$

est commutatif. Pour cela considérons le diagramme planaire suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) \\
 & \swarrow f^* & \downarrow f_0^* & \nearrow Ex^{**} & \downarrow f_0^* & \nearrow (Ex^!)^{-1} & \downarrow f_0^* \\
 H(X) & \xRightarrow{\Pi} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{V}(p^* \mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{i^!} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\
 & \searrow s^! & \downarrow s_0^! & \nearrow Ex^{!*} & \downarrow s_0^! & \nearrow Ex^{!!} & \downarrow s_0^! \\
 & \Rightarrow & H(Y) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Y^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Y) \\
 & \searrow (st)^! & \downarrow t^! & \nearrow c^* & \downarrow j^* & \nearrow i_*[+1] & \downarrow t^! \\
 & & H(T) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{E}_Y^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_Y^1) \\
 & & \downarrow q^* & \nearrow Ex^{!*} & \downarrow \tilde{t}^! & \nearrow Ex_*^! & \downarrow \hat{t}^! \\
 & & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_T^1) & &
 \end{array}$$

$\Rightarrow (s_0 t)^! (c^!)^{-1}$
 $i_*[+1]$

La composée de la partie du diagramme planaire (65) située entre les deux 1-morphismes :

$$(66) \quad H(Z) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_Z^1) \xrightarrow{i^!} H(Z) \xrightarrow{f_0^*} H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \xrightarrow{s_0^!} H(Y) \xrightarrow{i_*[+1]} H(\mathbb{A}_Y^1)$$

et

$$(67) \quad \mathbf{H}(Z) \xrightarrow{f^*} \mathbf{H}(X) \xrightarrow{s^!} \mathbf{H}(Y) \xrightarrow{q^*} \mathbf{H}(\mathbb{E}_Y^1) \xrightarrow{j_*} \mathbf{H}(\mathbb{A}_Y^1)$$

(i.e. la partie en pointillés) est égale (par définition) à la composée des 2-morphismes :

$$j_* q^* s^! f^* \xrightarrow{\theta} i_* s^! f^*(-1)[-1] \xrightarrow{\Pi} i_* s_0^! f_0^*(-1)[-1]$$

Mais d'après le théorème 1.6.19, le triangle suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} j_* q^* s^! f^* & \xrightarrow{\pi} & i_* s_0^! f_0^*(-1)[-1] \\ \theta \downarrow & \nearrow \Pi & \\ i_* s^! f^*(-1)[-1] & & \end{array}$$

Il vient que la composée de la partie en pointillé du diagramme représente le 2-morphisme π . On en déduit alors en revenant aux définitions que la composée du diagramme planaire (65) est exactement notre 2-morphisme π' . Il suffira ainsi de prouver que la composée du diagramme planaire (65) est aussi égale à :

$$j_* q^* (s \circ t)^! f^* \xrightarrow{\theta} (s \circ t)^! f^*(-1)[-1] \xrightarrow{\Pi_1} (s_0 \circ t)^! f_0^*(-1)[-1]$$

En utilisant le cube commutatif de la proposition⁽¹⁹⁾ 1.4.20 :

⁽¹⁹⁾Attention aux notations : les morphismes s sont dans notre contexte les morphismes t , \hat{t} , etc.

$$\begin{array}{ccccccc}
H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) & & \\
\swarrow f^* & & \searrow f_0^* & \nearrow \nearrow_{Ex^{**}} & \searrow f_0^* & \nearrow \nearrow_{(Ex^{1*})^{-1}} & \searrow f_0^* \\
H(X) & & H(V(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{p^*} & H(V(p^*\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{i^!} & H(V(\mathcal{N}_s)) \\
\searrow s^! & \Rightarrow \Pi & \swarrow s_0^! & \nearrow \nearrow_{Ex^{1*}} & \swarrow s_0^! & \nearrow \nearrow_{Ex^{!!}} & \swarrow s_0^! \\
\Rightarrow (st)^! & \Rightarrow c^! & H(Y) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Y^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Y) \\
\searrow & & \swarrow q^* & \nearrow \nearrow_{c^*} & \swarrow j^* & \nearrow \nearrow_{(Ex^{1*})^{-1}} & \swarrow t^! \\
H(T) & \nearrow \nearrow_{Ex^{1*}} & H(\mathbb{E}_Y^1) & \Rightarrow & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) \\
\searrow q^* & & \downarrow \tilde{t}^! & \nearrow \nearrow_{j^*} & \searrow \nearrow_{\theta} & & \downarrow i_*[+1] \\
& & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_T^1) & &
\end{array}$$
$$\begin{array}{ccccccc}
H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) & & \\
\swarrow f^* & & \searrow f_0^* & \nearrow \nearrow_{Ex^{**}} & \searrow f_0^* & \nearrow \nearrow_{(Ex^{1*})^{-1}} & \searrow f_0^* \\
H(X) & \xRightarrow{\Pi} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{i^!} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\
\searrow s^! & & \nearrow s_0^! & \nearrow \nearrow_{Ex^{1*}} & \searrow s_0^! & \nearrow \nearrow_{Ex^{!!}} & \searrow s_0^! \\
& \Rightarrow & H(Y) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Y^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Y) \\
& \searrow (st)^! & \nearrow c^! & \nearrow \nearrow_{Ex^{1*}} & \searrow t^! & \nearrow \nearrow_{Ex^{!!}} & \searrow t^! \\
& & H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) \\
& & \nearrow q^* & \nearrow (c^*)^{-1} \uparrow & \nearrow j^* & \nearrow \nearrow_{\theta} & \searrow i_*[+1] \\
& & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_T^1) & &
\end{array}$$

En utilisant la compatibilité des 2-morphismes d'échange $Ex^{! \cdot !}$ puis $Ex^{! \cdot *}$ avec la composition des carrés (induites par la composée $s_0 \circ t$), on voit que la partie en pointillé du diagramme (69) peut être remplacée par la partie en pointillés du diagramme planaire suivant sans que le 2-morphisme composée change :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) \\
 & \swarrow f^* & & \searrow f_0^* & \nearrow \nearrow_{Ex^{**}} & \searrow f_0^* & \nearrow f_0^* \\
 H(X) & & & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_s)) \xrightarrow{i^!} H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\
 & \searrow s^! & \Rightarrow & \nearrow s_0^! & & & \\
 & & H(Y) & \Rightarrow & & & \\
 & \nearrow (st)^! & \Rightarrow_{c^!} & \searrow (c')^{-1} & \nearrow (s_0 t)^! & & \\
 & & H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) \\
 & \searrow q^* & \nearrow (c^*)^{-1} & \nearrow j^* & \nearrow \nearrow_{\theta} & \searrow i_*[+1] \\
 & & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j_*} & H(\mathbb{A}_T^1) & &
 \end{array}$$

En découpant le diagramme planaire précédent suivant la ligne :

$$H(Z) \xrightarrow{f_0^*} H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \xrightarrow{(s_0 t)^!} H(T) \xrightarrow{q^*} H(\mathbb{E}_T^1) \xrightarrow{j_*} H(\mathbb{A}_T^1)$$

on obtient la factorisation recherchée :

$$j_* q^* (s \circ t)^! f^* \xrightarrow{\theta} i_*(s \circ t)^! f^*(-1)[-1] \xrightarrow{\Pi_1} i_*(s_0 \circ t)^! f_0^*(-1)[-1]$$

On a ainsi prouvé la commutation du premier triangle.

1.6.4.3. La commutation du second triangle. — On aura besoin d'un nouveau 2-isomorphisme "de pureté" w . Pour le définir on rappelle les notations suivantes :

$$(70) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_T^1 & \xrightarrow{\hat{t}} & \mathbb{A}_Y^1 \xrightarrow{\hat{s}} C \\ & & \downarrow \hat{f} \\ & & \mathbb{A}_Z^1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}_T^1 & \xrightarrow{\tilde{t}} & \mathbb{A}_Y^1 \xrightarrow{\tilde{s}} \mathbb{A}_X^1 \\ & & \downarrow \tilde{f} \\ & & \mathbb{A}_Z^1 \end{array}$$

Le premier des deux diagrammes ci-dessus n'est autre que la déformation au cône normal (voir le diagramme (61)). On dispose ainsi de deux suites exactes canoniques :

$$0 \longrightarrow \hat{t}^* \mathcal{N}_{\hat{s}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\hat{s} \circ \hat{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\hat{t}} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \check{t}^* \mathcal{N}_{\check{s}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\check{s} \circ \check{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\check{t}} \longrightarrow 0$$

Comme $\hat{t} = \check{t}$ on a clairement $\mathcal{N}_{\hat{t}} = \mathcal{N}_{\check{t}}$. Par le lemme 1.6.17, le faisceau $\mathcal{N}_{\hat{s}}$ s'identifie canoniquement à $(p^* \mathcal{N}_s) t^{-1}$. On déduit alors un isomorphisme $\mathcal{N}_{\hat{s}} \simeq p^* \mathcal{N}_s \xrightarrow{- \times t^{-1}} (p^* \mathcal{N}_s) t^{-1} \simeq \mathcal{N}_{\check{s}}$ induisant un isomorphisme $b : \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\check{s}})$.

On indicera par co chaque fois qu'on passe au cône normal⁽²⁰⁾. Ainsi \hat{f}_{co} (resp. \check{f}_{co}) est la projection de $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s} \circ \hat{t}})$ (resp. $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\check{s} \circ \check{t}})$) sur $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$. On notera $\Gamma : (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* \xrightarrow{\sim} (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^*$ le 2-isomorphisme composé :

$$\begin{aligned} (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\check{s} \check{t}}) \hat{h}^* \xrightarrow{C_{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\check{t}^* \mathcal{N}_{\check{s}}) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\check{t}}) \hat{h}^* \\ &\quad \downarrow \omega_{-1}(b) \circ \omega_{-1}(\mathrm{id}) \\ &\quad \mathrm{Th}^{-1}(\hat{t}^* \mathcal{N}_{\hat{s}}) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\hat{t}}) \hat{h}^* \xrightarrow{(C_{-1})^{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\hat{s} \hat{t}}) \hat{h}^* \xrightarrow{\sim} (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^* \end{aligned}$$

Remarquons que les pull-back suivant i de \check{s}_{co} , \check{t}_{co} , \hat{s}_{co} et \hat{t}_{co} sont respectivement s_1 , t_1 , s'_1 et t_1 . De même les pull-back suivant j des mêmes morphismes sont respectivement \tilde{s}_{co} , \tilde{t}_{co} , \tilde{s}_{co} et \tilde{t}_{co} .

Notons immédiatement le lemme suivant :

Lemme 1.6.31. — *Les deux diagrammes :*

$$\begin{array}{ccccc} i^! (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* p^* & \longrightarrow & s_1^! t_1^! f_1^* i^! p^* & & \\ i^! \Gamma \downarrow & & \downarrow \gamma & & \\ i^! (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^* p^* & \longrightarrow & (s'_1 t_1)^! f_1^* i^! p^* & & \\ \\ j^* (\check{s}_{co} \check{t}_{co})^! \check{f}_{co}^* p^* & \longrightarrow & (\tilde{s}_{co} \tilde{t}_{co})^! \tilde{f}_{co}^* q^* & \longrightarrow & q^* (s_1 \circ t_1)^! f_1^* \\ j^* \Gamma \downarrow & & \downarrow \omega(q^* t^* \mathcal{N}_s, \frac{1}{t}) & & \downarrow \omega(q^* t^* \mathcal{N}_s, \frac{1}{t}) \\ [6pt] j^* (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^* p^* & \longrightarrow & (\tilde{s}_{co} \tilde{t}_{co})^! \tilde{f}_{co}^* q^* & \longrightarrow & q^* (s_1 \circ t_1)^! f_1^* \end{array}$$

sont commutatifs.

⁽²⁰⁾ On aurait pu également indiquer par 0 comme on l'a fait jusqu'à présent. On espère que ce choix facilitera un peu la lecture.

Démonstration. — La commutation du premier carré découle immédiatement du fait que les fibres au-dessus de la section nulle de \mathbb{A}^1 des extensions :

$$0 \longrightarrow \hat{t}^* \mathcal{N}_{\tilde{s}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{s} \circ \hat{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{t}} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \check{t}^* \mathcal{N}_{\tilde{s}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{s} \circ \check{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{t}} \longrightarrow 0$$

sont canoniquement isomorphes aux extensions :

$$0 \longrightarrow t^* \mathcal{N}_{s_0} \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 \circ t} \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow t^* \mathcal{N}_{\tilde{s}} \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 \circ t} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{t}} \longrightarrow 0$$

et que la fibre de l'isomorphisme b est l'isomorphisme évident $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0}) \simeq \mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{s}})$ utilisé dans la définition de γ .

Démontrons la commutation du second diagramme. Les fibres au-dessus de $\mathbb{E}^1 \subset \mathbb{A}^1$ des extensions :

$$0 \longrightarrow \hat{t}^* \mathcal{N}_{\tilde{s}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{s} \circ \hat{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{t}} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \check{t}^* \mathcal{N}_{\tilde{s}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{s} \circ \check{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{t}} \longrightarrow 0$$

sont canoniquement isomorphes à l'extension :

$$0 \longrightarrow \tilde{t}^* \mathcal{N}_{\tilde{s}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{s} \circ \tilde{t}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\tilde{t}} \longrightarrow 0$$

De plus, modulo les identifications canoniques $j^* \mathcal{N}_{\tilde{s}} \simeq \mathcal{N}_{\tilde{s}}$ et $j^* \mathcal{N}_{\tilde{s}} \simeq \mathcal{N}_{\tilde{s}}$ l'isomorphisme b correspond à $\mathbb{V}(- \times t^{-1})$ par le lemme 1.6.17.

Il vient que modulo les isomorphismes canoniques $j_*(\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! \tilde{f}_{co}^* p^* \simeq (\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! \tilde{f}_{co}^* q^*$ et $j_*(\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^* p^* \simeq (\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! \tilde{f}_{co}^* q^*$, l'isomorphisme $j^* \Gamma$ est la composée :

(71)

$$\begin{aligned} (\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! \tilde{f}_{co}^* &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}\tilde{t}}) \hat{h}^* \xrightarrow{C_{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\tilde{t}^* \mathcal{N}_{\tilde{s}}) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{t}}) \tilde{h}^* \\ &\quad \downarrow \omega_{-1}(q^* t^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) \\ &\quad \mathrm{Th}^{-1}(\tilde{t}^* \mathcal{N}_{\tilde{s}}) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{t}}) \tilde{h}^* \xrightarrow{(C_{-1})^{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\tilde{s}\tilde{t}}) \tilde{h}^* \xrightarrow{\sim} (\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! \tilde{f}_{co}^* \end{aligned}$$

En considérant $\omega_{-1}(q^* t^* \mathcal{N}_s, t^{-1}) = \omega(q^* t^* \mathcal{N}_s, t^{-1})$ comme un 2-automorphisme du 1-morphisme identité de $\mathbf{H}(\mathbb{E}_T^1)$, on peut simplifier dans la composée précédente C_{-1} et $(C_{-1})^{-1}$. Ceci montre que la composée de (71) est simplement le 2-automorphisme $\omega(q^* t^* \mathcal{N}_s, t^{-1})$ de $(\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! \tilde{f}_{co}^*$. Le lemme est prouvé. \square

On prend pour le 2-isomorphisme w la composée suivante :

$$w : p^*(s \circ t)^! f^* \xrightarrow{\sim} (\tilde{s} \circ \tilde{t})^! \tilde{f}^* p^* \xrightarrow{\Pi} (\tilde{s}_{co} \circ \tilde{t}_{co})^! \tilde{f}_{co}^* p^* \xrightarrow{\Gamma} (\hat{s}_{co} \circ \hat{t}_{co})^! \hat{f}_{co}^* p^* \xrightarrow{\Pi^{-1}} (\hat{s} \circ \hat{t})^! \hat{f}^* p^*$$

En d'autres termes w est la composée du diagramme planaire :

(72)

$$\begin{array}{ccccccc} H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_Z^1) & & \\ & \searrow f^* & \nearrow \tilde{f}^* & \searrow \tilde{f}_{co}^* & \nearrow \hat{f}_{co}^* & \searrow \hat{f}^* & \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xRightarrow[\Pi]{} & H(\mathbb{V}(p^* \mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow[\Gamma]{} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{st}})) \xRightarrow[\Pi^{-1}]{} H(C) \\ & \searrow (st)^! & \nearrow \not\approx_{Ex^!} & \searrow (\tilde{s}\tilde{t})^! & \nearrow (\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \searrow (\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^! & \nearrow (\hat{s}\hat{t})^! \\ H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_T^1) & & \end{array}$$

On commence par le résultat ci-dessous qui affirme que « w prolonge le 2-isomorphisme Π_2 » :

Lemme 1.6.32. — *Le carré de 2-isomorphismes suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} i^! p^*(s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{\sim} & (s \circ t)^! f^*(-1)[-2] \\ i^!(w) \downarrow & & \downarrow \Pi_2 \\ i^!(\hat{s} \circ \hat{t})^! \hat{f}^* p^* & \xrightarrow{\sim} & (s_0 \circ t)^! f_0^*(-1)[-2] \end{array}$$

(Rappelons que par définition : $(-1)[-2] = i^! p^* .$)

Démonstration. — La composée du diagramme planaire :

(73)

$$\begin{array}{ccccccc} H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) \\ & \searrow f^* & \nearrow \tilde{f}^* & \searrow \tilde{f}_{co}^* & \nearrow \hat{f}_{co}^* & \searrow \hat{f}^* & \nearrow \not\approx_{(Ex^!)^{-1}} f_0^* \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xRightarrow[\Pi]{} & H(\mathbb{V}(p^* \mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow[\Gamma]{} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{st}})) \xRightarrow[\Pi^{-1}]{} H(C) \xrightarrow{i^!} H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\ & \searrow (st)^! & \nearrow \not\approx_{Ex^!} & \searrow (\tilde{s}\tilde{t})^! & \nearrow (\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \searrow (\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^! & \nearrow (\hat{s}\hat{t})^! \nearrow \not\approx (s_0 t)^! \\ H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) \end{array}$$

est égale à la composée :

$$i^! p^*(s \circ t)^! f^* \xrightarrow{w} i^!(\hat{s} \circ \hat{t})^! \hat{f}^* p^* \longrightarrow (s_0 \circ t)^! f_0^*(-1)[-2]$$

Il s'agit donc de prouver que la composée du diagramme planaire (73) est égale à la composée :

$$i^! p^* (s \circ t)^! f^* \longrightarrow (s \circ t)^! f^* (-1)[-2] \xrightarrow{\Pi_2} (s_0 \circ t)^! f_0^* (-1)[-2]$$

On remarque d'abord qu'on a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & \xrightarrow{i} & C \\ f_0 \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\ Z & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_Z^1 \end{array}$$

La proposition 1.6.24 appliquée à l'immersion fermée i nous donne alors un cube commutatif :

$$(74) \quad \begin{array}{ccccc} & & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C) \\ & \swarrow i^! & \downarrow & & \downarrow i^! \\ H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(X) & & H(C) \\ & \downarrow \hat{f}_{co}^* & \downarrow (s_0 t)^! & & \downarrow (\hat{s} \hat{t})^! \\ & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s} \hat{t}})) & \xrightarrow{(\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^!} & H(\mathbb{A}_T^1) \\ & \swarrow i^* & \downarrow & \swarrow i^! & \\ H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0 t})) & \xrightarrow{(s'_1 t_1)^!} & H(T) \end{array}$$

Les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-isomorphismes de pureté. Les autres sont des 2-isomorphismes d'échange de type $Ex^{!,*}$ ou $Ex^{!!,!}$. On peut donc remplacer le diagramme planaire (73) par le diagramme planaire ci-dessous sans changer la composée :

$$(75) \quad \begin{array}{ccccccc} H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\ \downarrow f^* & \nearrow & \downarrow \hat{f}_{co}^* & \nearrow & \downarrow \hat{f}_{co}^* & \nearrow & \downarrow f_0^* \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{s} \hat{t}})) & \xrightarrow{(\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^!} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0 t})) \\ \downarrow (st)^! & \nearrow & \downarrow (\hat{s} \hat{t})^! & \nearrow & \downarrow (\hat{s}_{co} \hat{t}_{co})^! & \nearrow & \downarrow (s'_1 t_1)^! \\ H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \end{array}$$

En utilisant le premier diagramme commutatif du lemme 1.6.31, on voit qu'on peut remplacer (75) par le diagramme planaire suivant sans changer la composée :

(76)

$$\begin{array}{ccccccc}
 H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) & \xlongequal{\quad} & H(Z) \\
 \swarrow f^* & \nearrow \check{f}^* & \searrow \check{f}_{co}^* & \nearrow (Ex^{!*})^{-1} & \searrow f_1^* & & \swarrow f_1'^* \\
 H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xRightarrow[\Pi]{} & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{i^!} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{st})) \xRightarrow[\Pi^{-1}]{} H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0t})) \xRightarrow[\Pi^{-1}]{} H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\
 \downarrow (st)^! & \nearrow \check{f}_{Ex^{!*}} & \downarrow (\check{st})^! & \nearrow (\check{s}_{co}\check{t}_{co})^! & \downarrow (s_1t_1)^! & & \downarrow (s_1't_1)^! \\
 H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) & \xlongequal{\quad} & H(T)
 \end{array}$$

En appliquant encore une fois la proposition 1.6.24 à l'immersion i dans le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_X^1 \\
 f \downarrow & & \downarrow \check{f} \\
 Z & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_Z^1
 \end{array}$$

on obtient le cube commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\check{f}^*} & H(\mathbb{A}_X^1) \\
 & \swarrow i^! & \downarrow & \swarrow i^! & \downarrow (\check{st})^! \\
 H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(X) & & \\
 \downarrow \check{f}_{co}^* & & \downarrow (st)^! & & \downarrow (\check{s}_{co}\check{t}_{co})^! \\
 & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{(s_1t_1)^!} & H(\mathbb{A}_T^1) \\
 \downarrow f_1^* & \swarrow i^* & \downarrow i^! & & \downarrow i^! \\
 H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{(s_1t_1)^!} & H(T) & &
 \end{array}$$

On voit que la composée de (76) est égale à la composée du diagramme planaire suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{i^!} & H(Z) & \xlongequal{\quad} & H(Z) \\
 \swarrow f^* & \nearrow \check{f}^* & \searrow \check{f}_{co}^* & \nearrow (Ex^{!*})^{-1} & \searrow f_1^* & & \swarrow f_1'^* \\
 H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xRightarrow[\Pi]{} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{i^!} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0t})) \xRightarrow[\Pi^{-1}]{} H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_s)) \\
 \downarrow (st)^! & \nearrow \check{f}_{Ex^{!*}} & \downarrow (\check{st})^! & \nearrow (\check{s}_{co}\check{t}_{co})^! & \downarrow (s_1t_1)^! & & \downarrow (s_1't_1)^! \\
 H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{i^!} & H(T) & \xlongequal{\quad} & H(T)
 \end{array}$$

On reconnaît dans la partie en pointillé le 2-morphisme Π_2 (voir (60)). Ceci nous donne la factorisation recherchée :

$$i^!p^*(s \circ t)^!f^* \longrightarrow (s \circ t)^!f^*(-1)[-2] \xrightarrow{\Pi_2} (s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-2]$$

Le lemme est prouvé. \square

Rappelons que notre but est de prouver que le triangle (\star_2) est commutatif ce qui veut dire que la composée :

$$j_*q^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{\theta} i_*(s \circ t)^!f^*(-1)[-1] \xrightarrow{\Pi_2} i_*(s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-1]$$

est égale au 2-morphisme π' . Le 2-morphisme θ en question est la composée :

$$\begin{aligned} j_*q^*(s \circ t)^!f^* &\xrightarrow{c^*} j_*j^*p^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{\theta} i_*i^!p^*(s \circ t)^!f^*[+1] \\ &\longrightarrow i_*(s \circ t)^!f^*(-1)[-1] \end{aligned}$$

où θ est le 2-morphisme donné par la proposition 1.4.9. On veut donc montrer que π' est égal à la composée :

$$\begin{aligned} j_*q^*(s \circ t)^!f^* &\xrightarrow{c^*} j_*j^*p^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{\theta} i_*i^!p^*(s \circ t)^!f^*[+1] \\ &\longrightarrow i_*(s \circ t)^!f^*(-1)[-1] \xrightarrow{\Pi_2} i_*(s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-1] \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, la composée des deux dernières flèches est égale à :

$$i^!p^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{w} i^!(\hat{s} \circ \hat{t})^!\hat{f}^*p^* \longrightarrow (s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-2]$$

modulo l'application du 1-morphisme i_* . Ainsi, il faut montrer que π' est égal à la composée :

(77)

$$\begin{aligned} j_*q^*(s \circ t)^!f^* &\xrightarrow{c^*} j_*j^*p^*(s \circ t)^!f^* \xrightarrow{\theta} i_*i^!p^*(s \circ t)^!f^*[+1] \\ &\xrightarrow{w} i_*i^!(\hat{s} \circ \hat{t})^!\hat{f}^*p^*[+1] \longrightarrow i_*(s_0 \circ t)^!f_0^*(-1)[-1] \end{aligned}$$

La composée (77) est égale à la composée du diagramme planaire suivant :

(78)

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & H(Z) & \xrightarrow{f_0^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_S)) & \xrightarrow{(s_0 t)^!} & H(T) \\
& & \nearrow i^! & & \nearrow (Ex^! \circ)^{-1} & \nearrow i^! & \nearrow Ex^! \circ i^! & \\
& & & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C) & \xrightarrow{(\hat{s} \hat{t})^!} & H(\mathbb{A}_T^1) \\
& & & & \nearrow \hat{w} & & \nearrow c^* & \\
& & & & & & & H(\mathbb{E}_T^1) \\
& & & & & & & \nearrow j_* \\
& & & & & & & H(\mathbb{A}_T^1) \\
& & & & & & \nearrow \theta & \\
& & & & & & & H(T) \\
& & & & & & & \nearrow i_*[+1] \\
& & & & & & & H(\mathbb{A}_T^1)
\end{array}$$

En inspectant le diagramme planaire (64), dont la composée vaut le 2-morphisme π' , on voit facilement qu'il suffit de prouver l'égalité des composées des deux diagrammes planaires ci-dessus :

$$(79) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{H}(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & \mathbf{H}(C) & \xrightarrow{(\hat{s}\hat{t})^!} & \mathbf{H}(\mathbb{A}_T^1) \\ & \nearrow p^* & & \nwarrow w & & \nearrow p^* & \nwarrow j^* \\ \mathbf{H}(Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathbf{H}(X) & \xrightarrow{(st)^!} & \mathbf{H}(T) & \xrightarrow{q^*} & \mathbf{H}(\mathbb{E}_T^1) \\ & & & & & \uparrow c^* & \end{array}$$

$$(80) \quad \begin{array}{ccccccc} H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(C) & \xrightarrow{(\hat{s}\hat{t})^!} & H(\mathbb{A}_T^1) \\ & \searrow j^* & \uparrow & \searrow j^* & \uparrow (Ex^!, *)^{-i} & \searrow j^* \\ p^* \uparrow & \nearrow c^* & H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_X^1) & \xrightarrow{(\tilde{s}\tilde{t})^!} & H(\mathbb{E}_T^1) \\ & \nearrow q^* & \uparrow & \nearrow q^* & \uparrow Ex^!, * & \nearrow q^* & \omega(q^* t^* \mathcal{N}_\circ, t^{-1}) \\ H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) & \xrightarrow{(st)^!} & H(T) \end{array}$$

En supprimant la partie en pointillé du diagramme planaire (79) (resp. (80)) et en attachant son inverse au diagramme planaire (80) (resp. (79)) on voit qu'il est équivalent de montrer l'égalité des composées des deux diagrammes planaires suivants :

(81)

$$\begin{array}{ccccc}
H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_X^1) & \xrightarrow{(\tilde{st})^!} & H(\mathbb{E}_T^1) \\
\uparrow j^* & \nearrow & \uparrow j^* & \nearrow Ex^{1,*} & \uparrow j^* \\
H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C) & \xrightarrow{(\hat{st})^!} & H(\mathbb{A}_T^1) \\
\uparrow p^* & \nearrow w & \uparrow p^* & & \uparrow p^* \\
H(Z) & \xrightarrow{f^*} & H(X) & \xrightarrow{(st)^!} & H(T)
\end{array}$$

Pour montrer cela, on revient à la définition du 2-isomorphisme w : le premier de ces deux diagrammes planaires (81) s'écrit alors :

(82)

$$\begin{array}{ccccccc}
H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_Z^1) \\
\swarrow f^* & \nearrow & \searrow \check{f}^* & & \searrow \hat{f}_{co}^* & & \searrow \hat{f}^* \\
H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xRightarrow{\quad \Pi \quad} & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow{\quad \Gamma \quad} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{st}})) \\
\searrow (st)^! & \nearrow \nearrow_{Ex^!} & \searrow (\check{st})^! & & \searrow (\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^! & & \searrow (\hat{s}\hat{t})^! \\
H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1) \\
& & \searrow \check{p}^* & & \searrow \hat{j}^* & & \searrow \hat{j}^* \\
& & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xRightarrow{\quad \Gamma \quad} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{st}})) & \xRightarrow{\quad \Pi^{-1} \quad} & H(C) \\
& & \searrow (\check{s}_{co}\check{t}_{co})^! & & \searrow (\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^! & & \searrow (\hat{s}\hat{t})^! \\
& & H(\mathbb{A}_T^1) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1)
\end{array}$$

On procède alors comme dans la démonstration du lemme 1.6.32. On remarque d'abord qu'on a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_X^1 & \xrightarrow{j} & C \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\ \mathbb{E}_Z^1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_Z^1 \end{array}$$

En appliquant la proposition 1.6.22 on obtient un cube commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\hat{f}^*} & H(C) \\
 & \swarrow j^* & \downarrow & \swarrow j^* & \downarrow \\
 H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_X^1) & & \downarrow (\hat{st})^! \\
 \downarrow \tilde{f}_{co}^* & & \downarrow \hat{f}_{co}^* & & \downarrow (\hat{st})^! \\
 & & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{st}})) & \xrightarrow{(\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^!} & H(\mathbb{A}_T^1) \\
 \downarrow \tilde{f}_{co}^* & \swarrow j^* & \downarrow & \swarrow j^* & \downarrow \\
 H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{st}})) & \xrightarrow{(\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^!} & H(\mathbb{E}_T^1) & &
 \end{array}$$

Les faces parallèles au plan de la feuille sont les 2-isomorphismes de pureté. Les autres sont des 2-isomorphismes d'échange de type $Ex^{!,*}$ ou $Ex^{*,*}$. On peut donc remplacer le diagramme planaire (82) par le suivant sans changer la composée :

(83)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H(Z) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_Z^1) \\
 & \swarrow f^* & \nearrow \tilde{f}^* & \searrow \tilde{f}_{co}^* & \nearrow \hat{f}_{co}^* & \searrow \tilde{f}_{co}^* & \nearrow \tilde{f}^* \\
 H(X) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_X^1) & \Rightarrow & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\hat{st}})) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{V}(\mathcal{N}_{\tilde{st}})) \Rightarrow H(\mathbb{E}_X^1) \\
 \downarrow (st)^! & \nearrow Ex^{!,*} & \downarrow (\tilde{st})^! & \nearrow (\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \downarrow (\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^! & \nearrow (Ex^{!,*})^{-1} & \downarrow (\tilde{st})^! \\
 H(T) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1)
 \end{array}$$

En utilisant le deuxième diagramme commutatif du lemme 1.6.31, on voit qu'on peut remplacer (83) par le diagramme planaire suivant sans changer la composée :

(84)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H(Z) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_Z^1) \\
 & \swarrow f^* & \nearrow \tilde{f}^* & \searrow \tilde{f}_{co}^* & \nearrow \hat{f}_{co}^* & \searrow \tilde{f}_{co}^* & \nearrow \tilde{f}^* \\
 H(X) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_X^1) & \Rightarrow & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{V}(q^*\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_X^1) \\
 \downarrow (st)^! & \nearrow Ex^{!,*} & \downarrow (\tilde{st})^! & \nearrow (\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \downarrow (\hat{s}_{co}\hat{t}_{co})^! & \nearrow (\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^! & \downarrow (\tilde{st})^! \\
 H(T) \xrightarrow{p^*} H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1)
 \end{array}$$

$\omega(q^*t^*\mathcal{N}_s, t^{-1})$

En appliquant encore une fois le lemme 1.6.22 à l'immersion ouverte j du diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_X^1 & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_X^1 \\ \tilde{f} \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ \mathbb{E}_Z^1 & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}_Z^1 \end{array}$$

on obtient le cube commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{A}_X^1) \\ & \swarrow j^* & \downarrow & \swarrow j^* & \downarrow (\tilde{st})^! \\ H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H(\mathbb{E}_X^1) & & \\ \downarrow \tilde{f}_{co} & \downarrow \tilde{f}_{co} & \downarrow (\tilde{st})^! & \downarrow (\tilde{st})^! & \downarrow (\tilde{st})^! \\ & H(\mathbb{V}(p^*\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{(\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^!} & H(\mathbb{A}_T^1) & \\ \swarrow j^* & \downarrow & \swarrow j^* & & \\ H(\mathbb{V}(q^*\mathcal{N}_{st})) & \xrightarrow{(\tilde{s}_{co}\tilde{t}_{co})^!} & H(\mathbb{E}_T^1) & & \end{array}$$

On voit alors que la composée du diagramme planaire (84) est encore la composée du diagramme planaire ci-dessous :

(85)

$$\begin{array}{ccccccc} H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_Z^1) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H(\mathbb{E}_T^1) \\ \swarrow f^* & \nearrow \check{f}^* & \nearrow \check{f}^* & \nearrow \check{f}^* & \searrow \tilde{f}_{co} & \searrow \tilde{f}_{co} & \searrow \tilde{f}_{co} \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_X^1) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H(\mathbb{E}_X^1) \\ \downarrow (st)^! & \nearrow Ex^! & \downarrow (\tilde{st})^! & \downarrow (\tilde{st})^! & \downarrow (\tilde{st})^! & \downarrow (\tilde{st})^! & \downarrow (\tilde{st})^! \\ H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H(\mathbb{E}_T^1) \end{array}$$

$\omega(q^*t^*\mathcal{N}_s, t^{-1})$

Mais toute la partie en pointillé du diagramme planaire (85) se collapse en le 2-morphisme identique du 1-morphisme $(\tilde{s} \circ \tilde{t})^! \tilde{f}^*$ pour donner en fin de compte le diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc}
 H(Z) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_Z^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_Z^1) \\
 \swarrow f^* & \nearrow \tilde{f}^* & \nearrow & \searrow \tilde{f}^* & \\
 H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_X^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_X^1) \\
 \searrow (st)^! & \nearrow Ex'^* & \searrow (\tilde{s}\tilde{t})^! & \searrow (\tilde{s}\tilde{t})^! & \\
 & H(T) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{A}_T^1) & \xrightarrow{j^*} & H(\mathbb{E}_T^1)
 \end{array}$$

$\omega(q^* t^* \mathcal{N}_s, t^{-1})$

En utilisant la compatibilité des 2-morphismes d'échange avec les compositions des carrés on obtient ce que l'on cherche, *i.e.*, le deuxième diagramme planaire de (81). Le théorème 1.6.29 est prouvé.

Avant de passer au paragraphe suivant nous allons formuler le résultat démontré sous forme d'un diagramme commutatif. Nous donnerons un énoncé détaillé :

Théorème 1.6.33. — *Supposons donné un diagramme commutatif de S -schémas :*

$$\begin{array}{ccccc}
 T & \xrightarrow{t} & Y & \xrightarrow{s} & X \\
 & \searrow h & \searrow g & \searrow f & \\
 & & & & Z
 \end{array}$$

avec f , g et h lisses et s et t des immersions fermées. On forme les cônes normaux suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{t} & Y \xrightarrow{s_0} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\
 & & \downarrow f_0 \\
 & & Z
 \end{array}$$

puis :

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{t_1} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) \xrightarrow{s_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0 t}) \\
 & & \downarrow f_1 \\
 & & Z
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{t_1} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) \xrightarrow{s'_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0 t}) \\
 & & \downarrow f'_1 \\
 & & Z
 \end{array}$$

Les deux derniers sont associés aux immersions fermées : $s \circ t$ et $s_0 \circ t$. On a alors trois 2-isomorphismes de pureté :

- $\Pi : s^! f^* \xrightarrow{\sim} s_0^! f_0^*$,
- $\Pi : (s \circ t)^! f^* \xrightarrow{\sim} (s_1 \circ t_1)^! f_1^*$,
- $\Pi : (s_0 \circ t)^! f_0^* \xrightarrow{\sim} (s'_1 \circ t_1)^! f_1'^*$

qui s'insèrent dans un diagramme commutatif de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{c^!} & t^! s^! f^* \\
 \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\
 & & t^! s_0^! f_0^* \\
 & & \downarrow (c^!)^{-1} \\
 (s_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xrightarrow{\gamma} (s'_1 \circ t_1)^! f_1'^* & \xleftarrow{\Pi} (s_0 \circ t)^! f_0^*
 \end{array}$$

avec γ la composée :

$$\begin{aligned}
 (s_1 \circ t_1)^! f_1^* &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s \circ t}) h^* \xrightarrow{C_{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) h^* \\
 &\xrightarrow{(C_{-1})^{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 \circ t}) h^* \xrightarrow{\sim} (s'_1 \circ t_1)^! f_1'^*
 \end{aligned}$$

1.6.4.4. Variantes. — Le théorème 1.6.33 admet une variante (ou plutôt un corollaire) qui nous sera plus utile dans la suite. On garde les notations du théorème 1.6.33. Pour obtenir cette variante on a besoin de quelques notations en plus. On introduit d'abord une nouvelle suite d'immersions fermées :

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{u} & \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \xrightarrow{v} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\
 & & \downarrow f_0 \\
 & & Z
 \end{array}$$

Le carré :

$$(86) \quad \begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{u} & \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \\
 t \downarrow & & \downarrow v \\
 Y & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s)
 \end{array}$$

est commutatif et même cartésien. On déduit par passage aux cônes normaux les suites :

$$(87) \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{u} \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) & \xrightarrow{v_0} \mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \\ & & \downarrow f_{00} \\ & & Z \\ \\ T & \xrightarrow{u_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_u) & \xrightarrow{v_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{v \circ u}) \\ & & \downarrow f_{01} \\ & & Z \\ \\ T & \xrightarrow{u_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_u) & \xrightarrow{v'_1} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{v_0 \circ u}) \\ & & \downarrow f'_{01} \\ & & Z \end{array}$$

Du carré commutatif (86) on déduit les égalités évidentes :

$$(88) \quad \mathcal{N}_{v \circ u} = \mathcal{N}_{s_0 \circ t} \quad f_{01} = f'_1 \quad v_1 \circ u_1 = s'_1 \circ t_1$$

La suite : $T \xrightarrow{u} \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \xrightarrow{v_0} \mathbb{V}(\mathcal{N}_v)$ admet une rétraction canonique : $\mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \longrightarrow \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \longrightarrow T$. De plus, le T -schéma $\mathbb{V}(\mathcal{N}_v)$ s'identifie canoniquement au fibré vectoriel $\mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s \oplus \mathcal{N}_t)$ *via* les deux projections évidentes :

$$\mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \longrightarrow \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \longrightarrow \mathbb{V}(\mathcal{N}_t)$$

(la seconde projection étant celle induite du carré cartésien (86)). De plus l'immersion $v_0 \circ u$ s'identifie à la section nulle du fibré $\mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s \oplus \mathcal{N}_t)$. Il vient alors facilement que les trois diagrammes (87) sont canoniquement isomorphes entre eux et au diagramme :

$$T \xrightarrow{u} \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \longrightarrow \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s \oplus \mathcal{N}_t)$$

On a le corollaire suivant du théorème 1.6.33 :

Corollaire 1.6.34. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{c^!} & t^! s^! f^* \\ \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi \\ & & t^! s_0^! f_0^* \\ & & \downarrow Ex^{!,!} \\ & & u^! v^! f_0^* \\ & & \downarrow \Pi \\ (s_1 \circ t_1)^! f_1^* & & u^! v^! f_0^* \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \Pi \\ (s'_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xrightarrow{\mu} (v_0 \circ u)^! f_{00}^* & \xrightarrow{c^!} u^! v_0^! f_{00}^* \end{array}$$

Le 2-morphisme $Ex^{!1}$ est associé au carré commutatif (86). Le 2-isomorphisme μ est celui induit par l'isomorphisme canonique du cône normal de l'immersion v avec le cône normal de l'immersion $s_0 \circ t$.

Démonstration. — On a le diagramme commutatif suivant par 1.6.33 :

$$\begin{array}{ccc}
 (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{c^!} & t^! s^! f^* \\
 \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\
 & & t^! s_0^! f_0^* \\
 & & \downarrow (c^!)^{-1} \\
 (s_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xrightarrow{\gamma} (s'_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xleftarrow{\Pi} (s_0 \circ t)^! f_0^*
 \end{array}$$

En appliquant une deuxième fois le théorème 1.6.33, mais cette fois à la composée :

$$T \xrightarrow{u} \mathbb{V}(t^* \mathcal{N}_s) \xrightarrow{v} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s)$$

on obtient un second diagramme commutatif qu'on peut concaténer avec le premier de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
 (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{c^!} & & t^! s^! f^* & \\
 \Pi \downarrow & & & \downarrow \Pi & \\
 & & & t^! s_0^! f_0^* & \\
 & & & \downarrow (c^!)^{-1} & \\
 (s_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xrightarrow{\gamma} (s'_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xleftarrow{\Pi} & (s_0 \circ t)^! f_0^* & \\
 & \parallel & & \parallel & \\
 & (v_1 \circ u_1)^! f_{01}^* & \xleftarrow{\Pi} & (v \circ u)^! f_0^* & \\
 & \uparrow \gamma' & & \downarrow c^! & \\
 & & & u^! v^! f_0^* & \\
 & & & \downarrow \Pi & \\
 & & & u^! v_0^! f_{00}^* & \\
 & & & \downarrow (c^!)^{-1} & \\
 & & & (v_0 \circ u)^! f_{00}^* & \\
 & & \xleftarrow{\Pi} & & \\
 & (v'_1 \circ u_1)^! f_{01}^* & & &
 \end{array}$$

en utilisant les égalités : $s_0 \circ t = v \circ u$, $s'_1 \circ t_1 = v_1 \circ u_1$ et $f'_1 = f_{01}$ (voir le carré commutatif (86) et les égalités (88)).

Puisque $v_0 \circ u$ est l'inclusion de la section nulle d'un fibré vectoriel sur T , on a d'après la proposition 1.6.28 que le 2-isomorphisme :

$$\Pi : (v_0 \circ u)^! f_{00}^* \xrightarrow{\Pi} (v_1' \circ u_1)^! f_{01}'^*$$

n'est autre que le 2-isomorphisme induit par l'isomorphisme de T -fibrés vectoriels :

$$\mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{v_0 \circ u})$$

De même, on voit facilement que le 2-isomorphisme γ' est simplement celui induit par l'isomorphisme de T -fibrés vectoriels

$$\mathbb{V}(\mathcal{N}_{v \circ u}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(\mathcal{N}_{v_0 \circ u})$$

Le résultat annoncé est maintenant clair. \square

Voici la variante finale de notre théorème. Cette variante concerne l'isomorphisme de pureté sous sa forme $\Pi : s^! f^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* :$

Corollaire 1.6.35. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{c^!} & t^! s^! f^* \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ & & t^! \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \\ & & \downarrow \zeta_{-1} \\ & & \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) t^! g^* \\ & & \downarrow \Pi \\ \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s \circ t}) h^* & \xrightarrow{C'_{-1}} & \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) h^* \end{array}$$

avec C'_{-1} le 2-isomorphisme de composition modifié (voir la définition 1.5.16) associé à la suite exacte courte de \mathcal{O}_T -modules :

$$0 \longrightarrow t^* \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_{s \circ t} \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow 0$$

et ζ_{-1} le 2-isomorphisme défini dans 1.5.9.

Démonstration. — On notera $pr_0 : \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \longrightarrow Y$ la projection du fibré normal sur Y . On notera également pr_0 la projection : $\mathbb{V}(t^*\mathcal{N}_s) \longrightarrow T$. On notera par contre $pr_1 : \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) \longrightarrow T$ la projection du fibré normal de t , $pr_2 : \mathbb{V}(\mathcal{N}_{s \circ t}) \longrightarrow T$ la projection du fibré normal de $s \circ t$ et $pr_3 : \mathbb{V}(\mathcal{N}_{s_0 \circ t}) \longrightarrow T$ celle de $s_0 \circ t$. Il existe un carré cartésien canonique :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}(t^*\mathcal{N}_s) & \xrightarrow{v} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\ pr_0 \downarrow & & \downarrow pr_0 \\ T & \xrightarrow{t} & Y \end{array}$$

et les pr_0 sont bien sûr lisses. Par la proposition 1.6.20, on a un carré commutatif de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} pr_0^* t^! g^* & \xrightarrow{\Pi} & pr_0^* t_1^! g_1^* \\ Ex^{!*} \downarrow & & \downarrow Ex^{!*} \\ v^! pr_0^* g^* & & v_0^! pr_{00}^* g_1^* \\ (c^*)^{-1} \downarrow & & \downarrow (c^*)^{-1} \\ v^! f_0^* & \xrightarrow{\Pi} & v_0^! f_{00}^* \end{array}$$

avec pr_{00} la projection : $\mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \longrightarrow \mathbb{V}(\mathcal{N}_t)$. Ce diagramme commutatif se récrit :

$$\begin{array}{ccccc} v^! f_0^* & \xrightarrow{c^*} & v^! pr_0^* g^* & \xrightarrow{(Ex^{!*})^{-1}} & pr_0^* t^! g^* \\ \Pi \downarrow & & & & \downarrow \Pi \\ v_0^! f_{00}^* & \xrightarrow{c^*} & v_0^! pr_{00}^* g_1^* & \xrightarrow{(Ex^{!*})^{-1}} & pr_0^* t_1^! g_1^* \end{array}$$

D'autre part on a un carré commutatif évident :

$$\begin{array}{ccc} t^! s_0^! f_0^* & \xrightarrow{c^*} & t^! s_0^! pr_0^* g^* \\ Ex^{!!} \downarrow & & \downarrow Ex^{!!} \\ u^! v^! f_0^* & \xrightarrow{c^*} & u^! v^! pr_0^* g^* \end{array}$$

En concaténant judicieusement les deux derniers diagrammes commutatifs avec le diagramme commutatif du corollaire 1.6.34, on obtient le diagramme commutatif

(à flèches solides) suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 (s \circ t)^! f^* & \xrightarrow{c^!} & t^! s^! f^* & & \\
 \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi & & \\
 (s_1 \circ t_1)^! f_1^* & & t^! s_0^! f_0^* \xrightarrow{c^*} t^! s_0^! pr_0^* g^* & & \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow & \downarrow Ex^! & \\
 (s'_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xrightarrow{\mu} & (v_0 \circ u)^! f_{00}^* \xrightarrow{c^!} u^! v_0^! f_{00}^* \xrightarrow{c^*} u^! v_0^! pr_{00}^* g_1^* \xrightarrow{(Ex^!)^{-1}} u^! pr_0^* t_1^! g_1^* & & \\
 \downarrow & & \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi \\
 (s'_1 \circ t_1)^! pr_3^* h^* & \xrightarrow{\delta} & u^! pr_0^* t_1^! pr_1^* h^* & &
 \end{array}$$

Calculons le 2-isomorphisme δ en pointillé qui rendra le diagramme total commutatif. Pour cela on forme le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (s'_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xrightarrow{\mu} & (v_0 \circ u)^! f_{00}^* & \xrightarrow{c^!} & u^! v_0^! f_{00}^* & \xrightarrow{c^*} & u^! v_0^! pr_{00}^* g_1^* \xrightarrow{(Ex^!)^{-1}} u^! pr_0^* t_1^! g_1^* \\
 c^* \downarrow & & \downarrow c^* & & \downarrow c^* & & \downarrow c^* \\
 (s'_1 \circ t_1)^! pr_3^* h^* & \xrightarrow{\mu} & (v_0 \circ u)^! (pr_1 \circ pr_{00})^* h^* & \xrightarrow{c^!} & u^! v_0^! (pr_1 \circ pr_{00})^* h^* & \xrightarrow{c^*} & u^! v_0^! pr_{00}^* pr_1^* h^* \xrightarrow{(Ex^!)^{-1}} u^! pr_0^* t_1^! pr_1^* h^* \\
 & & & & & & \downarrow d
 \end{array}$$

Les petits carrés de ce diagramme sont tous commutatifs. D'autre part, modulo les égalités :

$$Th^{-1}(\mathcal{N}_{s \circ t}) = (s'_1 \circ t_1)^! \circ pr_3^* \quad Th^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) = u^! \circ pr_0^* \quad Th^{-1}(\mathcal{N}_t) = t_1^! \circ pr_1^*$$

la composée d des trois derniers 2-isomorphismes de la ligne inférieure de (90) est par définition le 2-isomorphisme de composition :

$$C_{-1} : Th^{-1}(\mathcal{N}_v) \xrightarrow{\sim} Th^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) Th^{-1}(\mathcal{N}_t)$$

associé au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{V}(\mathcal{N}_v) & & \\
 v_0 \circ u & \nearrow & \downarrow pr_{00} & \searrow & \\
 T & \xrightarrow{u} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) & \longrightarrow & T
 \end{array}$$

ainsi que le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) & \xrightarrow{v_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_v) \\ \downarrow & & \downarrow pr_{00} \\ T & \xrightarrow{s_1} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_t) \end{array}$$

ou encore le 2-isomorphisme de composition associé à la suite exacte courte de \mathcal{O}_T -modules localement libres :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow \mathcal{N}_v \longrightarrow t^* \mathcal{N}_s \longrightarrow 0$$

Il vient donc que le 2-isomorphisme δ est simplement le 2-isomorphisme de composition associé à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 t} \longrightarrow t^* \mathcal{N}_s \longrightarrow 0$$

En revenant à la définition du 2-isomorphisme γ , on voit que la composée :

$$(s_1 \circ t_1)^! f_1^* \xrightarrow{\gamma} (s'_1 \circ t_1)^! f_1'^* \longrightarrow (s'_1 \circ t_1)^! pr_3^* h^* \xrightarrow{\delta} u^! pr_0^* t_1^! pr_1^* h^*$$

est égale à :

$$\begin{array}{ccc} (s_1 \circ t_1)^! f_1^* & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 t}) h^* \xrightarrow{C_{-1}} \\ & & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) h^* \xrightarrow{(C_{-1})^{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 t}) h^* \xrightarrow{C_{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) h^* \\ & \searrow & \quad \quad \quad \nearrow \\ & & Cm_{-1} \end{array}$$

et donc à $(s_1 \circ t_1)^! f_1^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s_0 t}) h^* \xrightarrow{C'_{-1}} \mathrm{Th}^{-1}(t^* \mathcal{N}_s) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) h^*$ avec C'_{-1} le 2-isomorphisme de composition modifié associé à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow t^* \mathcal{N}_s \longrightarrow \mathcal{N}_{s_0 t} \longrightarrow \mathcal{N}_t \longrightarrow 0$$

Le corollaire est prouvé. \square

1.6.5. Le foncteur croisé $(H^*, H_*, H!, H^!)$

1.6.5.1. Quelques préparations. — On va définir deux classes de 2-isomorphismes qui formeront les ingrédients principaux pour la construction des 2-isomorphismes de connexions du 2-foncteur :

$$H^! : (\mathrm{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

annoncé dans la scholie 1.4.2. Le 2-isomorphisme de pureté jouera un rôle fondamental dans la suite (spécialement dans la construction de la deuxième classe de 2-isomorphismes).

Un isoéchange sur le couple $({}^{\text{Imm}}H^!, {}^{\text{Liss}}H^!)$. — On va définir une structure d'échange sur le couple $({}^{\text{Imm}}H^!, {}^{\text{Liss}}H^!)$ relativement à la classe des carrés cartésiens de (Sch/S) ayant les flèches verticales lisses et les flèches horizontales des immersions fermées. On notera $Ex^{!,!}(\cdot)$ les 2-morphismes d'échange qui définissent cette structure d'échange. Cette notation est abusive au moins à ce stade de la construction, puisqu'elle peut être confondue avec les 2-isomorphismes d'échange de la structure d'isoéchange triviale sur $({}^{\text{Imm}}H^!, {}^{\text{Imm}}H^!)$ (par exemple).

Proposition 1.6.36. — *Il existe une structure d'échange sur le couple $({}^{\text{Imm}}H^!, {}^{\text{Liss}}H^!)$ relativement à la classe des carrés cartésiens de (Sch/S) ayant les flèches verticales lisses et les flèches horizontales des immersions fermées. Le 2-morphisme d'échange relativement à un carré cartésien (C) :*

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{i'} & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{i} & \bullet \end{array}$$

(avec i une immersion fermée et f un morphisme lisse) est donné par la composée :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{i^!} & \bullet \\ \uparrow \text{Th}(\Omega_{f'}) & \swarrow & \uparrow \text{Th}(\Omega_f) \\ \bullet & \xleftarrow{i^!} & \bullet \\ f'^* \uparrow & \sim \swarrow_{Ex^{!,*}} & \uparrow f^* \\ \bullet & \xleftarrow{i^!} & \bullet \end{array}$$

Il sera noté $Ex^{!!}(C)$. De plus cet échange est un isoéchange.

Démonstration. — Il s'agit de prouver que la formule qui donne les $Ex^{!,!}(C)$ définit une famille de 2-morphismes compatibles avec les 2-isomorphismes d'échange de chacun des 2-foncteurs ${}^{\text{Imm}}H^!$ et ${}^{\text{Liss}}H^!$. On pourra pour cela reprendre la preuve de la proposition 1.5.19. Une façon plus économique est d'utiliser directement la proposition 1.5.19. Voici comment on procède :

D'après la proposition 1.5.19 on dispose d'un foncteur croisé sur le quadruplet $(H^*, H_*, {}^{\text{Liss}}H_!, {}^{\text{Liss}}H^!)$. On s'intéresse uniquement à l'échange sur le couple : $(H_*, {}^{\text{Liss}}H^!)$. Par restriction on obtient un échange de type \swarrow sur le couple $({}^{\text{Imm}}H_*, {}^{\text{Liss}}H^!)$ pour la classe des carrés cartésiens. Par le théorème de changement de base pour une immersion fermée il est aisé de voir que cet échange est en fait un isoéchange. En prenant l'inverse on obtient un échange de type \searrow sur $({}^{\text{Imm}}H_*, {}^{\text{Liss}}H^!)$. En utilisant enfin l'adjonction globale entre les deux 2-foncteurs

$\mathrm{Imm}\mathbf{H}_*$ et $\mathrm{Imm}\mathbf{H}^!$ (ce dernier étant l'adjoint à gauche) on déduit un échange de type \swarrow sur le couple $(\mathrm{Imm}\mathbf{H}^!, \mathrm{Liss}\mathbf{H}^!)$. Il est aisé de voir que les 2-morphismes d'échange de cette structure sont donnés par les formules de l'énoncé. \square

Une troisième forme du 2-isomorphisme de pureté. — On suppose donné un triangle commutatif de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec f et g des morphismes lisses et s une immersion fermée. En prenant le cône normal de l'immersion s on obtient le triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s_0} & \mathbb{V}(\mathcal{N}_s) \\ & \searrow g & \downarrow f_0 \\ & & Z \end{array}$$

On a construit dans la sous-section 1.6.3 deux 2-isomorphismes (essentiellement équivalents) :

$$\begin{aligned} - \Pi : s^! f^* &\xrightarrow{\sim} s_0^! f_0^* \\ - \Pi : s^! f^* &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \end{aligned}$$

Remarquons que le second des ces deux 2-isomorphismes est « plus intrinsèque » dans le sens qu'il ne fait pas apparaître la section s_0 ni la projection f_0 . Dans ce paragraphe on va définir une troisième forme du 2-isomorphisme de pureté qui cette fois ne fera apparaître que les S -morphisms s , f et g . Ensuite on établira les différentes compatibilités pour ces nouveaux 2-isomorphismes de pureté.

Définition 1.6.37. — *Pour chaque triangle commutatif comme ci-dessus, on définit un 2-isomorphisme :*

$$\Pi : s^! f^! \xrightarrow{\sim} g^!$$

par la composée :

$$\begin{array}{ccc} s^! \mathrm{Th}(\Omega_f) f^* & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) s^! f^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \\ \parallel & & \xrightarrow{C'} \mathrm{Th}(\Omega_g) \mathrm{Th}(\mathcal{N}_s) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* \xrightarrow{\delta} \mathrm{Th}(\Omega_g) g^* \\ s^! f^! & & \parallel \\ & & g^! \end{array}$$

Le 2-morphisme C' étant le 2-isomorphisme de composition modifié $\mathrm{Th}(s^*\Omega_f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(\Omega_g)\mathrm{Th}(\mathcal{N}_s)$ associé à la suite exacte courte de \mathcal{O}_Y -modules localement libres :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_s \longrightarrow s^*\Omega_f \longrightarrow \Omega_g \longrightarrow 0$$

Le 2-morphisme δ est la counité de l'adjonction (qui est un 2-isomorphisme). Dans le langage des diagrammes planaires, ce 2-isomorphisme de pureté est la composée du diagramme planaire :

$$(91) \quad \begin{array}{ccccc} & & H(Y) & \xleftarrow{s^!} & H(X) \\ & & \uparrow \mathrm{Th}(s^*\Omega_f) & \Downarrow & \uparrow \mathrm{Th}(\Omega_f) \\ \mathrm{Th}(\Omega_g) & \nearrow & H(Y) & \xleftarrow{s^!} & H(X) \\ & \nwarrow C' & \uparrow \mathrm{Th}(\mathcal{N}_s) & \Downarrow & \uparrow \mathrm{Th}(\Omega_f) \\ H(Y) & \xleftarrow{\mathrm{Th}(\mathcal{N}_s)} & H(Y) & \xleftarrow{s^!} & H(X) \\ & \searrow & \uparrow & \Downarrow \Pi & \uparrow f^* \\ & & H(Y) & \xleftarrow{g^*} & H(Z) \\ & & \uparrow \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) & \Downarrow & \uparrow f^* \end{array}$$

Compatibilité avec les restrictions suivant des morphismes lisses. — On a la proposition suivante :

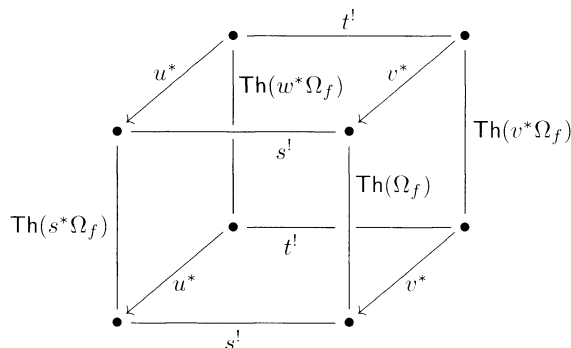
Proposition 1.6.38. — Supposons donné un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t} & R \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

à carré cartésien avec s , f et g comme avant, et v lisse. On a alors un diagramme commutatif de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} t^!(f \circ v)^! & \xrightarrow{\Pi} & (g \circ u)^! \\ c^! \downarrow & & \downarrow c^! \\ t^!v^!f^! & \xrightarrow{Ex''} u^!s^!f^! & \xrightarrow{\Pi} u^!g^! \end{array}$$

En utilisant le fait que les équivalences de Thom sont des autoéquivalences des restrictions à (Sch/X) des 2-foncteurs H^* , et ${}^{\text{Imm}}H^!$ et que ces autoéquivalences sont compatibles à l'échange sur le couple $(H^*, {}^{\text{Imm}}H^!)$ on obtient un cube commutatif :



avec $w = v \circ t = s \circ u : T \longrightarrow X$. Il vient que la composée du diagramme planaire (93) est égale à la composée du diagramme planaire :

(94)

En utilisant :

- la compatibilité avec les 2-isomorphismes de connexions des 2-isomorphismes structuraux de l'autoéquivalence de Thom induite par Ω_f sur la restriction de ${}^{\text{Imm}}H^!$ à (Sch/X) (voir le théorème 1.5.9),
- la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la restriction suivant un morphisme lisse (voir le corollaire 1.6.21),

on voit que l'on peut remplacer les deux parties en pointillé de (94) par deux autres diagrammes planaires ayant les mêmes composées pour obtenir le diagramme planaire suivant :

(95)

The diagram illustrates a complex commutative structure involving several objects and morphisms. The objects are arranged in a hierarchical manner, with $H(Y)$ and $H(T)$ at the bottom, $H(Y)$ and $H(T)$ in the middle, and $H(T)$ and $H(R)$ at the top. Morphisms are labeled with Th , $t^!$, u^* , $(c^*)^{-1}$, $(gu)^*$, $(fv)^*$, and q^* . Some morphisms are marked with double arrows indicating isomorphisms or equivalences.

En utilisant le fait que les 2-isomorphismes de composition sont des isomorphismes d'autoéquivalences de la restriction du 2-foncteur \mathbf{H}^* à (\mathbf{Sch}/Y) (voir proposition 1.5.11), on voit que les deux diagrammes planaires ci-dessous :

$$(96) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathrm{H}(Y) & \xrightarrow{u^*} & \mathrm{H}(T) \\ & \nearrow \mathrm{Th}(\Omega_g) & \uparrow \mathrm{Th}(s^*\Omega_f) & & \uparrow \mathrm{Th}(w^*\Omega_f) \\ \mathrm{H}(Y) & \xleftarrow{\mathrm{Th}(\mathcal{N}_s)} & \mathrm{H}(Y) & \xrightarrow{u^*} & \mathrm{H}(T) \\ & \searrow & \uparrow & \nwarrow \Pi & \uparrow \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) \\ & & \mathrm{H}(Y) & \xrightarrow{u^*} & \mathrm{H}(T) \\ & \nearrow \mathrm{Th}(\Omega_g) & \uparrow \mathrm{Th}(u^*\Omega_g) & & \uparrow \mathrm{Th}(w^*\Omega_f) \\ \mathrm{H}(Y) & \xrightarrow{u^*} & \mathrm{H}(T) & \xleftarrow{\mathrm{Th}(\mathcal{N}_t)} & \mathrm{H}(T) \\ & \searrow & \uparrow & \nwarrow & \uparrow \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) \\ & & \mathrm{H}(Y) & \xrightarrow{u^*} & \mathrm{H}(T) \end{array}$$

ont la même composée. En remplaçant dans la partie en pointillé de (95) le premier diagramme de (96) par le second, on obtient le diagramme planaire :

(97)

Diagram (97) is a complex commutative diagram. It features nodes $H(Y)$, $H(T)$, $H(R)$, and $H(Z)$. Arrows include u^* from $H(Y)$ to $H(T)$, $Th(\Omega_g)$ from $H(Y)$ to $H(T)$, $Th(u^*\Omega_g)$ from $H(Y)$ to $H(T)$, $Th(\mathcal{N}_t)$ from $H(T)$ to $H(T)$, $Th(w^*\Omega_f)$ from $H(T)$ to $H(T)$, $Th(t^*\Omega_v)$ from $H(T)$ to $H(T)$, $t^!$ from $H(T)$ to $H(R)$, $Th(\Omega_{fv})$ from $H(R)$ to $H(R)$, $(fv)^*$ from $H(R)$ to $H(Z)$, g^* from $H(Y)$ to $H(Z)$, u^* from $H(Y)$ to $H(T)$, $Th^{-1}(\mathcal{N}_t)$ from $H(T)$ to $H(T)$, $(c^*)^{-1}$ from $H(T)$ to $H(T)$, and $(gu)^*$ from $H(T)$ to $H(Z)$. There are also double arrows and a Π symbol.

En utilisant l'associativité de la composition pour les équivalences de Thom (voir le théorème 1.5.18), on voit que la composée de (97) est égale à celle du diagramme planaire :

(98)

Diagram (98) is a planar version of diagram (97). It shows the same nodes and arrows, but with a dotted line indicating a specific path from $H(Y)$ to $H(T)$ via $Th(\Omega_{gu})$. The diagram is more compact and highlights the planarity of the composition.

On divise le diagramme planaire (98) suivant la ligne en pointillé :

$$H(Z) \xrightarrow{(gu)^*} H(T) \xlongequal{\quad} H(T) \xrightarrow{Th(\Omega_{gu})} H(T)$$

On reconnaît à droite de cette ligne le 2-isomorphisme de pureté :

$$\Pi : t^!(f \circ v)^! \longrightarrow (g \circ u)^!$$

et à gauche de cette ligne, le 2-isomorphisme de connexion :

$$c^! : (g \circ u)^! \longrightarrow u^!g^!$$

On retrouve donc le second diagramme planaire de (92). La proposition est prouvée. \square

Compatibilité avec les restrictions quelconques au niveau de la base. — On a la proposition suivante :

Proposition 1.6.39. — *On suppose donné un triangle commutatif de S -schémas :*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec f et g lisses et s une immersion fermée. On se donne en plus un S -morphisme $a : Z' \longrightarrow Z$ et on forme le triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{s'} & X' \\ & \searrow g' & \downarrow f' \\ & & Z' \end{array}$$

obtenu par pull-back suivant a . On notera a les S -morphisms :

$$Y' \longrightarrow Y \quad \text{et} \quad X' \longrightarrow X$$

Le diagramme de 2-isomorphismes ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} a^* s^! f^! & \xrightarrow{Ex^{!,*}} & s'^! a^* f^! \xrightarrow{Ex^{!,*}} s'^! f'^! a^* \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ a^* g^! & \xrightarrow{Ex^{*,!}} & g'^! a^* \end{array}$$

est commutatif. En d'autres termes, le diagramme solide suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & H(Y') & \xleftarrow{s'^!} & H(X') \\ & \nearrow a^* & & \nwarrow g'^! & \nearrow a^* \\ H(Y) & \xleftarrow{s^!} & H(X) & & H(Z') \\ & \nwarrow g^! & \uparrow f^! & \nearrow a^* & \\ & & H(Z) & & \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Nous ne donnerons pas la preuve de cette proposition. Elle est tout à fait analogue à celle de la proposition 1.6.40. Il faut juste remplacer dans le paragraphe suivant $a^!$ par a^* . \square

Compatibilité avec les sections à support. — On a la proposition suivante :

Proposition 1.6.40. — *On suppose donné un triangle commutatif de S -schémas :*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec f et g lisses et s une immersion fermée. On se donne en plus une immersion fermée $a : Z' \longrightarrow Z$ et on forme le triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{s'} & X' \\ & \searrow g' & \downarrow f' \\ & & Z' \end{array}$$

obtenu par pull-back suivant a . On notera a les immersions fermées :

$$Y' \longrightarrow Y \quad \text{et} \quad X' \longrightarrow X$$

Le diagramme de 2-isomorphismes ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} a^! s^! f^! & \xrightarrow{Ex^{!!}} & s'^! a^! f^! & \xrightarrow{Ex^{!!}} & s'^! f'^! a^! \\ \Pi \downarrow & & & & \downarrow \Pi \\ a^! g^! & \xrightarrow{Ex^{!!}} & g'^! a^! & & \end{array}$$

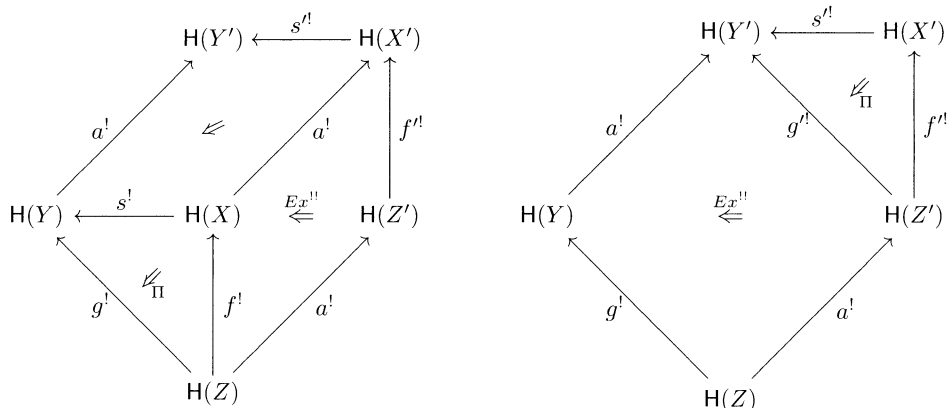
est commutatif. En d'autres termes, le diagramme solide suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & H(Y') & \xleftarrow{s'^!} & H(X') \\ & \nearrow a^! & & \nwarrow g'^! & \nearrow a^! \\ H(Y) & \xleftarrow{s^!} & H(X) & & H(Z') \\ & \nwarrow g^! & \uparrow f^! & \nearrow a^! & \\ & & H(Z) & & \end{array}$$

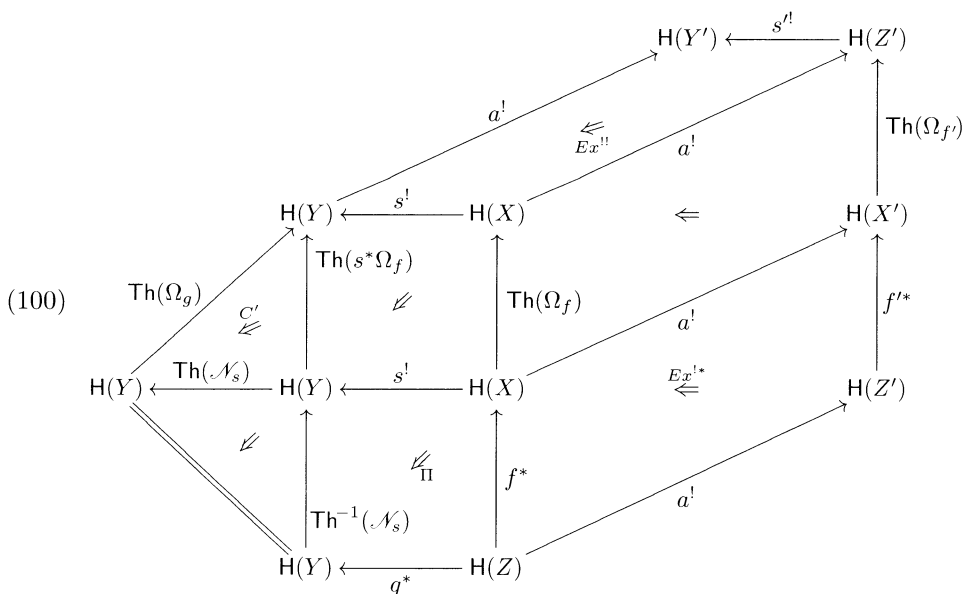
est commutatif.

Démonstration. — Il s'agit de prouver que l'égalité des composées des deux diagrammes planaires suivants :

(99)



Pour cela, on explicite le premier de ces deux diagrammes planaires en revenant à la définition du 2-isomorphisme Π . On obtient ainsi le diagramme planaire :



En utilisant le fait que les équivalences de Thom induites par Ω_f forment une autoéquivalence du 2-foncteur restriction de ${}^{\text{Imm}}\mathbf{H}^!$ à $(\text{Sch}/X)^{\text{Imm}}$ (voir la proposition 1.5.11),

on voit que le diagramme planaire (100) admet la même composée que :

$$(101) \quad \begin{array}{ccccc} & & & H(Y') \xleftarrow{s'^!} H(Z') & \\ & & & \uparrow \text{Th}(\Omega_{f'}) & \\ & & & \swarrow & \\ & & & H(Y') \xleftarrow{s'^!} H(X') & \\ & & & \uparrow f'^* & \\ & & & H(Z') & \\ & & & \uparrow a' & \\ & & & H(Y) & \\ & & & \uparrow \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) & \\ & & & H(Z) & \\ & & & \uparrow g^* & \\ & & & H(Y) & \\ & & & \uparrow \text{Th}(\mathcal{N}_s) & \\ & & & H(Y) & \\ & & & \uparrow \text{Th}(\Omega_g) & \\ & & & H(Y) & \end{array}$$

Diagram (101) is a complex commutative diagram with nodes $H(Y)$, $H(X)$, $H(Z)$, $H(Y')$, $H(X')$, $H(Z')$, $H(Y'')$, $H(X'')$, and $H(Z'')$. The diagram is composed of several triangles and squares, with arrows labeled with various functors and natural transformations. The diagram is labeled (101) on the left.

En utilisant la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec les sections à support (sous la forme donnée dans le corollaire 1.6.25), on voit que la composée de (101) est égale à la composée de :

$$(102) \quad \begin{array}{ccccc} & & & H(Y') \xleftarrow{s'^!} H(Z') & \\ & & & \uparrow \text{Th}(\Omega_{f'}) & \\ & & & \swarrow & \\ & & & H(Y') \xleftarrow{s'^!} H(X') & \\ & & & \uparrow f'^* & \\ & & & H(Z') & \\ & & & \uparrow a' & \\ & & & H(Y) & \\ & & & \uparrow \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) & \\ & & & H(Z) & \\ & & & \uparrow g^* & \\ & & & H(Y) & \\ & & & \uparrow \text{Th}(\mathcal{N}_s) & \\ & & & H(Y) & \\ & & & \uparrow \text{Th}(\Omega_g) & \\ & & & H(Y) & \end{array}$$

Diagram (102) is a commutative diagram similar to (101), but with different arrows and labels. It is labeled (102) on the left.

En utilisant le fait que les 2-isomorphismes de composition sont des isomorphismes d'autoéquivalences de la restriction de ${}^{\text{Imm}}\mathbf{H}^!$ à $(\mathbf{Sch}/Y)^{\text{Imm}}$ (voir la proposition 1.5.11), on voit que les deux diagrammes planaires ci-dessous :

$$(103) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathbf{H}(Y) & \xrightarrow{a^!} & \mathbf{H}(T) \\ & \nearrow \text{Th}(\Omega_g) & \uparrow \text{Th}(s^*\Omega_f) & \searrow & \uparrow \text{Th}(s'^*\Omega_{f'}) \\ \mathbf{H}(Y) & \xleftarrow{\text{Th}(\cdot\mathcal{N}_s)} & \mathbf{H}(Y) & \xrightarrow{a^!} & \mathbf{H}(T) \\ & \searrow & \uparrow \text{Th}^{-1}(\cdot\mathcal{N}_s) & \swarrow \Pi & \uparrow \text{Th}^{-1}(\cdot\mathcal{N}_{s'}) \\ & & \mathbf{H}(Y) & \xrightarrow{a^!} & \mathbf{H}(T) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{H}(Y) & \xrightarrow{a^!} & \mathbf{H}(T) \\ & \nearrow \text{Th}(\Omega_g) & \nearrow \text{Th}(\Omega_{g'}) & \searrow & \uparrow \text{Th}(s'^*\Omega_{f'}) \\ \mathbf{H}(Y) & \xrightarrow{a^!} & \mathbf{H}(T) & \xleftarrow{\text{Th}(\cdot\mathcal{N}_t)} & \mathbf{H}(T) \\ & \searrow & \searrow & \swarrow & \uparrow \text{Th}^{-1}(\cdot\mathcal{N}_{s'}) \\ & & \mathbf{H}(Y) & \xrightarrow{a^!} & \mathbf{H}(T) \end{array}$$

ont la même composée. En remplaçant dans la partie en pointillé de (102) le premier diagramme de (103) par le second, on obtient le diagramme planaire suivant :

$$(104) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \mathbf{H}(Y) & \xrightarrow{a^!} & \mathbf{H}(Y') & \xleftarrow{s'^!} & \mathbf{H}(Z') \\ & \nearrow \text{Th}(\Omega_g) & \nearrow \text{Th}(\Omega_{g'}) & \searrow & \uparrow \text{Th}(s'^*\Omega_{f'}) & \searrow & \uparrow \text{Th}(\Omega_{f'}) \\ \mathbf{H}(Y) & \xrightarrow{a^!} & \mathbf{H}(Y') & \xleftarrow{\text{Th}(\cdot\mathcal{N}_{s'})} & \mathbf{H}(Y') & \xleftarrow{s'^!} & \mathbf{H}(X') \\ & \searrow & \searrow & \swarrow & \uparrow \text{Th}^{-1}(\cdot\mathcal{N}_{s'}) & \swarrow \Pi & \uparrow f'^* \\ & & \mathbf{H}(Y') & \xleftarrow{\text{Th}(\cdot\mathcal{N}_{s'})} & \mathbf{H}(Y') & \xleftarrow{g'^*} & \mathbf{H}(Z') \\ & \searrow & \searrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ & & \mathbf{H}(Y) & \xrightarrow{a^!} & \mathbf{H}(Z) & \xrightarrow{g'^*} & \mathbf{H}(Z') \end{array}$$

On divise le diagramme planaire (104) selon la ligne en pointillé :

$$H(Z) \xrightarrow{g'^*} H(Y') \equiv H(Y') \xrightarrow{\text{Th}(\Omega_{g'})} H(Y')$$

La partie de droite n'est autre que le 2-isomorphisme de pureté :

$$\Pi : s^! f'^! \xrightarrow{\sim} g'^!$$

La partie de gauche n'est autre que le 2-isomorphisme d'échange $Ex^!!$ relatif à la structure d'échange sur le couple $(\text{Imm} H^!, \text{Liss} H^!)$ de la proposition 1.6.36 :

$$Ex^!! : g'^! a^! \xrightarrow{\sim} a^! g'^!$$

Il vient que la composée de (104) est égale à la composée du second diagramme planaire de (99). La proposition est alors démontrée. \square

Compatibilité avec la composition des immersions fermées. — On a la proposition suivante :

Proposition 1.6.41. — *On suppose donné un diagramme commutatif de S -schémas :*

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{t} & Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow & \downarrow g & \downarrow f & \\ & & & & Z \end{array}$$

h

avec s et t des immersions fermées et f , g et h des morphismes lisses. Le diagramme de 2-isomorphismes ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} (s \circ t)^! f^! & \xrightarrow{\Pi} & h^! \\ c^! \downarrow & & \nearrow \Pi \\ t^! s^! f^! & \xrightarrow{\Pi} & t^! g^! \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Il s'agit de prouver que les composées des deux diagrammes planaires ci-dessous :

(105)

$$\begin{array}{ccccc} & & (s \circ t)^! & & \\ & \swarrow & \Downarrow & \searrow & \\ H(T) & \xleftarrow{t^!} & H(Y) & \xleftarrow{s^!} & H(X) \\ & \swarrow & \Downarrow & \searrow & \\ & & H(Z) & & \end{array}$$

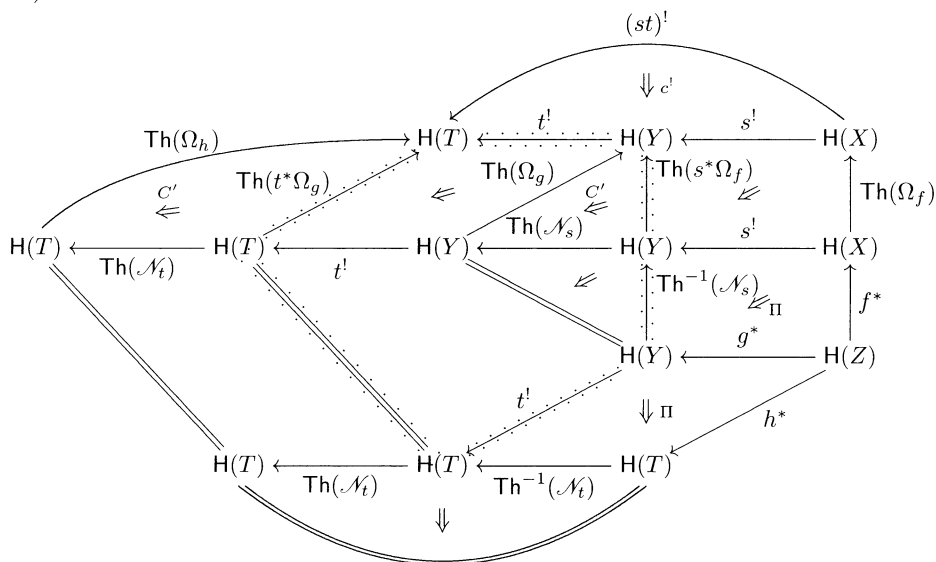
$h^! \quad g^! \quad f^!$

$$\begin{array}{ccc} H(T) & \xleftarrow{(s \circ t)^!} & H(X) \\ & \swarrow & \uparrow f^! \\ & & H(Z) \end{array}$$

$h^!$

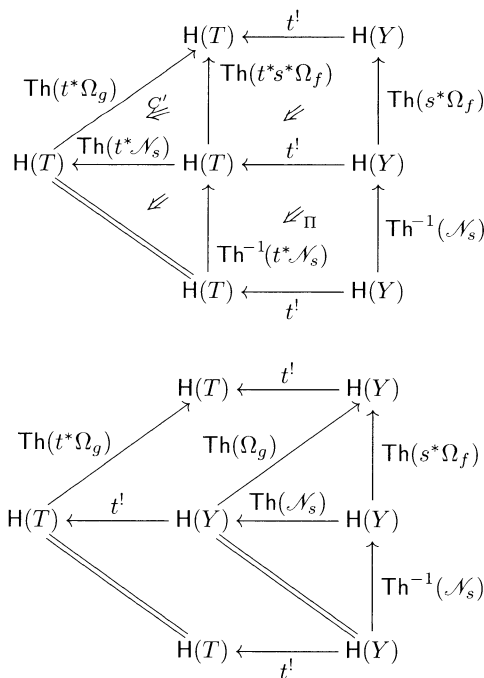
sont les mêmes. Pour cela on remarque (en revenant aux définitions) que la composée du premier des deux diagrammes est égal à celle de :

(106)



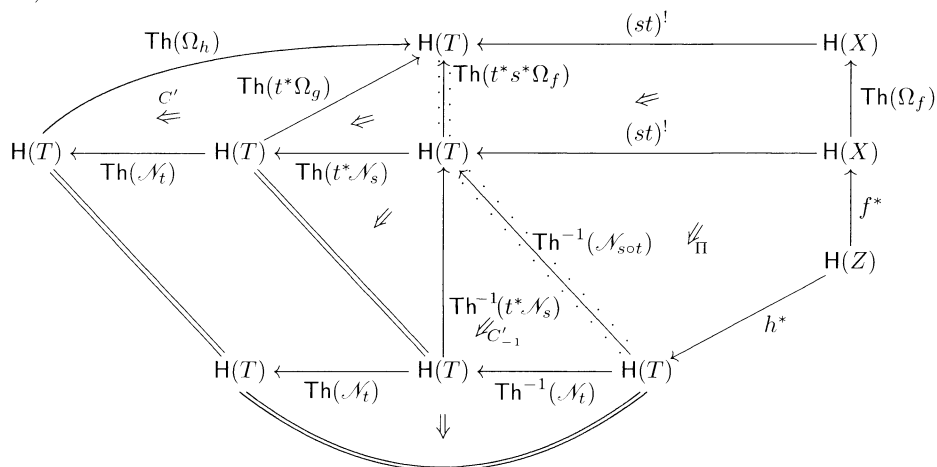
En utilisant le fait que les 2-isomorphismes de composition sont des isomorphismes d'autoéquivalences de la restriction de ${}^{\text{Imm}}H^!$ à $(\text{Sch}/Y)^{\text{Imm}}$ (voir proposition 1.5.11), on voit que les composées des deux diagrammes planaires ci-dessous sont égales :

(107)



En utilisant la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la composition des immersions fermées sous la forme donnée dans le corollaire 1.6.35, on obtient en fin de compte que la composée de (108) est égale à la composée du diagramme planaire :

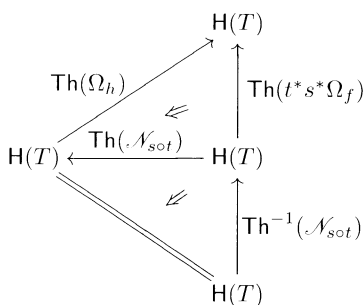
(110)



Donc pour terminer la preuve de la proposition, il suffit de montrer que la partie du diagramme planaire (110) située à gauche de la ligne en pointillé :

$$H(T) \xrightarrow{\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{\text{tot}})} H(T) \xrightarrow{\text{Th}(t^*s^*\Omega_f)} H(T)$$

définit le même 2-isomorphisme que le diagramme planaire :



On laisse ceci en exercice. La preuve de la proposition est terminée. \square

Compatibilité avec l'oubli de structure. — On termine les préliminaires avec la proposition suivante.

Proposition 1.6.42. — On suppose comme d'habitude, donné un triangle commutatif de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec f et g lisses et s une immersion fermée. On suppose donné en plus un S -morphisme lisse :

$$Z \xrightarrow{b} B$$

Le diagramme de 2-isomorphismes suivant :

$$\begin{array}{ccc} s^!(b \circ f)^! & \xrightarrow{\Pi} & (b \circ g)^! \\ c^! \downarrow & & \downarrow c^! \\ s^!f^!b^! & \xrightarrow{\Pi} & g^!b^! \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Cette proposition se prouve de la même manière que les trois précédentes. Toutefois elle est bien plus simple que les autres. Elle sera donc laissée en exercice. \square

1.6.5.2. *La construction du foncteur croisé :* $(H^*, H_*, H_!, H^!)$. — On veut appliquer le théorème 1.3.1 aux 2-foncteurs partiels :

$$\begin{aligned} (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{Imm}} &\longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R} \\ (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{Liss}} &\longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R} \end{aligned}$$

Il faut donc définir pour tout carré commutatif (C) :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{k} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

avec f et g lisses et i et k des immersions fermées un 2-isomorphisme :

$$a(C) : k^!f^! \xrightarrow{\sim} g^!i^!$$

et vérifier ensuite la compatibilité avec les compositions des carrés.

Pour construire $a(C)$, on forme le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{s} & X \times_Y T & \xrightarrow{i'} & X \\ & \searrow g & \downarrow f' & & \downarrow f \\ & & T & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Et on prend $a(C)$ la composée des 2-isomorphismes :

$$k^! f^! \xrightarrow{c^*} s^! i'^! f^! \xrightarrow{(Ex^{!!})^{-1}} s^! f'^! i^! \xrightarrow{\Pi} g^! i^!$$

En d'autres termes, $a(C)$ est la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc} & & k^! & & \\ & \swarrow & \downarrow c^! & \searrow & \\ H(Z) & \xleftarrow{s^!} & H(X \times_Y T) & \xleftarrow{i'^!} & H(X) \\ & \swarrow g^! & \uparrow f^! & \swarrow (Ex^{!,!})^{-1} & \uparrow f^! \\ & & H(T) & \xleftarrow{i^!} & H(Y) \end{array}$$

Proposition 1.6.43. — *Les 2-isomorphismes $a(C)$ sont compatibles avec la composition verticale des carrés.*

Démonstration. — On se donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{l} & W \\ n \downarrow & & \downarrow m \\ Z & \xrightarrow{k} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

avec f, g, n et m des morphismes lisses et i, k et l des immersions fermées. On forme le diagramme de S -schémas :

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{t} & W \times_X Z & \xrightarrow{s} & W \times_Y T & \xrightarrow{i} & W \\ & \searrow n & \downarrow m & & \downarrow m & & \downarrow m \\ & & Z & \xrightarrow{s} & X \times_Y T & \xrightarrow{i} & X \\ & & & \searrow g & \downarrow f & & \downarrow f \\ & & & & T & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Tous les carrés de ce diagrammes sont cartésiens. Il s'agit de prouver que le diagramme de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 (i \circ s \circ t)^!(f \circ m)^! & \xrightarrow{\sim} & (g \circ n)^! i^! \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 (i \circ s \circ t)^! m^! f^! & \xrightarrow{\sim} n^! (i \circ s)^! f^! \xrightarrow{\sim} n^! g^! i^! &
 \end{array}$$

est commutatif. En d'autres termes il s'agit de voir que les composées des deux diagrammes planaires ci-dessous sont égales :

$$(111) \quad \begin{array}{ccccc}
 & & (ist)^! & & \\
 & \swarrow & \Downarrow c^! & \searrow & \\
 H(V) & \xleftarrow{(st)^!} & H(W \times_Y T) & \xleftarrow{i^!} & H(W) \\
 & \swarrow (gn)^! & \uparrow (fm)^! & \swarrow (Ex^{!,!})^{-1} & \uparrow (fm)^! \\
 & & H(T) & \xleftarrow{i^!} & H(Y)
 \end{array}$$

et

$$(112) \quad \begin{array}{ccccccc}
 & & (ist)^! & & & & \\
 & \swarrow & \Downarrow c^! & \searrow & & & \\
 & & (is)^! & & & & \\
 & \swarrow & \Downarrow (Ex^{!,!})^{-1} & \searrow & & & \\
 H(V) & \xleftarrow{t^!} & H(W \times_X Z) & & H(W) & & \\
 & \swarrow n^! & \downarrow m^! & \swarrow (is)^! & \downarrow m^! & \swarrow c^! & \\
 & & H(Z) & \xleftarrow{s^!} & H(X \times_Y T) & \xleftarrow{i^!} & H(X) \\
 & \swarrow c^! & \downarrow g^! & \swarrow \Pi & \downarrow f^! & \swarrow (Ex^{!,!})^{-1} & \downarrow f^! \\
 & & H(T) & \xleftarrow{i^!} & H(Y) & &
 \end{array}$$

Pour prouver ceci, on travaillera sur le second diagramme planaire en le simplifiant. En utilisant la compatibilité des 2-isomorphismes d'échange $Ex^{!!}$ de la proposition 1.6.36 avec la composition horizontale des carrés, on voit que la composée du diagramme

planaire (112) est égale à celle de :

$$(113) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & (ist)^! & & \\ & & & & \downarrow c^! & & \\ & & & & (is)^! & & \\ & & & & \downarrow c^! & & \\ H(V) & \xleftarrow{t^!} & H(W \times_X Z) & \xleftarrow{s^!} & H(W \times_Y T) & \xleftarrow{i^!} & H(W) \\ & \nwarrow n^! & \uparrow m^! & \nwarrow (Ex^{!,!})^{-1} & \uparrow m^! & \nwarrow (Ex^{!,!})^{-1} & \uparrow m^! \\ & & H(Z) & \xleftarrow{s^!} & H(X \times_Y T) & \xleftarrow{i^!} & H(X) \\ & & \nwarrow g^! & \nwarrow \Pi & \uparrow f^! & \nwarrow (Ex^{!,!})^{-1} & \uparrow f^! \\ & & & & H(T) & \xleftarrow{i^!} & H(Y) \end{array} \quad \begin{array}{l} (gn)^! \\ (fm)^! \end{array}$$

En utilisant la compatibilité des 2-isomorphismes d'échange $Ex^{!,!}$ de la proposition 1.6.36 avec la composition verticale des carrés, ainsi que l'axiome de cocycle pour le 2-isomorphismes de connexion $c^!$ du 2-foncteur $\mathrm{Imm}^{\mathrm{H}^!}$, on obtient le diagramme ci-dessous qui a la même composée que (113) :

$$(114) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & (ist)^! & & \\ & & & & \downarrow c^! & & \\ & & & & (st)^! & & \\ & & & & \downarrow c^! & & \\ H(V) & \xleftarrow{t^!} & H(W \times_X Z) & \xleftarrow{s^!} & H(W \times_Y T) & \xleftarrow{i^!} & H(W) \\ & \nwarrow n^! & \uparrow m^! & \nwarrow (Ex^{!,!})^{-1} & \uparrow m^! & \nwarrow (Ex^{!,!})^{-1} & \uparrow m^! \\ & & H(Z) & \xleftarrow{s^!} & H(X \times_Y T) & \xleftarrow{c^!} & H(X) \\ & & \nwarrow g^! & \nwarrow \Pi & \uparrow f^! & \nwarrow (Ex^{!,!})^{-1} & \uparrow f^! \\ & & & & H(T) & \xleftarrow{i^!} & H(Y) \end{array} \quad \begin{array}{l} (gn)^! \\ (fm)^! \end{array}$$

En utilisant la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la restriction suivant le morphisme lisse m (voir la proposition 1.6.38), on voit que la composée de (114)

est égale à la composée du diagramme planaire :

(115)

Diagram (115) is a complex commutative diagram with the following nodes and arrows:

- Top row: $H(V) \xleftarrow{t^!} H(W \times_X Z) \xleftarrow{s^!} H(W \times_Y T) \xleftarrow{i^!} H(W)$
- Bottom row: $H(V) \xleftarrow{(gn)^!} H(T) \xleftarrow{i^!} H(Y)$
- Central node: $H(Z)$
- Arrows from $H(W \times_X Z)$ to $H(Z)$: $m^!$ (vertical), $n^!$ (diagonal down-left), and $c^!$ (diagonal down-right).
- Arrows from $H(W \times_Y T)$ to $H(Z)$: $(gm)^! \Pi$ (diagonal down-left) and $g^!$ (diagonal down-right).
- Arrows from $H(W)$ to $H(Y)$: $(fm)^!$ (vertical), $(Ex'')^{-1}$ (diagonal down-left), and $(fm)^!$ (diagonal down-right).
- Curved arrows at the top: $(st)^!$ from $H(W)$ to $H(V)$ and $(ist)^!$ from $H(W)$ to $H(V)$.
- Vertical arrow from $H(W \times_X Z)$ to $H(W \times_Y T)$: $c^!$ with a double arrow \Downarrow .
- Other arrows: $(gn)^!$ from $H(Z)$ to $H(V)$, $(gn)^!$ from $H(Z)$ to $H(T)$, and $(gm)^!$ from $H(Z)$ to $H(T)$.

D'après la proposition 1.6.42, les composées des deux diagrammes planaires suivants sont égales :

Two commutative diagrams are shown, representing compositions of maps:

- Left Diagram:** Nodes are $H(V)$, $H(W \times_X Z)$, $H(Z)$, $H(T)$, and $H(Y)$. Arrows include $t^!$, $n^!$, $m^!$, $(gm)^!$, $c^!$, $g^!$, and $(gn)^!$.
- Right Diagram:** Nodes are $H(V)$, $H(W \times_X Z)$, $H(T)$, and $H(Y)$. Arrows include $t^!$, $(gm)^!$, $(gn)^!$, and $i^!$.

On voit alors que la composée de (115) est égale à la composée du diagramme planaire :

(116)

Diagram (116) is a commutative diagram similar to (115) but with a different central structure:

- Top row: $H(V) \xleftarrow{t^!} H(W \times_X Z) \xleftarrow{s^!} H(W \times_Y T) \xleftarrow{i^!} H(W)$
- Bottom row: $H(V) \xleftarrow{(gn)^!} H(T) \xleftarrow{i^!} H(Y)$
- Central node: $H(Z)$
- Arrows from $H(W \times_X Z)$ to $H(Z)$: $m^!$ (vertical), $n^!$ (diagonal down-left), and $c^!$ (diagonal down-right).
- Arrows from $H(W \times_Y T)$ to $H(Z)$: $(gm)^! \Pi$ (diagonal down-left) and $g^!$ (diagonal down-right).
- Arrows from $H(W)$ to $H(Y)$: $(fm)^!$ (vertical), $(Ex'')^{-1}$ (diagonal down-left), and $(fm)^!$ (diagonal down-right).
- Curved arrows at the top: $(st)^!$ from $H(W)$ to $H(V)$ and $(ist)^!$ from $H(W)$ to $H(V)$.
- Vertical arrow from $H(W \times_X Z)$ to $H(W \times_Y T)$: $c^!$ with a double arrow \Downarrow .
- Other arrows: $(gn)^!$ from $H(Z)$ to $H(V)$, $(gn)^!$ from $H(Z)$ to $H(T)$, and $(gm)^!$ from $H(Z)$ to $H(T)$.

En utilisant en fin de compte la compatibilité du 2-isomorphisme de pureté avec la composition des immersions fermées sous la forme donnée dans la proposition 1.6.41, on obtient le diagramme planaire suivant qui a la même composée que (116) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (l_0 k_0 i)^! & & \\
 & \swarrow & \downarrow c^! & \searrow & \\
 & (k_0 i)^! & & & \\
 H(V) & & H(W \times_Y T) \xleftarrow{i^!} H(W) & & \\
 & \nwarrow \Pi & \uparrow (fm)^! \not\cong (Ex'')^{-1} & \uparrow (fm)^! & \\
 & & H(T) \xleftarrow{i^!} H(Y) & & \\
 & \swarrow (gn)^! & & &
 \end{array}$$

On retrouve donc le diagramme planaire (111). La proposition est prouvée. \square

La compatibilité avec la composition horizontale des carrés est un peu plus délicate :

Proposition 1.6.44. — *Les 2-isomorphismes $a(C)$ sont compatibles avec la composition horizontale des carrés.*

Démonstration. — On se donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 W & \xrightarrow{l} & Z & \xrightarrow{k} & X \\
 h \downarrow & & g \downarrow & & f \downarrow \\
 V & \xrightarrow{j} & T & \xrightarrow{i} & Y
 \end{array}$$

les flèches verticales étant lisses et les flèches horizontales étant des immersions fermées. On forme les deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc}
 W & \xrightarrow{l_0} & V \times_T Z & \xrightarrow{j} & Z & \xrightarrow{k_0} & X \times_Y T \xrightarrow{i} X \\
 & \searrow h & \downarrow g & & g \downarrow & & f \downarrow \\
 & & V & \xrightarrow{j} & T & \xlongequal{\quad} & T \xrightarrow{i} Y
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc}
 W & \xrightarrow{l_0} & V \times_T Z & \xrightarrow{k_1} & V \times_Y X & \xrightarrow{j} & X \times_Y T \xrightarrow{i} X \\
 & \searrow h & \searrow g & & \downarrow f & & \downarrow f \\
 & & & & V & \xrightarrow{j} & T \xrightarrow{i} Y \\
 & & & & & & \downarrow f
 \end{array}$$

Notre but est de prouver que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (k \circ l)^! f^! & \xrightarrow{\sim} & h^! (i \circ j)^! \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 l^! k^! f^! & \xrightarrow{\sim} l^! g^! i^! \xrightarrow{\sim} & h^! j^! i^!
 \end{array}$$

est commutatif. C'est-à-dire il faut prouver que la composée du diagramme planaire suivant :

$$\begin{array}{c}
 (kl)^! \\
 \swarrow \quad \downarrow c' \quad \searrow \\
 \begin{array}{ccccccc}
 & (jl_0)^! & & & (ik_0)^! & & \\
 & \swarrow \quad \downarrow c' \quad \searrow & & \swarrow \quad \downarrow c' \quad \searrow & & & \\
 H(W) & \xleftarrow{l_0^!} & H(V \times_T Z) & \xleftarrow{j^!} & H(Z) & \xleftarrow{k_0^!} & H(X \times_Y T) \xleftarrow{i^!} H(X) \\
 & \swarrow \Pi & \uparrow g^! & \swarrow \Pi & \uparrow f^! & \swarrow (Ex^{!!})^{-1} & \uparrow f^! \\
 & h^! & & (Ex^{!!})^{-1} g^! & & & \\
 & & H(V) & \xleftarrow{j^!} & H(T) = H(T) & \xleftarrow{i^!} & H(Y) \\
 & & & & \downarrow c' & & \\
 & & & & (ij)^! & &
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (117)$$

est égal au 2-isomorphisme $a(-)$ associé au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{k \circ l} & X \\
 h \downarrow & & \downarrow f \\
 V & \xrightarrow{i \circ j} & Y
 \end{array}
 \quad (118)$$

On travaillera sur le diagramme planaire (117). L'axiome de cocycle pour les 2-isomorphismes de connexion $c^!$ du 2-foncteur ${}^{\text{Imm}}\mathbf{H}^!$ montre qu'on peut remplacer (117) par le diagramme planaire suivant sans changer la composée :

$$(119) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & (kl)^! & & \\ & & & & \Downarrow c^! & (ik_0j)^! & \\ & & & & (k_0j)^! & \Downarrow c^! & \\ & & & & & & \\ \mathbf{H}(W) & \xleftarrow{l_0^!} & \mathbf{H}(V \times_T Z) & \xleftarrow{j^!} & \mathbf{H}(Z) & \xleftarrow{k_0^!} & \mathbf{H}(X \times_Y T) & \xleftarrow{i^!} & \mathbf{H}(X) \\ & \searrow h^! & \uparrow g^! & \swarrow (Ex'')^{-1} g^! & \uparrow g^! & \swarrow \Pi & \uparrow f^! & \swarrow (Ex'')^{-1} & \uparrow f^! \\ & & \mathbf{H}(V) & \xleftarrow{j^!} & \mathbf{H}(T) & \xlongequal{\quad} & \mathbf{H}(T) & \xleftarrow{i^!} & \mathbf{H}(Y) \\ & & & & \Downarrow c^! & & & & \\ & & & & (ij)^! & & \end{array}$$

Remarquons que le triangle commutatif de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} V \times_T Z & \xrightarrow{k_1} & V \times_Y X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & V \end{array}$$

est obtenu à partir du triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{k_0} & X \times_Y T \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & T \end{array}$$

par pull-back suivant l'immersion fermée $j : V \longrightarrow T$. On a donc d'après la proposition 1.6.40 un solide commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{H}(V \times_T Z) & \xleftarrow{j^!} & \mathbf{H}(Z) & & \\ & \searrow k_1^! & \uparrow & \swarrow k_0^! & \\ & & \mathbf{H}(V \times_Y X) & \xleftarrow{j^!} & \mathbf{H}(X \times_Y T) \\ & \nearrow f^! & \downarrow & \nearrow f^! & \\ \mathbf{H}(V) & \xleftarrow{j^!} & \mathbf{H}(T) & & \end{array}$$

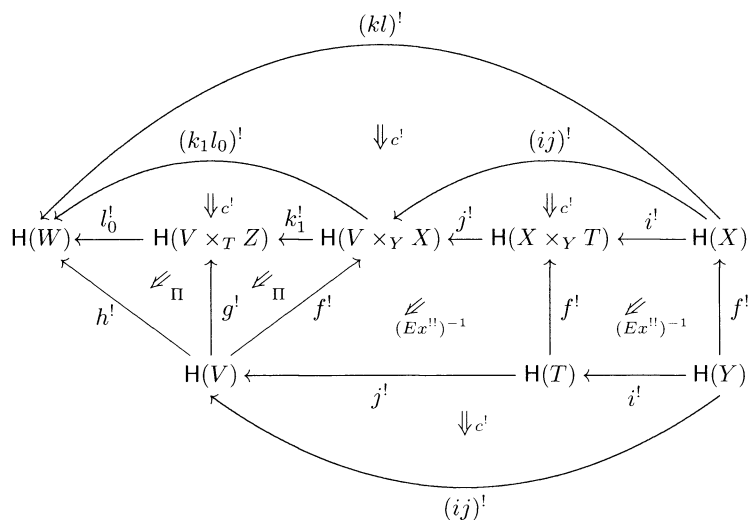
La ligne non pleine est le 1-morphisme $(j \circ k_1)^! = (k_0 \circ j)^!$ et les 2-morphismes adjacents à ce 1-morphisme sont les 2-isomorphismes de connexions $c^!$ du 2-foncteur ${}^{\text{Imm}}H^!$ (les morphismes k_0 , k_1 et j sont des immersions fermées). Il vient que les deux diagrammes plans suivants ont la même composée :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & (k_0 j)^! & & \\
 & \swarrow & \Downarrow c^! & \searrow & \\
 H(V \times_T Z) & \xleftarrow{j^!} & H(Z) & \xleftarrow{k_0^!} & H(X \times_Y T) \\
 \uparrow g^! & \swarrow (Ex^{! \cdot 1})^{-1} & \uparrow g^! & \swarrow \Pi & \nearrow f^! \\
 H(V) & \xleftarrow{j^!} & H(T) & &
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccccc}
 & & (jk_1)^! & & \\
 & \swarrow & \Downarrow c^! & \searrow & \\
 H(V \times_T Z) & \xleftarrow{k_1^!} & H(V \times_Y X) & \xleftarrow{j^!} & H(X \times_Y T) \\
 \uparrow g^! & \swarrow \Pi & \nearrow f^! & \swarrow (Ex^{!!})^{-1} & \nearrow f^! \\
 H(V) & \xleftarrow{j^!} & H(T) & &
 \end{array}
 \end{array}$$

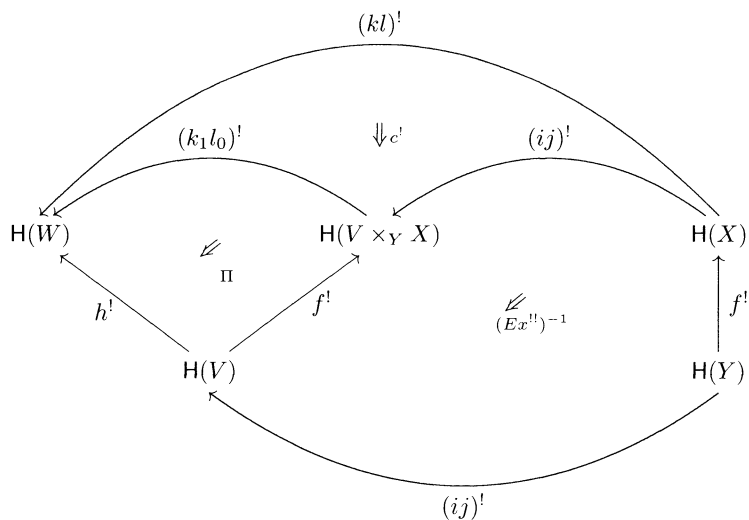
On voit ainsi que la composée du diagramme planaire (119) est égale à la composée de :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & (kl)^! & & & \\
 & \swarrow & & \Downarrow c^! & \searrow & & \\
 & & & (ik_0 j)^! & & & \\
 & \swarrow & & \Downarrow c^! & \searrow & & \\
 & & & (jk_1)^! & & & \\
 & \swarrow & & \Downarrow c^! & \searrow & & \\
 H(W) & \xleftarrow{l_0^!} & H(V \times_T Z) & \xleftarrow{k_1^!} & H(V \times_Y X) & \xleftarrow{j^!} & H(X \times_Y T) & \xleftarrow{i^!} & H(X) \\
 \swarrow h^! & \swarrow \Pi & \uparrow g^! & \swarrow \Pi & \nearrow f^! & \swarrow (Ex^{!!})^{-1} & \nearrow f^! & \swarrow (Ex^{!!})^{-1} & \nearrow f^! \\
 & & H(V) & \xleftarrow{j^!} & H(T) & \xleftarrow{i^!} & H(Y) \\
 & & \downarrow c^! & & & & \\
 & & (ij)^! & & & &
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (120)$$

En utilisant encore une fois l'axiome de cocycle pour les 2-isomorphismes de connexion $c^!$ du 2-foncteur ${}^{\text{Imm}}\mathbf{H}^!$, on obtient le diagramme planaire :



En utilisant, d'une part la compatibilité des 2-isomorphismes de pureté avec la composition des immersions fermées telle qu'elle est donnée dans la proposition 1.6.41 et d'autre part la compatibilité des 2-isomorphismes $Ex^{!!}$ de la proposition 1.6.36 avec la composition horizontale des carrés cartésiens, on obtient que la composée de (120) est égale à celle de :



Mais ce diagramme planaire n'est autre que celui qui définit le 2-isomorphisme $a(-)$ associé au carré (118). La proposition est prouvée. \square

Ainsi, on est dans les conditions d'application du théorème 1.3.1. On obtient donc un 2-foncteur contravariant :

$$H^! : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

et des isomorphismes de 2-foncteurs :

$$\text{Imm} H^! \xrightarrow{\sim} \text{Imm} H_! \quad \text{et} \quad \text{Liss} H^! \xrightarrow{\sim} \text{Liss} H_!$$

On notera comme d'habitude $f^!$ à la place de $H^!(f)$.

