Astérisque

CÉDRIC BONNAFÉ

Sur les caractères des groupes réductifs finis à centre non connexe : applications aux groupes spéciaux linéaires et unitaires

Astérisque, tome 306 (2006)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2006__306__R1_0>

ASTÉRISQUE 306

SUR LES CARACTÈRES DES GROUPES RÉDUCTIFS FINIS À CENTRE NON CONNEXE : APPLICATIONS AUX GROUPES SPÉCIAUX LINÉAIRES ET UNITAIRES

Cédric Bonnafé

Société Mathématique de France 2006
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

C. Bonnafé
CNRS, UMR 6623, Département de Mathématiques, Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray, 25030 BESANÇON Cedex, FRANCE.
E-mail : `bonnafe@math.univ-fcomte.fr`
Url : `http://www-math.univ-fcomte.fr/pp_Annu/CBONNAFE/`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 20G05 ; 20G40.

***Mots clefs.* —** Groupes réductifs finis, théorie de Deligne-Lusztig, caractères de Gelfand-Graev, éléments unipotents réguliers, faisceaux caractères, conjecture de Lusztig, groupe spécial linéaire, groupe spécial unitaire.

SUR LES CARACTÈRES DES GROUPES RÉDUCTIFS FINIS À CENTRE NON CONNEXE : APPLICATIONS AUX GROUPES SPÉCIAUX LINÉAIRES ET UNITAIRES

Cédric Bonnafé

Résumé. — Un premier but de cet article est de présenter une synthèse des résultats de plusieurs auteurs concernant les caractères des groupes réductifs finis à centre non connexe. Nous nous intéressons particulièrement aux problèmes directement liés à la non connexité du centre. Nous insistons notamment sur les caractères de Gelfand-Graev et les caractères semisimples.

Un deuxième but est d'étudier l'influence de la non connexité du centre sur la théorie des faisceaux-caractères. Nous nous concentrons sur la famille des faisceaux-caractères dont le support rencontre la classe unipotente régulière : ce sont les analogues naturels des caractères semisimples.

Le dernier but est l'application de ces résultats aux groupes réductifs finis de type A, déployés ou non (comme par exemple les groupes spéciaux linéaires ou unitaires). Lorsque le cardinal du corps fini de référence est assez grand, nous obtenons un paramétrage des caractères irréductibles, calculons explicitement le foncteur d'induction de Lusztig dans la base des caractères irréductibles, paramétrons les faisceaux-caractères et montrons que les fonctions caractéristiques de ces faisceaux-caractères sont des transformées de Fourier des caractères irréductibles (conjecture de Lusztig). Ces résultats permettent de construire un algorithme théorique pour calculer la table de caractères de ces groupes.

***Abstract* (On the characters of finite reductive groups with disconnected center: applications to special linear and special unitary groups)**

A first aim of this paper is to present an overview of results obtained by several authors on the characters of finite reductive groups with non-connected centre. We are particularly interested in problems directly linked to the non-connectedness of the centre. We emphasise on Gelfand-Graev and semisimple characters.

A second aim is to study the influence of the non-connectedness of the centre on the theory of character sheaves. We study more precisely the family of character sheaves whose support meets the regular unipotent class: these are analogues of the semisimple characters.

The last aim is the application of these results to finite reductive groups of type A, split or not (as for instance the special linear or special unitary groups). Whenever the cardinality of the finite field is large enough, we obtain a parametrization of the irreducible characters, a parametrization of the character sheaves, and we show that the characteristic functions of character sheaves are Fourier transforms of the irreducible characters (Lusztig's conjecture). This gives a theoretical algorithm for computing the character table of these groups.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