Pour construire le 2-foncteur $H_!$, on remarque que pour tout S -morphisme f , le 1-morphisme $f^!$ admet un adjoint à gauche. En effet si $f = p \circ s$ est une factorisation de f avec s une immersion fermée et p lisse on peut choisir comme adjoint à gauche : $p_{\#} \text{Th}^{-1}(\Omega_p) s_*$.

Lemme 1.6.45. — *Quitte à remplacer $H^!$ et $H_!$ par des 2-foncteurs isomorphes, on peut supposer qu'on a les égalités :*

- $\text{Liss} H^! = \text{Liss} H_!$,
- $\text{Imm} H^! = \text{Imm} H_!$,
- $\text{Liss} H_! = \text{Liss} H_!$,
- $\text{Imm} H_! = \text{Imm} H_*$.

Dans la suite on supposera la conclusion du lemme ci-dessus satisfaite. On arrête donc de souligner le point d'exclamation ; on écrit simplement : $H^!$, $H_!$, $f^!$ et $f_!$. On résume ce qui a été démontré dans la proposition suivante :

Proposition 1.6.46. — *Il existe à un unique isomorphisme près⁽²¹⁾, un couple de 2-foncteurs :*

$$H^!, H_! : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

globalement adjoints l'un de l'autre ($H^!$ est adjoint global à droite de $H_!$) tels que :

- $H^!$ prolonge (au sens strict) les deux 2-foncteurs : $\text{Imm} H^!$ et $\text{Liss} H^!$,
- $H_!$ prolonge (au sens strict) les deux 2-foncteurs : $\text{Imm} H_!$ et $\text{Liss} H_!$,
- l'échange par rapport aux carrés commutatifs sur le couple $(\text{Imm} H^!, \text{Liss} H^!)$ construit dans la sous-section 1.6.5.2 devient l'échange trivial induit par les 2-isomorphismes de connexion de $H^!$.

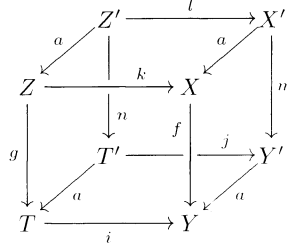
Il nous reste à construire la structure de foncteurs croisés sur le quadruplet : $(H^*, H_*, H_!, H^!)$. On commence par définir un échange sur le couple $(H^*, H^!)$. Plus précisément, on va recoller les deux échanges sur :

- $(H^*, \text{Imm} H^!)$ (voir proposition 1.4.15),
- $(H^*, \text{Liss} H^!)$ (voir proposition 1.5.19).

⁽²¹⁾Nous ne sommes pas complètement convaincu de l'unicité à un unique isomorphisme près du foncteur $H^!$ prolongeant les 2-foncteurs $\text{Imm} H^!$ et $\text{Liss} H^!$ lorsqu'on n'impose pas la condition finale.

On se servira de la proposition 1.2.7. Pour pouvoir appliquer 1.2.7 on a besoin de :

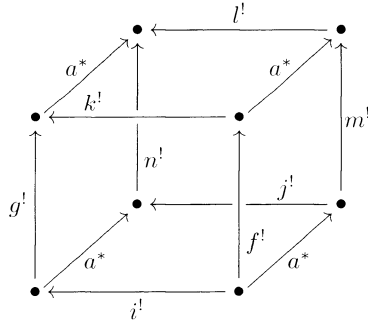
Proposition 1.6.47. — *Supposons donné un diagramme commutatif de S -schémas :*



avec i, j, k et l des immersions fermées, f, g, m et n des morphismes lisses et tels que les quatre carrés ayant deux cotés parallèles libellés a sont cartésiens. Alors, le diagramme de 2-isomorphismes ci-dessous :

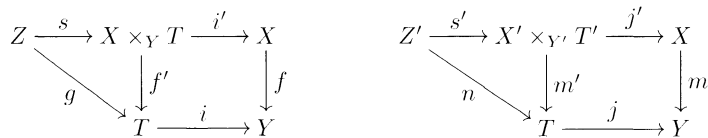
$$\begin{array}{ccccc}
 l^! m^! a^* & \xrightarrow{Ex^! *} & l^! a^* f^! & \xrightarrow{Ex^! *} & a^* k^! f^! \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 n^! j^! a^* & \xrightarrow{Ex^! *} & n^! a^* i^! & \xrightarrow{Ex^! *} & a^* g^! i^!
 \end{array}$$

est commutatif. En d'autres termes, le cube :

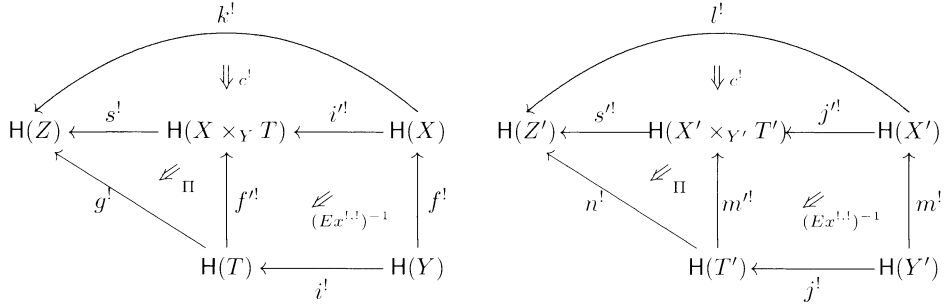


est commutatif.

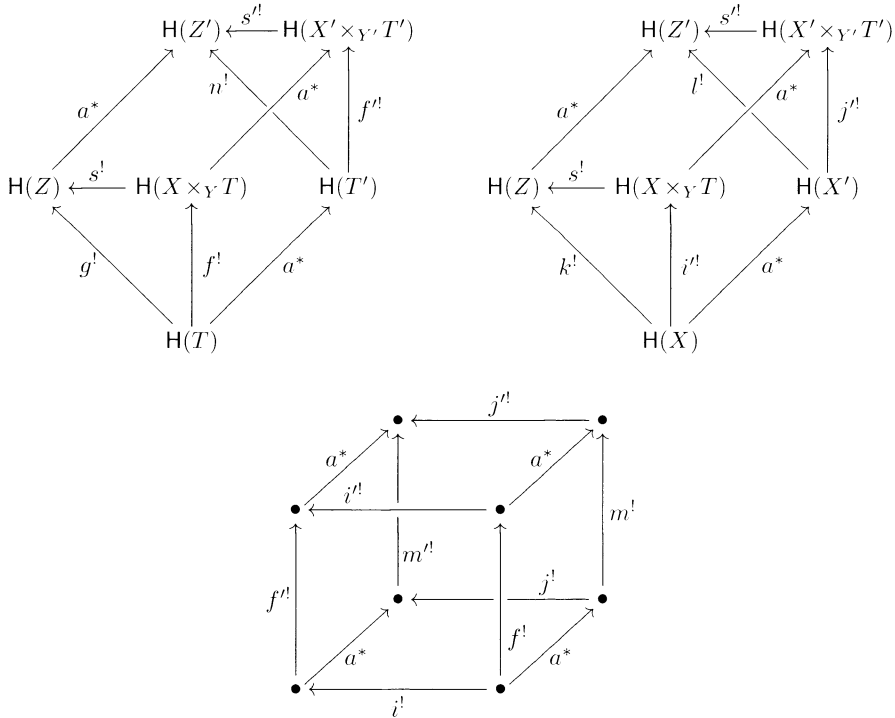
Démonstration. — On forme les deux digrammes commutatifs de S -schémas :



Ces deux diagrammes sont reliés par des S -morphisms a , tous déduits de $Y' \longrightarrow Y$ par pull-back. On forme un diagramme solide à partir des deux diagrammes planaires :

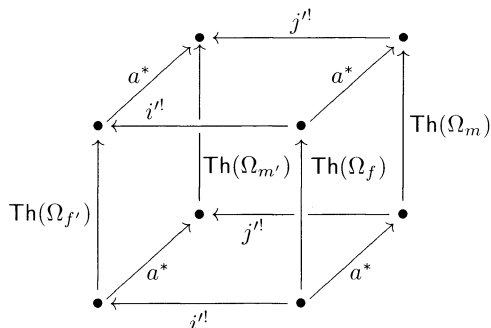


en reliant les sommets se trouvant au même niveau par un 1-morphisme a^* et en mettant sur les nouvelles faces créées un 2-morphisme $Ex^{!*}$. Il s'agit bien entendu de prouver que ce diagramme solide est commutatif. Pour cela on le divise en trois sous-diagrammes solides :

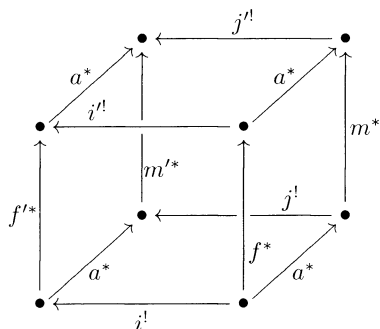


Le premier diagramme solide est commutatif d'après la proposition 1.6.39. Le second est commutatif par la compatibilité des 2-morphismes d'échange avec les 2-isomorphismes de connexion du 2-foncteur ${}^{\text{Imm}}H^!$. Il reste donc à prouver que le cube est commutatif. Pour cela on revient à la définition des 1-morphismes $f^!$, $f'^!$, $m^!$ et $m'^!$

et de l'échange sur $(H^*, {}^{\text{Liss}}H^!)$. On voit donc que ce cube se factorise par le cube commutatif :



Il suffit donc de prouver la commutation du cube :



On utilise alors l'astuce (devenue classique) qui consiste à diviser le cube suivant les deux 1-morphismes (parallèles) :

- $(f \circ a)^* = (a \circ m)^*$,
- $(f' \circ a)^* = (a \circ m')^*$,

et à utiliser le fait qu'on a un échange sur le couple $({}^{\text{Imm}}H^!, H^*)$. La proposition est prouvée. \square

À ce stade on dispose donc d'un échange contradirectionnel de type \swarrow sur le couple de 2-foncteurs $(H^*, H^!)$ pour la classe des carrés cartésiens. On veut prouver que cet échange fait partie d'une structure de foncteur croisé sur le quadruplet $(H^*, H_*, H_!, H^!)$. Mais ceci est presque clair ! En effet, en utilisant l'adjonction globale entre $H^!$ et $H_!$ on obtient un échange sur le couple $(H^*, H_!)$. Il suffira par la proposition 1.2.14 de voir que cet échange est un isoéchange. Mais il suffit de vérifier ceci pour les restrictions de cet échange à :

- $(H^*, {}^{\text{Imm}}H_!)$,
- $(H^*, {}^{\text{Liss}}H_!)$.

Ces échanges ne sont autres que ceux définis dans les propositions 1.4.15 et 1.5.19. Le fait que le premier échange est un isoéchange découle trivialement du théorème de

changement de base pour une immersion fermée et de l'égalité $i_! = i_*$ valable pour une immersion fermée i .

Le fait que le second échange est un isoéchange découle de l'axiome 3 et de l'égalité $f_! = f_{\#} \text{Th}^{-1}(\Omega_f)$ valable pour un S -morphisme lisse f .

On a donc prouvé le résultat suivant :

Proposition 1.6.48. — *Il existe une unique structure de foncteurs croisés sur le quadruplet $(H^*, H_*, H_!, H^!)$ qui prolonge les deux foncteurs croisés :*

- $(H^*, H_*, {}^{\text{Imm}}H_!, {}^{\text{Imm}}H^!)$ de la proposition 1.4.15,
- $(H^*, H_*, {}^{\text{Liss}}H_!, {}^{\text{Liss}}H^!)$ de la proposition 1.5.19.

On termine la section par le résultat suivant :

Lemme 1.6.49. — *La structure d'échange sur le couple $({}^{\text{Imm}}H_*, H_!)$ induite par restriction du foncteur croisé qu'on vient de construire coïncide modulo l'égalité ${}^{\text{Imm}}H_* = {}^{\text{Imm}}H_!$ avec l'échange induit par restriction de l'échange trivial⁽²²⁾ sur le couple $(H_!, H_!)$.*

Démonstration. — Par construction, l'échange sur $({}^{\text{Imm}}H_*, H_!)$ prolonge les deux échanges sur :

1. $({}^{\text{Imm}}H_*, {}^{\text{Imm}}H_!)$ de la proposition 1.4.15,
2. $({}^{\text{Imm}}H_*, {}^{\text{Liss}}H_!)$ de la proposition 1.5.19.

Par l'unicité du prolongement, il suffit de prouver que modulo l'égalité ${}^{\text{Imm}}H_* = {}^{\text{Imm}}H_!$ ces échanges coïncident respectivement avec les échanges sur :

1. $({}^{\text{Imm}}H_!, {}^{\text{Imm}}H_!)$ induit par les 2-isomorphismes de connexions de $H_!$,
2. $({}^{\text{Imm}}H_!, {}^{\text{Liss}}H_!)$ induit également par les 2-isomorphismes de connexions de $H_!$.

En ce qui concerne les premiers échanges, il suffit d'invoquer le foncteur croisé sur $(H^*, H_*, {}^{\text{Imm}}H_!, {}^{\text{Imm}}H^!)$ de la proposition 1.4.15.

On s'intéresse donc exclusivement aux deux échanges sur :

- $({}^{\text{Imm}}H_*, {}^{\text{Liss}}H_!)$ de la proposition 1.5.19,
- $({}^{\text{Imm}}H_!, {}^{\text{Liss}}H_!)$ induit par les 2-isomorphismes de connexions de $H_!$.

En prenant les adjoints globaux à gauche de tous les 2-foncteurs (ils en ont tous même ${}^{\text{Imm}}H_*$) on se ramène à prouver que les deux échanges sur :

- $({}^{\text{Imm}}H^!, {}^{\text{Liss}}H^!)$ de la proposition 1.6.36,
- $({}^{\text{Imm}}H^!, {}^{\text{Liss}}H^!)$ induit par les 2-isomorphismes de connexion de $H^!$,

sont égaux. Mais ceci est évident par la construction même du 2-foncteur $H^!$ comme étant l'unique 2-foncteur qui prolonge ${}^{\text{Imm}}H^!$ et ${}^{\text{Liss}}H^!$ et tel que l'échange sur les carrés commutatifs $a(\cdot)$ construit dans la sous-section 1.6.5.2 devient l'échange trivial induit par les 2-isomorphismes de connexion de $H^!$. \square

⁽²²⁾C'est-à-dire celui obtenu à l'aide des 2-isomorphismes de connexion.

1.7. Le morphisme de 2-foncteurs $H_! \mapsto H_*$. Fin de la démonstration

Dans cette section, afin pour pouvoir utiliser la 2-dualité, on va « alléger les propriétés » établies jusqu'ici. On suppose donnés :

- un foncteur croisé sur un quadruplet $(H^*, H_*, H_!, H^!)$ de 2-foncteurs de (Sch/S) dans $\mathfrak{T}\mathfrak{R}$,
- pour tout S -schéma X et tout \mathcal{O}_X -module localement libre \mathcal{M} , deux équivalences⁽²³⁾ :

$$E(\mathcal{M}), E_{-1}(\mathcal{M}) : H(X) \longrightarrow H(X)$$

quasi-inverses l'une de l'autre. De plus, si \mathcal{M} est le faisceau nul, ces deux équivalences sont 2-isomorphes au 1-morphisme identité, et si \mathcal{M} est isomorphe à \mathcal{M}' les équivalences obtenues sont 2-isomorphes.

On suppose que ces données vérifient les propriétés suivantes.

1. $\text{Imm} H_* = \text{Imm} H_!$, et les échanges obtenus par restriction du foncteur croisé sur les couples :
 - $(H_*, \text{Imm} H_! = \text{Imm} H_*)$
 - $(\text{Imm} H_! = \text{Imm} H_*, H_!)$
 coïncident avec les structures triviales⁽²⁴⁾.
2. *Homotopie.* Soit $q : \mathbb{A}_X^1 \longrightarrow X$ la projection de la droite affine au-dessus d'un S -schémas X . Les deux 2-morphismes d'unités et de counité :

$$1 \xrightarrow{\eta} q_* q^* \quad \text{et} \quad q_! q^! \xrightarrow{\delta} 1$$

sont inversibles.

3. *Localité.* Il existe deux 2-triangles distingués :

$$\begin{aligned} i_! i^! &\xrightarrow{\delta} 1 \xrightarrow{\eta} j_* j^* \longrightarrow i_! i^! [+1] \\ j_! j^! &\xrightarrow{\delta} 1 \xrightarrow{\eta} i_* i^* \longrightarrow j_! j^! [+1] \end{aligned}$$

4. Pour $f : Y \longrightarrow X$ et \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -module localement libre, il existe des 2-isomorphismes⁽²⁵⁾ :

$$\begin{aligned} f^* E(\mathcal{M}) &\xrightarrow{\sim} E(f^* \mathcal{M}) f^* & \text{et} & & f^! E(\mathcal{M}) &\xrightarrow{\sim} E(f^* \mathcal{M}) f^! \\ f^* E_{-1}(\mathcal{M}) &\xrightarrow{\sim} E_{-1}(f^* \mathcal{M}) f^* & \text{et} & & f^! E_{-1}(\mathcal{M}) &\xrightarrow{\sim} E_{-1}(f^* \mathcal{M}) f^! \end{aligned}$$

⁽²³⁾ On ne demande pas que ces équivalences admettent des isomorphismes de composition associés aux suites exactes courtes de \mathcal{O}_X -modules localement libres.

⁽²⁴⁾ La seconde propriété est le contenu du lemme 1.6.49.

⁽²⁵⁾ Ces 2-isomorphismes ne sont pas supposés former une autoéquivalences d'aucun des 2-foncteurs H^* , H_* , $H_!$ ou $H^!$. Ils sont encore moins supposés être compatibles avec les échanges du foncteur croisé.

5. Pour $f : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme lisse, on a des 2-isomorphismes :

$$f^! \xrightarrow{\sim} E(\Omega_f) f^* \quad \text{et} \quad f^* \xrightarrow{\sim} E_{-1}(\Omega_f) f^!$$

Les données et les conditions précédentes sont permutées par la 2-dualité dans le sens précis qu'on décrira ci-dessous. Pour tout S -schéma X on note $G(X)$ la catégorie triangulée opposée $H(X)^{\text{op}}$ de $H(X)$. Pour tout S -morphisme f on pose $f_* = (f_!)^{\text{op}}$, $f^* = (f^!)^{\text{op}}$, $f_{\nabla} = (f_*)^{\text{op}}$ et $f^{\nabla} = (f^*)^{\text{op}}$. On définit un foncteur croisé sur $(G^*, G_*, G_{\nabla}, G^{\nabla})$ en posant $Ex_{*,\nabla} = Ex_{*!}$, $Ex_*^{\nabla} = Ex_!^*$, etc. Toutes les propriétés ci-dessus sont alors vérifiées. Ceci nous permettra de faire des raisonnements par dualité dans la suite.

À l'aide de ces données on va définir pour tout S -morphisme (*séparé*) un 2-morphisme :

$$\alpha_f : f_! \longrightarrow f_*$$

On insiste sur le fait que f est séparé (bien que ce soit automatiquement le cas puisque on ne considère que les S -schémas quasi-projectifs) car la séparation joue un rôle crucial dans la définition de α_f . On montrera ensuite que pour f projectif le 2-morphisme α_f est un 2-isomorphisme. On utilisera essentiellement le foncteur croisé $(H^*, H_*, H_!, H^!)$. L'axiome de l'homotopie jouera un rôle décisif.

1.7.1. Définition et propriétés des 2-morphismes $f_! \rightarrow f_*$

Définition 1.7.1. — Soit un S -morphisme entre S -schémas quasi-projectifs :

$$f : X \longrightarrow Y$$

On forme le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{pr_2} & X \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

et on note Δ l'immersion diagonale :

$$X \longrightarrow X \times_Y X$$

L'immersion Δ est fermée puisque F est séparé. En particulier, on a l'égalité $\Delta_! = \Delta_*$ (en effet : ${}^{\text{Imm}}H_! = {}^{\text{Imm}}H_*$). On prend alors pour $\alpha = \alpha_f$ la composée :

$$\begin{aligned} f_! &= f_! \text{Id}_{X*} \xrightarrow{c_*} f_! pr_{2*} \Delta_* \xrightarrow{Ex_{*!}} f_* pr_{1!} \Delta_* \\ &= f_* pr_{1!} \Delta_! \xrightarrow{(c_!)^{-1}} f_* \text{Id}_{X!} = f_* \end{aligned}$$

En langage des diagrammes planaires, α_f est la composée :

$$\begin{array}{ccccc}
 H(X) & & & & \\
 \Delta_! \searrow & \Delta_* \searrow & & & \\
 & H(X \times_Y X) & \xrightarrow{pr_{2*}} & H(X) & \\
 (c_1)^{-1} \swarrow & \downarrow pr_{1!} & \swarrow Ex_* & \downarrow f_! & \\
 & H(X) & \xrightarrow{f_*} & H(Y) &
 \end{array}$$

Remarque 1.7.2. — Les 2-morphismes α sont compatibles avec la dualité dans le sens suivant. Le 2-morphisme $f_{\nabla} \longrightarrow f_*$ qu'on construit par la même formule mais en utilisant le foncteur croisé sur $(G^*, G_*, G_{\nabla}, G^{\vee})$ coïncide avec la flèche :

$$(f_*)^{\text{op}} = f_{\nabla} \longleftarrow \alpha_f^{\text{op}} (f_!)^{\text{op}} = f_*$$

On a la proposition suivante :

Proposition 1.7.3. — Les 2-morphismes α_f sont compatibles avec les 2-isomorphismes de connexions de $H_!$ et H_* . Plus précisément, pour toute suite de S -morphisms composables :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

le diagramme de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccccc}
 (g \circ f)_! & \xrightarrow{\alpha_{g \circ f}} & (g \circ f)_* & & \\
 c_! \downarrow & & \downarrow c_* & & \\
 g_! f_! & \xrightarrow{\alpha_g} g_* f_! & \xrightarrow{\alpha_f} g_* f_* & &
 \end{array}$$

est commutatif. Bien entendu il en est de même du diagramme obtenu en remplaçant la ligne horizontale inférieure du diagramme précédent par :

$$g_! f_! \xrightarrow{\alpha_f} g_! f_* \xrightarrow{\alpha_g} g_* f_*$$

Démonstration. — Le 2-morphisme : $(g \circ f)_! \longrightarrow (g \circ f)_*$ est par définition la composée du diagramme :

$$(121) \quad \begin{array}{ccccc} H(X) & & & & \\ \Delta_! \searrow & \Downarrow c_* & & & \\ & H(X \times_Z X) & \xrightarrow{pr_{2*}} & H(X) & \\ (c_!)^{-1} \swarrow & \downarrow pr_{1!} & \swarrow Ex_*! & \downarrow (g \circ f)_! & \\ & H(X) & \xrightarrow{(g \circ f)_*} & H(Z) & \end{array}$$

On dispose d'un diagramme commutatif de S -schémas :

$$\begin{array}{ccccc} X \times_Z X & \xrightarrow{v_2} & X \times_Z Y & \xrightarrow{q_2} & X \\ v_1 \downarrow & & \downarrow r_1 & & \downarrow f \\ Y \times_Z X & \xrightarrow{r_2} & Y \times_Z Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ q_1 \downarrow & & \downarrow p_1 & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

à carrés cartésiens. En utilisant la compatibilité des 2-morphismes d'échange $Ex_*!(.)$ avec les compositions horizontales et verticales des carrés cartésiens, on voit que le 2-morphisme $Ex_*!$ qui se trouve dans le diagramme planaire (121) est égal à la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & pr_{2*} & & & \\ & & & \Downarrow c_* & & & \\ H(X \times_Z X) & \xrightarrow{v_{2*}} & H(X \times_Z Y) & \xrightarrow{q_{2*}} & H(X) & & \\ v_{1!} \downarrow & & \downarrow r_{1!} & & \downarrow f! & & \\ (c_!)^{-1} \swarrow & \swarrow Ex_*! & & \swarrow Ex_*! & & \downarrow (g \circ f)_! & \\ pr_{1!} \swarrow & H(Y \times_Z X) & \xrightarrow{r_{2*}} & H(Y \times_Z Y) & \xrightarrow{p_{2*}} & H(Y) & \xleftarrow{c_!} \\ q_{1!} \downarrow & \swarrow Ex_*! & \downarrow p_{1!} & \swarrow Ex_*! & \downarrow g! & & \\ H(X) & \xrightarrow{f_*} & H(Y) & \xrightarrow{g_*} & H(Z) & & \\ & & & \Downarrow (c_*)^{-1} & & & \\ & & & (g \circ f)_* & & & \end{array}$$

Il vient que la composée des 2-morphismes :

$$g_! f_! \xrightarrow{(c_!)^{-1}} (g \circ f)_! \xrightarrow{\alpha_{g \circ f}} (g \circ f)_* \xrightarrow{c_*} g_* f_*$$

est égale à la composée du diagramme planaire :

$$(122) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} H(X) & & & & \\ & \searrow \Delta_* & & \searrow pr_{2*} & \\ & \Delta_! & & & \\ & & H(X \times_Z X) & \xrightarrow{v_{2*}} & H(X \times_Z Y) & \xrightarrow{q_{2*}} & H(X) \\ & & \downarrow v_{1*} & & \downarrow r_{1*} & & \downarrow f_! \\ & & (c_!)^{-1} \swarrow & \swarrow E_{x_*!} & \downarrow r_{1*} & \swarrow E_{x_*!} & \\ & & H(Y \times_Z X) & \xrightarrow{r_{2*}} & H(Y \times_Z Y) & \xrightarrow{p_{2*}} & H(Y) \\ & & \downarrow q_{1*} & & \downarrow p_{1*} & & \downarrow g_! \\ & & H(X) & \xrightarrow{f_*} & H(Y) & \xrightarrow{g_*} & H(Z) \end{array} \end{array}$$

Mais l'immersion fermée Δ se factorise par deux immersions fermées :

$$X \xrightarrow{\Delta_2} X \times_Y X \xrightarrow{\Delta'_1} X \times_Z X$$

On voit donc que la face c_* de (122) adjacente au 1-morphisme :

$$H(X) \xrightarrow{\Delta_*} H(X \times_Z X)$$

se factorise par la face :

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \Delta_{2*} \nearrow & \Downarrow (c_*)^{-1} & \Delta'_{1*} \searrow \\ \bullet & & \bullet \end{array}$$

De même la face $(c_!)^{-1}$ de (122) adjacente au 1-morphisme :

$$H(X) \xrightarrow{\Delta_!} H(X \times_Z X)$$

(le même que le précédent) se factorise par :

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \xrightarrow{\Delta_!} & \bullet \\
 & \searrow \Delta_{2!} \quad \downarrow c_! \quad \nearrow \Delta'_{1!} & \\
 & \bullet &
 \end{array}$$

En utilisant le fait que ${}^{\text{Imm}}H_! = {}^{\text{Imm}}H_*$ (et plus particulièrement que $c_! = c_*$) on voit que la composée du diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bullet & & \\
 & \nearrow \Delta_{2*} & & \nwarrow \Delta'_{1*} & \\
 \bullet & & \Delta_* & & \bullet \\
 & \searrow \Delta_! & \downarrow c_! & \nearrow \Delta'_{1!} & \\
 & & \bullet & &
 \end{array}$$

est l'identité : $\Delta'_{1*} \circ \Delta_{2*} = \Delta'_{1!} \circ \Delta_{2!}$. Ainsi, la composée du diagramme planaire (122) ne change pas si on remplace le 1-morphisme :

$$H(X) \xrightarrow[\Delta_!]{\Delta_*} H(X \times_Z X)$$

par le 1-morphisme composé :

$$H(X) \xrightarrow[\Delta_{2!}]{\Delta_{2*}} H(X \times_Y X) \xrightarrow[\Delta'_{1!}]{\Delta'_{1*}} H(X \times_Z X)$$

et les faces adjacentes par les composées des 2-isomorphismes de connexions adéquats.

D'autres part, l'immersion fermée Δ'_1 s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times_Y X & \xrightarrow{p'_2} & X & & \\
 \downarrow p'_1 & \searrow \Delta'_1 & \downarrow d_2 & & \\
 & X \times_Z X & \xrightarrow{v_2} & X \times_Z Y & \\
 & \downarrow v_1 & & & \\
 X & \searrow d_1 & Y \times_Z X & &
 \end{array}$$

En utilisant alors la relation de cocycle pour les 2-isomorphismes de connexion des 2-foncteurs $H_!$ et H_* , on voit que la composée de (122) est égale à la composée du diagramme planaire :

$$(123) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ H(X) & \xrightarrow{\Delta_{2*}} & H(X \times_Y X) & \xrightarrow{p_{2*}} & H(X) & \xrightarrow{\Delta_{2*}} & H(X) \\ & \searrow \Delta_{2!} & \downarrow p_{1!} & \searrow \Delta'_{1*} & \downarrow d_{2*} & \searrow \Delta_{2*} & \\ & & H(X) & \xleftarrow{Ex_{!!}} & H(X \times_Z X) & \xrightarrow{v_{2*}} & H(X \times_Z Y) \xrightarrow{q_{2*}} H(X) \\ & & \downarrow d_{1!} & \swarrow Ex_{!!} & \downarrow v_{1!} & \swarrow Ex_{*!} & \downarrow r_{1!} \\ & & & & H(Y \times_Z X) & \xrightarrow{r_{2*}} & H(Y \times_Z Y) \xrightarrow{p_{2*}} H(Y) \\ & & & & \downarrow q_{1!} & \swarrow Ex_{*!} & \downarrow p_{1!} \\ & & & & H(X) & \xrightarrow{f_*} & H(Y) \xrightarrow{g_*} H(Z) \end{array}$$

On invoque maintenant le cube commutatif de S -schémas :

$$\begin{array}{ccccc}
X \times_Y X & \xrightarrow{p'_2} & X & \searrow d_2 \\
\downarrow p'_1 & \swarrow \Delta'_1 & \downarrow v_2 & & \downarrow r_1 \\
& X \times_Z X & \longrightarrow & X \times_Z Y \\
& \downarrow f & & & \\
X & \xrightarrow{\quad} & Y & \searrow \Delta_i \\
\downarrow d_1 & \swarrow v_1 & \downarrow r_2 & & \\
Y \times_Z X & \xrightarrow{\quad} & Y \times_Z Y
\end{array}$$

Toutes les faces de ce cube sont des carrés cartésiens et les S -morphisms Δ_1 , Δ'_1 , d_1 et d_2 sont des immersions fermées. On forme alors un cube dans \mathfrak{TR} :

$$(124) \quad \begin{array}{ccccc} H(X \times_Y X) & \xrightarrow{p'_{2*}} & H(X) & & \\ & \searrow \Delta'_{1*} & \downarrow & \searrow d_{2*} & \\ & \Delta'_{1!} & H(X \times_Z X) & \xrightarrow{v_{2*}} & H(X \times_Z Y) \\ p'_{1!} \downarrow & & \downarrow f! & & \downarrow r_{1!} \\ H(X) & \xrightarrow{f_*} & H(Y) & & \\ & \searrow d_{1!} & \searrow \Delta_{1*} & & \\ & & \Delta_{1!} & & \\ & & H(Y \times_Z X) & \xrightarrow{r_{2*}} & H(Y \times_Z Y) \end{array}$$

en prenant sur les faces carrées parallèles au plan de la feuille les 2-morphismes d'échange $Ex_{*,!}$. Les autres faces sont :

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f_*} & \bullet \\ d_{1!} \downarrow & \searrow_{Ex_{*,!}} & \downarrow \Delta_{1!} \\ \bullet & \xrightarrow{r_{2*}} & \bullet \end{array} &
 \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\Delta'_{1!}} & \bullet \\ p'_{1!} \downarrow & \searrow_{Ex_{*,!}} & \downarrow v_{1!} \\ \bullet & \xrightarrow{d_{1!}} & \bullet \end{array} &
 \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{p'_{2*}} & \bullet \\ \Delta'_{1*} \downarrow & \searrow_{Ex_{**}} & \downarrow d_{2*} \\ \bullet & \xrightarrow{v'_{2*}} & \bullet \end{array} &
 \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{d_{2*}} & \bullet \\ f! \downarrow & \searrow_{Ex_{*,!}} & \downarrow r_{1!} \\ \bullet & \xrightarrow{\Delta_{1*}} & \bullet \end{array}
 \end{array}$$

Étant donné que l'échange sur $(H_*, H_!)$ prolonge l'échange trivial sur $(H_*, {}^{\text{Imm}}H_!)$ (modulo l'égalité ${}^{\text{Imm}}H_! = {}^{\text{Imm}}H_*$), on voit que la première face est égale à :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f_*} & \bullet \\ d_{1*} \downarrow & \searrow_{Ex_{**}} & \downarrow \Delta_{1*} \\ \bullet & \xrightarrow{r_{2*}} & \bullet \end{array}$$

De même, puisque l'échange sur $(H_*, H_!)$ prolonge l'échange trivial sur $({}^{\text{Imm}}H_*, H_!)$ (modulo l'égalité ${}^{\text{Imm}}H_* = {}^{\text{Imm}}H_!$), on voit que la deuxième face est égale à :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\Delta'_{1*}} & \bullet \\ p'_{1!} \downarrow & \searrow_{Ex_{*,!}} & \downarrow v_{1!} \\ \bullet & \xrightarrow{d_{1*}} & \bullet \end{array}$$

On voit donc que le cube (124) est égal au cube (plus familier):

$$\begin{array}{ccccc}
 H(X \times_Y X) & \xrightarrow{p'_{2*}} & H(X) & & \\
 \downarrow p'_{1!} & \searrow \Delta'_{1*} & \downarrow & \searrow d_{2*} & \\
 & H(X \times_Z X) & \xrightarrow{v_{2*}} & H(X \times_Z Y) & \\
 & \downarrow & \downarrow f! & \downarrow & \\
 H(X) & \xrightarrow{f_*} & H(Y) & & \\
 \searrow d_{1*} & \downarrow v_{1!} & \searrow \Delta_{1*} & \searrow \Delta_{1*} & \downarrow r_{1!} \\
 & H(Y \times_Z X) & \xrightarrow{r_{2*}} & H(Y \times_Z Y) &
 \end{array}$$

où les faces perpendiculaires au plan de la feuille sont soit Ex_{**} soit $Ex_{*,!}$. On a déjà vu plusieurs fois que de tels cubes sont commutatifs. L'astuce est de diviser le solide en deux selon les 1-morphismes : $(v_2 \circ \Delta'_1)_* = (d_2 \circ p'_2)_*$ et $(r_2 \circ d_1)_* = (\Delta_1 \circ f)_*$ et puis

La composée du diagramme planaire (126) est clairement égale à la composée des 2-morphismes :

$$g_! f_! \xrightarrow{\alpha_g} g_* f_! \xrightarrow{\alpha_f} g_* f_*$$

La proposition est prouvée. \square

Une autre façon d'énoncer la proposition précédente est :

Corollaire 1.7.4. — *Les 2-morphismes $\alpha_f : f_! \longrightarrow f_*$ définissent un morphisme de 2-foncteurs (égaux sur les objets) :*

$$\alpha : H_! \longrightarrow H_*$$

De plus, ce morphisme prolonge le morphisme identité :

$$\mathrm{Imm} H_! \stackrel{=}{=} \mathrm{Imm} H_*$$

On a la proposition suivante :

Proposition 1.7.5. — *Supposons donné un carré cartésien dans (Sch/S) :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Le carré de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} f_! g'_* & \xrightarrow{Ex_*!} & g_* f'_! \\ \alpha_f \downarrow & & \downarrow \alpha_{f'} \\ f_* g'_* & \xrightarrow{Ex_{**}} & g_* f_* \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Notons d'abord qu'on a un cube de S -schémas ayant pour faces

des carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
 X' \times_{Y'} X' & \xrightarrow{r} & X \times_Y X & & \\
 \downarrow p'_1 & \searrow p'_2 & \downarrow & \searrow p_2 & \\
 & X' & \xrightarrow{g'} & X & \\
 \downarrow f' & \downarrow f' & \downarrow p_1 & \downarrow f & \\
 X' & \xrightarrow{g'} & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \searrow f' & \downarrow f' & \searrow f & \\
 & Y' & \xrightarrow{g} & Y &
 \end{array}$$

Ce cube de S -schéma définit un cube dans la 2-catégorie $\mathfrak{T}\mathfrak{R}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 H(X' \times_{Y'} X') & \xrightarrow{r_*} & H(X \times_Y X) & & \\
 \downarrow p'_{1!} & \searrow p'_{2*} & \downarrow & \searrow p_{2*} & \\
 & H(X') & \xrightarrow{g'_*} & H(X) & \\
 \downarrow f'_* & \downarrow f'_! & \downarrow p_{1!} & \downarrow f_! & \\
 H(X') & \xrightarrow{g'_*} & H(X) & \xrightarrow{f_*} & H(Y) \\
 & \searrow f'_* & \downarrow f'_! & \searrow f_* & \\
 & H(Y') & \xrightarrow{g_*} & H(Y) &
 \end{array}
 \quad (127)$$

Sur les faces on a soit un 2-morphisme Ex_* ! soit un 2-isomorphisme Ex_{**} . Ce cube est commutatif (pour voir cela, on peut le diviser en deux). Revenons à la preuve de la proposition. On va expliciter la composée :

$$f_! g'_* \xrightarrow{Ex_*!} g_! f'_! \xrightarrow{\alpha_{f'}} g_* f'_*$$

En reprenant la définition de $\alpha_{f'}$, on obtient le diagramme planaire :

$$\begin{array}{ccccc}
 H(X') & & & & \\
 \downarrow \Delta'_! & \searrow \Delta'_* & & & \\
 & H(X' \times_{Y'} X') & \xrightarrow{p'_{2*}} & H(X') & \xrightarrow{g'_*} H(X) \\
 \downarrow p'_{1!} & \downarrow p'_{2*} & \downarrow f'_! & \downarrow f'_! & \downarrow f_! \\
 H(X') & \xrightarrow{f'_*} H(Y') & \xrightarrow{g_*} H(Y) & &
 \end{array}
 \quad (128)$$

avec Δ' l'immersion diagonale : $X' \longrightarrow X' \times_{Y'} X'$. La composée du diagramme planaire (128) est égale à celle de :

$$(129) \quad \begin{array}{ccccc} & & H(X) & & \\ & g_* \nearrow & \Delta_* \searrow & c_* \Downarrow & \\ H(X') & & H(X \times_Y X) & & \\ & \Downarrow Ex_{**} & & \Downarrow Ex_{**} & \\ & \Delta'_* \searrow & r_* \nearrow & p_{2*} \searrow & \\ & H(X' \times_{Y'} X') & & H(X) & \\ & \Downarrow (c_!)^{-1} & & \Downarrow Ex_{**} & \\ & p'_{1!} \searrow & p'_{2*} \nearrow & g'_* \searrow & \\ & H(X') & \Leftarrow Ex_{*!} & H(X') & \Downarrow Ex_{*!} \\ & f'_* \searrow & f'_! \nearrow & g_* \searrow & \\ & H(Y') & & H(Y) & \end{array}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de voir que la partie du diagramme située au-dessus de la ligne en pointillé :

$$H(X') \xrightarrow{\Delta'_*} H(X' \times_{Y'} X') \xrightarrow{p'_{2*}} H(X') \xrightarrow{g'_*} H(X)$$

est égale à la composée des 2-morphismes :

$$g'_* \circ p'_{2*} \circ \Delta'_* \xrightarrow{c_*(\Delta', p'_2)} g'_*$$

Mais ceci est clair par la relation de cocycle pour le 2-foncteur H_* étant donné que la partie en question du diagramme ne fait intervenir que des 2-morphismes de connexion $c_*(.)$ ou d'échange $Ex_{**} = c(.).c(.)^{-1}$. En utilisant maintenant le cube commutatif (127) ainsi que l'égalité des deux 2-morphismes d'échange $Ex_{!*}$ et Ex_{**} associés au carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \Delta' \downarrow & & \downarrow \Delta \\ X' \times_{Y'} X' & \xrightarrow{r} & X \times_Y X \end{array}$$

on voit que la composée de (129) est égale à la composée de :

(130)

Diagram (130) is a complex commutative diagram involving motivic cohomology groups. The nodes are arranged as follows:

- Top node: $H(X)$
- Second row (left to right): $H(X')$, $H(X \times_Y X)$, $H(X)$
- Third row (left to right): $H(X' \times_Y X')$, $H(X)$, $H(X)$
- Fourth row (left to right): $H(X')$, $H(Y)$
- Bottom node: $H(Y')$

 The arrows and their labels are:

- $H(X) \xrightarrow{g_*} H(X')$
- $H(X) \xrightarrow{\Delta_*} H(X \times_Y X)$
- $H(X) \xrightarrow{\Delta!} H(X \times_Y X)$
- $H(X \times_Y X) \xrightarrow{c_*} H(X)$ (with $c_* \Downarrow$)
- $H(X \times_Y X) \xrightarrow{p1!} H(X)$
- $H(X \times_Y X) \xrightarrow{p2*} H(X)$
- $H(X \times_Y X) \xrightarrow{r_*} H(X)$
- $H(X \times_Y X) \xrightarrow{Ex_{*!}} H(X)$
- $H(X) \xrightarrow{Ex_{*!}} H(X)$ (with $Ex_{*!} \Leftarrow$)
- $H(X) \xrightarrow{f!} H(Y)$
- $H(X) \xrightarrow{f_*} H(Y)$
- $H(X) \xrightarrow{Ex_{**}} H(Y)$ (with $Ex_{**} \Downarrow$)
- $H(X') \xrightarrow{\Delta'_!} H(X' \times_Y X')$
- $H(X') \xrightarrow{\Delta'_!} H(X' \times_Y X')$
- $H(X' \times_Y X') \xrightarrow{(c')^{-1}} H(X')$ (with $(c')^{-1} \Downarrow$)
- $H(X' \times_Y X') \xrightarrow{p'1!} H(X')$
- $H(X' \times_Y X') \xrightarrow{g'_*} H(X)$
- $H(X') \xrightarrow{f'_*} H(Y')$
- $H(Y') \xrightarrow{g_*} H(Y)$
- Curved double arrows: $H(X) \rightrightarrows H(X')$, $H(X) \rightrightarrows H(X \times_Y X)$, $H(X) \rightrightarrows H(X)$, $H(X) \rightrightarrows H(Y)$, $H(X') \rightrightarrows H(X')$, $H(X') \rightrightarrows H(Y')$.

En utilisant en fin la compatibilité des 2-morphismes d'échange $Ex_{*!}$ avec la composition des carrés on obtient :

(131)

Diagram (131) is a simplified version of diagram (130). The nodes are:

- Top node: $H(X)$
- Second row (left to right): $H(X')$, $H(X \times_Y X)$, $H(X)$
- Third row (left to right): $H(X')$, $H(X)$, $H(X)$
- Fourth row (left to right): $H(Y)$
- Bottom node: $H(Y')$

 The arrows and their labels are:

- $H(X) \xrightarrow{g_*} H(X')$
- $H(X) \xrightarrow{\Delta_*} H(X \times_Y X)$
- $H(X) \xrightarrow{\Delta!} H(X \times_Y X)$
- $H(X \times_Y X) \xrightarrow{c_*} H(X)$ (with $c_* \Downarrow$)
- $H(X \times_Y X) \xrightarrow{p1!} H(X)$
- $H(X \times_Y X) \xrightarrow{p2*} H(X)$
- $H(X \times_Y X) \xrightarrow{(c')^{-1}} H(X')$ (with $(c')^{-1} \Downarrow$)
- $H(X \times_Y X) \xrightarrow{Ex_{*!}} H(X)$
- $H(X) \xrightarrow{Ex_{*!}} H(X)$ (with $Ex_{*!} \Leftarrow$)
- $H(X) \xrightarrow{f!} H(Y)$
- $H(X) \xrightarrow{f_*} H(Y)$
- $H(X) \xrightarrow{Ex_{**}} H(Y)$ (with $Ex_{**} \Downarrow$)
- $H(X') \xrightarrow{g'_*} H(X)$
- $H(X') \xrightarrow{f'_*} H(Y')$
- $H(Y') \xrightarrow{g_*} H(Y)$
- Curved double arrows: $H(X) \rightrightarrows H(X')$, $H(X) \rightrightarrows H(X \times_Y X)$, $H(X) \rightrightarrows H(X)$, $H(X) \rightrightarrows H(Y)$, $H(X') \rightrightarrows H(X')$, $H(X') \rightrightarrows H(Y')$.

Évidemment, la composée du diagramme planaire ci-dessus est égale à la composée des 2-morphismes :

$$f_!g'_* \xrightarrow{\alpha_f} f_*g'_! \xrightarrow{Ex_{*,*}} g_*f_*$$

La proposition est donc prouvée. \square

On a également les analogues suivants :

Proposition 1.7.6. — *Supposons donné un carré cartésien dans (Sch/S) :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Le carré de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} f_!g'_! & \xrightarrow{Ex_{!!}} & g_!f'_! \\ \alpha_{g'} \downarrow & & \downarrow \alpha_g \\ f_!g'_* & \xrightarrow{Ex_{*!}} & g_!f'_* \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Cette proposition découle de la proposition 1.7.5 par un argument de 2-dualité. En effet la commutativité du carré de l'énoncé équivaut à la commutativité de :

$$\begin{array}{ccc} f_*g'_* & \xleftarrow{Ex_{*,*}} & g_*f'_* \\ \alpha^{\text{op}} \uparrow & & \uparrow \alpha^{\text{op}} \\ f_*g'_\nabla & \xleftarrow{Ex_{*,\nabla}} & g_*f'_\nabla \end{array}$$

Ce qui est assuré par la proposition 1.7.5 appliqué au foncteur croisé sur le quadruplet $(G^*, G_*, G_\nabla, G^\nabla)$. \square

Proposition 1.7.7. — *Supposons donné un carré cartésien dans (Sch/S) :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Le carré de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} g^* f_! & \xrightarrow{Ex_!^*} & f'_! g'^* \\ \alpha_f \downarrow & & \downarrow \alpha_{f'} \\ g^* f_* & \xrightarrow{Ex_*^*} & f'_* g'^* \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Le diagramme commutatif de l'énoncé s'obtient du diagramme de la proposition 1.7.5 via l'adjonction globale entre H_* et H^* . \square

Proposition 1.7.8. — Supposons donné un carré cartésien dans (Sch/S) :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Le carré de 2-morphismes :

$$\begin{array}{ccc} f'_! g'^! & \xrightarrow{Ex_!^!} & g'^! f_! \\ \alpha_{f'} \downarrow & & \downarrow \alpha_f \\ f'_* g'^! & \xrightarrow{Ex_*^!} & g'^! f_* \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Le diagramme commutatif de l'énoncé s'obtient du diagramme de la proposition 1.7.6 via l'adjonction globale entre $H_!$ et $H^!$. On peut également le déduire par un argument de 2-dualité à partir de la proposition 1.7.7. \square

1.7.2. Pour f projectif, $f_! \rightarrow f_*$ est un 2-isomorphisme

1.7.2.1. *Le cas des espaces projectifs.* — Soit X un S -schéma quasi-projectif. Dans ce numéro on prouvera que si p_n est la projection canonique $\mathbb{P}_X^n \longrightarrow X$ alors :

Théorème 1.7.9. — Le 2-morphisme :

$$\alpha_{p_n} : p_n! \longrightarrow p_{n*}$$

est inversible.

On va raisonner par récurrence sur l'entier n . Pour $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. On fixe donc $n \geq 1$. Pour simplifier les notations, on écrira simplement p à la place

de p_n la projection $\mathbb{P}_X^n \longrightarrow X$ mais on conservera la notation⁽²⁶⁾ p_m pour $m \neq n$. L'hypothèse de récurrence nous dit donc que le 2-morphisme :

$$\alpha_{p_{n-1}} : p_{n-1}! \longrightarrow p_{n-1*}$$

est inversible. On considère le diagramme commutatif de S -schémas :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathbb{P}_X^{n-1} & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}_X^n & \xleftarrow{i_\infty} X \\
 & \downarrow t & \nearrow j_\infty & \downarrow p & \downarrow s \\
 \mathbb{P}_X^{n-1} & \xleftarrow{v} & (\mathbb{P}_X^n)^* & & \mathbb{A}_X^n \\
 & \searrow r & & \nearrow q & \\
 & & & X &
 \end{array}$$

p_{n-1} (courbe de \mathbb{P}_X^{n-1} à X)

Les notations sont expliquées ci-dessous :

- h est l'inclusion de l'hyperplan défini par l'annulation de la dernière coordonnée homogène,
- j_0 est l'inclusion de l'ouvert complémentaire envoyant la section nulle de \mathbb{A}_X^n sur la section à l'infini de \mathbb{P}_X^n ,
- i_∞ est l'inclusion de la section à l'infini de \mathbb{P}_X^n ,
- j_∞ est l'immersion de l'ouvert complémentaire à i_∞ ,
- v est la projection sur \mathbb{P}_X^{n-1} de centre i_∞ . La projection v est naturellement un fibré en droites sur \mathbb{P}_X^{n-1} avec t pour section nulle. On choisit \mathcal{N} un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X^{n-1}}$ -module tel que $(\mathbb{P}_X^n)^*$ soit isomorphe à $\mathbb{V}(\mathcal{N})$.

Fixons un objet A de $H(X)$. On considère le complexe (ou plutôt le triangle) dans la catégorie additive $H(\mathbb{P}_X^n)$:

$$(\triangle) \quad h_! h^! p^* A \xrightarrow{\delta} p^* A \xrightarrow{\eta} i_{\infty*} i_\infty^* p^* A \xrightarrow{0} h_! h^! p^* A[+1]$$

On a la proposition :

Proposition 1.7.10. — *Si on applique p_* au triangle (\triangle) , on obtient un triangle distingué de $H(X)$.*

Démonstration. — On forme le diagramme suivant dans $H(\mathbb{P}_X^n)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p^* A & \xrightarrow{\eta} & i_{\infty*} i_\infty^* p^* A & \xrightarrow{0} & h_! h^! p^* A[+1] \\
 \parallel & & \parallel & & \uparrow a & & \\
 h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p^* A & \xrightarrow{\eta} & j_{0*} j_0^* p^* A & \xrightarrow{\theta} & h_! h^! p^* A[+1]
 \end{array}$$

(132)

⁽²⁶⁾ En fait on aura seulement besoin de p_{n-1} .

Le triangle inférieur étant le premier triangle distingué de l'axiome de localité. La flèche a est l'évaluation en p^*A de la composée :

$$j_{0*}j_0^* \xrightarrow{\eta} j_{0*}s_*s^*j_0^* \xrightarrow{\sim} i_{\infty*}i_{\infty}^*$$

Le diagramme (132) est commutatif. En effet la commutation du second carré de (132) découle de la proposition 1.1.17.

Appliquons p_* au diagramme (132). On obtient alors le diagramme commutatif :

$$(133) \quad \begin{array}{ccccccc} p_*h_!h^!p^*A & \xrightarrow{\delta} & p_*p^*A & \xrightarrow{\eta} & p_*i_{\infty*}i_{\infty}^*p^*A & \xrightarrow{0} & p_*h_!h^!p^*A[+1] \\ \parallel & & \parallel & & \uparrow p_*(a) & & \\ p_*h_!h^!p^*A & \xrightarrow{\delta} & p_*p^*A & \xrightarrow{\eta} & p_*j_{0*}j_0^*p^*A & \xrightarrow{\theta} & p_*h_!h^!p^*A[+1] \end{array}$$

On va prouver que ce diagramme se prolonge en un isomorphisme de triangles, ce qui prouvera la proposition. On divise la démonstration en deux étapes :

Étape 1. La flèche $p_(a)$ du diagramme (133) est un isomorphisme.* — On montrera plus généralement que le 2-morphisme :

$$p_*j_{0*}j_0^*p^* \xrightarrow{\eta} p_*j_{0*}s_*s^*j_0^*p^* \xrightarrow{\sim} p_*i_{\infty*}i_{\infty}^*p^*$$

est inversible. Le 2-morphisme en question est la composée du diagramme planaire suivant :

$$(134) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & H(X) & & & \\ & \nearrow i_{\infty}^* & & \nwarrow i_{\infty*} & & \nearrow i_{\infty}^* & \\ & (c^*)^{-1} \nearrow & & \nwarrow (c_*)^{-1} & & \nearrow (c^*)^{-1} & \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{j_0^*} & H(\mathbb{A}_X^n) & \xrightarrow{j_{0*}} & H(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{p_*} & H(X) \end{array}$$

(Les flèches $H(\mathbb{A}_X^n) \xrightarrow{s_*} H(X)$ et $H(X) \xrightarrow{s^*} H(\mathbb{A}_X^n)$ sont reliées par un 2-morphisme η .)

Pour montrer qu'il est un 2-isomorphisme, il suffira de prouver que la composée du diagramme planaire suivant en est un :

$$(135) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & H(X) & & & \\ & \nearrow (pj_0s)^* & & \nwarrow (pj_0s)_* & & \nearrow (pj_0s)^* & \\ & \nearrow i_{\infty}^* & & \nwarrow i_{\infty*} & & \nearrow i_{\infty}^* & \\ & (c^*)^{-1} \nearrow & & \nwarrow (c_*)^{-1} & & \nearrow (c^*)^{-1} & \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{j_0^*} & H(\mathbb{A}_X^n) & \xrightarrow{j_{0*}} & H(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{p_*} & H(X) \\ & \nwarrow q^* & \nwarrow c^* & & \nearrow c_* & \nearrow q_* & & & \end{array}$$

(Les flèches $H(\mathbb{A}_X^n) \xrightarrow{s_*} H(X)$ et $H(X) \xrightarrow{s^*} H(\mathbb{A}_X^n)$ sont reliées par un 2-morphisme η .)

En effet, les deux diagrammes planaires (134) et (135) ne diffèrent que par des 2-isomorphismes de connexion du type c^* et c_* . Mais en utilisant l'axiome de cocycle pour les 2-isomorphismes de connexion des 2-foncteurs H^* et H_* on voit immédiatement que la composée de (135) est simplement la composée de :

$$(136) \quad \begin{array}{ccccc} & & H(X) & & \\ & (qs)^* \nearrow & & \searrow (qs)_* & \\ H(X) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{A}_X^n) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_X^n) & \xrightarrow{q_*} & H(X) \\ & \nwarrow (c^*)^{-1} & \uparrow s^* & \uparrow \eta & \downarrow s_* & \nwarrow (c_*)^{-1} & \\ & & H(X) & & & & \end{array}$$

Par l'axiome d'homotopie, on sait que le 2-morphisme d'unité : $1 \xrightarrow{\sim} q_* q^*$ est inversible. En attachant ce 2-isomorphisme au diagramme planaire (136), on se ramène finalement à prouver que la composée du diagramme planaire :

$$(137) \quad \begin{array}{ccccc} & & H(X) & & \\ & (qs)^* \nearrow & & \searrow (qs)_* & \\ H(X) & \xrightarrow{q^*} & H(\mathbb{A}_X^n) & \xlongequal{\quad} & H(\mathbb{A}_X^n) & \xrightarrow{q_*} & H(X) \\ & \nwarrow (c^*)^{-1} & \uparrow s^* & \uparrow \eta & \downarrow s_* & \nwarrow (c_*)^{-1} & \\ & & H(X) & & & & \\ & \sim \uparrow \eta & & & & & \end{array}$$

est un 2-isomorphisme. Mais par la proposition 1.1.17, la composée du diagramme planaire 137 n'est autre que le 2-morphisme d'unité de l'adjonction entre $(q \circ s)^*$ et $(q \circ s)_*$. Puisque $q \circ s = \text{id}_X$ ce 2-morphisme d'unité est forcément un 2-isomorphisme. D'où le résultat recherché !

Étape 2. Fin de la preuve. — Pour terminer la preuve de la proposition, on pourra prouver que la flèche :

$$(138) \quad p_* j_{0*} j_0^* p^* A \xrightarrow{\theta} p_* h_! h^! p^* A[+1]$$

est nulle. En effet, si c'est le cas, le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} p_* h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_* p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_* i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{0} & p_* h_! h^! p^* A[+1] \\ \parallel & & \parallel & & \uparrow p_*(a) & & \parallel \\ p_* h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_* p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_* j_{0*} j_0^* p^* A & \xrightarrow{\theta} & p_* h_! h^! p^* A[+1] \end{array}$$

sera commutatif et d'après l'étape précédente il aura les flèches verticales des isomorphismes.

Mais pour que la flèche (138) soit nulle, il suffit (compte tenu du fait que le triangle inférieur est distingué) que la flèche :

$$(139) \quad p_* p^* A \xrightarrow{\eta} p_* j_{0*} j_0^* p^* A$$

admette une section. Par la proposition 1.1.17, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p_* p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_* j_{0*} j_0^* p^* A \\ \eta \uparrow & & \downarrow \sim \\ A & \xrightarrow{\eta} & q_* q^* A \end{array}$$

La flèche horizontale inférieure est un isomorphisme par l'axiome de l'homotopie. On peut donc prendre comme section à (139) la composée :

$$p_* j_{0*} j_0^* p^* A \xrightarrow{\sim} q_* q^* A \xleftarrow[\eta]{\sim} A \xrightarrow{\eta} p_* p^* A$$

En effet, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} p_* j_{0*} j_0^* p^* A & \xrightarrow{\sim} & q_* q^* A & \xleftarrow[\eta]{\sim} & A & \xrightarrow{\eta} & p_* p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_* j_{0*} j_0^* p^* A \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ p_* j_{0*} j_0^* p^* A & \xrightarrow{\sim} & q_* q^* A & \xleftarrow[\eta]{\sim} & A & \xrightarrow{\eta} & q_* q^* A & \xrightarrow{\sim} & p_* j_{0*} j_0^* p^* A \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ p_* j_{0*} j_0^* p^* A & \xrightarrow{\sim} & q_* q^* A & \xlongequal{\quad} & q_* q^* A & \xrightarrow{\sim} & p_* j_{0*} j_0^* p^* A \\ \parallel & & & & & & \parallel & & \parallel \\ p_* j_{0*} j_0^* p^* A & \xlongequal{\quad} & & & & & & & p_* j_{0*} j_0^* p^* A \end{array}$$

La proposition est prouvée. \square

Remarque 1.7.11. — Le lecteur pourra remarquer que l'hypothèse de récurrence n'a servi nulle part dans la démonstration de la proposition 1.7.10. En fait on a juste utilisé l'axiome de l'homotopie et quelques sorites élémentaires sur les adjonctions globales (la proposition 1.1.17). En ce sens, la proposition 1.7.10 est élémentaire. La démonstration de la proposition 1.7.12, suit les même lignes de la démonstration précédente mais utilisera des résultats plus élaborés ainsi que l'hypothèse de récurrence.

Proposition 1.7.12. — Si on applique $p_!$ au triangle (\triangle) , on obtient un triangle distingué de $H(X)$.

Démonstration. — On forme le diagramme suivant dans $H(\mathbb{P}_X^n)$:

$$\begin{array}{ccccccc} h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p^* A & \xrightarrow{\eta} & i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{0} & h_! h^! p^* A[+1] \\ \downarrow a & & \parallel & & \parallel & & \\ j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p^* A & \xrightarrow{\eta} & i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{\theta} & j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A[+1] \end{array}$$

Le triangle inférieur étant le triangle distingué habituel et a est l'évaluation en $p^* A$ de la composée :

$$h_! h^! \xrightarrow{\sim} j_{\infty!} t_! t^! j_{\infty}^! \xrightarrow{\delta} j_{\infty!} j_{\infty}^!$$

Ce diagramme est commutatif par la proposition 1.1.17. Lorsqu'on applique $p_!$ on obtient le diagramme commutatif :

$$(140) \quad \begin{array}{ccccccc} p_! h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_! p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_! i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{0} & p_! h_! h^! p^* A[+1] \\ \downarrow p_!(a) & & \parallel & & \parallel & & \\ p_! j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_! p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_! i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{\theta} & p_! j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A[+1] \end{array}$$

Il suffit comme dans la démonstration de 1.7.10 de prouver les points suivants.

- La flèche $p_!(a) : p_! h_! h^! p^* A \longrightarrow p_! j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A$ est un isomorphisme.
- La flèche $p_! j_{\infty!} j_{\infty}^! p^* A \xrightarrow{\delta} p_! p^* A$ admet une rétraction ou encore (une fois qu'on sait que $p_!(a)$ est inversible) que la flèche :

$$(141) \quad p_! h_! h^! p^* A \xrightarrow{\delta} p_! p^* A$$

admet une rétraction.

On établira chaque point dans une étape à part :

Étape 1. La flèche $p_!(a)$ du diagramme (140) est un isomorphisme. — On prouvera plus généralement que la composée des 2-morphismes :

$$p_! h_! h^! p^* \xrightarrow{\sim} p_! j_{\infty!} t_! t^! j_{\infty}^! p^* \xrightarrow{\delta} p_! j_{\infty!} j_{\infty}^! p^*$$

est inversible. En langage de diagrammes planaires, le 2-morphisme en question est la composée de :

$$(142) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & H(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & & \\ & \nearrow h^! & & \nwarrow h_! & & & \\ H(X) & \xrightarrow{p^*} & H(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{j_{\infty}^!} & H((\mathbb{P}_X^n)^*) & \xrightarrow{j_{\infty!}} & H(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{p_!} & H(X) \\ & & \searrow c^! \Downarrow & & \downarrow \delta & & \searrow c_! \Downarrow & & \end{array}$$

Dire que la composée du diagramme planaire (142) est un 2-isomorphisme est équivalent à dire que la composée du diagramme planaire suivant en est un :

(143)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \\
 & \nearrow & \downarrow t^! & \searrow t_! & \\
 \mathbf{H}(X) & \xrightarrow{p^*} \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{j_\infty^!} & \mathbf{H}((\mathbb{P}_X^n)^*) & \xrightarrow{j_\infty^!} \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^n) & \xrightarrow{p_!} \mathbf{H}(X) \\
 & \searrow r^* & \downarrow b & \downarrow \delta & \downarrow (c_!)^{-1} & \downarrow c_! \\
 & & \mathbf{H}((\mathbb{P}_X^n)^*) & = & \mathbf{H}((\mathbb{P}_X^n)^*) & \\
 & \nearrow r^* & \downarrow c^* & \downarrow c_! & \downarrow v_! & \nearrow p_{n-1}! \\
 & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \\
 & \searrow p_{n-1}^* & \nearrow v^* & & \nearrow p_{n-1}! & \\
 & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) &
 \end{array}$$

(b étant la composée des 2-isomorphismes⁽²⁷⁾ : $j_\infty^! p^* \xrightarrow{\sim} E(\Omega_{j_\infty}) j_\infty^* p^* = j_\infty^* p^* \xrightarrow{(c^*)^{-1}} r^*$). En effet, les deux diagrammes planaires (142) et (143) ne diffèrent que par des 2-isomorphismes de connexions du type c^* , $c^!$ et $c_!$ ainsi que le 2-isomorphisme b . On voit alors qu'on pourra se contenter de prouver que la composée du diagramme planaire suivant :

(144)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & & \\
 & \nearrow t^! & \downarrow \delta & \searrow t_! & \\
 \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1}) & \xrightarrow{v^*} \mathbf{H}((\mathbb{P}_X^n)^*) & = & \mathbf{H}((\mathbb{P}_X^n)^*) & \xrightarrow{v_!} \mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1})
 \end{array}$$

est un 2-isomorphisme. Rappelons qu'on avait choisi un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X^{n-1}}$ -module inversible \mathcal{N} tel que v soit isomorphe à la projection du fibré : $\mathbb{V}(\mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{P}_X^{n-1}$. Par un calcul facile⁽²⁸⁾, on voit qu'on a un isomorphisme entre Ω_v et $v^* \mathcal{N}$. En particulier Ω_v provient d'un pull-back par v . Rappelons également qu'on peut associer à \mathcal{N} une équivalence $E(\mathcal{N})$ de $\mathbf{H}(\mathbb{P}_X^{n-1})$. Pour prouver que la composée de (144) est un 2-isomorphisme il

⁽²⁷⁾ Remarquer que le $\mathcal{O}_{(\mathbb{P}_X^n)^*}$ -module Ω_{j_∞} est nul puisque j_∞ est une immersion ouverte.

⁽²⁸⁾ En effet soit $E \xrightarrow{e} B$ un fibré vectoriel. Par définition Ω_e est le faisceau normal de l'immersion diagonale $d : E \longrightarrow E \times_B E$. Notons p_1 la projection sur le premier facteur : $E \times_B E \longrightarrow E$. Maintenant, le B -schéma $E \times_B E$ s'identifie à la somme directe $E \oplus E$ et la projection p_1 s'identifie à l'application $x \oplus y \rightarrow x$. En particulier p_1 définit un fibré vectoriel sur E isomorphe au pull-back de E par e et l'immersion diagonale d devient une section. De là il est facile de conclure que $\mathbb{V}(\Omega_e) \simeq e^* E$.

suffit de le faire après composition à gauche par $E(\mathcal{N})$, i.e. :

$$(145) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} H(\mathbb{P}_X^{n-1}) \\ \begin{array}{cc} \nearrow t^! & \searrow t_! \\ \downarrow \delta \end{array} \\ \begin{array}{c} H(\mathbb{P}_X^{n-1}) \xrightarrow{E(\mathcal{N})} H(\mathbb{P}_X^{n-1}) \xrightarrow{v^*} H((\mathbb{P}_X^n)^*) = H((\mathbb{P}_X^n)^*) \xrightarrow{v_!} H(\mathbb{P}_X^{n-1}) \end{array} \end{array}$$

Mais $v^!$ et $v^*E(\mathcal{N})$ sont 2-isomorphes par la composée des 2-isomorphismes :

$$v^*E(\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} E(v^*\mathcal{N})v^* \xrightarrow{\sim} E(\Omega_v)v^* \xrightarrow{\sim} v^!$$

(le second isomorphisme provient de l'isomorphisme entre $v^*\mathcal{N}$ et Ω_v). Ainsi, pour montrer ce que l'on veut, il suffira de prouver que la composée du diagramme planaire :

$$(146) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} H(\mathbb{P}_X^{n-1}) \\ \begin{array}{cc} \nearrow t^! & \searrow t_! \\ \downarrow \delta \end{array} \\ \begin{array}{c} H(\mathbb{P}_X^{n-1}) \xrightarrow{v^!} H((\mathbb{P}_X^n)^*) = H((\mathbb{P}_X^n)^*) \xrightarrow{v_!} H(\mathbb{P}_X^{n-1}) \end{array} \end{array}$$

est un 2-isomorphisme. On peut aussi considérer le diagramme planaire :

$$(147) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} H(\mathbb{P}_X^{n-1}) \\ \begin{array}{cc} \nearrow (vt)^! & \searrow (vt)_! \\ \begin{array}{ccc} \downarrow c^! & \downarrow \delta & \downarrow c_! \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{c} H(\mathbb{P}_X^{n-1}) \xrightarrow{v^!} H((\mathbb{P}_X^n)^*) = H((\mathbb{P}_X^n)^*) \xrightarrow{v_!} H(\mathbb{P}_X^{n-1}) \end{array} \end{array}$$

puisque les deux diagrammes planaires (146) et (147) diffèrent par des 2-isomorphismes de connexions de type $c^!$ et $c_!$ ainsi que par le 2-morphisme de counité $v_!v^! \xrightarrow{\sim} 1$ qui est inversible par l'axiome d'homotopie (étant donné que v est la projection d'un fibré en droites). Mais par la proposition 1.1.17, la composée du diagramme planaire (147) est égale au morphisme de counité de l'adjonction entre $(v \circ t)_!$ et $(v \circ t)^!$. Puisque $v \circ t = \text{id}_{\mathbb{P}_X^{n-1}}$, ce 2-morphisme de counité est un 2-isomorphisme. D'où le résultat recherché⁽²⁹⁾ !

⁽²⁹⁾ Le lecteur pourra remarquer que l'on n'a toujours pas utilisé l'hypothèse de récurrence.

Étape 2. La flèche (141) admet une rétraction. — On construira dans cette étape une rétraction à la flèche (141) :

$$p_! h_! h^! p^* A \longrightarrow p_! p^* A$$

Pour cela on va utiliser le 2-morphisme $\alpha_p : p_! \longrightarrow p_*$ (voir la définition 1.7.1). Par naturalité, le diagramme suivant :

$$(148) \quad \begin{array}{ccc} p_! h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_! p^* A \\ \alpha_p \downarrow & & \downarrow \alpha_p \\ p_* h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_* p^* A \end{array}$$

est commutatif. La flèche horizontale inférieure admet une rétraction par la proposition précédente⁽³⁰⁾. On en fixe une qu'on notera ρ . D'autre part, la flèche :

$$p_! h_! h^! p^* A \xrightarrow{\alpha_p} p_* h_! h^! p^* A$$

est un isomorphisme et même le 2-morphisme $\alpha_p : p_! h_! \longrightarrow p_* h_!$ est inversible. En effet, par la proposition 1.7.3 on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p_{n-1}! & \xrightarrow{\alpha_{p_{n-1}}} & p_{n-1}* \\ c_! \downarrow & & \downarrow c_* \\ p_! h_! & \longrightarrow & p_* h_! \equiv p_* h_* \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des 2-isomorphismes de connexions, et par l'hypothèse de récurrence le 2-morphisme $\alpha_{p_{n-1}}$ est un 2-isomorphisme. Ceci dit, on peut prendre comme rétraction la composée :

$$p_! p^* A \xrightarrow{\alpha_p} p_* p^* A \xrightarrow{\rho} p_* h_! h^! p^* A \xleftarrow[\alpha_p]{\sim} p_! h_! h^! p^* A$$

⁽³⁰⁾ Ceci a été établi dans la démonstration de la proposition 1.7.10. On peut également le déduire directement de l'énoncé de la proposition en question. En effet, cet énoncé affirme que le triangle suivant :

$$p_* h_! h^! p^* A \xrightarrow{\delta} p_* p^* A \xrightarrow{\eta} p_* i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A \xrightarrow{0} p_* h_! h^! p^* A[+1]$$

est distingué. Mais dans un triangle distingué où le troisième coté est nul, le premier coté admet une rétraction et le second une section *i.e.* le triangle est scindé.

En effet, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_! h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_! p^* A & \xrightarrow{\alpha_p} & p_* p^* A & \xrightarrow{\rho} & p_* h_! h^! p^* A \xleftarrow[\alpha_p]{\sim} p_! h_! h^! p^* A \\
 \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\
 p_! h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\alpha_p} & p_* h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_* p^* A & \xrightarrow{\rho} & p_* h_! h^! p^* A \xleftarrow[\alpha_p]{\sim} p_! h_! h^! p^* A \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 p_! h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\alpha_p} & p_* h_! h^! p^* A & \xlongequal{\quad} & p_* h_! h^! p^* A & \xleftarrow[\alpha_p]{\sim} & p_! h_! h^! p^* A \\
 \parallel & & & & & & \parallel \\
 p_! h_! h^! p^* A & \xlongequal{\quad} & & & & & p_! h_! h^! p^* A
 \end{array}$$

La proposition 1.7.12 est prouvée. □

Corollaire 1.7.13. — Si p est la projection $\mathbb{P}_X^n \longrightarrow X$, le 2-morphisme :

$$\alpha_p : p_! p^* \longrightarrow p_* p^*$$

est inversible.

Démonstration. — Il suffit de voir que pour tout objet A de $H(X)$ la flèche :

$$p_! p^* A \longrightarrow p_* p^* A$$

induite par le 2-morphisme α_p est un isomorphisme.

En appliquant le 2-morphisme $\alpha_p : p_! \longrightarrow p_*$ au triangle (Δ) , on obtient par naturalité un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_! h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_! p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_! i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{0} & p_! h_! h^! p^* A[+1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 p_* h_! h^! p^* A & \xrightarrow{\delta} & p_* p^* A & \xrightarrow{\eta} & p_* i_{\infty*} i_{\infty}^* p^* A & \xrightarrow{0} & p_* h_! h^! p^* A[+1]
 \end{array}$$

qui est un morphisme de triangles distingués par les propositions 1.7.10 et 1.7.12. Il suffit donc de montrer que les deux 2-morphismes :

$$(149) \quad p_! h_! \longrightarrow p_* h_! \quad \text{et} \quad p_! i_{\infty*} \longrightarrow p_* i_{\infty*}$$

sont inversibles. Mais d'après la proposition 1.7.3, on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 p_{n-1}! & \xrightarrow{\alpha_{p_{n-1}}} & p_{n-1}* \\
 c_! \downarrow & & \downarrow c_* \\
 p_! h_! & \longrightarrow & p_* h_! \xlongequal{\quad} p_* h_*
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{id}_{X!} & \xlongequal{\quad} & \text{id}_{X*} \\
 c_! \downarrow & & \downarrow c_* \\
 p_! i_{\infty!} & \xlongequal{\quad} p_! i_{\infty*} \longrightarrow & p_* i_{\infty*}
 \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des 2-isomorphismes. Il devient alors clair que le second 2-morphisme de (149) est inversible. Pour le premier 2-morphisme de (149) on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence. □

Par 2-dualité on obtient aussi le corollaire :

Corollaire 1.7.14. — *Le 2-morphisme :*

$$\alpha_p : p_! p^! \longrightarrow p_* p^!$$

est inversible.

Démonstration. — En effet, le corollaire 1.7.13 s'applique au foncteur croisé sur le quadruplet $(G^*, G_*, G_\nabla, G^\nabla)$. Ainsi, le 2-morphisme :

$$p_{\nabla} p^{\star} \longrightarrow p_{\star} p^{\star}$$

est inversible. Ceci veut exactement dire (puisque \star correspond à $!$ et ∇ correspond à $*$) que le 2-morphisme :

$$p_! p^! \longrightarrow p_* p^!$$

est inversible. □

On va construire à l'aide des deux corollaires 1.7.13 et 1.7.14 deux 2-morphismes $p_{\star} \longrightarrow p_!$.

1. Le premier 2-morphisme est la composée :

$$\phi_1 : p_{\star} \xrightarrow{\eta} [p_{\star} p^{\star}]_{\eta} p_{\star} \xleftarrow[\sim]{\alpha_p} p_! [p^{\star} p_{\star}]_{\delta} \xrightarrow{\delta} p_!$$

(les notations $[\cdot]_{\eta}$ et $[\cdot]_{\delta}$ désignent le couple de 1-morphismes qui définissent les 2-morphismes d'unité et de counité).

2. Le deuxième 2-morphisme est la composée :

$$\phi_2 : p_{\star} \xrightarrow{\eta} p_{\star} [p^! p_!]_{\eta} \xleftarrow[\sim]{\alpha_p} [p_! p^!]_{\delta} p_! \xrightarrow{\delta} p_!$$

On a le lemme :

Lemme 1.7.15. — *Le 2-morphisme ϕ_1 appliqué à p^* donne l'inverse du 2-isomorphisme $\alpha_p : p_! p^* \xrightarrow{\sim} p_* p^*$. Dualement, le 2-morphisme ϕ_2 appliqué à $p^!$ donne l'inverse du 2-isomorphisme $\alpha_p : p_! p^! \xrightarrow{\sim} p_* p^!$.*

Démonstration. — On démontrera seulement la première assertion : la seconde découlera par 2-dualité en remarquant que ϕ_2 est exactement le 2-morphisme ϕ_1 mais construit à partir du foncteur croisé sur le quadruplet $(G^*, G_*, G_{\nabla}, G^{\nabla})$. Considérons le diagramme suivant :

$$(150) \quad \begin{array}{ccccc} p_{\star} p^{\star} & \xrightarrow{\eta} & [p_{\star} \{p^{\star}\}_{\eta} p_{\star}]_{\delta} p^{\star} & \xleftarrow[\sim]{\alpha_p} & p_! [p^{\star} \{p_{\star}\}_{\delta} p^{\star}]_{\eta} & \xrightarrow{\delta} & p_! p^{\star} \\ & \searrow & \downarrow \delta & & \uparrow \eta & \swarrow & \\ & & p_{\star} p^{\star} & \xleftarrow[\sim]{\alpha_p} & p_! p^{\star} & & \end{array}$$

les notations $[\cdot]_\eta$ et $[\cdot]_\delta$ désignent le couple de 1-morphismes qui définissent les 2-morphismes d'unité et de counité dans la ligne horizontale supérieure du diagramme (150). Les notations $\{\cdot\}_\eta$ et $\{\cdot\}_\delta$ désignent le couple de 1-morphismes qui définissent les 2-morphismes d'unité et de counité verticaux du diagramme (150).

Pour prouver le lemme, il suffit bien évidemment de prouver que le diagramme (150) est commutatif.

Le triangle de droite n'est autre que le triangle :

$$\begin{array}{ccc} p_* & \xrightarrow{\eta} & p_* p^* p_* \\ & \searrow & \downarrow \delta \\ & & p_* \end{array}$$

évalué en p^* . Mais ce triangle est commutatif par définition des adjonctions.

De même le triangle de gauche n'est autre que le triangle :

$$\begin{array}{ccc} p^* p_* p^* & \xrightarrow{\delta} & p^* \\ \uparrow \eta & \nearrow & \\ p^* & & \end{array}$$

sur lequel on applique $p^!$. Ce triangle est également commutatif par définition des adjonctions.

Il reste donc à prouver la commutation du carré :

$$\begin{array}{ccc} p_* \{p^* p_*\}_\delta p^* & \xleftarrow{\alpha_p} & p_! p^* \{p_* p^*\}_\eta \\ \downarrow \delta & & \uparrow \eta \\ p_* p^* & \xleftarrow{\alpha_p} & p_! p^* \end{array}$$

Ce carré se factorise horizontalement de la manière suivante :

$$(151) \quad \begin{array}{ccccc} p_* \{p^* p_*\}_\delta p^* & \xlongequal{\quad} & p_* p^* \{p_* p^*\}_\eta & \xleftarrow{\alpha_p} & p_! p^* \{p_* p^*\}_\eta \\ \downarrow \delta & & \uparrow \eta & & \uparrow \eta \\ p_* p^* & \xlongequal{\quad} & p_* p^* & \xleftarrow{\alpha_p} & p_! p^* \end{array}$$

Le second carré de (151) est commutatif par naturalité de α_p et le premier carré de (151) n'est autre que le carré :

$$\begin{array}{ccc} p^* p_* p^* & \xlongequal{\quad} & p^* p_* p^* \\ \delta \downarrow & & \uparrow \eta \\ p^* & \xlongequal{\quad} & p^* \end{array}$$

sur lequel on a appliqué p_* . En particulier, il est aussi commutatif par définition des adjonctions. Ceci termine la preuve de la commutation du carré central de (150) et donc la preuve du lemme. \square

On est en mesure maintenant de prouver le cas n de la récurrence et donc le théorème 1.7.9 :

Proposition 1.7.16 (Le cas n de la récurrence). — *Le 2-morphisme :*

$$\alpha_p : p_! \xrightarrow{\sim} p_*$$

est inversible.

Démonstration. — Pour montrer que le 2-morphisme α_p est inversible il suffit de montrer qu'il a un inverse à droite et un inverse à gauche⁽³¹⁾. Nous prouverons que ϕ_1 est un inverse à gauche de α_p et que ϕ_2 est un inverse à droite de α_p . Il faut donc montrer que les composées :

$$(152) \quad u_1 : p_* \xrightarrow{\phi_1} p_! \xrightarrow{\alpha_p} p_*$$

et

$$(153) \quad u_2 : p_! \xrightarrow{\alpha_p} p_* \xrightarrow{\phi_2} p_!$$

sont les 2-morphismes identités. Pour prouver cela il suffira de le faire pour les 2-morphismes ${}^a u_1 : p^* \longrightarrow p^*$ et ${}^a u_2 : p^! \longrightarrow p^!$ obtenus par adjonction.

Étape 1. — Commençons par le 2-morphisme $p^* \longrightarrow p^*$. Il est la composée :

$$(154) \quad p^* \xrightarrow{\eta} p^* p_* p^* \xrightarrow{u_1} p^* p_* p^* \xrightarrow{\delta} p^*$$

Le 2-morphisme du milieu est par définition la composée :

$$(155) \quad p^* p_* p^* \xrightarrow{\phi_1} p^* p_! p^* \xrightarrow{\alpha_p} p^* p_* p^*$$

Mais par le lemme 1.7.15, les deux 2-morphismes : $p_* p^* \xrightarrow{\phi_1} p_! p^*$ et $p_! p^* \xrightarrow{\alpha_p} p_* p^*$ sont inverses l'un de l'autre. Il vient que le 2-morphisme composé de (155) est le 2-morphisme identité. Ainsi, la composée de (154) est simplement la composée :

$$p^* \xrightarrow{\eta} p^* p_* p^* \xrightarrow{\delta} p^*$$

Par la définition des adjonctions cette composée est le 2-morphisme identité.

⁽³¹⁾ Par 2-dualité, il suffit juste de prouver que α_p admet un inverse à gauche. En effet en appliquant ceci au foncteur croisé $(G^*, G_*, G_\nabla, G^\nabla)$ on voit que α_p^{op} admet aussi un inverse à gauche ce qui équivaut à dire que α_p admet un inverse à droite.

Étape 2. — On fait pareil pour le 2-morphisme $p^! \longrightarrow p^!$. Il est la composée :

$$p^! \xrightarrow{\eta} p^! p_! p^! \xrightarrow{u_2} p^! p_! p^! \xrightarrow{\delta} p^!$$

Le 2-morphisme du milieu est par définition la composée :

$$(156) \quad p^! p_! p^! \xrightarrow{\alpha_p} p^! p_* p^! \xrightarrow{\phi_2} p^! p_! p^!$$

Étant donné que $p_! p^! \xrightarrow{\alpha_p} p_* p^!$ et $p_* p^! \xrightarrow{\phi_2} p_! p^!$ sont inverses l'un de l'autre (par le lemme 1.7.15), on voit alors que la composée de (156) est l'identité. Ainsi, notre 2-endomorphisme $p^! \longrightarrow p^!$ est la composée des 2-morphismes :

$$p^! \xrightarrow{\eta} p^! p_! p^! \xrightarrow{\delta} p^!$$

C'est donc le 2-morphisme identité. □

1.7.2.2. Le cas général. Application

Théorème 1.7.17. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ un S -morphisme projectif. Le 2-morphisme :

$$\alpha_f : f_! \longrightarrow f_*$$

est inversible.

Démonstration. — Dans le numéro précédent on a traité le cas de l'espace projectif sur Y . Il est facile en utilisant l'axiome de localité et la compatibilité du 2-morphisme $p_! \longrightarrow p_*$ avec les échanges, de déduire le cas où p est la projection : $\mathbb{P}(\mathcal{L}) \longrightarrow Y$ avec \mathcal{L} un \mathcal{O}_Y -module localement libre.

Pour traiter le cas général, on choisit une Y -immersion :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & \mathbb{P}(\mathcal{L}) \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & Y \end{array}$$

(avec \mathcal{L} localement libre sur Y) et on invoque le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f_! & \xrightarrow{\alpha_f} & f_* \\ c_! \downarrow & & \downarrow c_* \\ p_! s_! & \xrightarrow{\alpha_p} & p_* s_* \end{array}$$

Le théorème est prouvé. □

On termine par une application importante du théorème précédent.

Corollaire 1.7.18. — Supposons donné un carré cartésien de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec f projectif. Le 2-morphisme d'échange :

$$Ex_*^* : g^* f_* \longrightarrow f'_* g'^*$$

est inversible.

Démonstration. — En effet, par 1.7.7 on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} g_* f_! & \xrightarrow{Ex_!^*} & f'_! g'^* \\ \alpha_f \downarrow & & \downarrow \alpha_{f'} \\ g^* f_* & \xrightarrow{Ex_*^*} & f'_* g'^* \end{array}$$

Étant donné que les 2-morphismes $Ex_!^*$, α_f et $\alpha_{f'}$ sont inversibles, le résultat est clair. \square

Remarque 1.7.19. — L'analogue du corollaire 1.7.18 est connu dans [AGV73] sous le nom du « théorème de changement de base pour un morphisme propre ».

CHAPITRE 2

COMPLÉMENTS SUR LES 2-FONCTEURS HOMOTOPIQUES STABLES ET LES QUATRE OPÉRATIONS

Introduction. — Beaucoup de théorèmes de base en cohomologie étale se démontrent par dévissage en utilisant le théorème de changement de base propre et le théorème de changement de base par un morphisme lisse. Parmi ces théorèmes, on note :

- la constructibilité des faisceaux de cohomologie $R^i f_* \mathcal{F}$, pour f de type fini et \mathcal{F} un faisceau de Λ -modules constructible,
- les encadrements de la dimension cohomologique des Rf_* (par exemple, le théorème d’Artin sur les images directes cohomologiques par des morphismes affines⁽¹⁾),
- le formalisme de dualité de Verdier (qui repose en partie sur la notion de faisceau constructible).

Mis à part la section 2.4, on peut dire que le but de ce chapitre est d’établir des analogues motiviques d’une partie de ces théorèmes en se basant sur le théorème de changement de base pour un morphisme projectif démontré dans le chapitre précédent. Pour cela, on doit d’abord préciser les notions de *constructibilité* et de *dimension cohomologique* dans le cadre motivique voire même dans le cadre abstrait d’un 2-foncteur homotopique stable. Fixons donc un 2-foncteur homotopique stable $H : \mathbf{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$.

Comme remplaçant des faisceaux constructibles, il est naturel d’utiliser les objets compacts. Malheureusement, pour que la notion de compacité ait un sens, il faudra que les catégories $H(-)$ admettent des petites sommes. Ainsi, on a opté pour une autre définition qui garde un sens pour n’importe quel H . Pour motiver ladite définition, plaçons nous un instant dans le 2-foncteur **SH**. Parmi les objets compacts de **SH**(X), on trouve les motifs $(U_+) \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n}$ associés à un X -schéma lisse U . Il est bien connu

⁽¹⁾Notons tout de suite, qu’on est très loin de démontrer et même de formuler un analogue du théorème d’Artin motivique.

que ces motifs engendrent la catégorie avec petites sommes $\mathbf{SH}(X)$. Par un résultat classique (voir la proposition 2.1.24), on déduit que tout objet compact de $\mathbf{SH}(X)$ peut être construit en un nombre fini d'étapes à partir des $(U)_+ \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n}$ en prenant des cônes successifs et des facteurs directs. Ainsi la sous-catégorie des objets compacts de $\mathbf{SH}(X)$ est la plus petite sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs contenant les motifs $(U)_+ \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n}$. D'autre part, si f est le morphisme structural du X -schéma lisse U , on sait que $(U)_+ = f_{\#} \mathbb{S}_U^0$ avec \mathbb{S}^0 la sphère simpliciale de dimension nulle. N'ayant pas d'objets distingués dans $\mathbf{H}(S)$, ceci nous amène à définir la sous-catégorie des objets constructibles de $\mathbf{H}(X)$ comme étant celle engendrée par les $f_{\#} A_U$ avec A variant dans une classe d'objets de $\mathbf{H}(S)$ fixée à l'avance.

Pour ce qui est de la dimension cohomologique dans \mathbf{H} , le formalisme des t -structures s'impose (voir [BBD82]). Reste bien sûr à en choisir une. En vue des applications potentielles, notre choix est tombé sur une généralisation de la t -structure homotopique sur $\mathbf{DM}(k)$ ou $\mathbf{SH}(k)$ (avec k un corps). Notre point de départ, est un théorème de Fabien Morel [Mor05], affirmant que la t -structure homotopique de $\mathbf{SH}(k)$ est « engendrée » (au sens de la définition 2.1.71) par les motifs de la forme : $(X)_+ \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge n}$ avec X un k -schéma lisse et $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, nous étudierons les t -structures sur $\mathbf{H}(-)$ engendrée par les objets analogues à savoir des $f_{\#} A_{X'}(n)[n]$ avec f lisse de source X' , A variant dans un ensemble d'objets de $\mathbf{H}(S)$ fixé à l'avance.

Ayant expliqué nos notions de constructibilité et de dimension cohomologique, faisons un bref aperçu des résultats obtenus dans ce chapitre.

1- La section 2.1 regroupera une grande partie des techniques générales employées dans ce chapitre. La première partie concerne les catégories triangulées. On y trouvera les notions élémentaires de sous-catégories suspendues et cosuspendues engendrées par une classe d'objets. On discutera également des objets constructibles, compacts et des catégories bien engendrées. On redémontrera quelques théorèmes bien connus comme le lemme de représentabilité de Brown. Tous ces résultats se trouvent déjà dans la littérature (voir par exemple le livre de Neeman [Nee01]). On passe ensuite aux dérivateurs triangulés auxquels on consacre une sous-section relativement grande. Une bonne partie des résultats discutés se trouvent dans [Gro90], [Mal01a] et [Mal01b]. Mise à part, la section 2.4, la théorie des dérivateurs sera très rarement utilisée dans ce chapitre. Elle le sera par contre beaucoup plus dans le chapitre suivant. On enchaîne sur les histoires d'engendrement de t -structure et de t -exactitude des foncteurs, avec lesquels on termine la partie « techniques triangulées » de ces préliminaires.

La suite des préliminaires concerne surtout les catégories monoïdales. Dans cette partie très technique, on introduira les notions de modules et projecteurs dans le but d'alléger les problèmes de cohérences rencontrés dans la théorie de dualité de Verdier. Le lecteur remarquera qu'on travaillera systématiquement avec des catégories monoïdales non forcément symétriques ou unitaires. Cette généralité est peut-être inutile

étant donné que toutes les catégories motiviques connues sont monoïdales symétriques et unitaires. Il y a au moins trois raisons pour ce choix :

- Les catégories monoïdales sont formellement plus faciles à étudier que les catégories monoïdales symétriques et unitaires, pour la simple raison que ces derniers contiennent plus de structures.
- Le fait de travailler avec une structure monoïdale non forcément symétrique nous force à conserver les objets dans le bon ordre, ce qui rend, il nous semble, l'exposition plus claire.
- Il est tout de même bon de savoir que la théorie de dualité de Verdier peut se faire sans l'isomorphisme de commutation. Ou, si l'on préfère, de savoir à quel endroit l'isomorphisme de commutation intervient. En fait, l'unique différence avec le cas symétrique, est que les opérateurs de dualités ne sont pas involutifs.

On termine la section par un retour à la géométrie. Un numéro sera consacré aux notions de 2-foncteurs homotopiques stables, \mathbb{Q} -linéaire, séparé, quasi-séparé, parfait pour les petites sommes, etc. Dans un deuxième numéro on rappellera très brièvement les techniques de résolution des singularités.

2- La seconde section est consacrée aux analogues des théorèmes de constructibilité et de dimension cohomologique du formalisme étale. Pour simplifier, on décrit les résultats obtenus uniquement lorsque la base S est le spectre d'un corps parfait k admettant la résolution des singularités. Dans un premier temps, on prouve le théorème de constructibilités des quatre opérations, qui affirme que pour f quasi-projectif, les foncteurs f^* , f_* , $f_!$ et $f^!$ envoient un objet constructible sur un objet constructible. Un des résultats intermédiaires de cette preuve est particulièrement intéressant. Il s'agit de la proposition 2.2.27 qui décrit un système de générateur des catégories des objets constructibles. Cette proposition sera utilisée dans le chapitre 2.

Pour ce qui concerne les dimensions cohomologiques des opérations, *i.e.*, leurs propriétés de t -exactitude, la situation est plus complexe. Notons simplement que pour f un morphisme de k -schémas quasi-projectifs, le foncteur f_* est t -exact à droite et $f_*[d]$ est t -exact à gauche avec d la dimension de la source, que l'on peut remplacer par la dimension maximale des fibres lorsque f est projectif. Pour des résultats plus détaillés, voir la scholie 2.2.95. Notons également, qu'on arrive à borner la t -dimension des opérations $f^!$ alors qu'il semble impossible de trouver des bornes supérieures (homologiques) pour les opérations f^* et $f_!$ en général. Retenons également, que pour prouver la scholie 2.2.95, on introduit une autre t -structure qu'on appelle la t -structure engendrée perverse, qui partage des points communs avec la t -structure perverse en cohomologie étale (voir [BBD82]). La t -structure engendrée perverse est, à notre avis, intéressante en elle-même. De plus, elle constitue un outil puissant pour résoudre des questions de t -exactitude à gauche concernant d'autres t -structures, notamment la t -structure engendrée non perverse, et ceci grâce à son système de générateurs dégagé dans la proposition 2.2.69 ainsi qu'aux théorèmes 2.2.82 et 2.2.86. Notons enfin

un résultat intéressant, qu'on peut considérer comme un petit pas vers un théorème d'Artin motivique pour les schémas affines. Il s'agit en fait de la t -exactitude de l'opération j_* lorsque j est l'immersion d'un ouvert dans une courbe. En effet, la dimension cohomologique de ce foncteur chute de 1 à 0!

3- La section 2.3 est consacrée au formalisme de dualité de Verdier. Une bonne partie de cette section est consacrée à des problèmes de cohérence. Une fois ces problèmes surmontés, on aboutit à un accouplement canonique $f^*(-) \otimes f^!(-) \longrightarrow f^!(- \otimes -)$ qui fait de $f^!$ un f^* -module au sens de 2.1.93. C'est cette structure qui sera à la base de la plupart des formules habituelles reliant les quatre opérations, le produit tensoriel et les homomorphismes internes. On définira également des accouplements $f_*(-) \otimes f_!(-) \longrightarrow f_!(-)$. On montre ensuite l'existence et l'unicité des objets dualisants (au sens de 2.3.66) et on déduit les formules habituelles de commutations aux foncteurs de dualités.

4- La dernière section est d'un esprit différent des deux dernières. Il ne s'agit plus d'analogies avec la cohomologie étale, mais simplement de préparer le terrain pour le dernier chapitre. On y trouvera une définition fonctionnelle de ce que doit être un dérivateur algébrique homotopique et stable. La définition choisie est minimale. On montrera dans le dernier chapitre comment étendre le 2-foncteur **SH** en un dérivateur algébrique **SHL**.

2.1. Préliminaires généraux

Pour la commodité du lecteur, on regroupe dans cette section quelques résultats généraux qui seront utilisés dans les sections qui suivent. Beaucoup de ces résultats sont bien connus et facilement accessibles dans la littérature : pour cela, l'exposition sera parfois brève, et le lecteur sera renvoyé à la source pour des démonstrations jugées longues.

La première moitié de ces préliminaires concerne les catégories triangulées. On traitera, d'abord, les questions d'engendrement, de sommes infinies et d'objets compacts. On introduit juste après la notion de dérivateurs triangulés pour terminer avec des compléments sur les t -structures. La seconde moitié est essentiellement consacrée aux catégories monoïdales. On rappellera brièvement les définitions de catégories monoïdales et de foncteurs pseudo-monoïdaux entre eux pour s'intéresser ensuite à leurs adjoints. Juste après, on étudie les bifoncteurs homomorphismes internes dans une catégorie monoïdale fermée. On termine les préliminaires sur les catégories monoïdales par un petit paragraphe portant sur les catégories monoïdales triangulées voire sur les dérivateurs monoïdaux triangulés. Dans les deux derniers paragraphes, on retourne à la géométrie algébrique avec quelques mots sur les 2-foncteurs homotopiques et sur la résolution des singularités.

2.1.1. Sous-catégories triangulées et engendrement. — Pour ce qui concerne la définition des catégories triangulées ainsi que les conséquences directes des axiomes, le lecteur peut consulter [Ver96] ou [Nee01]. L'autoéquivalence de suspension sera notée comme d'habitude $[+1]$. Étant donnée une catégorie triangulée \mathcal{T} , on s'intéressera à trois sortes de sous-catégories de \mathcal{T} :

Définition 2.1.1. — Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée. Une sous-catégorie pleine \mathcal{C} de \mathcal{T} est dite stable par extensions si pour tout triangle distingué :

$$A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow A'[+1]$$

de \mathcal{T} , on a l'implication : $[A' \text{ et } A'' \in \text{Ob}(\mathcal{C})] \implies [A \in \text{Ob}(\mathcal{C})]$.

1- Une sous-catégorie triangulée de \mathcal{T} est une sous-catégorie pleine $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ stable par extensions et par les auto-équivalences de suspension $[+1]$ et de cosuspension $[-1]$.

2- Une sous-catégorie suspendue (resp. cosuspendue) est une sous-catégorie pleine $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ stable par extensions et le foncteur de suspension $[+1]$ (resp. de cosuspension $[-1]$).

Remarque 2.1.2

1- Une sous-catégorie triangulée est clairement une sous-catégorie pleine qui est suspendue et cosuspendue. Précisons également qu'une sous-catégorie triangulée est elle-même une catégorie triangulée.

2- Les deux notions de sous-catégorie suspendue et cosuspendue sont échangées par la dualité. Plus précisément, soient \mathcal{T} une catégorie triangulée et \mathcal{T}^{op} sa catégorie triangulée opposée. Une sous-catégorie suspendue (resp. cosuspendue) $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ induit par passage aux catégories opposées, une sous-catégorie cosuspendue (resp. suspendue) $\mathcal{C}^{\text{op}} \subset \mathcal{T}^{\text{op}}$. En effet, le foncteur de suspension de \mathcal{T}^{op} est l'inverse de celui de \mathcal{T} .

Le lemme suivant est une trivialité :

Lemme 2.1.3. — Soient \mathcal{T} une catégorie triangulée et $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ une sous-catégorie pleine. La catégorie \mathcal{C} est une sous-catégorie suspendue (resp. cosuspendue) si et seulement si pour tout triangle distingué de \mathcal{T} :

$$A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow A'[+1]$$

On a les deux implications :

- (stabilité par extension) $[A' \text{ et } A'' \in \text{Ob}(\mathcal{C})] \implies [A \in \text{Ob}(\mathcal{C})]$,
- (stabilité par conoyau) $[A' \text{ et } A \in \text{Ob}(\mathcal{C})] \implies [A'' \in \text{Ob}(\mathcal{C})]$ (resp. (stabilité par noyau) $[A \text{ et } A'' \in \text{Ob}(\mathcal{C})] \implies [A' \in \text{Ob}(\mathcal{C})]$).