En 1907, Schur [**Sch07**] et Jordan [**Jor07**] déterminaient les tables de caractères du groupe général linéaire $GL(2,q)$ et du groupe spécial linéaire $SL(2,q)$. La table de $PSL(3,q)$ fut obtenue en 1921 par Brinkman [**Bri21**]. En 1951, Steinberg [**Ste51b**] calculait la table de caractères de $GL(3,q)$ et $GL(4,q)$, en utilisant entre autres des constructions générales de représentations (que nous appelons de nos jours *unipotentes*) de $GL(n,q)$ (voir [**Ste51a**]). Finalement, au prix d'un tour de force combinatoire remarquable, Green [**Gre55**] déterminait en 1955 la table de caractères de $GL(n,q)$ (au moins algorithmiquement). Par contre, les progrès concernant le groupe spécial linéaire furent beaucoup plus longs. En 1971, Lehrer [**Leh71**] obtenait dans sa thèse une partie de la table de caractères de $SL(4,q)$, celle correspondant aux séries discrètes. Le cas de $SL(3,q)$ fut réglé en 1973 (voir [**SF73**] ou [**Leh73**]). Notons que les travaux de Lehrer [**Leh73**] concernaient le groupe $SL(n,q)$, pour n quelconque : en particulier, même si cela n'est pas explicitement écrit dans [**Leh73**], cet article contenait toutes les informations nécessaires pour compléter la table de caractères de $SL(n,q)$ lorsque n est premier. Un des buts de notre article est de fournir un algorithme théorique pour calculer la table de caractères de $SL(n,q)$: cependant, nous ne sommes capables de montrer la validité de cet algorithme que lorsque q est assez grand.

Plus généralement, si $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe défini sur une clôture algébrique $\mathbb{F}$ du corps fini à p éléments $\mathbb{F}_p$ (p premier) et si $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ est une isogénie dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius relatif à une $\mathbb{F}_q$-structure sur $\mathbf{G}$ ($q = p^?$), le calcul de la table de caractères du groupe fini $\mathbf{G}^F$ (appelé *groupe réductif fini*) est loin d'être résolu en toute généralité. Rappelons quand même que le cas du groupe $Sp(4,q)$ a été résolu, pour q impair, par Srinivasan [**Sri68**] en 1968. D'autres résultats ont été obtenus sur les petits groupes (groupes de Suzuki, groupes de Ree...).

Pourtant, en 1976, l'article fondateur de Deligne et Lusztig [**DL76**] permettait à la théorie des caractères des groupes réductifs finis de faire des progrès considérables. Leur idée, inspirée par des calculs de Drinfeld montrant que la série discrète de $SL(2,q)$ apparaissait dans la cohomologie ℓ-adique de la variété définie par l'équation $xy^q - yx^q = 1$, était d'utiliser la structure géométrique de $\mathbf{G}$ pour produire des variétés sur lesquelles le groupe fini $\mathbf{G}^F$ agit et de récupérer ainsi des représentations de $\mathbf{G}^F$ dans la cohomologie ℓ-adique de ces variétés. Poursuivant dans cette voie, Lusztig [**Lus84a**], après une série impressionnante d'articles, obtenait en 1984 le paramétrage des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ (dans l'esprit du programme de Langlands) lorsque le centre de $\mathbf{G}$ est connexe. En plus de ce paramétrage, il obtenait une formule explicite pour le degré de ces caractères ainsi qu'un algorithme (théorique) permettant de calculer les valeurs de ces caractères en les éléments semi-simples.

Au cours de sa démarche, Lusztig introduisait une nouvelle base orthonormale de l'espace des fonctions centrales, la base des *caractères fantômes*, obtenue à partir de la base des caractères irréductibles par une matrice diagonale par blocs, les blocs étant des matrices de transformées de Fourier associées à des petits groupes finis (dont la taille ne dépend pas de q). En 1984-1986, Lusztig (voir [**Lus84b**] et [**Lus85**]) développait une nouvelle théorie, la théorie des *faisceaux-caractères*, dans le but de comprendre l'intrusion de ces petits groupes finis et de ces caractères fantômes. Un faisceau-caractère est un faisceau pervers $\mathbf{G}$-équivariant irréductible sur $\mathbf{G}$ satisfaisant certaines conditions. Si A est un faisceau-caractère F-stable, on peut lui associer une fonction centrale sur $\mathbf{G}^F$, appelée *fonction caractéristique de* A ; cette fonction n'est définie qu'à une constante multiplicative près mais Lusztig a défini des normalisations qui en font des fonctions de norme 1. De plus, Lusztig a montré que ces fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F-stables forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales. Il a fait la conjecture suivante :

Conjecture de Lusztig. — *Si le centre de* $\mathbf{G}$ *est connexe, la matrice de passage entre la base des caractères fantômes et la base des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères* F*-stables sur* $\mathbf{G}$ *est diagonale.*

En 1995, Shoji [**Sho95**] démontrait cette conjecture. D'autre part, Lusztig a aussi décrit un algorithme théorique permettant de calculer les fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F-stables, même lorsque le centre de $\mathbf{G}$ n'est pas connexe. Il repose cependant sur la normalisation précise des fonctions notées Y_i dans [**Lus85**, Partie V, section 24.2]. Ces normalisations ont été obtenues récemment dans les groupes de type A par T. Shoji [**Sho05**].