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un foncteur. Si $\mathcal{C}' \subset \mathcal{D}'$ est une sous-catégorie, on note $f^{-1}(\mathcal{C}')$ la sous-catégorie de \mathcal{D} dont les objets sont les $A \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ tel que $f(A) \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ et les flèches sont les $a \in \text{Fl}(\mathcal{D})$ tel que $f(a) \in \text{Fl}(\mathcal{C}')$. On a :

Lemme 2.1.4. — *Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. Soit $\mathcal{C}' \subset \mathcal{T}'$ une sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue) de \mathcal{T}' . Alors, $f^{-1}(\mathcal{C}')$ est une sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue) de \mathcal{T} .*

Lemme 2.1.5. — *Soient \mathcal{T} une catégorie triangulée et $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$ un ensemble (ou une classe) d'objets de \mathcal{T} . Il existe une plus petite sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue) $\langle \Lambda \rangle^{s-ct}$ (resp. $\langle \Lambda \rangle_+^{s-ct}$, $\langle \Lambda \rangle_-^{s-ct}$) de \mathcal{T} contenant les objets dans Λ .*

Démonstration. — En effet, on définit par récurrence des sous-catégories $\langle \Lambda \rangle^n$ avec :

- $\langle \Lambda \rangle^0$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} ayant pour objets les suspensions et cosuspensions itérés d'objets de $\Lambda \cup \{0\}$,
- $\langle \Lambda \rangle^n$ est la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} dont les objets sont ceux qui s'obtiennent comme une extension entre deux objets de $\langle \Lambda \rangle^{n-1}$.

Du fait que $\langle \Lambda \rangle^n$ contient un objet nul, on déduit les inclusion $\langle \Lambda \rangle^n \subset \langle \Lambda \rangle^{n+1}$. L'union des $\langle \Lambda \rangle^n$ convient clairement. Les cas respectifs se traitent de la même manière. \square

Définition 2.1.6

1- La sous-catégorie $\langle \Lambda \rangle^{s-ct}$ est appelée la sous-catégorie triangulée strictement engendrée par Λ . Les objets de cette catégorie sont dits Λ -strictement constructibles.

2- De même, la sous-catégorie $\langle \Lambda \rangle_+^{s-ct}$ (resp. $\langle \Lambda \rangle_-^{s-ct}$) est appelée la sous-catégorie suspendue (resp. cosuspendue) strictement-engendrée par Λ . Les objets de cette catégorie sont dits Λ -strictement positivement (resp. négativement) constructibles.

Lemme 2.1.7. — *Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. Supposons donnée une sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue) $\mathcal{C}' \subset \mathcal{T}'$. Soit Λ un ensemble (ou une classe) d'objets de \mathcal{T} . Supposons que $f(\Lambda) \subset \mathcal{C}'$. Alors, $f(\langle \Lambda \rangle^{s-ct}) \subset \mathcal{C}'$ (resp. $f(\langle \Lambda \rangle_+^{s-ct}) \subset \mathcal{C}'$, $f(\langle \Lambda \rangle_-^{s-ct}) \subset \mathcal{C}'$).*

Démonstration. — Ceci découle immédiatement de la minimalité de $\langle \Lambda \rangle^{s-ct}$ et du fait que $f^{-1}\mathcal{C}'$ est triangulée. De même pour les cas respectifs. \square

Le « *strictement* » de la définition 2.1.6, est employé pour distinguer la notion analogue où l'on permet d'ajouter les facteurs directes :

Définition 2.1.8. — Soit \mathcal{C} une sous-catégorie pleine d'une catégorie additive \mathcal{D} . On dit que \mathcal{C} est stable par facteurs directs si pour tout triplets (A, B, C) d'objets de \mathcal{D} , l'implication suivante :

$$[A \simeq B \oplus C \text{ et } A \in \text{Ob}(\mathcal{C})] \implies [B \in \mathcal{C}]$$

est vérifiée.

Lemme 2.1.9. — Soient \mathcal{T} une catégorie triangulée et $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$ un ensemble (ou une classe) d'objets de \mathcal{T} . Il existe une plus petite sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue) $\langle \Lambda \rangle^{ct}$ (resp. $\langle \Lambda \rangle_+^{ct}$, $\langle \Lambda \rangle_-^{ct}$) de \mathcal{T} contenant les objets dans Λ et qui soit stable par facteurs directs.

Démonstration. — La preuve est aussi évidente que celle de 2.1.5. Il suffit seulement d'ajouter les facteurs directs quand on passe du rang $n - 1$ à n . \square

Définition 2.1.10

1- La sous-catégorie $\langle \Lambda \rangle^{ct}$ est appelée la sous-catégorie triangulée engendrée par Λ . Les objets de cette catégorie sont dits Λ -constructibles.

2- De même, la sous-catégorie $\langle \Lambda \rangle_+^{ct}$ (resp. $\langle \Lambda \rangle_-^{ct}$) est appelée la sous-catégorie suspendue (resp. cosuspendue) engendrée par Λ . Les objets de cette catégorie sont dits Λ -positivement (resp. Λ -négativement) constructibles.

Lemme 2.1.11. — Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. Supposons donnée une sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue) $\mathcal{C}' \subset \mathcal{T}'$ stable par facteurs directs. Soit Λ un ensemble (ou une classe) d'objets de \mathcal{T} . Supposons que $f(\Lambda) \subset \mathcal{C}'$. Alors, $f(\langle \Lambda \rangle^{ct}) \subset \mathcal{C}'$ (resp. $f(\langle \Lambda \rangle_+^{ct}) \subset \mathcal{C}'$, $f(\langle \Lambda \rangle_-^{ct}) \subset \mathcal{C}'$).

Démonstration. — Ceci découle immédiatement de la minimalité de $\langle \Lambda \rangle^{ct}$ et du fait que $f^{-1}\mathcal{C}'$ est triangulée et stable par facteurs directs. De même pour les cas respectifs. \square

Rappelons qu'une catégorie discrète est une catégorie qui n'a pour flèches que les identités. Si I est une petite catégorie discrète, un foncteur $I \longrightarrow \mathcal{C}$ est parfois appelé une famille d'objets de \mathcal{C} .

Définition 2.1.12

1- Soit \mathcal{D} une catégorie. On dit que \mathcal{D} est une catégorie avec petites sommes (resp. avec petits produits) si les limites inductives (resp. projectifs) indicées par des petites catégories discrètes sont représentables dans \mathcal{D} .

2- Soit \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine d'une catégorie \mathcal{D} avec petites sommes (resp. petits produits). On dit que \mathcal{C} est stable par petites sommes (resp. petits produits), si la colimite (resp. limite) dans \mathcal{D} d'une petite famille discrète d'objets de \mathcal{C} est un objet de \mathcal{C} .

La notion de catégorie avec sommes (resp. avec produits) est particulièrement féconde lorsque la catégorie en question est munie d'une triangulation. On parle alors de catégories triangulées avec petites sommes (resp. petits produits).

Remarque 2.1.13. — La notion d'une catégorie triangulée avec petites sommes est duale de celle d'une catégorie triangulée avec petits produits. Ainsi, dans la suite, il sera uniquement question de catégories triangulées avec petites sommes. Les énoncés et notions concernant les catégories triangulées avec petits produits s'obtiennent par passage aux catégories opposées⁽²⁾.

Lemme 2.1.14. — Soient \mathcal{T} une catégorie triangulée avec petites sommes et $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$ un ensemble (ou une classe) d'objets de \mathcal{T} . Il existe une plus petite sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue) $\ll \Lambda \gg$ (resp. $\ll \Lambda \gg_+$, $\ll \Lambda \gg_-$) de \mathcal{T} contenant les objets dans Λ et qui soit stable par petites sommes.

Démonstration. — Pour tout ordinal α , on définit par récurrence transfinie des sous-catégories pleines $\langle \Lambda \rangle^\alpha \subset \mathcal{T}$ de la manière suivante.

- Les objets de $\langle \Lambda \rangle^0$ sont les suspensions et cosuspensions itérées d'objets de $\Lambda \cup \{0\}$.
- On prend pour $\langle \Lambda \rangle^\alpha$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} dont les objets sont ceux qui s'obtiennent comme une extension de deux objets de $\langle \Lambda \rangle^{\alpha_0}$ avec $\alpha_0 \in \alpha$ ou comme une petite sommes d'objets dans $\cup_{\alpha_0 \in \alpha} \langle \Lambda \rangle^{\alpha_0}$.

La catégorie obtenue comme l'union des $\langle \Lambda \rangle^\alpha$ convient clairement. Les cas respectifs se traitent exactement de la même manière. \square

Définition 2.1.15

1- La sous-catégorie $\ll \Lambda \gg$ est appelée la sous-catégorie triangulée avec petite sommes engendrée par Λ . Les objets de cette catégorie sont dits Λ -ind-constructibles.

2- De même, la sous-catégorie $\ll \Lambda \gg_+$ (resp. $\ll \Lambda \gg_-$) est appelée la sous-catégorie suspendue (resp. cosuspendue) stable par petites sommes et engendrée par Λ . Les objets de cette catégorie sont dits Λ -ind-positivement (resp. Λ -ind-négativement) constructibles.

Lemme 2.1.16. — Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un foncteur triangulé commutant aux petites sommes, entre deux catégories triangulées avec petites sommes. Supposons donnée une sous-catégorie triangulée (resp. suspendue, cosuspendue) $\mathcal{C}' \subset \mathcal{T}'$ stable par petites sommes.

Soit Λ un ensemble (ou une classe) d'objets de \mathcal{T} . Supposons que $f(\Lambda) \subset \mathcal{C}'$. Alors, $f(\ll \Lambda \gg) \subset \mathcal{C}'$ (resp. $f(\ll \Lambda \gg_+) \subset \mathcal{C}'$, $f(\ll \Lambda \gg_-) \subset \mathcal{C}'$).

⁽²⁾Les catégories triangulées qui apparaissent dans la nature (par exemple les catégories homotopiques de certaines catégories de modèles) admettent toutes des petites sommes et produits. Toutefois, en pratique, les petites sommes directes semblent être plus utiles que les petits produits. Ceci peut s'expliquer par l'abondance en pratique des objets compacts et la rareté des objets cocompacts.

Démonstration. — Ceci découle immédiatement de la minimalité de $\ll \Lambda \gg$ et du fait que $f^{-1}\mathcal{C}'$ est triangulée et stable par petites sommes. De même pour les cas respectifs. \square

L'analogue avec « facteurs directs » de la définition 2.1.15 est superflu du moins pour ce qui concerne les sous-catégories triangulées à cause du résultat suivant⁽³⁾ :

Lemme 2.1.17. — *Soient \mathcal{T} une catégorie triangulée avec petites sommes. Alors, la catégorie additive sous-jacente à \mathcal{T} est pseudo-abélienne.*

La définition suivante est classique :

Définition 2.1.18

1- Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée avec petites sommes. Un objet A de \mathcal{T} est dit compact si le foncteur $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, -)$ commute aux petites sommes, i.e., pour toute petite famille $(B_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathcal{T} , l'homomorphisme canonique :

$$\bigoplus_{i \in I} \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, B_i) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, \bigoplus_{i \in I} B_i)$$

est inversible.

2- On notera $\mathcal{T}_{\mathrm{comp}}$ la sous-catégorie des objets compacts de \mathcal{T} . C'est une sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs de \mathcal{T} .

Soit $(u_i : D_i \longrightarrow D_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ un système inductif indicé par \mathbb{N} dans une catégorie triangulée \mathcal{T} admettant des petites sommes. On peut associer à ce système inductif une colimite homotopique $\mathrm{HoColim}_i(D_i)$ bien définie à un isomorphisme (non unique) près par le triangle distingué :

$$\bigoplus_{i \in I} D_i \xrightarrow{\bigoplus_i (\mathrm{id}_{D_i}, -u_i)} \bigoplus_{i \in I} D_i \longrightarrow \mathrm{HoColim}_i D_i \longrightarrow$$

On définit des flèches $D_i \longrightarrow \mathrm{HoColim}_i D_i$ en prenant la composée :

$$D_i \longrightarrow \bigoplus_i D_i \longrightarrow \mathrm{HoColim}_i D_i$$

De plus, les triangles suivant sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{u_i} & D_{i+1} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathrm{HoColim}_i D_i & \end{array}$$

⁽³⁾Ce résultat ne sera pas utilisé par la suite. Pour cela, on ne donnera pas de preuve. Notons tout de même que dans le cas où \mathcal{T} est compactement engendrée au sens de la définition 2.1.20, on peut obtenir le lemme en question comme conséquence directe du critère de représentabilité de Brown (voir la proposition 2.1.21).

étant donné que la composée :

$$D_i \xrightarrow{(\text{id}_{D_i}, -u_i)} D_i \oplus D_{i+1} \longrightarrow \oplus_i D_i \longrightarrow \text{HoColim } D_i$$

est nulle par construction. Ceci permet de définir un homomorphisme de groupes abéliens :

$$\text{Colim}_{i \in \mathbb{N}} \text{hom}(A, D_i) \longrightarrow \text{hom}(A, \text{HoColim}_{i \in \mathbb{N}} D_i)$$

naturel en $A \in \text{Ob}(\mathcal{T})$. Le lemme suivant est facile :

Lemme 2.1.19. — *Soit A un objet d'une catégorie triangulée avec petites sommes \mathcal{T} . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est un objet compact.*
2. *Pour tout système inductif $(u_i : D_i \longrightarrow D_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$, le morphisme canonique :*

$$\text{Colim}_{i \in \mathbb{N}} \text{hom}(A, D_i) \longrightarrow \text{hom}(A, \text{HoColim}_{i \in \mathbb{N}} D_i)$$

est inversible.

Démonstration. — L'implication $1 \implies 2$ est claire. Montrons l'implication réciproque, *i.e.*, que A est compact si $\text{hom}(A, -)$ commute aux colimites homotopiques indicées par \mathbb{N} . Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille (qu'on peut supposer infinie) d'objets de \mathcal{T} et montrons que :

$$\oplus_i \text{hom}(A, B_i) \longrightarrow \text{hom}(A, \oplus_i B_i)$$

est inversible. En considérant la composée :

(157)

$$\oplus_i \text{hom}(A, B_i) \longrightarrow \text{hom}(A, \oplus_i B_i) \longrightarrow \text{hom}(A, \prod_i B_i) \longrightarrow \prod_i \text{hom}(A, B_i)$$

on voit que notre homomorphisme est injectif. Montrons donc la surjectivité. Soit $f : A \longrightarrow \oplus_i B_i$ une flèche. On note I_0 l'ensemble des $i_0 \in I$ tel que la composée :

$$f_{i_0} : A \xrightarrow{f} \oplus_i B_i \longrightarrow B_{i_0}$$

est non nulle. Il suffit de montrer que I_0 est fini. En effet, dans ce cas, f sera la composée :

$$A \longrightarrow \oplus_{i_0 \in I_0} B_{i_0} \longrightarrow \oplus_i B_i$$

puisque cette dernière a la même image que f dans $\prod_i \text{hom}(A, B_i)$ par le monomorphisme (157). Supposons donc par l'absurde que I_0 est infini. On peut dans ce cas trouver une suite strictement croissante $J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n \subset \cdots \subset I_0$ telle que $I_0 = \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n$. On vérifie immédiatement que $\oplus_{i \in I} B_i$ est la colimite du système inductif $\oplus_{j \in J_n} \coprod (I - I_0) B_j$. Par la seconde condition de l'énoncé, il existe $m \in \mathbb{N}$ et une factorisation de f :

$$A \longrightarrow \oplus_{j \in J_m} \coprod (I - I_0) B_j \longrightarrow \oplus_{i \in I} B_i$$

Mais dans ce cas, pour $i_0 \in I_0 - J_m$, la flèche f_{i_0} est nulle. On a obtenu une contradiction. \square

Définition 2.1.20. — Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée avec petites sommes. On dit que \mathcal{T} est compactement engendrée, s'il existe un ensemble d'objets compacts $\Lambda \subset \mathbf{Ob}(\mathcal{T})$ tel que $\ll \Lambda \gg = \mathcal{T}$. L'ensemble Λ est appelé un ensemble de générateurs compacts de \mathcal{T} .

On a le bien-known critère de représentabilité de Brown :

Proposition 2.1.21. — Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée avec petites sommes, compactement engendrée. Soit $h : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ un foncteur exact contravariant qui transforme les petites sommes en petits produits. Alors, h est représentable.

Démonstration. — Si A est un objet de \mathcal{T} , on peut voir un élément $a \in h(A)$ comme une flèche $a : A \longrightarrow h$ (par exemple dans la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens sur \mathcal{T}).

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on va construire par récurrence les données suivantes :

- un objet Φ_n de \mathcal{T} ,
- un élément $\alpha_n \in h(\Phi_n)$,
- une flèche $u_{n-1} : \Phi_{n-1} \longrightarrow \Phi_n$ lorsque n est non nul tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \Phi_{n-1} & \xrightarrow{u_{n-1}} & \Phi_n & \xrightarrow{\alpha_n} & h \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & & \alpha_{n-1} & & \end{array}$$

Fixons un ensemble d'objets compacts Λ qui engendre la catégorie triangulée avec petites sommes \mathcal{T} . On supposera, quitte à l'élargir, que l'ensemble Λ est stable par suspensions et cosuspensions. On posera :

$$\Phi_0 = \bigoplus_{A \in \Lambda, a \in h(A)} A$$

et on prend pour α_0 le produit des a dans :

$$h(\Phi_0) = \prod_{A \in \Lambda, a \in h(A)} h(A)$$

Lorsque n est un entier non nul, on définit Φ_n par un triangle distingué :

$$\left(\bigoplus_{A \in \Lambda, b \in \text{Ker}(\alpha_{n-1} : \text{hom}_{\mathcal{T}}(A, \Phi_{n-1}) \rightarrow h(A))} A \right) \longrightarrow \Phi_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \Phi_n \longrightarrow$$

En utilisant l'hypothèse que h est exact, on déduit immédiatement que $\alpha_{n-1} \in h(\Phi_{n-1})$ est l'image d'un certain élément $\alpha_n \in h(\Phi_n)$.

Une fois les Φ_n construits, on pose $\Phi = \text{HoColim } \Phi_n$. Par définition, et du fait que h transforme les petites sommes en petits produits, on a une suite exacte :

$$h(\Phi) \longrightarrow \prod_n h(\Phi_n) \xrightarrow{(\prod \text{id}_{\Phi_n}, -\prod u_n)} \prod_n h(\Phi_n)$$

Et donc une surjection : $h(\Phi) \twoheadrightarrow \text{Lim } h(\Phi_n)$. On choisit alors un antécédent α par cette surjection de la limite des α_n .

On montrera que $\alpha : \Phi \longrightarrow h$ induit un isomorphisme de préfaisceaux. Étant donné que le préfaisceau représenté par Φ ainsi que h sont tous les deux exacts, et transforment petites sommes en petits produits, on se ramène immédiatement à montrer que l'homomorphisme $\text{hom}_{\mathcal{T}}(A, \Phi) \longrightarrow h(A)$ est inversible pour A dans Λ (noter, qu'ici on utilise le fait que Λ est stable par suspension et cosuspension). La surjectivité de cet homomorphisme découle facilement de la surjectivité de $\text{hom}_{\mathcal{T}}(A, \Phi_0) \longrightarrow h(A)$. Pour montrer l'injectivité, on considère un élément a dans le noyau. Comme A est compact, la flèche $a : A \longrightarrow \Phi$ provient d'une certaine flèche $a' : A \longrightarrow \Phi_n$. Mais par construction, la composée :

$$A \longrightarrow \Phi_n \longrightarrow \Phi_{n+1}$$

est nulle. Ceci assure la nullité de a . □

Corollaire 2.1.22. — Soient \mathcal{T} et \mathcal{T}' deux catégories triangulées avec petites sommes. On suppose que \mathcal{T} est compactement engendrée. Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un foncteur triangulé covariant commutant aux petites sommes. Alors, f admet un adjoint à droite.

Démonstration. — Soit B' un objet de \mathcal{T}' . Le foncteur $\mathcal{T} \longrightarrow \text{Ab}$ qui à un objet A de \mathcal{T} associe $\text{hom}_{\mathcal{T}'}(f(A), B')$ transforme petites sommes en petits produits. Par le critère de représentabilité de Brown, ce foncteur est représenté par un objet $g(B')$ de \mathcal{T} . De plus, on a un isomorphisme :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}'}(f(A), B') \xrightarrow{\sim} \text{hom}_{\mathcal{T}}(A, g(B'))$$

Il existe alors une unique façon d'étendre l'association $B' \rightsquigarrow g(B')$ en un foncteur covariant, de sorte que l'isomorphisme ci-dessus soit naturel en A et B' . □

L'adjoint à droite de f est automatiquement triangulé. En effet :

Lemme 2.1.23. — Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. Si $g : \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{T}$ est adjoint à f , alors g est triangulé.

Démonstration. — On traitera uniquement le cas où g est adjoint à droite de f . L'autre cas, se traite de manière analogue. Supposons donné un triangle distingué de \mathcal{T}' :

$$A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow A'[+1]$$

et complétons la flèche $g(A') \longrightarrow g(B')$ en un triangle distingué de \mathcal{T} :

$$g(A') \longrightarrow g(B') \longrightarrow D \longrightarrow g(A')[+1]$$

À l'aide des axiomes des catégorie triangulée, il existe une flèche en pointillée rendant commutatif le diagramme suivant de \mathcal{T}' :

$$\begin{array}{ccccccc} fg(A') & \longrightarrow & fg(B') & \longrightarrow & f(D) & \longrightarrow & fg(A')[+1] \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \cdots & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & A'[+1] \end{array}$$

En effet, le triangle du bas est distingué ainsi que celui du haut puisque f est un foncteur triangulé. Par adjonction, on déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} g(A') & \longrightarrow & g(B') & \longrightarrow & D & \longrightarrow & g(A')[+1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow u & & \parallel \\ g(A') & \longrightarrow & g(B') & \longrightarrow & g(C') & \longrightarrow & g(A')[+1] \end{array}$$

Étant donné que le triangle du haut est distingué, il suffira de prouver que u est inversible. Il suffit encore de montrer que pour tout objet X de \mathcal{T} , l'homomorphisme induit par u :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(X, D) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(X, g(C'))$$

est inversible. On applique pour cela le lemme des cinq au morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{hom}(X, g(A')) & \rightarrow & \mathrm{hom}(X, g(B')) & \rightarrow & \mathrm{hom}(X, D) & \rightarrow & \mathrm{hom}(X, g(A')[+1]) & \rightarrow & \mathrm{hom}(X, g(B')[+1]) \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow u & & \parallel & & \parallel \\ \mathrm{hom}(X, g(A')) & \rightarrow & \mathrm{hom}(X, g(B')) & \rightarrow & \mathrm{hom}(X, g(C')) & \rightarrow & \mathrm{hom}(X, g(A')[+1]) & \rightarrow & \mathrm{hom}(X, g(B')[+1]) \end{array}$$

la ligne du bas étant exacte puisque isomorphe à :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{hom}(f(X), A') & \longrightarrow & \mathrm{hom}(f(X), B') & \longrightarrow & & & \\ & & & & \mathrm{hom}(f(X), C') & \longrightarrow & \mathrm{hom}(f(X), A'[+1]) \longrightarrow \mathrm{hom}(f(X), B'[+1]) \end{array}$$

Le lemme est prouvé. \square

La preuve de la proposition suivante utilise la construction qu'on a exposée dans la preuve du lemme de représentabilité de Brown :

Proposition 2.1.24. — *Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée avec petites sommes engendrée par un ensemble d'objets compacts Λ . La sous-catégorie $\mathcal{T}_{\mathrm{comp}}$ est la plus petite sous-catégorie triangulée de \mathcal{T} contenant Λ et stable par facteurs directes. En d'autres termes, on a l'égalité :*

$$\mathcal{T}_{\mathrm{comp}} = \langle \Lambda \rangle^{ct}$$

Démonstration. — L'inclusion $\langle \Lambda \rangle^{ct} \subset \mathcal{T}_{comp}$ est claire. Fixons un objet compact C de \mathcal{T} . On va montrer que C est Λ -constructible.

On applique la construction de la preuve de la proposition 2.1.21 au foncteur représentable $h = \text{hom}_{\mathcal{T}}(-, C)$. On obtient ainsi une présentation de C comme une colimite homotopique du système inductif $(u_n : \Phi_n \longrightarrow \Phi_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\text{HoColim } \Phi_n \xrightarrow{\sim} C$$

Puisque C est compact, on a :

$$\text{Colim } \text{hom}_{\mathcal{T}}(C, \Phi_n) \simeq \text{hom}_{\mathcal{T}}(C, \text{HoColim } \Phi_n) \simeq \text{hom}_{\mathcal{T}}(C, C)$$

Ainsi, en choisissant un représentant de l'identité de C dans la colimite de gauche, on obtient une factorisation de l'identité :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{---} & & \\ & \text{---} & & \text{---} & \\ C & \longrightarrow & \Phi_{n_0} & \longrightarrow & C \end{array}$$

pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Ceci prouve que C est facteur direct de Φ_{n_0} .

Posons $\Phi_{-1} = 0$. On va construire par récurrence descendante pour $k \in \{-1, \dots, n_0\}$ un triangle distingué :

$$(158) \quad N_k \longrightarrow \Phi_k \longrightarrow D_k \longrightarrow N_k[+1]$$

avec N_k dans $\langle \Lambda \rangle^{s-ct}$ et tel que C soit facteur direct de D_k . Pour $k = n_0$ on prendre $N_{n_0} = 0$. Si on arrive à construire N_{-1} le corollaire découlera. En effet puisque $\Phi_{-1} = 0$, on obtient que C est facteur direct de $N_{-1}[+1]$.

Dans la suite, on utilisera uniquement le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un triangle distingué :

$$\oplus_{i \in I_n} A_i \longrightarrow \Phi_{n-1} \longrightarrow \Phi_n \longrightarrow (\oplus_{i \in T_n} A_i)[+1]$$

avec I_n un ensemble d'indices qu'on n'aura pas besoin de préciser et A_i des objets de Λ . Insistons que ceci reste vrai même pour $n = 0$. Supposons le triangle (158) construit pour un $k \in \{1, \dots, n_0\}$. On va le construire au rang $k - 1$. On considère d'abord la composée : $N_k \longrightarrow \Phi_k \longrightarrow \oplus_{i \in I_k} A_i[+1]$. L'objet N_k étant compact, il existe un sous-ensemble fini $F_k \subset I_k$ tel que la composée en question se factorise par l'inclusion $\oplus_{i \in F_k} A_i[+1] \subset \oplus_{i \in I_k} A_i[+1]$. On choisit alors un triangle distingué :

$$\oplus_{i \in F_k} A_i \longrightarrow \Phi_{k-1} \longrightarrow \Phi_{k-1}^{(1)} \longrightarrow (\oplus_{i \in F_k} A_i)[+1]$$

L'axiome de l'octaèdre appliqué au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{i \in I_k} A_i & \longrightarrow & \Phi_{k-1} \\ \uparrow & & \parallel \\ \oplus_{i \in F_k} A_i & \longrightarrow & \Phi_{k-1} \end{array}$$

fournit un triangle distingué :

$$\oplus_{i \in I_k - F_k} A_i \longrightarrow \Phi_{k-1}^{(1)} \longrightarrow \Phi_k \longrightarrow (\oplus_{i \in I_k - F_k} A_i)[+1]$$

Par construction, la composée : $N_k \longrightarrow \Phi_k \longrightarrow \oplus_{i \in I_k - F_k} A_i[+1]$ est maintenant nulle. On déduit de cette manière une factorisation :

$$\begin{array}{ccccc} & & \searrow & & \\ N_k & \longrightarrow & \Phi_{k-1}^{(1)} & \longrightarrow & \Phi_k \end{array}$$

Formons un triangle distingué :

$$N_k \longrightarrow \Phi_{k-1}^{(1)} \longrightarrow D_{k-1}^{(1)} \longrightarrow N_k[+1]$$

L'axiome de l'octaèdre appliqué maintenant au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} N_k & \longrightarrow & \Phi_k \\ \parallel & & \uparrow \\ N_k & \longrightarrow & \Phi_{(k-1)}^{(1)} \end{array}$$

fournit un triangle distingué :

$$\oplus_{i \in I_k - F_k} A_i \longrightarrow D_{k-1}^{(1)} \longrightarrow D_k \longrightarrow (\oplus_{i \in I_k - F_k} A_i)[+1]$$

L'étape suivante consiste à considérer la composée : $C \longrightarrow D_k \longrightarrow \oplus_{i \in I_k - F_k} A_i[+1]$. L'objet C étant compact, on déduit qu'il existe un ensemble fini $G_k \subset I_k$ contenant F_k , tel que la composée en question se factorise par l'inclusion $\oplus_{i \in G_k - F_k} A_i \subset \oplus_{i \in I_k - F_k} A_i$. On forme alors un triangle distingué :

$$\oplus_{i \in G_k - F_k} A_i \longrightarrow D_{k-1}^{(1)} \longrightarrow D_{k-1} \longrightarrow (\oplus_{i \in G_k - F_k} A_i)[+1]$$

En appliquant l'axiome de l'octaèdre au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{i \in I_k - F_k} A_i & \longrightarrow & D_{k-1}^{(1)} \\ \uparrow & & \parallel \\ \oplus_{i \in G_k - F_k} A_i & \longrightarrow & D_{k-1}^{(1)} \end{array}$$

on obtient un triangle distingué :

$$\oplus_{i \in I_k - G_k} A_i \longrightarrow D_{k-1} \longrightarrow D_k \longrightarrow (\oplus_{i \in I_k - G_k} A_i)[+1]$$

De plus, par construction, la composée $C \longrightarrow D_k \longrightarrow \oplus_{i \in I_k - G_k} A_i[+1]$ est nulle. Ceci fournit une factorisation :

$$\begin{array}{ccccc} & & \searrow & & \\ C & \longrightarrow & D_{k-1} & \longrightarrow & D_k \end{array}$$

On déduit alors facilement que C est facteur direct de D_{k-1} .

Pour terminer, considérons la composée :

$$\phi_{k-1} \xrightarrow{a} \phi_{k-1}^{(1)} \xrightarrow{b} D_{k-1}^{(1)} \xrightarrow{c} D_{k-1}$$

On va montrer que l'objet N_{k-1} dans le triangle distingué :

$$N_{k-1} \longrightarrow \Phi_{k-1} \longrightarrow D_{k-1} \longrightarrow$$

est strictement Λ -constructible. En utilisant suffisamment de fois l'axiome de l'octaèdre on se ramène à montrer que les « noyaux » des flèches : a , b et c sont Λ -constructibles. Ces « noyaux » sont respectivement $\bigoplus_{i \in F_k} A_i$, N_k et $\bigoplus_{i \in G_k - F_k} A_i$. Les objets A_i sont dans Λ et les ensembles d'indices F_k et G_k sont finis. De plus par induction N_k est Λ -strictement constructible. Le corollaire est prouvé. \square

On continue avec un critère qui permet de décider si un ensemble d'objets engendre une catégorie triangulée avec petites sommes. La définition suivante est également classique :

Définition 2.1.25. — Soit Λ un ensemble d'objets d'une catégorie triangulée \mathcal{T} . On note Λ^\perp la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} formée des objets $B \in \text{Ob}(\mathcal{T})$ avec :

$$\text{hom}_{\mathcal{T}}(A[n], B) = 0, \quad \forall A \in \Lambda \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}$$

Un objet de Λ^\perp est dit orthogonal (à droite) à Λ .

Le lemme suivant est facile :

Lemme 2.1.26. — La sous-catégorie $\Lambda^\perp \subset \mathcal{T}$ est une sous-catégorie triangulée stable par facteurs directs. Si \mathcal{T} admet les petits produits, alors Λ^\perp est stable par petits produits. Finalement si \mathcal{T} admet les petites sommes, et si les objets de Λ sont compacts, alors Λ^\perp est stable par petites sommes.

Proposition 2.1.27. — Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée avec petites sommes. Soit $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$ un ensemble d'objets compacts. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.

1. L'ensemble Λ engendre la catégorie avec petites sommes \mathcal{T} , i.e., $\ll \Lambda \gg = \mathcal{T}$.
2. La sous-catégorie Λ^\perp est réduite à 0.
3. La famille de foncteurs $\text{hom}_{\mathcal{T}}(A[n], -) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}b$ avec $A \in \Lambda$ et $n \in \mathbb{Z}$ est conservative.

Démonstration. — Les deux dernières assertions sont clairement deux façons différentes de dire la même chose.

Il est immédiat que la première condition implique la seconde (d'ailleurs sans l'hypothèse de compacité sur les objets de Λ). Prouvons l'implication réciproque.

Notons $\mathcal{T}_0 = \ll \Lambda \gg$ et $i : \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ le foncteur d'inclusion. On prouvera que i est une équivalence.

Il est clair que le foncteur i commute aux petites sommes. Puisque \mathcal{T}_0 est compactement engendrée, on dispose d'un adjoint à droite $L : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_0$. Puisque i est

pleinement fidèle, le morphisme d'unité $1 \longrightarrow L \circ i$ est inversible. Il reste donc à prouver que le morphisme de counité $i \circ L \longrightarrow 1$ est inversible.

Soit donc B un objet de \mathcal{T} et choisissons un triangle distingué :

$$(159) \quad i \circ L(B) \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow i \circ L(B)[+1]$$

On montera que C est nul. Pour tout objet A de \mathcal{T}_0 , on a :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(i(A)[m], i \circ L(B)) = \mathrm{hom}_{\mathcal{T}_0}(A[m], L(B)) = \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(i(A)[m], B)$$

En utilisant le triangle distingué (159), on déduit immédiatement que $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(i(A), C) = 0$. En particulier C est un objet de $\Lambda^\perp = 0$. \square

Notons le résultat suivant :

Lemme 2.1.28. — *Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées avec petites sommes. On suppose que f admet un adjoint à droite g .*

1- *Si le foncteur g commute aux petites sommes, alors f envoie un objet compact de \mathcal{T} sur un objet compact de \mathcal{T}' .*

2- *Réciproquement, supposons que f envoie un objet compact de \mathcal{T} sur un objet compact de \mathcal{T}' . Si \mathcal{T} est compactement engendrée alors g commute aux petites sommes.*

Démonstration. — Soit A un objet compact de \mathcal{T} . Le foncteur $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}'}(f(A), -)$ est isomorphe à $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, g(-)) = \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, -) \circ g$. Le foncteur g commute aux petites sommes. De même pour $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, -)$. Ceci montre que $f(A)$ est compact.

Pour la réciproque, on considère une petite famille $(A_i)_i$ d'objets de \mathcal{T}' . On veut montrer que le morphisme canonique :

$$\oplus_i g(A_i) \longrightarrow g(\oplus_i A_i)$$

est inversible. Par la proposition 2.1.27, on se ramène à prouver que pour tout objet compact C de \mathcal{T} l'homomorphisme :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(C, \oplus_i g(A_i)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(C, g(\oplus_i A_i))$$

est inversible. Comme C est compact, on se ramène à prouver que l'homomorphisme :

$$\oplus_i \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(C, g(A_i)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(C, g(\oplus_i A_i))$$

induit par les flèches canoniques $g(A_i) \longrightarrow g(\oplus_i A_i)$ est un isomorphisme. Mais cet homomorphisme correspond par l'adjonction (f, g) à :

$$\oplus_i \mathrm{hom}_{\mathcal{T}'}(f(C), A_i) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}'}(f(C), \oplus_i A_i)$$

Cet homomorphisme est effectivement inversible puisque $f(C)$ est compact. \square

2.1.2. Dérivateurs triangulés. Application aux 2-triangles distingués

Dans notre étude des foncteurs homotopiques stables, notamment dans notre construction des foncteurs cycles proches, il est pratique d'utiliser le langage souple des dérivateurs. Les dérivateurs n'étant pas le sujet d'étude de ce travail, on adoptera un point de vu différent et moins satisfaisant que celui de [Mal01a] et [Mal01b]. Ainsi, au lieu de donner le système d'axiomes minimal que doit vérifier un dérivateur triangulé pour pouvoir y faire de l'homotopie, on a préféré inclure dans la définition des structures et propriétés supplémentaires qui découlent des axiomes initiaux. À titre d'exemple, un dérivateur triangulé sera pour nous un 2-foncteur \mathbb{D} de la catégorie des petites catégories dans la 2-catégorie des catégories triangulées. Par contre dans [Mal01b], un dérivateur triangulé est simplement un 2-foncteur \mathbb{D} à valeur dans la 2-catégorie des catégories abstraites vérifiant un certain nombre de propriétés permettant de munir les catégories $\mathbb{D}(-)$ d'une structure triangulée canonique.

2.1.2.1. Définition d'un dérivateur triangulé. — Dans la suite, on fixe une sous-catégorie pleine **Dia** de la 2-catégorie stricte des petites catégories vérifiant les conditions suivantes :

- D0** : la catégorie vide \emptyset , la catégorie ponctuelle \mathbf{e} , et la catégorie $\Delta^1 = \{0 \rightarrow 1\}$ sont des objets de **Dia**,
- D1** : la 1-catégorie sous-jacente à **Dia** est stable par coproduits finis et produits fibrés et passage aux sous-catégories,
- D2** : pour tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ de **Dia** et $b \in \text{Ob}(B)$, les catégories A/b et $b \backslash A$ sont dans **Dia**.

Remarque 2.1.29. — Avec les notations de **D2**, la catégorie A/b a pour objets les couples (a, f) avec $a \in \text{Ob}(A)$ et $f : u(a) \rightarrow b \in \text{Fi}(B)$. Une flèche de A/b entre deux objets (a, f) et (a', f') est simplement une flèche $g : a \rightarrow a' \in \text{Fi}(A)$ tel que $f = f' \circ u(g)$. On définit $b \backslash A$ de sorte que $(b \backslash A)^{\text{op}} = A^{\text{op}}/b$. Les deux faces suivantes :

$$(160) \quad \begin{array}{ccc} A/b & \xrightarrow{j_{A/b}} & A \\ p_{A/b} \downarrow & \alpha \swarrow & \downarrow u \\ \mathbf{e} & \xrightarrow{b} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} b \backslash A & \xrightarrow{j_{b \backslash A}} & A \\ p_{b \backslash A} \downarrow & \beta \nearrow & \downarrow u \\ \mathbf{e} & \xrightarrow{b} & B \end{array}$$

jouent un rôle important dans la théorie des dérivateurs triangulés.

Remarque 2.1.30. — Soient A une catégorie et a un objet de A . On notera souvent dans la suite par a l'unique foncteur $\mathbf{e} \longrightarrow A$ qui envoie l'objet de \mathbf{e} sur a . De même si C est une catégorie, on notera p_C l'unique foncteur $C \longrightarrow \mathbf{e}$. Notons que le foncteur p_C admet un adjoint à droite si et seulement si la catégorie C admet un objet final. Dualemnt, le foncteur p_C admet un adjoint à gauche si et seulement si la catégorie C admet un objet initial.

On appellera \mathbf{Dia} la 2-catégorie des diagrammes. Un dérivateur triangulé est un 2-foncteur de la 2-catégorie \mathbf{Dia} dans celles des catégories. Contrairement à [Gro90] et [Mal01a], on ne supposera pas que ce 2-foncteur est strict. Pour la commodité du lecteur, on rappellera la notion de 2-foncteurs stricts et pas forcément stricts.

Dans la suite, une 2-catégorie sera implicitement supposée stricte.

Définition 2.1.31

1- Soient \mathfrak{D} et \mathfrak{D}' deux 2-catégories. Un 2-foncteur $F : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}'$, strict, 1-covariant et 2-covariant est l'ensemble des données suivantes :

- une fonction F qui à un objet A de \mathfrak{D} associe un objet $F(A)$ de \mathfrak{D}' ,
- pour tout couple d'objet A et B de \mathfrak{D} un foncteur $F_{A,B} : \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(B))$ covariant, envoyant les 1-morphismes identités sur des 1-morphismes identités (lorsque $A = B$),

tel que pour un triplet d'objets $(A, B, C) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D})^3$, le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}}(B, C) \times \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}}(A, B) & \xrightarrow{F_{B,C} \times F_{A,B}} & \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(B), F(C)) \times \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(B)) \\ \circ \downarrow & & \downarrow \circ \\ \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}}(A, C) & \xrightarrow{F_{A,C}} & \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(C)) \end{array}$$

soit commutatif (au sens strict).

2- Les autres types de 1-variance et de 2-variance s'obtiennent de la manière habituelle en remplaçant \mathfrak{D}' par $(\mathfrak{D}')^{1-\mathrm{op}}$, $(\mathfrak{D}')^{2-\mathrm{op}}$ ou $(\mathfrak{D}')^{12-\mathrm{op}}$.

Pour obtenir la définition des 2-foncteurs non nécessairement strictes, on dstrictifie la définition précédente :

Définition 2.1.32

1- Soient \mathfrak{D} et \mathfrak{D}' deux 2-catégories. Un 2-foncteur $F : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}'$, non nécessairement strict, 1-covariant et 2-covariant est l'ensemble des données suivantes :

- une fonction F qui à un objet A de \mathfrak{D} associe un objet $F(A)$ de \mathfrak{D}' ,
- pour tout couple d'objet A et B de \mathfrak{D} un foncteur $F_{A,B} : \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(B))$ covariant, envoyant les 1-morphismes identités sur des 1-morphismes identités (lorsque $A = B$),
- pour tout triplet d'objets $(A, B, C) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D})^3$, une transformation naturelle inversible :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}}(B, C) \times \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}}(A, B) & \xrightarrow{F_{B,C} \times F_{A,B}} & \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(B), F(C)) \times \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(B)) \\ \circ \downarrow & \xrightarrow{\sim \Rightarrow_c} & \downarrow \circ \\ \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}}(A, C) & \xrightarrow{F_{A,C}} & \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}'}(F(A), F(C)) \end{array}$$

égale au 2-morphisme identité lorsqu'elle est appliquée sur les couples de 1-morphismes de la forme $(\text{id}, -)$ (avec $B = C$) ou $(-, \text{id})$ (avec $A = B$). Ces données doivent vérifier la condition de cohérence suivante. Étant donnée une suite de 1-morphismes composables de \mathfrak{D} :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

le carré de 2-morphismes de \mathfrak{D}' est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(h \circ g \circ f) & \xrightarrow{c(g \circ f, h)} & F(h) \circ F(g \circ f) \\ c(f, h \circ g) \downarrow & & \downarrow c(f, g) \\ F(h \circ g) \circ F(f) & \xrightarrow{c(g, h)} & F(h) \circ F(g) \circ F(f) \end{array}$$

2- Les autres types de 1-variance et de 2-variance s'obtiennent de la manière habituelle en remplaçant \mathfrak{D}' par $(\mathfrak{D}')^{1\text{-opp}}$, $(\mathfrak{D}')^{2\text{-opp}}$ ou $(\mathfrak{D}')^{12\text{-opp}}$.

Notons le lemme simple ci-dessous dont la vérification est laissée aux lecteurs :

Lemme 2.1.33. — Soit $f : A \longrightarrow B$ un 1-morphisme de \mathfrak{D} admettant un adjoint à droite $g : B \longrightarrow A$. Alors $F(f)$ admet pour adjoint à droite $F(g)$ et les 2-morphismes d'unité et de counité sont donnés par les composées :

$$\text{id} = F(\text{id}) \longrightarrow F(gf) \xrightarrow{\sim} F(f) \circ F(g)$$

et

$$F(g) \circ F(f) \xrightarrow{\sim} F(gf) \longrightarrow F(\text{id}) = \text{id}$$

On peut maintenant donner la définition adoptée dans ce texte de la notion de dérivateurs triangulés.

Définition 2.1.34. — Un pré-dérivateur triangulé \mathbb{D} de domaine Dia est un 2-foncteur (non nécessairement strict) 1-contravariant et 2-contravariant :

$$\mathbb{D} : \text{Dia} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

S'il n'y a pas de confusion possible, on notera pour un foncteur u (resp. une transformation naturelle α) de Dia , u^* le foncteur $\mathbb{D}(u)$ (resp. α^* la transformation naturelle α^*).

Le pré-dérivateur \mathbb{D} est un dérivateur s'il vérifie la liste d'axiomes suivante.

1. $\mathbb{D}(\emptyset) = 0$ la catégorie nulle.
2. Soient I et J deux catégories de Dia . Considérons l'accouplement évident :

$$\mathbb{D}(I \times J) \times I^{\text{op}} \longrightarrow \mathbb{D}(J)$$

qui à un couple $(X, i) \in \mathbf{Ob}(\mathbb{D}(I \times J)) \times \mathbf{Ob}(I^{\text{op}})$ associe l'objet $(i \times \text{id}_J)^* X$ (en notant comme d'habitude $i : \mathbf{e} \longrightarrow I$ le foncteur qui pointe l'objet i). Par adjonction, on déduit un foncteur :

$$\mathbb{D}(I \times J) \longrightarrow \mathbf{HOM}(I^{\text{op}}, \mathbb{D}(J))$$

Il est appelé le foncteur I -squelette. L'image d'un objet X de $\mathbb{D}(I \times J)$ par ce foncteur est appelé le I -squelette de X .

Le foncteur I -squelette vérifie les trois propriétés :

- il est conservatif pour toutes les catégories I et J de \mathbf{Dia} ,
- il est plein et essentiellement surjectif lorsque I est directe,
- il est une équivalence lorsque I est discrète.

3. Pour tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ de \mathbf{Dia} , le foncteur $u^* : \mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$ admet un adjoint à droite u_* et un adjoint à gauche $u_{\#}$,
4. Soient $u : A \longrightarrow B$ un foncteur de \mathbf{Dia} et b un objet de B . Les faces (160) induisent par 2-fonctorialité les deux faces de $\mathfrak{I}\mathfrak{R}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(A/b) & \xleftarrow{j_{A/b}^*} & \mathbb{D}(A) \\ \uparrow p_{A/b}^* & \alpha^* \nearrow & \uparrow u^* \\ \mathbb{D}(\mathbf{e}) & \xleftarrow{b^*} & \mathbb{D}(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{D}(b \setminus A) & \xleftarrow{j_{b \setminus A}^*} & \mathbb{D}(A) \\ \uparrow p_{b \setminus A}^* & \beta^* \nwarrow & \uparrow u^* \\ \mathbb{D}(\mathbf{e}) & \xleftarrow{b^*} & \mathbb{D}(B) \end{array}$$

Les deux faces obtenues par adjonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(A/b) & \xleftarrow{j_{A/b}^*} & \mathbb{D}(A) \\ \downarrow (p_{A/b})_* & Ex_*^* \nwarrow & \downarrow u_* \\ \mathbb{D}(\mathbf{e}) & \xleftarrow{b^*} & \mathbb{D}(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{D}(b \setminus A) & \xleftarrow{j_{b \setminus A}^*} & \mathbb{D}(A) \\ \downarrow (p_{b \setminus A})_{\#} & Ex_{\#}^* \swarrow & \downarrow u_{\#} \\ \mathbb{D}(\mathbf{e}) & \xleftarrow{b^*} & \mathbb{D}(B) \end{array}$$

sont inversibles.

5. Notons \square la catégorie $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$:

$$\begin{array}{ccc} (1, 1) & \longleftarrow & (0, 1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (1, 0) & \longleftarrow & (0, 0) \end{array}$$

On appelle $i_{\top} : \top \longrightarrow \square$ la sous-catégorie pleine ayant pour objets $\mathbf{Ob}(\square) - \{(0, 0)\}$. De même on appelle $i_{\bot} : \bot \longrightarrow \square$ la sous-catégorie pleine ayant pour objets $\mathbf{Ob}(\square) - \{(1, 1)\}$. Soit I une catégorie de \mathbf{Dia} . Un objet X de $\mathbb{D}(\square \times I)$ est dit cartésien (resp. cocartésien) si le morphisme évident $X \longrightarrow (i_{\bot})_*(i_{\bot})^* X$ (resp. $(i_{\top})_{\#}(i_{\top})^* X \longrightarrow X$) est un isomorphisme.

Dans un dérivateur triangulé \mathbb{D} , un objet de $\mathbb{D}(\square \times I)$ est cartésien si et seulement si il est cocartésien.

6. Gardons les notations de l'axiome précédent. On définit un foncteur $\Sigma :$
 $\mathbb{D}(I) \longrightarrow \mathbb{D}(I)$ par la formule :

$$\Sigma = (0, 0)^*(i_\Gamma)_\#(i_\Gamma)^*(1, 1)_*$$

Il existe un isomorphisme de foncteurs $\Sigma \longrightarrow [+1]$ entre Σ et l'autoéquivalence de suspension de la catégorie $\mathbb{D}(I)$. De plus, soit X un objet cartésien et cocartésien de $\mathbb{D}(\square \times I)$. On définit un morphisme : $(0, 0)^*X \longrightarrow \Sigma(1, 1)^*X$ par la composée suivante :

$$\begin{aligned} (0, 0)^*X &\xleftarrow{\sim} (0, 0)^*(i_\Gamma)_\#(i_\Gamma)^*X \longrightarrow (0, 0)^*(i_\Gamma)_\#(i_\Gamma)^*(1, 1)_*(1, 1)^*X \\ &= \Sigma(1, 1)^*X \simeq (1, 1)^*X[+1] \end{aligned}$$

Supposons que l'objet $(1, 0)^*A$ est nul. Alors le triangle :

$$(1, 1)^*X \xrightarrow{(1)} (0, 1)^*X \xrightarrow{(2)} (0, 0)^*X \longrightarrow (1, 1)^*X[+1]$$

avec (1) et (2) les deux flèches canoniques est un triangle distingué.

Remarque 2.1.35. — Comme annoncé au début du paragraphe, la définition 2.1.34 contient des redondances. Habituellement, les structures triangulées sur les catégories $\mathbb{D}(I)$ sont construites à partir des carrés cartésiens et cocartésiens dont l'abondance est assurée par l'axiome 5. Ainsi, notre dernier axiome peut être considéré comme la définition de la classe des triangles distingués. Bien entendu, si on fait ce choix, des vérifications doivent être effectuées.

On aurait pu également énoncer l'axiome 5 avec I la catégorie ponctuelle. En effet, il est facile de déduire le cas général en utilisant la conservation des foncteurs squelettes.

Remarque 2.1.36. — Soit \mathbb{D} un pré-dérivateur triangulé de domaine \mathbf{Dia} . Notons \mathbf{Dia}' la sous-2-catégorie pleine de \mathbf{Cat} dont les objets sont les catégories opposées des catégories dans \mathbf{Dia} . On définit un pré-dérivateur \mathbb{D}^{op} de domaine \mathbf{Dia}' par l'association $\mathbb{D}^{\text{op}}(A) = \mathbb{D}(A^{\text{op}})^{\text{op}}$. On dit que \mathbb{D}^{op} est le pré-dérivateur opposé à \mathbb{D} . On vérifie facilement que lorsque \mathbb{D} est un dérivateur triangulé, il en est de même de \mathbb{D}^{op} .

Remarque 2.1.37. — Soit \mathbb{D} est un pré-dérivateur triangulé de domaine \mathbf{Dia} . Pour des catégories I et J de \mathbf{Dia} , on pose $\mathbb{D}_I(J) = \mathbb{D}(I \times J)$. Il est facile de voir que cette association s'étend d'une manière canonique en un pré-dérivateur triangulé $\mathbb{D}_I : \mathbf{Dia} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$. C'est un bon exercice de vérifier que lorsque \mathbb{D} est un dérivateur triangulé, alors il en est de même de \mathbb{D}_I . L'unique difficulté est dans la vérification de l'axiome 4. Pour cela on peut se servir de la conservation du foncteur squelette et de la formule $(I \times A/b)/i = (I \times A)/(i \times b)$ pour $i \in \text{Ob}(I)$.

Remarque 2.1.38. — Le dernier axiome paraît plutôt compliqué à première vue. Nous allons essayer de montrer qu'il est au contraire simple et naturel. Expliquons d'abord la définition du foncteur Σ . Le point est que dans une catégorie triangulée, le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E[+1] \end{array}$$

est cartésien et cocartésien ou encore de Mayer-Vietoris. D'où l'idée de définir le foncteur de suspension comme étant la colimite du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

La difficulté est de trouver pour chaque $E \in \mathbf{Ob}(\mathbb{D}(\mathbf{e}))$ un objet de $\mathbb{D}(\Gamma)$ d'une manière fonctorielle en E et ayant pour squelette le diagramme ci-dessus. Une formule qui marche bien est $(i_\Gamma)^*(1, 1)_*E$. En effet, pour un objet a de $\underline{1} \times \underline{1}$ différent de $(1, 1)$, la catégorie \mathbf{e}/a qui apparaît dans la face :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}/a & \xrightarrow{j_{\mathbf{e}/a}} & \mathbf{e} \\ p_{\mathbf{e}/a} \downarrow & \alpha \swarrow & \downarrow (1, 1) \\ \mathbf{e} & \xrightarrow{a} & \underline{1}^2 \end{array}$$

est vide. Ainsi, par l'axiome 4, on a $a^*(1, 1)_*E = 0$. On démontre de même que $(1, 1)^*(1, 1)_*E = E$.

La seconde partie de l'axiome 6, formalise l'idée qu'un carré de Mayer-Vietoris donne un triangle distingué. Mieux, si X est un objet cartésien et cocartésien de $\mathbb{D}(\square)$ il doit déterminer un triangle distingué fonctoriel. La difficulté est de définir ce triangle. En regardant le squelette de X :

$$\begin{array}{ccc} X_{11} & \xrightarrow{b} & X_{01} \\ a \downarrow & & \downarrow c \\ X_{10} & \xrightarrow{d} & X_{00} \end{array}$$

on devine que le triangle commencera par :

$$X_{11} \xrightarrow{(a, -b)} X_{10} \oplus X_{01} \xrightarrow{c+d} X_{00}$$

Pour deviner/trouver la flèche connectante, on utilise la functorialité. En effet si on considère le morphisme de $(i_r)^*X$ vers l'objet de $\mathbb{D}(\Gamma)$ ayant pour squelette :

$$\begin{array}{ccc} X_{11} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

et en complétant en un carré cocartésien on tombe sur un morphisme de X vers un objet Y ayant pour squelette :

$$\begin{array}{ccc} X_{11} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma X_{11} \end{array}$$

En passant aux triangles distingués hypothétiques, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X_{11} & \xrightarrow{(a, -b)} & X_{10} \oplus X_{01} & \xrightarrow{c+d} & X_{00} & \xrightarrow{?} & \Sigma X_{11} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{11} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Sigma X_{11} & = & \Sigma X_{11} \end{array}$$

Ceci nous force à prendre pour morphisme connectant celui induit par $X \longrightarrow Y$ après application du foncteur $(0, 0)^*$. C'est exactement la définition de la flèche connectante de l'axiome 6. Finalement, pour éviter les problèmes de signes, on considère uniquement les carrés cartésiens et cocartésiens X tels que $(1, 0)^*X = 0$.

Fixons un dérivateur triangulé \mathbb{D} de domaine Dia . Voici quelques conséquences faciles de la 2-functorialité :

Lemme 2.1.39. — *Supposons donné un couple (u, v) de foncteurs adjoints :*

$$u : A \longrightarrow B \quad \text{et} \quad v : B \longrightarrow A$$

entre catégories de Dia. Les composées suivantes :

$$(p_B)_\# v^* \longrightarrow (p_A)_\# v_\# v^* \longrightarrow (p_A)_\# \quad \text{et} \quad (p_B)_* \longrightarrow (p_B)_* u_* u^* \longrightarrow (p_A)_* u^*$$

sont inversibles.

Démonstration. — Par le lemme 2.1.33, on a un couple de foncteurs adjoints (u^*, v^*) . Il vient que u^* est isomorphe à $v_\#$ et que v^* est isomorphe à u_* . On traite uniquement le premier morphisme. Le second en découle par un argument de dualité.

La composée : $(p_A)_\# u^* \simeq (p_A)_\# v_\# \xrightarrow{\sim} (p_A \circ v)_\# = (p_B)_\#$ définit clairement un isomorphisme de $(p_A)_\# u^*$ vers $(p_B)_\#$. Il s'agit de montrer que ce morphisme est égal au morphisme de l'énoncé :

$$(p_A)_\# u^* \longrightarrow (p_B)_\# u_\# u^* \longrightarrow (p_B)_\#$$

On se ramène aisément à montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 (p_B \circ u)_\# v_\# = (p_A)_\# v_\# & \longrightarrow & (p_A \circ v)_\# = (p_B)_\# \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 (p_B)_\# u_\# v_\# & &
 \end{array}$$

Ceci découle immédiatement par 2-fonctorialité. \square

Corollaire 2.1.40

1- Soit A une catégorie de **Dia** admettant un objet initial o . Les 2-morphismes :

$$o^* = (p_A)_\# o_\# o^* \longrightarrow (p_A)_\# \quad \text{et} \quad p_A^* \longrightarrow p_A^* o^* o_\# = o_\#$$

sont inversibles.

2- Dualement si A admet un objet final o , les 2-morphismes :

$$(p_A)_* \longrightarrow (p_A)_* o_* o^* = o^* \quad \text{et} \quad o_* = o_* o^* p_A^* \longrightarrow p_A^*$$

sont inversibles.

Dans le même esprit on a :

Proposition 2.1.41. — Soit $i : I \subset J$ une inclusion pleinement fidèle dans **Dia**. On suppose que le foncteur i admet un adjoint à droite ou à gauche $p : J \longrightarrow I$. Alors le foncteur p^* est pleinement fidèle. En particulier les deux 2-morphismes :

$$\text{id} \longrightarrow p_* p^* \quad \text{et} \quad p_\# p^* \longrightarrow \text{id}$$

sont inversibles.

Démonstration. — On traitera uniquement le cas où p est un adjoint à droite de i . Comme i est pleinement fidèle, le 2-morphisme $\text{id} \longrightarrow p \circ i$ est inversible. Il vient par le lemme 2.1.33 que p^* est adjoint à gauche de i^* est que le morphisme de counité est inversible. On en déduit que p^* est pleinement fidèle. \square

Il est pratique d'introduire la définition suivante :

Définition 2.1.42. — On note $R_\#$ et R_* les foncteurs de la 1-catégorie sous-jacente à **Dia** dans celle des endofoncteurs triangulés de $\mathbb{D}(\mathbf{e})$ définis par les formules :

$$A \rightsquigarrow R_\#(A) = (p_A)_\#(p_A)^*$$

$$\text{et} \quad (u : A \rightarrow B) \rightsquigarrow [R_\#(u) = (p_A)_\#(p_A)^* \simeq (p_B)_\# u_\# u^*(p_B)^* \mapsto (p_B)_\#(p_B)^*]$$

$$A \rightsquigarrow R_*(A) = (p_A)_*(p_A)^*$$

$$\text{et} \quad (u : A \rightarrow B) \rightsquigarrow [R_*(u) = (p_B)_*(p_B)^* \mapsto (p_B)_* u_* u^*(p_B)^* \simeq (p_A)_*(p_A)^*]$$

Remarquons que $R_\#$ est covariant alors que R_* est contravariant. Ces foncteurs seront respectivement appelés la réalisation homologique et cohomologique. Remarquons

également que le foncteur $R_{\#}$ (resp. R_*) prend ses valeurs dans la catégorie des endofoncteurs de $\mathbb{D}(\mathbf{e})$ munis d'une transformation naturelle vers (resp. depuis) le foncteur identité.

Lemme 2.1.43. — Soient $u_0, u_1 : A \longrightarrow B$ deux foncteurs de \mathbf{Dia} . On suppose qu'il existe une transformation naturelle $t : u_0 \longrightarrow u_1$. Alors, les deux transformations naturelles :

$$R_{\#}(u_0), R_{\#}(u_1) : R_{\#}(A) \longrightarrow R_{\#}(B) \quad (\text{resp. } R_*(u_0), R_*(u_1) : R_*(B) \longrightarrow R_*(A))$$

sont égales.

Démonstration. — On traitera uniquement le premier cas. Le cas respectif s'en déduit par dualité. La transformation naturelle t équivaut à la donnée d'un foncteur $u : A \times \underline{1} \longrightarrow B$ tel que les composées :

$$A \xrightarrow{\text{id}_A \times 0} A \times \underline{1} \longrightarrow B \quad \text{et} \quad A \xrightarrow{\text{id}_A \times 1} A \times \underline{1} \longrightarrow B$$

soient respectivement u_0 et u_1 . Notons $p = \text{id}_A \times p_{\underline{1}} : A \times \underline{1} \longrightarrow A$ la rétraction commune à $\text{id}_A \times 0$ et $\text{id}_A \times 1$. Il suffit clairement de prouver que le 2-morphisme :

$$R_{\#}(p) : R_{\#}(A \times \underline{1}) \longrightarrow R_{\#}(A)$$

est inversible. En revenant à la définition, on se ramène à montrer que le morphisme de counité :

$$p_{\#}p^* \longrightarrow \text{id}$$

est inversible. Par l'axiome 2 de la définition 2.1.34, il suffit de prouver que ce morphisme devient inversible après application de a^* pour tout objet a de A . En utilisant l'axiome 4 de la définition 2.1.34, on sait que $a^*p_{\#} \simeq (p_{a \setminus A \times \underline{1}})_{\#}j_a^*$. Mais la catégorie $a \setminus A \times \underline{1}$ admet un objet initial à savoir $((a, 0), \text{id}_a)$. Il vient par le corollaire 2.1.40 que $(p_{a \setminus A \times \underline{1}})_{\#} \simeq ((a, 0), \text{id}_a)^*$. Ceci montre que $a^*p_{\#}p^* \simeq (p \circ j_a \circ ((a, 0), \text{id}_a))^* \simeq a^*$. On laisse aux lecteurs les soin de vérifier que cet isomorphisme est bien celui induit par la counité de $(p_{\#}, p^*)$. \square

2.1.2.2. Morphismes de dérivateurs triangulés. — L'étape suivante consiste à définir les 1-morphismes et les 2-morphismes de dérivateurs triangulés. Pour cela on considère d'abord les 1-morphismes et 2-morphismes entre les 2-foncteurs généraux :

Définition 2.1.44. — Soient \mathfrak{D} et \mathfrak{D}' deux 2-catégories. On suppose donnés deux 2-foncteurs $F_1, F_2 : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{D}'$. Un morphisme de 2-foncteurs $m : F_1 \longrightarrow F_2$ est l'ensemble des données suivantes :

1. pour tout objet A de \mathfrak{D} , d'un 1-morphisme $m_A : F_1(A) \longrightarrow F_2(A)$,

2. pour tout 1-morphisme $a : A \longrightarrow B$ de \mathfrak{D} d'un 2-isomorphisme $\alpha_m :$

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{m_A} & F_2(A) \\ F_1(a) \downarrow & \swarrow \alpha_m & \downarrow F_2(a) \\ F_1(B) & \xrightarrow{m_B} & F_2(B) \end{array}$$

Ces données doivent vérifier les conditions suivantes.

– Pour un 2-morphisme :

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ A & \searrow & B \\ & \Downarrow t & \\ & a' & \end{array}$$

de \mathfrak{D} , le carré de 2-morphismes de $\mathfrak{D}' :$

$$\begin{array}{ccc} F_2(a) \circ m_A & \longrightarrow & m_B \circ F_1(a) \\ F_2(t) \downarrow & & \downarrow F_1(t) \\ F_2(a') \circ m_A & \longrightarrow & m_B \circ F_1(a') \end{array}$$

est commutatif.

– Pour une suite composable de 1-morphismes de $\mathfrak{D} :$

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$$

les deux diagrammes planaires :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & F_1(A) & \xrightarrow{m_A} & F_2(A) & \\ & \downarrow F_1(a) & \swarrow \alpha_m & \downarrow F_2(a) & \\ F_1(ba) & \xleftarrow{c^{-1}} & F_1(B) & \xrightarrow{m_B} & F_2(B) & \xleftarrow{c} & F_2(ba) \\ & \downarrow F_1(b) & \swarrow \alpha_m & \downarrow F_2(b) & \\ & F_1(C) & \xrightarrow{m_C} & F_2(C) & \end{array} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{m_A} & F_2(A) \\ \downarrow F_1(ba) & \swarrow \alpha_m & \downarrow F_2(ba) \\ F_1(C) & \xrightarrow{m_C} & F_2(C) \end{array}$$

ont la même composée.

La définition de 2-morphismes entre 1-morphismes de 2-foncteurs est relativement simple :

Définition 2.1.45. — Supposons donnés deux 2-foncteurs F_1 et F_2 entre deux 2-catégories \mathfrak{D} et \mathfrak{D}' comme dans la définition 2.1.44. On suppose également donnés deux 1-morphismes $m, m' : F_1 \longrightarrow F_2$. Un 2-morphisme $\theta : m \longrightarrow m'$ est la

donnée pour tout objet A de \mathfrak{D} d'un 2-morphisme $\theta_A : m_A \longrightarrow m'_A$ tel que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} F_2(a) \circ m_A & \longrightarrow & m_B \circ F_1(a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_2(a) \circ m'_A & \longrightarrow & m'_B \circ F_1(a) \end{array}$$

soit commutatif.

Il existe plusieurs définitions non équivalentes de morphismes de dérivateurs. La définition de 1-morphismes et de 2-morphismes de dérivateurs triangulées qu'on adoptera est la plus faible possible :

Définition 2.1.46

1- Soient \mathbb{D}_1 et \mathbb{D}_2 deux dérivateurs triangulés de domaine \mathbf{Dia} . Un 1-morphisme de dérivateurs est simplement un 1-morphisme entre les 2-foncteurs (1 et 2-contravariants) sous-jacents.

2- De même, un 2-morphisme entre deux 1-morphismes de dérivateurs ayant les mêmes source et but, est simplement un 2-morphisme entre les 1-morphismes des 2-foncteurs sous-jacents à ces dérivateurs.

3- Ces notions de 1 et 2-morphismes, définissent une 2-catégorie stricte, qu'on appellera la 2-catégorie des dérivateurs triangulés et qu'on notera $\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{R}$.

Soit $m : \mathbb{D}_1 \longrightarrow \mathbb{D}_2$ un 1-morphisme de dérivateurs de domaine \mathbf{Dia} . Supposons donné un foncteur $u : A \longrightarrow B$ entre catégories de \mathbf{Dia} . À partir de la face :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_1(A) & \xrightarrow{m_A} & \mathbb{D}_2(A) \\ u^* \downarrow & \swarrow_{\alpha_m} & \downarrow u^* \\ \mathbb{D}_1(B) & \xrightarrow{m_B} & \mathbb{D}_2(B) \end{array}$$

ainsi que son inverse, on déduit en utilisant les adjonctions (u^*, u_*) et $(u_\#, u^*)$ deux faces carrées :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_1(A) & \xrightarrow{m_A} & \mathbb{D}_2(A) \\ u_* \uparrow & \searrow_{Ex_*^*} & \uparrow u_* \\ \mathbb{D}_1(B) & \xrightarrow{m_B} & \mathbb{D}_2(B) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{D}_1(A) & \xrightarrow{m_A} & \mathbb{D}_2(A) \\ u_\# \uparrow & \swarrow_{Ex_\#^*} & \uparrow u_\# \\ \mathbb{D}_1(B) & \xrightarrow{m_B} & \mathbb{D}_2(B) \end{array}$$

On fait la définition suivante :

Définition 2.1.47. — Soit $m : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ un 1-morphisme de dérivateurs triangulés. On dit que m commute aux **Dia**-limites homotopiques (resp. aux **Dia**-colimites homotopiques) si les faces Ex_*^* (resp. $Ex_\#^*$) ci-dessus sont inversibles pour tout foncteur u de **Dia**.

La proposition suivante décrit les adjonctions entre 1-morphismes de \mathfrak{DER} :

Proposition 2.1.48

1- Soit $m : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ un 1-morphisme de dérivateurs triangulés. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- Le 1-morphisme m admet un adjoint à droite $n : \mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D}$.
- Le 1-morphisme m commute aux **Dia**-colimites homotopiques, et pour toute catégorie A de **Dia**, le foncteur $m_A : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}'(A)$ admet un adjoint à droite.

Si en plus la 2-catégorie **Dia** contient toutes les petites catégories discrètes et que les catégories triangulées $\mathbb{D}(A)$ sont compactement engendrées, on peut simplifier la seconde condition en la suivante :

- Le 1-morphisme m commute aux **Dia**-colimites homotopiques.
- 2-** Dualement, les conditions suivantes sont équivalentes.
- Le 1-morphisme m admet un adjoint à gauche $n : \mathbb{D}' \longrightarrow \mathbb{D}$.
 - Le 1-morphisme m commute aux **Dia**-limites homotopiques, et pour toute catégorie A de **Dia**, le foncteur $m_A : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}'(A)$ admet un adjoint à gauche.

Démonstration. — On prouvera uniquement la première partie du lemme. Supposons que $m : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ admet un adjoint à droite n . En examinant la définition des 2-morphismes de \mathfrak{DER} , il est facile de voir que pour toute catégorie A de **Dia**, le foncteur n_A est un adjoint à droite de m_A . De plus, pour un foncteur $u : A \longrightarrow B$ de **Dia**, les deux faces carrées :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_1(A) & \xrightarrow{n_A} & \mathbb{D}_2(A) \\ u^* \downarrow & \swarrow \alpha_n & \downarrow u^* \\ \mathbb{D}_1(B) & \xrightarrow{n_B} & \mathbb{D}_2(B) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{D}_1(A) & \xrightarrow{m_A} & \mathbb{D}_2(A) \\ u_\# \uparrow & \nwarrow Ex_\#^* & \uparrow u_\# \\ \mathbb{D}_1(B) & \xrightarrow{m_B} & \mathbb{D}_2(B) \end{array}$$

sont échangées *via* les adjonctions $(u_\# \circ m_B, n_B \circ u^*)$ et $(m_A \circ u_\#, u^* \circ n_A)$. Étant donné que la première face est inversible, nous déduisons que m commute aux **Dia**-colimites. D'où la première implication.

L'implication réciproque est tout aussi facile. Finalement la simplification de la seconde assertion découle immédiatement du lemme 2.1.22 et du fait que les colimites homotopiques de familles discrètes calculées dans \mathbb{D} coïncident avec les sommes directes. \square

2.1.2.3. *Foncteurs \mathbb{D} -filtrants. Homotopies simpliciales.* — Avec les notations de la définition 2.1.42, on a le résultat important suivant :

Proposition 2.1.49. — *On suppose donné un dérivateur triangulé de domaine \mathbf{Dia} . Soit $f : J \longrightarrow I$ un foncteur de \mathbf{Dia} . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le 2-morphisme : $(p_J)_\# f^* \simeq (p_I)_\# f_\# f^* \longrightarrow (p_I)_\#$ est inversible.*
2. *Le 2-morphisme : $(p_I)^* \longrightarrow f_* f^*(p_I)^* \simeq f_*(p_J)^*$ est inversible.*
3. *Pour tout $i \in \mathbf{Ob}(I)$ le 2-morphisme évident $R_\#(J/i) \longrightarrow \text{id}$ est inversible.*
4. *Pour tout $i \in \mathbf{Ob}(I)$ le 2-morphisme évident $\text{id} \longrightarrow R_*(J/i)$ est inversible.*

Démonstration. — Les deux premières conditions sont équivalentes puisqu'on passe de l'une à l'autre en utilisant les adjonctions :

$$((p_J)_\# f^*, f_*, (p_J)^*) \quad \text{et} \quad ((p_I)_\#, (p_I)^*)$$

De même, les deux dernières conditions sont équivalentes puisque $R_\#(J/i)$ est l'adjoint à gauche de $R_*(J/i)$. Ainsi, pour montrer la proposition, il suffit de montrer l'équivalence entre la seconde et dernière condition.

Par l'axiome 2 de la définition 2.1.34, la seconde condition équivaut à dire que pour tout $i \in \mathbf{Ob}(I)$ le 2-morphisme :

$$i^*(p_I)^* \longrightarrow i^* f_* f^*(p_I)^* \longrightarrow i^* f_*(p_J)^*$$

est inversible. Considérons la face carrée :

$$\begin{array}{ccc} J/i & \xrightarrow{j_i} & J \\ p_{J/i} \downarrow & \alpha \swarrow & \downarrow f \\ \mathbf{e} & \xrightarrow{i} & I \end{array}$$

Par l'axiome 4 de la définition 2.1.34, on sait que la face :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(J/i) & \xleftarrow{j_i^*} & \mathbb{D}(J) \\ (p_{J/i})_* \downarrow & \nwarrow Ex_*^* & \downarrow f_* \\ \mathbb{D}(\mathbf{e}) & \xleftarrow{i^*} & \mathbb{D}(I) \end{array}$$

est inversible. Il vient que la seconde assertion équivaut à l'inversibilité pour tout $i \in \mathbf{Ob}(I)$ de la composée suivante :

$$\text{id} \simeq i^*(p_I)^* \longrightarrow i^* f_* f^*(p_I)^* \longrightarrow i^* f_*(p_J)^* \xrightarrow{Ex_*^*} (p_{J/i})_* j_i^*(p_J)^* \simeq (p_{J/i})_*(p_{J/i})^*$$

Il n'est pas difficile de voir que cette composée est simplement le morphisme d'unité de l'adjonction $((p_{J/i})^*, (p_{J/i})_*)$. En d'autres termes, c'est exactement le 2-morphisme $\text{id} \longrightarrow R_*(J/i)$. □

Définition 2.1.50. — Soit $f : J \longrightarrow I$ un foncteur de Dia . On dira que f est \mathbb{D} -filtrant lorsque f vérifie l'une des quatre conditions équivalentes de la proposition 2.1.49. On dira que f est universellement filtrant s'il est \mathbb{D} -filtrant pour tout Dia -dérivateur triangulé \mathbb{D} .

Notons le résultat simple suivant :

Proposition 2.1.51. — La classe des foncteurs \mathbb{D} -filtrants est stable par composition et coproduits finis. La classe des foncteurs universellement filtrants est stable par produits finis.

Démonstration. — Soit $K \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} I$ une suite composable de foncteurs de Dia . Pour montrer que $f \circ g$ est \mathbb{D} -filtrant sachant que f et g le sont, il suffit de remarquer que le 2-morphisme $(p_K)_\#(f \circ g)^* \longrightarrow (p_I)_\#$ est la composée suivante :

$$(p_K)_\#(f \circ g)^* \simeq (p_K)_\#g^*f^* \longrightarrow (p_J)_\#f^* \longrightarrow (p_I)_\#$$

La stabilité par coproduits finis est facile et laissée aux lecteurs. Pour la stabilité par produits finis, on considère deux foncteurs universellement filtrants $f : J \longrightarrow I$ et $f' : J' \longrightarrow I'$. Le produit $f' \times f : J \times J' \longrightarrow I \times I'$ se décompose :

$$J \times J' \xrightarrow{f \times \text{id}} I \times J' \xrightarrow{\text{id} \times f'} I \times I'$$

En utilisant la stabilité par composition, on se ramène à montrer que $f \times \text{id} : J \times K \longrightarrow I \times K$ est universellement filtrant sachant que f l'est.

Étant donné un dérivateur triangulé \mathbb{D} , on considère le dérivateur triangulé $\mathbb{D}_K = \mathbb{D}(- \times K)$. En utilisant le fait que f est \mathbb{D}_K -filtrant on déduit que dans \mathbb{D} le 2-morphisme :

$$(\text{id} \times p_J)_\#(\text{id} \times f)^* \longrightarrow (\text{id} \times p_I)_\#$$

est inversible. Mais le 2-morphisme qui nous intéresse s'obtient du 2-morphisme ci-dessus en appliquant $(p_K)_\#$. La proposition est prouvée. \square

Il est facile de donner des exemples de foncteurs universellement filtrants entre ensembles ordonnés.

Définition 2.1.52. — Soit $(I, <)$ un ensemble ordonné. On dit que $(I, <)$ est semi-bien ordonné si toute partie non vide A de I admet une borne supérieure $\sup(A)$ dans I (i.e., un plus petit majorant).

Lemme 2.1.53. — Soit $J \subset I$ une inclusion entre deux ensembles semi-bien ordonnés. On suppose que tout élément de I est minoré par un élément de J . Alors le foncteur $J \longrightarrow I$ est universellement filtrant.

Démonstration. — En effet, soit i un objet (ou plutôt un élément) de I . La catégorie J/i correspond alors au sous-ensemble ordonné de J formé des objets inférieurs ou égaux à i . Cet ensemble est non vide. Il admet donc une borne supérieure $\sup(J/i)$ (dans $J!$). Mais alors cet élément est un objet final de J/i . Il vient par la proposition 2.1.41 que $R_*(J/i) \simeq \text{id}$. D'où le résultat. \square

On donne également deux exemples importants de nature simpliciale. Notons Δ est la catégorie dont les objets sont les ordinaux finis \underline{n} pour $n \in \mathbb{N}$. Le point clef est le lemme suivant :

Lemme 2.1.54. — *On notera $\Delta/\underline{n} \times \underline{r}$ la catégorie dont les objets sont les couples de flèches $(\underline{m} \rightarrow \underline{n}, \underline{m} \rightarrow \underline{r})$. Le 2-morphisme $R_\#(\Delta/\underline{n} \times \underline{r}) \longrightarrow \text{id}$ est inversible.*

Démonstration. — La catégorie Δ/\underline{n} admet un objet final. Il vient que $R_\#(\Delta/\underline{n}) \longrightarrow \text{id}$ est inversible. Notant $s_0 : \Delta/\underline{n} \longrightarrow \Delta/\underline{n} \times \underline{r}$ le foncteur qui associe à une flèche $(\underline{m} \rightarrow \underline{n})$ le couple : $(\underline{m} \rightarrow \underline{n}, \underline{m} \xrightarrow{0} \underline{r})$, on voit qu'il suffit de prouver que $R_\#(s_0)$ est inversible. Pour cela, on va construire un foncteur $u : \Delta/\underline{n} \times \underline{r} \longrightarrow \Delta/\underline{n}$ qui réalise cet inverse.

Le foncteur u associe à un couple $(a : \underline{m} \rightarrow \underline{n}, b : \underline{m} \rightarrow \underline{r})$ une flèche $(a_0 : \underline{m}_0 \rightarrow \underline{n})$ avec :

- m_0 le cardinal de l'ensemble $b^{-1}(0)$,
- $a_0 = a \circ t$ avec $t : \underline{m}_0 \rightarrow \underline{m}$ l'unique injection croissante dont l'image est exactement $b^{-1}(0)$.

Il est clair que les injections t ci-dessus, induisent une transformation naturelle $t : s_0 \circ u \longrightarrow \text{id}$. En particulier, la composée $R_\#(s_0) \circ R_\#(u)$ est l'identité par le lemme 2.1.43. D'autre part, on voit facilement que la composée $u \circ s_0$ est l'identité de Δ/\underline{n} . On a donc également $R_\#(u) \circ R_\#(s_0) = \text{id}$. \square

On en déduit deux exemples de foncteurs filtrants :

Corollaire 2.1.55

- 1- *Le foncteur diagonal $\text{diag} : \Delta \longrightarrow \Delta \times \Delta$ est universellement filtrant.*
- 2- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $\Delta/\underline{n} \longrightarrow \Delta$ est universellement filtrant.*

Démonstration. — Le premier point découle immédiatement du lemme 2.1.54 et de la quatrième caractérisation des foncteurs \mathbb{D} -filtrants de la proposition 2.1.49. Pour le second point, on utilise le fait que $\Delta/\underline{n} \times \underline{r} = \Delta/\underline{n} \times \underline{r}$. \square

En utilisant le fait que $\Delta/\underline{1} \longrightarrow \Delta$ est filtrant, on peut définir une notion d'homotopie simpliciale entre les morphismes de $\mathbb{D}(\Delta)$ de sorte que deux flèches homotopes deviennent égales après application de $(p_\Delta)_\#$.

On notera dans la suite $q : \Delta/\underline{1} \longrightarrow \Delta$ la projection canonique et s_0 (resp. s_1) le foncteur $\Delta \longrightarrow \Delta/\underline{1}$ qui envoie un ordinal \underline{n} sur la flèche composée :

$$\underline{n} \longrightarrow \underline{0} \xrightarrow{s_0} \underline{1} \quad (\text{resp. } \underline{n} \longrightarrow \underline{0} \xrightarrow{s_1} \underline{1})$$

Définition 2.1.56. — Soient A et B deux objets de $\mathbb{D}(\Delta)$ et $f, g : A \longrightarrow B$ deux flèches. Une homotopie de f à g est une flèche :

$$h : q_{\#}q^*A \longrightarrow B$$

tels que les composées suivantes :

$$A \simeq q_{\#}(s_0)_{\#}s_0^*q^*A \longrightarrow q_{\#}q^*A \xrightarrow{h} B$$

$$A \simeq q_{\#}(s_1)_{\#}s_1^*q^*A \longrightarrow q_{\#}q^*A \xrightarrow{h} B$$

soient respectivement égales à f et g .

On a effectivement :

Proposition 2.1.57. — Soient A et B deux objets de $\mathbb{D}(\Delta)$ et $f, g : A \longrightarrow B$ deux flèches homotopes. Les deux flèches :

$$(p_{\Delta})_{\#}A \xrightarrow{f} (p_{\Delta})_{\#}B \quad \text{et} \quad (p_{\Delta})_{\#}A \xrightarrow{g} (p_{\Delta})_{\#}B$$

sont égales.

Démonstration. — Soit $h : q_{\#}q^*A \longrightarrow B$ une homotopie de f à g . Il suffit de prouver que les deux morphismes :

$$A = q_{\#}(s_0)_{\#}s_0^*q^*A \longrightarrow q_{\#}q^*A \quad \text{et} \quad A = q_{\#}(s_1)_{\#}s_1^*q^*A \longrightarrow q_{\#}q^*A$$

deviennent égales après application de $(p_{\Delta})_{\#}$. Ces deux flèches admettent la rétraction commune :

$$q_{\#}q^*A \longrightarrow A$$

Ainsi, il suffira de montrer que :

$$(p_{\Delta})_{\#}q_{\#}q^*A \longrightarrow (p_{\Delta})_{\#}A$$

est inversible. C'est effectivement le cas puisque q est un foncteur filtrant par le corollaire 2.1.55. \square

2.1.2.4. *Application aux 2-triangles distingués.* — On termine cette petite introduction sur les dérivateurs par une application aux 2-triangles distingués. Soient \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 deux catégories triangulées. Une suite :

$$(161) \quad f' \longrightarrow f \longrightarrow f'' \longrightarrow f'[+1]$$

de foncteurs triangulés f, f' et $f'' : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ est appelée un 2-triangle. On dit que cette suite est un 2-triangle distingué si pour tout objet A de \mathcal{T}_1 , le triangle :

$$f'(A) \longrightarrow f(A) \longrightarrow f''(A) \longrightarrow f'(A)[+1]$$

est distingué. Étant donné un 2-triangle (161) et des adjoints (à droite pour fixer les idées) g, g' et g'' de f, f' et f'' respectivement, on peut former un autre 2-triangle :

$$(162) \quad g'' \longrightarrow g \longrightarrow g' \longrightarrow g''[+1]$$

La question naturelle qu'on se pose dans ce paragraphe est la suivante : *Si le 2-triangle (161) est distingué, en-est-il de même du triangle (162) ?*

La réponse à cette question est probablement négative sans hypothèses supplémentaires. Toutefois, il semble difficile de construire des contre-exemples.

On commencera l'étude de cette question par un cas particulier qui provient justement de la théorie des dérivateurs triangulés.

Soit \mathbb{D} un dérivateur triangulé de domaine \mathbf{Dia} . Soit X un objet de $\mathbb{D}(\underline{1})$. Notons $s : \underline{1} \longrightarrow \Gamma$ le foncteur qui envoie 0 et 1 sur $(0, 1)$ et $(1, 1)$ respectivement. On vérifie facilement que l'objet s_*X vérifie :

$$(0, 1)^* s_* X = 0^* X = X_0, \quad (1, 1)^* s_* X = 1^* X = X_1 \quad \text{et} \quad (1, 0)^* s_* X = 0$$

Ainsi l'axiome 6 de la définition 2.1.34 fournit un triangle distingué fonctoriel en X :

$$X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow (0, 0)^*(i_\Gamma)_\#(s_* X) \longrightarrow X_1[+1]$$

Il est alors naturel de poser $\text{Cone}(X) = (0, 0)^*(i_\Gamma)_\#(s_* X)$. On a ainsi un foncteur cône :

$$\text{Cone} : \mathbb{D}(\underline{1}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbf{e})$$

qui s'insère dans un 2-triangle distingué :

$$(163) \quad 1^* \longrightarrow 0^* \longrightarrow \text{Cone} \longrightarrow 1^*[+1]$$

Ce 2-triangle peut être considéré comme un 2-triangle distingué universel parmi les « bons » 2-triangles distingués. On montrera que le 2-triangle formé des adjoints à droites de $1^*, 0^*$ et Cone est 2-distingué.

Il est utile de considérer la variante suivante du foncteur cône :

Définition 2.1.58. — Soit $t : \underline{1} \longrightarrow \sqcup$ le foncteur qui envoie 0 et 1 sur $(0, 0)$ et $(0, 1)$ respectivement. On définit le foncteur triangulé $\theta : \mathbb{D}(\underline{1}) \longrightarrow \mathbb{D}(\underline{1})$ par la composée :

$$(164) \quad \mathbb{D}(\underline{1}) \xrightarrow{s_*} \mathbb{D}(\ulcorner) \xrightarrow{(i_\ulcorner)_\#} \mathbb{D}(\square) \xrightarrow{(i_\sqcup)^*} \mathbb{D}(\lrcorner) \xrightarrow{t^*} \mathbb{D}(\underline{1})$$

Ainsi si $X \in \text{Ob}(\mathbb{D}(\underline{1}))$, on a $\theta(X) = t^*(i_\sqcup)^*(i_\ulcorner)_\#(s_*X)$.

Remarque 2.1.59. — Pour faciliter la tâche aux lecteurs, on fera un petit dessin décrivant les foncteurs s et t qui entrent en jeu dans la définition de θ :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longleftarrow & 0 & & \\ & \downarrow i_\ulcorner \circ s & & & \\ (1, 1) & \longleftarrow & (0, 1) & & 1 \\ \uparrow & & \uparrow & \xleftarrow{i_\sqcup \circ t} & \uparrow \\ (1, 0) & \longleftarrow & (0, 0) & & 0 \end{array}$$

Remarque 2.1.60. — Si X est un objet de $\mathbb{D}(\underline{1})$, le squelette de $\theta(X)$ est simplement le second côté du triangle distingué canonique (163) à savoir : $0^*X \longrightarrow \text{Cone}(X)$.

On résume quelques propriétés du foncteur θ dans la proposition suivante :

Proposition 2.1.61. — Le foncteur θ est une équivalence de catégories. Un inverse à θ est donné par la composée duale de 164 :

$$\mathbb{D}(\underline{1}) \xrightarrow{t_\#} \mathbb{D}(\lrcorner) \xrightarrow{(i_\sqcup)_*} \mathbb{D}(\square) \xrightarrow{(i_\ulcorner)^*} \mathbb{D}(\ulcorner) \xrightarrow{s^*} \mathbb{D}(\underline{1})$$

Il existe également des isomorphismes canoniques :

- $1^* \circ \theta \simeq 0^*$,
- $0^* \circ \theta \simeq \text{Cone}$,
- $1^*\theta^3 \simeq 0^*\theta^2 \simeq 1^*[+1]$.

Enfin, on peut récrire le 2-triangle distingué 163 :

$$(165) \quad 1^* \xrightarrow{r} 1^*\theta \xrightarrow{r} 1^*\theta^2 \xrightarrow{r} 1^*\theta^3 \simeq 1^*[+1]$$

avec r la composée : $1^* \longrightarrow 0^* \simeq 1^*\theta$.

Démonstration. — Pour montrer que θ est une équivalence, on utilise l'axiome 5 de la définition 2.1.34 affirmant qu'un carré est cartésien si et seulement si il est cocartésien. Ainsi, pour X un objet de $\mathbb{D}(\underline{1})$ le carré cartésien $(i_\ulcorner)_\#s_*X$ coïncide avec le carré cocartésien $(i_\sqcup)_*t_\#\theta(X)$. Ceci fournit un isomorphisme canonique :

$$X \simeq s^*(i_\ulcorner)^*(i_\sqcup)_*t_\#\theta(X)$$

Dualement, on a aussi un isomorphisme canonique :

$$X \simeq \theta(i_{\ulcorner})^*(i_{\lrcorner})_* t_{\#} X$$

Il vient que θ est une équivalence et son inverse est donné par son adjoint $s^*(i_{\ulcorner})^*(i_{\lrcorner})_* t_{\#} = \theta^{-1}$.

Les isomorphismes $1^* \theta \simeq 0^*$ et $0^* \theta \simeq \text{Cone}$ sont faciles à construire.

L'isomorphisme $0^* \theta^2 \simeq 1^* [+1]$ est moins trivial. Pour le construire on procède de la manière suivante. Soit $\underline{2} \times \underline{1}$ la catégorie :

$$\begin{array}{ccccc} (2, 1) & \longleftarrow & (1, 1) & \longleftarrow & (0, 1) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (2, 0) & \longleftarrow & (1, 0) & \longleftarrow & (0, 0) \end{array}$$

Et $r : I \subset \underline{2} \times \underline{1}$ la sous-catégorie pleine privée des objets $(1, 0)$ et $(0, 0)$. On note $i : \underline{1} \longrightarrow I$ le foncteur qui envoie 1 sur $(2, 1)$ et 0 sur $(1, 1)$.

Soit X un objet de $\mathbb{D}(\underline{1})$. Considérons l'objet $r_{\#} i_* X$ de $\mathbb{D}(\underline{2} \times \underline{1})$. Son squelette est :

$$\begin{array}{ccccc} 1^* X & \longrightarrow & 0^* X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Cone}(X) & \longrightarrow & \text{Cone}(\theta(X)) \end{array}$$

Notons $e : \underline{1} \times \underline{1} \longrightarrow \underline{2} \times \underline{1}$ le produit du foncteur $\underline{2} \longrightarrow \underline{1}$ envoyant 0 sur 0 et 1 sur 2, par le foncteur identité. On vérifie facilement que $e^*(r_{\#} i_* X)$ est un carré cartésien. Ceci induit canoniquement un isomorphisme : $\text{Cone}(\theta(X)) \longrightarrow \Sigma(X)$. \square

Remarque 2.1.62. — Il est probable qu'on dispose d'un isomorphisme canonique $\theta^3 \simeq [+1]$. Toutefois, on n'aura pas besoin d'un tel isomorphisme dans la suite.

L'adjoint à droite de 1^* est le foncteur $1_* : \mathbb{D}(\mathbf{e}) \longrightarrow \mathbb{D}(\underline{1})$. Comme 1 est l'objet final de $\underline{1}$, par le corollaire 2.1.40, le foncteur 1_* est canoniquement isomorphe à p^* avec $p : \underline{1} \longrightarrow \mathbf{e}$. On répondra par l'affirmative à la question proposée dans le cas particulier du 2-triangle (163), en montrant que le 2-triangle :

$$p^*[-1] = \theta^{-3} p^* \xrightarrow{r'} \theta^{-2} p^* \xrightarrow{r'} \theta^{-1} p^* \xrightarrow{r'} p^*$$

est distingué avec r' le morphisme déduit de r par adjonction. Il revient au même de considérer le triangle :

$$(166) \quad \theta^{-1} p^* \xrightarrow{r'} p^* \longrightarrow \theta p^* \longrightarrow \theta^2 p^* \simeq \theta^{-1} p^* [+1]$$

Fixons un objet X de $\mathbb{D}(\mathbf{e})$. Il est clair que l'objet $\theta^{-1} p^* X$ admet pour squelette :

$$0 \longrightarrow X$$

D'autre part ce squelette détermine son objet à isomorphisme unique près. En effet si A est un objet ayant un squelette de cette forme, le morphisme $1_{\#}1^*A \longrightarrow A$ est inversible. Pour la même raison, un morphisme de $\theta^{-1}p^*X$ vers n'importe quel objet de $\mathbb{D}(\underline{1})$ est uniquement déterminé par son induit sur les squelettes. Ainsi, le morphisme $1^*X \longrightarrow 0^* \simeq 1^*\theta(X)$ est l'unique morphisme ayant pour squelette :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \parallel \\ X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

où les squelettes des objets de $\mathbb{D}(\underline{1})$ sont représentés par des flèches verticales.

D'autre part, l'objet θp^*X admet pour squelette :

$$X \longrightarrow 0$$

La discussion précédente s'applique. Ainsi le morphisme $p^*X \longrightarrow \theta p^*X$ est l'unique morphisme ayant pour squelette :

$$\begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X \\ \parallel & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les squelettes des objets de $\mathbb{D}(\underline{1})$ sont représentés par des flèches verticales.

Il reste à comprendre le troisième coté du 2-triangle (166) : $\theta p^* \longrightarrow \theta^2 p^*$. Notons d'abord que le squelette de $\theta^2 p^*X$ est :

$$0 \longrightarrow X[+1]$$

Il vient que le squelette du morphisme qui nous intéresse est nul puisque de la forme :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X[+1] \end{array}$$

Il va donc falloir travailler un peu plus que tout à l'heure. On commence par un lemme :

Lemme 2.1.63. — Soient E et F des objets de $\mathbb{D}(\underline{1})$ ayant pour squelettes respectifs :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & F_0 \end{array}$$

On va définir des applications $\mathrm{hom}(E, F) \longrightarrow \mathrm{hom}(E_1[+1], F_0)$ par différentes recettes.

1. En prenant la composée :

$$\mathrm{hom}(E, F) \longrightarrow \mathrm{hom}(\mathrm{Cone}(E), \mathrm{Cone}(F)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{hom}(E_1[+1], F_0)$$

2. En prenant la composée :

$$\mathrm{hom}(E, F) \longrightarrow \mathrm{hom}(\theta E, \theta F) \longrightarrow \mathrm{hom}(0^*\theta E, 0^*\theta F) \simeq \mathrm{hom}(E_1[+1], F_0)$$

3. En prenant la composée :

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}(E, F) &\longrightarrow \mathrm{hom}(\theta^{-1}E, \theta^{-1}F) \\ &\longrightarrow \mathrm{hom}(1^*\theta^{-1}E, 1^*\theta^{-1}F) \simeq \mathrm{hom}(E_1, F_0[-1]) \simeq \mathrm{hom}(E_1[+1], F_0) \end{aligned}$$

4. Soit $a : E \longrightarrow F$. On choisit un objet G de $\mathbb{D}(\square)$ dont le $\underline{1}$ -squelette est le morphisme a . Le squelette de i_τ^*G est simplement :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

Ainsi, le morphisme canonique : $(i_\tau)_\# i_\tau^*G \longrightarrow G$ induit un morphisme $E_1[+1] \longrightarrow F_0$ après application de $(0, 0)^*$. Ce morphisme ne dépend que de a .

Toutes ses applications coïncident. De plus, c'est des isomorphismes de groupes abéliens.

Démonstration. — Notons par ordre α_1 , α_2 , α_3 et α_4 les applications de l'énoncé. Il est clair que $\alpha_1 = \alpha_2$ puisque le morphisme α_2 est induit par le foncteur $0^*\theta$ qui s'identifie canoniquement au foncteur Cone . Montrons au passage que α_2 est un isomorphisme. Pour cela il suffit de prouver que le morphisme $\mathrm{hom}(\theta E, \theta F) \longrightarrow \mathrm{hom}(0^*\theta E, 0^*\theta F)$ est inversible. Mais les squelettes de θE et θF sont respectivement :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & F_0 \\ \downarrow & & \parallel \\ E_1[+1] & & F_0 \end{array}$$

Il vient que les flèches $\theta E \longrightarrow \theta F$ sont uniquement déterminées par leurs squelettes. Mais il est facile de voir qu'un morphisme entre ces deux squelettes n'est rien d'autre qu'un morphisme $E[+1] \longrightarrow F_0$.

Prouvons que les morphismes α_2 et α_3 sont égaux. Par la proposition 2.1.61, les foncteurs $0^*\theta^2$ et $1^*[+1]$ sont canoniquement isomorphes. On en déduit un

isomorphisme canonique $0^*\theta \simeq 1^*\theta^{-1}[+1]$. On vérifie facilement qu'il est compatible avec les identifications :

$$0^*\theta E = E_1[+1], \quad 0^*\theta F = F_0 \quad \text{et} \quad 1^*\theta^{-1}E[+1] = E_1[+1], \quad 1^*\theta^{-1}F[+1] = F_0$$

Ceci prouve que $\alpha_2 = \alpha_3$.

Montrons finalement que l'application α_4 coïncide avec α_1 . Notons C le carré cartésien $(i_r)_\# i_r^* G$ et E' l'objet de $\mathbb{D}(\underline{1})$ ayant pour squelette :

$$\begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ E[+1] \end{array}$$

Le $\underline{1}$ -squelette de C est un morphisme de $a' : E \longrightarrow E'$.

Le morphisme $C \longrightarrow G$ induit alors un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xlongequal{\quad} & E \\ a' \downarrow & & \downarrow a \\ E' & \xrightarrow{\quad b \quad} & F \end{array}$$

L'application α_4 associe à $a : E \longrightarrow F$ la flèche $E_1[+1] \longrightarrow F_0$ obtenue en appliquant 0^* à $b : E' \longrightarrow F$. Appliquons le foncteur Cone :

$$\begin{array}{ccc} \text{Cone}(E) & \xlongequal{\quad} & \text{Cone}(E) \\ a' \downarrow & & \downarrow a \\ \text{Cone}(E') & \xrightarrow{\quad b \quad} & \text{Cone}(F) \end{array}$$

Ce diagramme s'identifie alors à :

$$\begin{array}{ccc} E_1[+1] & \xlongequal{\quad} & E_1[+1] \\ \parallel & & \downarrow \alpha_1(a) \\ E_1[+1] & \xrightarrow{\quad \alpha_4(a) \quad} & F_0 \end{array}$$

Ceci prouve l'égalité $\alpha_1 = \alpha_4$. □

On déduit facilement du lemme précédent que le morphisme $\theta p^* X \longrightarrow \theta^2 p^* X$ vient de l'objet cartésien et cocartésien de $\mathbb{D}(\square)$ dont le squelette est :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X[+1] \end{array}$$

On a ainsi réussi à décrire complètement le 2-triangle (166). On résume la description obtenue :

Proposition 2.1.64. — Soit A un objet de $\mathbb{D}(\mathbf{e})$. Le triangle :

$$\theta^{-1}p^*A \longrightarrow p^*A \longrightarrow \theta p^*A \longrightarrow \theta^{-1}p^*A[+1]$$

est canoniquement isomorphe au triangle suivant :

$$U' \xrightarrow{a} U \xrightarrow{b} U'' \xrightarrow{c} U'[+1]$$

avec U' , U et U'' les objets de $\mathbb{D}(\mathbf{1})$ uniquement déterminés par leurs squelettes respectifs :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & A \\ \downarrow & & \parallel \\ A & & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & & A \\ \parallel & & \parallel \\ A & & 0 \end{array}$$

et a et b les flèches de $\mathbb{D}(\mathbf{1})$ uniquement déterminées par leurs squelettes respectifs :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \parallel \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xlongequal{\quad} & A \\ \parallel & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De plus, le morphisme c est le $\mathbf{1}$ -squelette de l'objet cartésien et cocartésien $(i_{\Gamma})_{\#}(i_{\Gamma})^*(1, 1)_*A$.

Théorème 2.1.65. — Le 2-triangle (166) est distingué.

Démonstration. — Il s'agit de prouver que pour tout objet A de $\mathbb{D}(\mathbf{e})$, le triangle décrit dans la proposition 2.1.64 est distingué.

Notons d'abord que l'opérateur θ s'étend à $\mathbb{D}(\mathbf{1} \times I)$ pour toute catégorie I de \mathbf{Dia} . En particulier, l'opérateur θ agit sur $\mathbb{D}(\square)$. En fait, on dispose de deux tels opérateurs suivant le facteur $\mathbf{1}$ de $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$ considéré. Lorsqu'on prend l'opérateur θ relativement au premier facteur, on parlera du foncteur θ horizontal qu'on notera θ_h . Lorsqu'on prend l'opérateur θ relativement au second facteur, on parlera du foncteur θ vertical qu'on notera θ_v . Il est facile de voir que les équivalences θ verticales et horizontales commutent, *i.e.*, il existe un isomorphisme canonique $\theta_v \circ \theta_h \simeq \theta_h \circ \theta_v$. Une façon économique de vérifier ceci est de considérer θ_v comme une autoéquivalence de dérivateurs : $\mathbb{D}_{\mathbf{1}} \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathbf{1}}$ et d'utiliser le fait qu'un morphisme de dérivateurs commutant aux \mathbf{Dia} -limites et colimites, commute forcément au foncteur θ . On a également deux foncteurs cônes \mathbf{Cone}_v et \mathbf{Cone}_h , ainsi qu'un isomorphisme canonique $\mathbf{Cone}_v \circ \theta_h = \theta \circ \mathbf{Cone}_v$.

Considérons l'objet D de $\mathbb{D}(\square)$ donné par la formule $(i_{\sqsubset})_{\#}p_{\sqsupset}^*A$. Son squelette est :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \parallel \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array}$$

Ainsi, son $\underline{1}$ -squelette est le morphisme a . Pour prouver le corollaire, on va identifier notre triangle à :

$$1^*D \longrightarrow 1^*\theta_h D \longrightarrow 1^*\theta_h^2 D \longrightarrow 1^*\theta_h^3 D \simeq 1^*D[+1]$$

Pour les deux premières flèches, il suffit de passer aux squelettes. Pour identifier la troisième flèche avec celle décrite dans la proposition 2.1.64, il suffit de montrer que $\theta_h^2 D$ est le carré cartésien et cocartésien canonique de squelette :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A[+1] \end{array}$$

Le calcul du squelette est facile et laissé aux lecteurs. Par le lemme 2.1.63, pour calculer le morphisme de $\mathbb{D}(\underline{1})$ induit par $\theta_h^2 D$ entre les deux objets ayant pour squelettes :

$$\begin{array}{ccc} A & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & A[+1] \end{array}$$

il suffit de regarder l'induit sur les cônes. Il suffirait donc de montrer que le squelette de $\text{Cone}_v \theta_h^2 D$ est :

$$A[+1] = A[+1]$$

En utilisant la commutation de θ_h avec Cone_v , il vient que $\text{Cone}_v \theta_h^2 D = \theta_h^2 \text{Cone}_v D$. Mais le squelette de $\text{Cone}_v D$ est simplement $A \longrightarrow 0$. D'où le résultat. \square

On peut en déduire le résultat suivant :

Proposition 2.1.66. — Soient \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 deux catégories triangulées avec petites sommes. On suppose également que \mathcal{T}_1 est compactement engendrée.

On suppose donné un 2-triangle distingué de foncteurs $\mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$:

$$f' \longrightarrow f \longrightarrow f'' \longrightarrow f'[+1]$$

et des adjoints à droites g, g' et g'' de f, f' et f'' respectivement.

Supposons qu'il existe :

- un dérivateur triangulé \mathbb{D}_2 de domaine une sous-catégorie $\text{Dia} \subset \mathfrak{Cat}$ contenant les petites catégories discrètes tel que $\mathcal{T}_2 = \mathbb{D}_2(\mathbf{e})$,
- un foncteur $F : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathbb{D}_2(\underline{1})$ ainsi qu'un isomorphisme de 2-triangles :

$$\begin{array}{ccccccc} 1^*F & \longrightarrow & 0^*F & \longrightarrow & \text{Cone} \circ F & \longrightarrow & 1^*F[+1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f' & \longrightarrow & f & \longrightarrow & f'' & \longrightarrow & f'[+1] \end{array}$$

Alors, le 2-triangle : $g'' \longrightarrow g \longrightarrow g' \longrightarrow g''[+1]$ est distingué.

Démonstration. — En effet, l'existence d'adjoints à droite force les foncteurs f , f' et f'' à commuter aux petites sommes. L'axiome 2 de la définition 2.1.34, montre qu'il en est de même de F . Ainsi, F admet lui aussi un adjoint à droite G (qui est triangulé par le lemme 2.1.23). Mais le 2-triangle :

$$g'' \longrightarrow g \longrightarrow g' \longrightarrow g''[+1]$$

est clairement isomorphe au 2-triangle *distingué* :

$$\theta^{-2}p^* \xrightarrow{r'} \theta^{-1}p^* \xrightarrow{r'} p^* \longrightarrow \theta p^* \simeq \theta^{-2}p^*[+1]$$

auquel on applique le foncteur G . Ceci prouve la proposition. \square

Remarque 2.1.67. — Pour un exemple d'application de cette proposition, le lecteur peut consulter la proposition 2.1.152.

2.1.3. Quelques compléments sur les t -structures. — Pour la définition et la théorie basique des t -structures, le lecteur pourra consulter [BBD82]. On fera attention que dans la suite on utilisera la convention homologique. On va décrire une méthode simple due à Fabien Morel [Mor02] qui permet de construire des t -structures.

Définition 2.1.68. — Soient \mathcal{T} une catégorie triangulée et $\underline{G} \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$ un ensemble d'objets.

- Un objet N de \mathcal{T} est dit strictement \underline{G} -négatif si pour tout entier n positif ou nul, le foncteur $\text{hom}_{\mathcal{T}}(-, N[-n])$ s'annule sur les éléments de \underline{G} .
- Un objet P de \mathcal{T} est dit \underline{G} -positif si le foncteur $\text{hom}_{\mathcal{T}}(P, -)$ s'annule sur tous les objets strictement \underline{G} -négatifs de \mathcal{T} .

On notera $\mathcal{T}_{<0}$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} formée des objets strictement négatifs et $\mathcal{T}_{\geq 0}$ celle formée des objets positifs. Plus généralement, pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, on notera $\mathcal{T}_{<m}$ (resp. $\mathcal{T}_{\geq m}$) la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} formée des objets $A[m]$ avec $A \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{<0})$ (resp. $A \in \text{Ob}(\mathcal{T}_{\geq 0})$).

Il nous arrivera parfois de noter $\mathcal{T}_{\leq m-1}$ à la place de $\mathcal{T}_{<m}$. On a le lemme facile suivant :

Lemme 2.1.69. — Gardons les notations de la définition précédente :

1- Tout élément de \underline{G} est un objet de $\mathcal{T}_{\geq 0}$. Si $m \leq m'$ sont deux entiers relatifs, on a les inclusions $\mathcal{T}_{<m} \subset \mathcal{T}_{<m'}$ et $\mathcal{T}_{\geq m'} \subset \mathcal{T}_{\geq m}$.

2- Soit m un entier. La sous-catégorie $\mathcal{T}_{<m}$ est cosuspendue (voir la définition 2.1.1). Dualement, la sous-catégorie $\mathcal{T}_{\geq m}$ est suspendue.

3- La sous-catégorie $\mathcal{T}_{<m}$ est stable par limites catégoriques représentables. La sous-catégorie $\mathcal{T}_{\geq m}$ est stable par colimites catégoriques représentables⁽⁴⁾.

4- Si \mathcal{T} admet des petits produits (resp. des petites sommes) alors $\mathcal{T}_{<m}$ (resp. $\mathcal{T}_{\geq 0}$) est stable par limites homotopiques (resp. colimites homotopiques) de \mathbb{N}^{op} -diagrammes (resp. \mathbb{N} -diagrammes).

Démonstration. — L'inclusion $\underline{G} \subset \text{Ob}(\mathcal{T}_{\geq 0})$ est évidente.

On montre que $\mathcal{T}_{<0}$ est cosuspendue en vérifiant la stabilité par extensions et noyaux. Choisissons deux objets strictement négatifs A et B ainsi que deux triangles distingués :

$$A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow A[+1] \quad \text{et} \quad N \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow N[+1]$$

Pour P un élément de \underline{G} et $n \in \mathbb{N}$ on a les suites exactes :

$$\begin{aligned} \text{hom}(P, A[-n]) &\longrightarrow \text{hom}(P, E[-n]) \longrightarrow \text{hom}(P, B[-n]) \\ \text{hom}(P, B[-n-1]) &\longrightarrow \text{hom}(P, N[-n]) \longrightarrow \text{hom}(P, A[-n]) \end{aligned}$$

Puisque les groupes $\text{hom}(P, A[-k])$, $\text{hom}(P, B[-k])$ sont nuls pour k positif ou nul, on déduit que $\text{hom}(P, E[-n])$ et $\text{hom}(P, N[-n])$ sont nuls. Ainsi, E et N sont strictement négatifs. En particulier, $\mathcal{T}_{<0}$ est stable par cosuspensions. On en déduit immédiatement les inclusions $\mathcal{T}_{<m} \subset \mathcal{T}_{<m'}$ de **1**.

Montrons que $\mathcal{T}_{\geq 0}$ est suspendue en vérifiant la stabilité par extensions et conoyaux. Supposons donnés deux triangles distingués :

$$A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow A[+1] \quad \text{et} \quad A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A[+1]$$

avec A et B positifs. Pour N est un objet négatif, les suites exactes :

$$\begin{aligned} \text{hom}(B, N) &\longrightarrow \text{hom}(E, N) \longrightarrow \text{hom}(A, N) \\ \text{hom}(A[+1], N) &= \text{hom}(A, N[-1]) \longrightarrow \text{hom}(C, N) \longrightarrow \text{hom}(B, N) \end{aligned}$$

montrent que $\text{hom}(E, N) = \text{hom}(C, N) = 0$ (on utilise ici que $N[-1]$ est encore strictement négatif). Donc E et C sont bien positifs. En particulier $\mathcal{T}_{\geq 0}$ est stable par suspensions. On en déduit immédiatement les inclusions $\mathcal{T}_{\geq m'} \subset \mathcal{T}_{\geq m}$ de **1**.

Remarquons que le point **4** découle immédiatement de **3**, de la stabilité par noyaux (resp. conoyaux) et de la définition de la limite homotopique (resp. colimite homotopique). Pour terminer, il nous reste à prouver le point **3**.

Soit I une petite catégorie et $F : I \longrightarrow \mathcal{T}_{<0}$ un foncteur. Supposant que F admet une limite L dans \mathcal{T} . Si P est un objet de \underline{G} , on a pour $n \in \mathbb{N}$: $\text{hom}(P, L[-n]) =$

⁽⁴⁾ Les limites (resp. colimites) catégoriques sont à opposer avec les limites (resp. colimites) homotopiques. Les premières gardent un sens dans toute catégorie. Les secondes peuvent être définies pour certains diagrammes dans une catégorie triangulée ayant des produits (resp. des sommes) infinis.

$\mathrm{hom}(P[n], L) = \mathrm{Lim}_I \mathrm{hom}(P[n], F(i)) = 0$ ce qui prouve que L est bien strictement négatif.

On procède pareillement pour le cas respectif. Si F admet une colimite C dans \mathcal{T} on a pour N strictement négatif : $\mathrm{hom}(C, N) = \mathrm{Lim}_I \mathrm{hom}(F(i), N) = 0$. \square

Sous une hypothèse de compacité on a :

Proposition 2.1.70. — *On garde les notations de la définition 2.1.68. Supposons que \mathcal{T} admet les petites sommes et que les objets dans \underline{G} sont compacts. Alors :*

- *Le triplet $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{< 0})$ forme une t -structure sur \mathcal{T} .*
- *La sous-catégorie $\mathcal{T}_{\geq 0}$ est égale à $\ll \underline{G} \gg_+$ (avec les notations de la définition 2.1.15), i.e., à la plus petite sous-catégorie suspendue, stable par petites sommes et contenant les objets de \underline{G} .*

Démonstration. — Nous suivons la preuve de [Mor02]. Pour chaque objet E de \mathcal{T} choisissons un triangle distingué :

$$\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}, A \in \underline{G}, f \in \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A[n], E)} A[n] \right) \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha_E} \phi(E) \longrightarrow$$

Posons $\phi^0(E) = E$. On définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

- $\phi^k(E) = \phi(\phi^{k-1}(E))$,
- $\alpha_{k-1} = \alpha_{\phi^{k-1}(E)} : \phi^{k-1}(E) \longrightarrow \phi^k(E)$.

On obtient ainsi un \mathbb{N} -diagramme inductif :

$$E = \phi^0(E) \longrightarrow \dots \longrightarrow \phi^{k-1}(E) \xrightarrow{\alpha_{k-1}} \phi^k(E) \xrightarrow{\alpha_k} \phi^{k+1}(E) \longrightarrow \dots$$

On définit un objet $E_{< 0}$ de \mathcal{T} par : $E_{< 0} = \mathrm{HoColim}_{k \in \mathbb{N}} \phi^k(E)$. Cet objet reçoit l'objet E . On choisit enfin un triangle distingué de \mathcal{T} :

$$E_{\geq 0} \longrightarrow E \longrightarrow E_{< 0} \longrightarrow E_{\geq 0}[+1]$$

Pour prouver la proposition, il suffira d'établir les deux points suivants :

1. L'objet $E_{< 0}$ est strictement négatif.
2. L'objet $E_{\geq 0}$ est dans $\ll \underline{G} \gg_+$.

En effet, par le lemme 2.1.69, on a immédiatement l'inclusion $\ll \underline{G} \gg_+ \subset \mathcal{T}_{\geq 0}$. Ainsi, le second point suffit pour montrer que $E_{\geq 0}$ est positif et donc la première assertion de la proposition. D'autre part, soit P est un objet positif. Le fait qu'on a une t -structure implique que le triangle distingué :

$$P_{\geq 0} \longrightarrow P \longrightarrow P_{< 0} \longrightarrow$$

est l'unique triangle distingué ayant ses deux extrémités respectivement positive et strictement négative. Ceci montre que $P_{< 0} = 0$ et $P = P_{\geq 0}$. En particulier P est dans $\ll \underline{G} \gg_+$ ce qui fournit l'inclusion inverse $\mathcal{T}_{\geq 0} \subset \ll \underline{G} \gg_+$.

Prouvons donc les points 1 et 2 ci-dessus. Pour 1, on choisit un objet B de \underline{G} et un entier positif m . L'objet B étant compact, on voit que :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(B[m], E_{<0}) = \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(B[m], \mathrm{HoColim}_{k \in \mathbb{N}} \phi^k(E)) \simeq \mathrm{Colim}_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(B[m], \phi^k(E))$$

Il suffit donc de montrer que la colimite des groupes abéliens à droite est nulle. Il suffira encore de montrer que les morphismes de transitions :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(B[m], \phi^k(E)) \longrightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(B[m], \phi^{k+1}(E))$$

sont nuls. Pour toute flèche $b : B[m] \longrightarrow \phi^k(E)$, il existe une flèche en pointillés rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & B[m] \\ & \swarrow \text{pointillés} & \downarrow b \\ \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}, A \in \underline{G}, f \in \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A[n], \phi^k(E))} A[n] \right) & \longrightarrow & \phi^k(E) \longrightarrow \phi^{k+1}(E) \end{array}$$

Comme la composée des flèches horizontales est nulle (deux arêtes consécutives d'un triangle distingué), le premier point est prouvé.

Pour vérifier que $E_{\geq 0}$ est dans $\ll \underline{G} \gg_+$, on choisit des triangles distingués :

$$F_k \longrightarrow E \longrightarrow \phi^k(E) \longrightarrow F_k[+1]$$

ainsi que des morphismes de triangles :

$$(167) \quad \begin{array}{ccccccc} F_k & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \phi^k(E) & \longrightarrow & \\ \beta_k \downarrow & & \parallel & & \downarrow \alpha_k & & \\ F_{k+1} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \phi^{k+1}(E) & \longrightarrow & \end{array}$$

En utilisant la définition de la colimite homotopique il est facile de se convaincre que $E_{\geq 0}$ est une colimite homotopique des F_k . Il suffit donc de montrer que les F_k sont dans $\ll \underline{G} \gg_+$. On montre ceci par récurrence sur k (pour $k = 0$, c'est clair puisque $F_0 = 0$).

En appliquant l'axiome de l'octaèdre à (167), on obtient un triangle distingué :

$$F_k \longrightarrow F_{k+1} \longrightarrow \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}, A \in \underline{G}, f \in \mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A[n], \phi^k(E))} A[n] \right) \longrightarrow F_k[+1]$$

La catégorie $\ll \underline{G} \gg_+$ étant stable par extensions et petites sommes, le second point est également démontré. \square

Définition 2.1.71. — La t -structure $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{<0})$ sur \mathcal{T} sera appelée la t -structure engendrée par \underline{G} .

Corollaire 2.1.72. — *Sous les conditions de la proposition 2.1.70, pour un objet E de \mathcal{T} on a les propriétés suivantes :*

- *E est positif si et seulement si pour tout N strictement négatif, on a $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(E, N) = 0$.*
- *E est strictement négatif si et seulement si pour tout P positif, on a $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(P, E) = 0$.*

Il existe deux conditions simples sur \underline{G} qui assurent que la t -structure $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{< 0})$ est non dégénérée :

Proposition 2.1.73. — *On garde les hypothèses de la proposition 2.1.70. On suppose en plus que :*

- *l'ensemble \underline{G} est un ensemble de générateurs de la catégorie triangulée avec petites sommes \mathcal{T} ,*
- *pour tout A dans \underline{G} il existe un entier d_A tel que pour tout B dans \underline{G} , $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, B[n])$ est nul pour $n \geq d_A$.*

Alors, la t -structure engendrée par \underline{G} est non dégénérée.

Démonstration. — Montrons que l'intersection $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{< -n}$ est réduite à la catégorie nulle. En effet, soient N un objet de cette intersection et m un entier relatif. Si m est positif, l'objet $N[-m]$ est encore strictement négatif puisque $\mathcal{T}_{< 0}$ est stable par cosuspensions. Si m est négatif, l'objet $N[-m]$ est également strictement négatif puisque $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_{< m})$. Ainsi pour $A \in \underline{G}$ et m un entier relatif quelconque on a $\mathrm{hom}(A, N[-m]) = 0$. En d'autres termes, N est orthogonal à l'ensemble \underline{G} qui engendre \mathcal{T} . Il est donc forcément nul.

Avant de passer à l'intersection $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{\geq n}$, montrons que si $A \in \underline{G}$ et $P \in \mathcal{T}_{\geq 0}$ on a $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, P[n]) = 0$ dès que $n \geq d_A$ (avec d_A l'entier de l'énoncé). Pour cela on montre l'inclusion $\mathcal{T}_{\geq 0} = \ll \underline{G} \gg_{+} \subset \mathcal{T}_A$ avec \mathcal{T}_A la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} formée des objets $?$ tel que $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(A, ?[n]) = 0$ si $n \geq d_A$. En utilisant l'hypothèse que $\underline{G} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_A)$, on voit qu'il suffit de prouver les deux points :

- \mathcal{T}_A est stable par petites sommes.
- \mathcal{T}_A est suspendue.

La première assertion découle du fait que A est compact. Pour la seconde on vérifie la stabilité par extensions et conoyaux. On prend donc des objets Q et R de \mathcal{T}_A et des triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} Q & \longrightarrow & E & \longrightarrow & R & \longrightarrow & Q[+1] \\ Q & \longrightarrow & R & \longrightarrow & C & \longrightarrow & Q[+1] \end{array}$$

On en déduit deux suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{hom}(A, Q[n]) & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, E[n]) & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, R[n]) \\ \mathrm{hom}(A, R[n]) & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, C[n]) & \longrightarrow & \mathrm{hom}(A, Q[n+1]) \end{array}$$

ce qui montre que pour $n \geq d_A$ on a bien $\mathrm{hom}(A, E[n]) = \mathrm{hom}(A, C[n]) = 0$.

Muni de ce résultat, il est facile de montrer que $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{\geq n} = 0$. Soit en effet P un objet de toutes les catégories $\mathcal{T}_{\geq n}$. Pour m un entier relatif, l'objet $P[m - d_A]$ est dans $\mathcal{T}_{\geq 0}$ et donc par ce qui précède $\text{hom}(A, P[m]) = 0$. En utilisant encore une fois que \underline{G} engendre \mathcal{T} on déduit que P est nul. \square

2.1.3.1. Quelques lemmes utiles. — On fixe la terminologie à l'aide de la définition ci-dessous :

Définition 2.1.74

1- On se donne une catégorie triangulée \mathcal{T} munie d'une t -structure $(\mathcal{T}_{\geq 0}, \mathcal{T}_{\leq 0})$. Un objet de $\mathcal{T}_{\leq 0}$ est dit t -négatif. Un objet de $\mathcal{T}_{\geq 0}$ est dit t -positif. Un objet est majoré (resp. minoré) si un certain décalé de cet objet est t -négatif (resp. t -positif); il est borné s'il est minoré et majoré.

2- Un foncteur triangulé $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ entre deux catégories triangulées avec t -structures est dit t -négatif (resp. t -positif) s'il envoie tout objet t -négatif (resp. t -positif) sur un objet du même t -signe. Il sera dit t -exact s'il est à la fois t -négatif et t -positif.

Remarque 2.1.75. — D'habitude on dit d'un foncteur t -négatif (resp. t -positif) qu'il est exact à droite (resp. à gauche). On a préféré employer une terminologie commune aux foncteurs et aux objets suivant la philosophie que dans un 2-foncteur homotopique on peut remplacer l'étude des objets par celui des opérations. Notons à titre d'exemples que la propriété pour un foncteur triangulé d'être t -négatif (resp. t -positif) est stable par extensions et noyaux (resp. conoyaux) au sens des 2-triangles distingués.

On a le lemme facile suivant :

Lemme 2.1.76. — Soient \mathcal{T} et $(\mathcal{T}_i)_i$ des catégories triangulées munies de t -structures. Supposons donnée une famille conservative de foncteurs t -exacts $f_i : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_i$. Soit E un objet de \mathcal{T} . Alors E est positif (resp. négatif) si et seulement si $f_i(E)$ est positif (resp. négatif) pour tout i .

Démonstration. — On traite uniquement le cas positif (le cas négatif en découle par dualité). Il existe un triangle distingué :

$$E_{\geq 0} \longrightarrow E \longrightarrow E_{< 0} \longrightarrow$$

avec $E_{\geq 0}$ positif et $E_{< 0}$ strictement négatif. L'objet E est donc positif si $E_{< 0}$ est nul. La famille des f_i étant conservative, il suffira de montrer que les $f_i(E_{< 0})$ sont nuls. Puisque f_i est t -exact $f_i(E_{\geq 0})$ est positif et $f_i(E_{< 0})$ est strictement négatif. Il vient que :

$$f_i(E_{\geq 0}) \longrightarrow f_i(E) \longrightarrow f_i(E_{< 0}) \longrightarrow$$

est l'unique triangle distingué ayant pour sommets respectivement : un objet positif, $f_i(E)$ et un objet strictement négatif. Comme $f_i(E)$ est positif, on a forcément $f_i(E_{<0}) = 0$. \square

Les deux lemmes qui suivent donnent des critères de t -exactitudes pour les foncteurs. Ils seront utilisés à plusieurs reprises dans la suite.

Lemme 2.1.77. — *Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées munies chacune d'une t -structure. Alors :*

- *Supposons que f admet un adjoint à droite f_d qui est t -négatif. Alors f est t -positif.*
- *Supposons que f admet un adjoint à gauche f_g qui est t -positif. Alors f est t -négatif.*

Démonstration. — Les deux propriétés à démontrer sont duales. On s'intéressera donc uniquement à la première. Soit P un objet t -positif de \mathcal{T} . Pour montrer que $f(P)$ reste t -positif, il suffit de prouver que pour tout objet strictement t -négatif N de \mathcal{T}' le groupe $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}'}(f(P), N)$ est nul. Par adjonction ce groupe est isomorphe à $\mathrm{hom}_{\mathcal{T}}(P, f_d(N))$. Comme f_d est t -négatif, l'objet $f_d(N)$ est strictement t -négatif. D'où l'annulation recherchée. \square

Lemme 2.1.78. — *Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. On suppose que \mathcal{T} admet les petites sommes et que f commute aux petites sommes. Supposons également que \mathcal{T}' est munie d'une t -structure. Soit \underline{G} un ensemble d'objets compacts de \mathcal{T} et munissons \mathcal{T} de la t -structure engendrée par \underline{G} . Si pour tout A dans \underline{G} , l'objet $f(A)$ est t -positif, alors le foncteur f est t -positif.*

Démonstration. — Notons \mathcal{D} la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} ayant pour classe d'objets $f^{-1}\mathrm{Ob}(\mathcal{T}'_{\geq 0})$. Il s'agit de montrer que $\ll \underline{G} \gg_+ = \mathcal{T}_{\geq 0} \subset \mathcal{D}$. Il suffirait donc de vérifier les points :

1. $\underline{G} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$,
2. \mathcal{D} est stable par petites sommes,
3. \mathcal{D} est suspendue.

Le premier point est dans les hypothèses de l'énoncé. Pour le second point, on se donne une petite famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objets dans \mathcal{D} . Comme f commute aux petites sommes, on voit que $f(\oplus_i A_i)$ représente la somme directe des $f(A_i)$. En particulier :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{T}'}(f(\oplus_i A_i), N) = \prod_i \mathrm{hom}_{\mathcal{T}'}(f(A_i), N) = 0$$

pour tout objet strictement t -négatif N . Ceci montre que $f(\oplus_i A_i)$ est positif et donc $\oplus_i A_i$ est dans \mathcal{D} . Pour le troisième point, on choisit deux objets A et B dans \mathcal{D} et deux triangles distingués dans \mathcal{T} :

$$A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow \quad \text{et} \quad A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow$$

Pour voir que E et N sont dans \mathcal{D} , il suffit de montrer que $f(E)$ et $f(C)$ sont t -positifs. On applique alors f à nos deux triangles :

$$f(A) \longrightarrow f(E) \longrightarrow f(B) \longrightarrow \quad \text{et} \quad f(A) \longrightarrow f(B) \longrightarrow f(C) \longrightarrow$$

La sous-catégorie $\mathcal{T}'_{\geq 0}$ étant suspendue et les objets $f(A)$ et $f(B)$ t -positifs, on a immédiatement le résultat recherché. \square

2.1.4. Catégories monoïdales, foncteurs pseudo-monoïdaux, modules et projecteurs. — Dans cette sous-section, on étudie les catégories monoïdales du point de vue fonctoriel. Ainsi, on est intéressé par les foncteurs pseudo-monoïdaux et pseudo-comonoïdaux, mais aussi par des foncteurs munis d'un accouplement avec un foncteur pseudo-monoïdal fixé. On mettra surtout l'accent sur les structures déduites par passage aux foncteurs adjoints à droite ou à gauche. On commence par un petit rappel sur les catégories monoïdales.

2.1.4.1. Quelques rappels. — On rappelle brièvement la définition d'une catégorie monoïdale. Pour plus de précisions le lecteur pourra consulter [Mac63] :

Définition 2.1.79

1- Une catégorie monoïdale est un triplet $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ avec :

- \mathcal{C} une catégorie,
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur covariant,
- $\sigma : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C)$ une famille d'isomorphismes naturels en $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^3$.

Les isomorphismes σ sont appelés les isomorphismes d'associativité. Ils vérifient certains axiomes dont celui du pentagone affirmant que deux isomorphismes entre les objets $(A \otimes B) \otimes (C \otimes D)$ et $((A \otimes B) \otimes C) \otimes D$ construits à partir des isomorphismes d'associativité (et de leurs inverses) sont égaux entre eux.

2- Une catégorie monoïdale symétrique, est un quadruplet $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$ avec :

- $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ une catégorie monoïdale,
- $\tau : A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A$ une famille d'isomorphismes naturels en $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$.

Les isomorphismes τ sont appelés les isomorphismes de commutativité. Ils vérifient certains axiomes dont l'égalité $\tau \circ \tau = \text{id}$. Des axiomes supplémentaires sont imposés pour décrire les compatibilités entre les isomorphismes d'associativité et de commutativité.

Remarque 2.1.80. — Les définitions exactes d'une catégorie monoïdale et d'une catégorie monoïdale symétrique et plus précisément les axiomes vérifiés par les isomorphismes d'associativité et de commutativité ne seront utilisés nulle part dans la théorie générale développée dans cette sous-section ou dans la section 2.3. Toutefois,

ces axiomes sont importants dans la cas d'une catégorie monoïdale symétrique pour construire une action du groupe symétrique Σ_n sur les objets de la forme $A^{\otimes n}$.

Certains auteurs supposent qu'une catégorie monoïdale possède par définition un objet unité. Nous avons choisi de supposer que l'objet unité est une donnée supplémentaire :

Définition 2.1.81

1- Soit $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ une catégorie monoïdale. Un objet unité de \mathcal{C} est un triplet $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$ avec :

- $\mathbb{1}$ un objet de \mathcal{C} ,
- $u_g : \mathbb{1} \otimes A \xrightarrow{\sim} A$ et $u_d : A \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\sim} A$ des isomorphismes naturels en $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Les isomorphismes u_g et u_d sont appelés les isomorphismes d'unité à gauche et à droite respectivement. Ils doivent vérifier certaines conditions. Notons par exemple que les deux isomorphismes $u_g, u_d : \mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ coïncident.

2- Soit $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$ une catégorie monoïdale symétrique. Un objet unité de \mathcal{C} est un objet unité $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$ de la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ vérifiant certaines compatibilités supplémentaires avec les isomorphismes de commutation. Notons par exemple que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} \otimes A & \xrightarrow{\tau} & A \otimes \mathbb{1} \\ & \searrow u_g & \swarrow u_d \\ & A & \end{array}$$

est commutatif. En particulier, les isomorphismes u_g et u_d se déduisent l'un de l'autre.

3- Une catégorie monoïdale (resp. monoïdale symétrique) munie d'un objet unité est appelée une catégorie monoïdale unitaire (resp. monoïdale symétrique unitaire).

Remarque 2.1.82. — On évitera, lorsque c'est possible, de nommer les isomorphismes d'associativité, de commutativité ou d'unité. Ainsi on dira : soit (\mathcal{C}, \otimes) (resp. $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$) une catégorie monoïdale (resp. catégorie monoïdale unitaire).

Remarque 2.1.83

1- Soit $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ une catégorie monoïdale. On peut munir la catégorie opposée \mathcal{C}^{op} d'une structure de catégorie monoïdale. En effet, le foncteur \otimes induit un foncteur covariant :

$$\otimes^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$$

et on prend pour isomorphismes d'associativité les flèches $(\sigma^{-1})^{\text{op}}$. On appellera $(\mathcal{C}^{\text{op}}, \otimes^{\text{op}}, (\sigma^{-1})^{\text{op}})$ la catégorie monoïdale opposée de $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$.

D'autre part, notons $per : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ le foncteur de permutation des facteurs : $per(A, B) = (B, A)$ pour $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$. On définit alors un foncteur :

$$\otimes^\circ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

par $\otimes^\circ = \otimes \circ per$. Ainsi pour $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$, on a : $A \otimes^\circ B = B \otimes A$. Pour un triplet $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^3$ on définit un isomorphisme :

$$\sigma^\circ : (A \otimes^\circ B) \otimes^\circ C \xrightarrow{\sim} A \otimes^\circ (B \otimes^\circ C)$$

en prenant $\sigma^{-1} : C \otimes (B \otimes A) \longrightarrow (C \otimes B) \otimes A$. On obtient ainsi une nouvelle catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes^\circ, \sigma^\circ)$ qu'on appellera la catégorie monoïdale \otimes -opposée de $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$.

Un objet unité $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$ de $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ induit des objets unités $(\mathbb{1}, (u_g^{-1})^{\text{op}}, (u_d^{-1})^{\text{op}})$ et $(\mathbb{1}, u_d, u_g)$ des catégories monoïdales $(\mathcal{C}^{\text{op}}, \otimes^{\text{op}})$ et $(\mathcal{C}, \otimes^\circ)$.

2- Lorsque $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$ est une catégorie monoïdale symétrique, les quadruplets

$$(\mathcal{C}^{\text{op}}, \otimes^{\text{op}}, (\sigma^{-1})^{\text{op}}, \tau^{\text{op}}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{C}^\circ, \otimes^\circ, \sigma^\circ, \tau^\circ)$$

(avec $\tau^\circ = \tau^{-1}$) sont des catégories monoïdales symétriques qu'on appellera respectivement la catégorie monoïdale symétrique opposée et \otimes -opposée de $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$. Il est clair que les isomorphismes de commutativité fournissent un isomorphisme de catégories monoïdales entre (\mathcal{C}, \otimes) et son \otimes -opposée. Lorsque $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$ est un objet unité de $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$ les formules ci-dessus définissent des objets unités des catégories monoïdales symétriques opposée et \otimes -opposée.

3- On peut voir une catégorie monoïdale comme une 2-catégorie (non forcément stricte ou unitaire) ayant un seul objet. Ainsi, les catégories monoïdales opposée et \otimes -opposée correspondent aux 2-catégories 2-opposée et 1-opposée respectivement.

Le résultat suivant est bien connu :

Lemme 2.1.84. — Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ une catégorie monoïdale et $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$ un objet unité de \mathcal{C} . Notons $\text{End}(\mathbb{1})$ l'ensemble des endomorphismes de l'objet $\mathbb{1}$. Cet ensemble est muni de deux lois de composition à savoir :

- Le produit de composition \circ induit par la composition des flèches de \mathcal{C} ,
- Le produit tensoriel \otimes , qui à un couple $(a, b) \in \text{End}(\mathbb{1})^2$ associe la composée :

$$\mathbb{1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{a \otimes b} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}$$

Ces deux lois de composition coïncident et sont commutatives.

Démonstration. — En utilisant le fait que \otimes est un foncteur, on voit immédiatement qu'on a dans $\text{End}(\mathbb{1})$ la relation :

$$(a \circ a') \otimes (b \circ b') = (a \otimes b) \circ (a' \otimes b'), \quad \forall (a, a', b, b') \in \text{End}(\mathbb{1})^4$$

De plus, l'identité de $\mathbb{1}$ est neutre pour les deux lois de composition. On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a \circ b &= (a \otimes \text{id}_{\mathbb{1}}) \circ (\text{id}_{\mathbb{1}} \otimes b) = (a \circ \text{id}_{\mathbb{1}}) \otimes (\text{id}_{\mathbb{1}} \circ b) = a \otimes b \\ a \circ b &= (\text{id}_{\mathbb{1}} \otimes a) \circ (b \otimes \text{id}_{\mathbb{1}}) = (\text{id}_{\mathbb{1}} \circ b) \otimes (a \circ \text{id}_{\mathbb{1}}) = b \otimes a \end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme. \square

2.1.4.2. Foncteurs entre catégories monoïdales. — On passe maintenant aux 1-morphismes et 2-morphismes entre catégories monoïdales. Plusieurs définitions sont possibles. La plus naturelle est probablement celle des foncteurs monoïdaux puisqu'elle correspond aux 2-foncteurs non forcément stricts entre 2-catégories non forcément strictes (avec un seul objet). Malheureusement pour les applications en vue, cette notion est insuffisante. On utilisera la notion plus faible de foncteurs pseudo-monoïdaux. Pour plus de symétrie, on considérera également la notion de foncteurs pseudo-comonoïdaux :

Définition 2.1.85

1- Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ et $(\mathcal{C}', \otimes', \sigma')$ deux catégories monoïdales. Un foncteur pseudo-monoïdal de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' est un couple (f, a) formé :

- d'un foncteur $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$,
- de morphismes $a : f(A) \otimes' f(B) \longrightarrow f(A \otimes B)$ naturels en $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$, tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (f(A) \otimes' f(B)) \otimes' f(C) & \longrightarrow & f(A \otimes B) \otimes' f(C) & \longrightarrow & f((A \otimes B) \otimes C) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f(A) \otimes' (f(B) \otimes' f(C)) & \longrightarrow & f(A) \otimes' f(B \otimes C) & \longrightarrow & f(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

soit commutatif pour tout $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^3$.

Les morphismes a sont parfois appelés les morphismes d'accouplement de f . Lorsqu'ils sont inversibles, on dit que (f, a) est monoïdal.

Une transformation naturelle entre deux foncteurs pseudo-monoïdaux (f_1, a_1) et (f_2, a_2) est une transformation naturelle $f_1 \longrightarrow f_2$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f_1(A) \otimes f_1(B) & \longrightarrow & f_2(A) \otimes f_2(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_1(A \otimes B) & \longrightarrow & f_2(A \otimes B) \end{array}$$

pour tout $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$.

2- Gardons les notations du **1**, et supposons donnés des objets unités $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$ et $(\mathbb{1}', u'_g, u'_d)$ de \mathcal{C} et \mathcal{C}' respectivement. Un foncteur pseudo-monoïdal pseudo-unitaire de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' est un triplet (f, a, e) tel que :

- (f, a) est un foncteur pseudo-monoïdal de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' ,

– $e : \mathbb{1}' \longrightarrow f(\mathbb{1})$ est une flèche compatible avec les isomorphismes d'unité à droite et à gauche, i.e., tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{1}' \otimes' f(A) & \xrightarrow{e} & f(\mathbb{1}) \otimes' f(A) & \longrightarrow & f(\mathbb{1} \otimes A) \\ u'_g \downarrow \sim & & & & \sim \downarrow u_g \\ f(A) & \xlongequal{\quad} & & & f(A) \end{array}$$

ainsi que son analogue pour u_d et u'_d .

Lorsque les morphismes a et e sont inversibles, on dit que (f, a, e) est un foncteur monoïdal unitaire.

Une transformation naturelle entre deux foncteurs pseudo-monoïdaux pseudo-unitaires (f_1, a_1, e_1) et (f_2, a_2, e_2) est une transformation naturelle entre les foncteurs pseudo-monoïdaux (f_1, a_1) et (f_2, a_2) tel que en plus le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1}' & \xrightarrow{e_1} & f_1(\mathbb{1}) \\ \parallel & & \downarrow \\ \mathbb{1}' & \xrightarrow{e_2} & f_2(\mathbb{1}) \end{array}$$

Lorsqu'on travaille avec des catégories monoïdales symétriques on impose également une compatibilité avec les isomorphismes de commutativité :

Définition 2.1.86. — Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma, \tau)$ et $(\mathcal{C}', \otimes', \sigma', \tau')$ deux catégories monoïdales symétriques (resp. monoïdales symétriques unitaires). Un foncteur pseudo-monoïdal symétrique (resp. pseudo-monoïdal symétrique et pseudo-unitaire) de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' est un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal et pseudo-unitaire) (f, a) tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} f(A) \otimes' f(B) & \xrightarrow{a} & f(A \otimes B) \\ \tau \downarrow \sim & & \sim \downarrow \tau \\ f(B) \otimes' f(A) & \longrightarrow & f(B \otimes A) \end{array}$$

soit commutatif pour tout $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$.

Une transformation naturelle entre deux foncteurs pseudo-monoïdaux symétriques (resp. pseudo-monoïdaux symétriques et pseudo-unitaires) est simplement une transformation naturelle entre les foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. pseudo-monoïdaux et pseudo-unitaires) sous-jacents.

Un foncteur pseudo-monoïdal $(f, a) : (\mathcal{C}, \otimes) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes')$ induit un foncteur pseudo-monoïdal sur les catégories \otimes -opposées $(f, a) : (\mathcal{C}, \otimes^\circ) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes'^\circ)$. Lorsqu'on passe aux catégories opposées, le foncteur (f, a) n'est plus pseudo-monoïdal. En effet, le morphisme d'accouplement est dans le mauvais sens et induit plutôt une structure de foncteur pseudo-comonoïdal.

Définition 2.1.87

1- On obtient la notion de foncteur pseudo-comonoïdal à partir de celle de foncteur pseudo-monoïdal en passant aux catégories opposées. Ainsi, si $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ et $(\mathcal{C}', \otimes', \sigma')$ sont deux catégories monoïdales, un foncteur pseudo-comonoïdal de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' est un couple (f, a) formé :

- d'un foncteur $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$,
- de morphismes $a : f(A \otimes B) \longrightarrow f(A) \otimes' f(B)$ naturels en $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$, compatibles de la manière évidente avec les isomorphismes d'associativité.

Les morphismes a sont parfois appelés les morphismes de coaccouplement de f . Lorsqu'ils sont inversibles, on dit que (f, a) est comonoïdal.

Une transformation naturelle entre deux foncteurs pseudo-comonoïdaux (f_1, a_1) et (f_2, a_2) est une transformation naturelle $f_1 \longrightarrow f_2$ tel que les diagrammes suivant soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} f_1(A \otimes B) & \longrightarrow & f_2(A \otimes B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_1(A) \otimes f_1(B) & \longrightarrow & f_2(A) \otimes f_2(B) \end{array}$$

Pour tout $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$.

2- On obtient la notion de foncteur pseudo-comonoïdal pseudo-counitaire (resp. foncteur comonoïdal counitaire) en passant aux catégories opposées. De même, on a également la notion de foncteur pseudo-comonoïdal symétrique entre des catégories monoïdales symétriques. Les détails seront laissés aux lecteurs.

Remarque 2.1.88. — Si $(f, a) : (\mathcal{C}, \otimes) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes')$ est un foncteur monoïdal, alors (f, a^{-1}) est un foncteur comonoïdal.

Remarque 2.1.89. — Il va de soi qu'on peut composer les foncteurs pseudo-monoïdaux, (resp. pseudo-comonoïdaux) ainsi que les transformations naturelles entre eux. Par exemple, étant données trois catégories monoïdales (\mathcal{C}, \otimes) , (\mathcal{C}', \otimes') et $(\mathcal{C}'', \otimes'')$ ainsi que deux foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. pseudo-comonoïdaux) $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et $(f', a') : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ leur composé est $(f' \circ f, a'')$ avec a'' l'accouplement composé :

$$f'f(A) \otimes f'f(B) \xrightarrow{a'} f'(f(A) \otimes f(B)) \xrightarrow{a} f'f(A \otimes B)$$

(resp. le coaccouplement composé :

$$f'f(A \otimes B) \xrightarrow{a} f'(f(A) \otimes' f(B)) \xrightarrow{a'} (f'f(A) \otimes'' f'f(B))$$

pour $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$.

On vérifie aisément que les catégories monoïdales avec les foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. pseudo-comonoïdaux) et leurs transformations naturelles forment

une 2-catégorie stricte : (\mathbf{pMono}) (resp. (\mathbf{pcMono})). On a également la sous-2-catégorie (\mathbf{Mono}) (resp. (\mathbf{pMono})) où l'on prend uniquement les foncteurs monoïdaux (resp. comonoïdaux). L'association $(f, a) \rightsquigarrow (f, a^{-1})$ définit un isomorphisme entre \mathbf{Mono} et \mathbf{pMono} .

L'adjonction des foncteurs transforme les foncteurs pseudo-monoïdaux en foncteurs pseudo-comonoïdaux et vice versa :

Proposition 2.1.90. — *Soient deux catégories monoïdales (resp. monoïdales et unitaires) (\mathcal{C}, \otimes) et (\mathcal{C}', \otimes') (resp. avec objets unités $\mathbf{1}$ et $\mathbf{1}'$ respectivement).*

1- *Soit (f, a) (resp. (f, a, e)) un foncteur pseudo-comonoïdal (resp. pseudo-comonoïdal et pseudo-counitaire) : $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$. Supposons que f admet un adjoint à droite g . On définit des morphismes :*

$$b : g(A') \otimes g(B') \longrightarrow g(A' \otimes' B')$$

naturels en $(A', B') \in \text{Ob}(\mathcal{C}')^2$ par la composée :

$$g(A') \otimes g(B') \longrightarrow gf(g(A') \otimes g(B')) \xrightarrow{a} g(fg(A') \otimes' fg(B')) \longrightarrow g(A' \otimes' B')$$

(resp. ainsi qu'un morphisme $n : \mathbf{1} \longrightarrow g(\mathbf{1}')$ par adjonction à partir de $f(\mathbf{1}) \longrightarrow \mathbf{1}'$). Le couple (g, b) (resp. (g, b, n)) est alors un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal et pseudo-unitaire). De plus, cette construction est fonctorielle contravariante pour les 2-morphismes de foncteurs pseudo-comonoïdaux (resp. pseudo-comonoïdaux et pseudo-counitaires).

2- *Soit (l, a) (resp. (l, a, e)) un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal et pseudo-unitaire) : $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$. Supposons que l admet un adjoint à gauche k . On définit des morphismes :*

$$b : k(A' \otimes' B') \longrightarrow k(A') \otimes k(B')$$

naturels en $(A', B') \in \text{Ob}(\mathcal{C}')^2$ par la composée :

$$k(A' \otimes' B') \longrightarrow k(lk(A') \otimes' lk(B')) \xrightarrow{a} kl(l(A') \otimes l(B')) \longrightarrow l(A') \otimes l(B')$$

(resp. ainsi qu'un morphisme $n : g(\mathbf{1}') \longrightarrow \mathbf{1}$ par adjonction à partir de $\mathbf{1}' \longrightarrow f(\mathbf{1})$). Le couple (g, b) (resp. (g, b, n)) est alors un foncteur pseudo-comonoïdal (resp. pseudo-comonoïdal et pseudo-counitaire). De plus, cette construction est fonctorielle contravariante pour les 2-morphismes de foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. pseudo-monoïdaux et pseudo-unitaires).

3- *Les variantes symétriques de 1 et 2 sont également vraies.*

Démonstration. — Les deux parties **1** et **2** sont échangées par la dualité. Plus précisément, l'énoncé **2** pour $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est l'énoncé **1** pour le foncteur induit entre les catégories monoïdales opposées $f^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}'^{\text{op}}$. Il suffit de prouver la première partie.

Dans le langage des diagrammes planaires, la transformation naturelle b s'écrit comme la composée de :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{g \times g} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \\
 \searrow & & \downarrow f \times f & \swarrow a & \downarrow f \\
 & & \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}' \\
 & & & & \downarrow g \\
 & & & & \mathcal{C}
 \end{array}$$

Ainsi, b n'est rien d'autre que le morphisme obtenu par adjonction à partir de la face carrée du coaccouplement de f :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \\
 \downarrow f \times f & \swarrow a & \downarrow f \\
 \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}'
 \end{array}$$

La compatibilité de b avec les isomorphismes d'associativité, s'exprime en disant que les composées des deux diagrammes planaires suivants :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \times \mathcal{C} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C} \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \\
 \uparrow (g \times g) \times g & \nearrow g \times (g \times g) & \uparrow & \swarrow g \times g & \uparrow & \swarrow g & \uparrow \\
 (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') \times \mathcal{C}' & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C}' \times (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{C} \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \\
 \uparrow g \times (g \times g) & \nearrow g \times g & \uparrow & \swarrow g & \uparrow \\
 \mathcal{C}' \times (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}'
 \end{array}$$

sont égales modulo les isomorphismes d'associativité. En utilisant la compatibilité avec la composition horizontale (voir la proposition 1.1.12), on se ramène à montrer

que les composées suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \times \mathcal{C} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C} \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \\
 \downarrow (f \times f) \times f & & \downarrow f \times (f \times f) & \swarrow a & \downarrow f \times f & \swarrow a & \downarrow f \\
 (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') \times \mathcal{C}' & \xlongequal{\quad} & \mathcal{C}' \times (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}' \\
 & & & & & & \\
 \mathcal{C} \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} & & \\
 \downarrow f \times (f \times f) & \swarrow a & \downarrow f \times f & \swarrow a & \downarrow f & & \\
 \mathcal{C}' \times (\mathcal{C}' \times \mathcal{C}') & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' & \xrightarrow{\otimes'} & \mathcal{C}' & &
 \end{array}$$

coïncident modulo les isomorphismes d'associativité. Ceci est clair par la définition même d'un foncteur pseudo-comonoïdal. Le même raisonnement s'applique pour la preuve de la compatibilité de b avec les isomorphismes de commutations.

La fonctorialité de cette construction par rapport aux transformations naturelles entre foncteurs pseudo-monoïdaux est évidente. Les vérifications concernant les objets unités sont également faciles. \square

Corollaire 2.1.91. — Soit (f, a) un 1-morphisme dans la 2-catégorie \mathbf{pMono} . On suppose que (f, a) est monoïdal et que le foncteur sous-jacent f admet un adjoint à droite. Alors le 1-morphisme (f, a) admet un adjoint à droite dans \mathbf{pMono} .

Démonstration. — Le foncteur $(f, a) : (\mathcal{C}, \otimes) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes')$ étant monoïdal, le couple (f, a^{-1}) est un foncteur comonoïdal. Par la proposition 2.1.90, l'adjoint à droite g est naturellement un foncteur pseudo-comonoïdal. Pour montrer le lemme, il suffit de vérifier que les morphismes d'unité et de counité sont des transformations de foncteurs pseudo-monoïdaux.

On traite d'abord le morphisme d'unité. Pour $(A, B) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})^2$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 A \otimes B & \longrightarrow & gf(A \otimes B) & \xrightarrow{a^{-1}} & g(f(A) \otimes' f(B)) & \xrightarrow{a} & gf(A \otimes B) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 gf(A) \otimes gf(B) & \longrightarrow & gf(gf(A) \otimes gf(B)) & \xrightarrow{a^{-1}} & g(fgf(A) \otimes' fgf(B)) & \longrightarrow & g(f(A) \otimes' f(B)) \xrightarrow{a} gf(A \otimes B)
 \end{array}$$

La composée des flèches horizontales inférieures du diagramme n'est autre que l'accouplement du foncteur pseudo-monoïdal $g \circ f$. Ce qui prouve que $\text{id} \longrightarrow gf$ est bien compatible avec l'accouplement.

De même, pour le morphisme de counité, on utilise le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 fg(A') \otimes' fg(B') & \xrightarrow{a} & fg(A') \otimes g(B') & \rightarrow & fgf(g(A') \otimes g(B')) & \xrightarrow{a^{-1}} & fg(fg(A') \otimes' fg(B')) \rightarrow fg(A' \otimes' B') \\
 & \searrow & \searrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & fg(A') \otimes' fg(B') & \xrightarrow{a} & fg(A') \otimes g(B') & \xrightarrow{a^{-1}} & fg(A') \otimes' fg(B') \longrightarrow A' \otimes B' \\
 & & & \searrow & \searrow & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

pour $(A', B') \in \text{Ob}(\mathcal{C}')^2$. □

Remarque 2.1.92. — On a vu que lorsqu'on prend l'adjoint à gauche (resp. à droite) d'un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-comonoïdal), on obtient un foncteur pseudo-comonoïdal (resp. pseudo-monoïdal). En fait, il est possible de raffiner la structure mise sur l'adjoint en une structure de projecteur (resp. coprojecteur). Concentrons-nous uniquement sur le premier cas. Soient $(l, a) : (\mathcal{C}, \otimes) \longrightarrow (\mathcal{C}', \otimes')$ un foncteur pseudo-monoïdal et k un adjoint à gauche de l . On définit une transformation naturelle : $k(l(A) \otimes' B') \longrightarrow A \otimes k(B')$ par la composée :

$$k(l(A) \otimes' B') \longrightarrow k(l(A) \otimes' lk(B')) \longrightarrow kl(A \otimes k(B')) \longrightarrow A \otimes k(B')$$

Cette structure est plus fine que la structure de pseudo-comodule de k puisqu'elle permet de la retrouver en prenant simplement la composition :

$$k(A' \otimes' B') \longrightarrow k(lk(A') \otimes' B') \longrightarrow k(A') \otimes k(B')$$

La notion de projecteurs et coprojecteurs sera étudiée en détails dans la suite. Pour des raisons qui seront claires dans la section 2.3, il est important d'étendre la construction qu'on vient d'esquisser au cadre plus général des modules et comodules sur des foncteurs pseudo-monoïdaux et pseudo-comonoïdaux.

2.1.4.3. Modules et projecteurs entre catégories monoïdales. — La notion d'un foncteur pseudo-monoïdal ressemble jusqu'à un certain point à la notion d'algèbre. Dans ce paragraphe, on poussera cette ressemblance un cran plus loin en introduisant la notion de modules sur un foncteur pseudo-monoïdal.

Définition 2.1.93. — Soient (\mathcal{C}, \otimes) et (\mathcal{C}', \otimes') deux catégories monoïdales (resp. monoïdales unitaires avec objets unités $\mathbb{1}$ et $\mathbb{1}'$ respectivement).

1- Soit (f, a) (resp. (f, a, e)) un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal et pseudo-unitaire). On appelle f -module (resp. f -module unitaire) à gauche, un couple (l, b) avec :

- $l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur,
- $b : f(A) \otimes' l(B) \longrightarrow l(A \otimes B)$ des morphismes naturels en $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$,

tel que pour tout $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathbb{C})^3$ le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (f(A) \otimes' f(B)) \otimes' l(C) & \xrightarrow{a} & f(A \otimes B) \otimes' l(C) & \xrightarrow{b} & l((A \otimes B) \otimes C) \\ \sigma' \downarrow & & & & \downarrow \sigma \\ f(A) \otimes' (f(B) \otimes l(C)) & \xrightarrow{b} & f(A) \otimes' l(B \otimes C) & \xrightarrow{b} & l(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

soit commutatif (resp. et tel que la composée suivante :

$$l(-) \xrightarrow{u_g'^{-1}} \mathbb{1}' \otimes l(-) \longrightarrow f(\mathbb{1}) \otimes l(-) \xrightarrow{b} l(\mathbb{1} \otimes -) \xrightarrow{u_g} l(-)$$

soit égale à l'identité du foncteur l).

On a la notion \otimes -duale de f -module (resp. f -module unitaire) à droite. Un morphisme de f -modules de (l, b) vers (l', b') est une transformation naturelle de l vers b compatible au sens évident avec les morphismes b et b' .

2- Soit (g, a) (resp. (g, a, e)) un foncteur pseudo-comonoïdal (resp. pseudo-comonoïdal et pseudo-counitaire). On appelle g -comodule (resp. g -comodule counitaire) à gauche, un couple (k, c) avec :

- $k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}'$ un foncteur,

- $c : k(A \otimes B) \longrightarrow g(A) \otimes' k(B)$ des morphismes naturels en $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbb{C})^2$, tel que les conditions duales du **1** soient vérifiées.

On a également la notion de g -comodule (resp. g -comodule counitaire) à droite. Un morphisme de g -comodules de (k, c) vers (k', c') est une transformation naturelle de k vers k' compatible au sens évident avec les morphismes c et c' .

Définition 2.1.94

1- Un module à gauche $[f, l]$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C}' est un quadruplet (f, l, a, b) avec (f, a) un foncteur pseudo-monoïdal et (l, b) un f -module à gauche. La catégorie des modules à gauche de \mathbb{C} dans \mathbb{C}' est notée $\text{Mod}_g(\mathbb{C}, \mathbb{C}')$. Une flèche de $\text{Mod}_g(\mathbb{C}, \mathbb{C}')$ est un couple $(u, v) : (f_1, l_1, a_1, b_1) \longrightarrow (f_2, l_2, a_2, b_2)$ avec $u : f_1 \longrightarrow f_2$ une transformation naturelle monoïdale et $v : l_1 \longrightarrow l_2$ une transformation naturelle tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} f_1(A) \otimes' l_1(B) & \longrightarrow & l_1(A \otimes B) \\ u \otimes' v \downarrow & & \downarrow v \\ f_2(A) \otimes' l_2(B) & \longrightarrow & l_2(A \otimes B) \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbb{C})^2$.

Étant donnée une troisième catégorie monoïdale $(\mathbb{C}'', \otimes'')$, il existe un foncteur de composition :

$$\text{Mod}_g(\mathbb{C}', \mathbb{C}'') \times \text{Mod}_g(\mathbb{C}, \mathbb{C}') \longrightarrow \text{Mod}_g(\mathbb{C}, \mathbb{C}'')$$

qui associe à $[f', l'] = (f', l', a', b')$ et $[f, l] = (f, l, a, b)$ le quadruplet $[f' \circ f, l' \circ l] = (f' \circ f, l' \circ l, a'', b'')$ avec $(f' \circ f, a'')$ le foncteur pseudo-monoïdal composé de f et f' (voir la remarque 2.1.89) et b'' la composée :

$$f' \circ f(A) \otimes l'(B) \longrightarrow l'(f(A) \otimes l(A)) \longrightarrow l' \circ l(A)$$

On obtient ainsi une 2-catégorie dont les objets sont les catégories monoïdales, et dont les 1-morphismes sont les modules à gauche. On appellera (\mathfrak{Mod}_g) cette 2-catégorie. On a un 2-foncteur d'oubli 1-covariant et 2-covariant évident :

$$\mathfrak{Mod}_g \longrightarrow \mathfrak{pMono}$$

qui associe à un quadruplet (f, l, a, b) le foncteur pseudo-monoïdal (f, a) .

2- On a la notion duale de comodule à gauche de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' . On forme également la 2-catégorie stricte des comodules \mathfrak{cMod}_g . Les notions \otimes -duales, de modules à droite et de comodules à droite s'organisent également en deux 2-catégories strictes \mathfrak{Mod}_d et \mathfrak{cMod}_d .

Définition 2.1.95

1- Gardons les notations de la définition 2.1.93. Un f -bimodule est un triplet (l, b_g, b_d) tel que (l, b_g) est un f -module à gauche et (l, b_d) un f -module à droite et tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} (f(A) \otimes' l(B)) \otimes' f(C) & \xrightarrow{b_g} & l(A \otimes B) \otimes' f(C) & \xrightarrow{b_d} & l((A \otimes B) \otimes C) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ f(A) \otimes' (l(B) \otimes' f(C)) & \xrightarrow{b_d} & f(A) \otimes' l(B \otimes C) & \xrightarrow{b_g} & l(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

pour tout $(A, B, C) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})^3$. On définit également la notion de bimodule de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' ainsi que la 2-catégorie des bimodules \mathfrak{Mod} .

2- On a également la notion duale de g -bicomodules et de bicomodules de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' . On notera \mathfrak{cMod} la 2-catégorie des bicomodules.

Remarque 2.1.96. — Soit f un foncteur pseudo-monoïdal. L'exemple le plus simple de f -module est le foncteur f lui-même. Remarquons que f est même un f -bimodule. Il va sans dire que si \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont symétriques et que f est également symétrique, un module à droite est immédiatement un module à gauche et même un bimodule. Ceci s'applique aussi pour les comodules.

Proposition 2.1.97. — Soient (\mathcal{C}, \otimes) et (\mathcal{C}', \otimes') deux catégories monoïdales et $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur pseudo-monoïdal.

1- On suppose donné un f -module à gauche (l, b) et un adjoint à gauche k du foncteur l . On définit un morphisme $c : k(f(A) \otimes' B') \longrightarrow A \otimes k(B')$, naturel

en $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $B' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, par la composée :

$$k(f(A) \otimes' B') \longrightarrow k(f(A) \otimes' lk(B')) \xrightarrow{b} kl(A \otimes k(B')) \longrightarrow A \otimes k(B')$$

Alors, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} k(f(A) \otimes' (f(B) \otimes' C')) & \longrightarrow & A \otimes k(f(B) \otimes' C') & \longrightarrow & A \otimes (B \otimes k(C')) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ k((f(A) \otimes' f(B)) \otimes' C') & \longrightarrow & k(f(A \otimes B) \otimes' C') & \longrightarrow & (A \otimes B) \otimes k(C') \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A, B, C') \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2 \times \text{Ob}(\mathcal{C}')$.

2- On suppose donné un f -bimodule (l, b_g, b_d) ainsi qu'un adjoint à gauche k de l . Le module à gauche (l, b_g) et le module à droite (l, b_d) induisent par **1** les deux transformations :

$$c_g : k(f(A) \otimes' B') \longrightarrow A \otimes k(B') \quad \text{et} \quad c_d : k(A' \otimes' f(B)) \longrightarrow k(A') \otimes B$$

naturelles en $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2 \times \text{Ob}(\mathcal{C}')^2$. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} k(f(A) \otimes' (B' \otimes' f(C))) & \xrightarrow{c_g} & A \otimes k(B' \otimes' f(C)) & \xrightarrow{c_d} & A \otimes (k(B') \otimes C) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ k((f(A) \otimes' B') \otimes' f(C)) & \xrightarrow{c_d} & k(f(A) \otimes' B') \otimes C & \xrightarrow{c_g} & (A \otimes k(B')) \otimes C \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A, B', C) \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}') \times \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Démonstration. — Il est pratique de penser à un f -module (l, b) comme à une classe de faces carrées :

$$(168) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ l \downarrow & \nearrow_b & \downarrow l \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A) \otimes' -} & \mathcal{C}' \end{array}$$

paramétrée par les objets de \mathcal{C} . On voit alors immédiatement que les 2-morphismes c sont ceux obtenus à partir de la face (168) par les adjonctions (l, k) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ k \uparrow & \nwarrow^c & \uparrow k \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A) \otimes' -} & \mathcal{C}' \end{array}$$

Il s'agit de montrer que les composées des diagrammes planaires suivants :

$$(169) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{B \otimes -} & \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ \uparrow k & \lrcorner^c & \uparrow k & \lrcorner^c & \uparrow k \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(B) \otimes' -} & \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A) \otimes' -} & \mathcal{C}' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{(A \otimes B) \otimes -} & \mathcal{C} \\ \uparrow k & \lrcorner^c & \uparrow k \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A \otimes B) \otimes' -} & \mathcal{C}' \\ \uparrow a & & \\ (f(A) \otimes' f(B)) \otimes - & & \end{array}$$

sont égales modulo les morphismes de foncteurs :

$$A \otimes (B \otimes -) \simeq (A \otimes B) \otimes - \quad \text{et} \quad f(A) \otimes' (f(B) \otimes' -) \simeq (f(A) \otimes' f(B)) \otimes' -$$

Ces isomorphismes étant ceux induits par les isomorphismes d'associativité. Par la fonctorialité de la construction 1.1.9, on voit que la composée du second diagramme planaire de (169) coïncide avec le 2-morphisme obtenu par les adjonctions (k, l) à partir de la face carrée composée de :

$$(170) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{(A \otimes B) \otimes -} & \mathcal{C} \\ \downarrow l & \nearrow_b & \downarrow l \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A \otimes B) \otimes' -} & \mathcal{C}' \\ \uparrow a & & \\ (f(A) \otimes' f(B)) \otimes - & & \end{array}$$

De même, en utilisant la compatibilité de la construction 1.1.9 avec la composition horizontale des faces carrées (voir la proposition 1.1.12), on voit que la composée du premier diagramme planaire de (169) est la face carrée obtenue par les adjonctions (k, l) à partir de la face carrée composée de :

$$(171) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{B \otimes -} & \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ \downarrow l & \nearrow_b & \downarrow l & \nearrow_b & \downarrow l \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(B) \otimes' -} & \mathcal{C}' & \xrightarrow{f(A) \otimes' -} & \mathcal{C}' \end{array}$$

On se ramène ainsi à prouver que les composées des diagrammes planaires (170) et (171) sont égales modulo les isomorphismes d'associativités. Ceci découle immédiatement de la commutation du diagramme de la définition 2.1.93. La commutation du

diagramme de **1** est prouvée. La commutation du diagramme de **2** se démontre par la même méthode. Elle sera laissée en exercice pour le lecteur. \square

En passant aux catégories opposées, on obtient le résultat correspondant pour les comodules :

Proposition 2.1.98. — Soient (\mathcal{C}, \otimes) et (\mathcal{C}', \otimes') deux catégories monoïdales et $(g, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur pseudo-comonoïdal.

1- On suppose donné un g -comodule à gauche (k, b) tel que le foncteur k admet un adjoint à droite l . On définit un morphisme $c : A \otimes l(B') \longrightarrow l(g(A) \otimes' B')$, naturel en $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $B' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, par la composée :

$$A \otimes l(B') \longrightarrow lk(A \otimes l(B')) \xrightarrow{b} l(g(A) \otimes' kl(B')) \longrightarrow l(g(A) \otimes' B')$$

Alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes (B \otimes l(C')) & \longrightarrow & A \otimes l(g(B) \otimes' C') & \longrightarrow & l(g(A) \otimes' (g(B) \otimes' C')) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ (A \otimes B) \otimes l(C') & \longrightarrow & l(g(A \otimes B) \otimes' C') & \longrightarrow & l((g(A) \otimes' g(B)) \otimes' C') \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A, B, C') \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2 \times \text{Ob}(\mathcal{C}')$.

2- On suppose donné un g -bicomodule (k, b_g, b_d) ainsi qu'un adjoint à gauche l de k . Le comodule à gauche (l, b_g) et le comodule à droite (l, b_d) induisent par **1** les deux transformations :

$$c_g : A \otimes l(B') \longrightarrow l(g(A) \otimes' B') \quad \text{et} \quad c_d : l(A') \otimes B \longrightarrow l(A' \otimes' g(B))$$

naturelles en $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2 \times \text{Ob}(\mathcal{C}')^2$. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} A \otimes (l(B') \otimes C) & \xrightarrow{c_d} & A \otimes l(B' \otimes' g(C)) & \xrightarrow{c_g} & l(g(A) \otimes' (B' \otimes' g(C))) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ (A \otimes l(B')) \otimes C & \xrightarrow{c_g} & l(g(A) \otimes' B') \otimes C & \xrightarrow{c_d} & l((g(A) \otimes' B') \otimes' g(C)) \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A, B', C) \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}') \times \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Les propositions 2.1.97 et 2.1.98 motivent les définitions suivantes :

Définition 2.1.99. — Soient (\mathcal{C}, \otimes) et (\mathcal{C}', \otimes') deux catégories monoïdales.

1- Soit (f, a) un foncteur pseudo-monoïdal. On appelle f -projecteur à gauche un couple (k, c) avec :

- $k : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur,
- $c : k(f(A) \otimes' B') \longrightarrow A \otimes k(B')$ des morphismes naturels en $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $B' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$,

tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 k(f(A) \otimes' (f(B) \otimes' C')) & \longrightarrow & A \otimes k(f(B) \otimes' C') & \longrightarrow & A \otimes (B \otimes k(C')) \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 k((f(A) \otimes' f(B)) \otimes' C') & \longrightarrow & k(f(A \otimes B) \otimes' C') & \longrightarrow & (A \otimes B) \otimes k(C')
 \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A, B, C') \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2 \times \text{Ob}(\mathcal{C}')$.

On a la notion \otimes -duale de f -projecteur à droite. Un morphisme de f -projecteurs de (k, c) vers (k', c') est une transformation naturelle de k vers k' compatible au sens évident avec les morphismes b et b' .

2- Soit (g, a) un foncteur pseudo-comonoïdal. On appelle g -coprojecteur à gauche un couple (n, d) avec :

- $n : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur,
- $d : A \otimes n(B') \longrightarrow n(g(A) \otimes' B')$ des morphismes naturels en $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $B' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$,

tel que les conditions duales du **1** soient vérifiées.

On a également la notion \otimes -duale de g -coprojecteur à droite. Un morphisme de g -coprojecteurs de (n, d) vers (n', d') est une transformation naturelle de n vers n' compatible au sens évident avec les morphismes c et c' .

Définition 2.1.100

1- Un projecteur à gauche $[f, k]$ de \mathcal{C}' dans \mathcal{C} un quadruplet (f, k, a, c) avec $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur pseudo-monoïdal et (k, c) un f -projecteur à gauche. La catégorie des projecteurs à gauche de \mathcal{C}' dans \mathcal{C} est notée $\text{Proj}_g(\mathcal{C}', \mathcal{C})$. Une flèche de $\text{Proj}_g(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ est un couple $(u, v) : (f_1, k_1, a_1, c_1) \longrightarrow (f_2, k_2, a_2, c_2)$ avec $u : f_2 \longrightarrow f_1$ une transformation naturelle monoïdale et $v : k_1 \longrightarrow k_2$ une transformation naturelle tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 k_1(f_2(A) \otimes' B') & \xrightarrow{v} & k_2(f_2(A) \otimes' B') & \xrightarrow{c_2} & A \otimes k_2(B') \\
 \parallel & & & & \uparrow v \\
 k_1(f_2(A) \otimes' B') & \xrightarrow{u} & k_1(f_1(A) \otimes' B') & \xrightarrow{c_1} & A \otimes k_1(B')
 \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A, B') \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}')$.

Étant donnée une troisième catégorie monoïdale $(\mathcal{C}'', \otimes'')$, il existe un foncteur de composition :

$$\text{Proj}_g(\mathcal{C}', \mathcal{C}) \times \text{Proj}_g(\mathcal{C}'', \mathcal{C}') \longrightarrow \text{Proj}_g(\mathcal{C}'', \mathcal{C})$$

qui associe à $[f', k'] = (f', k', a', c')$ et $[f, k] = (f, k, a, c)$ le quadruplet $(f' \circ f, k \circ k', a'', c'')$ avec $(f' \circ f, a'')$ le foncteur monoïdal composée (voir la remarque 2.1.89) et c'' la composée :

$$k k'(f' f(A) \otimes'' B'') \xrightarrow{c'} k(f(A) \otimes' k'(B'')) \xrightarrow{c} A \otimes k k'(B'')$$

On obtient ainsi une 2-catégorie dont les objets sont les catégories monoïdales, et les 1-morphismes, les projecteurs à gauche. On appellera (\mathfrak{Proj}_g) cette 2-catégorie. Notons que le 2-foncteur évident : $\mathfrak{Proj}_g \longrightarrow \mathbf{pMono}$ qui à $[f, k]$ associe le foncteur pseudo-monoïdal f est 1-contravariant et 2-contravariant.

2- On a également la notion duale de coprojecteur à gauche qui s'organise en une 2-catégorie \mathbf{cProj}_g . Les notions \otimes -duales fournissent également deux 2-catégories strictes \mathfrak{Proj}_d et \mathbf{cProj}_d .

Définition 2.1.101

1- Gardons les notations de la définition 2.1.99. Un f -biprojecteur est un triplet (k, c_g, c_d) tel que (k, c_g) est un f -projecteur à gauche et (k, c_d) un f -projecteur à droite et tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} k(f(A) \otimes' (B' \otimes' f(C))) & \xrightarrow{c_g} & A \otimes k(B' \otimes' f(C)) & \xrightarrow{c_d} & A \otimes (k(B') \otimes C) \\ \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ k((f(A) \otimes' B') \otimes' f(C)) & \xrightarrow{c_d} & k(f(A) \otimes' B') \otimes C & \xrightarrow{c_g} & (A \otimes k(B')) \otimes C \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A, B', C) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathbf{Ob}(\mathcal{C}') \times \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$.

2- On a également la notion duale de g -biprojecteurs. On définit également la notion de biprojecteurs et bicoprojecteurs de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' . On notera \mathfrak{Proj} et \mathbf{cProj} les 2-catégories des projecteurs et coprojecteurs bilatères.

Remarque 2.1.102. — On peut reformuler les propositions 2.1.97 et 2.1.98 de la manière suivante. Étant donné un module à gauche $[f, l]$ (resp. un comodule à gauche $[g, k]$) de (\mathcal{C}, \otimes) dans (\mathcal{C}', \otimes') avec l (resp. k) admettant un adjoint à gauche k (resp. un adjoint à droite l), on peut munir le couple (f, k) (resp. (g, l)) d'une structure de projecteur (resp. coprojecteur) à droite. On a réciproquement :

Proposition 2.1.103. — Soient (\mathcal{C}, \otimes) et (\mathcal{C}', \otimes') deux catégories monoïdales et $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur pseudo-monoïdal.

1- On suppose donné un f -projecteur à gauche (k, c) tel que le foncteur k admet un adjoint à droite l . On définit un morphisme $b : f(A) \otimes' l(B) \longrightarrow l(A \otimes B)$, naturel en $(A, B) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})^2$ par la composée :

$$f(A) \otimes' l(B) \longrightarrow lk(f(A) \otimes l(B)) \xrightarrow{c} l(A \otimes kl(B)) \longrightarrow l(A \otimes B)$$

Alors, le couple (l, b) est un f -module à gauche.

2- On suppose donné un f -biprojecteur (l, c_g, c_d) ainsi qu'un adjoint à droite l de k . Les deux transformations :

$$b_g : f(A) \otimes l(B) \longrightarrow l(A \otimes B) \quad \text{et} \quad b_d : l(A) \otimes f(B) \longrightarrow l(A \otimes B)$$

naturelles en $(A, B) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})^2$ définissent une structure de f -bimodule sur l .

Démonstration. — On obtient une preuve en parcourant celle de la proposition 2.1.97 dans le sens inverse. On laissera les détails aux lecteurs. \square

On a bien entendu l'énoncé correspondant pour les coprojecteurs et comodules. Le lemme suivant est facile et laissé aux lecteurs :

Lemme 2.1.104. — *Les constructions des propositions 2.1.97 et 2.1.98 sont compatibles à la composition et aux 2-morphismes dans \mathfrak{Mod}_g et \mathfrak{cMod}_g . De même les constructions de la propositions 2.1.103 sont compatibles à la composition et aux 2-morphismes dans \mathfrak{Pproj}_g et \mathfrak{cPproj}_g .*

2.1.4.4. *Faces carrées exotiques.* — On termine avec quatre diagrammes commutatifs faisant apparaître des projecteurs et des modules à droite et à gauche. Le plus simple est le résultat ci-dessous :

Lemme 2.1.105

1- On suppose donnée une face carrée dans la 2-catégorie \mathfrak{Mod}_g :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{[g', m']} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\ [f', l'] \uparrow & \swarrow & \uparrow [f, l] \\ (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{[g, m]} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \end{array}$$

avec $[f, l]$, $[f', l']$, $[g, m]$ et $[g', m']$ des modules à gauche. Soient k et k' des adjoints à gauche de l et l' respectivement. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} k'(g'f(A_1) \otimes'_2 m'(B'_1)) & \xrightarrow{d'} & k'm'(f(A_1) \otimes'_1 B'_1) & \longrightarrow & mk(f(A_1) \otimes'_1 B'_1) & \longrightarrow & m(A_1 \otimes_1 k(B'_1)) \\ \downarrow & & & & & & \parallel \\ k'(f'g(A_1) \otimes'_2 m'(B'_1)) & \longrightarrow & g(A_1) \otimes_2 k'm'B'_1 & \longrightarrow & g(A_1) \otimes_2 mkB'_1 & \xrightarrow{d} & m(A_1 \otimes_1 k(B'_1)) \end{array}$$

formé de :

- le morphisme $g'f \longrightarrow f'g$ de la face carrée de \mathfrak{Mod}_g ,
- les morphismes structuraux des modules à gauche $[g, m]$ et $[g', m']$,
- les morphismes structuraux des projecteurs à gauche $[f, k]$ et $[f', k']$,
- le morphisme $k'm' \longrightarrow mk$ obtenu par les adjonctions (k, l) et (k', l') à partir de $m'l \longrightarrow l'm$,

est commutatif.

2- Réciproquement, soient quatre catégories monoïdales $(\mathcal{C}_1, \otimes_1)$, $(\mathcal{C}'_1, \otimes'_1)$, $(\mathcal{C}_2, \otimes_2)$ et $(\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$. On suppose donnés deux modules à gauche :

$$(g, m) : (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2) \quad \text{et} \quad (g', m') : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$$

ainsi que deux projecteurs à gauche :

$$(f, k) : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \quad \text{et} \quad (f', k') : (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$$

On suppose également données les deux faces carrées dans \mathfrak{Cat} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{g} & \mathcal{C}_1 \\ f' \downarrow & u \lrcorner & \downarrow f \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{g'} & \mathcal{C}_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{m} & \mathcal{C}_1 \\ k' \downarrow & v \lrcorner & \downarrow k \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{m'} & \mathcal{C}_2 \end{array}$$

avec u une transformation naturelle de foncteurs pseudo-monoïdaux et v faisant commuter le diagramme du **1**. Si l est un adjoint à droite de k et $v' : m'l \longrightarrow l'm$ la transformation obtenue à partir de v suivant les adjonctions (k, l) et (k', l') , alors le couple (u, w) est un 2-morphisme de modules à gauche.

Démonstration. — On démontre uniquement la première partie du lemme. La seconde partie se démontre en remontant la démonstration du **1**. En écrivant ce qu'est une face carrée dans \mathfrak{Mod}_g on voit que pour $A_1 \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)$ on a un cube solide commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{A \otimes_1 -} & \mathcal{C}_1 \\ & m \swarrow & \downarrow & & \searrow m \\ \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{g(A) \otimes'_1 -} & \mathcal{C}'_1 & & \mathcal{C}'_1 \\ \downarrow l' & & \downarrow l & & \downarrow l \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{g'f(A) \otimes'_2 -} & \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{f(A) \otimes_2 -} & \mathcal{C}_2 \\ & m' \swarrow & \downarrow l' & & \searrow m' \\ & & \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{f(A) \otimes_2 -} & \mathcal{C}_2 \end{array}$$

formé des quatre faces carrées :

(172)

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{g(A) \otimes'_1 -} & \mathcal{C}'_1 \\ l' \downarrow & \nearrow & \downarrow l' \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{g'f(A) \otimes'_2 -} & \mathcal{C}'_2 \end{array} & , & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{A \otimes_1 -} & \mathcal{C}_1 \\ m \downarrow & \nearrow & \downarrow m \\ \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{g(A) \otimes'_1 -} & \mathcal{C}'_1 \end{array} & , & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{A \otimes_1 -} & \mathcal{C}_1 \\ l \downarrow & \nearrow & \downarrow l \\ \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{f(A) \otimes_2 -} & \mathcal{C}_2 \end{array} & \text{et} & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{f(A) \otimes_2 -} & \mathcal{C}_2 \\ m' \downarrow & \nearrow & \downarrow m' \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{g'f(A) \otimes'_2 -} & \mathcal{C}'_2 \end{array} \end{array}$$

et de deux faces carrées égales à :

$$(173) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{m} & \mathcal{C}_1 \\ l' \downarrow & \Leftrightarrow & \downarrow l \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{m'} & \mathcal{C}_2 \end{array}$$

Les trois dernières faces de (172), sont simplement les morphismes structuraux des modules à gauche (g, m) , (f, l) et (g', m') , tandis que la première est la composée :

$$g'f(A) \otimes'_2 l'(-) \longrightarrow f'g(A) \otimes'_2 l'(-) \longrightarrow l'(g(A) \otimes'_1 -)$$

La face carrée (173), est celle sous-jacente à la face carrée de \mathfrak{Mod}_g de l'énoncé. En utilisant le corollaire 1.1.14, on déduit un cube commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{A \otimes_1 -} & \mathcal{C}_1 \\ & m \swarrow & \uparrow & & \swarrow m \\ \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{g(A) \otimes'_1 -} & \mathcal{C}'_1 & & \mathcal{C}'_1 \\ & \uparrow k & & & \uparrow k \\ & \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{f(A) \otimes_2 -} & \mathcal{C}_2 & \\ & m' \swarrow & \downarrow k' & \searrow m' & \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{g'f(A) \otimes'_2 -} & \mathcal{C}'_2 & & \mathcal{C}'_2 \end{array}$$

On laisse aux lecteurs la tâche de vérifier que la commutation de ce cube se traduit dans le langage habituel des flèches par la commutation du diagramme de l'énoncé. Notons en guise d'indication que par la proposition 1.1.11, la face carrée :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{g(A) \otimes'_1 -} & \mathcal{C}'_1 \\ k' \uparrow & \Leftrightarrow & \uparrow k' \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{g'f(A) \otimes'_2 -} & \mathcal{C}'_2 \end{array}$$

est égale à la composée : $k'(g'f(A) \otimes'_2 -) \longrightarrow k'(f'g(A) \otimes'_2 -) \longrightarrow g(A) \otimes'_1 k'(-)$.

□

Remarque 2.1.106. — Le lemme ci-dessus, admet une version pour les faces dans la 2-catégorie \mathfrak{Mod}_g des comodules à gauche. On prendra alors un adjoint à droite au lieu d'un adjoint à gauche. Le résultat correspondant s'obtient alors par dualité. Les détails sont laissés aux lecteurs.

On fait la définition suivante :

Définition 2.1.107. — Une face carrée à gauche de modules et comodules :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{[g', n']} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\
 \uparrow [f', l'] & \nearrow \nearrow & \uparrow [f, l] \\
 (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{[g, n]} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1)
 \end{array}$$

est la donnée de deux comodules à gauche $[f, l]$ et $[f', l']$ et de deux modules à gauche $[g, n]$ et $[g', n']$ ainsi que deux transformations naturelles :

$$f'g \longrightarrow g'f \quad \text{et} \quad l'n \longrightarrow n'l$$

tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 l'(g(A_1) \otimes_2 n(B_1)) & \longrightarrow & f'g(A_1) \otimes'_2 l'n(B) & \longrightarrow & g'f(A_1) \otimes'_2 n'l(B_1) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 l'n(A_1 \otimes_1 B_1) & \longrightarrow & n'l(A_1 \otimes_1 B_1) & \longrightarrow & n'(f(A_1) \otimes'_1 l(B_1))
 \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A_1, B_1) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)^2$.

Remarque 2.1.108. — On a la notion \otimes -duale de face carrée à droite de modules et comodules. On peut par ailleurs passer aux catégories opposées. On obtient alors une face carrée à gauche de modules et comodules en faisant une symétrie par rapport à une diagonale :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}'^{\text{op}}_2, \otimes'^{\text{op}}_2) & \xleftarrow{[f'^{\text{op}}, l'^{\text{op}}]} & (\mathcal{C}^{\text{op}}_2, \otimes^{\text{op}}_2) \\
 \uparrow [g'^{\text{op}}, n'^{\text{op}}] & \nearrow \nearrow & \uparrow [g^{\text{op}}, n^{\text{op}}] \\
 (\mathcal{C}'^{\text{op}}_1, \otimes'^{\text{op}}_1) & \xleftarrow{[f^{\text{op}}, l^{\text{op}}]} & (\mathcal{C}^{\text{op}}_1, \otimes^{\text{op}}_1)
 \end{array}$$

Ceci permet de déduire du lemme qui suivra une version concernant les adjoints à gauche de n et n' . Le lecteur pourra facilement écrire le diagramme commutatif correspondant.

Remarque 2.1.109. — Il est évident qu'on peut composer les faces carrées à gauche de modules et comodules dans les deux sens vertical et horizontal.

On a l'analogie du lemme 2.1.105 pour les faces carrées à gauche de modules et comodules :

Lemme 2.1.110

1- On suppose donnée une face carrée à gauche de modules et comodules :

$$(174) \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{[g', n']} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\ [f', l'] \uparrow & \Rightarrow & \uparrow [f, l] \\ (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{[g, n]} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \end{array}$$

avec $[f, l]$ et $[f', l']$ deux comodules à gauche et $[g, n]$ et $[g', n']$ deux modules à gauche. Soient m et m' des adjoints à droite de l et l' . Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} g(A_1) \otimes_2 nm(B'_1) & \longrightarrow & n(A_1 \otimes_1 m(B'_1)) & \longrightarrow & nm(f(A_1) \otimes'_1 B'_1) & \longrightarrow & m'n'(f(A_1) \otimes'_1 B'_1) \\ \downarrow & & & & & & \parallel \\ g(A_1) \otimes_2 m'n'(B'_1) & \rightarrow & m'(f'g(A_1) \otimes'_2 n'(B'_1)) & \rightarrow & m'(g'f(A_1) \otimes'_2 n'(B'_1)) & \rightarrow & m'n'(f(A_1) \otimes'_1 B'_1) \end{array}$$

formé de :

- le 1-morphisme $f'g \longrightarrow g'f$ de la face carrée à gauche (174),
- les 1-morphismes structuraux des coprojecteurs à gauche $[f, m]$ et $[f', m']$,
- les 1-morphismes structuraux des modules à gauche $[g, n]$ et $[g', n']$,
- le 1-morphisme $nm \longrightarrow m'n'$ obtenu à partir de $l'n \longrightarrow n'l$ suivant les adjonctions (l, m) et (l', m') ,

est commutatif.

2- Réciproquement, soient quatre catégories monoïdales $(\mathcal{C}_1, \otimes_1)$, $(\mathcal{C}'_1, \otimes'_1)$, $(\mathcal{C}_2, \otimes_2)$ et $(\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$. On suppose donnés deux modules à gauche :

$$[g, n] : (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2) \quad \text{et} \quad [g', n'] : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$$

ainsi que deux coprojecteurs à gauche :

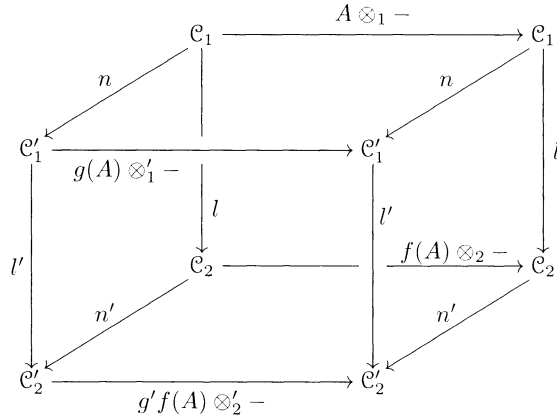
$$[f, m] : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \quad \text{et} \quad [f', m'] : (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$$

On suppose également données les deux faces carrées dans \mathfrak{Cat} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{g} & \mathcal{C}_1 \\ f' \downarrow & \Rightarrow_u & \downarrow f \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{g'} & \mathcal{C}_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{n} & \mathcal{C}_1 \\ m' \uparrow & \Leftarrow_v & \uparrow m \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{n'} & \mathcal{C}_2 \end{array}$$

faisant commuter le diagramme du **1**. Si l est un adjoint à gauche de m et $v' : m'l \longrightarrow l'm$ la transformation déduite de v suivant les adjonctions (l, m) et (l', m') , le couple (u, v') définit une face carrée à gauche de modules et comodules.

Démonstration. — La preuve de ce lemme est complètement analogue à celle du lemme 2.1.105. La seule différence, est qu'on part plutôt du cube solide :



formé des quatre faces carrées :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} C'_1 & \xrightarrow{g(A) \otimes'_1 -} & C'_1 \\ l' \downarrow & \lrcorner & \downarrow l' \\ C'_2 & \xrightarrow{g'f(A) \otimes'_2 -} & C'_2 \end{array} & , & \begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{A \otimes_1 -} & C_1 \\ n \downarrow & \lrcorner & \downarrow n \\ C'_1 & \xrightarrow{g(A) \otimes'_1 -} & C'_1 \end{array} \\
 (175) & & \\
 \begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{A \otimes_1 -} & C_1 \\ l \downarrow & \lrcorner & \downarrow l \\ C_2 & \xrightarrow{f(A) \otimes_2 -} & C_2 \end{array} & \text{et} & \begin{array}{ccc} C_2 & \xrightarrow{f(A) \otimes_2 -} & C_2 \\ n' \downarrow & \lrcorner & \downarrow n' \\ C'_2 & \xrightarrow{g'f(A) \otimes'_2 -} & C'_2 \end{array}
 \end{array}$$

et de deux faces carrées égales à :

$$(176) \quad \begin{array}{ccc} C'_1 & \xleftarrow{n} & C_1 \\ l' \downarrow & \lrcorner & \downarrow l \\ C'_2 & \xleftarrow{n'} & C_2 \end{array}$$

Les trois dernières faces de (175), sont simplement les morphismes structuraux des modules et comodules à gauche (g, n) , (f, l) et (g', n') , tandis que la première est la composée:

$$l'(g(A) \otimes'_1 -) \longrightarrow f'g(A) \otimes'_2 l'(-) \longrightarrow g'f(A) \otimes'_2 l'(-)$$

La face carrée (176), est celle sous-jacente à la face carrée à gauche de modules et comodules de l'énoncé. \square

On continue avec :

Définition 2.1.111. — Une face carrée mixte de modules :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{[g', m']} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\ [f', l'] \uparrow & \Downarrow & \uparrow [f, l] \\ (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{[g, m]} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \end{array}$$

est la donnée de deux modules à droite $[f, l]$ et $[f', l']$ et deux modules à gauche $[g, m]$ et $[g', m']$ ainsi que trois transformations naturelles :

$$f'm \longrightarrow m'f, \quad g'l \longrightarrow l'g \quad \text{et} \quad m'l \longrightarrow l'm$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & g'l(A_1) \otimes'_2 m'f(B_1) & \longrightarrow & m'(l(A_1) \otimes'_1 f(B_1)) & \longrightarrow & m'l(A_1 \otimes_1 B_1) \\ & \nearrow & & & & & \downarrow \\ g'l(A_1) \otimes'_2 f'm(B_1) & & & & & & \\ & \searrow & l'g(A_1) \otimes'_2 f'm(B_1) & \longrightarrow & l'(g(A_1) \otimes m(B_1)) & \longrightarrow & l'm(A_1 \otimes_1 B_1) \end{array}$$

Remarque 2.1.112. — Le sens du 2-morphisme entre $m'l$ et $l'm$ est arbitraire. Dans nos applications, cela ne posera pas de problèmes puisque la flèche en question sera inversible. Remarquons également que la \otimes -dualité ne transforme pas les faces carrées mixtes en faces carrées mixtes à cause du fait que l'on a imposé un sens à ce 2-morphisme.

Remarque 2.1.113. — Il est clair qu'on peut composer les faces carrées mixtes de modules horizontalement et verticalement.

On a la notion duale de face carrée mixte de comodules. On laissera aux lecteurs le soin d'écrire la version duale de la définition 2.1.111 et du lemme suivant :

Lemme 2.1.114

1- On suppose donnée une face carrée mixte de modules :

$$(177) \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{[g', m']} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\ [f', l'] \uparrow & \swarrow \nearrow & \uparrow [f, l] \\ (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{[g, m]} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \end{array}$$

avec $[f, l]$ et $[f', l']$ des modules à droite et $[g, m]$ et $[g', m']$ des modules à gauche. Soient k et k' des adjoints à gauche de l et l' respectivement. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} k'(g'(A'_1) \otimes'_2 f'm(B_1)) & \longrightarrow & k'g'(A'_1) \otimes_2 m(B_1) & \longrightarrow & gk(A'_1) \otimes_2 m(B_1) & \longrightarrow & m(k(A'_1) \otimes_1 B_1) \\ \downarrow & & & & & & \parallel \\ k'(g'(A'_1) \otimes'_2 m'f(B_1)) & \longrightarrow & k'm'(A'_1 \otimes'_1 f(B_1)) & \longrightarrow & mk(A'_1 \otimes f(B_1)) & \longrightarrow & m(k(A'_1) \otimes B_1) \end{array}$$

formé de :

- le 1-morphisme $f'm \longrightarrow m'f$ de la face carrée mixte (177),
- les morphismes structuraux des projecteurs à droite $[f, k]$ et $[f', k']$,
- les morphismes structuraux des modules à gauche $[g, m]$ et $[g', m']$,
- les morphismes $k'g' \longrightarrow gk$ et $k'm' \longrightarrow mk$ déduits de $g'l \longrightarrow l'g$ et $m'l \longrightarrow l'm$ suivant les adjonctions (k, l) et (k', l') ,

est commutatif.

2- Réciproquement, soient quatre catégories monoïdales $(\mathcal{C}_1, \otimes_1)$, $(\mathcal{C}'_1, \otimes'_1)$, $(\mathcal{C}_2, \otimes_2)$ et $(\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$. On suppose donnés deux modules à gauche :

$$(g, m) : (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2) \quad \text{et} \quad (g', m') : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$$

ainsi que deux projecteurs à droite :

$$(f, k) : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \quad \text{et} \quad (f', k') : (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$$

On suppose également données trois faces carrées dans \mathfrak{Cat} :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{m} & \mathcal{C}_1 \\ f' \downarrow & u \nearrow & \downarrow f \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{m'} & \mathcal{C}_2 \end{array} & , & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{g} & \mathcal{C}_1 \\ k' \uparrow & \nearrow_v & \uparrow k \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{g'} & \mathcal{C}_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{m} & \mathcal{C}_1 \\ k' \uparrow & \nearrow_w & \uparrow k \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{m'} & \mathcal{C}_2 \end{array} \end{array}$$

faisant commuter le diagramme du 1. Si l est un adjoint à droite de k et $v' : g'l \longrightarrow l'g$ et $w' : m'l \longrightarrow l'm$ les transformations déduites de v et w , le triplet (u, v', w') définit une face mixte de modules.

Démonstration. — On pensera à un module à droite $[f, l]$ comme étant une famille de faces carrées :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{- \otimes_1 B_1} & \mathcal{C}_1 \\ l \downarrow & \nearrow & \downarrow l \\ \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{- \otimes_2 f(B_1)} & \mathcal{C}_2 \end{array}$$

alors qu'on pensera à un module à gauche $[g, m]$ comme étant une famille de faces carrées :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{- \otimes_1 B_1} & \mathcal{C}_1 \\ g \downarrow & \nearrow & \downarrow m \\ \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{- \otimes'_1 m(B_1)} & \mathcal{C}'_1 \end{array}$$

Ainsi, la définition 2.1.111 se traduit par la commutation du cube solide :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{- \otimes_1 B_1} & \mathcal{C}_1 \\ & \swarrow g & \downarrow & \searrow m & \\ \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{- \otimes'_1 m(B_1)} & \mathcal{C}'_1 & & \downarrow l \\ \downarrow l' & & \downarrow l & & \downarrow l' \\ \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{- \otimes_2 f(B_1)} & \mathcal{C}_2 & & \downarrow m' \\ \swarrow g' & & \swarrow m' & & \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{- \otimes'_2 f'm(B_1)} & \mathcal{C}'_2 & & \end{array}$$

formé des six faces carrées :

(178)

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{- \otimes'_1 m(B_1)} & \mathcal{C}'_1 \\ l' \downarrow & \nearrow & \downarrow l' \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{- \otimes'_2 f'm(B_1)} & \mathcal{C}'_2 \end{array} & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{- \otimes_1 B_1} & \mathcal{C}_1 \\ g \downarrow & \nearrow & \downarrow m \\ \mathcal{C}'_1 & \xrightarrow{- \otimes'_1 m(B_1)} & \mathcal{C}'_1 \end{array} & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{- \otimes_1 B_1} & \mathcal{C}_1 \\ l \downarrow & \nearrow & \downarrow l \\ \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{- \otimes_2 f(B_1)} & \mathcal{C}_2 \end{array} & \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{- \otimes_2 f(B_1)} & \mathcal{C}_2 \\ g' \downarrow & \nearrow & \downarrow m' \\ \mathcal{C}'_2 & \xrightarrow{- \otimes'_2 f'm(B_1)} & \mathcal{C}'_2 \end{array} \end{array}$$

et

$$(179) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{g} & \mathcal{C}_1 \\ l' \downarrow & \lrcorner & \downarrow l \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{g'} & \mathcal{C}_2 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{m} & \mathcal{C}_1 \\ l' \downarrow & \lrcorner & \downarrow l \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{m'} & \mathcal{C}_2 \end{array}$$

Les trois premières faces de (178), sont simplement les morphismes structuraux des modules à gauche et à droite (f', l') , (g, m) et (f, l) . La quatrième, est la composée :

$$g'(-) \otimes_2 f' m(B_1) \longrightarrow g'(-) \otimes_2 m' f(B_1) \longrightarrow m'(- \otimes_1 f(B_1))$$

Les deux faces carrées (179) sont celles sous-jacentes à la face carrée mixte de l'énoncé. On termine alors la preuve exactement comme pour le lemme 2.1.105. \square

On termine notre liste de faces exotiques par :

Définition 2.1.115. — Une face carrée mixte de modules et comodules :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{[g', n']} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\ [f', l'] \uparrow & \lrcorner & \uparrow [f, l] \\ (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{[g, n]} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \end{array}$$

est la donnée de deux comodules à droite $[f, l]$ et $[f', l']$ et de deux modules à gauche $[g, n]$ et $[g', n']$ ainsi que trois transformations naturelles :

$$l'g \longrightarrow g'l \quad , \quad f'n \longrightarrow n'f \quad \text{et} \quad l'n \longrightarrow n'l$$

tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} l'(g(A_1) \otimes_2 n(B_1)) & \longrightarrow & l'g(A_1) \otimes_2 f'n(B'_1) & \longrightarrow & g'l(A_1) \otimes_2 n'f(B) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ l'n(A_1 \otimes_1 B_1) & \longrightarrow & n'l(A_1 \otimes_1 B_1) & \longrightarrow & n'(l(A_1) \otimes_1 f(B_1)) \end{array}$$

soit commutatif.

Remarque 2.1.116. — On aurait pu prendre dans la définition ci-dessus des modules à droite et des comodules à gauche. On obtient alors la version \otimes -duale mais aussi la version duale de la définition.

Remarque 2.1.117. — Il va sans dire qu'on peut composer les faces carrées mixtes de modules et comodules dans les deux sens vertical et horizontal.

Lemme 2.1.118

1- Supposons donnée une face mixte de modules et comodules :

$$(180) \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) & \xleftarrow{(g', n')} & (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \\ (f', l') \uparrow & \nearrow & \uparrow (f, l) \\ (\mathcal{C}_2, \otimes_2) & \xleftarrow{(g, n)} & (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \end{array}$$

avec $[f, l]$ et $[f', l']$ des comodules à droite et $[g, m]$ et $[g', m']$ des modules à gauche. Soient m et m' des adjoints à droite de l et l' respectivement. Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} gm(A'_1) \otimes_2 n(B_1) & \longrightarrow & n(m(A'_1) \otimes_1 B_1) & \longrightarrow & nm(A'_1 \otimes'_1 f(B_1)) & \longrightarrow & m'n'(A'_1 \otimes'_1 f(B_1)) \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ m'g'(A'_1) \otimes_2 n(B_1) & \longrightarrow & m'(g'(A) \otimes'_2 f'n(B_1)) & \longrightarrow & m'(g'(A'_1) \otimes'_2 n'f(B_1)) & \longrightarrow & m'n'(A'_1 \otimes'_1 f(B_1)) \end{array}$$

formé de :

- le 1-morphisme $f'n \longrightarrow n'f$ de la face carrée mixte (180),
- les morphismes structuraux des coprojecteurs à droite $[f, m]$ et $[f', m']$,
- les morphismes structuraux des modules à gauche $[g, n]$ et $[g', n']$,
- les morphismes $gm \longrightarrow m'g'$ et $nm \longrightarrow m'n'$ déduits de $l'g \longrightarrow g'l$ et $l'n \longrightarrow n'l$ suivant les adjonctions (l, m) et (l', m') ,

est commutatif.

2- Réciproquement, soient quatre catégories monoïdales $(\mathcal{C}_1, \otimes_1)$, $(\mathcal{C}'_1, \otimes'_1)$, $(\mathcal{C}_2, \otimes_2)$ et $(\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$. On suppose donnés deux modules à gauche :

$$(g, n) : (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2) \quad \text{et} \quad (g', n') : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2)$$

ainsi que deux coprojecteurs à droite :

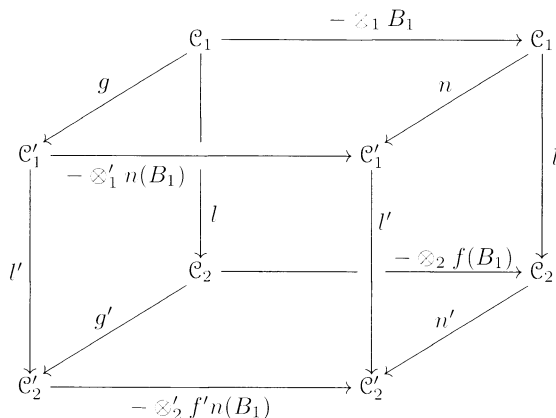
$$(f, m) : (\mathcal{C}'_1, \otimes'_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_1, \otimes_1) \quad \text{et} \quad (f', m') : (\mathcal{C}'_2, \otimes'_2) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \otimes_2)$$

On suppose également données trois faces carrées dans \mathfrak{Cat} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{n} & \mathcal{C}_1 \\ f' \downarrow & \nearrow u & \downarrow f \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{n'} & \mathcal{C}_2 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{g} & \mathcal{C}_1 \\ m' \uparrow & \nwarrow_v & \uparrow m \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{g'} & \mathcal{C}_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_1 & \xleftarrow{n} & \mathcal{C}_1 \\ m' \uparrow & \nwarrow_w & \uparrow m \\ \mathcal{C}'_2 & \xleftarrow{n'} & \mathcal{C}_2 \end{array}$$

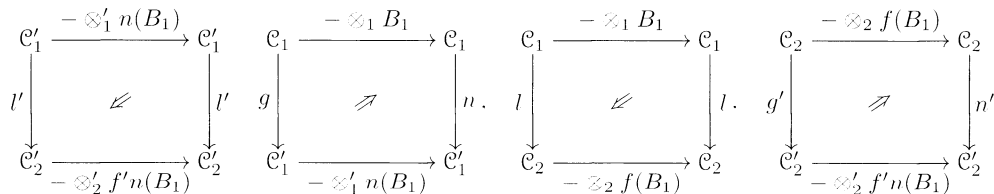
faisant commuter le diagramme du 1. Si l est un adjoint à gauche de m et $v' : l'g \longrightarrow g'l$ et $w' : l'n \longrightarrow n'l$ les transformations déduites de v et w , le triplet (u, v', w') définit une face mixte de modules et comodules.

Démonstration. — La preuve est encore une fois une adaptation de la preuve du lemme 2.1.105. On part du cube solide traduisant la commutativité du diagramme de la définition 2.1.115 :



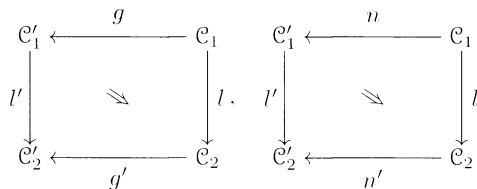
formé des six faces carrées :

(181)



et

(182)



Les trois premières faces de (181), sont simplement les morphismes structuraux des modules à gauche et comodules à droite (f', l') , (g, n) et (f, l) . La quatrième, est la composée :

$$g'(-) \otimes_2 f'n(B_1) \longrightarrow g'(-) \otimes_2 n'f(B_1) \longrightarrow n'(- \otimes_1 f(B_1))$$

Les deux faces carrées (182) sont celles sous-jacentes à la face carrée mixte de l'énoncé. On termine alors la preuve exactement comme pour le lemme 2.1.105. \square

2.1.5. Catégories monoïdales fermées. — Dans ce paragraphe on étudie les bifoncteurs homomorphismes internes dans une catégorie monoïdale fermée. Les résultats de cette sous-section sont tous bien connus du moins dans des situations particulières.

2.1.5.1. Définitions et généralités

Définition 2.1.119

1- Soit (\mathcal{C}, \otimes) une catégorie monoïdale. On dit qu'elle est fermée à gauche si pour tout objet A de \mathcal{C} , le foncteur $A \otimes -$ admet un adjoint à droite. On dit que \mathcal{C} est fermée à droite si pour tout objet A de \mathcal{C} , le foncteur $- \otimes A$ admet un adjoint à droite.

2- Une catégorie monoïdale \mathcal{C} est fermée à droite si la catégorie \otimes -opposée \mathcal{C}° est fermée à gauche et vice versa. Il suffit donc d'étudier un seul type de catégories monoïdales fermées.

Par la suite, on considérera principalement les catégories monoïdales fermées à droite. On notera $\underline{\text{Hom}}(A, -)$ l'adjoint à droite de $- \otimes A$. On a ainsi des isomorphismes :

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(U \otimes A, V) \xrightarrow{\sim} \text{hom}_{\mathcal{C}}(U, \underline{\text{Hom}}(A, V))$$

ainsi que des flèches :

$$ev : \underline{\text{Hom}}(A, V) \otimes A \longrightarrow V \quad \text{et} \quad \delta : U \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, U \otimes A)$$

naturelles en U et V dans \mathcal{C} .

Lorsqu'on aura besoin de considérer des catégories monoïdales fermées à droite et à gauche, on notera, pour les distinguer, $\underline{\text{Hom}}_g(A, -)$ et $\underline{\text{Hom}}_d(A, -)$ les adjoints à droite respectifs de $A \otimes -$ et $- \otimes A$.

Si (\mathcal{C}, \otimes) est une catégorie monoïdale fermée, on définit un bifoncteur :

$$\underline{\text{Hom}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

par les associations :

- à $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ on associe l'objet $\underline{\text{Hom}}(A, B)$,
- aux deux flèches $f : A' \longrightarrow A$ et $g : B \longrightarrow B'$ de \mathcal{C} on associe la composée :

$$\underline{\text{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, B') \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A', B')$$

où la seconde flèche est induite par adjonction de la transformation naturelle :

$$- \otimes A' \longrightarrow - \otimes A.$$

Ce bifoncteur est appelé le *bifoncteur d'homomorphismes internes*.

Lemme 2.1.120. — Soit (\mathcal{C}, \otimes) une catégorie monoïdale fermée à droite et $(\mathbb{1}, u_g, u_d)$ un objet unité de \mathcal{C} . Les transformations naturelles ci-dessous :

$$\underline{\text{Hom}}(\mathbb{1}, A) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(\mathbb{1}, A) \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{ev} A$$

et

$$A \xrightarrow{\delta} \underline{\text{Hom}}(\mathbb{1}, A \otimes \mathbb{1}) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(\mathbb{1}, A)$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Démonstration. — Ceci découle immédiatement du fait que le foncteur $- \otimes \mathbb{1}$ est une équivalence puisque isomorphe au foncteur identique. \square

Définition 2.1.121. — Soit (\mathcal{C}, \otimes) une catégorie monoïdale fermée à droite. On définit un morphisme :

$$\underline{\text{Hom}}(A \otimes B, C) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, C))$$

naturel en $(A, B, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^3$ par la composée :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(A \otimes B, C) & & \\ \downarrow \delta & & \\ \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(A \otimes B, C) \otimes A) & \xrightarrow{\delta} & \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, (\underline{\text{Hom}}(A \otimes B, C) \otimes A) \otimes B)) \\ & & \downarrow \sigma \\ \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, C)) & \xleftarrow{ev} & \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, \underline{\text{Hom}}(A \otimes B, C) \otimes (A \otimes B))) \end{array}$$

Lemme 2.1.122. — La transformation naturelle ci-dessus est inversible.