Il apparaît ainsi au cours de l'évolution de la théorie que la non-connexité du centre de $\mathbf{G}$ entraîne de nombreuses complications. Certaines sont techniques (comme par exemple le paramétrage des classes de conjugaison), d'autres sont théoriques (comme par exemple la non-connexité du centralisateur des éléments semi-simples du dual de $\mathbf{G}$ ou l'augmentation significative du nombre de faisceaux-caractères cuspidaux). Cette non-connexité du centre explique les difficultés qui ont émaillé la recherche d'une table de caractères pour le groupe spécial linéaire.

Plusieurs auteurs ont étudié les groupes réductifs finis à centre non connexe (Asai [**Asa87**], Lusztig [**Lus88**], Digne et Michel [**DM90**], Digne, Lehrer et Michel [**DLM92**], [**DLM97**], Shoji [**Sho98**] ou l'auteur [**Bon96**], [**Bon00a**], [**Bon00b**]). Le paramétrage des caractères irréductibles a été achevé par Lusztig [**Lus88**] et des nouvelles informations sur la table de caractères du groupe $\mathbf{G}^F$ (par exemple la valeur en les éléments unipotents réguliers [**DLM92**]) ont été obtenues.

Concernant l'analogue de la conjecture de Lusztig, un des premiers problèmes vient de ce qu'il n'y a pas de définition indiscutable de la notion de caractère fantôme. On peut alors considérer comme une réponse positive à la conjecture de Lusztig pour les groupes à centre non connexe un théorème qui montrerait que la base des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F-stables est obtenue à partir de la base des caractères irréductibles par une matrice diagonale par blocs, les blocs étant des matrices de transformées de Fourier associées à des petits groupes finis. Dans cette acceptation, la conjecture de Lusztig a été démontrée pour les groupes spéciaux orthogonaux et symplectiques par Waldspurger [**Wal04**] lorsque q est assez grand.

Shoji [**Sho06**] a démontré la conjecture de Lusztig pour le groupe $SL(n,q)$ pour $p > 3n$ et q une puissance quelconque de p. Il a aussi proposé une définition intéressante de caractère fantôme : un caractère fantôme devrait être la descente de Shintani de $\mathbf{G}^{F^n}$ à $\mathbf{G}^F$ d'un caractère irréductible F-stable de $\mathbf{G}^{F^n}$ (pour n suffisamment divisible). Cette définition a le mérite d'être correcte lorsque le centre de $\mathbf{G}$ est connexe et de rendre vraie la conjecture de Lusztig pour le groupe spécial linéaire.

Un des buts du présent article est de démontrer la conjecture de Lusztig (sans prendre la définition de Shoji de caractère fantôme) pour le groupe spécial linéaire et le groupe spécial unitaire lorsque p est quelconque et q est assez grand. Plus précisément, nous obtenons un paramétrage des caractères de ces groupes réductifs finis et définissons a priori, sans référence à la théorie des faisceaux-caractères, des transformées de Fourier naturelles de ces caractères irréductibles (nous nous inspirons de [**DM90**, §5 et 6]). Nous montrons alors que la matrice de passage entre la base des transformées de Fourier et la base des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F-stables est diagonale et calculons explicitement les coefficients diagonaux. Dans l'optique d'obtenir un algorithme pour calculer la table de caractères de ces groupes, notre résultat est satisfaisant. Il faut cependant être réaliste : la mise en œuvre de cet algorithme nécessite encore un travail considérable. Le plus difficile en pratique (et le plus facile en théorie) est de ramener cette question au problème du calcul des valeurs des caractères en les éléments unipotents. Pour le groupe spécial linéaire, nous donnons un algorithme précis pour le calcul de ces dernières.

Une dernière remarque : notre résultat est valide pour tous les groupes de type A, quel que soit l'endomorphisme de Frobenius considéré. Même dans le cas *déployé*, il s'applique aux groupes intermédiaires de la forme $\mathbf{SL}_n/\boldsymbol{\mu}_d$, où d divise n : ces groupes sont des extensions non triviales du groupe fini $SL(n,q)/\boldsymbol{\mu}_d(\mathbb{F}_q)$ qui ne sont pas contenues dans le travail de Shoji [**Sho06**].

Dans le cas du groupe spécial linéaire, il serait intéressant de relier plus finement le paramétrage de Shoji et le nôtre pour déterminer la matrice de passage entre nos transformées de Fourier et les caractères fantômes de Shoji : lorsque q est assez grand, cette matrice de passage est diagonale mais nous n'en connaissons pas les coefficients. Il serait aussi intéressant, dans le cas du groupe spécial unitaire, de savoir si nos transformées de Fourier sont des caractères fantômes (à une constante près) au sens de Shoji.

Cet article a aussi un autre but : présenter une synthèse des résultats sur les groupes réductifs finis directement liés à la non connexité du centre. Notons $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) = \mathbf{Z}(\mathbf{G})/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$ le groupe des composantes connexes du centre de $\mathbf{G}$. Nous montrons comment relier $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ au système de racines de $\mathbf{G}$, étudions le morphisme $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ (où $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$) en lien avec les automorphismes du diagramme de Dynkin affine, relions la structure de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ avec la non-connexité du centralisateur des éléments semi-simples du dual $\mathbf{G}^*$ de $\mathbf{G}$, étudions la distinction qu'elle entraîne entre séries de Lusztig géométriques et rationnelles, étudions l'action de $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ sur les caractères de $\mathbf{G}^F$ à travers la théorie de Harish-Chandra, calculons les composantes irréductibles des caractères de Gelfand-Graev, étudions l'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ (par conjugaison ou par translation) sur les faisceaux-caractères, avant d'appliquer tout ceci aux caractères des groupes de type A. Parmi ces résultats, beaucoup sont bien connus et dus à d'autres auteurs, mais nous avons souhaité les présenter ensemble, notamment pour les relier entre eux et quelquefois pour en améliorer légèrement le degré de généralité.

Pour étudier les groupes à centre non connexe, nous reprenons une technique courante [**DL76**] : elle consiste à voir $\mathbf{G}$ comme un sous-groupe fermé distingué d'un groupe $\widetilde{\mathbf{G}}$ à centre connexe tel que $\widetilde{\mathbf{G}}/\mathbf{G}$ soit abélien (c'est toujours possible ; par exemple, on peut plonger $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F})$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$). La théorie de Clifford permet alors, par restriction de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ à $\mathbf{G}^F$, d'utiliser ce que l'on sait de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$, par exemple par les avantages liés à la connexité du centre de $\widetilde{\mathbf{G}}$.

Cet article est organisé comme suit. Dans le chapitre 1, nous introduisons les notations générales, présentons le contexte et établissons quelques résultats préliminaires. Dans le chapitre 2, nous montrons comment calculer $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ (pour un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ de $\mathbf{G}$) de plusieurs manières. Nous rappelons les différentes constructions d'un morphisme entre le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ des composantes connexes du centralisateur d'un élément semi-simple s de $\mathbf{G}^*$ et le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$ des caractères linéaires de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Nous y construisons une action de $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ sur les fonctions centrales sur $\mathbf{G}^F$. Nous rappelons aussi les notions de *cuspidalité* introduites dans [**Bon99b**], [**Bon00a**], [**Bon00b**] et [**Bon04b**]. Un des buts du chapitre 3 est de démontrer la disjonction des séries de Lusztig rationnelles. L'essentiel de cette preuve est contenu dans [**DM91**] (et le résultat était déjà connu de Lusztig [**Lus77**, 7.5.2]) mais elle n'est nulle part écrite complètement. Dans le chapitre 4, nous étudions l'action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ à travers la théorie de Harish-Chandra. Nous ne pensons pas que ceci soit traité ailleurs dans ce degré de généralité. Le chapitre 5, largement inspiré par [**Asa87**], [**DLM92**], [**DLM97**] et [**Bon96**], traite des éléments unipotents réguliers, des caractères de Gelfand-Graev, de leurs composantes irréductibles (les caractères dits *réguliers*) et de leur dual de Curtis (les caractères dits *semi-simples*). Nous obtenons notamment une décomposition des caractères semi-simples comme combinaison linéaire d'induits de fonctions absolument cuspidales. Dans le chapitre 6, nous étudions les différentes actions de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur les faisceaux-caractères. Tout d'abord, si A est un faisceau-caractère, la $\mathbf{G}$-équivariance de A induit une action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur A via un caractère linéaire. De plus, via l'action par translation, $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ permute les faisceaux-caractères : nous déterminons l'action de cette permutation à travers le procédé d'induction à partir des faisceaux-caractères cuspidaux. Pour finir, nous étudions les faisceaux-caractères apparaissant dans l'induit de faisceaux-caractères cuspidaux dont le support rencontre la classe unipotente régulière et décrivons leur fonction caractéristique en termes d'induction de Lusztig.