Démonstration. — En effet, $\underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, -))$ est l'adjoint à droite du foncteur composé : $(- \otimes B) \circ (- \otimes A)$. D'autre part, $\underline{\text{Hom}}(A \otimes B, -)$ est l'adjoint à droite du foncteur $- \otimes (A \otimes B)$. Les isomorphismes d'associativité donnent un isomorphisme de foncteurs :

$$(- \otimes B) \circ (- \otimes A) \xrightarrow{\sim} - \otimes (A \otimes B)$$

Le morphisme en question, est exactement l'induit par adjonction de cet isomorphisme. \square

Définition 2.1.123. — On définit un morphisme de composition :

$$\underline{\text{Hom}}(B, C) \otimes \underline{\text{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, C)$$

en prenant la composée :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(B, C) \otimes \underline{\text{Hom}}(A, B) & \xrightarrow{\delta} & \underline{\text{Hom}}(A, (\underline{\text{Hom}}(B, C) \otimes \underline{\text{Hom}}(A, B)) \otimes A) \\ & & \downarrow \\ \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, C) \otimes B) & \xleftarrow{ev} & \underline{\text{Hom}}(A, \underline{\text{Hom}}(B, C) \otimes (\underline{\text{Hom}}(A, B) \otimes A)) \\ \downarrow ev & & \\ \underline{\text{Hom}}(A, C) & & \end{array}$$

La proposition ci-dessous est bien connue, mais ne sera pas utilisée dans la suite. On renvoie le lecteur à [KM71] pour une démonstration.

Proposition 2.1.124. — Le produit de composition ci-dessus est associatif. La catégorie \mathcal{C} est naturellement une \mathcal{C} -catégorie.

Remarque 2.1.125. — La proposition précédente explique la notation $\underline{\text{Hom}}$ ainsi que la terminologie d'homomorphismes internes.

2.1.5.2. Objets inversibles et objets dualisants. — On commence ce paragraphe par la notion d'objets inversibles. La définition des objets inversibles, ne fait pas intervenir la propriété d'une catégorie monoïdale d'être fermée :

Définition 2.1.126. — Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie monoïdale unitaire et $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

On dit que :

- U est inversible à gauche, s'il existe un objet V_g de \mathcal{C} tel que $U \otimes V_g$ soit isomorphe à l'objet unité $\mathbb{1}$. Un tel objet V_g est appelé un inverse à gauche de U ,
- U est inversible à droite, s'il existe un objet V_d de \mathcal{C} tel que $V_d \otimes U$ soit isomorphe à l'objet unité $\mathbb{1}$. Un tel objet V_d est appelé un inverse à droite de U .

On dit que U est inversible s'il est inversible à gauche et à droite.

On a le résultat classique suivant :

Lemme 2.1.127. — Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie monoïdale unitaire et $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ un objet inversible. Tout inverse à droite de U est isomorphe à tout inverse à gauche de U . En particulier, un inverse à gauche (resp. à droite) de U est défini à un isomorphisme près.

Démonstration. — En effet, soit V_g et V_d des inverses à gauche et à droite de U . On a les isomorphismes :

$$V_d \simeq V_d \otimes \mathbb{1} \simeq V_d \otimes (U \otimes V_g) \simeq (V_d \otimes U) \otimes V_g \simeq \mathbb{1} \otimes V_g \simeq V_g$$

D'où le résultat. □

Remarque 2.1.128. — Si U est un objet inversible d'une catégorie monoïdale unitaire, on appelle *inverse* de U , un objet V tel que $V \otimes U \simeq \mathbb{1} \simeq U \otimes V$. L'existence et l'unicité à isomorphisme près d'un inverse est assurée par le lemme précédent.

Proposition 2.1.129. — Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie monoïdale unitaire et U un objet de \mathcal{C} . Il y a équivalence entre les conditions suivantes :

1. Le foncteur $U \otimes - : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ est une équivalence de catégories.
2. Le foncteur $- \otimes U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ est une équivalence de catégories.
3. L'objet U est inversible.

De plus si V est un inverse de U , les foncteurs $V \otimes -$ et $- \otimes V$ sont des quasi-inverses de $U \otimes -$ et $- \otimes U$ respectivement.

Démonstration. — Supposons que U est inversible d'inverse V . Le foncteur $U \otimes -$ admet un quasi-inverse à gauche et à droite puisque :

$$(U \otimes -) \circ (V \otimes -) \simeq (U \otimes V) \otimes - \simeq \mathbb{1} \otimes - \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$$

et

$$(V \otimes -) \circ (U \otimes -) \simeq (V \otimes U) \otimes - \simeq \mathbb{1} \otimes - \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$$

Ceci prouve que $3 \implies 1$. Par \otimes -dualité, on a également l'implication : $3 \implies 2$. Il suffira donc de prouver que $1 \implies 3$ puisque par \otimes -dualité on aura également $2 \implies 3$.

Supposons donc que le foncteur $U \otimes -$ est une équivalence. Par essentielle surjectivité, il existe un objet V tel que $U \otimes V$ soit isomorphe à l'objet unité $\mathbb{1}$. Ainsi, V est un inverse à gauche de U . Le foncteur $V \otimes -$ fournit alors un quasi-inverse à gauche du foncteur $U \otimes -$ puisque :

$$(U \otimes -) \circ (V \otimes -) \simeq (U \otimes V) \otimes - \simeq \mathbb{1} \otimes - \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$$

Étant donné que $(U \otimes -)$ est quasi-inversible, le foncteur $V \otimes -$ est également un inverse à droite. On a alors un isomorphisme de foncteurs : $(V \otimes -) \circ (U \otimes -) \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$. Il suffit alors d'évaluer en l'objet unité pour obtenir un isomorphisme $V \otimes U \simeq \mathbb{1}$. La proposition est démontrée. \square

Dans la suite, Il sera question de catégories monoïdales fermées à gauche et à droite. On utilisera ainsi les notations $\underline{\text{Hom}}_g$ et $\underline{\text{Hom}}_d$. Soient $(A, C) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$. On a une face évidente :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ - \otimes C \downarrow & \tilde{\curvearrowright} & \downarrow - \otimes C \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \end{array}$$

Supposons que \mathcal{C} est fermée à gauche (resp. à droite). En utilisant l'adjonction $(A \otimes -, \underline{\text{Hom}}_g(A, -))$ (resp. $(-, \underline{\text{Hom}}_d(C, -))$) on déduit la face carrée :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xleftarrow{\underline{\text{Hom}}_g(A, -)} & \mathcal{C} \\ - \otimes C \downarrow & \cong & \downarrow - \otimes C \\ \mathcal{C} & \xleftarrow{\underline{\text{Hom}}_g(A, -)} & \mathcal{C} \end{array} \quad (\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \\ \uparrow \underline{\text{Hom}}_d(C, -) & \cong & \uparrow \underline{\text{Hom}}_d(C, -) \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{A \otimes -} & \mathcal{C} \end{array})$$

Lorsque l'objet A est inversible, le foncteur $A \otimes -$ est une équivalence. On vérifie alors facilement que les deux faces ci-dessus sont des 2-isomorphismes. Par \otimes -dualité, les deux faces ci-dessus sont encore des 2-isomorphismes si C est un objet inversible. On a ainsi :

Corollaire 2.1.130. — Soit $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie monoïdale unitaire fermée à gauche (resp. à droite). Soit U un objet inversible de \mathcal{C} . Pour tout $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$, les flèches :

$$\underline{\text{Hom}}_g(U, A) \otimes B \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_g(U, A \otimes B) \quad (\text{resp.} \quad A \otimes \underline{\text{Hom}}_d(U, B) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_d(U, A \otimes B))$$

$$\underline{\text{Hom}}_g(A, B) \otimes U \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_g(A, B \otimes U) \quad (\text{resp.} \quad U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, B) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_d(A, U \otimes B))$$

sont inversibles.

Remarque 2.1.131. — Lorsque (\mathcal{C}, \otimes) est fermée à gauche et à droite, en passant aux adjoints à droite, on obtient une face carrée inversible :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xleftarrow{\underline{\mathrm{Hom}}_g(A, -)} & \mathcal{C} \\ \underline{\mathrm{Hom}}_d(C, -) \uparrow & \tilde{\nearrow} & \uparrow \underline{\mathrm{Hom}}_d(C, -) \\ \mathcal{C} & \xleftarrow{\underline{\mathrm{Hom}}_g(A, -)} & \mathcal{C} \end{array}$$

Cette face sera utilisée dans la preuve du lemme 2.1.137.

Notons également un deuxième corollaire de la proposition 2.1.129 :

Corollaire 2.1.132. — Soit $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie monoïdale unitaire fermée à gauche (resp. à droite). Soit U un objet inversible de \mathcal{C} . Alors, l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}_g(U, \mathbb{1})$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_d(U, \mathbb{1})$) est un inverse de U .

Démonstration. — On traite uniquement le premier cas. Le cas respectif s'obtient alors par \otimes -dualité. Si V est un inverse de U , on sait que le foncteur $V \otimes -$ est un quasi-inverse de $U \otimes -$. Puisque $\underline{\mathrm{Hom}}_g(U, -)$ est un adjoint à $U \otimes -$ on en déduit un isomorphisme :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_g(U, -) \xrightarrow{\sim} V \otimes -$$

Lorsqu'on évalue en l'objet unité $\mathbb{1}$, on obtient les isomorphismes : $\underline{\mathrm{Hom}}_g(U, \mathbb{1}) \simeq V \otimes \mathbb{1} \simeq V$. \square

On passe maintenant à la notion d'objets dualisants. Jusqu'à la fin du paragraphe, on fixe une catégorie monoïdale unitaire $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ fermée à droite et à gauche. Pour $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})^2$, on construit deux flèches échangées par \otimes -dualité :

$$(183) \quad A \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, B), B) \quad \text{et} \quad A \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_d(\underline{\mathrm{Hom}}_g(A, B), B)$$

en prenant les composées :

$$A \xrightarrow{\delta} \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, B), \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, B) \otimes A) \xrightarrow{ev} \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, B), B)$$

$$A \xrightarrow{\delta} \underline{\mathrm{Hom}}_d(\underline{\mathrm{Hom}}_g(A, B), A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_g(A, B)) \xrightarrow{ev} \underline{\mathrm{Hom}}_d(\underline{\mathrm{Hom}}_g(A, B), B)$$

Ces morphismes sont ceux obtenus par adjonction des deux morphismes d'évaluations : $\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, B) \otimes A \longrightarrow B$ et $A \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_g(A, B) \longrightarrow B$. Notons le lemme :

Lemme 2.1.133. — Les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(-, B), B)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_d(\underline{\mathrm{Hom}}_g(-, B), B)$ sont covariants. De plus, les morphismes :

$$A \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, B), B) \quad \text{et} \quad A \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_d(\underline{\mathrm{Hom}}_g(A, B), B)$$

définissent des transformations naturelles.

Démonstration. — On traite uniquement le premier morphisme. Le foncteur $\underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(-, B), B)$ étant égal à la composée de deux foncteurs contravariants $\underline{\text{Hom}}_d(-, B) \circ \underline{\text{Hom}}_g(-, B)$ est covariant. Si $A \longrightarrow A'$ est une flèche de \mathcal{C} , on doit prouver que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(A, B), B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(A', B), B) \end{array}$$

En revenant aux définitions, on voit qu'il suffit de prouver que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, B), \underline{\text{Hom}}_d(A, B) \otimes A) & \xrightarrow{ev} & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, B), B) \\ & \nearrow \delta & \downarrow & & \downarrow \\ A & & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A', B), \underline{\text{Hom}}_d(A, B) \otimes A) & \xrightarrow{ev} & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A', B), B) \\ & \searrow \delta & \uparrow & & \uparrow ev \\ A' & & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A', B), \underline{\text{Hom}}_d(A', B) \otimes A) & \rightarrow & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A', B), \underline{\text{Hom}}_d(A', B) \otimes A') \\ & \searrow \delta & \downarrow & \nearrow & \\ & & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A', B), \underline{\text{Hom}}_d(A', B) \otimes A') & & \end{array}$$

est commutatif. Ceci est facile et laissé aux lecteurs. \square

On note le résultat suivant même si il ne sera pas utilisé dans la suite :

Proposition 2.1.134. — Soit B un objet de \mathcal{C} . Le foncteur $\underline{\text{Hom}}_d(-, B) : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ est un adjoint à droite du foncteur $\underline{\text{Hom}}_g(-, B) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$. De plus, les 2-morphismes d'unité et de counité sont donnés par (183). On a également les énoncés dual et \otimes -dual.

Démonstration. — Soient A et A' deux objets de \mathcal{C} . On des isomorphismes naturels en A et A' :

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\text{Hom}}_d(A', B)) &\simeq \text{hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes A', B) \\ &\simeq \text{hom}_{\mathcal{C}}(A', \underline{\text{Hom}}_g(A, B)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\underline{\text{Hom}}_g(A, B), A') \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\underline{\text{Hom}}_d(-, B) : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ est l'adjoint à droite de $\underline{\text{Hom}}_g(-, B) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$. La dernière assertion est facile et laissée en exercice. \square

On fait la définition suivante :

Définition 2.1.135. — Un objet R de \mathcal{C} est dualisant à gauche (resp. à droite) si la transformation naturelle :

$$\text{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(-, R), R) \quad (\text{resp.} \quad \text{id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(-, R), R))$$

est inversible. On dit que R est dualisant, s'il est dualisant à gauche et à droite.

On aura besoin des deux lemmes techniques suivants :

Lemme 2.1.136. — Soient A, R et U des objets de \mathcal{C} . Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), R) \\
 \downarrow & & \downarrow \delta \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, U \otimes R), U \otimes R) & \longrightarrow & \\
 & \underline{\mathrm{Hom}}_g(U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), U \otimes R) \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), \underline{\mathrm{Hom}}_g(U, U \otimes R))
 \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — On montrera que le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, U \otimes R), \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, U \otimes R) \otimes A) & \xrightarrow{ev} & \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, U \otimes R), U \otimes R) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \underline{\mathrm{Hom}}_g(U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, U \otimes R) \otimes A) & \xrightarrow{ev} & \underline{\mathrm{Hom}}_g(U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), U \otimes R) & \\
 & \uparrow & \nearrow ev & \parallel & \\
 A \xrightarrow{\delta} \underline{\mathrm{Hom}}_g(U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R) \otimes A) & (2) & \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), \underline{\mathrm{Hom}}_g(U, U \otimes R)) & & \\
 \parallel & \nearrow ev & \uparrow \delta & & \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_g & & \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), R) & & \\
 \uparrow \delta & (3) & \uparrow & & \\
 (\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), \underline{\mathrm{Hom}}_g(U, U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R) \otimes A)) & \xrightarrow{ev} & \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), R) & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R) \otimes A) & & & &
 \end{array}$$

est commutatif. La commutation des parallélogrammes (1), (2) et (3) est évidente. Pour montrer la commutation du triangle :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\mathrm{Hom}}_g(U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, U \otimes R) \otimes A) & \xrightarrow{ev} & \underline{\mathrm{Hom}}_g(U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), U \otimes R) \\
 \uparrow & \nearrow ev & \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_g(U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R) \otimes A) & &
 \end{array}$$

il suffit de montrer la commutation de :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, U \otimes R) \otimes A & \xrightarrow{ev} & U \otimes R \\
 \uparrow & \nearrow ev & \\
 U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R) \otimes A & &
 \end{array}$$

Ce qui est clair par définition. La commutation de :

$$\begin{array}{ccc}
 & \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, U \otimes R), \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, U \otimes R) \otimes A) & \\
 & \downarrow & \\
 & \underline{\mathrm{Hom}}_g(U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, U \otimes R) \otimes A) & \\
 & \uparrow & \\
 A \xrightarrow{\delta} \underline{\mathrm{Hom}}_g(U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R), U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R) \otimes A) & &
 \end{array}$$

découle de la proposition 1.1.5 appliquée au morphisme de foncteurs : $[U \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_d(A, R)] \otimes - \longrightarrow [\underline{\mathrm{Hom}}(A, U \otimes R)] \otimes -$. La commutation de la partie restante s'obtient par le même raisonnement. \square

Lemme 2.1.137. — Soient A, R et U des objets de \mathcal{C} . Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A \xrightarrow{\quad} & \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R)), \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R)) \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A \otimes U, R), \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R)) \\
 \downarrow & & \downarrow \sim \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, A \otimes U) & \xrightarrow{\quad} & \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A \otimes U, R), R))
 \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Notons α la flèche rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 A \xrightarrow{a} \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R)), \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A \otimes U, R), \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R)) & & \\
 \searrow \alpha & & \downarrow \sim c \\
 & & \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A \otimes U, R), R))
 \end{array}$$

avec c l'isomorphisme de la remarque 2.1.131. La flèche a correspond par adjonction à la flèche d'évaluation :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R)) \otimes A \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R)$$

donc, par une deuxième adjonction, à la composée :

$$(\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R)) \otimes A) \otimes U \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R) \otimes U \longrightarrow R$$

Il vient que la composée $b \circ a$ correspond par adjonction à la composée :

$$\begin{aligned}
 (\underline{\mathrm{Hom}}_d(A \otimes U, R) \otimes A) \otimes U &\longrightarrow (\underline{\mathrm{Hom}}_d(A, \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R)) \otimes A) \otimes U \\
 &\longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_d(U, R) \otimes U \longrightarrow R
 \end{aligned}$$

Finalement la composée $\alpha = c \circ b \circ a$ correspond par adjonction à la composée :

$$\begin{array}{c} \underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, R) \otimes (A \otimes U) \\ \downarrow \\ (\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, R) \otimes A) \otimes U \longrightarrow (\underline{\text{Hom}}_d(A, \underline{\text{Hom}}_d(U, R)) \otimes A) \otimes U \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_d(U, R) \otimes U \longrightarrow R \end{array}$$

Cette composée est simplement la morphisme d'unité de l'adjonction $(- \otimes (A \otimes U), \underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, -))$. On déduit que α correspond *via* l'adjonction $(- \otimes U, \underline{\text{Hom}}_d(U, -))$ au morphisme :

$$A \otimes U \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes U, R), R)$$

Ceci prouve le résultat annoncé. \square

Muni des lemmes 2.1.136 et 2.1.137, il est facile de prouver :

Proposition 2.1.138. — *Si R est un objet dualisant à gauche (resp. à droite) de \mathcal{C} et U un objet inversible, alors les objets $U \otimes R$ et $R \otimes U$ sont encore dualisants à gauche (resp. à droite).*

Démonstration. — On traite uniquement le premier cas. Le cas respectif découle par \otimes -dualité. On suppose donc que R est dualisant à gauche. Il s'agit de montrer que les transformations naturelles :

$$\begin{aligned} - \text{ id}_{\mathcal{C}} &\longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(-, U \otimes R), U \otimes R), \\ - \text{ id}_{\mathcal{C}} &\longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(-, R \otimes U), R \otimes U). \end{aligned}$$

sont inversibles. On traite d'abord la première transformation naturelle. Par le lemme 2.1.136, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, R), R) \\ \downarrow & & \downarrow \delta \\ \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, U \otimes R), U \otimes R) & \longrightarrow & (U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R), U \otimes R) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A, R), \underline{\text{Hom}}_g(U, U \otimes R)) \end{array}$$

pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Il suffira donc de prouver que les flèches :

$$U \otimes \underline{\text{Hom}}_d(A, R) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_d(A, U \otimes R) \quad \text{et} \quad R \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(U, U \otimes R)$$

sont inversibles. Ceci est le cas pour la première flèche par 2.1.130. Pour la seconde, on remarque que c'est la unité de l'adjonction $(U \otimes -, \underline{\text{Hom}}_g(U, -))$ et que le foncteur $U \otimes -$ est une équivalence.

Pour la seconde transformation naturelle, on utilisera le lemme 2.1.137. Il suffit en fait de remarquer que $R \otimes U$ est isomorphe à $\underline{\text{Hom}}_d(V, R)$ où V est un inverse à

U . Il suffira donc de prouver que $\underline{\text{Hom}}_d(V, R)$ est dualisant à gauche. Ceci découle immédiatement de la commutation du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & (\underline{\text{Hom}}_d(A, \underline{\text{Hom}}_d(V, R)), \underline{\text{Hom}}_d(V, R)) \xrightarrow{\sim} (\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes V, R), \underline{\text{Hom}}_d(V, R)) \\
 \downarrow & & \downarrow \sim \\
 \underline{\text{Hom}}_d(V, A \otimes V) & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Hom}}_d(V, \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(A \otimes V, R), R))
 \end{array}$$

et du fait que l'unité de l'adjonction $(- \otimes V, \underline{\text{Hom}}_d(V, -))$ est inversible. \square

On a ainsi une « action » à gauche et à droite de la « catégorie groupoïdale » des objets inversibles de $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ sur la catégorie des objets dualisants à gauche. Lorsqu'on se restreint aux objets dualisants, on obtient alors un « tore » sous la « catégorie groupoïdale » des objets inversibles. En effet :

Proposition 2.1.139. — Soient R_1 et R_2 deux objets dualisants de \mathcal{C} . Les quatre objets :

$$\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2) \quad , \quad \underline{\text{Hom}}_g(R_1, R_2) \quad , \quad \underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \quad \text{et} \quad \underline{\text{Hom}}_g(R_2, R_1)$$

sont des objets inversibles. De plus, les morphismes d'évaluations :

$$\begin{array}{ll}
 \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2) \otimes R_1 \xrightarrow{\sim} R_2 & \text{et} \quad R_1 \otimes \underline{\text{Hom}}_g(R_1, R_2) \xrightarrow{\sim} R_2 \\
 \underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \otimes R_2 \xrightarrow{\sim} R_1 & \text{et} \quad R_2 \otimes \underline{\text{Hom}}_g(R_2, R_1) \xrightarrow{\sim} R_1
 \end{array}$$

sont inversibles.

Démonstration. — On sait que les morphismes canoniques :

$$R_1 \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_2) \quad \text{et} \quad R_2 \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1), R_1)$$

sont inversibles. Considérons l'isomorphisme α rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 R_1 \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_2) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1), R_1)) \\
 \searrow \alpha \quad \quad \quad \downarrow \sim \\
 \quad \quad \quad \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \otimes \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_1)
 \end{array}$$

On obtient un isomorphisme $\mathbb{1} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \otimes \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)$ en prenant la flèche β qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_1) \xrightarrow[\sim]{\underline{\text{Hom}}(\alpha, R_1)} \underline{\text{Hom}}_d(\underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \otimes \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_1), R_1) \\
 \uparrow \sim \quad \quad \quad \uparrow \sim \\
 \mathbb{1} \xrightarrow{\quad \beta \quad} \underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1) \otimes \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)
 \end{array}$$

Notons que les flèches verticales sont des isomorphismes puisque R_1 est dualisant à droite. Ceci prouve que $\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1)$ est inversible à gauche et que $\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)$ est inversible à droite. Étant donné que les objets R_1 et R_2 jouent des rôles symétriques, on déduit que les objets $\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)$ et $\underline{\text{Hom}}_d(R_2, R_1)$ sont tous les deux inversibles. Par \otimes -dualité, on déduit que $\underline{\text{Hom}}_g(R_1, R_2)$ et $\underline{\text{Hom}}_g(R_2, R_1)$ sont également inversibles. La première partie de la proposition est prouvée.

Pour terminer la preuve de la proposition, il suffit par symétrie et \otimes -dualité de montrer que le morphisme d'évaluation :

$$(184) \quad \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2) \otimes R_1 \longrightarrow R_2$$

est inversible. Par définition, l'isomorphisme $R_1 \simeq \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_2)$ est la composée :

$$R_1 \xrightarrow{\delta} \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), \underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2) \otimes R_1) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), R_2)$$

La première flèche est un isomorphisme puisque $\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)$ est un objet inversible. Il vient que la seconde flèche est inversible, ce qui se traduit par le fait que le morphisme d'évaluation (184) devient un isomorphisme après application du foncteur $\underline{\text{Hom}}_g(\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2), -)$. Mais ce foncteur est une équivalence puisque $\underline{\text{Hom}}_d(R_1, R_2)$ est inversible. La proposition est prouvée. \square

2.1.5.3. Homomorphismes internes, modules et projecteurs. — Dans ce paragraphe, on étudie la fonctorialité des catégories monoïdales fermées à droite.

Définition 2.1.140. — Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \underline{\text{Hom}})$ et $(\mathcal{C}', \otimes', \underline{\text{Hom}}')$ deux catégories monoïdales fermées à droite. Soit $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur pseudo-monoïdal. On définit un morphisme :

$$f\underline{\text{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}'(f(A), f(B))$$

naturel en $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ par la composée :

$$\begin{aligned} f\underline{\text{Hom}}(A, B) &\xrightarrow{\delta} \underline{\text{Hom}}'(f(A), f\underline{\text{Hom}}(A, B) \otimes' f(A)) \\ &\xrightarrow{a} \underline{\text{Hom}}'(f(A), f(\underline{\text{Hom}}(A, B) \otimes A)) \xrightarrow{ev} \underline{\text{Hom}}'(f(A), f(B)) \end{aligned}$$

Définition 2.1.141. — Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \underline{\text{Hom}})$ et $(\mathcal{C}', \otimes', \underline{\text{Hom}}')$ deux catégories monoïdales fermées. On suppose donné un foncteur pseudo-monoïdal $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ admettant un adjoint à droite $g : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$. On définit des morphismes :

$$(185) \quad \underline{\text{Hom}}(A, g(B')) \longrightarrow g\underline{\text{Hom}}'(f(A), B')$$

naturels en $(A, B') \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}')$ par la composée :

$$\begin{aligned} \underline{\text{Hom}}(A, g(B')) &\longrightarrow gf\underline{\text{Hom}}(A, g(B')) \\ &\longrightarrow g\underline{\text{Hom}}'(f(A), fg(B')) \longrightarrow g\underline{\text{Hom}}'(f(A), B') \end{aligned}$$

Lemme 2.1.142. — On garde les notations et les hypothèses de la définition 2.1.141. Le morphisme de foncteurs $\underline{\text{Hom}}(A, g(-)) \longrightarrow g\underline{\text{Hom}}'(f(A), -)$ correspond via les adjonctions :

$$((- \otimes' f(A)) \circ f, g\underline{\text{Hom}}'(f(A), -)) \quad \text{et} \quad (f \circ (- \otimes A), \underline{\text{Hom}}(A, g(-)))$$

au morphisme de foncteurs :

$$a : (- \otimes f(A)) \circ f \longrightarrow f \circ (- \otimes A)$$

En particulier, lorsque f est monoïdal, la flèche (185) est inversible.

Démonstration. — En effet, le morphisme de la définition 2.1.140, correspond à la face carrée :

$$(186) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xleftarrow{\underline{\text{Hom}}(A, -)} & \mathcal{C} \\ f \downarrow & \cong & \downarrow f \\ \mathcal{C}' & \xleftarrow{\underline{\text{Hom}}'(f(A), -)} & \mathcal{C}' \end{array}$$

obtenue via les adjonctions $(- \otimes A, \underline{\text{Hom}}(A, -))$ et $(- \otimes f(A), \underline{\text{Hom}}'(f(A), -))$ à partir de la face carrée :

$$(187) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{- \otimes A} & \mathcal{C} \\ f \downarrow & \nearrow_a & \downarrow f \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{- \otimes' f(A)} & \mathcal{C}' \end{array}$$

D'autre part, le morphisme de la définition 2.1.141, n'est autre que la face carrée obtenue à partir de (187) via les adjonctions (f, g) et (f, g) . Le résultat découle alors du lemme 1.1.15. \square

La définition suivante généralise 2.1.140 :

Définition 2.1.143. — Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \underline{\text{Hom}})$ et $(\mathcal{C}', \otimes', \underline{\text{Hom}}')$ deux catégories monoïdales fermées à droite. On suppose donné un foncteur pseudo-monoïdal $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et un f -module à droite $(l, b)^{(5)}$. On définit des morphismes :

$$(188) \quad l\underline{\text{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}'(f(A), l(B))$$

⁽⁵⁾Rappelons qu'un f -module à droite est un foncteur $l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ muni de morphismes $l(A) \otimes f(B) \rightarrow l(A \otimes B)$ naturels en A et B .

naturels en $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{C})^2$ par la composée :

$$\begin{aligned} l\text{Hom}(A, B) &\xrightarrow{\delta} \text{Hom}'(f(A), l\text{Hom}(A, B) \otimes' f(A)) \\ &\xrightarrow{b} \text{Hom}'(f(A), l(\text{Hom}(A, B) \otimes A)) \xrightarrow{ev} \text{Hom}'(f(A), l(B)) \end{aligned}$$

Lemme 2.1.144. — Gardons les hypothèses de la définition précédente. On suppose que le foncteur l admet un adjoint à gauche k . La transformation naturelle $l\text{Hom}(A, -) \longrightarrow \text{Hom}'(f(A), l(-))$ correspond via les adjonctions :

$$(k \circ (- \otimes' f(A)), \text{Hom}'(f(A), l(-))) \quad \text{et} \quad ((- \otimes A) \circ k, l\text{Hom}(A, -))$$

au morphisme de projection (voir la proposition 2.1.97) :

$$k \circ (- \otimes' f(A)) \longrightarrow (- \otimes A) \circ k$$

En particulier, lorsque le morphisme structural du projecteur $[f, k]$ est inversible la flèche (188) est inversible.

Démonstration. — Le morphisme de la définition est celui obtenu à partir de la face carrée suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{- \otimes A} & \mathcal{C} \\ l \downarrow & \nearrow_b & \downarrow l \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{- \otimes' f(A)} & \mathcal{C}' \end{array}$$

via les adjonctions $(- \otimes A, \text{Hom}(A, -))$ et $(- \otimes' f(A), \text{Hom}'(f(A), -))$. D'autre part, le morphisme de projection est obtenu de la même face carrée via l'adjonction (k, l) . Le résultat découle maintenant du lemme 1.1.15. \square

Définition 2.1.145. — Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \text{Hom})$ et $(\mathcal{C}', \otimes', \text{Hom}')$ deux catégories monoïdales fermées à droite. On suppose donné un foncteur pseudo-monoïdal $(f, a) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et un f -module à gauche (l, b) . Soit k un adjoint à gauche de l et g un adjoint à droite de f . On définit un morphisme :

$$\text{Hom}(k(A'), B) \longrightarrow g\text{Hom}'(A', l(B))$$

naturel en $(A', B) \in \text{Ob}(\mathcal{C}') \times \text{Ob}(\mathcal{C})$ à partir de :

$$k(f(-) \otimes' A') \longrightarrow - \otimes k(A')$$

via les adjonctions :

$$(k(f(-) \otimes' A'), g\text{Hom}'(A', l(-))) \quad \text{et} \quad (- \otimes k(A'), \text{Hom}(k(A'), -))$$

Lemme 2.1.146. — *Gardons les notations et hypothèses de la définition 2.1.145. Si le morphisme structural du projecteur $[f, k]$ est inversible, alors la flèche :*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(k(A'), B) \xrightarrow{\sim} g\underline{\mathrm{Hom}}'(A', l(B))$$

est inversible pour tout A' et B .

2.1.6. Catégories monoïdales triangulées. — Soit (\mathcal{C}, \otimes) une catégorie monoïdale. Lorsque la catégorie \mathcal{C} est une catégorie additive on aimerait que le foncteur \otimes soit bi-additif. Ainsi, on fait la définition suivante :

Définition 2.1.147

1- Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, \sigma)$ est une catégorie monoïdale additive si la catégorie \mathcal{C} est additif et si le bi-foncteur \otimes est biadditif i.e. pour tout $A \in \mathcal{C}$ les foncteurs $A \otimes -$ et $- \otimes A$ sont additifs.

Lorsqu'en plus la catégorie monoïdale \mathcal{C} est symétrique et/ou unitaire, on parlera de catégorie monoïdale additive, symétrique et/ou unitaire.

2- Les foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. monoïdaux) entre catégories monoïdales additives sont les foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. monoïdaux) entre les catégories monoïdales sous-jacentes qui sont en plus additifs.

Pour les applications qui suivront, on est surtout intéressé par la notion de catégories monoïdales triangulées.

Définition 2.1.148. — Une catégorie monoïdale (resp. monoïdale symétrique) triangulée est une catégorie monoïdale additive $(\mathcal{T}, \otimes, \sigma)$ (resp. $(\mathcal{T}, \otimes, \sigma, \tau)$), avec une structure de catégorie triangulée sur \mathcal{T} ainsi que des isomorphismes :

$$A[+1] \otimes B \xrightarrow[\sim]{s_g} (A \otimes B)[+1] \xleftarrow[\sim]{s_d} A \otimes B[+1]$$

naturels en $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})^2$ et commutant de la manière évidente avec les isomorphismes d'associativité (resp. d'associativité et de commutativité). Deux axiomes supplémentaires sont imposés :

1. Pour tout triangle distingué $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A[+1]$ et tout objet D de \mathcal{T} les deux triangles ci-dessous :

$$A \otimes D \longrightarrow B \otimes D \longrightarrow C \otimes D \longrightarrow (A \otimes D)[+1]$$

$$D \otimes A \longrightarrow D \otimes B \longrightarrow D \otimes C \longrightarrow (D \otimes A)[+1]$$

sont distingués. En d'autres termes, les foncteurs $- \otimes D$ et $D \otimes -$ munis des isomorphismes s_g et s_d respectivement, sont des foncteurs triangulés.

2. Pour tout A et B de \mathcal{T} le carré ci-dessus est commutatif à multiplication par -1 près :

$$\begin{array}{ccc} A[+1] \otimes B[+1] & \longrightarrow & (A[+1] \otimes B)[+1] \\ \downarrow & -1 & \downarrow \\ (A \otimes D[+1])[+1] & \longrightarrow & (C \otimes D)[+2] \end{array}$$

On dégage facilement la notion de foncteurs pseudo-monoïdaux (resp. monoïdaux) triangulés :

Définition 2.1.149. — Soient (\mathcal{T}, \otimes) et (\mathcal{T}', \otimes') deux catégories monoïdales (resp. monoïdales symétriques) triangulées. Un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal symétrique) triangulé de \mathcal{T} dans \mathcal{T}' est un foncteur pseudo-monoïdal (resp. pseudo-monoïdal symétrique) entre les catégories additives monoïdales sous-jacentes, qui soit triangulé et compatible avec les isomorphismes s_g et s_d .

Supposons donnés des objets unités dans \mathcal{T} et \mathcal{T}' . Un foncteur pseudo-monoïdal triangulé et pseudo-unitaire est un simplement un foncteur pseudo-monoïdal triangulé munie d'une flèche e le rendant également un foncteur pseudo-monoïdale et pseudo-unitaire.

Il est utile de considérer les dérivateurs triangulés monoïdaux :

Définition 2.1.150

1- Un dérivateur triangulé monoïdal (resp. monoïdal symétrique) est un dérivateur triangulé \mathbb{D} muni des données supplémentaires suivantes :

- Pour chaque $I \in \text{Ob}(\text{Dia})$ d'une structure de catégorie monoïdale triangulée $(\mathbb{D}(I), \otimes_I, \sigma)$,
- Pour chaque foncteur $u : A \longrightarrow B$ de Dia d'une structure de foncteur monoïdal (resp. monoïdal symétrique) sur u^* .

2- Un dérivateur triangulé monoïdal (resp. monoïdal symétrique) unitaire est un dérivateur triangulé monoïdal (resp. monoïdal symétrique) muni des données supplémentaires suivantes :

- Pour chaque $I \in \text{Ob}(\text{Dia})$ d'une structure de catégorie monoïdale triangulée $(\mathbb{D}(I), \otimes_I, \sigma)$ avec objet unité,
- Pour chaque foncteur $u : A \longrightarrow B$ de Dia d'une structure de foncteur monoïdal (resp. monoïdal symétrique) unitaire sur u^* .

Remarque 2.1.151. — Étant donné un dérivateur triangulé monoïdal (\mathbb{D}, \otimes) on peut définir un produit extérieur \boxtimes de la manière usuelle suivante. Si I et J sont deux catégories de Dia de projections respectives p_I et p_J sur on définit un foncteur bi-additif :

$$\boxtimes : \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J) \longrightarrow \mathbb{D}(I \times J)$$

par la composée suivante :

$$\mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J) \xrightarrow{(p_J \times \text{id})^* \times (\text{id} \times p_I)^*} \mathbb{D}(I \times J) \times \mathbb{D}(I \times J) \xrightarrow{\otimes_{I \times J}} \mathbb{D}(I \times J)$$

On vérifie facilement que si X est un objet de $\mathbb{D}(\mathbf{e})$, les foncteurs $- \boxtimes X$ et $X \boxtimes -$ définissent des morphismes de dérivateurs triangulés.

On a la proposition suivante :

Proposition 2.1.152. — *Soit (\mathcal{T}, \otimes) une catégorie triangulée monoïdale. Supposons que la catégorie monoïdale sous-jacente à \mathcal{T} est fermée à droite. Soit B un objet de \mathcal{T} et considérons le foncteur :*

$$\underline{\text{Hom}}(-, B) : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^{\text{op}}$$

Pour que le foncteur $\underline{\text{Hom}}(-, B)$ soit triangulé il suffit que les deux hypothèses ci-dessous soient vérifiées :

- *La catégorie \mathcal{T} admet des petites sommes et un système de générateurs compacts,*
- *Il existe un dérivateur triangulé monoïdal (\mathbb{D}, \otimes) de domaine une sous-catégorie Dia de \mathbf{Cat} contenant les petites catégories discrètes, tel que $\mathbb{D}(e) = \mathcal{T}$ (en tant que catégorie monoïdale triangulée).*

Démonstration. — Remarquons tout de suite que l'hypothèse \mathcal{C} fermée à droite assure que les foncteurs $- \otimes A$ commutent aux petites sommes pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{T})$.

Soit $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow A[+1]$ un triangle distingué de $\mathcal{T} = \mathbb{D}(\mathbf{e})$. Les axiomes des catégories monoïdales triangulées impliquent que le 2-triangle de foncteurs de \mathcal{T} dans \mathcal{T} :

$$(- \otimes A') \longrightarrow (- \otimes A) \longrightarrow (- \otimes A'') \longrightarrow (- \otimes A)[+1]$$

est distingué. Si on savait montrer que le 2-triangle obtenu par adjonction :

$$\underline{\text{Hom}}(A'', -) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, -) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A', -) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A'', -)[+1]$$

est également distingué la conclusion de la proposition sera vraie. On cherchera ainsi à appliquer la proposition 2.1.66.

Notons que par l'axiome 2 de la définition 2.1.34, le foncteur $\mathbb{D}(\underline{\mathbf{1}}) \longrightarrow \text{HOM}(\underline{\mathbf{1}}^{\text{op}}, \mathbb{D}(e))$ est essentiellement surjectif. Il existe ainsi un objet E de $\mathbb{D}(\underline{\mathbf{1}})$ dont le squelette est :

$$A' \longrightarrow A$$

Il existe alors un morphisme de triangle :

$$\begin{array}{ccccccc} 1^*E & \longrightarrow & 0^*E & \longrightarrow & \text{Cone}(E) & \longrightarrow & 1^*E[+1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & A[+1] \end{array}$$

Le foncteur $- \boxtimes E : \mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbf{1})$ vérifie les conditions de la proposition 2.1.66. En effet on a un morphisme canonique :

$$\mathrm{Cone}(- \boxtimes E) \simeq - \otimes \mathrm{Cone}(E)$$

qui fait commuter le diagramme de foncteurs :

$$\begin{array}{ccccccc} 1^*(- \boxtimes E) & \longrightarrow & 0^*(- \boxtimes E) & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(- \boxtimes E) & \longrightarrow & 1^*(- \boxtimes E)[+1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ - \otimes A' & \longrightarrow & - \otimes A & \longrightarrow & - \otimes A'' & \longrightarrow & - \otimes A[+1] \end{array}$$

fournissant ainsi un isomorphisme de 2-triangles distingués. On peut donc appliquer la proposition 2.1.66 pour conclure. \square

2.1.7. Des hypothèses sur un 2-foncteur homotopique stable. — Soit S un schéma de base. Dans cette section, on regroupe quelques conditions de nature techniques qu'on peut imposer à un 2-foncteur homotopique stable sur Sch/S (voir la définition 1.4.1). On commence par la condition la plus simple :

Définition 2.1.153. — Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}$ une \mathbb{Z} -algèbre. Un 2-foncteur homotopique stable $H : \mathrm{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ est dit Λ -linéaire si l'une des conditions équivalentes ci-dessus est vérifiée :

- Pour tout S -schéma X , les groupes de morphismes de la catégorie additive $H(X)$ sont naturellement des Λ -modules.
- Pour tout S -schéma X , tout objet A de $H(X)$ et tout entier naturel n , la flèche $n \cdot \mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$ est inversible dès que l'élément $n \in \Lambda$ l'est.

Notons que l'équivalence des deux conditions découle du fait que les sous-anneaux de \mathbb{Q} sont tous de la forme $\mathbb{Z}[1/p, p \in I]$ où I est une partie de l'ensemble des nombres premiers.

On peut également définir la notion de 2-foncteur homotopique stable Λ -linéaire pour un anneau Λ quelconque. Notons toutefois que pour $\Lambda \not\subseteq \mathbb{Q}$ et Λ différent d'un produit de corps premiers finis distincts, cette notion n'est pas une propriété mais une structure supplémentaire.

On continue avec la définition suivante :

Définition 2.1.154

1- Un 2-foncteur homotopique stable $H : \mathrm{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ avec petites sommes est un 2-foncteur homotopique stable H tel que les catégories triangulée $H(X)$ admettent les petites sommes pour tous les S -schémas quasi-projectifs X .

2- On dit d'un 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ qu'il est compactement engendré si pour tout S -schéma X , la catégorie $H(X)$ est compactement engendrée.

Plus intéressant que la définition précédente :

Définition 2.1.155

1- On dit qu'un 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ est engendré par la base si pour tout S -schéma quasi-projectif X , on a l'égalité :

$$\ll \{f_{\#}\pi_Y^* A, f : Y \longrightarrow X \text{ lisse et } A \in \text{Ob}(H(S))\} \gg = H(X)$$

où $\pi_Y = \pi_X \circ f$ désigne la projection sur la base.

2- On dit que H est compactement engendré par la base si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- Pour tout S -morphisme f le foncteur f^* envoie un objet compact sur un objet compact,
- Il existe un ensemble d'objets compacts $\Lambda \subset H(S)$ tel que pour tout S -schéma quasi-projectif X , on a l'égalité :

$$\ll \{f_{\#}\pi_Y^* A, f : Y \longrightarrow X \text{ lisse et } A \in \Lambda\} \gg = H(X)$$

où $\pi_Y = \pi_X \circ f$ désigne la projection sur la base.

Remarque 2.1.156. — Un 2-foncteur homotopique stable H avec petites sommes et compactement engendré par la base prend ses valeurs parmi les catégories triangulées compactement engendrée au sens de la définition 2.1.20. En effet les objets $f_{\#}\pi_Y^* A$ sont compacts pour A compact puisque $f_{\#}$ admet un adjoint à droite commutant aux petites sommes. D'autre part, la classe d'objets considérée dans la définition 2.1.155 est essentiellement équivalente à un ensemble puisque c'est le cas pour la classe des morphismes lisses.

Lemme 2.1.157. — Soit $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ un 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes. Les cinq conditions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $f : Y \longrightarrow X$ les 4 foncteurs f^* , f_* , $f_!$ et $f^!$ commutent aux petites sommes,
2. Pour tout $f : Y \longrightarrow X$ le foncteur f_* commute aux petites sommes,
3. La même chose que la condition précédente avec f une immersion ouverte,
4. Pour tout $f : Y \longrightarrow X$ le foncteur $f^!$ commute aux petites sommes,
5. La même chose que la condition précédente avec f une immersion fermée.

Démonstration. — Notons que les opérations f^* et $f_!$ commutent aux petites sommes puisqu'ils admettent des adjoints à gauche. Ainsi, si on démontre que $(2) \iff (4)$ on a immédiatement que : (1) équivaut également à (2) et (4).

Notons d'autre part que $(2) \iff (3)$ et $(4) \iff (5)$. Pour la première équivalence, il suffit de factoriser un S -morphisme par une immersion ouverte suivie d'un morphisme projectif et d'utiliser le fait que pour f projectif, $f_* = f_!$ commute aux petites sommes. Pour la deuxième équivalence, il suffit de factoriser un S -morphisme par une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse et de remarquer que lorsque f est lisse, $f^! = \mathrm{Th}(\Omega_f)f^*$ commute également aux petites sommes.

Pour terminer, il suffit de montrer l'équivalence : $(3) \iff (5)$. Elle découle facilement du 2-triangle distingué de localité (voir la proposition 1.4.9). \square

Définition 2.1.158. — Gardons les hypothèses du lemme précédent. Si les cinq conditions équivalentes sont satisfaites, on dit \mathbf{H} est parfait pour les petites sommes.

Lemme 2.1.159. — Soit \mathbf{H} un 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes et compactement engendré par la base. Alors \mathbf{H} est parfait pour les petites sommes.

Démonstration. — En effet, soit j une immersion ouverte. Le foncteur j^* envoie objet compact sur objet compact. Il vient que sont adjoint à droite j_* commute aux petites sommes puisque la catégorie $\mathbf{H}(\mathrm{Source}(j))$ est compactement engendrée. \square

On termine les définitions avec les deux notions de séparé et semi-séparé :

Définition 2.1.160. — Soit $\mathbf{H} : \mathrm{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ un 2-foncteur homotopique stable.

1- On dit que \mathbf{H} est séparé si pour tout S -morphisme $f : Y \longrightarrow X$ surjectif le foncteur f^* est conservatif.

2- On dit \mathbf{H} est semi-séparé si pour tout S -morphisme $e : X' \longrightarrow X$ fini surjectif et totalement inséparable le foncteur e^* est conservatif.

Remarque 2.1.161. — Soit X un S -schéma et $i : X_{\mathrm{red}} \longrightarrow X$ l'immersion fermée de son sous-schéma réduit. L'axiome de localité appliqué à l'immersion i de complémentaire l'ouvert \emptyset , montre que le foncteur i^* est conservatif. En écrivant le triangle de localité, on trouve même que i^* est une équivalence. En particulier, lorsque S est un schéma d'égale caractéristique nulle, \mathbf{H} est automatiquement semi-séparé. En effet, les morphismes finis surjectifs et totalement inséparables entre schémas d'égale caractéristique nulle deviennent des isomorphismes après passage aux schémas réduits.

La proposition suivante donne un critère simple pour qu'un 2-foncteur homotopique stable soit séparé.

Proposition 2.1.162. — Soit $H : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ un 2-foncteur homotopique stable sur une base noethérienne S . Supposons que les foncteurs f^* sont conservatifs pour les S -morphisms $f : X' \longrightarrow X$ tels que :

- X et X' des schémas intègres et f fini surjectif,
- f admet une factorisation : $f = e \circ f_0$ avec f_0 un revêtement étale et e fini surjectif et totalement inséparable.

Alors H est séparé.

Démonstration. — En effet, soit $h : Y \longrightarrow X$ un morphisme surjectif et montrons que h^* est conservatif en admettant l'hypothèse de l'énoncé. On raisonne par récurrence noethérienne sur X . Si U est un ouvert de X et Z le complémentaire, on forme le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & T \\ g \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow l \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Z \end{array}$$

Si U est non vide, par la récurrence noethérienne, l^* est conservatif. En utilisant l'axiome de localité, on voit que l'on peut remplacer X par n'importe quel ouvert non vide. En particulier on peut supposer X intègre. Quitte à prendre le normalisé du produit fibré par une extension totalement inséparable $e : X_0 \longrightarrow X$ on peut supposer que le lieu de lissité de la fibre générique de f est non vide. Il existe alors une section localement pour la topologie étale. Les détails sont laissés aux lecteurs. \square

Proposition 2.1.163. — Soit H un 2-foncteur homotopique stable semi-séparé. Soit $e : X' \longrightarrow X$ un S -morphisme fini surjectif et totalement inséparable. Le foncteur e^* est une équivalence de catégories.

Démonstration. — En effet, formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' \times_X X' & \xrightarrow{pr_2} & X' \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow e \\ X' & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

Comme e est totalement inséparable, les morphismes pr_i induisent des isomorphismes :

$$(pr_i)_{\text{red}} : (X' \times_X X')_{\text{red}} \longrightarrow (X')_{\text{red}}$$

Pour montrer que e^* est une équivalence de catégories, on montrera que les morphismes d'adjonctions :

$$1 \longrightarrow e_* e^* \quad \text{et} \quad e^* e_* \longrightarrow 1$$

sont inversibles.

Pour le morphisme d'unité, on utilise que le foncteur e^* est conservatif par semi-séparabilité. Il suffit donc de montrer que le morphisme :

$$e^* \longrightarrow e^*(e_*e^*)$$

est un 2-isomorphisme. Mais par le théorème de changement de base appliqué au morphisme fini e , on a les isomorphismes canoniques :

$$(189) \quad e^*e_*e^* \simeq pr_{1*}pr_2^*e^* \simeq pr_{1*}pr_1^*e^*$$

De plus modulo cette identification, le morphisme (189) est simplement le morphisme d'unité de (pr_1^*, pr_{1*}) :

$$e^* \longrightarrow (pr_1^*pr_{1*})e^*$$

Ce morphisme est un isomorphisme puisque pr_1^* est une équivalence étant donné que $(pr_1)_{\text{red}}$ est un isomorphisme de schémas.

Pour le morphisme de counité, on remarque que lorsqu'on applique le 1-morphisme e_* à $e^*e_* \longrightarrow 1$ on obtient un 2-isomorphisme. En effet le 2-morphisme (provenant de la counité de l'adjonction) $e_*e^*e_* \longrightarrow e_*$ est un inverse à droite du 2-morphisme (provenant de l'unité de l'adjonction) : $e_* \longrightarrow e_*e^*e_*$. Ce dernier est inversible puisqu'on a montré que l'unité est inversible. Il suffira donc de prouver que le foncteur e_* est lui aussi conservatif. Sachant que e^* est conservatif, il suffit de prouver que la composée e^*e_* est conservative. Mais par l'isomorphisme de changement de base $e^*e_* \simeq pr_{1*}pr_2^*$. Le résultat découle alors du fait que pr_i^* et pr_{i*} sont des équivalences inverses l'une de l'autre, puisque $(pr_i)_{\text{red}}$ est un isomorphisme de schémas. \square

Corollaire 2.1.164. — *On suppose que \mathbf{H} est semi-séparé. Soit $e : X' \longrightarrow X$ un pseudo-revêtement étale i.e. un revêtement étale r suivi d'un morphisme fini surjectif et totalement inséparable e_0 . Les foncteurs $e^!$ et e^* sont naturellement isomorphes.*

Démonstration. — On sait que $r^! = r^*$ étant donné que le faisceau Ω_r est nul. Il suffit de montrer que $e_0^! = e_0^*$. Par la proposition 2.1.163, on sait que $e_{0*} = e_{0!}$ est une équivalence. Il est bien connu que les adjoints à gauche et à droite d'une équivalence sont isomorphe entre eux. Il vient que l'adjoint à gauche $e_0^!$ de e_{0*} est isomorphe à l'adjoint à droite $e_0^!$ de $e_{0!}$. \square

L'hypothèse de séparabilité sera souvent utilisée *via* le lemme :

Lemme 2.1.165

1- Soit $\mathbf{H} : \mathbf{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ un 2-foncteur homotopique stable $\mathbb{Z}_{(n)}$ -linéaire et séparé. Soit $e : X' \longrightarrow X$ un pseudo-revêtement étale de S -schémas de partie étale r de degré divisant n . En utilisant le corollaire 2.1.164, on définit un 2-morphisme par la composée :

$$1 \longrightarrow e_*e^* \xleftarrow{\sim} e_!e^! \longrightarrow 1$$

Ce 2-morphisme est inversible.

2- Pour simplifier, on supposera que les catégories $\mathbf{H}(-)$ sont pseudo-abéliennes. On garde les hypothèses du 1. Supposons en plus que la partie étale r est galoisienne de groupe G . Le groupe G agit alors sur les 1-morphismes e_*e^* et $e_!e^!$ et le projecteur :

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

définit des facteurs directes $F_* \subset e_*e^*$ et $F_! \subset e_!e^!$. Les 2-morphismes évidents :

$$1 \longrightarrow F_* \quad \text{et} \quad F_! \longrightarrow 1$$

sont inversibles.

Démonstration

1- Il suffit de prouver que cette transformation naturelle est inversible après application du foncteur $g^* = g^!$ avec $g : Y \longrightarrow X$ une pseudo-revêtement étale pseudo-galoisien qui domine r :

$$(190) \quad g^* \longrightarrow g^*e_*e^* \xleftarrow{\sim} g^*e_!e^! \longrightarrow g^*$$

Considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & X' \\ e' \downarrow & & \downarrow e \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Le morphisme Y'/Y est alors la somme disjointe de d morphismes finis surjectifs totalement inséparables (où d est le degré de la partie étale r de e). Ces morphismes finis surjectifs et totalement inséparables induisent même un isomorphisme après passage aux schémas réduits.

Il est facile de voir que la composée de (190) est égale à :

$$(191) \quad g^* \longrightarrow e'_*e'^*g^* \xleftarrow{\sim} e'_!e'^!g^* \longrightarrow g^*$$

On se ramène ainsi à traiter le cas où r est un revêtement trivial (*i.e.* somme de d copies) et $e_0 = \text{id}$. Il est facile de voir que dans ce cas, la composée est simplement la multiplication par le degré d .

2- Le même raisonnement qu'on vient d'utiliser, nous ramène à prouver la conclusion pour e la projection de $\coprod_G X \longrightarrow X$ avec l'action évidente de G . C'est là un exercice facile. \square

2.1.8. Résolution des singularités. — On termine nos préliminaires par un petit paragraphe concernant les questions de résolutions des singularités.

Définition 2.1.166. — Soit S un schéma noethérien. On dit que S admet la résolution des singularités par éclatements, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout S -schéma quasi-projectif X , il existe un éclatement $m : X' \longrightarrow X$ avec X' un schéma régulier,
2. Pour tout S -schéma régulier Y et tout sous-schéma $Z \subset Y$, il existe un éclatement $e : Y' \longrightarrow Y$ de centre inclus dans le lieu de non régularité de Z tel que :
 - Y' est encore régulier,
 - Le diviseur exceptionnel E de e est un diviseur à croisements normaux,
 - Le transformé pur Z' de Z est régulier, et coupe transversalement E .

Remarque 2.1.167. — Lorsque le schéma S est lui même régulier, la première condition est conséquence de la seconde puisqu'un schéma quasi-projectif est un sous-schéma de \mathbb{P}_S^n .

Remarque 2.1.168. — La résolution des singularités est connue pour les bases S qui sont des schémas essentiellement de type fini sur un corps k de caractéristique zéro. C'est là, un théorème profond de la géométrie algébrique dû à Hironaka. La résolution des singularités est conjecturée sur des bases plus générales comme les corps finis et les anneaux de valuation discrète d'inégale caractéristique.

Remarque 2.1.169. — On fera attention, qu'un corps k admettant la résolution des singularités, n'est pas forcément parfait.

La résolution des singularités par éclatements étant toujours ouverte en caractéristique positive, des techniques ont été développées pour la remplacer dans les applications. La technique de résolution des singularités par altération à la de Jong est sûrement la plus connue. Elle permet souvent de contourner la résolution des singularités au prix de quelques hypothèses supplémentaires parmi ceux introduits dans le paragraphe précédent.

Définition 2.1.170. — Soit X un schéma noethérien. Une altération est un morphisme projectif $e : X' \longrightarrow X$ tel qu'il existe un ouvert Zariski dense U de X au-dessus duquel e est fini.

Deux sortes d'altérations apparaissent dans les résultats de De Jong :

- Une altération est dite génériquement étale si l'ouvert U peut être choisi de sorte que $e|_{e^{-1}(U)} : e^{-1}(U) \longrightarrow U$ soit étale.
- Une altération est dite génériquement pseudo-galoisienne, si l'ouvert U peut être choisi de sorte que $e|_{e^{-1}(U)} : e^{-1}(U) \longrightarrow U$ soit la composé d'un revêtement étale galoisien suivi d'une extension totalement inséparable.

Voici les résultats de désingularisation de De Jong qu'on aura à utiliser par la suite :

Théorème 2.1.171

1- Soit X un schéma de type fini sur un corps ou un anneau de valuation discrète. Il existe une altération génériquement étale $e : X' \longrightarrow X$ avec X' régulier. Il existe également une altération génériquement pseudo-galoisienne $e' : X'' \longrightarrow X$ avec X'' régulier.

2- Soit X un schéma régulier de type fini sur un corps ou un anneau de valuation. Soit $Y \subset X$ un sous-schéma de X . Il existe une altération génériquement étale $e : X' \longrightarrow X$ tel que $e^{-1}(Y)$ soit un diviseur à croisements normaux. Il existe également une altération génériquement pseudo-galoisienne $e' : X'' \longrightarrow X$ avec la même propriété.

Définition 2.1.172. — Soit S un schéma noethérien. On dit que S admet la résolution des singularités par altération lorsque :

- Tout S -schéma quasi-projectif X vérifie la conclusion de la première partie du théorème 2.1.171,
- Tout S -schéma quasi-projectif et régulier X vérifie la conclusion de la seconde partie du théorème 2.1.171

2.2. Engendrement de sous-catégories et de t -structures dans un 2-foncteur homotopique stable.

Soit S un schéma noethérien admettant une famille ample de fibrés en droites. On note (Sch/S) la catégorie des S -schémas quasi-projectifs (*i.e.* de type fini et admettant une immersion dans $\mathbb{P}(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} un \mathcal{O}_S -module localement libre de rang fini). On se donne un 2-foncteur homotopique stable $H : (\text{Sch}/S) \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ au sens de la définition 1.4.1.

Dans cette section, on définit des sous-catégories $\mathbf{C}(-) \subset H(-)$ par engendrement et on étudie la question de la stabilité de \mathbf{C} par les quatre opérations. Ensuite, on définit (sous certaines conditions) des t -structures sur les catégories $H(-)$ et on considère la question de la t -exactitude des opérations.

2.2.1. Définitions des sous-catégories engendrées et propriétés élémentaires de stabilité. — Soit A un objet de $H(S)$. Pour tout S -schéma $f : X \longrightarrow S$, on pose :

$$A_X = f^* A \in \text{Ob}(H(X))$$

Ainsi pour tout morphisme $g : Y \longrightarrow X$ de S -schémas, les 2-morphismes de connexions de H^* fournissent un isomorphisme dans $H(Y)$:

$$A_Y \longrightarrow g^* A_X$$

Ceci justifie l'abus de notation quelquefois utilisé : $A = A_X$.

Définition 2.2.1. — Supposons donnée une classe d'objets $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(S))$. Pour tout S -schéma X , on notera $\Lambda(X) \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$ la classe formée des objets $g_{\#}A_U$ avec $A \in \Lambda$ et $g : U \longrightarrow X$ un S -morphisme lisse.

Remarque 2.2.2. — Lorsque Λ est un ensemble (et pas seulement une classe) d'objets, il existe un ensemble d'objets $\Lambda(X)'$ contenu dans $\Lambda(X)$ et essentiellement équivalent à $\Lambda(X)$ i.e. tel que tout objet de $\Lambda(X)$ soit isomorphe à un objet de $\Lambda(X)'$. En effet pour construire un tel $\Lambda(X)'$ on choisit un ensemble L de S -morphisms lisses de but X représentant les classes d'isomorphismes des S -morphisms lisses de but X . Un tel ensemble L existe puisque les S -morphisms lisses de but X sont des morphismes de type fini donc paramétrés par un ensemble. Une fois l'ensemble L choisi, on prend pour $\Lambda(X)'$ l'ensemble des objets de la forme $f_{\#}A$ avec f dans L et A dans Λ .

Dans la suite, une classe d'objets $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(S))$ sera fixée.

Définition 2.2.3. — Soit X un S -schéma quasi-projectif :

1- Avec les notations de la définition 2.1.6, on pose : $\mathbf{H}_{\Lambda}^{s-ct}(X)_{?} = \langle \Lambda(X) \rangle_{?}^{s-ct} \subset \mathbf{H}(X)$ avec $? \in \{\emptyset, -, +\}$. Les objets de $\mathbf{H}_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ seront appelés les objets strictement constructibles (ou Λ -strictement constructibles lorsque le contexte permet une confusion). De même, les objets de $\mathbf{H}_{\Lambda}^{s-ct}(X)_{-}$ (resp. $\mathbf{H}_{\Lambda}^{s-ct}(X)_{+}$) sont appelés négativement (resp. positivement) strictement constructibles.

2- Avec les notations de la définition 2.1.10, on note $\mathbf{H}_{\Lambda}^{ct}(X)_{?} = \langle \Lambda(X) \rangle_{?}^{ct} \subset \mathbf{H}(X)$ avec $? \in \{\emptyset, -, +\}$. Les objets de $\mathbf{H}_{\Lambda}^{ct}(X)$ seront appelés les objets constructibles (ou Λ -constructibles lorsque le contexte permet une confusion). De même, les objets de $\mathbf{H}_{\Lambda}^{ct}(X)_{-}$ (resp. $\mathbf{H}_{\Lambda}^{ct}(X)_{+}$) sont appelés négativement (resp. positivement) constructibles.

Dans la suite, on utilisera sans le préciser les lemmes 2.1.7 et 2.1.11. De même, le résultat facile suivant permettra de déduire des propriétés sur les objets constructibles de leurs analogues sur les positivement constructibles :

Lemme 2.2.4. — Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un foncteur triangulé entre deux catégories triangulées. Soit $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathcal{T})$ et $\Lambda' \subset \text{Ob}(\mathcal{T}')$ deux classes d'objets. Considérons les assertions suivantes :

1. $f(\langle \Lambda \rangle_{+}^{s-ct}) \subset \langle \Lambda' \rangle_{+}^{s-ct}$,
2. $f(\langle \Lambda \rangle_{+}^{ct}) \subset \langle \Lambda' \rangle_{+}^{ct}$,
3. $f(\langle \Lambda \rangle^{s-ct}) \subset \langle \Lambda' \rangle^{s-ct}$,
4. $f(\langle \Lambda \rangle^{ct}) \subset \langle \Lambda' \rangle^{ct}$.

On a les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} (1) & \implies & (2) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (3) & \implies & (4) \end{array}$$

Démonstration. — L'implication (3) \implies (4) découle de $\Lambda \subset f^{-1}(< \Lambda' >^{s-ct}) \subset f^{-1}(< \Lambda' >^{ct})$ et du fait que la sous-catégorie triangulée $< \Lambda' >^{ct}$ est stable par facteurs directs. Les autres implications se démontrent de manière analogue. \square

2.2.1.1. Stabilité par $f_{\#}$ et f^ .* — On commence notre liste des propriétés élémentaires par le résultat facile suivant :

Proposition 2.2.5. — *Soient $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs et $? \in \{\emptyset, +, -\}$:*

1. *Le 1-morphisme $f^* : H(X) \longrightarrow H(Y)$ envoie la sous-catégorie $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_{?}$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)_{?}$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)_{?}$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)_{?}$),*
2. *Si f est lisse, le 1-morphisme $f_{\#} : H(Y) \longrightarrow H(X)$ envoie la sous-catégorie $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)_{?}$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)_{?}$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_{?}$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)_{?}$).*

Démonstration. — Le second point découle facilement de l'inclusion (à isomorphisme près) $f_{\#}\Lambda(Y) \subset \Lambda(X)$. Pour montrer le premier point, on vérifie qu'on a également $f^*\Lambda(X) \subset \Lambda(Y)$ à isomorphisme près.

Soit $A \in \Lambda$ et $g : U \longrightarrow X$ un S -morphisme lisse. Formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f'} & U \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Le 2-morphisme d'échange $Ex_{\#}^* : g'_{\#}f'^* \longrightarrow f^*g_{\#}$ est un 2-isomorphisme. On déduit que l'objet $f^*(g_{\#}A_U)$ est isomorphe à $g'_{\#}f'^*A_U$ et donc à $g'_{\#}A_V \in \Lambda(Y)$. \square

On en déduit le corollaire :

Corollaire 2.2.6. — *Soient X un S -schéma quasi-projectif et A un objet de $H(X)$. Soit $(U_k)_{k=1,\dots,r}$ un recouvrement Zariski de X , et notons j_k l'immersion de U_k dans X . Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :*

- *L'objet A est dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_{+}$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)_{+}$, $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$, $H_{\Lambda}^{ct}(X)$),*
- *Pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, l'objet j_k^*A est dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_k)_{+}$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(U_k)_{+}$, $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_k)$, $H_{\Lambda}^{ct}(U_k)$).*

Démonstration. — La première assertion implique la seconde par la proposition 2.2.5. On s'intéresse donc à l'implication réciproque.

On suppose que j_k^*A est dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_k)_{+}$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(U_k)_{+}$, $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_k)$, $H_{\Lambda}^{ct}(U_k)$) pour tout k . Si I est une partie *non vide* de $\{1, \dots, r\}$, on notera U_I l'intersection des U_k pour $k \in I$ et j_I l'inclusion de U_I dans X . Toujours par la proposition 2.2.5, l'objet j_I^*A est dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_I)_{+}$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(U_I)_{+}$, $H_{\Lambda}^{s-ct}(U_I)$, $H_{\Lambda}^{ct}(U_I)$) car pour I non vide et $k \in I$, on a un isomorphisme $j_I^*A \simeq j_{I,k}^*(j_k^*A)$ avec $j_{I,k}$ l'inclusion de U_I dans U_k .

Raisonnons par récurrence sur r . Lorsque $r = 1$ il y a rien à démontrer. Si $r = 2$, on utilise le triangle de Mayer-Vietoris :

$$j_{12\#}j_{12}^*A \longrightarrow j_{1\#}j_1^*A \oplus j_{2\#}j_2^*A \longrightarrow A \longrightarrow j_{12\#}j_{12}^*A[+1]$$

Le résultat découle alors de la proposition 2.2.5 et le fait que la catégorie $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_+$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)_+$, $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$, $H_{\Lambda}^{ct}(X)$) est suspendue.

Enfin si $r \geq 3$, on se ramène au cas $r - 1$ en considérant le recouvrement $(V_k)_{k=1,\dots,r-1}$ donné par $V_k = U_k$ pour $k \leq r - 2$ et $V_{r-1} = U_{r-1} \cup U_r$. Pour vérifier que ce recouvrement possède encore la propriété de l'énoncé, on applique le cas $r = 2$ au recouvrement de V_{r-1} par U_{r-1} et U_r . \square

Remarque 2.2.7. — Le corollaire 2.2.6 est faux en général pour les sous-catégories $H_{\Lambda}^{s-ct}(-)_-$. En effet, l'argument utilisant le triangle de Mayer-Vietoris, ne s'applique plus puisque ces sous-catégories sont cosuspendues et non suspendues.

2.2.1.2. Stabilité par $i_!$ avec i une immersion. — Dans ce paragraphe, on établit le résultat suivant :

Proposition 2.2.8. — Soit $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion localement fermée de S -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme $i_!$ envoie la sous-catégorie $H_{\Lambda}^{s-ct}(Z)_+$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Z)_+$, $H_{\Lambda}^{s-ct}(Z)$, $H_{\Lambda}^{ct}(Z)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)_+$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)_+$, $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$, $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$).

Dans la suite on considérera uniquement le premier cas. On fera attention que les S -schémas Z et Y ne sont pas supposés réduits. La preuve de la proposition 2.2.8 repose sur les quatre lemmes 2.2.9, 2.2.10, 2.2.11 et 2.2.13. Le premier de ces lemmes, traite un cas particulier :

Lemme 2.2.9. — Soit A un objet de Λ . Pour toute immersion $i : Z \longrightarrow Y$ de S -schémas quasi-projectifs, l'objet $i_!A_Z$ de $H(Y)$ est dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)_+$.

Démonstration. — On peut écrire $i = b \circ i'$ avec b une immersion ouverte et i' une immersion fermée :

$$Z \xrightarrow{i'} Y_0 \xrightarrow{b} Y$$

On en déduit que $i_! \simeq b_!i'_! \simeq b_{\#}i'_*$. Étant donné que le 1-morphisme $b_{\#}$ envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y_0)_+$ dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)_+$, il suffira de prouver que l'objet i'_*A_Z est positivement strictement constructible. Pour cela, on utilise le triangle de localité :

$$j'_{\#}j'^*A_{Y_0} \longrightarrow A_{Y_0} \longrightarrow i'_*i'^*A_{Y_0} \longrightarrow j'_{\#}j'^*A_{Y_0}[+1]$$

où j' est l'immersion ouverte complémentaire à i' . Le lemme découle alors du fait que A_{Y_0} et $j'_{\#}j'^*A_{Y_0}$ sont positivement strictement constructibles. \square

Le lecteur attentif a sûrement remarqué que la proposition 2.2.8 découle immédiatement de son cas particulier : i une immersion fermée. En effet, il suffit de considérer la factorisation $i = b \circ i'$ introduite dans la preuve du lemme précédent. Ceci dit, il

est plus pratique de considérer l'énoncé 2.2.8 avec des immersions générales plutôt qu'avec des immersions fermées en vue du lemme suivant :

Lemme 2.2.10. — Soient $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion de S -schémas quasi-projectifs et E un objet de $\mathbf{H}(Z)$. Soit $v : V \subset Z$ une immersion ouverte et $t : T \subset Z$ le fermé complémentaire. Supposons que les objets $(i \circ v)_! v^* E$ et $(i \circ t)_! t^* E$ sont dans $\mathbf{H}_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$. Alors il en est de même de l'objet $i_! E$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que $(i \circ v)_! \simeq i_! v_\#$ et $(i \circ t)_! \simeq i_! \circ t_*$. En appliquant $i_!$ au triangle distingué de localité :

$$v_\# v^* E \longrightarrow E \longrightarrow i_* i^* E \longrightarrow$$

on voit que $i_! E$ est une extension de $(i \circ v)_! v^* E$ par $(i \circ t)_! t^* E$. \square

Le troisième lemme qu'on admettra provisoirement est un ingrédient géométrique :

Lemme 2.2.11. — Soient $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion (avec Z non vide) et $g : X \longrightarrow Z$ un morphisme lisse. Tout point générique η de Z admet un voisinage ouvert V suffisamment petit tel que les données suivantes existent :

- Une famille finie de morphismes lisses $h_k : R_k \longrightarrow Y$,
- Des immersions ouvertes $R_k \times_Y V \longrightarrow X \times_Z V$ de V -schémas formant un recouvrement de $X \times_Z V$ pour la topologie de Zariski.

Remarque 2.2.12. — Soient $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion et $g : X \longrightarrow Z$ un Z -schéma lisse. On dit que g provient d'un Y -schéma lisse, s'il existe un Y -schéma lisse $h : R \longrightarrow Y$ est un isomorphisme $R \times_Y Z \simeq X$. Ainsi le lemme ci-dessus dit simplement que pour tout Z -schéma lisse X et tout point générique η de Z , il existe un voisinage V de η dans Z et un recouvrement Zariski de $X|_V = X \times_Z V$ par des V -schémas lisses qui proviennent de Y -schémas lisses (cette fois ci par produit fibré suivant l'immersion de V).

Le dernier lemme est d'un intérêt indépendant du problème considéré :

Lemme 2.2.13. — Soit $(X_k)_{k=1,\dots,r}$ un recouvrement Zariski d'un S -schéma quasi-projectif X . Pour $I \subset \{1, \dots, r\}$ non vide, on note j_I l'immersion ouverte de $\bigcap_{k \in I} X_k$ dans X . Tout objet E de $\mathbf{H}(X)$ appartient à la sous-catégorie suspendue :

$$< \{j_{I\#} j_I^* E; I \subset \{1, \dots, r\} \text{ non vide} \} >_+^{s-ct}$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur l'entier r . Lorsque $r = 1$, il n'y a rien à prouver.

Supposons que $r \geq 2$. On définit un recouvrement à $r - 1$ ouverts $(X'_k)_{k=1,\dots,r-1}$ par : $X'_k = X_k$ pour $k \in \{1, \dots, r-2\}$ et $X'_{r-1} = X_{r-1} \cup X_r$. Pour $K \subset \{1, \dots, r-1\}$

non vide on note j'_K l'immersion de l'ouvert $\cup_{k \in K} X'_k$. L'hypothèse de récurrence nous dit que l'objet E est dans la sous-catégorie :

$$< \{j'_K \# j_K^* E; K \subset \{1, \dots, r-1\} \text{ non vide} \} >_+^{s-ct}$$

Pour prouver ce que l'on cherche, il suffit de montrer que les objets $j'_K \# j_K^* E$ sont dans :

$$< \{j_I \# j_I^* E; I \subset \{1, \dots, r\} \text{ non vide} \} >_+^{s-ct}$$

On distinguera deux cas : selon que K contient ou pas $r-1$. Lorsque la partie K ne contient pas $r-1$, l'immersion j'_K est simplement j_K . L'assertion est donc claire pour l'objet $j'_K \# j_K^* E$. Lorsque K contient $r-1$, l'immersion j'_K est l'union des immersions j_K et $j_{K'}$ avec $K' = (K - \{r-1\}) \cup \{r\} \subset \{1, \dots, r\}$. Ainsi si $L = K \cup \{r\}$, on a un triangle de Mayer-Vietoris :

$$j_L \# j_L^* E \longrightarrow j_K \# j_K^* E \oplus j_{K'} \# j_{K'}^* E \longrightarrow j'_K \# j_K^* E \longrightarrow$$

D'où l'assertion dans le second cas. \square

On utilisera le lemme 2.2.13 sous la forme du corollaire :

Corollaire 2.2.14. — Soient $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion, $g : X \longrightarrow Z$ un Z -schéma lisse et A un objet de Λ .

Soit $(X_k)_{k=1, \dots, r}$ un recouvrement Zariski de X . Pour $I \subset \{1, \dots, r\}$ non vide, on note j_I l'immersion ouverte de $\cap_{k \in I} X_k$ dans X . Supposons que $i_*(g \circ j_I) \# A$ est dans $H_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$ pour toutes les parties non vides I de $\{1, \dots, r\}$. Alors $i_* g \# A_X$ est également dans $H_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$.

Muni des quatre lemmes ci-dessus, il est facile de prouver la proposition 2.2.8. Supposons le S -schéma Y fixé, et raisonnons par récurrence noethérienne sur l'adhérence de Z . Lorsque Z est vide il n'y a rien à démontrer. Sinon, on choisit un objet $g \# A_X$ de $\Lambda(Y)$ avec $g : X \longrightarrow Z$ lisse et $A \in \Lambda$ et on essaye de montrer que $i_* g \# A_X$ est positivement strictement constructible.

Soit $v : V \longrightarrow Z$ une immersion ouverte vérifiant la propriété du lemme 2.2.11 (relativement au Z -schéma lisse g). Notons $t : T \subset Z$ le fermé complémentaire à V . On sait par le lemme 2.2.10 qu'il suffit de montrer que les objets $(v \circ i)_! v^* g \# A_X$ et $(t \circ i)_! t^* g \# A_X$ sont positivement strictement constructibles. C'est le cas pour le second objet par récurrence noethérienne et le fait que $t^* g \# A_X$ est dans $H_\Lambda^{s-ct}(T)_+$. Il suffit donc de montrer que l'objet $(v \circ i)_! v^* g \# A_X$ est dans $H_\Lambda^{s-ct}(Y)_+$.

Par un argument de changement de base appliqué au carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z V & \longrightarrow & X \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{v} & Z \end{array}$$

On voit que $v^*g_{\#}A_X \simeq g'_{\#}A_{X \times_Z V}$. Ceci nous ramène à supposer $Z = V$. En d'autres termes, on peut supposer qu'il existe un recouvrement Zariski $(X_k)_{k=1 \dots r}$ de X par des ouverts X_k qui proviennent de Y -schémas lisses. Remarquons que la propriété de provenir d'un Y -schéma lisse est stable par passage à un ouvert Zariski. Il vient que pour $I \subset \{1, \dots, r\}$ non vide, le Z -schéma lisse $X_I = \bigcap_{k \in I} X_k$ provient également d'un Y -schéma lisse. Ainsi par 2.2.14 on se ramène à montrer que $i_*g_{\#}A_X$ est positivement strictement constructible pour des Z -schémas X provenant d'un Y -schéma lisse R . En d'autres termes, il existe un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i'} & R \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

avec h lisse. Dans cette situation on dispose d'un 2-isomorphisme d'échange :

$$Ex_{\#, *}: h_{\#}i'_! \xrightarrow{\sim} i_!g_{\#}$$

Il vient que $i_!g_{\#}A_X$ est isomorphe à $h_{\#}i'_!A_X$. Par le lemme 2.2.9, on sait que $i'_!A_X$ est dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(R)_+$. De plus le foncteur $h_{\#}$ envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(R)_+$ dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)_+$. Ceci montre que $i_*g_{\#}A_X$ est dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)_+$. La proposition 2.2.8 est prouvée.

Comme application au résultat démontré, notons le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.15. — Soit X un S -schéma et \mathcal{N} un fibré vectoriel sur X . Alors l'équivalence de Thom :

$$\mathrm{Th}(\mathcal{N}): H(X) \longrightarrow H(X)$$

envoie la sous-catégorie $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)_+$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)_+$, $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$, $H_{\Lambda}^{ct}(X)$) dans elle même.

Démonstration. — En effet $\mathrm{Th}(\mathcal{N}) = p_{\#}s_*$ où p est la projection de $\mathbb{V}(\mathcal{N})$ et s la section nulle. \square

On termine le paragraphe par une preuve du lemme 2.2.11. Soit η un point générique de Z et $Y_{(\eta)}$ le localisé pour la topologie de Zariski du schéma Y au point η . L'existence de l'ouvert V vérifiant l'hypothèse de 2.2.11 découle *via* des arguments standards du lemme ci-dessus appliqué à $S = Y_{(\eta)}$ et $s = \eta$:

Lemme 2.2.16. — Soit S un schéma local de point fermé s . On suppose donné un s -schéma lisse E . Il existe alors un recouvrement ouvert E_k de E et des S -schémas lisses F_k tel que $(F_k)_s \simeq E_k$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que pour tout point fermé x de E , il existe un voisinage V de x dans E qui provient d'un S -schéma lisse. Pour cela, on choisit d'abord $V_0 \subset E$ un voisinage affine de x tel que l'idéal de définition du fermé x dans $\Gamma(V_0, \mathcal{O}_{V_0})$ soit engendré par une suite régulière a_1, \dots, a_n (ceci est possible puisque

E est lisse sur s). Soit alors $e_0 : V_0 \longrightarrow \mathbb{A}_s^n = \mathrm{Spec}(k(s)[T_1, \dots, T_n])$ le morphisme de s -schémas défini sur les anneaux de fonctions par l'association : $T_i \rightsquigarrow a_i$. Ce morphisme est étale au voisinage de $x \in V_0$. Il existe alors un voisinage ouvert $V \subset V_0$ de x tel le morphisme $e : V \longrightarrow \mathbb{A}_s^n$ obtenue en restreignant e_0 à V soit isomorphe à celui induit par le morphisme de $k(s)$ -algèbres :

$$k(s)[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow (k(s)[T_1, \dots, T_n][T]/P)_{(a.P'.Q)}$$

avec P et Q des polynômes en (T, T_1, \dots, T_n) , P' la dérivée de P par rapport à la variable T et a le coefficient dominant de $P = P(T)$ (*i.e.* de P vue comme un polynôme en T).

Choisissons alors des relèvements \bar{P} et \bar{Q} de P et Q tel que les polynômes $\bar{P}(T)$ et $P(T)$ considérés comme des polynômes de la variable T soient de même degré. On notera \bar{a} le coefficient dominant de $\bar{P} = \bar{P}(T)$. On prend alors pour relèvement de V le S -schéma lisse $\mathrm{Spec}((\mathcal{O}_S[T_1, \dots, T_n][T]/\bar{P})_{(\bar{a}.\bar{P}.\bar{Q})})$. \square

2.2.2. La constructibilité des quatre opérations. — Dans cette sous-section on considère uniquement les sous-catégories triangulées $H_\Lambda^{\mathrm{s-ct}}(-)$ et $H_\Lambda^{\mathrm{ct}}(-)$. Le but est de trouver des conditions suffisantes simples qui garantissent la Λ -constructibilité des quatre opérations *i.e.* que les quatre opérations transforment les objets constructibles en des objets constructibles. Notons qu'à ce stade, on a établi la constructibilité de f^* , $f_\#$ (avec f lisse) et de i_* (avec i une immersion fermée).

2.2.2.1. Constructibilité de $f_!$. — Pour avoir la constructibilité des quatre opérations, il faudrait au moins la constructibilité des équivalences de Thom $\mathrm{Th}(-)$ ainsi que leurs inverses $\mathrm{Th}^{-1}(-)$. Dans la sous-section précédente, on a vu que les équivalences de Thom $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ étaient constructibles pour un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini. Par contre, il est faux en général que l'équivalence $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})$ conserve la sous-catégorie $H_\Lambda^{\mathrm{s-ct}}(X)$ (ou $H_\Lambda^{\mathrm{ct}}(X)$).

Ainsi pour aller plus loin, il faut imposer des conditions sur l'ensemble Λ . Une condition qui résout au moins le problème des 1-morphismes $\mathrm{Th}^{-1}(-)$ est de supposer que Λ est stable par twist de Tate négatif :

Définition 2.2.17. — On dit que la classe $\Lambda \subset H(S)$ est stable par twist de Tate négatifs si pour tout $A \in \Lambda$ il existe un objet $B \in \Lambda$ qui soit isomorphe à $A(-1)$. On dira que Λ est quasi-stable par twist de Tate si pour tout $A \in \Lambda$ l'objet $A(-1)$ est strictement constructible⁽⁶⁾.

⁽⁶⁾Il est pas utile de préciser le signe du twist dans ce cas puisque la quasi-stabilité par twist de Tate positif est automatique par le corollaire 2.2.15.

Remarque 2.2.18. — Si $\Lambda \subset H(S)$ est une classe quelconque, on peut la rendre stable par twist de Tate en prenant la classe Λ' formée des objets de la forme $A(-n)$ avec $A \in \Lambda$ et $n \in \mathbb{N}$ (ou même dans \mathbb{Z}). Il est facile de montrer qu'on l'égalité $H_{\Lambda'}^{s-ct} = H_{\Lambda}^{s-ct}(-)$ si et seulement si Λ est quasi-stable par twist de Tate.

Lemme 2.2.19. — *Supposons que Λ est quasi-stable par twist de Tate négatifs. Alors sous les hypothèses du corollaire 2.2.15, l'équivalence de Thom :*

$$\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) : H(X) \longrightarrow H(X)$$

envoie la sous-catégorie $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$) dans elle-même.

Démonstration. — On se ramène facilement à \mathcal{N} libre de rang n en utilisant le corollaire 2.2.6. Mais dans ce cas, $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) \simeq (-n)[-2n]$. Le résultat découle alors immédiatement de la stabilité de $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ et $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ par twist de Tate et du fait que les catégories $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ et $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ sont cosuspendues. \square

Le résultat important ci-dessous est un corollaire de 2.2.5, 2.2.8 et 2.2.19 :

Corollaire 2.2.20. — *Supposons que Λ est quasi-stable par twist de Tate négatifs. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme :*

$$f_! : H(Y) \longrightarrow H(X)$$

envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$).

Démonstration. — En effet choisissons une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & U \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

avec g lisse et i une immersion fermée. Il suffit alors de montrer la conclusion du corollaire pour $i_!$ et pour $g_!$. Mais $i_! = i_*$ et $g_! = g_{\#} \mathrm{Th}^{-1}(\Omega_g)$. \square

Corollaire 2.2.21. — *Gardons les hypothèses et notations du corollaire 2.2.20. Supposons en plus que f est projectif. Alors le 1-morphisme :*

$$f_* : H(Y) \longrightarrow H(X)$$

envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$).

Démonstration. — En effet pour f projectif, on a un 2-isomorphisme $f_! \simeq f_*$. \square

Dans le reste de cette section on tentera de se débarrasser de l'hypothèse « f projective » dans l'énoncé du corollaire précédent.

2.2.2.2. *Classes génératrices des sous-catégories $H_{\Lambda}^{s-ct}(-)$ et $H_{\Lambda}^{ct}(-)$.* — Dans cette sous-section on introduit certaines classes d'objets de $H(X)$ engendrant la sous-catégorie triangulée $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ et/ou $H_{\Lambda}^{ct}(X)$. La première de ces classes est :

Définition 2.2.22. — *Soit X un S -schéma quasi-projectif. On appelle $\Lambda_{*,proj}(X)$ la classe d'objets de $H(X)$ formée de ceux qui sont de la forme $g_*A_{X'}(n)$ avec $g : X' \longrightarrow X$ un S -morphisme projectif et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.*

On a le résultat suivant :

Lemme 2.2.23. — *On suppose que Λ est quasi-stable par twist de Tate négatifs. Soit X un S -schéma quasi-projectif. La sous-catégorie $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$) est la plus petite sous-catégorie triangulée (resp. triangulée et stable par facteurs directs) de $H(X)$ contenant la classe d'objets $\Lambda_{*,proj}$. En d'autres termes on a les égalités :*

$$H_{\Lambda}^{s-ct}(X) = \langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{s-ct} \quad \text{et} \quad H_{\Lambda}^{ct}(X) = \langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{ct}$$

Démonstration. — Par 2.2.4, appliqué au foncteur identité, on voit qu'il suffit de traiter le premier cas. On sait par le corollaire 2.2.21 que les objets de la forme : $g_*A(n)$ avec $g : X' \longrightarrow X$ un S -morphisme projectif, $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \Lambda$ sont dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$.

Il s'agit donc de montrer qu'un objet de la forme $h_{\#}B_U$ avec $h : U \longrightarrow X$ un S -morphisme lisse et $B \in \Lambda$, est dans la sous-catégorie $\langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{s-ct}$. Supposons donné un recouvrement Zariski $(U_k)_{k=1,\dots,r}$ de U . Pour $I \subset \{1, \dots, r\}$, on note comme d'habitude j_I l'inclusion de l'ouvert $\cap_{k \in I} U_k$ dans U . Par le lemme 2.2.13, on voit qu'il suffit de montrer que les objets $(h \circ j_I)_{\#}B_{U_I}$ sont dans $\langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{s-ct}$. Ainsi en prenant un recouvrement trivialisant du \mathcal{O}_U -module localement libre Ω_h on voit qu'il est suffisant de prouver que les objets de la forme $h_{\#}B_U$ sont dans $\langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{s-ct}$ uniquement pour les h tel que Ω_h est libre.

L'intérêt de cette réduction vient de la formule $h_{\#}B = h_! \mathrm{Th}(\Omega_h)B = h_!B(r)[2r]$ où r est le rang du \mathcal{O}_U -module libre Ω_h . On se ramène en fin de compte à prouver que pour tout S -morphisme lisse $h : U \longrightarrow X$, tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et tout objet $B \in \Lambda$ on a :

$$h_!B_U(n) \in \mathrm{Ob}(\langle \Lambda_{*,proj}(X) \rangle^{s-ct})$$

Pour établir cette appartenance, on choisit une X -compactification $j : U \longrightarrow X'$ avec X' projectif sur X . On forme le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{j} & X' & \xleftarrow{i} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g & \swarrow f & \\ & & X & & \end{array}$$

avec g projectif, j une immersion ouverte et i une immersion fermée complémentaire à j (en particulier f est projective). On a un triangle distingué de localité :

$$j_! B_U(n) \longrightarrow B_{X'}(n) \longrightarrow i_* B_Y(n) \longrightarrow j_! B_U(n)[+1]$$

En lui appliquant le 1-morphisme $g_* = g_!$, on obtient le triangle :

$$h_! B_U(n) \longrightarrow g_* B_{X'}(n) \longrightarrow f_* B_Y(n) \longrightarrow h_! B_U(n)[+1]$$

Le résultat découle alors du fait que f et g sont tous les deux projectifs. \square

Les autres classes d'objets de $H(X)$ seront paramétrés par un sous-schéma fermé $T \subset X$:

Définition 2.2.24. — Soient X un S -schéma quasi-projectif et T une partie fermée de X . On appelle $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$ la classe d'objet de $H(X)$ de la forme $g_* A_{X'}(n)$ avec $A \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}$ et $g : X' \longrightarrow X$ un S -morphisme vérifiant :

- g est projectif,
- X' est un schéma régulier connexe,
- La partie $g^{-1}(T) \subset X'$ est soit X' tout entier, soit l'union de diviseurs lisses à croisements normaux.

On a clairement une inclusion de classes : $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T \subset \Lambda_{*,proj}$. Notons que dans la définition précédente on adopte la convention que le sous-schéma vide est un diviseur lisse. En particulier $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_\emptyset$ est simplement la classe des $g_* A(n)$ avec g projectif de source un schéma régulier ; elle sera notée simplement $\Lambda_{*,proj-reg}(X)$. Remarquons également que $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_X = \Lambda_{*,proj-reg}(X)_\emptyset = \Lambda_{*,proj-reg}(X)$. Une autre conséquence de cette convention est que $g_* A(n)$ est dans $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$ si l'image de g ne rencontre pas T (exemple si g est l'immersion d'un point fermé qui n'est pas sur T).

Avant de prouver que les sous-catégories des objets Λ -constructibles de $H(X)$ sont engendrées par les classes $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$ on introduit la notion de S -dimension. La S -dimension est utile lorsqu'on a besoin de faire une récurrence double : une noéthérienne sur les fermées de S et une sur la dimension des fibres d'un S -schéma.

Définition 2.2.25. — Soit S un schéma noéthérien. On appelle $D(S)$ l'ensemble des couples (Z, d) avec Z une partie fermée de S et d une fonction de l'ensemble des points génériques à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. L'ensemble $D(S)$ sera muni de l'ordre lexicographique $(Z, d) \prec (Z', d')$ lorsque $Z \subset Z'$ ou $Z = Z'$ et $d < d'$ (i.e. pour tout point générique η de Z on a $d(\eta) \leq d'(\eta)$ avec une inégalité stricte au moins une fois).

Étant donné un S -schéma quasi-projectif $f : X \longrightarrow S$ on définit un élément $d_S(X) \in D(S)$ en prenant le couple :

$$(\overline{\text{Image}(f)}, d(\eta) = \dim_{\eta} X_{\eta})$$

(avec la convention que la dimension du schéma vide est $-\infty$). On appellera $d_S(X)$ la S -dimension du S -schéma X .

On résume quelques propriétés de la fonction $d_S(-)$ dans le lemme :

Lemme 2.2.26

1- Soit X un S -schéma quasi-projectif et U un ouvert dense de X . Alors $d_S(X) = d_S(U)$ et $d_S(X - U) \prec d_S(X)$.

2- Soit $e : X' \longrightarrow X$ une altération de S -schémas quasi-projectifs tel que toute composante irréductible de X' domine une composante irréductible de X . Alors $d_S(X) = d_S(X')$.

Démonstration. — Formons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & X & \longleftarrow & Z \\ & \searrow g & \downarrow f & \swarrow h & \\ & & S & & \end{array}$$

Puisque U est dense dans X l'image de U dans S sera dense dans l'image de X . Ceci prouve que :

$$\overline{\text{Image}(f)} = \overline{\text{Image}(g)} = R$$

D'autre part si η est un point générique de R l'ouvert U_{η} est un ouvert dense du η -schéma quasi-projectif X_{η} . Ils ont donc la même dimension de Krull.

Montrons que $d_S(Z)$ est strictement inférieur à $d_S(X)$. On a clairement :

$$\overline{\text{Image}(f)} \subset \overline{\text{Image}(h)}$$

Si l'inclusion est stricte il n'y a rien à démontrer. On suppose donc qu'il y a égalité et on note comme avant R la partie fermée ainsi définie. Soit η un point générique de R . Comme U_{η} est dense dans X_{η} on voit que Z_{η} est de codimension partout non nulle dans X_{η} .

Pour démontrer le second point, on procède exactement de la même manière. \square

Voici le résultat clef de ce paragraphe :

Proposition 2.2.27. — On suppose que Λ est quasi-stable par twist de Tate. Soient X un S -schéma quasi-projectif et $T \subset X$ une partie fermée de X :

1- Supposons que le schéma S admet la résolution des singularités par éclatements. La sous-catégorie $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$) est la plus petite sous-catégorie triangulée

(resp. triangulée et stable par facteurs directes) contenant la classe $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$. En d'autres termes, on a les égalités :

$$H_{\Lambda}^{s-ct}(X) = \langle \Lambda_{*,proj-reg}(X)_T \rangle^{s-ct} \quad \text{et} \quad H_{\Lambda}^{ct}(X) = \langle \Lambda_{*,proj-reg}(X)_T \rangle^{ct}$$

2- Supposons que S admet la résolution des singularités par altérations. On suppose également que H est \mathbb{Q} -linéaire et séparé. La catégorie $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ est la plus petite sous-catégorie triangulée de $H(X)$ stable par facteurs directes et contenant la classe $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$. En d'autres termes, on a l'égalité : $H_{\Lambda}^{ct}(X) = \langle \Lambda_{*,proj-reg}(X)_T \rangle^{ct}$.

Démonstration. — Soit X un S -schéma quasi-projectif et $T \subset X$ un fermé. Notons provisoirement $H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$ (resp. $H_{proj-reg}^{ct}(X)_T$) la sous-catégorie triangulée (resp. triangulée et stable par facteurs directes) engendrée par $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$. Par 2.2.21 on a les inclusions :

$$H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T \subset H_{\Lambda}^{s-ct}(X) \quad \text{et} \quad H_{proj-reg}^{ct}(X)_T \subset H_{\Lambda}^{ct}(X)$$

Pour prouver la proposition, il s'agit de montrer qu'on a des inclusions inverses dans les cas suivants :

1. $H_{\Lambda}^{s-ct}(X) \subset H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$ sous l'hypothèse de **1**,
2. $H_{\Lambda}^{ct}(X) \subset H_{proj-reg}^{ct}(X)_T$ sous l'hypothèse de **2**.

En utilisant le lemme 2.2.23, on se ramène à prouver les inclusions :

1. $\Lambda_{*,proj}(X) \subset H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$ sous l'hypothèse de **1**,
2. $\Lambda_{*,proj}(X) \subset H_{proj-reg}^{ct}(X)_T$ sous l'hypothèse de **2**.

Avant de se lancer dans la preuve de ces inclusions notons que pour tout S -morphisme projectif $f : X' \longrightarrow X$ le foncteur f_* envoie la catégorie $H_{proj-reg}^{s-ct}(X')_{T'}$ (resp. $H_{proj-reg}^{ct}(X')_{T'}$) dans $H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$ (resp. $H_{proj-reg}^{ct}(X)_T$) où T' est le fermé $f^{-1}(T)$. En effet il suffit de remarquer que pour tout objet $g_*A_{X''}(n) \in \Lambda_{*,proj-reg}(X')_{T'}$ avec $g : X'' \longrightarrow X'$ vérifiant les conditions de 2.2.24, l'objet $(f \circ g)_*A_{X''}$ est également dans $\Lambda_{*,proj-reg}(X)_T$.

En particulier, pour montrer qu'un objet de la forme $f_*A_{X'}(n)$ avec $f : X' \longrightarrow X$ projectif, $A \in \Lambda$ et $n \in \mathbb{N}$, est dans la catégorie $H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$ (resp. $H_{proj-reg}^{ct}(X)_T$) il suffira de montrer que l'objet $A_{X'}(n)$ est dans $H_{proj-reg}^{s-ct}(X')_{T'}$ (resp. $H_{proj-reg}^{ct}(X')_{T'}$). En remarquant que ces catégories sont stables par twist de Tate positif on se ramène en fin de compte à prouver les appartenances :

1. $A_X \in \text{Ob}(H_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T)$ sous l'hypothèse de **1**,
2. $A_X \in \text{Ob}(H_{proj-reg}^{ct}(X)_T)$ sous les hypothèse de **2**.

pour tout $A \in \Lambda$ et $T \subset X$ des S -schémas quasi-projectifs. On raisonne par induction sur la S -dimension de X : $d_S(X) \in D(S)$. Le plus petit élément de $D(S)$ est le couple $(\emptyset, -\infty)$ qui est atteint par d_S uniquement lorsque le S -schéma est vide. Il n'y a rien à prouver dans ce cas.

Fixons donc X un S -schéma et un fermé $T \subset X$. On suppose que A_Y est dans $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(Y)_Z$ (resp. $\mathbf{H}_{proj-reg}^{ct}(Y)_Z$) pour tout S -schéma Y avec $d_S(Y) \prec d_S(X)$ (la partie fermée $Z \subset Y$ étant quelconque). On montrera que lorsque S admet la résolution des singularités par éclatements (resp. altérations, avec en plus les hypothèses de **2** sur \mathbf{H}) que A_X est dans $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$ (resp. $\mathbf{H}_{proj-reg}^{ct}(X)_T$).

Soit $e : \tilde{X} \longrightarrow X$ un S -morphisme projectif tel que :

- Le schéma \tilde{X} est régulier et toute composante irréductible domine une unique composante irréductible de X ,
- Il existe un ouvert dense U dans X tel que le morphisme $f^{-1}(U) \longrightarrow U$ soit un isomorphisme (resp. un revêtement étale),
- La restriction de $f^{-1}(T)$ à toute composante irréductible est soit la composante toute entière, soit un diviseur à croisements normaux.

L'existence d'un tel e découle de l'hypothèse de désingularisation par éclatements (resp. par altérations). Formons alors le diagramme commutatif suivant à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{s}} & E \\ u \downarrow & & \downarrow e & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{s} & Z \end{array}$$

avec s l'immersion du fermé complémentaire à U . On a un triangle distingué de localité :

$$j_! A_U \longrightarrow A_X \longrightarrow s_* A_Z \longrightarrow$$

Puisque $d_S(Z) \prec d_S(X)$, l'objet $A_Z \in \mathbf{Ob}(\mathbf{H}(Z))$ est dans $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(Z)_{Z \cap T}$ (resp. $\mathbf{H}_{proj-reg}^{ct}(Z)_{Z \cap T}$) par l'hypothèse de récurrence. On en déduit que $s_* A_Z$ est dans $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$ (resp. $\mathbf{H}_{proj-reg}^{ct}(X)_T$). Il suffit donc de montrer que $j_! A_U$ est dans $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(X)_T$ (resp. $\mathbf{H}_{proj-reg}^{ct}(X)_T$).

Remarquons d'abord que $j_! A_U$ est isomorphe à (resp. est facteur direct de) $e_* \tilde{j}_! A_{\tilde{U}}$. Pour voir cela, on utilise l'isomorphisme $e_* \simeq e_!$ (e étant projectif) et l'isomorphisme de connexion $e_! \tilde{j}_! = j_! u_!$. On se ramène ainsi à prouver que A_U est isomorphe à (resp. est facteur direct de) $u_! A_{\tilde{U}}$. Ceci est clair pour le premier cas étant donné que u est un isomorphisme. Pour le cas respectif, *i.e.* lorsque u est un revêtement étale, on considère la composée :

$$A_U \longrightarrow u_* u^* A_U \xleftarrow{\sim} u_! u^! A_U \longrightarrow A_U$$

Par 2.1.165, cette composée est inversible lorsque \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé. Ceci montre qu'effectivement A_U est facteur direct de $u_! u^! A_U \simeq u_! A_{\tilde{U}}$.

À ce stade, il suffira de prouver que $\tilde{j}_! A$ est dans la sous-catégorie $\mathbf{H}_{proj-reg}^{s-ct}(\tilde{X})_{e^{-1}(T)}$. On utilise pour cela le triangle distingué de localité :

$$\tilde{j}_! A_{\tilde{U}} \longrightarrow A_{\tilde{X}} \longrightarrow \tilde{s}_* A_E \longrightarrow$$

L'ouvert \tilde{U} est clairement dense dans \tilde{X} puisque les composantes irréductibles de \tilde{X} dominant des composantes irréductibles de X . Il vient que $d_S(E) \prec d_S(\tilde{X}) = d_S(X)$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à E pour déduire que A_E est dans $H_{proj-reg}^{s-ct}(E)_{e^{-1}(T) \cap E}$. Ceci prouve que $\tilde{s}_* A_E$ est dans $H_{proj-reg}^{s-ct}(\tilde{X})_{e^{-1}(T)}$. On se ramène en fin de compte à prouver que $A_{\tilde{X}}$ est dans $H_{proj-reg}^{s-ct}(\tilde{X})_{e^{-1}(T)}$. Mais ceci est clair puisque \tilde{X} est somme disjointe de schémas réguliers et $e^{-1}(T)$ est somme de composantes irréductibles et de diviseurs à croisements normaux. La proposition est ainsi démontrée. \square

2.2.2.3. Constructibilité de f_* et $f^!$. — Dans ce paragraphe on étudie la constructibilité des opérations f_* et $f^!$ pour f un S -morphisme quasi-projectif quelconque. Malheureusement si on travaille sur une base S qui n'est pas un corps, la stabilité de Λ par twist de Tate négatif, ne suffit pas pour prouver la constructibilité de f_* ou $f^!$. On introduit alors la condition suivante :

Définition 2.2.28. — On dit que la classe d'objets $\Lambda \subset H(S)$ est quasi-pure si pour toute S -immersion fermée $i : Y \longrightarrow X$ avec Y et X réguliers et tout objet A dans Λ l'objet $i^! A_X$ est dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$.

La définition précédente paraît artificielle. Le point est que pour S le spectre d'un corps parfait, la condition de quasi-pureté est équivalente à celle de quasi-stabilité par twist de Tate :

Lemme 2.2.29. — Si S est le spectre d'un corps parfait k , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. Λ est quasi-stable par twist de Tate négatifs,
2. Λ est quasi-pure.

Démonstration. — Si Λ est quasi-pure elle est quasi-stable par twist de Tate au vu de la formule $(-1)[-2] = s^! p^*$ avec $p : \mathbb{A}_k^1 \longrightarrow k$ la projection de la droite affine et s la section nulle.

Réciproquement, supposons que Λ est quasi-stable par twist de Tate. Soit $i : Y \longrightarrow X$ une k -immersion fermée entre schémas réguliers. Comme k est parfait, les k -schémas Y et X sont lisses. Il vient d'après l'isomorphisme de pureté que $i^! A_X \simeq \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_i) A_Y$ avec \mathcal{N}_i le fibré normal de l'immersion i . On conclut alors à l'aide du lemme 2.2.19. \square

Dans ce paragraphe, la classe Λ sera supposée quasi-pure. Voici le lemme clef :

Lemme 2.2.30. — On suppose que S admet la résolution des singularités par éclatements (resp. par altérations). Dans le cas respectif, on suppose en plus que H est \mathbb{Q} -linéaire et séparé.

Soit $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion fermée de S -schéma quasi-projectifs. Le 1-morphisme $i^!$ envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Z)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Z)$).

Démonstration. — En appliquant la proposition 2.2.27 à Y et son fermé Z on voit qu'il suffit de prouver que $i^!K$ est dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Z)$ pour tout objet K de la forme $g_*A_{Y'}(n)$ avec :

- $g : Y' \longrightarrow Y$ un S -morphisme projectif de source un schéma régulier irréductible,
- $Z' = g^{-1}(Z)$ soit égal à Y' tout entier soit un diviseur à croisements normaux dans Y' ,
- $A \in \Lambda$ et $n \in \mathbb{N}$.

On forme pour cela le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{i'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

On a un 2-isomorphisme de changement de base : $i^!g_* \xrightarrow{\sim} g'_*i'^!$. Par le corollaire 2.2.21, il suffit alors de prouver que $i'^!$ envoie l'objet $A_{Y'}(n)$ dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Z')$. C'est effectivement le cas lorsque $Z' = Y'$. On supposera donc dans la suite que Z' est un diviseur à croisements normaux.

On écrit $Z' = \cup_{k=1}^m D_k$ avec D_k les composantes irréductibles de Z' . On considère alors les schémas réguliers $D_I = \cap_{k \in I} D_k$ pour $I \subset \{1, \dots, m\}$ non vide ainsi que les immersions $i_I : D_I \longrightarrow Z'$. Par le lemme 2.2.31 ci-dessous, pour montrer que $i^!A_{Y'}(n)$ est dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Z')$ il suffira de montrer que les $i_{I!}i_I^!i^!A_{Y'}(n)$ y sont. Par la proposition 2.2.8, on se ramène à prouver que les objets $(i \circ i_I)^!A_{Y'}(n)$ sont dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(D_I)$. Ceci découle immédiatement de la quasi-pureté et du fait que les schémas D_I sont réguliers. \square

Lemme 2.2.31. — *Soit Y un S -schéma quasi-projectif recouvert par des sous-schémas fermés $(Y_k)_{k=1, \dots, r}$. Pour $I \subset \{1, \dots, r\}$ une partie non vide, on note $Y_I = \cap_{k \in I} Y_k$ et $i_I : Y_I \longrightarrow Y$ l'immersion fermée évidente. Tout objet E de $H(Y)$ appartient à la sous-catégorie suspendue :*

$$< \{i_{I!}i_I^!E; I \subset \{1, \dots, r\} \text{ non vide} \} >_+^{s-ct}$$

Démonstration. — Ce lemme peut-être considéré comme l'analogue pour les immersions fermées du lemme 2.2.13. Cette analogie s'étend même aux démonstrations. En effet, on obtient une preuve du lemme en calquant la preuve de 2.2.13 et en remplaçant le triangle de Mayer-Vietoris par un triangle de Mayer-Vietoris pour les immersions fermées :

$$(i_{12})_!i_{12}^! \longrightarrow i_{1!}i_1^! \oplus i_{2!}i_2^! \longrightarrow 1 \longrightarrow$$

avec $i_1 : Y_1 \longrightarrow Y$ et $i_2 : Y_2 \longrightarrow Y$ deux immersions fermées recouvrant Y et i_{12} l'immersion fermée de l'intersection. \square

À l'aide de la proposition 2.2.8 et du lemme 2.2.30, on déduit :

Corollaire 2.2.32. — *Supposons que S admet la résolution des singularités par éclatements (resp. par altérations). Dans le premier cas, on suppose en plus que \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé.*

Soit $j : U \longrightarrow X$ une immersion ouverte entre S -schémas quasi-projectifs. Le foncteur j_ envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(U)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(U)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$).*

Démonstration. — En effet considérons le 2-triangle distingué de localité :

$$i_* i^! j_! \longrightarrow j_! \longrightarrow j_* \longrightarrow$$

Le résultat découle du fait que $j_!$, i_* et $i^!$ envoient $H_{\Lambda}^{s-ct}(-)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(-)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(-)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(-)$). \square

Il est maintenant aisé de déduire le résultat :

Proposition 2.2.33. — *Supposons que S admet la résolution des singularités par éclatements (resp. par altérations). Dans le cas respectif, on suppose en plus que \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé.*

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de k -schémas. Alors f_ envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$). De même $f^!$ envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$).*

Démonstration. — Pour f_* , il suffit de factoriser f par une immersion ouverte suivie d'un morphisme projectif. Pour $f^!$ on factorise f par une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse. \square

2.2.2.4. Résumé des résultats. — Pour la commodité du lecteur, on résume les résultats obtenus dans cette section dans le théorème de constructibilité des quatre opérations :

Scholie 2.2.34

A- Sans hypothèses sur la classe d'objets Λ on a :

- Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme f^* envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$).
- Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme $f_{\#}$ envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$).
- Soit $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion fermée de S -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme i_* envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(Z)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Z)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$).

B- On suppose que la classe d'objets Λ est quasi-stable par twist de Tate. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme $f_!$ envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$).

C- On suppose que la classe d'objets Λ est quasi-pure (c'est le cas par exemple lorsque S est le spectre d'un corps parfait et Λ comme dans le point **B** i.e. stable par

twist de Tate négatifs). Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme entre S -schémas quasi-projectifs. On a :

1. On suppose que la base S admet la résolution des singularités par éclatements (voir la définition 2.1.166). Alors :
 - Le 1-morphisme $f^!$ envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$),
 - Le 1-morphisme f_* envoie $H_{\Lambda}^{s-ct}(Y)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$) dans $H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ (resp. $H_{\Lambda}^{ct}(X)$).
2. On suppose que la base S admet la résolution des singularités par altérations (voir la définition 2.1.172) et que le 2-foncteur homotopique stable H est \mathbb{Q} -linéaire et séparé (voir les définitions 2.1.153 et 2.1.160). Alors :
 - Le 1-morphisme $f^!$ envoie $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ dans $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$,
 - Le 1-morphisme f_* envoie $H_{\Lambda}^{ct}(Y)$ dans $H_{\Lambda}^{ct}(X)$.

Remarque 2.2.35. — Le lecteur peut remarquer que dans le théorème précédent toutes les assertions admettent deux versions, une stricte et l'autre non stricte, sauf la dernière. Il ne s'agit pas d'un oubli. En effet, cette différence vient de la proposition 2.2.27 et du fait qu'on ne sait pas prouver que $H_{proj-reg}^{s-ct}(X) = H_{\Lambda}^{s-ct}(X)$ en utilisant uniquement des résolutions par altérations.

Notons le corollaire :

Corollaire 2.2.36

1- Sous les hypothèses de (C.1) du théorème précédent, il existe une unique structure de foncteur croisé sur les $H_{\Lambda}^{s-ct}(-)$ et les $H_{\Lambda}^{ct}(-)$ faisant des inclusions $H_{\Lambda}^{s-ct}(-) \subset H_{\Lambda}^{ct}(-) \subset H(-)$ une suite de morphismes de foncteurs croisés.

2- Sous les hypothèses de (C.2) du théorème précédent, il existe une unique structure de foncteur croisé sur les $H_{\Lambda}^{ct}(-)$ faisant des inclusions $H_{\Lambda}^{ct}(-) \subset H(-)$ un morphisme de foncteurs croisés.

2.2.2.5. *Le cas où H est compactement engendré par sa base.* — On termine notre étude de la constructibilité des quatre opérations par quelques compléments dans le cas où H est compactement engendré par la base (voir la définition 2.1.155). Plus précisément, on supposera que :

- Pour tout S -morphisme f le foncteur f^* envoie un objet compact sur un objet compact,
- Λ est un ensemble d'objets compacts,
- Les classes $\Lambda(X)$ engendrent la catégorie triangulée avec petites sommes $H(X)$.

Par la proposition 2.1.24 et la remarque 2.1.156, la catégorie $H_{\Lambda}^{ct}(X)$ est simplement la catégorie des objets compacts de $H(X)$. En utilisant ce fait il est aisé de prouver les théorèmes de constructibilités « élémentaires » à savoir ceux des foncteurs $f_!$. En effet on sait par le lemme 2.1.159 que H est parfait pour les petites sommes au sens de la

définition 2.1.158. En particulier, le foncteur $f_!$ admet un adjoint à droite $f^!$ qui commute aux petites sommes. On conclut en appliquant le lemme 2.1.28. Réciproquement, par simple traduction de la scholie 2.2.34, on obtient :

Théorème 2.2.37. — *On suppose que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- *S admet la résolution des singularités par éclatements,*
- *S admet la résolution des singularités par altérations et \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparable.*

Si Λ est quasi-pure alors les quatre opérations envoient un objet compact sur un objet compact.

2.2.3. Définition des t -structures engendrées et propriétés élémentaires de t -exactitude. — On fixe un schéma de base noethérien S . Soit $\mathbf{H} : \mathbf{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$

un 2-foncteur homotopique stable. On se donne un ensemble d'objets \mathcal{G} dans $\mathbf{H}(S)$. Sous certaines hypothèses techniques, on va associer à l'ensemble \mathcal{G} une t -structure sur chacune des catégories triangulées $\mathbf{H}(X)$. Ces t -structures ont été introduites pour la première fois par F. Morel [Mor02] dans le cas de \mathbf{SH} avec \mathcal{G} le singleton formé du spectre de la sphère. On appellera ces t -structures, les t -structures engendrées par \mathcal{G} (ou engendrées tout court lorsqu'il y a pas de confusion).

On notera comme d'habitude A_X l'objet f^*A de $\mathbf{H}(X)$ pour tout S -schéma quasi-projectif $f : X \longrightarrow S$ et $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{H}(S))$. Les hypothèses sur \mathbf{H} et \mathcal{G} dont on aura besoin pour définir nos t -structures sont :

Hypothèse 2.2.38. — On supposera dans la suite que le 2-foncteur homotopique stable \mathbf{H} admet les petites sommes et que les objets A_X sont compacts pour tout $A \in \mathcal{G}$.

Définition 2.2.39. — *Pour tout S -schéma quasi-projectif $f : X \longrightarrow S$ on notera $\mathcal{G}_\#(X)$ la classe d'objets de $\mathbf{H}(X)$ définie par :*

$$\mathcal{G}_\#(X) = \{g_\#(A_Y(n)[n]); \text{ avec } g : Y \rightarrow X \text{ un } S\text{-morphisme lisse et } n \in \mathbb{Z}\}$$

Lemme 2.2.40. — *Sous l'hypothèse 2.2.38, les objets de $\mathcal{G}_\#(X)$ sont compacts. De plus la classe $\mathcal{G}_\#(X)$ est essentiellement équivalente à un ensemble d'objets de $\mathbf{H}(X)$.*

Démonstration. — La compacité des objets de $\mathcal{G}_\#(X)$ découle du fait que les 1-morphismes $g_\#$ admettent des adjoints à droite commutant aux petites sommes. \square

Définition 2.2.41

1- *La t -structure sur $\mathbf{H}(X)$ engendrée par l'ensemble d'objets compacts $\mathcal{G}_\#(X)$ est appelée la t -structure engendrée (par \mathcal{G} si confusion est possible) sur $\mathbf{H}(X)$. On notera $\mathbf{H}_{\geq 0}(X)$ la sous-catégorie pleine des objets positifs (qu'on appellera t -positif) et $\mathbf{H}_{< 0}(X)$ celle des objets strictement négatifs (qu'on appellera strictement t -négatifs). Le coeur $\mathbf{H}_{\geq 0}(X) \cap \mathbf{H}_{\leq 0}(X)$ de cette t -structure sera noté $\mathbf{HE}(X)$.*

2- Les troncations par rapport à cette t -structure seront notées h_{\geq} et h_{\leq} . Ainsi pour tout objet E de $\mathbf{H}(X)$ on a un triangle distingué :

$$h_{\geq 0}(E) \longrightarrow E \longrightarrow h_{\leq -1}(E) \longrightarrow$$

On notera finalement $h_i(E) = (h_{\leq i} \circ h_{\geq i}(E))[-i] \in \mathbf{Ob}(\mathbf{HE}(X))$. On appellera $h_i(E)$ le i -ème objet d'homologie de E .

Notre but est d'étudier la t -exactitude des quatre opérations f^* , f_* , $f_!$ et $f^!$. Dans cette sous-section on considère uniquement les propriétés de t -exactitude élémentaires. Des résultats plus élaborés seront obtenus dans la sous-section 2.2.5.

2.2.3.1. Traduction des propositions 2.2.5 et 2.2.8 en termes de t -positivité et conséquences. — Dans ce paragraphe, on commence par interpréter les résultats de positive constructibilité obtenus au numéro 2.2.1 en termes de t -positivité. Le lien vient de la remarque triviale suivante :

Remarque 2.2.42. — Notons Λ la classe des objets de $\mathbf{H}(S)$ qui sont de la forme $A(n)[n]$ avec $A \in \mathcal{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout S -schéma quasi-projectif on a avec la notation de la définition 2.2.1 : $\Lambda(X) = \mathcal{G}_{\#}(X)$.

Par la proposition 2.1.70, on sait que :

Lemme 2.2.43. — Pour tout S -schéma X on a $\mathbf{H}_{\geq 0}(X) = \ll \mathcal{G}_{\#}(X) \gg_+ = \ll \Lambda(X) \gg_+$.

Ainsi, un foncteur qui commute aux petites sommes est t -positif s'il envoie les objets Λ -positivement constructibles sur des objets Λ -positivement constructibles.

Proposition 2.2.44. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. On a :

1. Le 1-morphisme $f^* : \mathbf{H}(X) \longrightarrow \mathbf{H}(Y)$ est t -positif,
2. Si f est lisse le 1-morphisme $f_{\#} : \mathbf{H}(Y) \longrightarrow \mathbf{H}(X)$ est t -positif.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que f^* envoie la catégorie $\ll \Lambda(X) \gg_+$ dans $\ll \Lambda(Y) \gg_+$. Comme f^* commute aux petites sommes, il suffirait de montrer que f^* envoie $< \Lambda(X) >_+^{ct}$ dans $< \Lambda(Y) >_+^{ct}$. Ceci est vrai par 2.2.5.

De même, si f est lisse, le 1-morphisme $f_{\#}$ commute aux petites sommes ce qui nous ramène à montrer que $f_{\#}$ envoie $< \Lambda(Y) >_+^{ct}$ dans $< \Lambda(X) >_+^{ct}$. Ceci est également vrai par 2.2.5. \square

On aurait pu donner une preuve directe de la proposition ci-dessus sans se référer à 2.2.5. On aurait ainsi montré deux fois la même chose en remplaçant simplement Λ par \mathcal{G} , ce qui ne pas coûte trop cher, étant donné que la preuve tient en quelques lignes. Ceci n'est pas le cas pour les 1-morphismes $i_!$, avec i une immersion, dont la preuve correspondante est bien plus longue.

Proposition 2.2.45. — Soit $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion (pas forcément fermée ou ouverte) de S -schémas quasi-projectifs. Le foncteur $i_!$ est t -positif.

Démonstration. — En effet, le foncteur $i_!$ commute aux petites sommes puisqu'il admet un adjoint à droite $i^!$. Cela revient donc à montrer que $i_!$ envoie la sous-catégorie $< \Lambda(Z) >_+^{ct}$ dans $< \Lambda(Y) >_+^{ct}$. Ceci a été démontré dans le lemme 2.2.8. \square

On déduit par adjonction, les propriétés de t -négativité suivantes :

Proposition 2.2.46. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. On a :

1. Le 1-morphisme $f_* : H(Y) \longrightarrow H(X)$ est t -négatif,
2. Si f est lisse le 1-morphisme $f^* : H(X) \longrightarrow H(Y)$ est t -négatif.

Démonstration. — Le 1-morphisme f_* est t -négatif puisqu'il admet un adjoint à gauche f^* qui est t -positif. De même pour le 1-morphisme f^* avec f lisse. \square

En combinant 2.2.44 et 2.2.45 avec 2.2.46 on obtient des résultats de t -exactitudes :

Corollaire 2.2.47

1- Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme f^* est t -exact.

2- Soit $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion fermée de S -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme i_* est t -exact.

Remarque 2.2.48. — Soit X un S -schéma et notons $i_{\text{red}} : X_{\text{red}} \longrightarrow X$ la nil-immersion fermée évidente. Le foncteur $(i_{\text{red}})_*$ est alors une équivalence de catégorie t -exacte. On en déduit qu'il en est de même de son inverse i.e. le foncteur $(i_{\text{red}})^*$ est également t -exact.

Notons également :

Proposition 2.2.49. — Soit $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion de S -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme $i^!$ est t -négatif.

Démonstration. — On utilise l'adjonction $(i_!, i^!)$ et le fait que $i_!$ est t -positif. \square

On termine le paragraphe par deux résultats concernant le passage du local au global. Une application aux équivalences de Thom est donnée :

Corollaire 2.2.50. — Soit $(u_i : U_i \longrightarrow X)_i$ un recouvrement Nisnevich d'un S -schéma X . Pour qu'un objet A de $H(X)$ soit t -positif (resp. t -négatif) il faut et il suffit que pour tout i l'objet $u_i^* A$ de $H(U_i)$ soit t -positif (resp. t -négatif).

Démonstration. — En effet la famille de foncteurs u_i^* est conservative et pour tout i le foncteur u_i^* est t -exact. On conclut à l'aide du lemme 2.1.76. \square

Corollaire 2.2.51. — Soit X un S -schéma et \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -module localement libre de dimension constante n . L'équivalence $\mathrm{Th}(\mathcal{M})[-n]$ est t -exacte. De même l'équivalence $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M})[n]$ est t -exacte.

Démonstration. — Soit $u_i : U_i \longrightarrow X$ un recouvrement Zariski trivialisant \mathcal{M} . Soit A un objet t -positif (resp. t -négatif) de $\mathrm{H}(X)$. Il faut montrer que les objets $\mathrm{Th}(\mathcal{M})A[-n]$ et $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M})A[n]$ sont t -positifs (resp. t -négatifs). Par le corollaire 2.2.50 il suffit de montrer que pour tout i , c'est le cas pour les objets

$$u_i^* \mathrm{Th}(\mathcal{M})A[-n] \simeq \mathrm{Th}(\mathcal{O}_{U_i}^n)A[-n] \simeq A(n)[n]$$

et

$$u_i^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M})A[n] \simeq \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{O}_{U_i}^n)A[n] \simeq A(-n)[-n]$$

On s'est donc ramené à montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le foncteur $(-)(n)[n]$ est t -exact. Ce foncteur commute clairement aux petites sommes. De plus il garde stable l'ensemble $\mathcal{G}_{\#}(X)$. D'où la t -positivité de $(-)(n)[n]$. D'autre part, ce foncteur admet un adjoint à gauche à savoir $(-)(-n)[-n]$ qui est aussi t -positif. On déduit que $(-)n$ est également t -négatif. \square

Lemme 2.2.52. — Soit X un S -schéma. Soit $i : Y \longrightarrow X$ une immersion fermée et $j : U \longrightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire. Soit A un objet de $\mathrm{H}(X)$. Les deux assertions suivantes :

1. A est dans $\mathrm{H}_{\geq 0}(X)$,
2. i^*A est dans $\mathrm{H}_{\geq 0}(Y)$ et j^*A est dans $\mathrm{H}_{\geq 0}(U)$.

sont équivalentes.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que la seconde assertion implique la première. On prend donc un objet A de $\mathrm{H}(X)$ tel que i^*A et j^*A soient t -positifs et on montre que A est aussi t -positif. Pour cela, on considère le triangle distingué :

$$(192) \quad h_{\geq 0}(A) \longrightarrow A \longrightarrow h_{< 0}(A) \longrightarrow$$

En appliquant j^* , on obtient :

$$j^*h_{\geq 0}(A) \longrightarrow j^*A \longrightarrow j^*h_{< 0}(A) \longrightarrow$$

Puisque j^* est t -exact, on voit que $j^*h_{< 0}(A)$ est forcément nul. En particulier, il est concentré sur Y i.e. le morphisme d'adjonction :

$$h_{< 0}(A) \longrightarrow i_*i^*h_{< 0}(A)$$

est un isomorphisme. Pour montrer que $h_{< 0}(A)$ est nul, il suffirait de montrer qu'il est t -positif. Ainsi par 2.2.45, il suffit de montrer que $i^*h_{< 0}(A)$ est t -positif. On applique alors i^* au triangle (192) :

$$i^*h_{\geq 0}(A) \longrightarrow i^*A \longrightarrow i^*h_{< 0}(A) \longrightarrow$$

Comme i^* est t -positif, l'objet $i^*h_{\geq 0}(A)$ est t -positif. Par hypothèse, on sait que i^*A est t -positif. Il vient que $i^*h_{< 0}(A)$ est positif puisque la sous-catégorie $H_{\geq 0}(Y)$ est suspendue. \square

2.2.3.2. Les propriétés de t -exactitude des opérations $f_!$ et $f^!$. — Dans ce paragraphe on donne une borne inférieure pour la dimension (homologique) des foncteurs $f_!$. Pour que notre preuve fonctionne, on doit imposer une restriction à H . Ainsi, on supposera que H est semi-séparé (voir la définition 2.1.160). Rappelons que lorsque S est d'égale caractéristique nulle, H est automatiquement semi-séparé (voir la remarque 2.1.161). On aura besoin d'un lemme géométrique :

Lemme 2.2.53. — *Soit X un schéma réduit et noethérien. On suppose donné un morphisme $e : X' \longrightarrow X$ fini surjectif et totalement inséparable avec X' également réduit, ainsi qu'un X' -schéma lisse V' . Quitte à remplacer X par un de ses ouverts denses (et X' et V' par les images inverses de l'ouvert en question), on peut supposer que les données suivantes existent :*

- *Un morphisme fini surjectif totalement inséparable $e' : X'' \longrightarrow X'$,*
- *Un X -schéma lisse U ,*
- *Un X'' -morphisme $V' \times_{X'} X'' \longrightarrow U \times_X X''$ fini surjectif et totalement inséparable.*

Démonstration. — La liberté de pouvoir remplacer X par un de ses ouverts denses, nous ramène immédiatement au cas où X est somme disjointe de schémas intègres. En traitant chaque composante connexe à part, on peut même supposer X intègre.

Lorsque le point générique de X est le spectre d'un corps de caractéristique nulle, le morphisme $e : X' \longrightarrow X$ est génériquement un isomorphisme. En effet un corps de caractéristique nulle n'admet pas d'extensions totalement inséparables non triviales. Dans ce cas, on peut supposer que e est un isomorphisme quitte à remplacer X par un ouvert non vide (et donc dense). Le lemme est donc trivial dans ce cas.

Par la suite, on supposera donc que le point générique de X est un corps de caractéristique p . Cette condition ne se produit que lorsque X est lui même un \mathbb{F}_p -schéma.

Supposons e et V' fixé. Si la conclusion du lemme est vraie pour e et V' , elle sera vraie pour tout changement de base de e et V' suivant un morphisme *dominant* $Y \longrightarrow X$. On doit se restreindre aux changements de base dominants puisque dans la conclusion du lemme, on se permet de remplacer X par un ouvert dense.

Réciproquement, si jamais e et V' proviennent de $e_0 : X'_0 \longrightarrow X_0$ et V'_0/X'_0 (vérifiant les hypothèses de l'énoncé) par changement de base suivant un morphisme dominant $X \longrightarrow X_0$, il suffira de prouver le lemme pour e_0 et V'_0 . Ceci nous ramène immédiatement à supposer (en plus des hypothèses de l'énoncé) que X , X' et V' sont de type fini sur le corps premier \mathbb{F}_p . Une fois qu'on s'est ramené aux schémas de type fini sur \mathbb{F}_p , on peut utiliser la liberté de remplacer X par un ouvert dense pour supposer que X et X' sont des schémas normaux et ensuite irréductibles.

Considérons alors l'endomorphisme de Frobenius absolu F . Comme e est fini surjectif et totalement inséparable entre schémas normaux il est facile de voir qu'il existe une puissance suffisamment élevée n de $F_X : X \longrightarrow X$ qui domine e i.e. on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ e' \downarrow & \searrow F_X^n & \\ X' & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

Notons alors V'' le pull-back du X' -schéma V' suivant e' . On note alors U de X -schéma V'' . Les endomorphismes F_X et F_U commutent au morphisme $U \longrightarrow X$ i.e. le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F_U^n} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F_X^n} & X \end{array}$$

Mais par construction le X -schéma U est égal à V'' . D'où le résultat si on pose $X'' = X$. \square

Proposition 2.2.54. — *On suppose que \mathbf{H} est semi-séparé. Soit $e : X' \longrightarrow X$ un S -morphisme fini surjectif et totalement inséparable entre S -schémas quasi-projectifs. Alors l'équivalence de catégories e^* est t -exacte.*

Démonstration. — On se ramène immédiatement au cas où X' et X sont tous les deux réduits en utilisant la remarque 2.2.48.

On sait que e^* est t -positif. Comme e^* est une équivalence il suffira de montrer que le foncteur e_* est t -positif. On montrera ceci par récurrence sur la S -dimension de X . On supposera donc que e_{0*} est t -positif pour les S -morphisms finis surjectifs et totalement inséparable dont le but et de S -dimension strictement inférieure à $d_S(X)$.

Comme e_* commute aux petites sommes (puisque c'est une équivalence), il suffit d'établir l'inclusion :

$$e_* \mathcal{G}_\#(X') \subset \mathbf{H}_{\geq 0}(X)$$

Fixons un morphisme lisse $g' : V' \longrightarrow X'$ et montrons que pour $A \in \mathcal{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$, l'objet $e_* g'_\# A_{V'}(n)[n]$ est t -positif. On se ramène immédiatement au cas $n = 0$. Considérons un diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} V'_1 & \xrightarrow{j} & V' & \xleftarrow{i} & V'_2 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow g_2 \\ X'_1 & \xrightarrow{j} & X' & \xleftarrow{i} & X'_2 \\ e_1 \downarrow & & \downarrow e & & \downarrow e_2 \\ X_1 & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & X_2 \end{array}$$

avec j une immersion ouverte et i une immersion fermée complémentaire. Par le lemme 2.2.52, il suffit de montrer que $j^*(e_*g'_{\#}A_{V'}) \simeq e_{1*}g'_{1\#}A_{V'_1}$ et $i^*(e_*g'_{\#}A_{V'}) \simeq e_{2*}g'_{2\#}A_{V'_2}$ sont tous les deux t -positifs. Lorsque j est l'immersion d'un ouvert dense, on a $d_S(X_2) \prec d_S(X)$ et le second objet est t -positif par récurrence. Dans ce cas, la t -positivité de $e_*g'_{\#}A_{V'}$ découle de celle de $e_{1*}g'_{1\#}A_{V'_1}$. Ceci permet de remplacer X par un de ses ouverts denses. Ainsi par le lemme 2.2.53, on peut supposer qu'il existe :

- Un morphisme fini surjectif totalement inséparable $e' : X'' \longrightarrow X'$,
- Un X -schéma lisse $h : U \longrightarrow X$,
- Un X'' -morphisme $a : V'' = V' \times_{X'} X'' \longrightarrow U'' = U \times_X X''$ fini surjectif et totalement inséparable.

Rappelons qu'on veut montrer que l'objet $e_*g'_{\#}A_{V'}$ est t -positif. Remarquons d'abord, qu'il suffit de prouver que $g'_{\#}A_{V'}$ est dans $e^*H_{\geq 0}(X)$. En effet le foncteur e_*e^* est t -positif puisque isomorphe au foncteur identité de $H(X)$. D'autre part, comme e'^* est une équivalence de catégories, il suffira de montrer que $e'^*g'_{\#}A_{V'}$ est dans $e'^*e^*H_{\geq 0}(X)$.

On montrera plus précisément que $e'^*g'_{\#}A_{V'}$ est isomorphe à $(e \circ e')^*h_{\#}A_U$. En appliquant les 2-isomorphismes d'échange $Ex^*_{\#}$ aux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} V'' & \longrightarrow & V' \\ g'' \downarrow & & \downarrow g' \\ X'' & \xrightarrow{e'} & X' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U'' & \longrightarrow & U \\ h'' \downarrow & & \downarrow g \\ X'' & \xrightarrow{e \circ e'} & X \end{array}$$

on obtient les isomorphismes $g''_{\#}A_{V''} \simeq e'^*g'_{\#}A_{V'}$ et $h''_{\#}A_{U''} \simeq (e \circ e')^*h_{\#}A_U$. On se ramène donc à montrer que $g''_{\#}A$ et $h''_{\#}A$ sont isomorphes. On montrera plus généralement que les 1-morphismes $g''_{\#}g''^*$ et $h''_{\#}h''^*$ sont 2-isomorphes. En passant aux adjoints à droite on a à comparer $g''_*g''^{**}$ et $h''_*h''^{**}$. Le X'' -morphisme de schéma $a : V'' \longrightarrow U''$ fournit une transformation naturelle :

$$h''_*h''^{**} \longrightarrow h''_*a_*a^*h''^{**} \longrightarrow g''_*g''^{**}$$

Par la proposition 2.1.163, a^* est une équivalence. Il résulte que le morphisme d'unité $1 \longrightarrow a_*a^*$ est un isomorphisme. Ceci termine l'étape de la récurrence. \square

Proposition 2.2.55. — *On suppose que H est semi-séparé. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme quasi-projectif. Notons d_f le maximum des dimensions des fibres $f^{-1}(x)$ pour x un point (non forcément fermé) de X . Le foncteur $f_![d_f]$ est t -positif. En d'autres termes le foncteur $f_!$ envoie $H_{\geq 0}(Y)$ dans $H_{\geq -d_f}(X)$.*

Démonstration. — Notons X_0 le sous-schéma fermé de X égal à l'adhérence de l'image de f . On obtient ainsi la factorisation de f :

$$Y \xrightarrow{f_0} X_0 \xrightarrow{i} X$$

Il vient que $f_! = i_* f_{0!}$. Comme i_* est t -exact et que les maxima des dimensions des fibres de f et de f_0 sont les mêmes, on se ramène à considérer le S -morphisme f_0 . En d'autres termes, on peut supposer que f est dominant. On peut également supposer que X et Y sont réduits (par la remarque 2.2.48) et connexes.

On raisonne par récurrence sur la S -dimension de Y (voir la définition 2.2.25). Lorsque $d_S(Y)$ est minimale, Y est vide et il n'y a rien à prouver. On suppose donc que Y est non vide.

Soit U un ouvert de Y et Z le fermé complémentaire. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & Z \\ & \searrow g & \downarrow f & \swarrow h & \\ & & X & & \end{array}$$

On obtient le 2-triangle distingué :

$$g_! j^* [d_f] \longrightarrow f_! [d_f] \longrightarrow h_! i^* [d_f] \longrightarrow$$

en appliquant $f_! [d_f]$ au 2-triangle distingué de localité.

Pour montrer que $f_! [d_f]$ est t -positif, il suffit donc de montrer que $g_! [d_g]$ et $h_! [d_h]$ le sont. Étant donné que $d_g \leq d_f$ et que $d_h \leq d_f$, on voit qu'il suffit de montrer que $g_! [d_g]$ et $h_! [d_h]$ sont t -positifs. En particulier si U est dense dans Y , le schéma Z est de S -dimension strictement plus petite que celle de Y (par le lemme 2.2.26). Dans ce cas l'hypothèse de récurrence assure que $h_! [d_h]$ est t -positif et la t -positivité de $f_! [d_f]$ résulte alors de celle de $g_! [d_g]$. Ceci montre qu'on peut remplacer Y par n'importe quel ouvert dense de Y . Comme première application de ce principe, on se ramène au cas où Y et X sont tous les deux irréductibles. En effet il suffit de choisir U de telle sorte que toute composante connexe de U soit irréductible. On se ramène ensuite à traiter à part le cas de chaque composante connexe. En appliquant une seconde fois la discussion du début, on remplace X par l'image de la composante connexe choisie.

Supposons maintenant donné $t : X' \longrightarrow X$ un morphisme fini surjectif totalement inséparable avec X' irréductible et formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{t'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{t} & X \end{array}$$

Comme t^* est une équivalence t -exacte, pour montrer que $f_! [d_f]$ est t -positif, il suffit de montrer que $t^* f_! [d_f]$ est t -positif. Mais $t^* f_! \simeq f'_! t'^*$. Il vient qu'il suffit de montrer la conclusion de la proposition pour $f' : Y' \longrightarrow X'$. Ceci nous permet de supposer que f est génériquement lisse *i.e.* lisse au-dessus d'un ouvert non vide (et donc dense) de Y . En remplaçant Y par cet ouvert, on se ramène en fin de compte au cas où f est lui-même lisse avec Ω_f libre. Dans ce cas, on a un isomorphisme : $f_! [d_f] = f_{\#}(-d_f)[-d_f]$. Ceci termine la preuve de la proposition. \square

Corollaire 2.2.56. — Si \mathbf{H} est semi-séparé, le foncteur $f^![-d_f]$ est t -négatif. Plus précisément, le foncteur $f^!$ envoie $\mathbf{H}_{<0}(X)$ dans $\mathbf{H}_{<d_f}(Y)$.

Démonstration. — En effet $f^![-d_f]$ admet comme adjoint à gauche $f_![d_f]$. Ce dernier est t -positif par 2.2.55. \square

Corollaire 2.2.57. — Supposons que \mathbf{H} est semi-séparé. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme projectif. Notons d_f le maximum des dimensions des fibres de f . Le foncteur $f_*[d_f]$ est t -positif. En particulier f_* est de dimension homologique concentré dans l'intervalle $[0, -d_f]$.

Démonstration. — En effet pour f projectif on a $f_! = f_*$. \square

Dans le numéro 2.2.5, on verra comment se débarrasser de l'hypothèse de projectivité dans l'énoncé ci-dessus.

2.2.4. Définition des t -structures engendrées perverses et les propriétés de t -exactitude. — Rappelons qu'on s'est donné un 2-foncteur homotopique stable \mathbf{H} sur (Sch/S) ainsi qu'un ensemble d'objets \mathcal{G} de $\mathbf{H}(S)$. Dans cette sous-section on considère une variante « perverse » de la t -structure de la sous-section précédente. On commence par adapter l'hypothèse 2.2.38 :

Hypothèse 2.2.58. — On suppose dans la suite que :

- Pour tout S -schéma de type fini $f : X \longrightarrow S$, la catégorie triangulée $\mathbf{H}(X)$ admet les petites sommes et les objets $f^!A$ sont compacts pour tout $A \in \mathcal{G}$.
- Le 2-foncteur homotopique stable \mathbf{H} est parfait pour les petites sommes au sens de la définition 2.1.158.

Définition 2.2.59. — Pour un S -schéma quasi-projectif $f : X \longrightarrow S$, on notera $\mathcal{G}_!(X)$ la classe d'objets de $\mathbf{H}(X)$ définie par :

$$\mathcal{G}_!(X) = \{g_!g^!f^!A(n)[n], \text{ avec } g : X' \rightarrow X \text{ un } S\text{-morphisme et } n \in \mathbb{Z}\}$$

Remarquons que contrairement à la définition de $\mathcal{G}_\#(X)$ on ne fait pas d'hypothèse de lissité sur les morphismes g .

On a le correspondant du lemme 2.2.40 :

Lemme 2.2.60. — Sous l'hypothèse 2.2.58, les éléments de $\mathcal{G}_!(X)$ sont petits. De plus la classe $\mathcal{G}_!(X)$ est essentiellement équivalente à un ensemble.

Démonstration. — Ceci est une conséquence directe du lemme 2.1.28 et du fait que $g_!$ admet un adjoint à droite $g^!$ commutant aux petites sommes. \square

Définition 2.2.61

1- La t -structure sur $\mathbf{H}(X)$ engendrée par l'ensemble d'objets compacts $\mathcal{G}_!(X)$ est appelée la t -structure engendrée perverse sur $\mathbf{H}(X)$. On notera ${}^p\mathbf{H}_{\geq 0}(X)$ la sous-catégorie pleine des objets positifs (qu'on appellera ${}^p t$ -positifs) et ${}^p\mathbf{H}_{< 0}(X)$ celle des objets strictement négatifs (qu'on appellera strictement ${}^p t$ -négatifs). Le coeur ${}^p\mathbf{H}_{\geq 0}(X) \cap {}^p\mathbf{H}_{\leq 0}(X)$ de cette t -structure sera noté ${}^p\mathbf{HE}(X)$.

2- Les troncations par rapport à cette t -structure seront notées ${}^ph_{\geq}$ et ${}^ph_{\leq}$. Ainsi pour tout objet E de $\mathbf{H}(X)$ on a un triangle distingué :

$${}^ph_{\geq 0}(E) \longrightarrow E \longrightarrow {}^ph_{\leq -1}(E) \longrightarrow$$

On note finalement ${}^ph_i(E) = ({}^ph_{\leq i} \circ {}^ph_{\geq i}(E))[-i] \in \mathbf{Ob}({}^p\mathbf{HE}(X))$.

Comme pour la t -structure engendrée non perverse, on axera l'étude sur les propriétés de t -exactitude des 4 opérations. Contrairement au cas de la t -structure non perverse, il y a très peu de résultats élémentaires. En effet, on n'obtient des résultats intéressants qu'en utilisant les techniques de résolution des singularités.

2.2.4.1. *Les propriétés de ${}^p t$ -exactitude des opérations $f_!$ et $f^!$.* — On a la proposition suivante :

Proposition 2.2.62. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme quasi-projectif. On a :

- Le foncteur $f_!$ est ${}^p t$ -positif. Le foncteur $f^!$ est ${}^p t$ -négatif,
- Si f est lisse, le foncteur $f^!$ est t -exact.

Démonstration. — Comme $f_!$ commute aux petites sommes, il suffira de montrer l'inclusion : $f_!\mathcal{G}_!(Y) \subset \mathcal{G}_!(X)$. Ceci est évident par la définition même. Comme $f^!$ est un adjoint à droite de $f_!$, il est ${}^p t$ -négatif. Ceci prouve la première assertion.

Supposons maintenant que f est lisse. Il faut montrer que $f^!$ est ${}^p t$ -positif. Comme $f^!$ commute aux petites sommes il suffit d'établir l'inclusion $f^!\mathcal{G}_!(X) \subset \mathcal{G}_!(Y)$. Notons p la projection structurale de X sur S . Un élément de $\mathcal{G}_!(X)$ est un objet de la forme $g_!g^!p^!A(n)[n]$ avec $g : X' \longrightarrow X$ un S -morphisme, $A \in \mathcal{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Formons un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

On déduit alors les isomorphismes $f^!g_!g^!p^!A(n)[n] \simeq g'_!f'^!g^!p^!A(n)[n] \simeq g'_!g'^!(p \circ f)^!A(n)[n]$. \square

Corollaire 2.2.63. — Soit $(u_i : U_i \longrightarrow X)$ un recouvrement Nisnévich d'un S -schéma X . Pour qu'un objet A de $\mathbf{H}(X)$ soit ${}^p t$ -positif (resp. ${}^p t$ -négatif) il faut et il suffit que pour tout i l'objet u_i^*A de $\mathbf{H}(U_i)$ soit ${}^p t$ -positif (resp. ${}^p t$ -négatif).

Démonstration. — En effet on a pour tout i , $u_i^* = u_i^!$. En particulier les u_i^* sont ${}^p t$ -exacts. D'autre part, la famille des u_i^* est conservative. Le résultat découle alors du lemme 2.1.76. \square

Corollaire 2.2.64. — Soit X un S -schéma et \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -module localement libre de dimension constante n . Les équivalences $\mathrm{Th}(\mathcal{M})[-n]$ et $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M})[n]$ sont ${}^p t$ -exacts.

Démonstration. — C'est exactement la même preuve que celle du corollaire 2.2.51. \square

Corollaire 2.2.65. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme lisse de dimension relative constante d . Le foncteur $f^*[d]$ est t -exact.

Démonstration. — En effet on a : $f^* = \mathrm{Th}^{-1}(\Omega_f)f^!$. Il vient que $f^*[d] = \mathrm{Th}^{-1}(\Omega_f)[d]f^!$. Comme Ω_f est de dimension d , le corollaire est prouvé. \square

2.2.4.2. *Des systèmes de générateurs de la t -structure perverse.* — Dans cette section, on définit de nouvelles classes d'objets de $\mathrm{H}(X)$ qui engendrent la t -structure perverse de la définition 2.2.61. Tous les résultats de ${}^p t$ -exactitude qu'on obtiendra par la suite reposent essentiellement sur le résultat principal de ce paragraphe à savoir la proposition 2.2.69. On introduit d'abord nos classes :

Définition 2.2.66

1- Pour tout S -schéma $f : X \longrightarrow S$ et $Z \subset X$ un sous-schéma fermé, on note $\mathcal{G}_{!,Z}^{\mathrm{projreg}}(X)$ le sous-ensemble de $\mathcal{G}_!(X)$ formé des objets $g_!g^!f^!A(n)[n]$ avec $g : X' \longrightarrow X$ un S -morphisme projectif, $A \in \mathcal{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que X' est connexe régulier et l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $g^{-1}(Z)$ est somme de diviseurs réguliers à croisements normaux dans X' ,
- g se factorise par l'inclusion $Z \subset X$ i.e. $g^{-1}(Z) = X'$.

Lorsque Z est vide ou égal à X , on notera simplement $\mathcal{G}_!^{\mathrm{projreg}}(X)$ la classe dont il est question.

2- On définit de la même façon les classes $\mathcal{G}_{!,Z}^{\mathrm{reg}}(X)$ lorsqu'on ne demande plus à g d'être projectif mais seulement quasi-projectif.

Le but est de trouver des conditions suffisantes pour que la t -structure engendrée par $\mathcal{G}_{!,Z}^{\mathrm{projreg}}(X)$ soit la t -structure perverse de la définition 2.2.61. Une condition de pureté sur l'ensemble \mathcal{G} semble indispensable.

Définition 2.2.67

1- Nous dirons que l'ensemble \mathcal{G} est faiblement ${}^{\text{pt}}$ -pure si pour toute immersion fermée de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & S \end{array}$$

tels que :

- Les schémas Z et Y sont réguliers et connexes,
 - Le faisceau normal \mathcal{N}_i de l'immersion i est libre de rang non nul,
- la propriété suivante est vérifiée. Pour tout objet $A \in \mathcal{G}$, l'objet $i^*g^!A[-1]$ appartient à la sous-catégorie suspendue :

$$< \{h^!B(n)[n]; B \in \mathcal{G} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\} >_+^{ct}$$

2- On dit que l'ensemble \mathcal{G} est ${}^{\text{pt}}$ -pure si pour toute immersion de S -schémas i comme ci-dessus, et tout objet $A \in \mathcal{G}$, l'objet $i^*g^!A[-r]$ appartient à la sous-catégorie suspendue :

$$< \{h^!B(n)[n]; B \in \mathcal{G} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\} >_+^{ct}$$

avec r le rang du faisceau normal \mathcal{N}_i .

Lemme 2.2.68. — Si S est le spectre d'un corps parfait, l'ensemble \mathcal{G} est automatiquement ${}^{\text{pt}}$ -pure.

Démonstration. — Tout k -schéma régulier est lisse sur k . Il vient que l'immersion :

$$Z \xrightarrow{i} Y$$

est une immersion entre deux k -schémas lisses. Il vient par l'isomorphisme de pureté que $i^*g^! \simeq \text{Th}(\mathcal{N})h^!$. Mais \mathcal{N} est libre de rang non nul r . Il vient que : $i^*g^!A[-r] \simeq h^!A(r)[2r][-r] = h^!A(r)[r]$. \square

Voici le résultat principal :

Proposition 2.2.69. — Supposons l'une des deux conditions suivantes vérifiée :

- S admet la résolution des singularités par éclatements,
- S admet la résolution des singularités par altérations, et \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un S -schéma quasi-projectif et $Z \subset X$ une partie fermée. La t -structure sur $\mathbf{H}(X)$ engendrée par $\mathcal{G}_{1,Z}^{\text{reg}}(X)$ coïncide avec la t -structure engendrée perverse (voir la définition 2.2.61).

Si on suppose en plus que l'ensemble \mathcal{G} est faiblement ${}^{\text{pt}}$ -pure, alors la t -structure sur $\mathbf{H}(X)$ engendrée par $\mathcal{G}_{1,Z}^{\text{projreg}}(X)$ coïncide également avec la t -structure engendrée perverse (voir la définition 2.2.61).

Notons provisoirement $({}^p\mathbf{H}_{Z,\geq 0}^{\text{reg}}(X), {}^p\mathbf{H}_{Z,<0}^{\text{reg}}(X))$ et $({}^p\mathbf{H}_{Z,\geq 0}^{\text{projreg}}(X), {}^p\mathbf{H}_{Z,<0}^{\text{projreg}}(X))$ les t -structures engendrées par $\mathcal{G}_{!,Z}^{\text{reg}}(X)$ et $\mathcal{G}_{!,Z}^{\text{projreg}}(X)$ respectivement. On a clairement les inclusions ${}^p\mathbf{H}_{Z,\geq 0}^{\text{projreg}}(X) \subset {}^p\mathbf{H}_{Z,\geq 0}^{\text{reg}}(X) \subset {}^p\mathbf{H}_{\geq 0}(X)$. Il s'agit de montrer que ces inclusions sont en fait des égalités. Pour cela, il suffit de montrer que la classe d'objets $\mathcal{G}_!(X)$ est dans ${}^p\mathbf{H}_{Z,\geq 0}^{\text{reg}}(X)$ voire dans ${}^p\mathbf{H}_{Z,\geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ lorsque les conditions adéquates sont satisfaites.

Fixons donc un objet $h_!h^!f^!A(n)[n]$ de $\mathcal{G}_!(X)$ avec $h : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme quasi-projectif, $A \in \mathcal{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On va prouver que $h_!h^!f^!A(n)[n]$ est dans ${}^p\mathbf{H}_{Z,\geq 0}^{\text{reg}}(X)$ (resp. ${}^p\mathbf{H}_{Z,\geq 0}^{\text{projreg}}(X)$). On se ramène tout de suite au cas $n = 0$ et Y réduit et connexe. On raisonne par récurrence sur la S -dimension $d_S(Y)$ de Y (voir la définition 2.2.25). Lorsque $d_S(Y)$ est minimal, Y est le S -schéma vide. Il n'y a rien à montrer dans ce cas.

Supposons que $d_S(Y) \succ (\emptyset, -\infty)$. On fixe une X -compactification⁽⁷⁾ de h :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{c} & \bar{Y} \\ & \searrow h & \downarrow \bar{h} \\ & & X \end{array}$$

Cette compactification n'est utile que pour le cas respectif. Le lemme suivant implique immédiatement le premier cas :

Lemme 2.2.70. — *On peut supposer que \bar{Y} est régulier et que $\bar{h}^{-1}(Z)$ est égal à \bar{Y} tout entier ou un diviseur à croisements normaux.*

Démonstration. — Par la résolution des singularités, il existe un S -morphisme projectif $\bar{e} : \bar{Y}' \longrightarrow \bar{Y}$ qui est :

- Un éclatement lorsqu'on n'a pas d'hypothèse supplémentaire sur \mathbf{H} ,
- Une altération lorsque \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé. On supposera en plus que cette altération est munie d'une action d'un groupe fini G (induisant l'action triviale sur la base \bar{Y}) tel que l'extension $k(X') \subset k(X)^G$ est purement inséparable.

tel que en plus \bar{Y}' est un schéma régulier connexe et $\bar{e}^{-1}\bar{h}^{-1}(Z)$ est égal à \bar{Y}' tout entier ou un diviseur à croisements normaux. Dans le premier cas on conviendra que le groupe trivial $G = \{1\}$ agit sur le \bar{Y} -schéma \bar{Y}' . On définit un projecteur de l'algèbre du groupe $\mathbb{Z}_{(|G|)}[G]$ par la formule habituelle :

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

Notons que dans tous les cas considérés, le 2-foncteur homotopique stable \mathbf{H} est $\mathbb{Z}_{(|G|)}$ -linéaire.

⁽⁷⁾On conviendra qu'une compactification d'un S -schéma est une immersion ouverte *dense* dans un S -schéma projectif, voire propre.

On forme le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{c'} & \bar{Y}' \\ e \downarrow & & \downarrow \bar{e} \\ Y & \xrightarrow{c} & \bar{Y} \end{array}$$

L'action de G induit une action sur le Y -schéma Y' . On en déduit une action du groupe G sur le foncteur $e_!e^!$ donnée par :

$$g : e_!e^! \longrightarrow e_!g_!g^!e^! \longrightarrow (e \circ g)_!(e \circ g)^! = e_!e^!$$

Et du coup un projecteur $p : e_!e^! \longrightarrow e_!e^!$. On définit le foncteur $F_Y : \mathbf{H}(Y) \longrightarrow \mathbf{H}(Y)$ par :

$$F_Y(A) = \text{Image} (p : e_!e^!A \longrightarrow e_!e^!A)$$

Notons que la catégorie $\mathbf{H}(Y)$ est pseudo-abélienne puisqu'elle est triangulée et admet les petites sommes. Finalement, en remarquant que le 2-morphisme de counité $e_!e^! \longrightarrow 1$ est G -équivariant (avec 1 muni de l'action triviale), on obtient une factorisation :

$$e_!e^! \longrightarrow F_Y \longrightarrow 1$$

Plus généralement pour tout S -morphisme $r : R \longrightarrow Y$, formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{r'} & Y' \\ e_R \downarrow & & \downarrow e \\ R & \xrightarrow{r} & Y \end{array}$$

L'action de G sur le Y -schéma Y' induit une action de G sur le R -schéma R' . On posant $F_R = \text{Image} (p : e_{R!}e_R^! \longrightarrow e_{R!}e_R^!)$ on obtient également la factorisation : $e_{R!}e_R^! \longrightarrow F_R \longrightarrow 1$.

On appliquera ceci pour $u : U \longrightarrow Y$ l'inclusion d'un ouvert dense de Y au-dessus duquel e est pseudo-revêtement étale pseudo-galoisien (*i.e.* composé d'un morphisme étale galoisien suivi d'un morphisme fini surjectif totalement inséparable) et $t : T \longrightarrow Y$ l'immersion du fermé complémentaire. On a dans ce cas le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xleftarrow{t'} & T' \\ e_U \downarrow & & \downarrow e & & \downarrow e_T \\ U & \xrightarrow{u} & Y & \xleftarrow{t} & T \end{array}$$

On aura besoin du fait que le 2-morphisme $u^*F_Y \longrightarrow u^*$ est un 2-isomorphisme. En effet, il s'identifie canoniquement à $F_U u^* \longrightarrow u^*$. Par 2.1.165 le 2-morphisme $F_U \longrightarrow 1$ est inversible puisque u est pseudo-étale galoisien.

Revenons à notre problème. Pour prouver le lemme, il suffit de montrer les implications :

$$[(h \circ e)_!(h \circ e)^! f^! A \in {}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)] \implies [h_! h^! f^! A \in {}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)]$$

$$[(h \circ e)_!(h \circ e)^! f^! A \in {}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)] \implies [h_! h^! f^! A \in {}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)]$$

Supposons donc que l'objet $(h \circ e)_!(h \circ e)^! f^! A$ est dans ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)$ (resp. ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$). Par construction de F_Y , l'objet $h_! F_Y h^! f^! A$ est un facteur direct de $h_! e_! e^! h^! f^! A$. On en déduit que $h_! F_Y h^! f^! A$ est dans ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)$ (resp. ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$).

Formons un triangle distingué de $\mathbf{H}(Y)$:

$$F_Y h^! f^! A \longrightarrow h^! f^! A \longrightarrow C \longrightarrow F_Y h^! f^! A[+1]$$

Il suffit de montrer que $h_! C$ est dans ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)$ (resp. ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$). Par la discussion précédente, on sait que $u^* C = 0$. Ainsi l'objet C est à support dans T . En d'autres termes : $t_! t^! C \simeq C$. En appliquant $t_! t^!$ on obtient un triangle distingué :

$$t_! t^! F_Y h^! f^! A \longrightarrow t_! t^! h^! f^! A \longrightarrow C \longrightarrow t_! t^! F_Y h^! f^! A[+1]$$

Il est facile de montrer que $t^! F_Y \simeq F_{T^!} t^!$. Notre triangle distingué s'écrit donc sous la forme :

$$t_! F_{T^!} t^! h^! f^! A \longrightarrow t_! t^! h^! f^! A \longrightarrow C \longrightarrow t_! F_{T^!} t^! h^! f^! A[+1]$$

Pour terminer, on montrera que les deux objets $h_! t_! F_{T^!} t^! h^! f^! A$ et $h_! t_! t^! h^! f^! A$ sont dans ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)$ (resp. ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$). Puisque U et U' sont denses dans Y et Y' , on déduit par le lemme 2.2.26 que : $d_S(T) \prec d_S(Y)$ et $d_S(T') \prec d_S(Y') = d_S(Y)$. On sait donc que $(e_T \circ t \circ h)_!(e_T \circ t \circ h)^! f^! A$ et $(t \circ h)_!(t \circ h)^! f^! A$ sont dans ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X)$ (resp. ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$) par hypothèse de récurrence. Pour terminer, il suffit de noter que $h_! t_! F_{T^!} t^! h^! f^! A$ est facteur direct de $h_! t_! e_{T^!} e_T^! t^! h^! f^! A$. Le lemme est prouvé. \square

La preuve de l'égalité ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{reg}}(X) = {}^p\mathbf{H}_{\geq 0}(X)$ étant achevée, on passe à la preuve de ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X) = {}^p\mathbf{H}_{\geq 0}(X)$. Il nous reste pour cela à montrer que l'objet $h_! h^! f^! A$ est dans ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$ sachant que : le S -morphisme $h : Y \longrightarrow X$ admet une X -compactification $\bar{h} : \bar{Y} \longrightarrow X$ avec \bar{Y} un schéma régulier et $\bar{h}^{-1}(Z)$ est égal à \bar{Y} ou un diviseur à croisements normaux. Il va sans dire que A est toujours supposé dans \mathcal{G} .

On raisonne maintenant par une deuxième récurrence sur la S -dimension de $D = \bar{Y} - Y$. Lorsque ce dernier est de S -dimension $(\emptyset, -\infty)$, il est vide et $Y = \bar{Y}$. La conclusion recherchée est clairement vraie dans ce cas.

Supposons donc que D est non vide. Notons $D_{\text{sing}} \subset D$ le lieu singulier⁽⁸⁾ de D . Soit $C \subset D$ un sous-schéma partout de codimension non nulle contenant D_{sing} et tel que le faisceau normal de l'inclusion de $D - C$ dans $\tilde{Y} = \tilde{Y} - C$ soit libre. Notons que $d_S(C) \prec d_S(D)$.

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{v} & \tilde{Y} & \xleftarrow{i} & D - C \\ & \searrow h & \downarrow \tilde{h} & \swarrow l & \\ & & X & & \end{array}$$

Par la récurrence sur la S -dimension du complémentaire de la compactification, on sait que l'objet $\tilde{h}_! \tilde{h}^! f^! A$ est dans ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$. Du 2-triangle distingué de localité :

$$v_! v^! \longrightarrow 1 \longrightarrow i_* i^* \longrightarrow v_! v^! [+1]$$

on déduit le triangle distingué :

$$\tilde{h}_! i_* i^* \tilde{h}^! f^! A[-1] \longrightarrow \tilde{h}_! v_! v^! \tilde{h}^! f^! A \longrightarrow \tilde{h}_! \tilde{h}^! f^! A \longrightarrow \tilde{h}_! i_* i^* \tilde{h}^! f^! A$$

Pour terminer la preuve de la proposition 2.2.69 il suffira de montrer que l'objet $\tilde{h}_! i_* i^* \tilde{h}^! f^! A[-1]$ est dans ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$. Si l'on note E_α les composantes connexes de $D - C$ et $i_\alpha : E_\alpha \longrightarrow \tilde{Y}$ les inclusions évidentes, il est équivalent de prouver que les objets $\tilde{h}_! i_{\alpha*} i_\alpha^* \tilde{h}^! f^! A[-1]$ sont dans ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$.

Pour montrer cela, on utilise l'hypothèse (qui jusqu'ici n'a pas servi) que \mathcal{G} est faiblement p - t -pure. On l'appliquera à l'immersion :

$$\begin{array}{ccc} E_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \tilde{Y} \\ & \searrow f \circ k_\alpha & \downarrow f \circ \tilde{h} \\ & & S \end{array}$$

avec $k_\alpha = \tilde{h} \circ i_\alpha$. Il vient que l'objet $i_\alpha^* \tilde{h}^! f^! A[-1]$ est dans la sous-catégorie suspendue :

$$< \{k_\alpha^! f^! B(m)[m]; B \in \mathcal{G} \text{ et } m \in \mathbb{Z}\} >_+^t$$

Pour terminer, il suffira de montrer que pour tout $B \in \mathcal{G}$ et $m \in \mathbb{Z}$ l'objet

$$\tilde{h}_! i_{\alpha*} i_\alpha^! \tilde{h}^! f^! B(m)[m] = \tilde{h}_! i_{\alpha!} i_\alpha^! \tilde{h}^! f^! B(m)[m] \simeq (\tilde{h} i_\alpha)_! (\tilde{h} i_\alpha)^! f^! B(m)[m]$$

est dans ${}^p\mathbf{H}_{Z, \geq 0}^{\text{projreg}}(X)$. Ceci découle alors par l'hypothèse de la première récurrence appliquée au morphisme $\tilde{h} \circ i_\alpha$ puisque $d_S(E_\alpha) \prec d_S(Y)$. La proposition est finalement prouvée.

⁽⁸⁾Si S est un schéma admettant la résolution des singularités par altération, alors tout S -schéma quasi-projectif P admet un ouvert dense $R \subset P$ avec R régulier. Le lieu singulier de P est alors le complémentaire du plus gros ouvert régulier de P .

Remarque 2.2.71. — Soit $f : X \longrightarrow S$ un S -schéma quasi-projectif. On définit une classe $\mathcal{G}_!^{\text{proj}}(X) \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$ formée des objets de la forme $h_! h^! f^! A$ avec $A \in \mathcal{G}$ et h un morphisme *projectif* de but X . On a clairement les inclusions :

$$\mathcal{G}_!^{\text{projreg}}(X) \subset \mathcal{G}_!^{\text{proj}}(X) \subset \mathcal{G}_!(X)$$

Il vient par 2.2.69 que la classe d'objets compacts $\mathcal{G}_!^{\text{proj}}(X)$ engendre la t -structure perverse de $\mathbf{H}(X)$. On peut alors se demander s'il existe une preuve directe de ce fait, qui ne passe pas par les techniques de résolutions des singularités, et qui donc sera valable sous des hypothèses moins restrictives que celle de la proposition 2.2.69. Nous pensons qu'une telle preuve est difficile à obtenir. En tout cas la tentative naïve de compactifier et de raisonner par récurrence sur la S -dimension du complémentaire échoue puisque l'hypothèse de ${}^p t$ -pureté ne porte que sur des schémas réguliers.

Le résultat suivant utilise uniquement que la t -structure perverse est engendrée par les $\mathcal{G}_!^{\text{proj}}(-)$:

Corollaire 2.2.72. — *Gardons les hypothèses de la proposition 2.2.69. Soit $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme quasi-projectif de S -schémas. Le foncteur $f^!$ est ${}^p t$ -exact.*

Démonstration. — En effet on sait déjà que $f^!$ est ${}^p t$ -négatif. Montrons qu'il est ${}^p t$ -positif. Étant donné que $f^!$ commute aux sommes infinies il suffit de montrer que $f^! \mathcal{G}_!^{\text{proj}}(X) \subset \mathcal{G}_!^{\text{proj}}(X')$ (à isomorphisme près).

Notons p la projection structurale de X sur S . Considérons donc un objet $h_! h^! p^! A(n)[n]$ de $\mathbf{H}(X)$ avec $h : Y \longrightarrow X$ un morphisme projectif $A \in \mathcal{G}$ et n un entier relatif. Formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & Y \\ h' \downarrow & & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Par le théorème de changement de base pour un morphisme projectif, on a : $f^! h_! \simeq h'_! f'^!$. Il vient que :

$$f^! h_! h^! p^! A(n)[n] \simeq h'_! f'^! h^! p^! A(n)[n] \simeq h'_! h'^! (p \circ f)^! A(n)[n]$$

D'où le résultat. □

2.2.4.3. Les propriétés de ${}^p t$ -exactitude des opérations f_* et f^* . — On aura besoin de la conséquence suivante de la ${}^p t$ -pureté.

Lemme 2.2.73. — *Supposons donnée une immersion de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & S \end{array}$$

avec Y un schéma régulier et Z un diviseur à croisements normaux dans Y . Si \mathcal{G} est faiblement ${}^p t$ -pure alors pour tout $A \in \mathcal{G}$ l'objet $i^* g^! A[-1]$ est ${}^p t$ -positif.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur le nombre r de composantes irréductibles de Z . Lorsque $r = 1$, le schéma Z est régulier et le résultat découle de l'hypothèse que \mathcal{G} est faiblement ${}^p t$ -pure. On supposera dans la suite que $r > 1$.

Écrivons $Z = \cup_{k=1, \dots, r} D_k$ avec D_i les composantes irréductibles de Z . Posons $T = \cup_{k=1, \dots, r-1} D_k$ l'union des $r-1$ premières composantes et notons D la composante restante D_r . On forme le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{s'} & T \\ t' \downarrow & \searrow c & \downarrow t \\ D & \xrightarrow{s} & Z \end{array}$$

avec $c = s \circ t' = t \circ s'$. Pour $A \in \mathcal{G}$ on a un triangle distingué à la Mayer-Vietoris associé au recouvrement fermé de Z par T et D :

$$\begin{aligned} c_* c^*(i^* g^! A)[-2] &\longrightarrow i^* g^! A[-1] \\ &\longrightarrow t_* t^*(i^* g^! A)[-1] \oplus s_* s^*(i^* g^! A)[-1] \longrightarrow c_* c^*(i^* g^! A)[-1] \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que les objets $c_* c^*(i^* g^! A)[-2]$, $t_* t^*(i^* g^! A)[-1]$ et $s_* s^*(i^* g^! A)[-1]$ sont ${}^p t$ -positifs. Les 1-morphismes $c_* = c_!$, $s_* = s_!$ et $t_* = t_!$ étant ${}^p t$ -positifs, on se ramène à prouver que les objets $(c \circ i)^* g^! A[-2]$, $(t \circ i)^* g^! A[-1]$ et $(s \circ i)^* g^! A[-1]$ sont ${}^p t$ -positifs. La ${}^p t$ -positivité des deux derniers objets découle de l'hypothèse de récurrence puisque $T \subset Y$ et $D \subset Y$ sont des diviseurs à croisements normaux dont le nombre de composantes irréductibles est $r-1$ et 1 respectivement.

Pour prouver que l'objet $(c \circ i)^* g^! A[-2]$ est ${}^p t$ -positif, on remarque que C est un diviseur à croisements normaux dans le schéma régulier D . Or, on a un isomorphisme évident :

$$(c \circ i)^* g^! A[-2] \simeq t'^*((s \circ i)^* g^! A[-1])[-1]$$

Par ${}^p t$ -pureté faible l'objet $(s \circ i)^* g^! A[-1]$ est dans la sous-catégorie suspendue :

$$< \{(h \circ s)^! B(n)[n]; B \in \mathcal{G} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\} >_{\text{ft}}^{ct}$$

Pour terminer, il suffit donc de prouver que $t'^*((h \circ s)^! B(n)[n])[-1]$ est ${}^p t$ -positif pour tout $B \in \mathcal{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On se ramène immédiatement à $n = 0$. On conclut encore une fois à l'aide de l'hypothèse de récurrence qu'on applique au diviseur à croisements normaux $C \subset D$ ayant au plus $r-1$ composantes irréductibles. \square

Corollaire 2.2.74. — Soient $p : X \longrightarrow S$ un S -schéma quasi-projectif avec X régulier, $i : Y \subset X$ l'inclusion d'un diviseur à croisements normaux et $j : U \subset X$ l'immersion de l'ouvert complémentaire.

Si \mathcal{G} est faiblement ${}^p t$ -pure, alors pour tout $A \in \mathcal{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$, l'objet $i^* j_* j^* p^! A(n)[n-1]$ est ${}^p t$ -positif.

Démonstration. — Appliquons le 1-morphisme i^* au 2-triangle de localité :

$$i_* i^! \longrightarrow 1 \longrightarrow j_* j^* \longrightarrow i_* i^! [+1]$$

On obtient alors (après rotation) le 2-triangle distingué :

$$i^*[-1] \longrightarrow i^* j_* j^*[-1] \longrightarrow i^! \longrightarrow i^*$$

Ainsi pour montrer que $i^* j_* j^* p^! A(n)[n-1]$ est ${}^p t$ -positif il suffit de prouver que les objets $i^* p^! A(n)[n-1]$ et $i^! p^! A(n)[n]$ le sont. La ${}^p t$ -positivité du second objet est claire. Pour le premier, on applique le lemme 2.2.73. \square

Proposition 2.2.75. — *On suppose que l'une des deux conditions ci-dessous est vérifiée :*

- *S admet la résolution des singularités par éclatements,*
- *S admet la résolution des singularités par altérations et H est \mathbb{Q} -linéaire et séparé.*

Soit X un S -schéma quasi-projectif, $j : U \longrightarrow X$ une immersion ouverte et $i : Y \longrightarrow X$ l'immersion fermée complémentaire. Si l'ensemble \mathcal{G} est faiblement ${}^p t$ -pure, le foncteurs j_ est ${}^p t$ -exact et le foncteur $i^* j_*[-1]$ est ${}^p t$ -positif.*

Démonstration. — Le foncteur j_* est ${}^p t$ -négatif puisqu'il admet un adjoint à gauche ${}^p t$ -exact par la proposition 2.2.62. D'autre part, la ${}^p t$ -positivité de j_* découle de la ${}^p t$ -positivité de $j_!$, i_* et de $i^* j_*[-1]$ en invoquant le 2-triangle distingué :

$$i_* i^* j_*[-1] \longrightarrow j_! \longrightarrow j_* \longrightarrow$$

On se contente donc de prouver que $i^* j_*[-1]$ est ${}^p t$ -positif. Ce dernier commute aux sommes infinies. En remarquant que $\mathcal{G}_!(U) = j^* \mathcal{G}(X)$ (à isomorphisme près) on voit qu'il suffirait de montrer que le foncteur $F = i^* j_* j^*[-1]$ est ${}^p t$ -positif. Par la proposition 2.2.69 on se ramène à montrer l'inclusion : $F \mathcal{G}_{!,Y}^{\text{projreg}}(X) \subset {}^p H_{\geq 0}(Y)$.

Appelons f la projection de X sur S et fixons un objet $h_! h^! f^! A(n)[n] \in \mathcal{G}_{!,Y}^{\text{projreg}}(X)$ avec

- $h : W \longrightarrow X$ un S -morphisme projectif,
- W un schéma régulier connexe, et $h^{-1}(Y)$ est égal à W ou un diviseur à croisements normaux de W ,
- $A \in \mathcal{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

On montrera que $F(h_! h^! f^! A(n)[n])$ est ${}^p t$ -positif. Il suffit bien sûr de traiter le cas $n = 0$. Formons le diagramme commutatif à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{j'} & W & \xleftarrow{i'} & Z \\ h_U \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow h_Y \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Y \end{array}$$

Lorsque $Z = h^{-1}(Y) = W$, $j^*h_!h^!f^!A$ est nul. On peut donc supposer que Z est un diviseur à croisements normaux dans W . Comme h est projectif, on a les isomorphismes :

$$i^*j_*j^*h_! \simeq i^*j_*h_{U!}j'^* \simeq i^*j_*h_{U*}j'^* \simeq i^*h_*j'_*j'^* \simeq i^*h_!j'_*j'^* \simeq h_{Y!}i'^*j'_*j'^*$$

Étant donné que $h_{Y!}$ est pt -positif, on voit qu'il suffit de montrer que l'objet $(i'^*j'_*j'^*(p \circ h)^!A)[-1]$ est un objet pt -positif de $\mathbf{H}(Z)$. Le corollaire 2.2.74 permet donc de conclure. \square

Corollaire 2.2.76. — *On garde les hypothèses sur S , \mathbf{H} et \mathcal{G} de la proposition 2.2.75. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas. Le foncteur f_* est pt -positif.*

Démonstration. — On compactifie le morphisme f :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{c} & \bar{Y} \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & X \end{array}$$

avec c une immersion ouverte et \bar{f} un morphisme projectif. On a : $f_* = \bar{f}_*c_* = \bar{f}_!c_*$. Le foncteur $\bar{f}_!$ est pt -positif par la proposition 2.2.62. Le foncteur c_* est pt -exact par la proposition 2.2.75. D'où le résultat. \square

Pour les opérations f^* on commence par le cas des immersions fermées :

Lemme 2.2.77. — *On garde les hypothèses sur S , \mathbf{H} et \mathcal{G} de la proposition 2.2.75. Soit $i : Y \longrightarrow X$ une immersion fermée de S -schémas. Le foncteur i^* est pt -positif.*

Démonstration. — En effet, on le 2-triangle distingué de localité dans $\mathbf{H}(X)$:

$$i_*i^! \longrightarrow 1 \longrightarrow j_*j^* \longrightarrow$$

En appliquant le foncteur i^* on obtient (après rotation) le 2-triangle distingué :

$$i^*j_*j^*[-1] \longrightarrow i^! \longrightarrow i^* \longrightarrow$$

Mais les foncteurs $i^*j_*j^*[-1]$ et $i^!$ sont tous les deux pt -positifs par 2.2.75 et 2.2.72. \square

Corollaire 2.2.78. — *Gardons les hypothèses sur S , \mathbf{H} et \mathcal{G} de 2.2.75. Le foncteur i_* est pt -exact.*

Démonstration. — En effet, i_* est pt -négatif puisqu'il admet un adjoint à gauche qui est pt -positif. D'autre part, par la proposition 2.2.62 on sait qu'il est également pt -positif. \square

Corollaire 2.2.79. — *Gardons les hypothèses sur S , \mathbf{H} et \mathcal{G} de 2.2.75. Soit $j : U \longrightarrow X$ une immersion ouverte de S -schémas et $i : Z \longrightarrow X$ l'immersion fermée complémentaire. Soit A un objet de $\mathbf{H}(X)$. Il y a équivalence entre :*

- A est pt -positif,
- j^*A et i^*A sont pt -positifs.

Démonstration. — La première assertion implique la seconde par la proposition 2.2.62 et le lemme 2.2.77. Il s'agit de montrer que A est ${}^p t$ -positif sachant que j^*A et i^*A le sont. Mais on a le triangle distingué de localité :

$$j_! j^* A \longrightarrow A \longrightarrow i_* i^* A \longrightarrow$$

Le résultat découle alors de la ${}^p t$ -positivité de $j_!$ et i_* . \square

On est en mesure de démontrer :

Proposition 2.2.80. — *On suppose que l'une des deux conditions ci-dessous est vérifiée :*

- *S admet la résolution des singularités par éclatements et \mathbf{H} est semi-séparé,*
- *S admet la résolution des singularités par altérations et \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparable.*

Soit $f : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme quasi-projectif. Notons d_f le maximum des dimensions des fibres de f . Si \mathcal{G} est faiblement ${}^p t$ -pure, le foncteur $f^[d_f]$ est ${}^p t$ -positif.*

Démonstration. — On divisera la preuve en deux parties. La première est consacrée à un cas particulier :

Étape 1 : Supposons donné un morphisme $e : X' \longrightarrow X$ fini surjectif et totalement inséparable. Alors l'équivalence e^* est ${}^p t$ -exacte. En effet, e^* est un adjoint à droite et à gauche de son inverse. Il vient que e^* est un adjoint à droite de e_* . Comme e est fini, $e_* \simeq e_!$. Il vient que e^* est un adjoint à droite de $e_!$. Ceci fournit un isomorphisme $e^* \simeq e^!$. Le résultat recherché découle alors de 2.2.72.

Étape 2 : On prouve la proposition 2.2.80 par récurrence sur la S -dimension du S -schéma Y . Soit U un ouvert dense de Y . On appelle Z le complémentaire de U et on considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & Z \\ & \searrow g & \downarrow f & \swarrow h & \\ & & X & & \end{array}$$

Par le corollaire 2.2.79, pour montrer que $f^*[d_f]$ est ${}^p t$ -positif, il suffirait de montrer que $j^* f^*[d_f]$ et $i^* f^*[d_f]$ le sont. L'hypothèse de récurrence assure la ${}^p t$ -positivité de $i^* f^*[d_f]$. Il vient qu'on peut remplacer Y par n'importe quel ouvert dense de Y . En particulier, on peut supposer Y régulier. Quitte à prendre une composante connexe de Y , on peut le supposer irréductible.

Notons $Z \subset X$ la clôture Zariski de l'image de f . On a alors la factorisation de f :

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{i} X$$

avec g dominant et i une immersion fermée. Étant donné que i^* est pt -positif, on se ramène donc à traiter le morphisme g . En remarquant également que $d_f = d_g$ on voit qu'on peut supposer f dominant. Quitte à remplacer Y par un ouvert dense plus petit, on peut supposer qu'il existe un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{e'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

avec f' lisse et e et e' des morphismes finis surjectifs totalement inséparables. Par la première étape, ceci nous ramène à traiter le 1-morphisme f'^* . On peut donc supposer f lisse. Ce cas a été traité dans le corollaire 2.2.65. \square

On déduit finalement :

Corollaire 2.2.81. — *Gardons les hypothèses sur S , \mathbf{H} et \mathcal{G} de 2.2.80. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme. Notons d_f le maximum des dimensions des fibres de f . Le foncteur $f_*[-d_f]$ est pt -négatif.*

Démonstration. — En effet $f_*[-d_f]$ est adjoint à droite de $f^*[d_f]$. Ce dernier est pt -positif par 2.2.80. \square

2.2.5. Retour aux t -structures engendrées non perverses. Résumé des résultats. — Dans cette section on complète et termine l'étude menée dans la sous-section 2.2.3 de la t -exactitude des 4 opérations. Bien qu'il s'agisse de résultats sur le t -structure non perverse, on utilisera d'une façon essentielle les résultats concernant la t -structure perverse établis dans la sous-section précédente. Les théorèmes de comparaisons du paragraphe suivant permettront de déduire des résultats de t -exactitude à partir de résultats de pt -exactitude.

2.2.5.1. Comparaison des t -structures engendrées perverses et non perverses. — On supposera les hypothèses 2.2.38 et 2.2.58 satisfaites. Étant donné un S -morphisme $f : X \longrightarrow Y$ on posera d_f le maximum des dimensions des fibres de f . Si X est un S -schéma on notera simplement d_X l'entier d_π où π est le morphisme structural de X vers S .

Théorème 2.2.82. — *On suppose que l'une des deux conditions ci-dessous est vérifiée :*

- S admet la résolution des singularités par éclatements et \mathbf{H} est semi-séparé,
- S admet la résolution des singularités par altérations et \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé.

Soit X un S -schéma quasi-projectif. Lorsque \mathcal{G} est faiblement pt -pure, on a l'inclusion : $\mathbf{H}_{\geq 0}(X) \subset {}^p\mathbf{H}_{\geq -d_X}(X)$. En d'autres termes, si A est un objet t -positif de $\mathbf{H}(X)$, l'objet $A[d_X]$ est pt -positif.

Démonstration. — Il suffira de montrer l'inclusion $\mathcal{G}_{\#}(X) \subset {}^p\mathbf{H}_{\geq -d_X}(X)$. On prend donc un objet $g_{\#}A_Y(n)[n]$ avec $g : Y \longrightarrow X$ lisse, $A \in \mathcal{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On supposera comme d'habitude $n = 0$.

Notons f la projection structurale de X sur S . On a un isomorphisme canonique : $g_{\#}A_Y \simeq g_! \mathrm{Th}(\Omega_g)A_Y$. Comme $g_!$ est pt -positif, il suffira de montrer que $\mathrm{Th}(\Omega_g)A_Y(n)[n]$ est dans ${}^p\mathbf{H}_{\geq -d_X}(Y)$. On peut supposer que les fibres de g sont de dimension constante d_g . Dans ce cas, l'équivalence $\mathrm{Th}^{-1}(\Omega_g)[d_g]$ est pt -exact. Il est équivalent donc de prouver que l'objet :

$$\mathrm{Th}^{-1}(\Omega_g)\mathrm{Th}(\Omega_g)A_Y[d_g] \simeq A_Y[d_g]$$

est dans ${}^p\mathbf{H}_{\geq -d_X}(Y)$, ou encore que l'objet $A_Y[d_X + d_g]$ est dans ${}^p\mathbf{H}_{\geq 0}(Y)$.

Il est évident que $d_Y \leq d_X + d_g$. Mais, par la proposition 2.2.80, le foncteur $(f \circ g)^*[d_Y]$ est pt -positif. Il vient que $(f \circ g)^*A[d_X + d_g] = A_Y[d_X + d_g]$ est bien pt -positif. Ceci prouve le théorème. \square

Pour le théorème suivant, on aura besoin d'introduire une condition sur l'ensemble \mathcal{G} :

Définition 2.2.83. — Nous dirons que l'ensemble \mathcal{G} est t -quasi-pure si pour toute immersion fermée de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & S \end{array}$$

avec Z et Y des schémas réguliers et connexes la propriété suivante est vérifiée. Pour tout objet $A \in \mathcal{G}$, l'objet $i^!g^*A[r]$ est t -positif où r est la codimension de Z dans Y .

Lemme 2.2.84. — Si S est le spectre d'un corps parfait, l'ensemble \mathcal{G} est automatiquement t -quasi-pure.

Démonstration. — Tout k -schéma régulier est lisse sur k . Il vient que l'immersion :

$$Z \xrightarrow{i} Y$$

est une immersion entre deux k -schémas lisses. Par l'isomorphisme de pureté on a : $i^!g^* \simeq \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})h^*$. Mais $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})[r]$ est t -exact pour r le rang de \mathcal{N} . Le résultat découle alors de l'isomorphisme : $i^!g^*A[r] \simeq (\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})[r])A_X$. \square

On utilisera la conséquence suivante de la t -quasi-pureté.

Lemme 2.2.85. — Supposons que le schéma S est régulier universellement caténaire de dimension de Krull finie s . Soit $f : X \longrightarrow S$ un S -schéma quasi-projectif avec X régulier et connexe. Si \mathcal{G} est t -quasi-pure alors pour tout objet A de \mathcal{G} , l'objet $f^!A[-d_X + s]$ est t -positif.

Démonstration. — On peut supposer que X est affine. Soit $i : X \longrightarrow W$ une immersion fermée avec W un ouvert de \mathbb{A}_S^n pour n suffisamment grand. On notera p la projection de W sur S . Comme S est régulier, le schéma W est lui aussi régulier.

Notons c la codimension de X dans W . On a : $c \leq n + s - d_X$. En effet, c est plus petite que la codimension d'une fibre X_t pour $t \in S$. Il vient que :

$$c \leq \operatorname{codim}_W (X_t) = \operatorname{codim}_{W_t} (X_t) + \operatorname{codim}_S (t) \leq n - \dim (X_t) + s$$

Il suffit alors de prendre $t \in S$ tel que X_t soit de dimension maximale.

Il vient par t -quasi-pureté que $i^! p^* A[n + s - d_X]$ est t -positif. Mais on a les isomorphismes :

$$\begin{aligned} i^! p^* A[n + s - d_X] &\simeq i^! \operatorname{Th}^{-1}(\Omega_p) p^! A[n + s - d_X] \simeq i^! p^! A(-n)[-2n][n + s - d_X] \\ &\simeq (f^! A(-n)[-n])[s - d_X] \end{aligned}$$

Le résultat est maintenant clair. \square

Théorème 2.2.86. — *On suppose que l'une des deux conditions ci-dessous est vérifiée :*

- *S est régulier, universellement caténaire et admet la résolution des singularités par éclatements,*
- *S est régulier, universellement caténaire et admet la résolution des singularités par altérations et \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé.*

Soit X un S -schéma quasi-projectif. Lorsque \mathcal{G} est t -quasi-pure, on a l'inclusion : ${}^p\mathbf{H}_{\geq s}(X) \subset \mathbf{H}_{\geq 0}(X)$. En d'autres termes, si A est un objet ${}^p t$ -positif de $\mathbf{H}(X)$ alors $A[s]$ est t -positif avec s la dimension de Krull de S .

Démonstration. — Par la proposition 2.2.69, il suffira d'établir l'inclusion : $\mathcal{G}_t^{\operatorname{reg}}(X) \subset \mathbf{H}_{\geq -s}(X)$. Notons f le morphisme structural de X . On considère un objet $g_! g^! f^! A(n)[n]$ avec $g : Y \longrightarrow X$ un morphisme quasi-projectif avec Y régulier, $A \in \mathcal{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On montrera que $g_! g^! f^! A(n)[n + s]$ est t -positif. On se ramène immédiatement au cas $n = 0$.

On a clairement $d_Y \geq d_g$ avec égalité si par exemple g se factorise par l'inclusion d'un point fermé. Par la proposition 2.2.55, on sait que le foncteur $g_! [d_g]$ est t -positif. Il en est de même donc du foncteur $g_! [d_Y]$. Ainsi pour montrer que $g_! g^! f^! A[s]$ est t -positif, il suffira de montrer que $((f \circ g)^! A)[-d_Y + s]$ est un objet t -positif de $\mathbf{H}(Y)$. Ceci a été établi dans le lemme précédent. \square

2.2.5.2. *Les propriétés de t -exactitude des opérations f_* et $f^!$.* — Introduisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.2.87

1- Le 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes \mathbf{H} est parfait pour les petites sommes. Si A est un objet de \mathcal{G} et $f : X \longrightarrow S$ un S -morphisme quasi-projectif, les objets f^*A et $f^!A$ sont compacts.

2- Le schéma S est régulier et universellement caténaire. On suppose en plus que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- S admet la résolution des singularités par éclatements et \mathbf{H} est semi-séparé,
- S admet la résolution des singularités par altérations et \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé.

3- L'ensemble \mathcal{G} est t -quasi-pure et faiblement ${}^p t$ -pure.

Remarque 2.2.88. — La seconde condition est satisfaite dans les deux cas particuliers suivants :

- S le spectre d'un corps de caractéristique nulle,
- \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé et S le spectre d'un corps quelconque.

La troisième condition est automatique lorsque S est le spectre d'un corps parfait. La première condition est également satisfaite dans les bons cas.

Dans la suite du paragraphe, on supposera que l'hypothèse 2.2.87 est satisfaite :

Corollaire 2.2.89. — *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme. Le foncteur $f_*[d_Y + s]$ est t -positif. De même le foncteur $f^![d_X + s]$ est t -positif.*

Démonstration. — En effet, soit A un objet t -positif de $\mathbf{H}(Y)$. On sait par le théorème 2.2.82 que $A[d_Y]$ est un objet ${}^p t$ -positif de $\mathbf{H}(Y)$. Comme le foncteur f_* est ${}^p t$ -positif (par le corollaire 2.2.76), on déduit que $f_*A[d_Y]$ est un objet ${}^p t$ -positif de $\mathbf{H}(X)$. Il vient par le théorème 2.2.86 que $f_*A[d_Y + s]$ est t -positif.

Pour le foncteur $f^!$, on procède de la même manière. Soit A un objet t -positif de $\mathbf{H}(X)$. On sait par le théorème 2.2.82 que $A[d_X]$ est ${}^p t$ -positif. Par le corollaire 2.2.72, le foncteur $f^!$ est ${}^p t$ -exact. Il vient que l'objet $f^!A[d_X]$ est ${}^p t$ -positif. Ainsi par le théorème 2.2.86, $f^!A[d_X + s]$ est t -positif. \square

On continue avec le résultat suivant :

Proposition 2.2.90. — *On suppose donnés des morphismes de S -schémas :*

$$U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} Y$$

*avec i une immersion fermée et j l'immersion ouverte complémentaire. Notons d_U le maximum des dimensions des fibres de $U \longrightarrow S$. Le foncteur $i^*j_*[d_U - 1 + s] : \mathbf{H}(U) \longrightarrow \mathbf{H}(Y)$ est t -positif.*

Démonstration. — Rappelons que par la proposition 2.2.75, le foncteur $i^*j_*[-1]$ est pt -positif. Soit A un objet t -positif de $H(U)$. On sait par le théorème 2.2.82 que $A[d_U]$ est pt -positif. Ceci montre que $i^*j_*A[d_U - 1]$ est pt -positif. Donc $i^*j_*A[d_U - 1 + s]$ est t -positif par le théorème 2.2.86. \square

Le corollaire suivant est une amélioration du corollaire 2.2.89 dans le cas d'une immersion ouverte.

Corollaire 2.2.91. — *On garde les hypothèses de la proposition 2.2.90. On suppose de plus que $d_U + s \geq 1$. Le foncteur $j_*[d_U - 1 + s] : H(U) \longrightarrow H(X)$ est t -positif. En particulier si U est de dimension 1 et S de dimension nulle, ce foncteur est t -exact.*

Démonstration. — En effet, on a un 2-triangle distingué :

$$j_![d_U - 1 + s] \longrightarrow j_*[d_U - 1 + s] \longrightarrow i_*i^*j_*[d_U - 1 + s] \longrightarrow$$

Comme $d_U - 1 + s \geq 0$, le foncteur $j_![d_U - 1 + s]$ est t -positif. Comme i_* est t -exact, on déduit de la proposition 2.2.90 que $i_*i^*j_*[d_U - 1 + s]$ est t -positif. D'où le résultat. \square

2.2.5.3. Résumé des résultats obtenus dans le cas où S est le spectre d'un corps parfait.

— Dans ce paragraphe, on spécialise les résultats obtenus dans les sous-sections 2.2.3 et 2.2.4 ainsi qu'au début de la section 2.2.5 au cas où S est le spectre d'un corps parfait k . On introduit d'abord l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.2.92

1- Le 2-foncteur homotopique stable avec petites sommes H est parfait pour les petites sommes. Si A est un objet de \mathcal{G} et $f : X \longrightarrow S$ un S -morphisme quasi-projectif, l'objet f^*A est compact.

2- On suppose en plus que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- k admet la résolution des singularités par éclatements et H est semi-séparé,
- H est \mathbb{Q} -linéaire et séparé.

On a le lemme suivant :

Proposition 2.2.93. — *Lorsque S est le spectre d'un corps parfait k , les hypothèses 2.2.87 et 2.2.92 sont équivalentes.*

Démonstration. — L'hypothèse 2.2.87 contient toutes les conditions de l'hypothèse 2.2.92. Il s'agit en fait de déduire les conditions manquantes dans 2.2.92 de celles qu'on a gardées.

Par les lemmes 2.2.84 et 2.2.68, on sait que les propriétés de t -quasi-pureté et de pt -pureté faible, sont automatiques lorsque la base est un corps parfait. De même, par le théorème de Jong, la résolution des singularités par altérations est disponible pour les corps.

Il reste à expliquer pourquoi la compacité des objets $f^!A$ pour $A \in \mathcal{G}$ découle de l'hypothèse 2.2.92. Pour cela, on pose $\Lambda \subset H(k)$ la classe des objets de la forme $A(n)$ avec $A \in \mathcal{G}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Il est clair que Λ est stable par twist de Tate. Par la seconde

condition de l'hypothèse 2.2.92, on dispose du théorème de constructibilité des quatre opérations pour les objets Λ -constructibles (voir la scholie 2.2.34). En particulier, les objets $f^!A$ sont Λ -constructibles. D'autres part, pour un k -schéma X , la classe $\Lambda(X)$ est formée d'objets compacts puisque les objets B_Y sont compacts pour $B \in \mathcal{G}$ et Y quasi-projectif sur k . Il vient que les objets Λ -constructibles sont compacts. La proposition est prouvée. \square

Par la suite, on supposera que l'hypothèse 2.2.92 est satisfaite. Avant d'énoncer les scholies 2.2.95 et 2.2.96, notons le résultat intéressant suivant :

Corollaire 2.2.94. — *Soit l/k une extension fini. Les deux t -structures $(H_{\geq 0}(l), H_{< 0}(l))$ et $({}^pH_{\geq 0}(l), {}^pH_{< 0}(l))$ sur $H(l)$ sont égales.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des théorèmes 2.2.82 et 2.2.86 puisque le paramètre s est nul. \square

En ce qui concerne la t -structure engendrée non perverse $(H_{\geq 0}, H_{< 0})$ on a :

Scholie 2.2.95. — *(Pour la t -structure $(H_{\geq 0}, H_{< 0})$) Soit $f : Y \longrightarrow X$ un k -morphisme. On note d_X et d_Y les dimensions de X et Y respectivement. On notera également d_f le maximum des dimensions des fibres de f . On a :*

1. *Pour le foncteur f^* :*
 - f^* est en t -positif sans conditions sur f ,
 - f^* est t -exact lorsque f est lisse.
2. *Pour le foncteur f_* :*
 - f_* est t -négatif sans conditions sur f ,
 - $f_*[d_Y]$ est t -positif sans conditions sur f ,
 - $f_*[d_f]$ est t -positif lorsque f est projectif.
3. *Pour le foncteur $f_!$:*
 - $f_![d_f]$ est t -positif sans conditions sur f ,
 - $f_!$ est t -négatif lorsque f est projectif.
4. *Pour le foncteur $f^!$:*
 - $f^![-d_f]$ est t -négatif sans conditions sur f ,
 - $f^![d_X]$ est t -positif sans conditions sur f ,
 - $f^![-d_f]$ est t -exact lorsque f est lisse de fibres partout de dimension d_f .

Enfin, si $j : U \longrightarrow X$ est une immersion ouverte avec U de dimension d_U non nulle, le foncteur $j_*[d_U - 1]$ est t -positif.

En ce qui concerne la t -structure engendrée perverse $({}^pH_{\geq 0}, {}^pH_{< 0})$ on a :

Scholie 2.2.96. — *(Pour la t -structure $({}^pH_{\geq 0}, {}^pH_{< 0})$) Soit $f : Y \longrightarrow X$ un k -morphisme. On note d_f le maximum des dimensions des fibres de f . On a :*

1. *Pour le foncteur f^* :*
 - $f^*[d_f]$ est pt -positif sans conditions sur f ,
 - $f^*[d_f]$ est pt -exact lorsque f est lisse.

2. Pour le foncteur f_* :
 - f_* est ${}^p t$ -positif sans conditions sur f ,
 - $f_*[-d_f]$ est ${}^p t$ -négatif sans conditions sur f .
3. Pour le foncteur $f_!$:
 - $f_!$ est ${}^p t$ -positif sans conditions sur f ,
 - $f_![-d_f]$ est ${}^p t$ -négatif lorsque f est projectif.
4. Le foncteur $f^!$ est ${}^p t$ -exact sans conditions sur f .

Remarque 2.2.97. — Dans les deux scholies 2.2.95 et 2.2.96, on remarque que les foncteurs f_* et $f^!$ sont de t -dimension bornée sans conditions sur f . Par contre pour le foncteur $f_!$ (resp. f^*) on donne uniquement des bornes supérieures sauf dans le cas f projectif (resp. lisse). On pourra donc penser que la liste de propriétés obtenues est incomplète. Malheureusement, ceci semble faux même dans des cas très simples. En effet, soit j (resp. i) l'immersion d'un ouvert non vide et strict (resp. l'immersion d'un point fermé) dans une courbe lisse. Il y a de bonnes raisons pour penser que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les foncteurs $j_![-n]$ et $i^*[-n]$ ne sont pas ni t -négatifs ni ${}^p t$ -négatifs.

2.2.5.4. Deux compléments. — Dans ce numéro, on démontre deux résultats concernant la t -exactitude des foncteurs f^* et $f_!f^*$ dans le cas où f est le morphisme structural d'un k -schéma non forcément lisse ou projectif.

Proposition 2.2.98. — Soit k un corps parfait admettant la résolution des singularités. Soit $f : X \longrightarrow k$ un k -schéma de type fini. Le foncteur $f^* : H(k) \longrightarrow H(X)$ est t -exact.

Démonstration. — On sait que f^* est t -positif. Il s'agit de prouver qu'il est t -négatif. C'est effectivement le cas pour f lisse. Pour le cas général, on procède par récurrence sur la dimension de X . On fixe un objet t -négatif N de $H(k)$. Soit U un ouvert régulier partout dense dans X . On forme le diagramme de k -schémas :

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Y \\
 & \searrow h & \downarrow f & \swarrow g & \\
 & & k & &
 \end{array}$$

où Y est le fermé $X - U$. On a le 2-triangle de localité :

$$j_!j^*f^* = j_!h^* \longrightarrow f^* \longrightarrow i_*i^*f^* = i_*g^* \longrightarrow$$

Ainsi pour démontrer que f^*N est t -négatif, il suffira (en vue de la t -exactitude de i_*) de prouver que g^*N et $j_!h^*N$ sont t -négatifs. L'hypothèse de récurrence nous dit que g^*N est t -négatif. Il nous reste à traiter l'objet $j_!h^*N$. Soit $e : \tilde{X} \longrightarrow X$ un éclatement disjoint de U avec \tilde{X} régulier. On forme le diagramme commutatif

à carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{i}} & E \\ \parallel & & \downarrow e & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & Y \end{array}$$

On a la chaîne de 2-isomorphismes :

$$e_* \tilde{j}_! \tilde{j}^* e^* \simeq e_! \tilde{j}_! \tilde{j}^* e^* \simeq j_! \mathrm{id}_{U!} \tilde{j}^* e^* \simeq j_! j^*$$

Il vient que $j_! j^* f^* N$ est isomorphe à $e_* \tilde{j}_! \tilde{j}^* e^* f^* N$. Comme e_* est t -négatif, on se ramène à montrer que $\tilde{j}_! \tilde{j}^* e^* f^* N$ est t -négatif. On utilise alors le 2-triangle de localité :

$$\tilde{j}_! \tilde{j}^* e^* f^* \longrightarrow e^* f^* \longrightarrow \tilde{i}_* \tilde{i}^* e^* f^* \longrightarrow$$

Comme \tilde{X} est lisse sur k , on voit que $e^* f^*$ est t -exact. D'autre part, comme E est de dimension plus petite de X , l'hypothèse de récurrence assure que $\tilde{i}^* e^* f^*$ est t -négatif. Le résultat découle alors du fait que $H_{\leq 0}$ est cosuspendue. \square

Corollaire 2.2.99. — *Sous les conditions de la proposition 2.2.98, le foncteur $f_! f^*$ est t -négatif.*

Démonstration. — On choisit une compactification :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j} & \bar{X} & \xleftarrow{i} & Z \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} & \swarrow g & \\ & & k & & \end{array}$$

On obtient alors le triangle distingué :

$$f_! f^* = \bar{f}_! j_! j^* \bar{f}^* \longrightarrow \bar{f}_! \bar{f}^* \longrightarrow g_! g^* = \bar{f}_! i_* i^* \bar{f}^* \longrightarrow$$

Les foncteurs \bar{f}^* et g^* sont t -négatifs. De même, puisque \bar{f} et g sont projectifs, les foncteurs $\bar{f}_!$ et $g_!$ sont t -négatifs. Il vient que le deuxième et troisième sommet de ce 2-triangle sont t -négatifs. D'où le résultat. \square

2.3. Les 2-foncteurs monoïdaux homotopiques stables

Soit S un schéma noethérien admettant une famille ample de fibrés en droites. Dans cette section, on étudie les 2-foncteurs homotopiques stables $H : \mathrm{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{TR}$ munis d'un produit tensoriel \otimes_X sur $H(X)$ pour tout S -schéma quasi-projectif X . On commencera notre étude par une liste de diagrammes commutatifs déduite de la théorie générale développée dans la sous-section 2.1.4. Chemin faisant, on mettra en évidence quelques modules et projecteurs. Les modules les plus importants sont les $[f^*, f^!]$ pour f un morphisme entre S -schémas quasi-projectifs. Un des résultats principaux sera la construction de ces modules, ou plutôt leur indépendance de certains

choix. On obtiendra même un 2-foncteur $[\mathbf{H}^*, \mathbf{H}^!]: \mathbf{Sch}/S \longrightarrow \mathbf{Mod}$. On supposera ensuite que nos catégories monoïdales sont fermées, et on traduit les formules de la sous-section 2.1.5 en termes des quatre opérations. Des compatibilités avec les isomorphismes d'échange sont également établies.

2.3.1. Définitions et premières propriétés. — Notons $\mathbf{Mono}\mathfrak{T}\mathfrak{R}$ (resp. $\mathbf{uMono}\mathfrak{T}\mathfrak{R}$) la 2-catégorie des catégories monoïdales (resp. monoïdales unitaires) triangulées. Les 1-morphismes de $\mathbf{Mono}\mathfrak{T}\mathfrak{R}$ (resp. $\mathbf{uMono}\mathfrak{T}\mathfrak{R}$) sont les foncteurs monoïdaux (resp. monoïdaux unitaires) et triangulés commutant aux isomorphismes s_g et s_d (voir la définition 2.1.148). Les transformations naturelles, sont les transformations naturelles des foncteurs monoïdaux (resp. monoïdaux et unitaires) qui sont également des transformations naturelles de foncteurs triangulés.

Définition 2.3.1

1- Un 2-foncteur monoïdal (resp. monoïdal unitaire) est un 2-foncteur :

$$(\mathbf{H}, \otimes): \mathbf{Sch}/S \longrightarrow \mathbf{Mono}\mathfrak{T}\mathfrak{R} \quad (\text{resp. } (\mathbf{H}, \otimes, \mathbf{1}): \mathbf{Sch}/S \longrightarrow \mathbf{uMono}\mathfrak{T}\mathfrak{R})$$

qui à un S -schéma quasi-projectif X associe une catégorie monoïdale (resp. monoïdale unitaire) $(\mathbf{H}(X), \otimes_X)$ (resp. $(\mathbf{H}(X), \otimes_X, \mathbf{1}_X)$) et à un S -morphisme $f: Y \longrightarrow X$ associe un foncteur monoïdal (resp. monoïdal unitaire) triangulé f^* .

2- Un 2-foncteur monoïdal (\mathbf{H}, \otimes) est dit un 2-foncteur monoïdal homotopique et stable si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Lorsqu'on compose à droite par le 2-foncteur (strict) d'oubli : $\mathbf{Mono}\mathfrak{T}\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ (resp. $\mathbf{uMono}\mathfrak{T}\mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$) on obtient un 2-foncteur homotopique stable,
- Formule de projection. Soit $f: Y \longrightarrow X$ un S -morphisme lisse. Les deux morphismes (voir la proposition 2.1.97) :

$$p_g: f_{\#}(f^*(A) \otimes_Y B') \longrightarrow A \otimes_X f_{\#}(B')$$

et

$$p_d: f_{\#}(A' \otimes_Y f^*(B)) \longrightarrow f_{\#}(A') \otimes_X B$$

naturels en $(A, B) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$ et $(A', B') \in \mathbf{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$ sont inversibles.

3- On obtient la notion de 2-foncteur monoïdal symétrique (resp. monoïdal symétrique unitaire) homotopique et stable en faisant les changements évidents.

Remarque 2.3.2. — Étant donné un 2-foncteur monoïdal homotopique stable (\mathbf{H}, \otimes) on obtient un autre en remplaçant les catégories monoïdales $(\mathbf{H}(X), \otimes_X)$ par les catégories \otimes -opposées $(\mathbf{H}(X), \otimes_X^\circ)$. Ce 2-foncteur monoïdal homotopique stable est appelé le \otimes -opposé de (\mathbf{H}, \otimes) . Le passage à $(\mathbf{H}, \otimes^\circ)$ permettra de déduire des résultats par dualité.

Par la suite, on se donne un 2-foncteur monoïdal homotopique stable (H, \otimes) . On commence par des résultats de cohérence qu'on déduit directement de la définition 2.3.1. Pour un morphisme lisse f entre S -schémas quasi-projectifs, les morphismes p_g et p_d sont les morphismes structuraux du projecteur $[f^*, f_\#]$ obtenu *via* l'adjonction $(f_\#, f^*)$ à partir du module tautologique $[f^*, f^*]$ (voir la proposition 2.1.97). On a :

Lemme 2.3.3. — *Les isomorphismes de connexion des 2-foncteurs H^* et ${}^{\text{Liss}}H_\#$ induisent un 2-foncteur :*

$$[{}^{\text{Liss}}H^*, {}^{\text{Liss}}H_\#] : (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{P}\mathfrak{r}\mathfrak{o}\mathfrak{j}$$

Démonstration. — Ceci se démontre facilement en partant du 2-foncteur $[H^*, H^*] : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{o}\mathfrak{d}$. \square

Remarque 2.3.4. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs. Le fait que les p_g et p_d définissent un projecteur bilatère $[f^*, f_\#]$ se traduit par les trois diagrammes commutatifs ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} f_\#(f^*A \otimes_Y (f^*B \otimes_Y C')) & \xrightarrow{p_g} & A \otimes_X f_\#(f^*B \otimes_Y C') \xrightarrow{p_g} A \otimes_X (B \otimes_X f_\#C') \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ f_\#((f^*A \otimes_Y f^*B) \otimes_Y C') & \xrightarrow{\sim} & f_\#(f^*(A \otimes_X B) \otimes_Y C') \xrightarrow{p_g} (A \otimes_X B) \otimes_X f_\#C' \\ \\ f_\#((A' \otimes_Y f^*B) \otimes_Y f^*C) & \xrightarrow{p_d} & f_\#(A' \otimes_Y f^*B) \otimes_X C \xrightarrow{p_d} (f_\#A' \otimes_X B) \otimes_X C \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ f_\#(A' \otimes_Y (f^*B \otimes_Y f^*C)) & \xrightarrow{\sim} & f_\#(A' \otimes_Y f^*(B \otimes_X C)) \xrightarrow{p_d} f_\#A' \otimes_X (B \otimes_X C) \\ \\ f_\#(f^*A \otimes_Y (B' \otimes_Y f^*C)) & \xrightarrow{p_g} & A \otimes_X f_\#(B' \otimes_Y f^*C) \xrightarrow{p_d} A \otimes_X (f_\#B' \otimes_X C) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ f_\#((f^*A \otimes_Y B') \otimes_Y f^*C) & \xrightarrow{p_d} & f_\#(f^*A \otimes_Y B') \otimes_X C \xrightarrow{p_g} (A \otimes_X f_\#B') \otimes_X C \end{array}$$

avec $(A, B, C, A', B', C') \in \text{Ob}(H(X))^3 \times \text{Ob}(H(Y))^3$.

Lemme 2.3.5. — *Soit un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

avec f (et donc f') lisse. Pour $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2 \times \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 f'_{\#}((f \circ g')^* A \otimes_{Y'} g'^* B') & \xrightarrow{c^*} & f'_{\#}(g'^* f^* A \otimes_{Y'} g'^* B') & \xrightarrow{\sim} & f'_{\#} g'^*(f^* A \otimes_Y B') \\
 \downarrow c^* & & & & \downarrow Ex_{\#}^* \\
 f'_{\#}(f'^* g^* A \otimes_{Y'} g'^* B') & & & & g^* f_{\#}(f^* A \otimes_Y B') \\
 \downarrow p_g & & Ex_{\#}^* & \longrightarrow & \downarrow p_g \\
 g^* A \otimes_{X'} f'_{\#} g'^* B' & \xrightarrow{\quad} & g^* A \otimes_{X'} g^* f_{\#} B' & \xrightarrow{\sim} & g^*(A \otimes_X f_{\#} B')
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 f'_{\#}(g'^* A' \otimes_{Y'} (f \circ g')^* B) & \xrightarrow{c^*} & f'_{\#}(g'^* A' \otimes_{Y'} g'^* f^* B) & \xrightarrow{\sim} & f'_{\#} g'^*(A' \otimes_Y f^* B) \\
 \downarrow c^* & & & & \downarrow Ex_{\#}^* \\
 f'_{\#}(g'^* A' \otimes_{Y'} f'^* g^* B) & & & & g^* f_{\#}(A' \otimes_Y f^* B) \\
 \downarrow p_d & & Ex_{\#}^* & \longrightarrow & \downarrow p_d \\
 f'_{\#} g'^* A' \otimes_{X'} g^* B & \xrightarrow{\quad} & g^* f_{\#} A' \otimes_{X'} g^* B & \xrightarrow{\sim} & g^*(f_{\#} A' \otimes_X B)
 \end{array}$$

sont commutatifs.

Démonstration. — Le second diagramme s'obtient du premier en remplaçant \otimes par \otimes° , A par B et B' par A' . Pour montrer que le premier diagramme est commutatif, on applique le lemme 2.1.105 à la face carrée de \mathfrak{Mod}_g :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbf{H}(Y'), \otimes_{Y'}) & \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\
 \uparrow [f'^*, f'^*] & \nwarrow Ex_{\#}^{*,*} & \uparrow [f^*, f^*] \\
 (\mathbf{H}(X'), \otimes_{X'}) & \xleftarrow{[g^*, g^*]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X)
 \end{array}$$

formée des quatre modules tautologiques sur f^* , g^* , f'^* et g'^* . Dans le diagramme commutatif obtenu, on remplace l'isomorphisme d'échange $Ex_{\#}^{*,*}$ par la composée de deux isomorphismes de connexion du type c^* . On obtient de cette façon le diagramme de l'énoncé. \square

Soit $f : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme entre S -schémas quasi-projectifs. Le 1-morphisme f^* étant monoïdal, il admet un adjoint à droite f_* pseudo-monoïdal par le corollaire 2.1.91. Si en plus \mathbf{H} est unitaire, le 1-morphisme f_* est naturellement pseudo-unitaire. On a même un 2-foncteur :

$$H_* : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathbf{pMod}$$

adjoint à droite global de la composée : $\mathrm{Sch}/S \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{ono} \subset \mathbf{p}\mathcal{M}\mathrm{ono}$ par la proposition 1.1.17.

Lemme 2.3.6. — Soient $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion fermée de S -schémas quasi-projectifs et A et B des objets de $\mathbf{H}(Z)$. L'accouplement :

$$i_* A \otimes_Y i_* B \longrightarrow i_*(A \otimes_Z B)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Appelons j l'immersion ouverte complémentaire de i . On a : $j^*(i_* A \otimes_Y i_* B) \simeq (j^* i_* A) \otimes_{Y-Z} (j^* i_* B) = 0$. Il vient par le triangle de localité que le morphisme d'unité :

$$i_* A \otimes_Y i_* B \longrightarrow i_* i^*(i_* A \otimes_Y i_* B)$$

est un isomorphisme. Or, l'accouplement du foncteur pseudo-monoïdal i_* est donné par la composition :

$$i_* A \otimes_Y i_* B \xrightarrow{\sim} i_* i^*(i_* A \otimes_Y i_* B) \longrightarrow i_*(i^* i_* A \otimes_Z i^* i_* B) \longrightarrow i_*(A \otimes_Z B)$$

La seconde flèche est un isomorphisme puisque i^* est monoïdal. La troisième est également inversible puisque la counité de l'adjonction (i^*, i_*) est inversible. Le lemme est ainsi prouvé. \square

Remarque 2.3.7. — Sous les conditions du lemme précédent, le foncteur i_* est un foncteur monoïdal. On fera attention que, dans le cas où \mathbf{H} est unitaire, le foncteur i_* n'est pas unitaire mais seulement pseudo-unitaire.

La discussion précédente peut être rendue plus précise. En effet, si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme de S -schémas quasi-projectifs, le foncteur f^* est un foncteur comonoïdal lorsqu'il est muni du coaccouplement inverse de l'accouplement de f . Par la proposition 2.1.98, l'adjoint à droite f_* est naturellement un f^* -coprojecteur bilatère. On notera pour $(A, B, A', B') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(X))^2 \times \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$:

$$q_g : A \otimes_X f_* B' \longrightarrow f_*(f^* A \otimes_Y B') \quad \text{et} \quad g_a : f_* A' \otimes_X B \longrightarrow f_*(A' \otimes_Y f^* B)$$

les morphismes structuraux du coprojecteur $[f^*, f_*]$.

Lemme 2.3.8. — Les isomorphismes de connexion des 2-foncteurs \mathbf{H}^* et \mathbf{H}_* induisent un 2-foncteur :

$$[\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*] : \mathrm{Sch}/S \longrightarrow \mathbf{c}\mathcal{P}\mathrm{roj}$$

Remarque 2.3.9. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. On a les trois diagrammes commutatifs ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes_X (B \otimes_X f_* C') & \xrightarrow{q_g} & A \otimes_X f_*(f^* B \otimes_Y C') & \xrightarrow{q_g} & f_*(f^* A \otimes_Y (f^* B \otimes_Y C')) \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 (A \otimes_X B) \otimes_X f_* C' & \xrightarrow{q_g} & f_*(f^*(A \otimes_X B) \otimes_Y C') & \xrightarrow{\sim} & f_*((f^* A \otimes_Y f^* B) \otimes_Y C') \\
 (f_* A' \otimes_X B) \otimes_X C & \xrightarrow{q_d} & f_*(A' \otimes_Y f^* B) \otimes_X C & \xrightarrow{q_d} & f_*((A' \otimes_Y f^* B) \otimes_Y f^* C) \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 f_* A' \otimes_X (B \otimes_X C) & \xrightarrow{q_d} & f_*(A' \otimes_Y f^*(B \otimes_X C)) & \xrightarrow{\sim} & f_*(A' \otimes_Y (f^* B \otimes_Y f^* C)) \\
 A \otimes_X (f_* B' \otimes_X C) & \xrightarrow{q_d} & A \otimes_X f_*(B' \otimes_Y f^* C) & \xrightarrow{q_g} & f_*(f^* A \otimes_Y (B' \otimes_Y f^* C)) \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 (A \otimes_X f_* B') \otimes_X C & \xrightarrow{q_g} & f_*(f^* A \otimes_Y B') \otimes_X C & \xrightarrow{q_d} & f_*((f^* A \otimes_Y B') \otimes_Y f^* C)
 \end{array}$$

avec $(A, B, C, A', B', C') \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^3 \times \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^3$.

On peut également préciser le lemme 2.3.6 en :

Lemme 2.3.10. — Soit $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion fermée de S -schémas quasi-projectifs. Les morphismes structuraux de i^* -coprojecteur bilatère i_* :

$$q_g : A \otimes_Y i_* B' \longrightarrow i_*(i^* A \otimes_Z B') \quad \text{et} \quad q_d : i_* A' \otimes_Y B \longrightarrow i_*(A' \otimes_Z i^* B)$$

sont des isomorphismes pour tout $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2 \times \text{Ob}(\mathbf{H}(Z))^2$.

Démonstration. — Par définition, les morphismes q_g et q_d sont donnés par les composées suivantes :

$$\begin{aligned}
 A \otimes_Y i_* B' &\longrightarrow i_* i^*(A \otimes_Y i_* B') \longrightarrow i_*(i^* A \otimes_Z i^* i_* B') \longrightarrow i_*(i^* A \otimes_Z B') \\
 i_* A' \otimes_Y B &\longrightarrow i_* i^*(i_* A' \otimes_Y B) \longrightarrow i_*(i^* i_* A' \otimes_Z i^* B) \longrightarrow i_*(A' \otimes_Z i^* B)
 \end{aligned}$$

Dans ces deux composées, les deuxième et troisième flèches sont inversibles. Il suffit donc de prouver que les deux morphismes d'unités :

$$A \otimes_Y i_* B' \longrightarrow i_* i^*(A \otimes_Y i_* B') \quad \text{et} \quad i_* A' \otimes_Y B \longrightarrow i_* i^*(i_* A' \otimes_Y B)$$

sont inversibles. En utilisant le triangle de localité, ceci revient à dire que les objets $j^*(A \otimes_Y i_* B')$ et $j^*(i_* A' \otimes_Y B)$ sont nuls lorsque j est l'immersion ouverte complémentaire à i . Par monoïdalité, on a :

$$j^*(A \otimes_Y i_* B') = j^* A \otimes_{Y-Z} j^* i_* B' = j^* A \otimes 0 = 0$$

et

$$j^*(i_* A' \otimes_Y B) = j^* i_* A' \otimes_{Y-Z} j^* B = 0 \otimes j^* B = 0$$

D'où le lemme. □

2.3.2. Le module $[i^*, i^!]$ pour une immersion fermée i . — Pour $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion fermée de S -schémas quasi-projectifs, on a vu que les morphismes structuraux du i^* -coproducteur i_* sont des isomorphismes. on peut donc définir un projecteur $[i^*, i_*]$ en inversant les morphismes q_g et q_d :

$$q_g^{-1} : i_*(i^*A \otimes_Z B') \longrightarrow A \otimes_Y i_*B' \quad \text{et} \quad q_d^{-1} : i_*(A' \otimes_Z i^*B) \longrightarrow i_*A' \otimes_Y B$$

Le résultat suivant s'obtient immédiatement à partir du lemme 2.3.8 :

Lemme 2.3.11. — *Les morphismes de connexion des 2-foncteurs H^* et H_* induisent un 2-foncteur :*

$$[\text{Imm}H^*, \text{Imm}H_*] : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{P}\text{roj}$$

Soit $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion fermée entre S -schémas quasi-projectifs. On sait par la proposition 1.4.9 que le foncteur i_* admet un adjoint à droite $i^!$. Ainsi le i^* -projecteur bilatère i_* induit une structure de i^* -module bilatère sur $i^!$. On a ainsi des morphismes :

$$r_g : i^*A \otimes_Z i^!B \longrightarrow i^!(A \otimes_Y B) \quad \text{et} \quad r_d : i^!A \otimes i^*B \longrightarrow i^!(A \otimes B)$$

naturels en $(A, B) \in \text{Ob}(H(Y))^2$. On obtient immédiatement :

Lemme 2.3.12. — *Les isomorphismes de connexion de H^* et ${}^{\text{Imm}}H^!$ induisent un 2-foncteur :*

$$[\text{Imm}H^*, {}^{\text{Imm}}H^!] : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{M}\text{od}$$

Remarque 2.3.13. — Le morphisme $i^*A \otimes_Z i^!B \longrightarrow i^!(A \otimes_Y B)$ n'est pas un isomorphisme en général. Supposons pour simplifier que i est une immersion fermée entre deux S -schémas lisses :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & S \end{array}$$

Fixons un objet E de $H(S)$ et posons $A = i_*h^*E$ et $B = g^*E$. On a $i^*A \otimes i^!B = h^*E \otimes \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_i)h^*E$. D'autre part, $i^!(A \otimes B) = i^!(i_*h^*E \otimes g^*E) = i^!(i_*(h^*E \otimes i^*g^*E)) = h^*(E \otimes E)$. En général, les deux objets $h^*E \otimes \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_i)h^*E$ et $h^*(E \otimes E)$ sont non-isomorphes.

On continue avec quelques diagrammes commutatifs de compatibilité avec les isomorphismes d'échange :

Lemme 2.3.14. — *Soit un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{i'} & R \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

avec i une immersion fermée. Pour $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} p'^* i^* A \otimes_T p'^* i^! B & \longrightarrow & p'^* (i^* A \otimes_Y i^! B) & \longrightarrow & p'^* i^! (A \otimes_X B) \\ \downarrow Ex^{*,*} \otimes Ex^{!,*} & & & & \downarrow Ex^{!,*} \\ i'^* p^* A \otimes_T i'^! p^* B & \longrightarrow & i'^! (p^* A \otimes_R p^* B) & \longrightarrow & i'^! p^* (A \otimes_X B) \end{array}$$

ainsi que son \otimes -dual sont commutatifs. En d'autres termes, les morphismes d'échange $Ex^{*,*}$ et $Ex^{!,*}$ induisent une face carrée dans la 2-catégorie des bimodules \mathfrak{Mod} :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(T), \otimes_T) & \xleftarrow{[i'^*, i'^!]} & (\mathbf{H}(R), \otimes_R) \\ \uparrow [p'^*, p'^*] & \nearrow [Ex^{*,*}, Ex^{!,*}] & \uparrow [p^*, p^*] \\ (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \end{array}$$

Démonstration. — On part de la face carrée de \mathbf{cMod} :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(T), \otimes_T) & \xleftarrow{[i'^*, i'^*]} & (\mathbf{H}(R), \otimes_R) \\ \uparrow [p'^*, p'^*] & \nearrow [Ex^{*,*}, Ex^{*,*}] & \uparrow [p^*, p^*] \\ (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^*]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \end{array}$$

formée des comodules tautologiques sur les foncteurs comonoïdaux f^* , i^* , f'^* et i'^* . Par la version duale du lemme 2.1.105, appliquée aux adjoints à droite i_* et i'_* de i^* et i'^* respectivement, on obtient le diagramme commutatif de 2-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} p^*(A \otimes_Y i_* B') & \xrightarrow{\sim} & p^* i_*(i^* A \otimes_Z B') & \xrightarrow{\sim} & i'_* p'^*(i^* A \otimes_Z B') & \xrightarrow{\sim} & i'^*(p'^* i^* A \otimes_T p'^* B') \\ \parallel & & & & & & \uparrow \sim \\ p^*(A \otimes_Y i_* B') & \xrightarrow{\sim} & p^* A \otimes_R p^* i_* B' & \xrightarrow{\sim} & p^* A \otimes_R i'_* p'^* B' & \xrightarrow{\sim} & i'_*(i'^* p^* A \otimes_T p'^* B) \end{array}$$

Pour tout $(A, B') \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y)) \otimes \text{Ob}(\mathbf{H}(Z))$. Ainsi, en inversant toutes les flèches, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} i'^*(p'^* i^* A \otimes_T p'^* B') & \xrightarrow{\sim} & i'_* p'^*(i^* A \otimes_Z B') & \xrightarrow{\sim} & p^* i_*(i^* A \otimes_Z B') & \xrightarrow{\sim} & p^*(A \otimes_Y i_* B') \\ \downarrow \sim & & & & & & \parallel \\ i'_*(i'^* p^* A \otimes_T p'^* B) & \xrightarrow{\sim} & p^* A \otimes_R i'_* p'^* B' & \xrightarrow{\sim} & p^* A \otimes_R p^* i_* B' & \xrightarrow{\sim} & p^*(A \otimes_Y i_* B') \end{array}$$

On obtient le résultat recherché en appliquant la seconde partie du même lemme 2.1.105 (version modules) aux adjoints à droite $i^!$ et $i'^!$ de i_* et i'_* respectivement. \square

Corollaire 2.3.15. — Soit un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{i'} & R \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

avec p lisse et i une immersion fermée. Pour $A \in \mathbf{H}(Y)$ et $B' \in \mathbf{H}(T)$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} p_{\#} i'_*(p'^* i^* A \otimes_T B') & \xrightarrow{Ex_{*,\#}} & i_* p'_{\#}(p'^* i^* A \otimes_T B') & \longrightarrow & i_*(i^* A \otimes_Z p'_{\#} B') & \longrightarrow & A \otimes_Y i_* p'_{\#} B' \\ \downarrow Ex^{*,*} & & & & & & \parallel \\ p_{\#} i'_*(i'^* p^* A \otimes_T B') & \longrightarrow & p_{\#}(p^* A \otimes_R i'_* B') & \longrightarrow & A \otimes_Y p_{\#} i'_* B' & \xrightarrow{Ex_{*,\#}} & A \otimes_Y i_* p'_{\#} B' \end{array}$$

est commutatif. En d'autres termes, les 2-morphismes $Ex^{*,*}$ et $Ex_{\#,*}$ définissent une face dans la 2-catégorie $\mathfrak{P}roj$:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(T), \otimes_T) & \xrightarrow{[i'^*, i'_*]} & (\mathbf{H}(R), \otimes_R) \\ [p'^*, p'_{\#}] \downarrow & \swarrow [Ex^{*,*}, Ex_{*,\#}] & \downarrow [p^*, p_{\#}] \\ (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xrightarrow{[i^*, i_*]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \end{array}$$

Démonstration. — Par le lemme 2.3.14, les morphismes de connexions $Ex^{*,*}$ et $Ex^{\dagger,*}$ induisent une face de la 2-catégorie \mathfrak{Mod} . Le résultat découle de la functorialité de la construction 2.1.97, et du fait que le transformé du 2-morphisme $Ex^{\dagger,*}$ par les adjonctions $(i_* p'_{\#}, p'^* i^{\dagger})$ et $(p_{\#} i'_*, i'^{\dagger} p^*)$ est le 2-morphisme d'échange $Ex_{*,\#}$. \square

On continue avec :

Lemme 2.3.16. — Soit un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{s'} & Y \\ t' \downarrow & & \downarrow t \\ Z & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

avec s et t des immersions fermées. Les morphismes de connexions :

$$Ex^{\dagger,*} : t'^* s^{\dagger} \longrightarrow s'^* t^{\dagger} \quad , \quad Ex^{\dagger,*} : s'^* t^{\dagger} \longrightarrow t'^{\dagger} s^* \quad \text{et} \quad Ex^{\dagger,\dagger} : t'^{\dagger} s^{\dagger} \xrightarrow{\sim} s^{\dagger} t^{\dagger}$$

induisent une face carrée mixte de modules (au sens de la définition 2.1.111) :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(T), \otimes_T) & \xleftarrow{[s'^*, s'^{\dagger}]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\ [t'^*, t'^{\dagger}] \uparrow & \swarrow \lrcorner \nearrow & \uparrow [t^*, t^{\dagger}] \\ (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[s^*, s^{\dagger}]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X) \end{array}$$

avec $[t^*, t^!]$ et $[t'^*, t'^!]$ considérés avec leur structure de modules à droite et $[s^*, s^!]$ et $[s'^*, s'^!]$ avec leur structure de modules à gauche. En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} s'^* t^! (A) \otimes_T t'^* s^! (B) & \longrightarrow & t'^! s^* (A) \otimes_T t'^* s^! (B) & \longrightarrow & t'^! (s^* (A) \otimes_Z s^! (B)) & \longrightarrow & t'^! s^! (A \otimes_X B) \\ \parallel & & & & & & \downarrow \sim \\ s'^* t^! (A) \otimes_T t'^* s^! (B) & \longrightarrow & s'^* t^! (A) \otimes_T s'^! t^* (B) & \longrightarrow & s^! (t^! (A) \otimes_Y t^* (B)) & \longrightarrow & s^! t^! (A \otimes_X B) \end{array}$$

Pour tout $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$.

Démonstration. — On part de la face carrée de \mathfrak{Mod} :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(T), \otimes_T) & \xleftarrow{[s'^*, s'^!]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\ \uparrow [t'^*, t'^*] & \nearrow [Ex^{*,*}, Ex^{!,*}] & \uparrow [t^*, t^*] \\ (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[s^*, s^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X) \end{array}$$

Plutôt que de considérer $[t^*, t^*]$ et $[t'^*, t'^*]$ avec leur structure de module à gauche, on va les considérer comme des comodules à droite. Il est alors immédiat qu'on a une face carrée mixte de modules et comodules :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(T), \otimes_T) & \xleftarrow{[s'^*, s'^!]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\ \uparrow [t'^*, t'^*] & \nearrow \nearrow & \uparrow [t^*, t^*] \\ (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[s^*, s^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X) \end{array}$$

formée des modules à gauche $[s^*, s^!]$ et $[s'^*, s'^!]$ et des comodules à droite tautologiques sur t^* et t'^* . Il vient par le lemme 2.1.118 que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} s^* t_*(A') \otimes_Z s^! (B) & \longrightarrow & s^! (t_*(A') \otimes_X B) & \xrightarrow{\sim} & s^! t_*(A' \otimes_Y s^*(B)) & \xrightarrow{\sim} & t'_* s'^! (A' \otimes_Y s^*(B)) \\ \sim \downarrow & & & & & & \parallel \\ t'_* s'^* (A') \otimes_Z s^! (B) & \xrightarrow{\sim} & t'_* (s'^* (A') \otimes_T t'^* s^! (B)) & \rightarrow & t'_* (s'^* (A') \otimes_T s'^! t^* (B)) & \rightarrow & t'_* s'^! (A' \otimes_Y t^* (B)) \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A', B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y)) \times \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$. L'inversibilité des flèches marquées découle de 2.3.10 et du théorème de changement de base pour une immersion fermée (voir la proposition 1.4.15). Ainsi, en renversant le sens des flèches :

$$\begin{array}{ccc} s^! (t_*(A') \otimes_X B) & \xrightarrow{\sim} & s^! t_*(A' \otimes_Y s^*(B)) & \xrightarrow{\sim} & t'_* s'^! (A' \otimes_Y s^*(B)) \\ s^* t_*(A') \otimes_Z s^! (B) & \xrightarrow{\sim} & t'_* s'^* (A') \otimes_Z s^! (B) & \xrightarrow{\sim} & t'_* (s'^* (A') \otimes_T t'^* s^! (B)) \end{array}$$

on obtient un nouveau diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 t'_*(s'^*(A')) \otimes_T t'^*s^!(B) & \rightarrow & t'_*s'^*(A') \otimes_Z s^!(B) & \rightarrow & s^*t_*(A') \otimes_Z s^!(B) & \rightarrow & s^!(t_*(A') \otimes_X B) \\
 \downarrow & & & & & & \parallel \\
 t'_*(s'^*(A')) \otimes_T s'^!t^*(B) & \rightarrow & t'_*s'^!(A' \otimes_Y t^*(B)) & \rightarrow & s^!t_*(A' \otimes_Y t^*(B)) & \rightarrow & s^!(t_*(A') \otimes_X B)
 \end{array}$$

Pour conclure, on applique la seconde partie du lemme 2.1.114 aux :

- deux modules à gauche $[s^*, s^!]$ et $[s'^*, s'^!]$,
- deux projecteurs à droite $[t^*, t_*]$ et $[t'^*, t'_*]$,
- aux 2-morphismes : $Ex^{!,*} : t'^*s^! \longrightarrow s'^!t^*$, $(Ex_*^*)^{-1} : t'_*s'^* \xrightarrow{\sim} s^*t_*$ et $Ex_*^! : t'_*s'^! \xrightarrow{\sim} s^!t_*$.

Le lemme est prouvé. \square

2.3.3. Structure monoïdale et équivalences de Thom. — Dans ce paragraphe, on verra que les couples $[1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})]$ et $[1, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})]$ sont naturellement des modules bilatères pour tout \mathcal{O}_X -module localement libre sur un S -schéma quasi-projectif X .

Définition 2.3.17. — Soient X un S -schéma quasi-projectif et \mathcal{N} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini.

1- On définit une structure de $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$ -projecteur bilatère sur $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ en prenant la composition des 1-morphismes de $\mathfrak{P}\mathrm{roj} : [p^*, p_\#] \circ [s^*, s_*] = [s^*p^*, \mathrm{Th}(\mathcal{N})]$ et en identifiant s^*p^* au foncteur identité via les isomorphismes de connexion. En particulier, on dispose pour $(A, B) \in \mathrm{H}(X)$ des isomorphismes :

$$(\mathrm{Th}(\mathcal{N})A) \otimes_X B \xleftarrow{\sim} \mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) \xrightarrow{\sim} A \otimes_X (\mathrm{Th}(\mathcal{N})B)$$

2- On définit une structure de $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$ -module bilatère sur $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})$ en prenant la composition des 1-morphismes de $\mathfrak{M}\mathrm{od} : [i^*, i^!] \circ [p^*, p^*] = [i^*p^*, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})]$ et en identifiant s^*p^* avec le foncteur identité de $\mathrm{H}(X)$ via les isomorphismes de connexion. En particulier, on dispose pour $(A, B) \in \mathrm{H}(X)$ des isomorphismes :

$$(\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})A) \otimes_X B \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) \xleftarrow{\sim} A \otimes_X (\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})B)$$

La proposition suivante regroupe quelques faits évidents concernant les équivalences de Thom :

Proposition 2.3.18. — Soit X un S -schéma quasi-projectif et \mathcal{N} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini. On a :

1. Les morphismes structuraux du projecteur $[1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})]$ définissent une structure de $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$ -comodule bilatère sur le foncteur $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$,
2. Les inverses des morphismes structuraux du projecteur $[1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})]$ définissent une structure de $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$ -module et une structure de $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$ -coprojecteur sur le foncteur identité de $\mathrm{H}(X)$,

3. Les morphismes structuraux du module $[1, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})]$ définissent une structure de $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$ -coprojecteur bilatère sur le foncteur $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})$,
4. Les inverses des morphismes structuraux du module $[1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})]$ définissent une structure de $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$ -projecteur et une structure de $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(X)}$ -comodule sur le foncteur identité de $\mathrm{H}(X)$,
5. Les adjonctions $(\mathrm{Th}(\mathcal{N}), \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}))$ et $(\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}), \mathrm{Th}(\mathcal{N}))$ transforment le module (resp. projecteur, comodule, coprojecteur) $[1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})]$ en le projecteur (resp. module, coprojecteur, comodule) $[1, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})]$ et vice versa.

Proposition 2.3.19. — Soient X un S -schéma quasi-projectif et \mathcal{N} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Les morphismes de commutation aux équivalences de Thom :

$$f^* \circ \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) \circ f^* \quad \text{et} \quad f^* \circ \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) \circ f^*$$

induisent des 2-morphismes de modules :

$$\begin{aligned} [f^*, f^* \circ \mathrm{Th}(\mathcal{N})] &= [f^*, f^*] \circ [1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})] \\ &\xrightarrow{\sim} [f^*, \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) \circ f^*] = [1, \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})] \circ [f^*, f^*] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f^*, f^* \circ \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})] &= [f^*, f^*] \circ [1, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})] \\ &\xrightarrow{\sim} [f^*, \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) \circ f^*] = [1, \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] \circ [f^*, f^*] \end{aligned}$$

En d'autres termes, les deux diagrammes suivant :

$$\begin{array}{ccccc} f^*(A) \otimes_Y f^* \mathrm{Th}(\mathcal{N}) B & \longrightarrow & f^*(A \otimes_X \mathrm{Th}(\mathcal{N}) B) & \longrightarrow & f^* \mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f^*(A) \otimes_Y \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) f^* B & \longrightarrow & \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})(f^* A \otimes_Y f^* B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) f^*(A \otimes_X B) \\ \\ f^*(A) \otimes_Y f^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) B & \longrightarrow & f^*(A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) B) & \longrightarrow & f^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f^*(A) \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) f^* B & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})(f^* A \otimes_Y f^* B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) f^*(A \otimes_X B) \end{array}$$

ainsi que leurs \otimes -duaux sont commutatifs pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X))^2$.

Démonstration. — On traite d'abord le cas de l'équivalence $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})$. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{s'} & \mathbb{V}(f^* \mathcal{N}) & \xrightarrow{p} & Y \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{s} & \mathbb{V}(\mathcal{N}) & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Le morphisme de commutation avec Th^{-1} est la composée :

$$f^* s^! p^* \xrightarrow{Ex^{*,!}} s'^! f'^* p^* \xrightarrow{Ex^{*,*}} s'^! p'^* f^*$$

Le résultat découle alors du fait que les 2-morphismes ci-dessus sont des morphismes de f^* -modules par 2.3.14.

Pour l'équivalence $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$, on applique le lemme 2.1.105 à la face carré de \mathfrak{Mod} :

$$[f^*, f^*] \circ [1, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})] \xrightarrow{\sim} [1, \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] \circ [f^*, f^*]$$

et à l'adjonction $(\mathrm{Th}(\mathcal{N}), \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}))$. On obtient alors immédiatement le diagramme commutatif recherché. \square

Proposition 2.3.20. — Soient X un S -schéma quasi-projectif et \mathcal{N} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Les morphismes de commutation aux équivalences de Thom :

$$\mathrm{Th}(\mathcal{N}) \circ f_* \xrightarrow{\sim} f_* \circ \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) \circ f_* \xrightarrow{\sim} f_* \circ \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})$$

induisent des 2-isomorphismes de coprojecteurs :

$$\begin{aligned} [f^*, \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \circ f_*] &= [1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})] \circ [f^*, f_*] \\ &\xrightarrow{\sim} [f^*, f_* \circ \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})] = [f^*, f_*] \circ [1, \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})] \\ [f^*, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) \circ f_*] &= [1, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})] \circ [f^*, f_*] \\ &\xrightarrow{\sim} [f^*, f_* \circ \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] = [f^*, f_*] \circ [1, \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] \end{aligned}$$

En d'autres termes, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes_X \mathrm{Th}(\mathcal{N}) f_* B' & \longrightarrow & A \otimes_X f_* \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) B' & \longrightarrow & f_*(f^* A \otimes_Y \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) B') \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_* B') & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{N}) f_*(f^* A \otimes_Y B') & \longrightarrow & f_* \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})(f^* A \otimes_Y B') \\ \\ A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) f_* B' & \longrightarrow & A \otimes_X f_* \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) B' & \longrightarrow & f_*(f^* A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) B') \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_* B') & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) f_*(f^* A \otimes_Y B') & \longrightarrow & f_* \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})(f^* A \otimes_Y B') \end{array}$$

ainsi que leurs \otimes -duaux sont commutatifs pour tout $(A, B') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y))$.

Démonstration. — Les trois modules $[f^*, f^*]$, $[1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})]$ et $[1, \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})]$ sont naturellement des comodules. On obtient la partie de l'énoncé concernant l'équivalence de Thom inverse $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})$ en utilisant la fonctorialité et la compatibilité avec la composition de la construction 2.1.98. La partie concernant l'équivalence de Thom $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ est traitée de la même manière. \square

Par le même raisonnement, on démontre aussi :

Proposition 2.3.21. — Soient X un S -schéma quasi-projectif et \mathcal{N} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs. Les morphismes de commutation aux équivalences de Thom :

$$f_{\#} \circ \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(\mathcal{N}) f_{\#} \quad \text{et} \quad f_{\#} \circ \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) f_{\#}$$

induisent des 2-isomorphismes de projecteurs :

$$\begin{aligned} [f^*, f_{\#} \circ \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})] &= [f^*, f_{\#}] \circ [1, \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N})] \\ &\xrightarrow{\sim} [f^*, \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \circ f_{\#}] = [1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})] \circ [f^*, f_{\#}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f^*, f_{\#} \circ \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] &= [f^*, f_{\#}] \circ [1, \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N})] \\ &\xrightarrow{\sim} [f^*, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) \circ f_{\#}] = [1, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})] \circ [f^*, f_{\#}] \end{aligned}$$

En d'autres termes, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} f_{\#}(f^* A \otimes_Y \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) B') & \longrightarrow & A \otimes_X f_{\#} \mathrm{Th}(f^* \mathcal{N}) B' & \longrightarrow & A \otimes_X \mathrm{Th}(\mathcal{N}) f_{\#} B' \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f_{\#} \mathrm{Th}(f^*(\mathcal{N}))(f^* A \otimes_Y B') & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{N}) f_{\#}(f^* A \otimes_Y B') & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_{\#} B') \\ \\ f_{\#}(f^* A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) B') & \longrightarrow & A \otimes_X f_{\#} \mathrm{Th}^{-1}(f^* \mathcal{N}) B' & \longrightarrow & A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) f_{\#} B' \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f_{\#} \mathrm{Th}^{-1}(f^*(\mathcal{N}))(f^* A \otimes_Y B') & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}) f_{\#}(f^* A \otimes_Y B') & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_{\#} B') \end{array}$$

ainsi que leurs \otimes -duaux sont commutatifs pour tout $(A, B') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y))$.

Proposition 2.3.22. — Soient Y un S -schéma quasi-projectif et \mathcal{N} un \mathcal{O}_Y -module localement libre de rang fini. Soit $i : Z \longrightarrow Y$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Les morphismes de commutation aux équivalences de Thom :

$$\mathrm{Th}(i^* \mathcal{N}) \circ i^! \xrightarrow{\sim} i^! \circ \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Th}^{-1}(i^* \mathcal{N}) \circ i^! \xrightarrow{\sim} i^! \circ \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})$$

induisent des 2-isomorphismes de modules :

$$\begin{aligned} [i^*, \mathrm{Th}(i^* \mathcal{N}) \circ i^!] &= [1, \mathrm{Th}(i^* \mathcal{N})] \circ [i^*, i^!] \\ &\longrightarrow [i^*, i^! \circ \mathrm{Th}(\mathcal{N})] = [i^*, i^!] \circ [1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})] \\ [i^*, \mathrm{Th}^{-1}(i^* \mathcal{N}) \circ i^!] &= [1, \mathrm{Th}^{-1}(i^* \mathcal{N})] \circ [i^*, i^!] \\ &\longrightarrow [i^*, i^! \circ \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})] = [i^*, i^!] \circ [1, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})] \end{aligned}$$

En d'autres termes, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 i^*(A) \otimes_Z \mathrm{Th}(i^*\mathcal{N})i^!(B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(i^*\mathcal{N})(i^*(A) \otimes_Z i^!(B)) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{N})i^!(A \otimes_Y B) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 i^*(A) \otimes_Z i^!\mathrm{Th}(\mathcal{N})(B) & \longrightarrow & i^!(A \otimes_Y \mathrm{Th}(\mathcal{N})(B)) & \longrightarrow & i^!\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_Y B) \\
 \\
 i^*(A) \otimes_Z \mathrm{Th}^{-1}(i^*\mathcal{N})i^!(B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(i^*\mathcal{N})(i^*(A) \otimes_Z i^!(B)) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})i^!(A \otimes_Y B) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 i^*(A) \otimes_Z i^!\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(B) & \longrightarrow & i^!(A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(B)) & \longrightarrow & i^!\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_Y B)
 \end{array}$$

ainsi que leurs \otimes -duaux sont commutatifs pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y))^2$.

Démonstration. — L'assertion pour le module $[1, \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})]$ découle immédiatement du lemme 2.3.14. Pour l'équivalence de Thom $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ on applique le lemme 2.1.105 à l'adjonction $(\mathrm{Th}(\mathcal{N}), \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}))$. \square

Comme corollaire, on peut démontrer :

Proposition 2.3.23. — Soit X un S -schéma quasi-projectif. On suppose donnée une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules localement libres de rang fini :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

Les diagrammes :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{Th}(\mathcal{M})(A \otimes_X B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{L})\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{L})(A \otimes_X \mathrm{Th}(\mathcal{N})B) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 A \otimes_X \mathrm{Th}(\mathcal{M})B & \longrightarrow & & \longrightarrow & A \otimes_X \mathrm{Th}(\mathcal{L})\mathrm{Th}(\mathcal{N})B \\
 \\
 \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M})(A \otimes_X B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{L})\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{L})(A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})B) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M})B & \longrightarrow & & \longrightarrow & A \otimes_X \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{L})\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})B
 \end{array}$$

sont commutatifs. En d'autres termes, l'isomorphisme de composition est un 2-morphisme de modules. La même chose s'applique pour les $\mathrm{Th}^{-1}(-)$.

Démonstration. — En effet, par définition, l'isomorphisme de composition des équivalences de Thom inverses $\mathrm{Th}^{-1}(-)$ est une composée d'isomorphisme de connexion de type c^* et $c^!$ et d'un isomorphisme d'échange de type $Ex^{!,*}$. Par le lemme 2.3.14, ces 2-morphismes sont des morphismes de modules. Les détails sont laissés aux lecteurs. La partie concernant les équivalences de Thom $\mathrm{Th}(-)$ s'obtient en utilisant les adjonctions $(\mathrm{Th}(-), \mathrm{Th}^{-1}(-))$. \square

On continue avec des compatibilités mixtes :

Proposition 2.3.24. — Soient X un S -schéma quasi-projectif et \mathcal{N} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathrm{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X f_*(B') & \longrightarrow & f_*(f^*\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_Y B') & \longrightarrow & f_*(\mathrm{Th}(f^*\mathcal{N})f^*(A) \otimes_Y B') \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_*(B')) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathcal{N})f_*(f^*(A) \otimes_Y B') & \longrightarrow & f_*\mathrm{Th}(f^*\mathcal{N})(f^*(A) \otimes_Y B') \\
 \\
 \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_X f_*(B') & \longrightarrow & f_*(f^*\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_Y B') & \longrightarrow & f_*(\mathrm{Th}^{-1}(f^*\mathcal{N})f^*(A) \otimes_Y B') \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X f_*(B')) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})f_*(f^*(A) \otimes_Y B') & \longrightarrow & f_*\mathrm{Th}^{-1}(f^*\mathcal{N})(f^*(A) \otimes_Y B')
 \end{array}$$

ainsi que leurs \otimes -duaux sont commutatifs pour tout $(A, B') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y))$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme 2.1.114 à la face carrée mixte de modules et comodule ayant pour cotés $[1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})]$, $[1, \mathrm{Th}(f^*\mathcal{N})]$, $[f^*, f^*]$ et $[f^*, f^*]$. \square

Lorsque f est lisse, on a une version de la proposition précédente pour le foncteur $f_\#$. On laisse aux lecteurs le soin de formuler l'énoncé correspondant et de trouver le lemme qui le démontre. On passe à :

Proposition 2.3.25. — Soient Y un S -schéma quasi-projectif et \mathcal{N} un \mathcal{O}_Y -module localement libre de rang fini. Soit $i : Z \longrightarrow Y$ une immersion fermée. Les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 i^*\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_Z i^!(B) & \longrightarrow & i^!(\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_Y B) & \longrightarrow & i^!\mathrm{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_Y B) \\
 \downarrow & & & & \uparrow \\
 \mathrm{Th}(i^*\mathcal{N})i^*(A) \otimes_Z i^!(B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(i^*\mathcal{N})(i^*(A) \otimes_Z i^!(B)) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(i^*\mathcal{N})i^!(A \otimes_Y B) \\
 \\
 i^*\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_Z i^!(B) & \longrightarrow & i^!(\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_Y B) & \longrightarrow & i^!\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_Y B) \\
 \downarrow & & & & \uparrow \\
 \mathrm{Th}^{-1}(i^*\mathcal{N})i^*(A) \otimes_Z i^!(B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(i^*\mathcal{N})(i^*(A) \otimes_Z i^!(B)) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(i^*\mathcal{N})i^!(A \otimes_Y B)
 \end{array}$$

sont commutatifs. En d'autres termes, on a deux faces carrées mixtes de modules :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathrm{H}(T), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (\mathrm{H}(Y), \otimes_Y) \\
 \uparrow [1, \mathrm{Th}(f^*\mathcal{N})] & \swarrow \nearrow & \uparrow [1, \mathrm{Th}(\mathcal{N})] \\
 (\mathrm{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (\mathrm{H}(X), \otimes_Y)
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbf{H}(T), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\
 \uparrow [1, \mathbf{Th}^{-1}(f^*, \mathcal{N})] & \swarrow \nearrow & \uparrow [1, \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{N})] \\
 (\mathbf{H}(Z), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_Y)
 \end{array}$$

Démonstration. — Le résultat pour les équivalences de Thom inverses $\mathbf{Th}^{-1}(-)$ découle immédiatement des lemmes 2.3.14 et de 2.3.16. Le cas des équivalences de Thom $\mathbf{Th}(-)$ s'obtiennent en appliquant le lemme 2.1.114 et en réarrangeant le sens des flèches dans le diagramme commutatif obtenu. \square

Comme application de 2.3.19 et 2.3.25 on obtient facilement le résultat suivant :

Corollaire 2.3.26. — Soient X un S -schéma quasi-projectif et \mathcal{N} et \mathcal{M} deux \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini. Les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \mathbf{Th}(\mathcal{M})(B) & \rightarrow & \mathbf{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X \mathbf{Th}(\mathcal{M})(B)) \rightarrow \mathbf{Th}(\mathcal{N})\mathbf{Th}(\mathcal{M})(A \otimes_X B) \\
 \parallel & & \downarrow \\
 \mathbf{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \mathbf{Th}(\mathcal{M})(B) & \rightarrow & \mathbf{Th}(\mathcal{M})(\mathbf{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X B) \rightarrow \mathbf{Th}(\mathcal{M})\mathbf{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) \\
 \\
 \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B) & \rightarrow & \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B)) \rightarrow \\
 \parallel & & \rightarrow \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{N})\mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})(A \otimes_X B) \\
 \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B) & \rightarrow & \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})(\mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A) \otimes_X B) \rightarrow \\
 & & \downarrow \\
 & & \rightarrow \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})\mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{N})(A \otimes_X B) \\
 \\
 \mathbf{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B) & \rightarrow & \mathbf{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B)) \rightarrow \mathbf{Th}(\mathcal{N})\mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})(A \otimes_X B) \\
 \parallel & & \downarrow \\
 \mathbf{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})(B) & \rightarrow & \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})(\mathbf{Th}(\mathcal{N})(A) \otimes_X B) \rightarrow \mathbf{Th}^{-1}(\mathcal{M})\mathbf{Th}(\mathcal{N})(A \otimes_X B)
 \end{array}$$

sont commutatifs pour tout $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$.

2.3.4. Le module $[f^*, f^!]$ lorsque f est lisse

Définition 2.3.27. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs. On définit une structure de f^* -module bilatère sur $f^!$ en prenant la composée des 1-morphismes de \mathfrak{Mod} :

$$[1, \mathbf{Th}(\Omega_f)] \circ [f^*, f^*] = [f^*, f^!]$$

En particulier, on a les isomorphismes : $f^*A \otimes f^!B \xrightarrow{\sim} f^!(A \otimes B)$ naturels en $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$.

Lemme 2.3.28. — Les bi-modules $[f^*, f^!]$ s'organisent naturellement en un 2-foncteur :

$$(\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{Mod}$$

Démonstration. — Il s'agit de montrer que les isomorphismes de connexions des 2-foncteurs \mathbf{H}^* et $\mathbf{H}^!$ induisent des morphismes de modules. Mais par définition, les isomorphismes de connexions de $\mathbf{H}^!$ sont essentiellement des composées de morphismes de commutation de f^* avec des équivalences de Thom ainsi que des morphismes de composition. Le lemme découle alors de 2.3.19 et 2.3.23. \square

On aura besoin de deux faces carrées mixtes :

Lemme 2.3.29. — Soit un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g'} & V \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

de S -schémas quasi-projectifs avec f et g lisses. On a une face carrée mixte de modules :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(W), \otimes_W) & \xleftarrow{[g'^*, g'^!]} & (\mathbf{H}(V), \otimes_V) \\ [f'^*, f'^!] \uparrow & \swarrow \nearrow & \uparrow [f^*, f^!] \\ (\mathbf{H}(U), \otimes_U) & \xleftarrow{[g^*, g^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X) \end{array}$$

formée des modules à gauche $[g^*, g^!]$ et $[g'^*, g'^!]$ et des modules à droite $[f^*, f^!]$ et $[f'^*, f'^!]$ ainsi que les 2-morphismes :

$$Ex^{!,*} : f'^*g^! \longrightarrow g'^!f^* \quad , \quad Ex^{!,*} : g'^*f^! \longrightarrow f'^!g^* \quad \text{et} \quad Ex^{!,!} : g'^!f^! \longrightarrow f'^!g^!$$

Démonstration. — Ceci est une conséquence facile de 2.3.19 et 2.3.23. \square

On a de même :

Lemme 2.3.30. — Soit un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{i'} & V \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

de S -schémas quasi-projectifs avec f lisse et i une immersion fermée. On a une face carrée mixte de modules :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(W), \otimes_W) & \xleftarrow{[i'^*, i'^!]} & (\mathbf{H}(V), \otimes_V) \\ \uparrow [f'^*, f'^!] & \swarrow \nearrow & \uparrow [f^*, f^!] \\ (\mathbf{H}(U), \otimes_Z) & \xleftarrow{[i^*, i^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_Y) \end{array}$$

formée des modules à gauche $[i^*, i^!]$ et $[i'^*, i'^!]$ et des modules à droite $[f^*, f^!]$ et $[f'^*, f'^!]$ ainsi que les 2-morphismes :

$$Ex^{!,*} : f'^* i^! \longrightarrow i'^! f^* \quad , \quad Ex^{!,*} : i'^* f^! \longrightarrow f'^! i^* \quad \text{et} \quad Ex^{!,!} : i'^! f^! \longrightarrow f'^! i^!$$

Démonstration. — C'est une conséquence facile de 2.3.14 et 2.3.25. \square

2.3.5. Le module $[f^*, f^!]$ pour f quelconque. — On voudrait recoller les deux 2-foncteurs :

$$[\text{Imm} \mathbf{H}^*, \text{Imm} \mathbf{H}^!] : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{Mod} \quad \text{et} \quad [\text{Liss} \mathbf{H}^*, \text{Liss} \mathbf{H}^!] : (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{Mod}$$

en un 2-foncteur :

$$[\mathbf{H}^*, \mathbf{H}^!] : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{Mod}$$

Étant donné un S -morphisme $f : X \longrightarrow Y$ entre S -schémas quasi-projectifs, on peut trouver, une factorisation $f = p \circ s$ avec p lisse et i une immersion fermée. On déduit alors un module $[f^*, f^!]$ en prenant la composée :

$$[s^*, s^!] \circ [p^*, p^!]$$

et en identifiant f^* avec $s^* p^*$ et $f^!$ avec $s^! p^!$ via les isomorphismes de connexions. La difficulté est de prouver l'indépendance des modules obtenus du choix de la factorisation. La preuve de cette indépendance est basée sur le résultat clef suivant :

Théorème 2.3.31. — (*Compatibilité avec l'isomorphisme de pureté*) Supposons donné un diagramme commutatif (D) de S -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec s une immersion fermée et f et g lisses. Pour $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Z))^2$, le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} s^* f^* A \otimes_Y s^! f^* B & \longrightarrow & s^! (f^* A \otimes_X f^* B) & \longrightarrow & s^! f^* (A \otimes_Z B) \\ \Pi \downarrow & & & & \downarrow \Pi \\ g^* A \otimes_Y \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B & \longrightarrow & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) (g^* A \otimes_Y g^* B) & \longrightarrow & \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* (A \otimes_Z B) \end{array}$$

est commutatif ainsi que son analogue avec \otimes° .

Un diagramme (D) sera dit bon si la conclusion du théorème ci-dessus est satisfaite pour (D) . On commence par le lemme :

Lemme 2.3.32. — *Soit $a : R \longrightarrow X$ un morphisme lisse. Formons un carré cartésien au-dessus de Z :*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t} & R \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

Pour tout A et B de type fini, les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} a^*(s^*f^*A \otimes_Y s^!f^*B) & \longrightarrow & a^*s^!(f^*A \otimes_X f^*B) & \longrightarrow & a^*s^!f^*(A \otimes_Z B) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ a^*(g^*A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*B) & \rightarrow & a^*\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^*A \otimes_Y g^*B) & \rightarrow & a^*\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*(A \otimes_Z B) \\ \\ t^*(fa)^*A \otimes_T t^!(fa)^*B & \longrightarrow & t^!((fa)^*A \otimes_R (fa)^*B) & \longrightarrow & t^!(fa)^*(A \otimes_Z B) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ (ga)^*A \otimes_T \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^*B & \rightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)((ga)^*A \otimes_T (ga)^*B) & \rightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^*(A \otimes_Z B) \end{array}$$

sont isomorphes.

Démonstration. — Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} t^*(fa)^*A \otimes_T t^!(fa)^*B & \rightarrow & t^*a^*f^*A \otimes_T t^!a^*f^*B & \rightarrow & a^*s^*f^*A \otimes_T a^*s^!f^*B & \rightarrow & a^*(s^*f^*A \otimes_Y s^!f^*B) \\ \downarrow & & \downarrow & & (1) & & \downarrow \\ t^!((fa)^*A \otimes_R (fa)^*B) & \rightarrow & t^!(a^*f^*A \otimes_R a^*f^*B) & \rightarrow & t^!a^*(f^*A \otimes_X f^*B) & \rightarrow & a^*s^!(f^*(A) \otimes_X f^*B) \\ \downarrow & & (2) & & \downarrow & & \downarrow \\ t^!(fa)^*(A \otimes_Z B) & \longrightarrow & t^!a^*f^*(A \otimes_Z B) & \longrightarrow & a^*s^!f^*(A \otimes_Z B) & & \end{array}$$

Le rectangle (1) est commutatif puisque les isomorphismes d'échange $Ex^{*,*}$ et $Ex^{!,*}$ définissent une face carrée dans la 2-catégorie : \mathfrak{Mod} . D'autre part, le rectangle (2) est commutatif puisque l'isomorphisme de connexion : $(fa)^* \longrightarrow a^*f^*$ est une transformation naturelle de foncteurs monoïdaux. Il vient que notre diagramme est commutatif. Notons également que toutes les flèches horizontales de ce diagramme sont inversibles.

De l'autre côté, on considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 (ga)^* A \otimes_T \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^* B & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)((ga)^* A \otimes_T (ga)^* B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^*(A \otimes_Z B) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 a^* g^* A \otimes_T \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) a^* g^* B & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(a^* g^* A \otimes_T a^* g^* B) & \xrightarrow{(4)} & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 a^* g^* A \otimes_T a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B & \xrightarrow{(3)} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) a^*(g^* A \otimes_Y g^* B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) a^* g^*(A \otimes_Z B) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 a^*(g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B) & \longrightarrow & a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^* A \otimes_Y g^* B) & \longrightarrow & a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

Le carré (3) est commutatif puisque les isomorphismes de commutation des équivalences de Thom avec a^* induisent des morphismes de modules. Le rectangle (4) est commutatif pour la même raison que la commutativité du carré (2). On déduit alors que notre diagramme est commutatif. Notons également que toutes les flèches de ce diagramme sont inversibles.

De même, les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 t^*(fa)^* A \otimes_T t^!(fa)^* B & \longrightarrow & (ga)^* A \otimes_T \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^* B & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 t^* a^* f^* A \otimes_T t^! a^* f^* B & & a^* g^* A \otimes_T \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) a^* g^* B & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 a^* s^* f^* A \otimes_T a^* s^! f^* B & \longrightarrow & a^* g^* A \otimes_T a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 a^*(s^* f^* A \otimes_Y s^! f^* B) & \longrightarrow & a^*(g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B) & & \\
 & & & & \\
 t^!(fa)^*(A \otimes_Z B) & \longrightarrow & t^! a^* f^*(A \otimes_Z B) & \longrightarrow & a^* s^! f^*(A \otimes_Z B) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(ga)^*(A \otimes_Z B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) a^* g^*(A \otimes_Z B) & \longrightarrow & a^* \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^*(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

sont commutatifs. Ceci découle immédiatement de la compatibilité de l'isomorphisme de pureté avec les restrictions suivants les morphismes lisses. Il est facile, à partir de là, de fournir un isomorphisme entre les deux diagrammes de l'énoncé. \square

Corollaire 2.3.33. — *Gardons les notations du lemme précédent. Notons (D') le diagramme obtenu en composant a avec g et f . Supposons que le foncteur $a^* : \mathbf{H}(Y) \longrightarrow \mathbf{H}(T)$ est fidèle. Alors si (D') est bon, il en est de même de (D) .*

Muni de ce corollaire, on peut établir un cas particulier du théorème 2.3.31.

Proposition 2.3.34. — *Les diagrammes du type :*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec f lisse, sont bons.

Démonstration. — Par l'astuce de Jonalolou, on peut trouver un toreur $a : T \longrightarrow Z$ sous-un fibré vectoriel avec T un schéma affine (on utilise ici le fait que la base S admet une famille ample de fibrés en droites). Le foncteur a^* est fidèle puisque par homotopie, $a_* a^* \simeq 1$. Il vient par le lemme 2.3.32 qu'on peut remplacer Z par T et X par $X \times_Z T$. On se ramène ainsi à traiter le cas où Z est un schéma affine.

Posons $V = \mathbb{V}(\mathcal{N}_s)$ avec \mathcal{N}_s le faisceau normal de l'immersion s . Puisque Z est affine, on peut trouver un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{s} & X & & \\ \parallel & & \downarrow e & \searrow & \\ Z & \xrightarrow{s_0} & V & & \\ & \searrow & \downarrow p & \nearrow & \\ & & Z & & \end{array} \quad \begin{array}{c} f \\ \curvearrowright \end{array}$$

avec e étale, s_0 la section nulle. De plus, on peut supposer que le carré du diagramme ci-dessus est cartésien. Toujours par le lemme 2.3.32, on se ramène à traiter le cas où f est la projection d'un fibré vectoriel $\mathbb{V}(\mathcal{M})$ (avec \mathcal{M} un \mathcal{O}_Z -module localement libre) et s l'inclusion de la section nulle. Mais dans ce cas, l'isomorphisme de pureté coïncide avec l'isomorphisme $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) \simeq \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{M}) = s^! f^*$ induit par l'isomorphisme $\mathcal{N}_s \simeq \mathcal{M}$. La conclusion de la proposition est claire dans ce cas. \square

Avant de traiter le cas général, on démontre le lemme suivant en se basant de manière essentielle sur le cas particulier qu'on vient de traiter.

Lemme 2.3.35. — *Supposons donné un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{t} & Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow & \downarrow g & & \downarrow f \\ & & & & Z \end{array}$$

avec f et g lisses et t et s des immersions fermées. Pour $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Z))^2$ le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} t^!(s^*f^*A \otimes_Y s^!f^*B) & \longrightarrow & t^!s^!(f^*A \otimes_X f^*B) & \longrightarrow & t^!s^!f^*(A \otimes_Z B) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ t^!(g^*A \otimes_Y \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*B) & \longrightarrow & t^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^*A \otimes_Y g^*B) & \longrightarrow & t^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*(A \otimes_Z B) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Considérons le diagramme suivant :

(★)

$$\begin{array}{ccccccc} t^*s^*f^*A \otimes t^!s^!f^*B & \xrightarrow{\sim} & t^*g^*A \otimes t^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*B & & & & \\ \downarrow & (1) & \downarrow \xrightarrow{\sim} t^*g^*A \otimes \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)t^!g^*B \xrightarrow{\sim} A \otimes \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)B & & & & \\ t^!(s^*f^*A \otimes s^!f^*B) & \xrightarrow{\sim} & t^!(g^*A \otimes \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*B) & (3) & \downarrow \sim & (5) & \downarrow \sim \\ \downarrow & & \downarrow \sim & & \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)(t^*g^*A \otimes t^!g^*B) \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)(A \otimes \text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)B) & & \downarrow \sim \\ t^!s^!(f^*A \otimes f^*B) & (2) & t^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^*A \otimes g^*B) & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)t^!(g^*A \otimes g^*B) & (6) & \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(A \otimes B) & & \downarrow \sim \\ t^!s^!f^*(A \otimes B) & \xrightarrow{\sim} & t^!\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*(A \otimes B) & (4) & \downarrow \sim & & \parallel \\ & & \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)t^!g^*(A \otimes B) \xrightarrow{\sim} \text{Th}^{-1}(t^*\mathcal{N}_s)\text{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(A \otimes B) & & & & \end{array}$$

Les carrés numérotés (1), (4) et (6) sont clairement commutatifs. Le diagramme numéroté (2) est celui dont on cherche à prouver la commutation. Le diagramme (3) commute par 2.3.22. La commutation du diagramme (6) découle de la proposition 2.3.34 appliquée au triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{t} & Y \\ & \searrow & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

D'autre part, par le lemme ci-dessous, toutes les flèches du diagrammes (★) (sauf peut-être ceux du sous-diagramme (2)) sont inversibles. Il vient que pour prouver la commutation du sous-diagramme (2), il suffit de montrer que le bord de (★) est commutatif. Pour montrer cela, on applique encore une fois la proposition 2.3.34 au triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{s \circ t} & X \\ & \searrow & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

pour obtenir la commutation du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 (s \circ t)^* f^* A \otimes_Z (s \circ t)^! f^* B & \longrightarrow & (s \circ t)^!(f^* A \otimes_X f^* B) & \longrightarrow & (s \circ t)^! f^*(A \otimes_Z B) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 A \otimes_Z \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{sot}) B & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{sot})(A \otimes_Z B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{sot})(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

En utilisant la compatibilité de l'isomorphisme de pureté avec la composition des immersions fermées et le fait que les isomorphismes de connexion ainsi que ceux de composition des équivalences de Thom sont des isomorphismes de modules, on peut développer ce diagramme pour obtenir le bord de (\star) . Ceci prouve le lemme. \square

Pour compléter la preuve du lemme 2.3.35, il nous reste à montrer :

Lemme 2.3.36. — *Gardons les notations du lemme précédent. Les flèches suivantes :*

$$t^* g^* A \otimes t^! \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B \longrightarrow t^!(g^* A \otimes \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B)$$

et

$$t^* g^* A \otimes t^! g^* B \longrightarrow t^!(g^* A \otimes g^* B)$$

sont inversibles.

Démonstration. — La question étant locale pour la topologie de Nisnévich, on se ramène immédiatement au cas où \mathcal{N}_s est libre de rang r . Il vient que $\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B \simeq g^*(B(-r)[-2r])$. On doit donc traiter uniquement le second morphisme.

Pour le second morphisme, on utilise le diagramme commutatif de la proposition 2.3.34 :

$$\begin{array}{ccccc}
 t^* g^* A \otimes_Z t^! g^* B & \longrightarrow & t^!(g^* A \otimes_Y g^* B) & \xrightarrow{\sim} & t^! g^*(A \otimes_Z B) \\
 \sim \downarrow & & & & \downarrow \sim \\
 A \otimes_Z \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t) B & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(A \otimes_Z B) & = & \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_t)(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

D'où le résultat. \square

Achevons la preuve du théorème 2.3.31. On forme la diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times_Z Y & \xrightarrow{s'} & X \times_Z Y \\
 & \searrow & \downarrow pr_2 & & \downarrow f' \\
 & & & & Y
 \end{array}$$

Par le lemme ci-dessus appliqué aux objets g^*A et g^*B , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^!(s'^*f'^*(g^*A) \otimes_{Y \times_Z Y} s'^!f'^*(g^*B)) & \longrightarrow & \Delta^!(pr_2^*(g^*A) \otimes_{Y \times_Z Y} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'})pr_2^*(g^*B)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta^!s'^!(f'^*(g^*A) \otimes_{X \times_Z Y} f'^*(g^*B)) & & \Delta^!\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'})(pr_2^*(g^*A) \otimes_{Y \times_Z Y} pr_2^*(g^*B)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta^!s'^!f'^*(g^*A \otimes_Y g^*B) & \longrightarrow & \Delta^!\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'})pr_2^*(g^*A \otimes_Y g^*B)
 \end{array}$$

Ce diagramme est clairement isomorphe au diagramme ci-dessous qui est donc également commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^!(s'^*(g \circ f')^*A \otimes_{Y \times_Z Y} s'^!(g \circ f')^*B) & \longrightarrow & \Delta^!((g \circ pr_2)^*A \otimes_{Y \times_Z Y} \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'})(g \circ pr_2)^*B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta^!s'^!((g \circ f')^*A \otimes_{X \times_Z Y} (g \circ f')^*B) & & \Delta^!\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'})((g \circ pr_2)^*A \otimes_{Y \times_Z Y} (g \circ pr_2)^*B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta^!s'^!(g \circ f')^*(A \otimes_Z B) & \longrightarrow & \Delta^!\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_{s'})(g \circ pr_2)^*(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

En appliquant le lemme 2.3.32 à :

$$\begin{array}{ccc}
 Y \times_Z Y & \xrightarrow{s'} & X \times_Z Y \\
 pr_1 \downarrow & & \downarrow pr_1 \\
 Y & \xrightarrow{s} & X \\
 & \searrow g & \downarrow f \\
 & & Z
 \end{array}$$

et en utilisant les égalités $g \circ f' = f \circ pr_1$ et $g \circ pr_2 = g \circ pr_1$ on déduit que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^!pr_1^*(s^*f^*A \otimes_Y s^!f^*B) & \longrightarrow & \Delta^!pr_1^*(g^*A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta^!pr_1^*s^!(f^*A \otimes_X f^*B) & & \Delta^!pr_1^*\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)(g^*A \otimes_Y g^*B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Delta^!pr_1^*s^!f^*(A \otimes_Z B) & \longrightarrow & \Delta^!pr_1^*a^*\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)g^*(A \otimes_Z B)
 \end{array}$$

Ainsi, on a prouvé que le diagramme qui nous intéresse devient commutatif si on applique le foncteur $\Delta^{-1}pr_1^* \simeq \mathrm{Th}^{-1}(\Omega_g)$. Mais les foncteurs de Thom $\mathrm{Th}^{-1}(-)$ sont pleinement fidèles puisque ce sont des équivalences. Le théorème est prouvé.

Le théorème 2.3.31 se récrit :

Corollaire 2.3.37. — *Supposons donné un diagramme commutatif de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Z \end{array}$$

avec s une immersion fermée et g et f des morphismes lisses. Alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} s^* f^* A \otimes s^! f^! B & \longrightarrow & g^* A \otimes g^! B \\ \downarrow & & \downarrow \\ s^! (f^* A \otimes f^! B) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ s^! f^! (A \otimes B) & \longrightarrow & g^! (A \otimes B) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} s^* f^* A \otimes_Y s^! \mathrm{Th}(\Omega_f) f^* B & \longrightarrow & s^* f^* A \otimes_Y \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) s^! f^* B & \longrightarrow & g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s^! (f^* A \otimes_X \mathrm{Th}(\Omega_f) f^* B) & & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) (s^* f^* A \otimes_Y s^! f^* B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) (g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B) \\ \downarrow & (1) & \downarrow & & \downarrow \\ s^! \mathrm{Th}(\Omega_f) (f^* A \otimes_Y f^* B) & & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) s^! (f^* A \otimes f^* B) & & (2) \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) (g^* A \otimes_Y g^* B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s^! \mathrm{Th}(\Omega_f) f^* (A \otimes_Z B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) s^! f^* (A \otimes_Z B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* (A \otimes_Z B) \end{array}$$

La commutation du rectangle (1) découle de 2.3.22. La commutation du rectangle (2) découle de la compatibilité avec l'isomorphisme de pureté 2.3.31. Il vient que notre diagramme est commutatif. Pour terminer, il reste à montrer que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B & \longrightarrow & g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}(\Omega_g) g^* B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) (g^* A \otimes_Y \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* B) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) (g^* A \otimes_Y g^* B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\Omega_g) (g^* A \otimes_Y g^* B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(s^* \Omega_f) \mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s) g^* (A \otimes_Z B) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\Omega_g) g^* (A \otimes_Z B) \end{array}$$

est commutatif. Ceci découle immédiatement du fait que le 2-isomorphisme de composition :

$$\mathrm{Th}(\Omega_g) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Th}(s^*\Omega_f)\mathrm{Th}^{-1}(\mathcal{N}_s)$$

est un morphisme de $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(Y)}$ -modules. \square

On peut maintenant prouver le théorème suivant :

Théorème 2.3.38. — *Il existe un 2-foncteur contravariant :*

$$[\mathrm{H}^*, \mathrm{H}^!]: \mathrm{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{Mod}$$

qui coïncide avec $[\mathrm{Imm}\mathrm{H}^*, \mathrm{Imm}\mathrm{H}^!]$ et $[\mathrm{Liss}\mathrm{H}^*, \mathrm{Liss}\mathrm{H}^!]$ lorsqu'on se restreint à $(\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{Imm}}$ et $(\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{Liss}}$ respectivement.

Démonstration. — Soit $f: Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Il suffit de montrer l'indépendance de la factorisation du module $[f^*, f^!]$. Supposons données deux factorisations de f en $p \circ s$ et $p' \circ s'$. On se ramène immédiatement aux cas où il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{s} & \bullet & \xrightarrow{p} & X \\ \parallel & & \downarrow i & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{s'} & \bullet & \xrightarrow{p'} & X \end{array}$$

avec i une immersion fermée. On sait que les isomorphismes de connexions :

$$[s'^*, s'^!] \xrightarrow{\sim} [s^*, s^!][i^*, i^!]$$

sont des morphismes de modules puisque s , s' et i sont des immersions fermées. Il suffit donc de montrer que les isomorphismes de connexion induisent un morphisme de modules :

$$[p^*, p^!] \longrightarrow [i^*, i^!][p'^*, p'^!]$$

Ceci est vrai par le corollaire 2.3.37. \square

Soit $f: Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. En utilisant l'adjonction $(f_!, f^!)$ on déduit à partir du f^* -module bilatère $[f^*, f^!]$ un projecteur bilatère $[f^*, f_!]$. On a de même :

Corollaire 2.3.39. — *Les isomorphismes de connexion de H^* et $\mathrm{H}^!$ fournissent un 2-foncteur covariant :*

$$[\mathrm{H}^*, \mathrm{H}_!]: \mathrm{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{Proj}$$

Ce projecteur présente quelques avantages sur le module dont il provient à cause de :

Théorème 2.3.40. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Pour tout $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2 \times \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$ les morphismes :

$$f_!(f^*A \otimes_Y B') \longrightarrow A \otimes_X f_!(B) \quad \text{et} \quad f_!(A' \otimes_Y f^*B) \longrightarrow f_!(A') \otimes_X B$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. — On traite uniquement la première flèche, la seconde découle par \otimes -dualité. Il suffit de prouver la proposition dans le cas où f est lisse et puis dans le cas où $f = i$ est une immersion fermée.

1- Si f est lisse, notre morphisme est la composée :

$$f_{\#} \text{Th}^{-1}(\Omega_f)(f^*A \otimes_Y B') \longrightarrow f_{\#}(f^*A \otimes_Y \text{Th}^{-1}(\Omega_f)B') \longrightarrow A \otimes_X f_{\#} \text{Th}^{-1}(\Omega_f)B$$

Les deux flèches qui figurent dans cette composition sont inversibles (voir la définition 2.3.1).

2- Si $f = i$ est une immersion fermée, notre morphisme est la composée :

$$i_*(i^*A \otimes_Y B') i_*(i^*A \otimes_X i^*i_*B') \longrightarrow i_*(i^*(A \otimes_X i_*B')) \longrightarrow A \otimes i_*B$$

Les deux flèches de cette composée sont également des isomorphismes. \square

2.3.6. Des diagrammes commutatifs supplémentaires. — On commence par la proposition suivante :

Proposition 2.3.41. — Supposons donné un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Les deux 2-morphismes d'échange $Ex^{*,*}$ et $Ex^{!,*}$ induisent une face carrée dans la 2-catégorie \mathfrak{Mod} :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}(Y'), \otimes_{Y'}) & \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\ \uparrow [f'^*, f'^!] & \swarrow [Ex^{*,*}, Ex^{!,*}] & \uparrow [f^*, f^!] \\ (\mathbf{H}(X'), \otimes_{X'}) & \xleftarrow{[g^*, g^*]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X) \end{array}$$

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 g'^* f^*(A) \otimes_{Y'} g'^* f^!(B) & \longrightarrow & g'^*(f^*(A) \otimes_Y f^!(B)) & \longrightarrow & g'^* f^!(A \otimes_X B) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 f'^* g^*(A) \otimes_{Y'} f'^* g^*(B) & \longrightarrow & f'^*(g^*(A) \otimes_Y g^*(B)) & \longrightarrow & f'^* g^*(A \otimes_X B)
 \end{array}$$

pour tout $(A, B) \in \text{Ob}(\mathcal{H}(X))^2$.

Démonstration. — On choisit une factorisation de $f = p \circ i$ avec i une immersion fermée et p un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs. On peut alors traiter le cas de i et p séparément (puisque que les isomorphismes de connexions induisent un morphisme de modules). Mais pour une immersion fermée i , le résultat correspondant a été établi dans 2.3.14. Ceci nous ramène à supposer f lisse. Dans ce cas, on utilise la formule $f^! = \text{Th}(\Omega_f) f^*$. En revenant à la définition du morphisme d'échange $Ex^{!,*}$, on voit qu'il suffit de prouver qu'on a deux faces dans \mathfrak{Mod} :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{H}(Y'), \otimes_{Y'}) \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} (\mathcal{H}(Y), \otimes_Y) & & (\mathcal{H}(Y'), \otimes_{Y'}) \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} (\mathcal{H}(Y), \otimes_Y) \\
 \uparrow [f'^*, f'^*] \quad \quad \quad \nwarrow [Ex^{!,*}, Ex^{!,*}] \quad \quad \quad \uparrow [f^*, f^*] \quad \text{et} \quad [1, \text{Th}(\Omega_{f'})] \quad \quad \quad \nwarrow \quad \quad \quad \uparrow [1, \text{Th}(\Omega_f)] \\
 (\mathcal{H}(X'), \otimes_{X'}) \xleftarrow{[g^*, g^*]} (\mathcal{H}(X), \otimes_X) & & (\mathcal{H}(Y'), \otimes_{Y'}) \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} (\mathcal{H}(Y), \otimes_Y)
 \end{array}$$

La première face est évidemment un face de \mathfrak{Mod} puisque les isomorphismes de connexions sont des transformations naturelles monoïdales. Pour la seconde face, on utilise 2.3.19. \square

Corollaire 2.3.42. — *Gardons les hypothèses de la proposition 2.3.41. Le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 f'_!(f'^* g^*(A) \otimes_{Y'} g'^*(B')) & \rightarrow & g^*(A) \otimes_{X'} f'_! g'^*(B') & \rightarrow & g^*(A) \otimes_{X'} g^* f_!(B') & \rightarrow & g^*(A \otimes_X f_!(B')) \\
 \downarrow & & & & & & \parallel \\
 f'_!(g'^* f^*(A) \otimes_{Y'} g'^*(B')) & \rightarrow & f'_! g'^*(f^*(A) \otimes_Y B') & \rightarrow & g^* f_!(f^*(A) \otimes_Y B') & \rightarrow & g^*(A \otimes_X f_!(B'))
 \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A, B') \in \text{Ob}(\mathcal{H}(X)) \times \text{Ob}(\mathcal{H}(Y))$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme 2.1.105 à la face carrée de modules à gauche de la proposition 2.3.41 et aux adjonctions $(f_!, f^!)$ et $(f'_!, f'^!)$. \square

On a également :

Corollaire 2.3.43. — *Gardons les hypothèses de la proposition 2.3.41. Le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 f_* g_*(A') \otimes_Y f^! B & \longrightarrow & f^!(g_*(A') \otimes_X B) & \longrightarrow & f^! g_*(A' \otimes_{X'} g^* B) & \longrightarrow & g'_* f'^!(A' \otimes_{X'} g^* B) \\
 \downarrow & & & & & & \parallel \\
 g'_* f'^*(A') \otimes_Y f^! B & \longrightarrow & g'_*(f'^*(A') \otimes_{Y'} g'^* f^! B) & \longrightarrow & g'_*(f'^*(A') \otimes_{Y'} f'^! g^* B) & \longrightarrow & g'_* f'^!(A' \otimes_X g^* B)
 \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A', B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X')) \times \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$.

Démonstration. — On peut considérer la face carrée de la proposition 2.3.41 comme une face carrée mixte de modules et comodules, formée des deux modules à gauche $[f^*, f^!]$ et $[f'^*, f'^!]$ et des deux comodules à droite tautologiques sur g^* et g'^* . On obtient alors la commutation du diagramme de l'énoncé en appliquant le lemme 2.1.118. \square

On continue avec la proposition :

Proposition 2.3.44. — *Supposons donné un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 X' & \xrightarrow{g} & X
 \end{array}$$

Les 2-morphismes d'échange :

$$f'^* g^! \longrightarrow g'^! f^* \quad , \quad g'^* f^! \longrightarrow f'^! g^* \quad \text{et} \quad g'^! f^! \longrightarrow f'^! g^!$$

induisent une face mixte de modules :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbf{H}(Y'), \otimes_{Y'}) & \xleftarrow{[g'^*, g'^!]} & (\mathbf{H}(Y), \otimes_Y) \\
 \uparrow [f'^*, f'^!] & \nearrow \nearrow & \uparrow [f^*, f^!] \\
 (\mathbf{H}(X'), \otimes_{X'}) & \xleftarrow{[g^*, g^!]} & (\mathbf{H}(X), \otimes_X)
 \end{array}$$

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f'^* g^! A \otimes g'^* f^! B & \longrightarrow & g'^! f^* A \otimes g'^* f^! B & \longrightarrow & g'^!(f^* A \otimes f^! B) & \longrightarrow & g'^! f^!(A \otimes B) \\
 \parallel & & & & & & \downarrow \sim \\
 f'^* g^! A \otimes g'^* f^! B & \longrightarrow & f'^* g^! A \otimes f'^! g^* B & \longrightarrow & f'^!(g^! A \otimes g^* B) & \longrightarrow & f'^! g^!(A \otimes B)
 \end{array}$$

pour tout $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$.

Démonstration. — En factorisant g et f par une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse, on se ramène immédiatement à traiter les cas suivants :

- f et g sont tous les deux lisses,
- f et g sont tous les deux des immersions fermées,
- f est lisse et g une immersion fermée.

Nous avons déjà traité ces trois cas dans 2.3.29, 2.3.16 et 2.3.30 respectivement. \square

2.3.7. Le module $[f_*, f_!]$. — On fait la définition suivante :

Définition 2.3.45. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Pour $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$, on définit une flèche :

$$f_*(A) \otimes_X f_!(B) \longrightarrow f_!(A \otimes_Y B)$$

en prenant la composée :

$$f_*(A) \otimes_X f_!(B) \xleftarrow{\sim} f_!(f^*f_*(A) \otimes_Y B) \longrightarrow f_!(A \otimes_Y B)$$

Proposition 2.3.46. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Les morphismes :

$$f_*(A) \otimes_X f_!(B) \longrightarrow f_!(A \otimes_Y B) \quad \text{et} \quad f_!(A) \otimes_X f_*(B) \longrightarrow f_!(A \otimes_Y B)$$

avec $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))^2$, définissent une structure de f_* -module bilatère sur $f_!$. De plus, les morphismes de connexions de \mathbf{H}_* et $\mathbf{H}_!$ induisent un 2-foncteur covariant : $[\mathbf{H}_*, \mathbf{H}_!] : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{Mod}$.

Démonstration. — Montrons que $f_!$ est un f_* -module à gauche. Étant donné que $f_!$ est un f^* -projecteur, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} f_*(A) \otimes_X (f_*(B) \otimes_X f_!(C)) & \xleftarrow{\sim} & f_*(A) \otimes_X f_!(f^*f_*(B) \otimes_Y C) \\ \downarrow & & \xleftarrow{\sim} f_!(f^*f_*(A) \otimes_Y (f^*f_*(B) \otimes_Y C)) \\ (f_*(A) \otimes_X f_*(B)) \otimes_X f_!(C) & \xleftarrow{\sim} & f_!(f^*(f_*(A) \otimes_X f_*(B)) \otimes_Y C) \\ & & \downarrow \\ & & \xleftarrow{\sim} f_!((f^*f_*(A) \otimes_Y f^*f_*(B)) \otimes C) \end{array}$$

En composant à droite par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f_!(f^*f_*(A) \otimes_Y (f^*f_*(B) \otimes_Y C)) & \longrightarrow & f_!(A \otimes_Y (B \otimes_Y C)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_!((f^*f_*(A) \otimes_Y f^*f_*(B)) \otimes C) & \longrightarrow & f_!((A \otimes_Y B) \otimes C) \end{array}$$

On se ramène immédiatement à prouver la commutation de :

$$\begin{array}{ccc} f^*(f_*(A) \otimes_X f_*(B)) & \longrightarrow & (f^*f_*(A) \otimes_Y f^*f_*(B)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*f_*(A \otimes_Y B) & \longrightarrow & (A \otimes_Y B) \end{array}$$

Ceci découle immédiatement de la définition de l'accouplement de f_* à partir de celui de f^* .

La preuve du fait que $f_!$ est un f_* -module bilatère se démontre par la même méthode. Les détails sont laissés aux lecteurs. Le fait que les isomorphismes de connexion définissent bien un 2-foncteur dans la 2-catégorie des modules découle facilement du fait qu'on a un 2-foncteur $[H^*, H_!]$ dans la 2-catégorie des projecteurs. \square

Proposition 2.3.47. — *Soit un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Les morphismes d'échange définissent deux faces carrées de \mathfrak{Mod} :

$$\begin{array}{ccc} (H(Y'), \otimes_{Y'}) & \xrightarrow{[g'_*, g'_*]} & (H(Y), \otimes_Y) \\ [f'_*, f'_!] \downarrow & \swarrow [Ex_{*,*}, Ex_{!,*}] & \downarrow [f_*, f_!] \\ (H(X'), \otimes_{X'}) & \xrightarrow{[g_*, g_*]} & (H(X), \otimes_X) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} (H(Y'), \otimes_{Y'}) & \xleftarrow{[g'^*, g'^*]} & (H(Y), \otimes_Y) \\ [f'_*, f'_!] \downarrow & \swarrow [Ex_{*,*}^*, Ex_{!,*}^*] & \downarrow [f_*, f_!] \\ (H(X'), \otimes_{X'}) & \xleftarrow{[g^*, g^*]} & (H(X), \otimes_X) \end{array}$$

Démonstration. — Par le corollaire 2.1.91, on a des paires de 1-morphismes adjoints dans la 2-catégories \mathfrak{pMono} :

$$(g^*, g_*) \quad \text{et} \quad (g'^*, g'_*)$$

Le 2-foncteur strict $\mathfrak{pMono} \subset \mathfrak{Mod}$ fournit alors deux paires de 1-morphismes adjoints :

$$([g^*, g_*], [g_*, g_*]) \quad \text{et} \quad ([g'^*, g'_*], [g'_*, g'_*])$$

Il est alors facile de vérifier que la première face carrée, s'obtient de la seconde *via* ces adjonctions. On peut donc se contenter de vérifier que la seconde face est une face de modules. Il suffit pour cela de prouver la commutation du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} g^* f_*(A) \otimes g^* f_!(B) & \longrightarrow & g^*(f_*(A) \otimes f_!(B)) & \longrightarrow & g^* f_!(f^* f_* A \otimes B) & & \\ \downarrow & & & & \longrightarrow f'_! g'^*(f^* f_* A \otimes B) & & \\ g^* f_*(A) \otimes f'_! g'^*(B) & \longrightarrow & f'_!(f'^* g^* f_*(A) \otimes g'^*(B)) & \longrightarrow & f'_!(g'^* f^* f_*(A) \otimes g'^*(B)) & \parallel & \\ \downarrow & & \downarrow & & \longrightarrow f'_! g'^*(f^* f_* A \otimes B) & & \\ f'_* g'^*(A) \otimes f'_! g'^*(B) & \longrightarrow & f'_!(f'^* f'_* g'^*(A) \otimes g'^*(B)) & \longrightarrow & f'_!(g'^*(A) \otimes g'^*(B)) & \downarrow & \\ & & & & \longrightarrow f'_! g'^*(A \otimes B) & & \end{array}$$

La commutation des trois carrés inférieurs du diagramme est claire. La commutation du grand rectangle découle du lemme 2.1.105 appliqué à la face carrée de modules de la proposition 2.3.41. \square

Corollaire 2.3.48. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Les morphismes évidents, induisent un 2-morphisme dans $\mathfrak{Mod} : [f_*, f_!] \longrightarrow [f_*, f_*]$.

Démonstration. — En effet considérons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Y & \xrightarrow{pr_2} & Y \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Si Δ désigne l'immersion fermée diagonale : $Y \longrightarrow Y \times_X Y$, le 2-morphisme $\alpha_f : f_! \longrightarrow f_*$ est donné par la composée :

$$f_! \simeq f_! pr_{1*} \Delta_* \xrightarrow{Ex_{!,*}} f_* pr_{2!} \Delta_! \simeq f_*$$

Mais en utilisant la proposition 2.3.47, on peut former un 2-morphisme dans \mathfrak{Mod} en prenant la composée :

$$[f_*, f_!] \simeq [f_* pr_{1*} \Delta_*, f_! pr_{1*} \Delta_*] \xrightarrow{[Ex_{*,*}, Ex_{!,*}]} [f_* pr_{2*} \Delta_*, f_* pr_{2!} \Delta_!] \simeq [f_*, f_*]$$

Ce morphisme est clairement égal à $[id_{f_*}, \alpha_f]$. Ceci prouve le corollaire. \square

Comme corollaire du corollaire précédent on a :

Corollaire 2.3.49. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Pour $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(Y))$ le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f_!(A) \otimes_X f_!(B) & \longrightarrow & f_!(A) \otimes_X f_*(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_*(A) \otimes_X f_!(B) & \longrightarrow & f_!(A \otimes_Y B) \end{array}$$

Démonstration. — Soient g et h des morphismes composables de S -schémas quasi-projectifs. L'énoncé pour g et h implique l'énoncé pour $g \circ h$. On se ramène ainsi à traiter le cas où f est projectif et $f = j$ une immersion ouverte.

Lorsque f est projectif, le morphisme $f_! \longrightarrow f_*$ est un isomorphisme. Par le corollaire 2.3.48, le carré qui nous intéresse est isomorphe à :

$$\begin{array}{ccc} f_*(A) \otimes_X f_*(B) & \xlongequal{\quad} & f_*(A) \otimes_X f_*(B) \\ \parallel & & \downarrow \\ f_*(A) \otimes_X f_*(B) & \longrightarrow & f_*(A \otimes_Y B) \end{array}$$

Le résultat est alors vrai dans ce cas.

On se donne donc une immersion ouverte $j : U \longrightarrow X$. Il s'agit de montrer que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} j_{\#}(A) \otimes_X j_{\#}(B) & \longrightarrow & j_{\#}(A) \otimes_X j_{\star}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_{\star}(A) \otimes_X j_{\#}(B) & \longrightarrow & j_{\#}(A \otimes B) \end{array}$$

est commutatif. Les quatre sommets du carré sont (à isomorphisme près) dans la sous-catégorie pleine $j_{\#}(\mathbf{H}(U)) \subset \mathbf{H}(X)$. Il suffit donc de montrer que le carré en question devient commutatif après application de j^* . Il est facile de vérifier que lorsqu'on applique j^* on obtient un carré isomorphe à :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xlongequal{\quad} & A \otimes B \\ \parallel & & \parallel \\ A \otimes B & \xlongequal{\quad} & A \otimes B \end{array}$$

Le lemme est prouvé. □

2.3.8. Les homomorphismes internes. — On suppose donné un 2-foncteur monoïdal homotopique stable (\mathbf{H}, \otimes) . On fait la définition suivante :

Définition 2.3.50. — *On dira que le 2-foncteur monoïdal homotopique stable (\mathbf{H}, \otimes) est fermé à droite (resp. à gauche) si pour tout S -schéma quasi-projectif X , la catégorie monoïdale $(\mathbf{H}(X), \otimes)$ est fermée à droite (resp. à gauche). Dans ce cas, on notera $\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, -)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(A, -)$) l'adjoint à droite de $- \otimes_X A$ (resp. $A \otimes_X -$) pour tout $A \in \mathbf{H}(X)$.*

Comme dans la section précédente, on étudiera des formules faisant apparaître \otimes , $\underline{\mathrm{Hom}}$ ainsi que les quatre opérations. Notons que pour $(A, B, C) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(X))^3$ on a des isomorphismes canoniques :

$$\mathrm{hom}(A \otimes_X B, C) \simeq \mathrm{hom}(B, \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(A, C)) \simeq \mathrm{hom}(A, \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(B, C))$$

Dans la suite, on supposera que (\mathbf{H}, \otimes) est fermé à droite et on notera $\underline{\mathrm{Hom}}_X(-, -)$ le bifoncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(-, -)$. Lorsqu'un énoncé concerne les 2-foncteurs monoïdaux homotopiques stables fermés à droite et à gauche, on remettra alors les indices d et g . On va définir trois isomorphismes bien connus :

Proposition 2.3.51. — *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Par la définition 2.1.141, on a des isomorphismes naturels en $(A, B') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(X)) \times \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(Y))$:*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_Y(A, f_{\star} B') \xrightarrow{\sim} f_{\star} \underline{\mathrm{Hom}}_X(f^* A, B')$$

et compatibles avec les 2-isomorphismes de connexion dans le sens suivant. Étant donné un deuxième morphisme $g : Z \longrightarrow Y$ de S -schémas quasi-projectifs, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\mathrm{Hom}}_X(A, (f \circ g)_* B'') & \longrightarrow & (f \circ g)_* \underline{\mathrm{Hom}}_Z((f \circ g)^* A, B'') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_X(A, f_* g_* B'') & & \\
 \downarrow & & \\
 f_* \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, g_* B'') & \longrightarrow & f_* g_* \underline{\mathrm{Hom}}(g^* f^* A, B'')
 \end{array}$$

est commutatif pour tout $(A, B'') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Z))$.

Démonstration. — L'isomorphisme en question est celui de la définition 2.1.141 appliqué au foncteur pseudo-monoïdal f^* . La compatibilité avec l'isomorphisme de connexion vient par adjonction du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 (f \circ g)^* \circ (- \otimes_X A) & \longrightarrow & (- \otimes_Z (f \circ g)^* A) \circ (f \circ g)^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g^* \circ f^* \circ (- \otimes_X A) & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g^* \circ (- \otimes_Y f^* A) \circ f^* & \longrightarrow & (- \otimes_Z g^* f^* A) \circ g^* \circ f^*
 \end{array}$$

La proposition est prouvée. \square

Proposition 2.3.52. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs. Par la définition 2.1.145, on a des isomorphismes naturels en $(A', B) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X))$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_X(f_{\#} A', B) \xrightarrow{\sim} f_* \underline{\mathrm{Hom}}_X(A', f^* B)$$

et compatibles avec les 2-isomorphismes de connexion dans le sens suivant. Si $g : Z \longrightarrow Y$ est un second morphisme lisse, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\mathrm{Hom}}_X((f \circ g)_{\#} A'', B) & \longrightarrow & (f \circ g)_* \underline{\mathrm{Hom}}_Z(A'', (f \circ g)^* B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{\mathrm{Hom}}_X(f_{\#} g_{\#} A'', B) & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f_* \underline{\mathrm{Hom}}_Y(g_{\#} A'', f^* B) & \longrightarrow & f_* g_* \underline{\mathrm{Hom}}_Z(A'', g^* f^* B)
 \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — L'isomorphisme en question est celui de la définition 2.1.145 appliqué au module à gauche $[f^*, f^*]$ et les adjonctions $(f_\#, f^*)$ et (f^*, f_*) . Rappelons que ce morphisme est celui obtenu par adjonction à partir de l'isomorphisme de projection :

$$f_\# \circ (- \otimes A') \circ f^* \longrightarrow - \otimes f_\# A'$$

Pour montrer la compatibilité avec les isomorphismes de connexion, il suffit par adjonction de prouver la commutation de :

$$\begin{array}{ccc} (f \circ g)_\# \circ (- \otimes_Z A'') \circ (f \circ g)^* & \longrightarrow & - \otimes_X (f \circ g)_\# A'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_\# \circ g_\# \circ (- \otimes_Z A'') \circ f^* \circ g^* & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_\# \circ (- \otimes_Y g_\# A'') \circ f^* & \longrightarrow & - \otimes_X f_\# g_\# A'' \end{array}$$

Mais ce diagramme est bien commutatif. \square

On continue dans le même esprit avec la proposition :

Proposition 2.3.53. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Par la définition 2.1.145, on a des isomorphismes naturels en $(A', B) \in \text{Ob}(\mathcal{H}(Y)) \times \text{Ob}(\mathcal{H}(X))$:

$$\underline{\text{Hom}}_X(f_! A', B) \xrightarrow{\sim} f_* \underline{\text{Hom}}_Y(A', f^! B)$$

et compatibles avec les 2-isomorphismes de connexion de la manière suivante. Si $g : Z \longrightarrow Y$ est un autre morphisme de S -schémas quasi-projectifs, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}_X((f \circ g)_! A'', B) & \longrightarrow & (f \circ g)_* \underline{\text{Hom}}_Z(A'', (f \circ g)^! B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\text{Hom}}_X(f_! g_! A'', B) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_* \underline{\text{Hom}}_Y(g_! A'', f^! B) & \longrightarrow & f_* g_* \underline{\text{Hom}}_Z(A'', g^! f^! B) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — L'isomorphisme en question est celui de la définition 2.1.145 appliqué au module à gauche $[f^*, f^!]$ et les adjonctions $(f_!, f^!)$ et (f^*, f_*) . Rappelons que ce morphisme est celui obtenu par adjonction à partir de l'isomorphisme de projection :

$$f_! \circ (- \otimes A') \circ f^* \longrightarrow - \otimes f_! A'$$

Pour montrer la compatibilité avec les isomorphismes de connexion, il suffit par adjonction de prouver la commutation de :

$$\begin{array}{ccc}
 (f \circ g)_! \circ (- \otimes_Z A'') \circ (f \circ g)^* & \longrightarrow & - \otimes_X (f \circ g)_! A'' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f_! \circ g_! \circ (- \otimes_Z A'') \circ f^* \circ g^* & & \\
 \downarrow & & \\
 f_! \circ (- \otimes_Y g_! A'') \circ f^* & \longrightarrow & - \otimes_X f_! g_! A''
 \end{array}$$

Mais ce diagramme est bien commutatif par le corollaire 2.3.39. \square

On peut encore définir deux isomorphismes de la même famille :

Proposition 2.3.54. — Soient $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Par la définition 2.1.140, on a des morphismes naturels en $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$:

$$(193) \quad f^* \underline{\text{Hom}}_X(A, B) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_Y(f^* A, f^* B)$$

et compatibles avec les isomorphismes de connexions de la manière suivante. Si $g : Z \longrightarrow Y$ est un autre morphisme de S -schémas quasi-projectifs, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (f \circ g)^* \underline{\text{Hom}}_X(A, B) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_Z((f \circ g)^* A, (f \circ g)^* B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g^* f^* \underline{\text{Hom}}_X(A, B) & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g^* \underline{\text{Hom}}_Y(f^* A, f^* B) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_Z(g^* f^* A, g^* f^* B)
 \end{array}$$

est commutatif. Lorsque f est lisse, le morphisme (193) est inversible.

Démonstration. — Notre morphisme est celui de la définition 2.1.140 mais encore celui de la définition 2.1.143 appliqué au module tautologique (à droite) $[f^*, f^*]$. Lorsque f est lisse, le foncteur f^* admet un adjoint à gauche $f_\#$ et le morphisme structural du projecteur $[f^*, f_\#]$ est inversible. Il vient par le lemme 2.1.144 que le morphisme (193) est bien inversible dans ce cas.

La commutation du diagramme est laissée en exercice. \square

Proposition 2.3.55. — Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Par la définition 2.1.143, on a des isomorphismes naturels en $(A, B) \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))^2$:

$$f^! \underline{\text{Hom}}_X(A, B) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_Y(f^* A, f^! B)$$

et compatibles avec les isomorphismes de connexions de la manière suivante. Si $g : Z \longrightarrow Y$ est un autre morphisme de S -schémas quasi-projectifs, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (f \circ g)^! \underline{\mathrm{Hom}}_X(A, B) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_Z((f \circ g)^* A, (f \circ g)^! B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g^! f^! \underline{\mathrm{Hom}}_X(A, B) & & \\
 \downarrow & & \\
 g^! \underline{\mathrm{Hom}}_Y(f^* A, f^! B) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_Z(g^* f^* A, g^! f^! B)
 \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Par le lemme 2.1.144, le 2-morphisme en question est obtenu du 2-isomorphisme :

$$f_! \circ (- \otimes f^* A) \xrightarrow{\sim} (- \otimes A) \circ f_!$$

via les adjonctions : $(f_! \circ (- \otimes f^* A), \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, -) \circ f^!)$ et $((- \otimes A) \circ f_!, f^! \circ \underline{\mathrm{Hom}}(A, -))$. Pour prouver la commutation du diagramme de l'énoncé, il suffit de prouver que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (fg)_!(- \otimes (fg)^* A) & \longrightarrow & (fg)_!(-) \otimes A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f_! g_!(- \otimes g^* f^* A) & & \\
 \downarrow & & \\
 f_!(g_!(-) \otimes f^* A) & \longrightarrow & f_! g_!(-) \otimes A
 \end{array}$$

est commutatif. Ceci découle du corollaire 2.3.39. \square

2.3.9. Compatibilité avec les morphismes d'échange. — Dans ce paragraphe on regroupe quelques diagrammes commutatifs décrivant des cohérences entre les morphismes définis dans la sous-section précédente et les morphismes d'échange.

Proposition 2.3.56. — *Supposons donné un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 X' & \xrightarrow{g} & X
 \end{array}$$

Les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 g^* f_* \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, B') & \longrightarrow & f'_* g'^* \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, B') & \longrightarrow & f'_* \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* f^* A, g'^* B') \\
 \uparrow & & & & \downarrow \\
 & & & & f'_* \underline{\mathrm{Hom}}(f'^* g^* A, g'^* B') \\
 g^* \underline{\mathrm{Hom}}(A, f_* B') & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g^* A, g^* f_* B') & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g^* A, f'_* g'^* B') \\
 & & & & \uparrow
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 g^! f_* \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, B') & \longrightarrow & f'_* g'^! \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, B') & \longrightarrow & f'_* \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* f^* A, g'^! B') \\
 \uparrow & & & & \downarrow \\
 & & & & f'_* \underline{\mathrm{Hom}}(f'^* g^* A, g'^! B') \\
 g^! \underline{\mathrm{Hom}}(A, f_* B') & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g^* A, g^! f_* B') & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g^* A, f'_* g'^! B') \\
 & & & & \uparrow
 \end{array}$$

sont commutatifs pour tout $(A, B') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X)) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(Y))$.

Démonstration. — On prouvera uniquement la commutation du second diagramme. Si on considère le diagramme en question comme un diagramme de foncteurs en B' , on remarque immédiatement que tous les foncteurs en question admettent des adjoints à gauche. En passant à ces adjoints on se ramène à prouver la commutation de :

$$\begin{array}{ccccccc}
 g'_!(f'^*(-) \otimes_{Y'} g'^* f^*(A)) & \longrightarrow & g'_! f'^*(-) \otimes_Y f^*(A) & \longrightarrow & f^* g'_!(-) \otimes_Y f^*(A) & \longrightarrow & f^*(g'_!(-) \otimes_X A) \\
 \downarrow & & & & & & \parallel \\
 g'_!(f'^*(-) \otimes_Y f'^* g^*(A)) & \longrightarrow & g'_! f'^*(- \otimes_{X'} g^*(A)) & \longrightarrow & f^* g'_!(- \otimes_{X'} g^* A) & \longrightarrow & f^*(g'_!(-) \otimes_X A)
 \end{array}$$

Ceci découle du corollaire 2.3.42. □

On a également :

Proposition 2.3.57. — *Supposons donné un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 X' & \xrightarrow{g} & X
 \end{array}$$

les composées des diagrammes planaires suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccc} H(X) & \xleftarrow{- \otimes f_! A'} & H(X) \\ g^! \downarrow & \lhd & \downarrow g^! \\ H(X') & \xleftarrow{- \otimes g^* f_! A'} & H(X') \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} H(X) & \xleftarrow{- \otimes f_! A'} & H(X) \\ \parallel & \lhd & \parallel \\ H(X) & \xleftarrow{f_!} H(Y) \xleftarrow{- \otimes A'} H(Y) \xleftarrow{f^*} H(X) \\ g^! \downarrow \lhd \downarrow g^! \lhd \downarrow g^! \lhd \downarrow g^! \\ H(X') & \xleftarrow{f'_!} H(Y') \xleftarrow{- \otimes g'^* A'} H(Y') \xleftarrow{f'^*} H(X') \end{array} & & \begin{array}{ccc} H(X) & \xleftarrow{- \otimes f_! A'} & H(X) \\ g^! \downarrow & \lhd & \downarrow g^! \\ H(X') & \xleftarrow{- \otimes g^* f_! A'} & H(X') \\ \parallel & \lhd & \parallel \\ H(X') & \xleftarrow{- \otimes f'_! g'^* A'} & H(X') \\ \parallel & \lhd & \parallel \\ H(X') & \xleftarrow{f'_!} H(Y') \xleftarrow{- \otimes g'^* A} H(Y') \xleftarrow{f'^*} H(X') \end{array}
 \end{array}$$

sont égales. Ceci découle du lemme 2.1.114 appliqué à la face carrée mixte de modules de la proposition 2.3.44. \square

On note finalement le résultat de cohérence ci-dessous, dont la preuve est laissée en exercice :

Proposition 2.3.58. — *Supposons donné un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} g'^* f^! \underline{\mathrm{Hom}}(A, B) & \longrightarrow & g'^* \underline{\mathrm{Hom}}(f^* A, f^! B) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* f^* A, g'^* f^! B) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f'^! g^* \underline{\mathrm{Hom}}(A, B) & \longrightarrow & f'^! \underline{\mathrm{Hom}}(g^* A, g^* B) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(f'^! g^* A, f'^! g^* B) \end{array}$$

est commutatif.

2.3.10. Constructibilité, objets dualisants et dualité. — On fixe un 2-foncteur monoïdal, homotopique et stable (H, \otimes) . Rappelons que pour une classe d'objets $\Lambda \subset \mathrm{Ob}(H(S))$ on a défini dans la section 2.2 des catégories $H_\Lambda^{\mathrm{ct}}(X)$ (voir la définition 2.2.3) pour tout S -schéma quasi-projectif X . Faisons la définition suivante :

Définition 2.3.59. — *Soit $\Lambda \subset \mathrm{Ob}(H(S))$ une classe d'objets. On dit que Λ est stable par \otimes si pour tout A et B de Λ , l'objet $A \otimes B$ est isomorphe à un objet de Λ .*

On a le résultat élémentaire suivant :

Proposition 2.3.60. — *Supposons que Λ est stable par \otimes . Alors pour tout S -schéma quasi-projectif X et tout $(E, F) \in \mathrm{Ob}(H_\Lambda^{\mathrm{ct}}(X))^2$, l'objet $E \otimes_X F$ est dans $H_\Lambda^{\mathrm{ct}}(X)$.*

Démonstration. — Le bifoncteur \otimes étant triangulé par rapport à chacune des variables, il suffira de prouver que $E \otimes_X F$ est constructible pour $(E, F) \in \Lambda(X)^2$. Soient donc $f : U \longrightarrow X$ et $g : V \longrightarrow X$ deux S -morphisms lisses et $(A, B) \in \Lambda^2$. On va calculer l'objet :

$$f_{\#} A_U \otimes_X g_{\#} B_V$$

Pour cela, on forme un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} V \times_X U & \xrightarrow{pr_2} & U \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

et on note $h = f \circ pr_2 = g \circ pr_1$. On utilisant les isomorphismes de projection, on a :

$$\begin{aligned} f_{\#} A_U \otimes g_{\#} B_V &\simeq f_{\#}(A_U \otimes f^* g_{\#} B_V) \simeq f_{\#}(A_U \otimes pr_{2\#} pr_1^* B_V) \\ &\simeq f_{\#} pr_{2\#}(pr_2^* A_U \otimes pr_1^* B_V) \simeq h_{\#}(A_{V \times_X U} \otimes B_{V \times_X U}) \end{aligned}$$

Le résultat découle alors immédiatement du fait que $A \otimes B$ est dans Λ (à isomorphisme près) et que $A_{V \times_X U} \otimes_{V \times_X U} B_{V \times_X U} \simeq (A \otimes_S B)_{V \times_X U}$. \square

Définition 2.3.61. — Supposons que \mathbf{H} est fermé à gauche (resp. à droite). On dit qu'une classe d'objets $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(S))$ est fermée à gauche (resp. à droite) si pour tout S -schéma X , avec X régulier, et pour tout $(A, B) \in \Lambda$, l'objet $\underline{\text{Hom}}_{g,X}(A_X, B_X)$ (resp. $\underline{\text{Hom}}_{d,X}(A_X, B_X)$) est Λ -constructible.

Proposition 2.3.62. — On suppose que (\mathbf{H}, \otimes) est fermé à gauche (resp. à droite) et que le foncteur $\underline{\text{Hom}}_{g,X}(-, A)$ (resp. $\underline{\text{Hom}}_{d,X}(-, A)$) sont triangulés pour tout S -schéma quasi-projectif X et $A \in \text{Ob}(\mathbf{H}(X))$.

Soit $\Lambda \subset \text{Ob}(\mathbf{H}(S))$ une classe d'objets, stable par \otimes , fermée à gauche (resp. à droite) et quasi-pure. On suppose que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- S admet la résolution des singularités par éclatements et \mathbf{H} est semi-séparé,
- S admet la résolution des singularités par altérations et \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé.

Alors pour tout S -schéma quasi-projectif X et tout $(E, F) \in \text{Ob}(\mathbf{H}_{\Lambda}^{\text{ct}}(X))^2$ l'objet $\underline{\text{Hom}}_{g,X}(E, F)$ (resp. $\underline{\text{Hom}}_{d,X}(E, F)$) est dans $\mathbf{H}_{\Lambda}^{\text{ct}}(X)$.

Démonstration. — On traite uniquement le premier cas. Le bifoncteur $\underline{\text{Hom}}_{g,X}(-, -)$ étant triangulé par rapport à chacune des variables, on se ramène par la proposition 2.2.27 à supposer que E est dans $\Lambda(X)$ et que F est dans $\Lambda_{*, \text{proj-reg}}(X)$. On peut donc supposer que :

- $E = u_{\#} A_U$ avec $u : U \longrightarrow X$ un S -morphisme lisse et $A \in \Lambda$,
- $F = f_{*} B_Y(n)$ avec $f : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme projectif de source un schéma régulier, $n \in \mathbb{Z}$ et $B \in \Lambda$.

On se ramène immédiatement au cas $n = 0$. Par la proposition 2.3.52, on a un isomorphisme :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(u_{\#}A_U, f_*B_Y) \simeq u_*\underline{\mathrm{Hom}}_{d,U}(A_U, u^*f_*B_Y)$$

On sait par la scholie 2.2.34 que sous les conditions de l'énoncé, le foncteur u_* envoie les objets Λ -constructibles sur des objets Λ -constructibles. Il suffit de montrer que $\underline{\mathrm{Hom}}_{d,U}(A_U, u^*f_*B_Y)$ est dans $\mathbf{H}_{\Lambda}^{\mathrm{ct}}(U)$. Formons le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{v} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ U & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

Le 2-isomorphisme d'échange Ex_*^* associé à ce carré est inversible. On a alors :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{d,U}(A_U, u^*f_*B_Y) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{d,U}(A_U, g_*v^*B_Y) \simeq g_*\underline{\mathrm{Hom}}_{d,V}(A_V, B_V)$$

Le foncteur g_* envoie les objets constructibles sur des objets constructibles. Le résultat découle alors du fait que Λ est fermée à gauche et que le schéma V est régulier puisque lisse sur Y . \square

Corollaire 2.3.63. — *On garde les hypothèses de la proposition 2.3.62. Il existe une structure de 2-foncteur monoïdal, homotopique et stable sur les catégories $\mathbf{H}^{\mathrm{ct}}(-)$ induite par les inclusions $\mathbf{H}^{\mathrm{ct}}(-) \subset \mathbf{H}(-)$. De plus les catégories monoïdales $\mathbf{H}^{\mathrm{ct}}(-)$ sont fermées à gauche (resp. à droite).*

Remarque 2.3.64. — Le cas le plus important est celui où (\mathbf{H}, \otimes) est unitaire et Λ égal à l'ensemble $\mathbb{1}(\mathbb{Z}) = \{\mathbb{1}(n); n \in \mathbb{Z}\}$ avec $\mathbb{1}$ l'objet unité de $\mathbf{H}(S)$. Les conditions de \otimes -stabilité et de fermeture à gauche ou à droite sont alors immédiates.

On a donc le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.65. — *On suppose que S est le spectre d'un corps parfait k . On suppose également que (\mathbf{H}, \otimes) est fermé à gauche (resp. à droite) et que les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(-, A)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(-, A)$) sont triangulés pour tout k -schéma quasi-projectif X et $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(X))$.*

Si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- k admet la résolution des singularités par éclatements et \mathbf{H} est semi-séparé,
- \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé,

alors pour tout k -schéma quasi-projectif X et tout $(E, F) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}_{\mathbb{1}(\mathbb{Z})}^{\mathrm{ct}}(X))^2$ l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(E, F)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(E, F)$) est dans $\mathbf{H}_{\mathbb{1}(\mathbb{Z})}^{\mathrm{ct}}(X)$.

On fait la définition suivante :

Définition 2.3.66. — *On suppose que le 2-foncteur monoïdal homotopique et stable (\mathbf{H}, \otimes) est fermé à droite et à gauche. On se donne une classe d'objets $\Lambda \subset \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(S))$.*

Soit X un S -schéma quasi-projectif. Un objet R de $\mathbf{H}(X)$ est dit Λ -dualisant si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- L'objet R est Λ -constructible.
- Pour tout objet Λ -constructible A de $\mathbf{H}(X)$, les morphismes :

$$A \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, R), R) \quad \text{et} \quad A \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(A, R), R)$$

sont des isomorphismes.

Remarque 2.3.67. — Supposons que les hypothèses de la proposition 2.3.62 sont vérifiées dans le premier cas ainsi que respectivement. Il vient par le corollaire 2.3.63, qu'un objet Λ -dualisant de $\mathbf{H}(X)$ est simplement un objet dualisant de la catégorie monoïdale fermée à droite et à gauche $\mathbf{H}_\Lambda^{\mathrm{ct}}(X)$.

Le résultat suivant est une conséquence directe de la remarque précédente et la proposition 2.1.139 :

Proposition 2.3.68. — Supposons que les hypothèses de la proposition 2.3.62 sont vérifiées dans les deux cas. On se donne un S -schéma quasi-projectif X .

1- Soient R un objet Λ -dualisant et U un objet inversible et Λ -constructible de $\mathbf{H}(X)$. Alors les objets $U \otimes R$ et $R \otimes U$ sont Λ -dualisants.

2- Soient R_1 et R_2 deux objets Λ -dualisants de $\mathbf{H}(X)$. Les objets $\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(R_1, R_2)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(R_1, R_2)$ sont inversibles et Λ -constructibles. De plus les morphismes d'évaluations :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(R_1, R_2) \otimes_X R_1 \longrightarrow R_2 \quad \text{et} \quad R_1 \otimes_X \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(R_1, R_2) \longrightarrow R_2$$

sont des isomorphismes.

Ainsi, sous les bonnes hypothèses, un objet Λ -dualisant de $\mathbf{H}(X)$ est unique à un objet inversible (et Λ -constructible) près. Toutefois, un tel objet n'existe pas toujours. Dans le reste de la section, on décrira des conditions assurant l'existence d'objets Λ -dualisants. On fait la définition suivante :

Définition 2.3.69. — On dit que la classe d'objets Λ est bonne pour la dualité lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- L'objet unité $\mathbb{1}$ est dans Λ ,
- Pour tout S -schéma quasi-projectif X avec X régulier, les morphismes :

$$A_X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A_X, \mathbb{1}_X), \mathbb{1}_X)$$

et

$$A_X \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(A_X, \mathbb{1}_X), \mathbb{1}_X)$$

sont des isomorphismes pour tout $A \in \Lambda$.

Remarque 2.3.70. — L'ensemble $\mathbb{1}(\mathbb{Z})$ est bon pour la dualité. En effet, les objets de cet ensemble sont inversibles. Or pour U on objet inversible, on a bien : $U \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_g(\underline{\mathrm{Hom}}_d(U, \mathbb{1}), \mathbb{1})$.

On introduit l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.3.71

- 1- Le schéma S est régulier. De plus, l'une des deux alternatives suivantes est vraie :
 - S admet la résolution des singularités par éclatements et \mathbf{H} est semi-séparé,
 - S admet la résolution des singularités par altérations et \mathbf{H} est \mathbb{Q} -linéaire et séparé.
- 2- Le 2-foncteur monoïdal unitaire, homotopique et stable $(\mathbf{H}, \otimes, \mathbb{1})$ est fermé à gauche et à droite. De plus les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(-, A)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(-, A)$ sont triangulés pour tout S -schéma X et $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(X))$.
- 3- La classe Λ est bonne pour la dualité. De plus, elle est stable par \otimes , fermée à droite et à gauche et quasi-pure.
- 4- Pour tout morphisme $f : Y \longrightarrow X$ de S -schémas quasi-projectifs, avec X et Y réguliers, l'objet $f^! \mathbb{1}_X$ est inversible au sens de 2.1.126.

Avant d'énoncer et d'établir le théorème d'existence d'objets dualisants, on note un lemme technique :

Lemme 2.3.72. — *On suppose que le 2-foncteur monoïdal homotopique et stable (\mathbf{H}, \otimes) est fermé à gauche et à droite. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. Pour tout $(A, R) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(Y)) \times \mathrm{Ob}(\mathbf{H}(X))$, le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
 f_! A & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_! A, R), R) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R), R) \\
 & & \downarrow \\
 & & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_! \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R), R) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f_* A & \longrightarrow & f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R), f^! R)
 \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — On utilisera dans cette démonstration le module $[f_*, f_!]$ (voir la définition 2.3.45) ainsi que les résultats de la sous-section 2.3.7. On divise la preuve en deux étapes.

Étape 1 : Soient E et F des objets de $\mathbf{H}(Y)$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 f_! F & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_*(E), f_*(E) \otimes_X f_!(F)) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_!(E), f_*(E) \otimes_X f_!(F)) \\
 \downarrow & & & & \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_!(E), f_!(E \otimes_Y F)) \\
 f_* F & \longrightarrow & f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(E, E \otimes_Y F) & \downarrow & \\
 & & & & \longrightarrow f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(E, f^! f_!(E \otimes_Y F))
 \end{array}$$

et montrons qu'il est commutatif. Notons a et b les deux flèches :

$$f_! F \longrightarrow f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(E, f^! f_!(E \otimes_Y F))$$

obtenues en prenant les deux chemins possibles dans ce diagramme. On supposera que a est la composée longue et b la composée courte. Par l'adjonction $(f_!(B \otimes_Y f^*(-)), f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(B, f^!(-)))$, les flèches a et b correspondent respectivement à deux flèches a' et b' :

$$f_!(E \otimes_Y f^* f_!(F)) \longrightarrow f_!(E \otimes_Y F)$$

Il est facile de voir que a' est la composée :

$$f_!(E \otimes_Y f^* f_!(F)) \longrightarrow f_!(E) \otimes_X f_!(F) \longrightarrow f_*(E) \otimes_X f_!(F) \longrightarrow f_!(E \otimes_Y F)$$

alors que b' est simplement la composée :

$$f_!(E \otimes_Y f^* f_!(F)) \longrightarrow f_!(E \otimes_Y f^* f_*(F)) \longrightarrow f_!(E \otimes_Y F)$$

Pour montrer que $a' = b'$, on démontre que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 f_!(E \otimes_Y f^* f_!(F)) & \longrightarrow & f_!(E) \otimes_X f_!(F) & \longrightarrow & f_*(E) \otimes_X f_!(F) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 f_!(E \otimes_Y f^* f_*(F)) & \longrightarrow & f_!(E) \otimes_X f_*(F) & \longrightarrow & f_!(E \otimes_Y F) \\
 & \searrow & \uparrow \sim & \nearrow & \\
 & & f_!(E \otimes_X f^* f_*(F)) & &
 \end{array}
 \quad (1)$$

Le carré (1) commute par le corollaire 2.3.49. L'autre carré commute pour des raisons triviales. La partie restante du diagramme commute par la définition même du morphisme structural du module $[f_*, f_!]$.

Étape 2 : Avec le résultat de l'étape 1 en main, on prouvera notre lemme. On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 f_! A & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_! A, R), \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_! A, R) \otimes f_!(A)) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_! A, R), R) \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 f_! A & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R), f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R) \otimes_X f_!(A)) & & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R), R) \\
 & & \downarrow & (3) & \downarrow \\
 & & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R), f_!(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R) \otimes_Y A)) & & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R), R) \\
 (2) & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R), f^! f_!(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R) \otimes_Y A)) & & f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R), f^! R) \\
 & & \uparrow & & \downarrow \\
 f_* A & \longrightarrow & f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R), (\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R) \otimes_Y A)) & \longrightarrow & f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R), f^! f_! f^! R) \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R), f^! R)
 \end{array}$$

Pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que le bord de ce diagramme est commutatif. La partie (2) de ce diagramme n'est rien d'autre que le diagramme commutatif de l'étape 1 appliqué à $F = A$ et $E = \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(A, f^! R)$. Le petit parallélogramme en bas et le petit rectangle en haut sont clairement commutatifs. Ainsi, le lemme sera vrai si le sous-diagramme (3) est commutatif. Malheureusement, le diagramme (3) ne commute pas. Mais pour la preuve du lemme, on peut se contenter de prouver que le morphisme :

$$(194) \quad f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R), f^! f_! f^! R) \longrightarrow f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R), f^! R)$$

égalise les deux composées du bord du sous-diagramme (3). Pour démontrer cela, on factorise le diagramme (3) (auquel on rajoute la flèche (194)) en plusieurs petits diagrammes. On obtient alors le diagramme ci-dessous. Pour des raisons de place, on s'est débarrassé des décorations évidentes en écrivant $\underline{\mathrm{Hom}}$ à la place de $\underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}$ et \otimes à la place de \otimes_X , \otimes_Y .

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(f_! A, R), \underline{\mathrm{Hom}}(f_! A, R) \otimes f_!(A)) & \longrightarrow & & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(f_! A, R), R) \\
 \downarrow & & & \nearrow & \downarrow \\
 \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(f_! A, R), f_* \underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R) \otimes f_!(A)) & & (4) & & \underline{\mathrm{Hom}}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R), R) \\
 \downarrow & & & \nearrow & \downarrow \\
 \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(f_! A, R), f_!(\underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R) \otimes A)) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(f_! A, R), f^! f^! R) & & \underline{\mathrm{Hom}}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R), R) \\
 \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 \underline{\mathrm{Hom}}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R), f_!(\underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R) \otimes A)) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R), f^! f^! R) & & f_* \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R), f^! R) \\
 \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 \underline{\mathrm{Hom}}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R), f_!(\underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R) \otimes A)) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R), f^! f^! R) & & f_* \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R), f^! f^! f^! R) \\
 \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 f_* \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R), f^! f_!(\underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R) \otimes A)) & \longrightarrow & f_* \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R), f^! f^! f^! R) & \longrightarrow & f_* \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! R), f^! R)
 \end{array}$$

Toutes les composantes de ce diagramme commutent pour des raisons triviales sauf la partie (4). Ainsi on achèvera la preuve du lemme lorsqu'on prouvera que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_!(A), R) \otimes_X f_!(A) & \longrightarrow & R \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R) \otimes_X f_!(A) & & \\
 \downarrow & & \\
 f_!(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, f^! R) \otimes_Y f^!(A)) & \longrightarrow & f_! f^! R
 \end{array}$$

est commutatif. Pour cela, on écrit le diagramme en question en explicitant le morphisme structural du module $[f_*, f^!]$:

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_!(A), R) \otimes_X f_!(A) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & R \\
 \downarrow & & \parallel \\
 f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R) \otimes_X f_!(A) & & \\
 \downarrow & & \\
 f_!(f^* f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R) \otimes_Y A) & \longrightarrow f_!(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, f^! R) \otimes_Y A) \longrightarrow f_! f^! R & \longrightarrow R
 \end{array}$$

On voit alors apparaître, les morphismes de counité des quatre adjonctions :

$$(- \otimes_X f_! A, \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_!(A), -)), \quad (f^*, f_*), \quad (- \otimes_Y A, \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, -)), \quad (f_!, f^!)$$

et le diagramme considéré est celui exprimant la compatibilité des morphismes de counité avec l'isomorphisme de couples de foncteurs adjoints :

$$(- \otimes_X f_! A, \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_!(A), -)) \simeq (f_! \circ (- \otimes_Y A) \circ f^*, f_* \circ \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A, -) \circ f^!)$$

Le lemme est finalement prouvé. \square

Le théorème d'existence d'objets Λ -dualisants est le suivant :

Théorème 2.3.73. — *On suppose que l'hypothèse 2.3.71 est satisfaite.*

1- Soit X est un S -schéma quasi-projectif avec X régulier, l'objet $\mathbb{1}_X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X))$ est Λ -dualisant.

2- Pour tout S -schéma quasi-projectif $a : X \longrightarrow S$, l'objet $a^! \mathbb{1}_S \in \mathrm{Ob}(\mathrm{H}(X))$ est Λ -dualisant.

3- Soient $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs et R un objet Λ -dualisant de $\mathrm{H}(X)$. Alors $f^! R$ est un objet Λ -dualisant de $\mathrm{H}(Y)$.

Démonstration

1- Par \otimes -dualité, il suffit de prouver que la transformation naturelle (de foncteurs triangulés) :

$$(195) \quad \mathrm{id}_{\mathbf{H}(X)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(-, \mathbb{1}_X), \mathbb{1}_X)$$

est un isomorphisme lorsqu'on l'évalue en un objet Λ -constructible de $\mathbf{H}(X)$. Par la proposition 2.2.27, il suffit en fait d'évaluer en un objet de $\Lambda_{*,proj-reg}(X)$.

Soit donc $f : Y \longrightarrow X$ un S -morphisme projectif de source un schéma régulier. On montrera que (195) est un isomorphisme lorsqu'on l'évalue en $f_* A_Y(n)$ avec $A \in \Lambda$. On se ramène immédiatement au cas $n = 0$. Par le lemme 2.3.72, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} f_! A_Y & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(f_! A_Y, \mathbb{1}_X), \mathbb{1}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A_Y, f^! \mathbb{1}_X), \mathbb{1}_X) \\ & & \downarrow \\ & & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_! \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A_Y, f^! \mathbb{1}_X), \mathbb{1}_X) \\ & & \downarrow \\ f_* A_Y & \longrightarrow & f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A_Y, f^! \mathbb{1}_X), f^! \mathbb{1}_X) \end{array}$$

Étant donné que f est projectif, les flèches verticales de ce diagramme sont inversibles. Ceci nous ramène à prouver que le morphisme :

$$A_Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A_Y, f^! \mathbb{1}_X), f^! \mathbb{1}_X)$$

est un isomorphisme. Par l'hypothèse 2.3.71, l'objet $f^! \mathbb{1}_X$ est inversible étant donné que X et Y sont réguliers. Il suffit de prouver que :

$$A_Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(A_Y, \mathbb{1}_Y), \mathbb{1}_Y)$$

est un isomorphisme (voir pour cela la preuve de la proposition 2.1.138). Ceci est vrai puisque Λ est bonne pour la dualité.

2- Par la partie **1**, l'objet $a^! \mathbb{1}$ est dualisant lorsque S est régulier. En effet, puisque le schéma de base S est régulier, on sait que $a^! \mathbb{1}_S$ est un objet inversible et Λ -constructible. Mais on vient de démontrer que $\mathbb{1}_X$ est dualisant. Pour traiter le cas général, on choisit une immersion fermée de X dans un S -schéma W avec W régulier (ou même lisse sur S) :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & W \\ & \searrow a & \downarrow b \\ & & S \end{array}$$

Il suffit alors de prouver l'énoncé de **3** pour i . En effet, on sait que $b^! \mathbb{1}_S$ est dualisant et $a^! \mathbb{1}_S \simeq i^! b^! \mathbb{1}_S$. On suppose donc donné un objet Λ -dualisant R de $\mathbf{H}(W)$. Soit A un objet Λ -constructible de $\mathbf{H}(X)$. On sait par la proposition 2.2.8 que $i_* A$ est Λ -constructible. Il vient que :

$$i_* A \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{g,W}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,W}(i_* A, R), R)$$

est un isomorphisme. Mais en appliquant encore une fois le lemme 2.3.72, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} i_! A & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,W}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,W}(i_! A, R), R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,W}(i_* \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, i^! R), R) \\ & & \downarrow \\ & & \underline{\mathrm{Hom}}_{g,W}(i_! \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, i^! R), R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ i_* A & \longrightarrow & i_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, i^! R), i^! R) \end{array}$$

Ceci prouve que le morphisme

$$A \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(A, i^! R), i^! R)$$

devient un isomorphisme lorsqu'on lui applique le foncteur i_* . Le résultat découle alors du fait que i_* est conservatif puisqu'il admet un quasi-inverse à gauche, à savoir i^* .

3- Il est maintenant aisé de prouver la troisième partie du théorème. En effet si R est un objet Λ -dualisant de $\mathbf{H}(X)$, on sait par la proposition 2.3.68 qu'il existe un objet inversible et Λ -constructible U tel que $R \simeq U \otimes_X a^! \mathbb{1}_S$ (avec a le morphisme structural du S -schéma X). Si V est un inverse de U , on a également $R \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(V, a^! \mathbb{1}_S)$. En utilisant la proposition 2.3.55, on obtient des isomorphismes :

$$f^!(R) \simeq f^! \underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(V, a^! \mathbb{1}_S) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{d,Y}(f^* V, f^! a^! \mathbb{1}_S)$$

L'objet $f^!(R)$ est donc Λ -dualisant puisque $f^* V$ est un objet inversible et Λ -constructible et $f^! a^! \mathbb{1}_S \simeq (f \circ a)^! \mathbb{1}_S$ est Λ -dualisant par la partie **2**. Le théorème est prouvé. \square

Définition 2.3.74. — On suppose que l'hypothèse 2.3.71 est satisfaite. Pour tout S -schéma quasi-projectif X de morphisme structural $a : X \longrightarrow S$, on notera $\mathbf{D}_{g,X}$ et $\mathbf{D}_{d,X}$ les foncteurs de dualité :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(-, a^! \mathbb{1}_S) : \mathbf{H}_\Lambda^{\mathrm{ct}}(X) \longrightarrow \mathbf{H}_\Lambda^{\mathrm{ct}}(X)^{\mathrm{op}}$$

et

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{d,X}(-, a^! \mathbb{1}_S) : \mathbf{H}_\Lambda^{\mathrm{ct}}(X) \longrightarrow \mathbf{H}_\Lambda^{\mathrm{ct}}(X)^{\mathrm{op}}$$

qu'on a restreint aux sous-catégories des objets Λ -constructibles.

On résume les propriétés essentielles des foncteurs de dualité dans le théorème suivant :

Théorème 2.3.75. — *On suppose que l'hypothèse 2.3.71 est satisfaite. Soit X un S -schéma quasi-projectif. Les foncteurs de dualité $D_{g,X}$ et $D_{d,X}$ sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre. De plus, si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme de S -schémas quasi-projectifs, on des isomorphismes de commutation à la dualité :*

- $D_{g,Y} \circ f^* \xrightarrow{\sim} f^! \circ D_{g,X}$ et $D_{d,Y} \circ f^* \xrightarrow{\sim} f^! \circ D_{d,X}$,
- $f^* \circ D_{g,X} \xrightarrow{\sim} D_{g,Y} \circ f_!$ et $f^* \circ D_{d,X} \xrightarrow{\sim} D_{d,Y} \circ f_!$,
- $D_{g,X} \circ f_! \xrightarrow{\sim} f_* \circ D_{g,Y}$ et $D_{d,X} \circ f_! \xrightarrow{\sim} f_* \circ D_{d,Y}$,
- $f_! \circ D_{g,Y} \xrightarrow{\sim} D_{g,X} \circ f_*$ et $f_! \circ D_{d,Y} \xrightarrow{\sim} D_{d,X} \circ f_*$.

On fera attention que dans les 2-isomorphismes ci-dessus, les notations f^* , f_* , $f_!$ et $f^!$ désignent les restrictions des quatre opérations usuelles aux objets Λ -constructibles.

Démonstration. — Le fait que les foncteurs de dualité sont des équivalences lorsqu'on se restreint aux objets Λ -constructibles est clair.

On note a (resp. b) le morphisme structural du S -schéma quasi-projectif X (resp. Y). Ainsi $b = a \circ f$. L'isomorphisme $f^! D_{g,X} \longrightarrow D_{g,Y} f^*$ est la composée :

$$f^! \underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(A, a^! \mathbb{1}_S) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(f^*(A), f^! a^! \mathbb{1}_S) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(f^*(A), b^! \mathbb{1}_S)$$

En utilisant les adjonctions (D_g, D_d) et (D_d, D_g) on déduit la deuxième ligne d'isomorphismes.

L'isomorphisme $D_{g,X} \circ f_! \xrightarrow{\sim} f_* \circ D_{g,Y}$ est la composée :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{g,X}(f_! A, a^! \mathbb{1}_S) \xrightarrow{\sim} f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(A, f^! a^! \mathbb{1}_S) \xrightarrow{\sim} f_* \underline{\mathrm{Hom}}_{g,Y}(A, b^! \mathbb{1}_S)$$

En utilisant les adjonctions (D_g, D_d) et (D_d, D_g) on déduit la dernière ligne d'isomorphismes. \square

On note le résultat de cohérence suivant :

Proposition 2.3.76. — *On suppose l'hypothèse 2.3.71 satisfaite. Soit un carré cartésien de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccccc} g^! D_{g,X} f_! & \xrightarrow{\sim} & g^! f_* D_{g,Y} & \xrightarrow{\sim} & f'_* g'^! D_{g,Y} \\ \uparrow \sim & & & & \uparrow \sim \\ D_{g,Y} g^* f_! & \xrightarrow{\sim} & D_{g,Y} f'_! g'^* & \xrightarrow{\sim} & f'_! D_{g,Y} g'^* \end{array}$$

Démonstration. — On note a le morphisme structural du S -schéma quasi-projectif X . Par la proposition 2.3.57, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 g^! f_* \underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! a^! \mathbb{1}_S) & \longrightarrow & f'_* g'^! \underline{\mathrm{Hom}}(A, f^! a^! \mathbb{1}_S) & \longrightarrow & f'_* \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* A, g'^! f^! a^! \mathbb{1}_S) \\
 \uparrow & & & & \downarrow \\
 & & & & f'_* \underline{\mathrm{Hom}}(g'^* A, f'^! g^! a^! \mathbb{1}_S) \\
 & & & & \uparrow \\
 g^! \underline{\mathrm{Hom}}(f_! A, a^! \mathbb{1}_S) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(g^* f_! A, g^! a^! \mathbb{1}_S) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(f'_! g'^* A, g^! a^! \mathbb{1}_S)
 \end{array}$$

On obtient le diagramme de l'énoncé en composant par des isomorphismes de connexion de $h^!$. Les détails sont faciles et laissés en exercice. \square

2.4. Dérivateurs algébriques homotopiques et stables

La notion de dérivateurs algébriques est un mariage entre la notion de dérivateurs de Grothendieck et celle de 2-foncteurs homotopiques stables. Comme pour les dérivateurs habituels, un dérivateur motivique constitue le cadre idéal pour faire de l'homotopie motivique de « façon propre » *i.e.* sans avoir besoin de retourner à la catégorie de modèles.

Dans le chapitre suivant, on a choisi de développer la théorie des cycles évanescents dans un dérivateur algébrique homotopique et stable, plutôt que de le faire pour **SH** et pour **DM** qui sont sans aucun doute les deux cas les plus importants. Nous renvoyons le lecteur à l'introduction pour la justification de ce choix.

Ainsi, les dérivateurs algébriques apparaissent dans cette thèse comme un outil et non comme un objet d'étude en soi. Pour cela, l'exposition sera axée sur les résultats utiles pour le chapitre suivant. La définition proposée est loin d'être la meilleure possible.

2.4.1. Les 2-catégories de diagrammes de S -schémas. — Dans la suite, on fixe une sous-catégorie pleine \mathbf{Dia} de la 2-catégorie stricte des petites catégories vérifiant les conditions suivantes :

- D0** : la catégorie vide \emptyset , la catégorie ponctuelle \mathbf{e} , et la catégorie $\mathbf{1} = \{0 \rightarrow 1\}$ sont des objets de \mathbf{Dia} ,
- D1** : la 1-catégorie sous-jacente à \mathbf{Dia} est stable par coproduits finis et produits fibrés,
- D2** : Pour tout foncteur $u : A \longrightarrow B$ de \mathbf{Dia} et $b \in \mathbf{Ob}(B)$, les catégories A/b et $b \backslash A$ sont dans \mathbf{Dia} .

Remarque 2.4.1. — Rappelons que la catégorie A/b de **D2** a pour objets les couples (a, f) avec $a \in \text{Ob}(A)$ et $f : u(a) \rightarrow b \in \text{Fl}(B)$. Une flèche de A/b entre deux objets (a, f) et (a', f') est simplement une flèche $g : a \rightarrow a' \in \text{Fl}(A)$ tel que $f = f' \circ u(g)$. On définit $b \backslash A$ de telle sorte que $(b \backslash A)^{\text{op}} = A^{\text{op}}/b$. Les deux faces :

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \alpha \swarrow & \downarrow u \\ \mathbf{e} & \xrightarrow{b} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} b \backslash A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \beta \nearrow & \downarrow u \\ \mathbf{e} & \xrightarrow{b} & B \end{array}$$

jouent un rôle important dans la théorie des dérivateurs à cause de l'axiome 4 de la définition 2.1.34.

On appellera dans la suite **Dia** la 2-catégorie des diagrammes.

Définition 2.4.2. — Soit \mathcal{I} une petite catégorie. La catégorie des \mathcal{I} -diagrammes de S -schémas quasi-projectifs est la catégorie des foncteurs covariants de \mathcal{I} dans Sch/S . La catégorie \mathcal{I} est appelée parfois la catégorie d'indices.

Remarque 2.4.3. — Plus généralement on a la catégorie des \mathcal{I} -diagrammes en objets de \mathcal{C} pour n'importe quel catégorie \mathcal{C} . En particulier on peut parler de \mathcal{I} -diagrammes de schémas pas forcément de type fini sur une base.

Lorsqu'on fait varier la catégorie d'indices, on obtient la catégorie des diagrammes de S -schémas quasi-projectifs :

Définition 2.4.4. — La 2-catégorie DiaSch/S des diagrammes de S -schémas quasi-projectifs est définie de la manière suivante :

- Un objet de DiaSch/S est un couple $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ avec \mathcal{I} une catégorie de **Dia** et $\mathcal{F} : \mathcal{I} \longrightarrow \text{Sch}/S$ un foncteur covariant.
- Un 1-morphisme d'un diagramme de S -schémas quasi-projectifs $(\mathcal{G}, \mathcal{J})$ vers $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ est la donnée d'un foncteur $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{I}$ et d'une transformation naturelle $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \circ \alpha$. En d'autres termes, un 1-morphisme de DiaSch/S est une face dans la 2-catégorie des catégories :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \text{Sch}/S \\ \alpha \downarrow & f \swarrow & \nearrow \mathcal{F} \\ \mathcal{I} & & \end{array}$$

- Supposons donnés deux 1-morphismes (f, α) et (f', α') entre les diagrammes de S -schémas $(\mathcal{G}, \mathcal{J})$ et $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$. Un 2-morphisme dans DiaSch/S de (f, α) vers

(f', α') est la donnée d'une transformation naturelle $t : \alpha \longrightarrow \alpha'$ telle que le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{G} \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \mathcal{F} \circ \alpha & \xrightarrow{t} & \mathcal{F} \circ \alpha' \end{array}$$

soit commutatif.

La 2-catégorie DiaSch/S ainsi définie est une 2-catégorie stricte.

Remarque 2.4.5. — Il va sans dire qu'on peut définir de la même façon la 2-catégorie stricte $\text{Dia}\mathcal{C}$ des diagrammes en objets de \mathcal{C} pour toute catégorie \mathcal{C} . On peut ainsi parler des diagrammes de schémas pas forcément de type fini sur une base.

Remarque 2.4.6. — Il est possible de définir une autre variante de la 2-catégorie de diagrammes de schémas ayant pour objets les mêmes couples $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ mais pour 1-morphismes les faces :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J} & & \\ \alpha \downarrow & \nearrow f & \searrow \mathcal{G} \\ \mathcal{J} & & \text{Sch}/S \end{array}$$

Cette 2-catégorie est simplement la 2-catégorie $\text{Dia}(\text{Sch}/S)^{\text{op}}$ dans la notation de la remarque précédente, avec $(\text{Sch}/S)^{\text{op}}$ la catégorie opposée à Sch/S . Il est probable que cette deuxième catégorie de « diagrammes de S -schémas » doit jouer un rôle dans une définition complète et autoduale de la notion de dérivateurs algébriques. L'auteur avoue ne pas avoir trop réfléchi à la question, étant donné que son objectif est d'avoir une définition fonctionnelle, suffisante pour développer le formalisme des cycles proches.

Remarque 2.4.7

1- Supposons donnés un diagramme de S -schémas quasi-projectifs $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ et un foncteur $p : \mathcal{J}' \longrightarrow \mathcal{J}$. On obtient un deuxième diagramme de S -schémas en prenant la composée $\mathcal{F} \circ p$. On a même un morphisme évident $p = (\text{id}, p) : (\mathcal{F} \circ p, \mathcal{J}') \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$.

2- Tout 1-morphisme $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$ de DiaSch/S se factorise de la manière suivante :

$$(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \xrightarrow{f} (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{F}, \mathcal{J})$$

avec f un morphisme de \mathcal{J} -diagramme de S -schémas. On dira que f est la partie géométrique et α la partie catégorique. Cette factorisation est fonctorielle pour les 2-morphismes de DiaSch/S . Ces derniers agissent par l'identité sur la partie géométrique.

Remarque 2.4.8. — Si X est un S -schéma quasi-projectif et \mathcal{J} une catégorie de \mathbf{Dia} , on note (X, \mathcal{J}) le diagramme de S -schémas défini par le foncteur constant de valeur X .

Le lemme suivant est trivial :

Lemme 2.4.9. — La catégorie sous-jacente à la 2-catégorie \mathbf{DiaSch}/S admet des coproduits finis. Si $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ et $(\mathcal{G}, \mathcal{J})$ sont deux diagrammes de S -schémas quasi-projectifs, leur coproduit $(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \coprod (\mathcal{G}, \mathcal{J})$ est représenté par $(\mathcal{F} \coprod \mathcal{G}, \mathcal{J} \coprod \mathcal{J})$.

On a également :

Lemme 2.4.10. — La catégorie sous-jacente à la 2-catégorie \mathbf{DiaSch}/S admet des produits fibrés finis.

Démonstration. — Considérons un diagramme dans \mathbf{DiaSch}/S :

$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{G}_2, \mathcal{J}_2) & \\ & \downarrow (f_2, \alpha_2) & \\ (\mathcal{G}_1, \mathcal{J}_1) & \xrightarrow{(f_1, \alpha_1)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

ainsi qu'un quatrième objet $(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. On se donne deux flèches (g_1, β_1) et (g_2, β_2) rendant commutatif le carré :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}, \mathcal{K}) & \xrightarrow{(g_2, \beta_2)} & (\mathcal{G}_2, \mathcal{J}_2) \\ (g_1, \beta_1) \downarrow & & \downarrow (f_2, \alpha_2) \\ (\mathcal{G}_1, \mathcal{J}_1) & \xrightarrow{(f_1, \alpha_1)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

Le couple de foncteurs (β_1, β_2) est équivalent à un foncteur :

$$\beta : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{J}_1 \times_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_2$$

Notons \mathcal{J} le produit fibré $\mathcal{J}_1 \times_{\mathcal{J}} \mathcal{J}_2$, p_i la projection de \mathcal{J} sur \mathcal{J}_i et α le morphisme évident de \mathcal{J} vers \mathcal{J} . Le couple $((g_1, \beta_1), (g_2, \beta_2))$ est équivalent au couple de morphismes $((g_1, \beta), (g_2, \beta))$:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}, \mathcal{K}) & \xrightarrow{(g_2, \beta)} & (\mathcal{G}_2 \circ p_2, \mathcal{J}) \\ (g_1, \beta) \downarrow & & \downarrow (f_2, \text{id}) \\ (\mathcal{G}_1 \circ p_1, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(f_1, \text{id})} & (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) \end{array}$$

Si \mathcal{G} désigne le produit fibré des \mathcal{J} -diagrammes de S -schémas quasi-projectifs $(\mathcal{G}_1 \circ p_1) \times_{\mathcal{F} \circ p} (\mathcal{G}_2 \circ p_2)$, on voit facilement que le couple (g_1, g_2) est équivalent à un morphisme de diagrammes de S -schémas :

$$(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \xrightarrow{(g, \beta)} (\mathcal{G}, \mathcal{J})$$

Ceci prouve que $(\mathcal{G}, \mathcal{J})$ représente la limite du diagramme considéré. \square

Définition 2.4.11. — Soit $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$ un 1-morphisme de DiaSch/S .

1- On dit que (f, α) est cartésien lorsque α est une équivalence et pour toute flèche $j' \rightarrow j$ de \mathcal{J} le carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(j') & \longrightarrow & \mathcal{G}(j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(\alpha(j')) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\alpha(j)) \end{array}$$

est cartésien.

2- Si (P) est une propriété des morphismes de S -schémas quasi-projectifs, on dira que (f, α) est (P) argument par argument si pour tout objet j de \mathcal{J} , le morphisme de S -schémas quasi-projectifs $\mathcal{G}(j) \longrightarrow \mathcal{F}(\alpha(j))$ est (P) .

2.4.2. Pré-dérivateurs et dérivateurs algébriques. — On fait la définition suivante :

Définition 2.4.12. — Soit \mathfrak{D} une 2-catégorie stricte. On appelle pré-dérivateur algébrique à valeurs dans \mathfrak{D} un 2-foncteur (non forcément stricte) \mathbb{D} de la 2-catégorie DiaSch/S vers \mathfrak{D} , 1-contravariant et 2-contravariant. En termes explicites, un pré-dérivateur \mathbb{D} est l'ensemble des données suivantes :

- À un diagramme de S -schémas $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$, un objet $\mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ de \mathfrak{D} .
- À un 1-morphisme de diagrammes de S -schémas $(f, \alpha) : (\mathcal{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow (\mathcal{G}, \mathcal{J})$, un 1-morphisme $(f, \alpha)^* : \mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{G}, \mathcal{J})$ dans \mathfrak{D} .
- À un 2-morphisme de diagrammes de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} & (f, \alpha) & \\ & \curvearrowright & \\ (\mathcal{F}, \mathcal{I}) & \Downarrow t & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ & \curvearrowleft & \\ & (f', \alpha') & \end{array}$$

un 2-morphisme dans \mathfrak{D} :

$$\begin{array}{ccc} & (f, \alpha)^* & \\ & \curvearrowleft & \\ \mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) & \Uparrow t^* & \mathbb{D}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ & \curvearrowright & \\ & (f', \alpha')^* & \end{array}$$

- À une suite composable de 1-morphismes de diagrammes de S -schémas :

$$(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \xrightarrow{(f, \alpha)} (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \xrightarrow{(g, \beta)} (\mathcal{H}, \mathcal{K})$$

un 2-isomorphisme de connexion $c((f, \alpha), (g, \beta)) : (f, \alpha)^* \circ (g, \beta)^* \xrightarrow{\sim} (g \circ f, \beta \circ \alpha)^*$ dans \mathfrak{D} .

Ces données doivent vérifier les propriétés 1-opposées et 2-opposées de la définition 2.1.32.

Soit $\mathbb{D} : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ un pré-dérivateur algébrique à valeurs dans la 2-catégorie des catégories triangulées. On introduit maintenant un certain nombre d'axiomes que peut vérifier un tel pré-dérivateur algébrique :

DerAlg 0 : soit $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ un diagramme de S -schémas quasi-projectifs. Si \mathcal{J} est une catégorie discrète, alors les 1-morphismes $i : (\mathcal{F}(i), \mathbf{e}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$ pour $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ induisent une équivalence de catégories :

$$\mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \xrightarrow{\prod_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} i^*} \prod_{i \in \text{Ob}(\mathcal{J})} \mathbb{D}(\mathcal{F}(i))$$

DerAlg 1 : soient $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ un diagramme de S -schémas quasi-projectifs et $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ un foncteur essentiellement surjectif. Le foncteur triangulé :

$$\alpha^* : \mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J})$$

est conservatif.

DerAlg 2d : pour tout 1-morphisme $(f, \alpha) : (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{G}, \mathcal{J})$ de DiaSch/S , le foncteur $(f, \alpha)^*$ admet un adjoint à droite $(f, \alpha)_*$.

DerAlg 2g : pour tout 1-morphisme *lisse argument par argument* $(f, \alpha) : (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{G}, \mathcal{J})$ de DiaSch/S , le foncteur $(f, \alpha)^*$ admet un adjoint à gauche $(f, \alpha)_\#$.

Soient $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de \mathcal{J} -diagrammes de S -schémas quasi-projectifs et $\alpha : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ un foncteur dans Dia . On a un carré :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G} \circ \alpha, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f|_{\mathcal{J}} \downarrow & & \downarrow f \\ (\mathcal{F} \circ \alpha, \mathcal{J}) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

commutatif (et même cartésien) dans DiaSch/S .

DerAlg 3d : le 2-morphisme d'échange $\alpha^* f_* \longrightarrow (f|_{\mathcal{J}})_* \circ \alpha^*$ associé au carré commutatif ci-dessus, est un 2-isomorphisme.

DerAlg 3g : supposons que f est *cartésien* et lisse argument par argument. Alors le 2-morphisme d'échange $(f|_{\mathcal{J}})_\# \circ \alpha^* \longrightarrow \alpha^* f_\#$ est un 2-isomorphisme.

DerAlg 4 : pour tout S -schéma quasi-projectif X le 2-foncteur :

$$\mathbb{D}(X, -) : \text{Dia} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

qui à une catégorie \mathcal{J} de Dia associe $\mathbb{D}(X, \mathcal{J})$ est un dérivateur triangulé au sens de la définition 2.1.34.

DerAlg 5 : le 2-foncteur :

$$\mathbb{D}(-, \mathbf{e}) : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

qui à un S -schéma quasi-projectif X associe $\mathbb{D}(X, \mathbf{e})$ est un 2-foncteur homotopique stable.

Définition 2.4.13. — *Le pré-dérivateur algébrique \mathbb{D} est un dérivateur algébrique homotopique et stable lorsque les axiomes **DerAlg 0** à **DerAlg 5** sont satisfaits.*

Remarque 2.4.14. — On aurait pu imposer à la place de l'axiome **DerAlg 4** l'axiome plus fort :

DerAlg 4' : pour tout diagramme de S -schémas quasi-projectifs $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$, le 2-foncteur :

$$\mathbb{D}_{(\mathcal{F}, \mathcal{J})}(-) : \text{Dia} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

qui à une catégorie \mathcal{J} de **Dia** associe $\mathbb{D}(\mathcal{F} \circ pr_1, \mathcal{J} \times \mathcal{J})$ est un dérivateur triangulé au sens de la définition 2.1.34.

Il est possible que l'axiome **DerAlg 4'** découle des axiomes **DerAlg 0** à **DerAlg 5**. C'est le cas si l'on avait adopté la définition de [Mal01b] d'un dérivateur triangulé. Le problème qu'on pourrait rencontrer en essayant de déduire l'axiome **DerAlg 4'** vient du fait que la structure de catégories triangulées sur les $\mathbb{D}(\mathcal{F} \circ pr_1, \mathcal{J} \times \mathcal{J})$ peut différer de la structure déduite des axiomes de dérivateurs triangulés.

Remarque 2.4.15. — Le lecteur attentif a sûrement remarqué que dans l'axiome **DerAlg 3d** on ne met aucune hypothèse sur le 1-morphisme (f, α) alors que dans l'axiome **DerAlg 3g** on suppose en plus de l'hypothèse nécessaire de lissité que (f, α) est cartésien. Pour expliquer cette asymétrie, il faut considérer le dérivateur algébrique homotopique et stable \mathbb{SH} qui sera construit au quatrième chapitre. Soit U un S -schéma lisse et considérons les deux 1-diagrammes de schémas :

$$\mathcal{F} = (U \xrightarrow{p} S) \quad \text{et} \quad S \xlongequal{\quad} S$$

ainsi que le morphisme p de 1-diagrammes de schémas induit par le carré commutatif (mais non cartésien en général) :

$$\begin{array}{ccc} (U & \longrightarrow & S) \\ \downarrow & & \parallel \\ (S & \xlongequal{\quad} & S) \end{array}$$

L'objet unité $\mathbf{1}_{\mathcal{F}}$ de $\mathbb{SH}(\mathcal{F}, \mathbf{1})$ est représenté par l'objet $(S \xlongequal{\quad} S, 1)$ de \mathbf{Sm}/\mathcal{F} . Il vient que $p_{\#}\mathbf{1}_{\mathcal{F}}$ est l'objet unité de $\mathbb{SH}(S, \mathbf{1})$. Ainsi le morphisme :

$$p_{\#}\mathbf{1}_U \longrightarrow 0^*p_{\#}\mathbf{1}_{\mathcal{F}}$$

est isomorphe à la classe du morphisme $p : U \longrightarrow S$ qui est non inversible en général.

Remarque 2.4.16. — Au lieu d’invoquer les définitions d’un dérivateur triangulé et d’un 2-foncteur homotopique stable dans les axiomes **DerAlg 4** et **DerAlg 5** on aurait pu généraliser les propriétés correspondantes au cadre des pré-dérivateurs algébriques. À titre d’exemple, on expliquera un axiome qui généralise une partie de l’axiome **DerAlg 4** et qui ne découle pas *a priori* de notre définition :

DerAlg 4’g : supposons donné un 1-morphisme $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{I})$ de DiaSch/S et $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$. On construit à partir de la face carrée de DiaSch/S :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}/i, \mathcal{J}/i) & \xrightarrow{(\text{id}, u_i)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ (f/i) \downarrow & \swarrow r & \downarrow (f, \alpha) \\ \mathcal{F}(i) & \xrightarrow{(\text{id}_{\mathcal{F}(i)}, i)} & (\mathcal{F}, \mathcal{I}) \end{array}$$

une face carrée de \mathfrak{TR} :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(\mathcal{G}/i, \mathcal{J}/i) & \xleftarrow{(\text{id}, u_i)^*} & \mathbb{D}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ (f/i)_* \downarrow & \swarrow & \downarrow (f, \alpha)_* \\ \mathbb{D}(\mathcal{F}(i)) & \xleftarrow{(\text{id}_{\mathcal{F}(i)}, i)^*} & \mathbb{D}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \end{array}$$

La face carrée ainsi obtenue est un 2-isomorphisme.

Remarquons par ailleurs que la construction duale avec les catégories $i \backslash \mathcal{J}$ ne fonctionne pas puisqu’on ne dispose pas d’un 1-morphisme évident de $(i \backslash \mathcal{G}, i \backslash \mathcal{J})$ vers $(\mathcal{F}(i), \mathbf{e})$. On peut envisager que l’axiome dual concerne l’autre 2-catégorie des diagrammes de S -schémas discutée dans la remarque 2.4.6.

2.4.3. Quelques conséquences faciles de la définition. — On se donne un dérivateur algébrique homotopique et stable :

$$\mathbb{H} : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{TR}$$

On regroupe dans cette section quelques conséquences élémentaires des axiomes **DerAlg 0** à **DerAlg 5**. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de **DerAlg 0** et **DerAlg 1**. Il sera constamment utilisé dans la suite :

Lemme 2.4.17. — Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{I})$ un diagramme de S -schémas quasi-projectifs. Alors la famille de foncteurs $i^* : \mathbb{H}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{H}(\mathcal{F}(i), \mathbf{e})$ indexée par l’ensemble $\text{Ob}(\mathcal{I})$ est conservative.

Démonstration. — On identifie l'ensemble $\text{Ob}(\mathcal{J})$ à la sous-catégorie discrète de \mathcal{J} ayant les mêmes objets que \mathcal{J} . On applique alors l'axiome **DerAlg 1** à l'inclusion essentiellement surjective $\text{Ob}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$. Il suffit alors d'appliquer **DerAlg 0** à la catégorie discrète $\text{Ob}(\mathcal{J})$ pour conclure. \square

Corollaire 2.4.18. — Soit $s : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une immersion fermée cartésienne de \mathcal{J} -diagrammes de S -schémas quasi-projectifs. On note $u : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}$ le \mathcal{J} -diagramme complémentaire argument par argument à s . Alors le couple (s^*, u^*) est conservatif.

Démonstration. — Soit A un objet de $\mathbb{H}(\mathcal{Y}, \mathcal{J})$ tué par s^* et u^* . Pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ on a :

$$s(i)^* i^* A \simeq i^* s^* A \simeq 0 \quad \text{et} \quad u(i)^* i^* A \simeq i^* u^* A \simeq 0$$

Mais le couple de foncteurs $(s(i)^*, u(i)^*)$ est conservatif puisque $(s(i), u(i))$ est une paire complémentaire d'immersions du S -schéma $\mathcal{Y}(i)$. Il vient que $i^*(A)$ est nul pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$. Par le lemme 2.4.17, A est forcément nul. \square

Corollaire 2.4.19. — Soit $u : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ une immersion argument par argument de \mathcal{J} -diagrammes de S -schémas quasi-projectifs. Le morphisme de counité $u^* u_* \longrightarrow 1$ est un 2-isomorphisme.

Démonstration. — En effet, pour $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} i^* u^* u_* & \xrightarrow{\sim} & u(i)^* i^* u_* \xrightarrow{Ex_*^*} u(i)^* u(i)_* i^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ i^* & \xlongequal{\quad} & i^* \end{array}$$

Le morphisme d'échange Ex_*^* ci-dessus est inversible par **DerAlg 3d**. De même le morphisme de counité de l'adjonction $(u(i)^*, u(i)_*)$ est inversible par le lemme 2.4.17. D'où le résultat. \square

On continue avec une amélioration de l'axiome **DerAlg 3g** :

Proposition 2.4.20. — On suppose donné un carré cartésien de diagrammes de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g', \beta)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

avec f un morphisme de \mathcal{J} -diagrammes, cartésien et lisse argument par argument. Le morphisme de changement de base $Ex_{\#}^* : f'_{\#} \circ (g', \beta)^* \longrightarrow (g, \beta)^* \circ f_{\#}$ est un 2-isomorphisme.

Démonstration. — On peut factoriser le carré cartésien de l'énoncé de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{g'} & (\mathcal{G} \circ \beta, \mathcal{J}') & \xrightarrow{\beta} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f' \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{g} & (\mathcal{F} \circ \beta, \mathcal{J}') & \xrightarrow{\beta} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

Par l'axiome **DerAlg 3g** le morphisme d'échange associé au carré de droite est inversible. Ceci nous ramène à traiter le cas⁽⁹⁾ où $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$. Par le lemme 2.4.17, il suffit de prouver que le morphisme d'échange devient inversible après application de i^* pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} i^* f'_{\#} g'^* & \xleftarrow{(1)} & f'(i)_{\#} i^* g'^* & \xleftarrow{\sim} & f'(i)_{\#} g'(i)^* i^* \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ i^* g^* f_{\#} & \xleftarrow{\sim} & g(i)^* i^* f_{\#} & \xleftarrow{(1)} & g(i)^* f(i)_{\#} i^* \end{array}$$

De plus, les deux 2-morphismes (1) sont inversibles par **DerAlg 3g**. Il suffit donc de montrer que le morphisme d'échange $f'(i)_{\#} g'(i)^* \longrightarrow g(i)^* f(i)_{\#}$ est inversible. Ceci est vrai par la définition des 2-foncteurs homotopiques stables. \square

Comme corollaire on a immédiatement l'extension suivante du théorème de changement de base par un morphisme lisse :

Corollaire 2.4.21. — *On suppose donné un carré cartésien de diagrammes de S -schémas :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}) & \xrightarrow{g'} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ (f', \alpha) \downarrow & & \downarrow (f, \alpha) \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}) & \xrightarrow{g} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

avec g un morphisme de \mathcal{J} -diagrammes, cartésien et lisse argument par argument. Le morphisme de changement de base $Ex_^* : g^*(f, \alpha)_* \longrightarrow (f', \alpha)_* g'^*$ est un 2-isomorphisme.*

Plus intéressant que tout ce qu'on a dit dans ce paragraphe est probablement le résultat suivant.

⁽⁹⁾Cette réduction n'est pas nécessaire mais simplifiera les notations.

Théorème 2.4.22. — On suppose donné un carré cartésien de diagrammes de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g', \beta)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

tel que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

- Le morphisme de \mathcal{J} -diagrammes f est projectif argument par argument.
- Le morphisme de diagrammes de S -schémas (g, β) est lisse argument par argument.

Alors le morphisme de changement de base $Ex_*^* : (g, \beta)^* f_* \longrightarrow f'_*(g', \beta)^*$ est un 2-isomorphisme.

Démonstration. — On peut factoriser le carré cartésien de l'énoncé de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{g'} & (\mathcal{G} \circ \beta, \mathcal{J}') & \xrightarrow{\beta} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f' \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{g} & (\mathcal{F} \circ \beta, \mathcal{J}') & \xrightarrow{\beta} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

Par l'axiome **DerAlg 3d** le morphisme d'échange associé au carré de droite est inversible. Ceci nous ramène à traiter le cas⁽¹⁰⁾ où $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$. Par le lemme 2.4.17, il suffit de prouver que le morphisme d'échange devient inversible après application de i^* pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} i^* g^* f_* & \xrightarrow{\sim} & g(i)^* i^* f_* & \xrightarrow{(1)} & g(i)^* f(i)_* i^* \\ \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \\ i^* f'_* g'^* & \xrightarrow{(1)} & f'(i)_* i^* g'^* & \xrightarrow{\sim} & f'(i)_* g'(i)^* i^* \end{array}$$

De plus les deux 2-morphismes (1) sont inversibles par **DerAlg 3d**. Il suffit donc de montrer que le morphisme d'échange $g(i)^* f(i)_* \longrightarrow f'(i)_* g'(i)^*$ est inversible. Ceci est vrai par le théorème de changement de base pour un morphisme projectif ou par un morphisme lisse suivant les cas. \square

Remarque 2.4.23. — On notera bien que dans le théorème précédent le morphisme f n'est pas supposé cartésien contrairement à la proposition 2.4.20. Ceci est conséquence de l'asymétrie dans les axiomes **DerAlg 3d** et **DerAlg 3g**.

⁽¹⁰⁾Cette réduction n'est pas nécessaire mais simplifiera les notations.

On obtient le corollaire suivant, qui complète la proposition 2.4.20 dans une direction partielle :

Corollaire 2.4.24. — *On suppose donné un carré cartésien de diagrammes de S -schémas :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}) & \xrightarrow{g'} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ (f', \alpha) \downarrow & & \downarrow (f, \alpha) \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}) & \xrightarrow{g} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

avec (f, α) un morphisme de diagrammes de schémas, lisse argument par argument. Le morphisme de changement de base $Ex_{\#}^* : f'_{\#} \circ (g', \beta)^* \longrightarrow (g, \beta)^* \circ f_{\#}$ est un 2-isomorphisme.

En reprenant mot pour mot la preuve de la proposition 1.4.9, on peut démontrer le résultat suivant :

Proposition 2.4.25. — *Soit $s : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une immersion fermée cartésienne de \mathcal{I} -diagrammes de S -schémas quasi-projectifs. Le foncteur s_* admet un adjoint à droite $s^!$. De plus si $u : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est l'inclusion du \mathcal{I} -diagramme complémentaire argument par argument à s , on a deux 2-triangles distingués canoniques :*

$$u_{\#} u^* \longrightarrow 1 \longrightarrow s_* s^* \longrightarrow u_{\#} u^* [+1]$$

et

$$s_* s^! \longrightarrow 1 \longrightarrow u_* u^* \longrightarrow s_* s^! [+1]$$

On a également l'analogue du corollaire 1.4.17 :

Lemme 2.4.26. — *On suppose donné un carré cartésien de diagrammes de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{Z}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g', \beta)} & (\mathcal{Z}, \mathcal{J}) \\ s' \downarrow & & \downarrow s \\ (\mathcal{Y}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (\mathcal{Y}, \mathcal{J}) \end{array}$$

avec s une immersion fermée cartésienne de \mathcal{I} -diagrammes de S -schémas quasi-projectifs et g un 1-morphisme de \mathbf{DiaSch}/S lisse argument par argument. Alors le morphisme de changement de base : $Ex^{*,!} : (g', \beta)^* s^! \longrightarrow s^! (g, \beta)^*$ est un 2-isomorphisme.

Démonstration. — On appelle u l'immersion ouverte de \mathcal{I} -diagrammes de S -schémas complémentaire à s et u' le pull-back de u par (g, β) . On utilise le fait qu'on

a un morphisme de 2-triangles distingués (comme dans l'énoncé de la proposition 1.4.16) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (g, \beta)^* s_* s^! & \longrightarrow & (g, \beta)^* & \longrightarrow & (g, \beta)^* u_* u^* & \longrightarrow & (g, \beta)^* s_* s^! [+1] \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow (1) & & \downarrow \\
 s'_* s'^! (g, \beta)^* & \longrightarrow & (g, \beta)^* & \longrightarrow & u'_* u'^* (g, \beta)^* & \longrightarrow & s'_* s'^! (g, \beta)^* [+1]
 \end{array}$$

Le 2-morphisme (1) est une composée de Ex_*^* et $Ex^{*,*}$. Il est donc inversible par le théorème 2.4.22. Il vient que le 2-morphisme $(g, \beta)^* s_* s^! \longrightarrow s'_* s'^! (g, \beta)^*$ est inversible. Mais ce 2-morphisme est la composée :

$$(g, \beta)^* s_* s^! \xrightarrow{Ex_*^*} s'_* (g', \beta)^* s^! \xrightarrow{Ex^{!,*}} s'_* s'^! (g, \beta)^*$$

Le premier 2-morphisme est inversible par le théorème 2.4.22. Il vient que le second est également inversible. Le résultat découle alors du fait que s'_* est pleinement fidèle (donc conservatif). \square

Proposition 2.4.27. — Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ un diagramme de S -schémas quasi-projectifs. On note p la projection de $(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_S \mathbb{A}_S^1$ sur le premier facteur et s la section nulle. Alors :

- Le morphisme d'unité $1 \longrightarrow p_* p^*$ est inversible.
- Le foncteur $p_{\#} s_*$ est une équivalence de catégories.

Démonstration. — Pour la première propriété, on montre que le morphisme d'unité de (p^*, p_*) devient un isomorphisme après application de i^* pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$. On utilise pour cela le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 i^* & \xlongequal{\quad} & i^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 i^* p_* p^* & \xrightarrow{\sim} p(i)_* i^* p^* & \xrightarrow{\sim} p(i)_* p(i)^* i^*
 \end{array}$$

Le résultat découle de l'axiome d'homotopie et du fait que $p(i)$ est la projection de la droite affine relative sur le S -schéma $\mathcal{F}(i)$.

On passe maintenant à la seconde assertion. On prouvera que $p_{\#} s_*$ est une équivalence en montrant que les morphismes d'unité et de counité de l'adjonction $(p_{\#} s_*, s^! p^*)$ sont inversibles. On procède par la même méthode en utilisant la conservation de la

famille de i^* pour $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$. Pour le morphisme d'unité, on utilise le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 i^* & \xlongequal{\quad\quad\quad} & & & i^* & & \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 i^* s^! s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! i^* s_* & \xlongequal{\quad\quad\quad} & s(i)^! i^* s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! s(i)_* i^* \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 i^* s^! p^* p_{\#} s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! i^* p^* p_{\#} s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! p(i)^* i^* p_{\#} s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! p(i)^* p(i)_{\#} i^* s_* \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & s(i)^! p(i)^* p(i)_{\#} i^* s_* & \xrightarrow{\sim} & s(i)^! p(i)^* p(i)_{\#} s(i)_* i^*
 \end{array}$$

et le fait que le morphisme d'unité de $(p(i)_{\#} s(i)_*, s(i)^! p(i)^*)$ est inversible par l'axiome de stabilité. Le morphisme de counité est traité par la même méthode. \square

Comme conséquence de ce qui précède, on a une amélioration de l'axiome **DerAlg 5** :

Théorème 2.4.28. — Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{J})$ un diagramme de S -schémas quasi-projectifs et $(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow (X, \mathbf{e})$ un 1-morphisme vers un S -schéma quasi-projectif X . Le 2-foncteur :

$$\mathbb{H}_{(\mathcal{F}, \mathcal{J})/X} : \text{Sch}/X \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

qui à un X -schéma Y associe la catégorie triangulée $\mathbb{H}((\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y)$ est un 2-foncteur homotopique stable.

Remarque 2.4.29. — On garde les hypothèses du théorème précédent. Supposons donné un morphisme de X -schémas quasi-projectifs :

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{g} & Y \\
 & \searrow f' & \downarrow f \\
 & & X
 \end{array}$$

On obtient par pull-back un 1-morphisme cartésien de \mathcal{J} -diagrammes de S -schémas :

$$g_{\mathcal{F}} : (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y' \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y$$

On a les quatre opérations $g_{\mathcal{F}}^*$, $g_{\mathcal{F}*}$, $g_{\mathcal{F}}^!$ et $g_{\mathcal{F}}^!$ entre les deux catégories triangulées $\mathbb{H}((\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y)$ et $\mathbb{H}((\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y')$. Dans le numéro suivant ce résultat sera généralisé et précisé.

2.4.4. Extension des résultats du premier chapitre. — Vu la remarque 2.4.29, il est naturel d'espérer que tout morphisme cartésien de diagrammes de S -schémas quasi-projectifs $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$ induit deux opérations :

$$(f, \alpha)_! : \mathbb{H}(\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{H}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \quad \text{et} \quad (f, \alpha)^! : \mathbb{H}(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{H}(\mathcal{G}, \mathcal{J})$$

et que ces foncteurs s'organisent naturellement en deux 2-foncteurs globalement adjoints :

$$\mathrm{Cart}\mathbb{H}_! : (\mathrm{DiaSch}/S)^{\mathrm{Cart}} \longrightarrow \mathfrak{IR} \quad \text{et} \quad \mathrm{Cart}\mathbb{H}^! : (\mathrm{DiaSch}/S)^{\mathrm{Cart}} \longrightarrow \mathfrak{IR}$$

où $(\mathrm{DiaSch}/S)^{\mathrm{Cart}}$ désigne la sous-2-catégorie 2-pleine de DiaSch/S ayant pour objets les diagrammes de S -schémas quasi-projectifs (vérifiant peut-être une condition technique) et pour 1-morphismes ceux qui sont cartésiens.

Dans cette sous-section on montre que la quasi-totalité de la construction entreprise dans le premier chapitre s'étend mot pour mot à cette nouvelle situation. Toutefois, à quelques rares endroits, des arguments nouveaux doivent être rajoutés. On précisera alors ces endroits et on décrit rapidement ces arguments. On commence d'abord par un petit paragraphe de géométrie algébrique au-dessus d'un diagramme de schémas.

2.4.4.1. La géométrie des \mathcal{S} -schémas. — Soient \mathcal{I} une petite catégorie et \mathcal{S} un \mathcal{I} -diagramme de schémas. On fait la définition suivante :

Définition 2.4.30. — On note $\mathcal{I}\text{-}\mathcal{SCH}/\mathcal{S}$ la catégorie définie par :

- Les objets de $\mathcal{I}\text{-}\mathcal{SCH}/\mathcal{S}$ sont les morphismes cartésiens de \mathcal{I} -diagrammes de schémas $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{S}$,
- Les flèches de $\mathcal{I}\text{-}\mathcal{SCH}/\mathcal{S}$ sont des triangles commutatifs de morphismes de \mathcal{I} -diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{f} & \mathcal{X} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{S} \end{array}$$

Les objets de cette catégorie seront simplement appelés des \mathcal{S} -schémas.

Remarque 2.4.31. — Si la catégorie \mathcal{I} admet un objet final o , la catégorie des \mathcal{S} -schémas est équivalente à la catégorie des $\mathcal{S}(o)$ -schémas.

Remarque 2.4.32. — La catégorie $\mathcal{I}\text{-}\mathcal{SCH}/\mathcal{S}$ admet des produits fibrés donnés par le produit fibré des \mathcal{I} -diagrammes de schémas. On dispose plus généralement d'un foncteur de changement de base :

$$\mathcal{I}\text{-}\mathcal{SCH}/\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{I}\text{-}\mathcal{SCH}/\mathcal{T}$$

pour tout 1-morphisme de diagrammes de schémas $(\mathcal{T}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ donné par le produit fibré des diagrammes de schémas.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la définition :

Lemme 2.4.33. — Un morphisme de \mathcal{S} -schémas est automatiquement un morphisme cartésien de \mathcal{I} -diagrammes de schémas.

Démonstration. — Ceci découle immédiatement du fait général suivant. Soit un diagramme commutatif dans une catégorie \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccc} C' & \longrightarrow & C \\ \downarrow & (2) & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & B \\ \downarrow & (1) & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & A \end{array}$$

On suppose que les carrés (1) et $(1) \circ (2)$ sont cartésiens. Alors le carré (2) est cartésien.

Pour la preuve de ce fait, on considère le morphisme évident : $C' \longrightarrow B' \times_B C$. Ce morphisme est isomorphe au morphisme évident : $C' \longrightarrow A' \times_A C$, puisque (1) est cartésien. Mais ce dernier est inversible puisque $(1) \circ (2)$ est cartésien. \square

Le but de ce paragraphe est de montrer que pour certaines questions, on peut penser aux \mathcal{S} -schémas comme à des S -schémas habituels. On étendra en particulier tous les résultats géométriques (sauf un⁽¹¹⁾ !) sur les S -schémas utilisés dans le chapitre 1 au cadre des \mathcal{S} -schémas. Il sera pratique de faire la convention suivante :

Définition 2.4.34

1- Soit (P) une propriété des S -schémas avec S un schéma de base. On dit qu'un \mathcal{S} -schéma \mathcal{X} est (P) si pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$, le $\mathcal{S}(i)$ -schéma $\mathcal{X}(i)$ est (P) .

2- Soit (P') une propriété des morphismes de S -schémas avec S un schéma de base. On dit qu'un morphisme $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ de \mathcal{S} -schémas est (P') si pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ le morphisme $\mathcal{Y}(i) \longrightarrow \mathcal{X}(i)$ de $\mathcal{S}(i)$ -schémas est (P') .

Remarque 2.4.35. — Supposons que la propriété (P) (resp. (P')) dans la définition précédente est invariante par changement du schéma de base *i.e.* si $T \longrightarrow S$ est un morphisme de schémas, le foncteur de changement de base $\mathcal{S}\mathcal{C}\mathcal{H}/S \longrightarrow \mathcal{S}\mathcal{C}\mathcal{H}/T$ conserve la propriété (P) (resp. (P')). Alors il en est de même des foncteurs : $\mathcal{J}\text{-}\mathcal{S}\mathcal{C}\mathcal{H}/\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{J}\text{-}\mathcal{S}\mathcal{C}\mathcal{H}/\mathcal{T}$ pour tout 1-morphisme de diagrammes de schémas $(\mathcal{T}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{S}, \mathcal{J})$.

Remarque 2.4.36. — Comme premier exemple, on note le fait important suivant. Étant donnée une immersion fermée de \mathcal{S} -schémas $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, on peut parler de l'immersion ouverte complémentaire de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} . En effet l'immersion fermée en question est cartésienne par le lemme 2.4.33. La même chose s'applique pour les immersions ouvertes.

⁽¹¹⁾Le résultat qui ne s'étend pas aux \mathcal{S} -schémas est le suivant. Un couple lisse (Y, X) au-dessus d'un schéma Z , est localement pour la topologie de Nisnevich isomorphe à un couple lisse trivial *i.e.* à $(\mathbb{A}_Z^m, \mathbb{A}_Z^n)$ avec $m \leq n$. Ce résultat est généralement faux pour les couples lisses de \mathcal{J} -diagrammes de schémas.

Remarque 2.4.37. — Soit $s : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une immersion de \mathcal{S} -schémas. On peut définir un \mathcal{I} -diagramme de schémas $\tilde{\mathcal{X}}$ en prenant pour $\tilde{\mathcal{X}}(i)$ l'adhérence schématique de l'immersion $s(i) : \mathcal{X}(i) \longrightarrow \mathcal{Y}(i)$ (où $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$). Il est clair que le morphisme de \mathcal{I} -diagrammes de schémas s se factorise par $\tilde{\mathcal{X}}$. On fera attention toutefois que $\tilde{\mathcal{X}}$ n'est pas en général un \mathcal{S} -schéma car le \mathcal{I} -morphisme évident $\tilde{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{S}$ n'est pas forcément cartésien. Le lecteur pourra facilement vérifier qu'on a jamais eu besoin de prendre l'adhérence d'une immersion tout au long du chapitre 1.

Étant donné un \mathcal{I} -diagramme de schémas \mathcal{X} , on notera \mathcal{X}_{Zar} le site défini de la manière suivante :

- Les objets de \mathcal{X}_{Zar} sont les couples (U, i) avec i un objet de \mathcal{I} et U un ouvert Zariski de $\mathcal{X}(i)$.
- Une flèche $(U', i') \rightarrow (U, i)$ est une flèche $a : i' \rightarrow i$ de \mathcal{I} telle que U' soit envoyé dans U par le morphisme $\mathcal{X}(a) : \mathcal{X}(i') \longrightarrow \mathcal{X}(i)$.
- La topologie de \mathcal{X}_{Zar} est engendrée par les familles $(\text{id}_i : (U_k, i) \rightarrow (U, i))_k$ où $(U_k)_k$ est un recouvrement Zariski de U .

Ainsi, un préfaisceau F sur \mathcal{X}_{Zar} est un faisceau si et seulement si pour tout objet i de \mathcal{I} la restriction $F(i)$ de F à $\mathcal{X}(i)_{\text{Zar}}$ est un faisceau.

Définition 2.4.38. — Soit \mathcal{X} un \mathcal{I} -diagramme de schémas. Le faisceau structural de \mathcal{X} , noté $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, est le faisceau sur \mathcal{X}_{Zar} qui à un couple (U, i) associe $\mathcal{O}_{\mathcal{X}(i)}(U)$.

On adoptera la notion suivant de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules quasi-cohérents :

Définition 2.4.39. — Soient \mathcal{X} un diagramme de \mathcal{I} -schémas et \mathcal{M} un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module.

1- On dit que \mathcal{M} est quasi-cohérent (resp. cohérent, localement libre, etc) argument par argument si pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$, la restriction $\mathcal{M}(i)$ de \mathcal{M} à $\mathcal{X}(i)$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}(i)}$ -module quasi-cohérent (resp. cohérent, localement libre, etc).

2- On dit que \mathcal{M} est quasi-cohérent (resp. cohérent) s'il est quasi-cohérent (resp. cohérent) argument par argument et si pour toute flèche $a : i' \rightarrow i$ de \mathcal{I} , le morphisme évident $\mathcal{X}(a)^* \mathcal{M}(i) \longrightarrow \mathcal{M}(i')$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}(i')}$ -modules.

Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est lui-même un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent. On fera attention que la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules quasi-cohérents n'est pas une catégorie abélienne en général. En effet, lorsque les morphismes $\mathcal{X}(i') \longrightarrow \mathcal{X}(i)$ dans le \mathcal{I} -diagramme ne sont pas tous plats, la deuxième condition de la définition ci-dessus n'est pas stable par passage au noyau d'un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules. Pour les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules localement libres arguments par arguments la situation est meilleure :

Lemme 2.4.40. — Soit \mathcal{X} un \mathcal{I} -diagramme de schémas. On se donne une suite exacte courte de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules localement libres arguments par arguments :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

On suppose que deux des trois $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules \mathcal{L} , \mathcal{M} et \mathcal{N} sont quasi-cohérents (resp. cohérents). Alors il en est de même du troisième.

Démonstration. — Les trois modules en question sont localement libres. Il vient que pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}(i)}$ -modules $\mathcal{L}(i)$, $\mathcal{M}(i)$ et $\mathcal{N}(i)$ sont quasi-cohérents (resp. cohérents). Il s'agit donc de vérifier la seconde propriété de la définition 2.4.39. Pour toute flèche $a : i' \rightarrow i$ de \mathcal{J} on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{X}(a)^* \mathcal{N}(i) & \longrightarrow & \mathcal{X}(a)^* \mathcal{M}(i) & \longrightarrow & \mathcal{X}(a)^* \mathcal{L}(i) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}(i') & \longrightarrow & \mathcal{M}(i') & \longrightarrow & \mathcal{L}(i') \longrightarrow 0 \end{array}$$

Les lignes de ce diagramme sont exactes puisque les modules $\mathcal{L}(i)$, $\mathcal{M}(i)$ et $\mathcal{N}(i)$ sont localement libres. Le résultat découle alors du lemme des cinq. \square

Remarque 2.4.41

1- Étant donné un \mathcal{J} -diagramme de schémas \mathcal{X} et un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module \mathcal{M} cohérent argument par argument on peut définir un \mathcal{J} -diagramme de schémas $\mathbb{V}(\mathcal{M})$ en prenant $\mathbb{V}(\mathcal{M})(i) = \mathbb{V}(\mathcal{M}(i))$ pour tout objet i de \mathcal{J} . On a alors une projection évidente : $\mathbb{V}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{X}$. On vérifie alors facilement que $\mathbb{V}(\mathcal{M})$ est un \mathcal{X} -schéma au sens de la définition 2.4.30 si et seulement si \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent. Le \mathcal{X} -schéma ainsi obtenu est affine et de type fini.

2- En ce qui concerne le projectivisé de \mathcal{M} , la situation est légèrement plus délicate. En effet, le diagramme de schémas $\mathbb{P}(\mathcal{M})$ vérifiant $\mathbb{P}(\mathcal{M})(i) = \mathbb{P}(\mathcal{M}(i))$ n'existe que lorsque \mathcal{M} est cohérent. Dans ce cas $\mathbb{P}(\mathcal{M})$ est un \mathcal{X} -schéma projectif.

Les deux modules qui jouent un rôle important dans la construction des 2-foncteurs H_1 et H^1 du chapitre 1, sont :

- Le faisceau normal \mathcal{N}_s associé à une immersion fermée s entre Z -schémas lisses (avec Z un certain S -schéma quasi-projectif),
- Le faisceau des différentielles relatives Ω_f associé à un morphisme lisse de S -schémas quasi-projectifs f .

Définition 2.4.42

1- Soit $s : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une immersion fermée argument par argument entre \mathcal{J} -diagrammes de schémas. On définit un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module \mathcal{N}_s quasi-cohérent argument par argument en prenant $\mathcal{N}_s = \mathcal{I}_s / \mathcal{I}_s^2$ où \mathcal{I}_s est l'idéal quasi-cohérent argument par argument de l'immersion s . On a alors les identifications $\mathcal{N}_s(i) = \mathcal{N}_{s(i)}$ pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{J})$. On dira que \mathcal{N}_s est le faisceau normal de l'immersion s .

2- Soit $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ un morphisme séparé argument par argument de \mathcal{I} -diagrammes de schémas. On définit un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -module Ω_f quasi-cohérent argument par argument en posant $\Omega_f = \mathcal{N}_{\Delta}$ où $\Delta : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Y}$ est l'immersion fermée diagonale. On a alors les identifications $\Omega_f(i) = \Omega_{f(i)}$ pour tout $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$. On dira que Ω_f est le faisceau des différentielles relatives.

Les modules \mathcal{N}_s et Ω_f ne sont pas en général cohérents (ni quasi-cohérents) même lorsque s et f sont cartésiens et de présentation finie. Heureusement, dans les cas considérés au chapitre 1, la situation est meilleure :

Lemme 2.4.43. — Soit \mathcal{S} un \mathcal{I} -diagramme de schémas.

1- On suppose donné un triangle commutatif de \mathcal{S} -schémas :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{s} & \mathcal{X} \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & \mathcal{Z} \end{array}$$

avec s une immersion fermée et f et g lisses. Alors le $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -module \mathcal{N}_s est localement libre et cohérent.

2- On suppose donné un morphisme lisse $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ de \mathcal{S} -schémas. Alors le $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ -module Ω_f est localement libre et cohérent.

On termine ce paragraphe par une discussion sur les éclatements. Étant donné un carré cartésien de schémas :

$$\begin{array}{ccc} Z_2 & \longrightarrow & Z_1 \\ s_2 \downarrow & & \downarrow s_1 \\ X_2 & \longrightarrow & X_1 \end{array}$$

avec s_1 et s_2 des immersions fermées, on peut déduire un morphisme $E_{Z_2}(X_2) \longrightarrow E_{Z_1}(X_1)$ entre les éclatés. Ceci permet alors de parler de l'éclaté $E_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X})$ d'un sous- \mathcal{S} -schéma fermé \mathcal{Z} d'un \mathcal{S} -schéma \mathcal{X} . En général, le \mathcal{I} -diagramme de schémas $E_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X})$ n'est pas un \mathcal{S} -schéma étant donné que le morphisme $E_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{X}$ n'est pas toujours cartésien. On a toutefois :

Lemme 2.4.44. — Soit \mathcal{S} un \mathcal{I} -diagramme de schémas. On suppose donné un triangle commutatif de \mathcal{S} -schémas :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{s} & \mathcal{X} \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & \mathcal{T} \end{array}$$

avec s une immersion fermée et f et g lisses. Alors le \mathcal{I} -diagramme de schémas $E_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ est un \mathcal{S} -schéma.

Ce lemme permet alors d'étendre la déformation au cône normal utilisée au numéro 1.6, dans le contexte des \mathcal{S} -schémas.

2.4.4.2. Les quatre opérations pour les \mathcal{S} -morphisms. — On se donne un \mathcal{I} -diagramme de S -schémas quasi-projectifs \mathcal{S} . On note $\mathcal{I}\text{-Sch}/\mathcal{S}$ la catégorie des \mathcal{S} -schémas quasi-projectifs (arguments par arguments). On appellera $\mathcal{I}\text{-Sch}'/\mathcal{S}$ la sous-catégorie formée des \mathcal{S} -schémas admettant une immersion dans un $\mathbb{P}(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} un $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module localement libre et cohérent. Les objets de cette catégorie seront appelés les \mathcal{S} -schémas fortement quasi-projectifs.

Dans ce paragraphe, on va survoler la construction du 2-foncteur $H^! : \mathcal{S}\text{-Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ dans le cadre des \mathcal{S} -schémas en expliquant comment on peut la modifier pour obtenir un 2-foncteur :

$$\text{Cart} \mathbb{H}_{\mathcal{S}}^! : \mathcal{I}\text{-Sch}'/\mathcal{S} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

Comme on l'a déjà affirmé, la quasi-totalité de la construction s'étend mot à mot aux \mathcal{S} -schémas. Bien que le résultat final concerne les morphismes de \mathcal{S} -schémas fortement quasi-projectifs, une grande partie reste valable pour les morphismes de S -schémas quasi-projectifs voire pour les morphismes de diagrammes de S -schémas. Ainsi les sections 1.4 et 1.5 seront survolées dans un cadre un peu plus général que celui des \mathcal{S} -schémas.

Pour simplifier, le lecteur pourra négliger les 2-morphismes des 2-catégories DiaSch/S . Ainsi dans la suite de ce paragraphe, DiaSch/S désignera la catégorie sous-jacente à la 2-catégorie des diagrammes de S -schémas quasi-projectifs. On considérera les sous-catégories suivantes de DiaSch/S :

- $(\text{DiaSch}/S)^{\text{Cart}}$ ayant les même objets que DiaSch/S et pour morphismes ceux qui sont de la forme :

$$f : (\mathcal{Y}, \mathcal{E}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{E})$$

avec f un morphisme cartésien de \mathcal{E} -schémas.

- $(\text{DiaSch}/S)^{\text{LissCart}}$: la même chose que la première avec en plus f lisse,
- $(\text{DiaSch}/S)^{\text{ImmCart}}$: la même chose que la première avec en plus f une immersion fermée,
- $(\text{DiaSch}/S)^{\text{Cart}'}$: la même chose que la première avec en plus le \mathcal{X} -schéma \mathcal{Y} fortement quasi-projectif.

On utilisera le dictionnaire suivant (que le lecteur pourra facilement compléter si besoin) qui permet le passage du cas des S -schémas vers celui des diagramme de S -schémas.

$H^* : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$	$\mathbb{H}^* : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$
$H_* : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$	$\mathbb{H}_* : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$
${}^{\text{Liss}}H_{\#} : (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$	${}^{\text{LissCart}}\mathbb{H}_{\#} : (\text{DiaSch}/S)^{\text{LissCart}} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$
${}^{\text{Liss}}H^* : (\text{Sch}/S)^{\text{Liss}} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$	${}^{\text{LissCart}}\mathbb{H}^* : (\text{DiaSch}/S)^{\text{LissCart}} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$
${}^{\text{Imm}}H_* : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$	${}^{\text{ImmCart}}\mathbb{H}_* : (\text{DiaSch}/S)^{\text{ImmCart}} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$
${}^{\text{Imm}}H^! : (\text{Sch}/S)^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$	${}^{\text{ImmCart}}\mathbb{H}^! : (\text{DiaSch}/S)^{\text{ImmCart}} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$
$H_i : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$	${}^{\text{Cart}}\mathbb{H}_i : (\text{DiaSch}/S)^{\text{Cart}'} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$
$H^! : \text{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$	${}^{\text{Cart}}\mathbb{H}^! : (\text{DiaSch}/S)^{\text{Cart}'} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$
\mathcal{O}_X -module localement libre de type fini $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{L} \dots$ etc	$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module localement libre et cohérents de type fini $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{L} \dots$ etc

1- La section 1.4. — Comme on l'a déjà remarqué dans le numéro précédent, le numéro 1.4.4 se transcrit mot à mot dans le cadre des immersions fermées cartésiennes des diagrammes de S -schémas quasi-projectifs. On obtient ainsi le 2-foncteur :

$$\text{ImmCart}\mathbb{H}^! : (\mathcal{J}\text{-Sch}/\mathcal{S})^{\text{Imm}} \longrightarrow \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

Le numéro 1.4.5 s'étend également mot à mot au cas des diagrammes de S -schémas. On obtient un foncteur croisé :

$$(\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*, {}^{\text{LissCart}}\mathbb{H}_{\#}, {}^{\text{LissCart}}\mathbb{H}^*)$$

Pour la classe des carrés cartésiens.

Le numéro 1.4.6 s'étend également mot à mot pour fournir un foncteur croisé :

$$(\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*, \text{ImmCart}\mathbb{H}_*, \text{ImmCart}\mathbb{H}^!)$$

Dans le numéro 1.4.7, on établit la proposition 1.4.19 avec à la place de f un morphisme arbitraire de diagramme de S -schémas et à la place de i et j une des immersions cartésiennes complémentaires. La proposition 1.4.20 sera seulement valable pour s une immersion fermée cartésienne.

2- La section 1.5. — Les définitions ne changent pas et seront faites avec s et p tous les deux cartésiens. Dans la proposition 1.5.2 et le lemme 1.5.3 on prendra à la place de f un morphisme de diagramme de schémas (f, α) . La conclusion du lemme 1.5.4 est alors valable pour (f, α) lisse argument par argument.

Pour prouver le théorème 1.5.7, on se ramène immédiatement au cas des S -schémas en utilisant le lemme 2.4.17 et en invoquant pour i un objet de la catégorie d'indice, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 i^* & \xlongequal{\hspace{10em}} & i^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 i^* \text{Th}^{-1}(s, p) \text{Th}(s, p) & \longrightarrow & \text{Th}^{-1}(s(i), p(i)) i^* \text{Th}(s, p) \longrightarrow \text{Th}^{-1}(s(i), p(i)) \text{Th}(s(i), p(i)) i^*
 \end{array}$$

ainsi que son analogue pour le morphisme de cointé.

Pour le reste de la section on se place dans la catégorie des \mathcal{S} -schémas $\mathcal{J}\text{-Sch}/\mathcal{S}$. Les résultats de la section s'étendent mot pour mot aux morphismes de \mathcal{S} -schémas.

Notons toutefois que l'isomorphisme de commutation avec les équivalences de Thom peut être défini pour des changements de base par des morphismes arbitraires de diagrammes de S -schémas. On obtient en fin de compte le foncteur croisé :

$$(\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*, \text{LissCart} \mathbb{H}_!, \text{LissCart} \mathbb{H}^!)$$

3- *La section 1.6.* — Dans cette section on se place dans la catégorie des \mathcal{S} -schémas. Le début de la section jusqu'au lemme 1.6.14 exclu s'étend sans aucune difficulté aux \mathcal{S} -schémas. Notons tout de même que la proposition 1.6.7 reste valable pour les changements de base par des morphismes généraux (a, α) de diagrammes de S -schémas.

La seconde partie du lemme 1.6.14 s'étend sans difficulté aux cadre des \mathcal{S} -schémas. Pour la première assertion, il faudra se ramener au cas des S -schémas.

Pour chaque objet k de la catégorie d'indices \mathcal{J} , on prend la section :

$$\sigma_{k^*A} : s(k)^! f(k)^* (k^* A) \longrightarrow i(k)^* j(k)_* q(k)^* s(k)^! f(k)^* (k^* A)$$

faisant commuter le carré :

$$\begin{array}{ccc} k^* s^! f^*(A) & \longrightarrow & k^* i^* j_* s^! f^*(A) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ s(k)^! f(k)^* (k^* A) & \longrightarrow & i(k)^* j(k)_* q(k)^* s(k)^! f(k)^* (k^* A) \end{array}$$

Il vient alors qu'on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k^* s^! f^*(A) & \longrightarrow & k^* s_0^! f_0^*(A) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ s(k)^! f(k)^* (k^* A) & \longrightarrow & s_0(k)^! f_0(k)^* (k^* A) \end{array}$$

Ceci nous ramène immédiatement aux cas des S -schémas.

Ensuite, le raisonnement se transcrit mot pour mot au cadre des \mathcal{S} -schémas jusqu'à la fin de la construction du 2-foncteur $\mathbb{H}^!$ en prenant uniquement des \mathcal{S} -schémas fortement quasi-projectifs pour pouvoir appliquer le critère de prolongement du théorème 1.3.1. Notons que la proposition 6.19 reste valable pour les changements de base par des morphismes généraux de diagrammes de S -schémas. Ceci permet permet alors de définir les morphismes d'échange $Ex^{*,!}$ pour des carrés cartésiens de DiaSch/S :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g', \beta)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

avec f un morphisme cartésien et fortement quasi-projectif de \mathcal{J} -diagrammes de schémas. On obtient finalement un foncteur croisé :

$$(\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*, \text{Cart}' \mathbb{H}_!, \text{Cart}' \mathbb{H}^!)$$

Remarque 2.4.45. — En lisant le bref survol qu'on vient de faire, on remarque le fait suivant. Lorsqu'on passe des \mathcal{S} -schémas aux diagrammes de S -schémas les seuls étapes de la construction où un changement est nécessaire sont :

1. Le théorème 1.5.7 affirmant que les 1-morphismes $\text{Th}(s, p)$ et $\text{Th}^{-1}(s, p)$ étaient des équivalences inverses l'une de l'autre,
2. Le lemme 1.6.14 et plus précisément la partie affirmant que τ_A est inversible.

La raison pour laquelle l'argument initial n'est pas suffisant est directement lié au fait qu'il est impossible en général de trouver des recouvrements Zariski ou Nisnevich de \mathcal{X} par des \mathcal{S} -schémas qui soient suffisamment fins. Ainsi, tous les arguments qui nécessitent de trivialisier des \mathcal{X} -modules localement libres, ou des couples lisses ne sont plus valables tels quels. Nous avons contourné cette difficulté en utilisant la conservation de la famille des foncteurs i^* pour i un objet de la catégorie d'indice.

Notons le résultat suivant :

Proposition 2.4.46. — *Soit un carré cartésien de diagrammes de S -schémas quasi-projectifs :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g', \beta)} & (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ (\mathcal{F}', \mathcal{J}') & \xrightarrow{(g, \beta)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \end{array}$$

avec f un morphisme cartésien, fortement projectif et (g, β) lisse argument par argument. Le 2-morphisme d'échange :

$$Ex_{\#, *}: (g, \beta)_{\#} f'_* \longrightarrow f_*(g', \beta)_{\#}$$

est un 2-isomorphisme.

Démonstration. — On dispose d'un morphisme d'échange $Ex_{\#, !}: (g, \beta)_{\#} f'_! \longrightarrow f_!(g', \beta)_{\#}$ obtenu via les adjonctions $((g, \beta)_{\#}, (g, \beta)^*)$ et $((g', \beta)_{\#}, (g', \beta)^*)$ à partir de l'isoéchange $Ex_{!}^*: f'_!(g', \beta)^* \longrightarrow (g, \beta)^* f_!$. On vérifie facilement que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (g, \beta)_{\#} f'_! & \longrightarrow & f_!(g', \beta)_{\#} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (g, \beta)_{\#} f'_* & \longrightarrow & f_*(g', \beta)_{\#} \end{array}$$

Ce qui nous ramène à montrer que $Ex_{\#,!}$ est inversible. Par adjonction, il suffit de montrer que le 2-morphisme $Ex^{!,*} : (g'\beta)^* f^! \longrightarrow f'^!(g, \beta)$ est inversible. En utilisant la conservation de la famille des i'^* avec $i' \in \text{Ob}(\mathcal{J}')$ on se ramène aux cas des schémas. L'énoncé correspondant est alors vrai puisque $g(i')$ est lisse. \square

Remarque 2.4.47. — Comme cas particulier de la proposition précédente, on voit que pour f cartésien et fortement projectif, le foncteur f_* commute aux Dia-colimites. En fait, l'hypothèse « cartésien » est probablement superflue.

2.4.5. Dérivateurs algébriques monoïdaux homotopiques et stables. — On termine cette section sur les dérivateurs algébriques par l'étude des structures monoïdales sur eux :

Définition 2.4.48. — *Un dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable est un pré-dérivateur algébrique :*

$$(\mathbb{H}^*, \otimes) : \text{DiaSch}/S \longrightarrow \text{Mono}\mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

1. *Le pré-dérivateur composé :*

$$\text{DiaSch}/S \longrightarrow \text{Mono}\mathfrak{T}\mathfrak{R} \xrightarrow{\text{oubli}} \mathfrak{T}\mathfrak{R}$$

est un dérivateur homotopique et stable.

2. *(Formules de projection) Soit $(f, \alpha) : (\mathcal{G}, \mathcal{J}) \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{J})$ un 1-morphisme lisse argument par argument. Les morphismes :*

$$p_g : (f, \alpha)_{\#}((f, \alpha)^* A \otimes_{\mathcal{G}, \mathcal{J}} B') \longrightarrow A \otimes_{\mathcal{F}, \mathcal{J}} (f, \alpha)_{\#} B'$$

$$p_d : (f, \alpha)_{\#}(A' \otimes_{\mathcal{G}, \mathcal{J}} (f, \alpha)^* B) \longrightarrow (f, \alpha)_{\#} A' \otimes_{\mathcal{F}, \mathcal{J}} B$$

sont inversibles pour $(A, B, A', B') \in \text{Ob}(\mathbb{H}(\mathcal{F}, \mathcal{J}))^2 \times \text{Ob}(\mathbb{H}(\mathcal{G}, \mathcal{J}))^2$ dans l'un des cas suivants :

- (a) α est le foncteur identité et f est cartésien,
- (b) Les foncteurs \mathcal{F} et \mathcal{G} sont constants de valeur un même S -schéma X et f est l'identité de X .

Remarque 2.4.49. — Les transformations binaturelles p_g et p_d ci-dessus sont les morphismes structuraux du $(f, \alpha)^*$ -projecteur bilatère $(f, \alpha)_{\#}$ obtenu à partir du module tautologique *via* l'adjonction $((f, \alpha)_{\#}, (f, \alpha)^*)$.

Dans le reste du paragraphe, on se donne un dérivateur algébrique monoïdal homotopique et stable (\mathbb{H}, \otimes) . De la formule de projection, on déduit immédiatement le lemme suivant :

Lemme 2.4.50. — Supposons que \mathbf{Dia} contient les petites catégories discrètes. Alors les catégories $\mathbb{H}(-)$ admettent les petites sommes et pour tout $A \in \mathbf{Ob}(\mathbb{H}(-))$, les foncteurs $A \otimes -$ et $- \otimes A$ commutent aux petites sommes.

Corollaire 2.4.51. — On suppose que \mathbf{Dia} contient les petites catégories et que les catégories triangulées $\mathbb{H}(-)$ sont compactement engendrées. Alors, pour tout objet $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$ de \mathbf{DiaSch}/S , la catégorie monoïdale $(\mathbb{H}(\mathcal{X}, \mathcal{I}), \otimes_{\mathcal{X}, \mathcal{I}})$ est fermée à gauche et à droite. De plus, les bifoncteurs homomorphisme interne $\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{X}, \mathcal{I}, g}(-, -)$ et $\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{X}, \mathcal{I}, d}(-, -)$ sont triangulés par rapport aux deux variables.

Démonstration. — Ceci découle immédiatement de la proposition 2.1.152. \square

On peut bien évidemment reprendre l'étude menée pour les 2-foncteurs monoïdaux homotopiques et stables, dans le cadre des dérivateurs algébriques monoïdaux homotopiques et stables. Ceci n'est pas utile à la théorie des cycles évanescents du chapitre suivant. Notons tout de même le résultat suivant :

Lemme 2.4.52. — Soit $g : Y \longrightarrow X$ un morphisme de S -schémas quasi-projectifs. On suppose donné un carré cartésien de diagrammes de S -schémas :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}, \mathcal{I}) \times_X Y & \xrightarrow{(f', \alpha)} & (\mathcal{F}, \mathcal{J}) \times_X Y \\ g'' \downarrow & & \downarrow g' \\ (\mathcal{G}, \mathcal{J}) & \xrightarrow{(f, \alpha)} & (\mathcal{F}, \mathcal{I}) \end{array}$$

avec g' et g'' obtenu par pull-back de g suivant un 1-morphisme $(\mathcal{F}, \mathcal{J}) \longrightarrow (X, \mathbf{e})$.

Considérons les modules bilatères $[g'^*, g'^!]$ et $[g''^*, g''^!]$ obtenus en appliquant le théorème 2.3.38 aux 2-foncteurs monoïdaux homotopiques et stables $\mathbb{H}_{\mathcal{F}/X}$ et $\mathbb{H}_{\mathcal{G}/X}$. Les 2-morphismes d'échange $Ex^{*,*}$ et $Ex^{!,*}$ induisent un morphisme de modules :

$$[(f', \alpha)^*, (f', \alpha)^*] \circ [g'^*, g'^!] \longrightarrow [g''^*, g''^!] \circ [(f, \alpha)^*, (f, \alpha)^*]$$

Démonstration. — Notons que les opérations $g'^!$ et $g''^!$ coïncident avec les opérations construites dans la section précédente et que le 2-morphisme $Ex^{!,*}$ est donné par l'échange sur $(\mathbb{H}^*, \mathbf{Cart}'\mathbb{H}^!)$.

Pour démontrer le lemme on peut supposer que g est une immersion fermée ou un morphisme lisse. Ces deux cas se traitent exactement comme pour le cas des schémas. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [AGV73] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK & J.-L. VERDIER (éds.) – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math., vol. 269, vol. 270 & vol. 305, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, Springer Verlag, 1972-73.
- [AK02] Y. ANDRÉ & B. KAHN – « Nilpotence, radicaux et structures monoïdales (avec un appendice de Peter O’Sullivan) », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **108** (2002), p. 107–291.
- [AR94] J. ADÁMEK & J. ROSICKÝ – *Locally presentable and accessible categories*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 189, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Ayo04] J. AYOUB – « Motivic version of the classical polylogarithms », *Arbeitsgemeinschaft mit aktuellem thema : Polylogarithms*, Oberwolfach Rep., 2004.
- [Ayo07] ———, « The motivic nearby cycles and the conservation conjecture », *Algebraic Cycles and Motives part I* (J. Nagel & C. Peters, éds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser., no. 343, 2007.
- [BBD82] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN & P. DELIGNE – *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [BD94] A. BEILINSON & P. DELIGNE – « Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs », *Motives*, Proceedings of the Research Conference on Motives held July 20-August 2, 1991, in Seattle, Washington (U. Jannsen, S. Kleiman & J.-P. Serre, éds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55 Part II, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 123–190.
- [BG73] K. S. BROWN & S. M. GERSTEN – « Algebraic K-theory and generalized sheaf cohomology », *Lecture Notes in Math.*, vol. 341, 1973, p. 266–292.

- [BGI71] P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK & L. ILLUSIE (éds.) – *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Lecture Notes in Math., vol. 225, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1971.
- [BK72] A. BOUSFIELD & D. KAN – *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Math., vol. 304, Springer Verlag, New York, 1972.
- [Del77] P. DELIGNE – *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Math., vol. 569, Springer Verlag, 1977.
- [Del01] ———, « Voevodsky's lectures on cross functors », Fall 2001, Motivic Homotopy Theory Program: <http://www.math.ias.edu/~vladimir/seminar.html>.
- [DHI04] D. DUGGER, S. HOLLANDER & D. ISAKSEN – « Hypercovers and simplicial presheaves », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **136** (2004), p. 9–51.
- [Ful84] W. FULTON – *Intersection Theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb., Springer Verlag, 1984.
- [GD60] A. GROTHENDIECK & J. DIEUDONNÉ – « Éléments de géométrie algébrique I. Le langage des schémas », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **4** (1960), p. 5–228.
- [GD61] ———, « Éléments de géométrie algébrique II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **8** (1961), p. 5–222.
- [GJ99] P. GOERSS & J. JARDINE – *Simplicial Homotopy Theory*, Progr. Math., vol. 174, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1999.
- [Gro90] A. GROTHENDIECK – « Les dérivateurs », manuscrit édité par M. Künzer, J. Malgoire et G. Maltsiniotis, 1990, disponible à l'adresse : <http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateur.html>.
- [Har77] R. HARTSHORNE – *Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math., Springer Verlag, 1977.
- [Hir03] P. S. HIRSCHHORN – *Model categories and their localizations*, Math. Surveys Monogr., vol. 99, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [Hov99] M. HOVEY – *Model categories*, Math. Surveys Monogr., vol. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [Hov01] ———, « Spectra and symmetric spectra in general model categories », *J. Pure Appl. Algebra* **165** (2001), p. 63–127.
- [HW98] A. HUBER & J. WILDESCHAU – « Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne », *Doc. Math.* **3** (1998), p. 27–133.

- [Jar87] J. F. JARDINE – « Simplicial presheaves », *J. Pure Appl. Algebra* **47** (1987), p. 35–87.
- [Jar00] ———, « Motivic symmetric spectra », *Doc. Math.* **5** (2000), p. 445–552, disponible à l'adresse : <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/vol-05/vol-05.html>.
- [Joy84] A. JOYAL – « Letter to Alexander Grothendieck », 4 novembre 1984.
- [Kim05] S.-I. KIMURA – « Chow groups are finite dimensional, in some sense », *Math. Ann.* **331** (2005), no. 1, p. 173–201.
- [KM71] G. M. KELLEY & S. MACLANE – « Coherence in closed categories », *J. Pure Appl. Algebra* **1** (1971), no. 1, p. 97–140.
- [Lev07] M. LEVINE – « Motivic tubular neighborhoods », *Doc. Math.* ??? (2007), p. ???
- [Mac63] S. MACLANE – « Natural associativity and commutativity », *Rice University Studies* **49** (1963), no. 4, p. 28–46.
- [Mac71] ———, *Categories for the working mathematician*, Grad. Texts in Math., vol. 5, Springer Verlag, 1971.
- [Mal01a] G. MALTSINIOTIS – « Introduction à la théorie des dérivateurs », preprint, 2001, disponible à l'adresse : <http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/>.
- [Mal01b] ———, « La K -théorie d'un dérivateur triangulé », preprint, 2001, disponible à l'adresse : <http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/>.
- [Mor02] F. MOREL – « The homotopy t -structure of the \mathbb{A}^1 -homotopy category », preprint, 2002, disponible à l'adresse : <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~morel/stable.html>.
- [Mor03] ———, « An introduction to \mathbb{A}^1 -homotopy theory », Contemporary Developments in Algebraic K -theory (M. Karoubi, A. O. Kuku & C. Pedrini, eds.), ICTP Lect. Notes, vol. 15, 2003, p. 357–441.
- [Mor05] ———, « The stable \mathbb{A}^1 -connectivity theorems », *K-Theory* ??? (2005), p. ???
- [MV90] F. MOREL & V. VOEVODSKY – « \mathbb{A}^1 -Homotopy theory of schemes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **90** (1990).
- [Nee01] A. NEEMAN – *Triangulated categories*, Ann. of Math. Stud., vol. 148, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [Qui67] D. G. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math., vol. 43, Springer Verlag, Berlin-New York, 1967.

- [Rö5] O. RÖNDIGS – « Functoriality in motivic homotopy theory », preprint, 2005, disponible à l'adresse : <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~oroendig/>.
- [Rio02] J. RIOU – *Théorie homotopique des S -schémas*, Mémoire, Université Paris 7, 2002, disponible à l'adresse : <http://www.math.jussieu.fr/~riou/dea/>.
- [Rio06] ———, « Opérations sur la K -théorie algébrique et régulateurs via la théorie homotopique des schémas », Thèse, Université Paris 7, 2006, disponible à l'adresse : <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0793/> (K -theory Preprint Archives).
- [TT90] R. THOMASON & T. TROBAUGH – « Higher algebraic K -theory of schemes and of derived categories », “The Grothendieck Festschrift”: a collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck. Volume III, Progr. Math., vol. 88, Birkhäuser, 1990, p. 247–436.
- [Ver96] J.-L. VERDIER – *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque, vol. 239, Soc. Math. France, Paris, 1996.
- [Voe98] V. VOEVODSKY – « \mathbb{A}^1 -Homotopy theory », *Doc. Math.* Extra volume ICM I (1998), p. 579–606, <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/xvol-icm/00/Voevodsky.MAN.html>.
- [Voe02] ———, « Cancellation theorem », preprint, January 28 2002, disponible à l'adresse <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0541/> (K -theory Preprint Archives).
- [Vol07] V. VOLOGODSKY – « Integrality of instanton numbers », preprint, 2007, <http://arxiv.org/pdf/0707.4617>.
- [VSF00] V. VOEVODSKY, A. SUSLIN & E. M. FRIEDLANDER – *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.
- [Wil97] J. WILDESCHAU – *Realizations of Polylogarithms*, Lecture Notes in Math., vol. 1650, Springer Verlag, 1997.

LES SIX OPÉRATIONS DE GROTHENDIECK ET LE FORMALISME DES CYCLES ÉVANESCENTS DANS LE MONDE MOTIVIQUE

par J. Ayoub

Volume I : Astérisque 314

Remerciements	vii
Introduction générale	ix
1. Les quatre opérations de Grothendieck dans un cadre motivique ..	1
1.1. Préliminaires 2-catégoriques I : Adjonctions et équivalences dans une 2-catégorie	6
1.2. Préliminaires 2-catégoriques II : Échanges entre 2-foncteurs. Foncteurs croisés	25
1.3. Préliminaires 2-catégoriques III : Un critère de prolongement pour les 2-foncteurs	47
1.4. Énoncé du résultat principal. Quelques préparations	71
1.5. Les équivalences de Thom. Les 2-foncteurs ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}^!$ et ${}^{\text{Liss}}\mathbf{H}_!$	89
1.6. Pureté. Construction du foncteur croisé $(\mathbf{H}^*, \mathbf{H}_*, \mathbf{H}_!, \mathbf{H}^!)$	115
1.7. Le morphisme de 2-foncteurs $\mathbf{H}_! \mapsto \mathbf{H}_*$. Fin de la démonstration	210
2. Compléments sur les 2-foncteurs homotopiques stables et les quatre opérations	239
2.1. Préliminaires généraux	242
2.2. Engendrement de sous-catégories et de t -structures dans un 2-foncteur homotopique stable.	339
2.3. Les 2-foncteurs monoïdaux homotopiques stables	385
2.4. Dérivateurs algébriques homotopiques et stables	436
Bibliographie	461

Volume II : Astérisque 315

3. La théorie des foncteurs cycles proches dans un cadre motivique ..	1
Introduction	1
3.1. Les systèmes de spécialisation : définition et propriétés de cohérence	3
3.2. Une technique de construction de structures de spécialisation	14
3.3. Le calcul des systèmes de spécialisation pour les schémas standards	27

3.4. Le système de spécialisation Υ	69
3.5. Le système de spécialisation Ψ	85
3.6. Le système de spécialisation logarithmique et le triangle de monodromie	93
4. La construction de 2-foncteurs homotopiques stables	139
Introduction	139
4.1. Catégories de modèles I : la théorie générale	141
4.2. Catégories de modèles II : accessibilité et localisation	174
4.3. Catégories de modèles III : les spectres symétriques	224
4.4. Des catégories de modèles de nature faisceautique	279
4.5. Le dérivateur algébrique homotopique et stable $\mathbb{S}\mathbb{H}$	314
Bibliographie	359