Dans le chapitre 7, nous supposons que toutes les composantes quasi-simples de $\mathbf{G}$ sont de type A et que $\mathbf{G}$ est muni d'un endomorphisme de Frobenius quelconque, déployé ou non. Nous montrons comment les fonctions centrales introduites dans le chapitre 5 permettent, lorsque q est grand, de construire les caractères irréductibles comme combinaisons linéaires d'induits de fonctions caractéristiques de fonctions absolument cuspidales. En utilisant le fait que le support de tout faisceau-caractère cuspidal sur $\mathbf{G}$ rencontre (à translation près par $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$) la classe unipotente régulière et les formules de la dernière section du chapitre 6, nous obtenons la conjecture de Lusztig. Donnons-en un énoncé sommaire : soit s un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$, soit $W^\circ(s)$ le groupe de Weyl de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$, soit $A_{\mathbf{G}^*}(s) = C_{\mathbf{G}^*}(s)/C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ (c'est un groupe abélien), soit $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ la série de Lusztig géométrique de $\mathbf{G}^F$ associée à la classe de conjugaison de s dans $\mathbf{G}^*$ et soit $\mathrm{FCar}(\mathbf{G}, (s))^F$ la série géométrique des faisceaux-caractères F-stables associée à s. Notons $\mathcal{I}(\mathbf{G}, s)$ l'ensemble des triplets (χ, ξ, α) tels que χ parcourt un ensemble de représentants des $A_{\mathbf{G}^*}(s)$-orbites F^*-stables de caractères irréductibles de $W^\circ(s)$, $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*})^\wedge$ et $\zeta \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi))$ (où $A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)$ est le stabilisateur de χ dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$). Notons $\mathcal{I}^\vee(\mathbf{G}, s)$ l'ensemble des triplets (χ, a, τ) où χ parcourt un ensemble de représentants des $A_{\mathbf{G}^*}(s)$-orbites F^*-stables de caractères irréductibles de $W^\circ(s)$, $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*}$ et $\tau \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi))^\wedge$. Si A est un faisceau-caractère F-stable sur $\mathbf{G}$, nous noterons $\mathcal{X}_A$ sa fonction caractéristique (explicitement normalisée comme dans l'article).

Théorème. — *Supposons q assez grand. Alors il existe deux bijections*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(\mathbf{G},s) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s)) \\ (\chi,\xi,\alpha) & \longmapsto & R_\chi(s)_{\xi,\alpha} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}^\vee(\mathbf{G},s) & \longrightarrow & \mathrm{FCar}(\mathbf{G},(s))^F \\ (\chi,a,\tau) & \longmapsto & A_\chi(s)_{a,\tau} \end{array}$$

telles que, si $(\chi,a,\tau)\in\mathcal{I}^\vee(\mathbf{G},s)$, *alors*

$$\mathcal{X}_{A_\chi(s)_{a,\tau}} = \frac{\zeta_{s,\chi,a,\tau}}{|A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)|} \sum_{\substack{\xi\in(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*})^\wedge \\ \alpha\in H^1(F^*,A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi))}} \overline{\xi(a)\tau(\alpha)} R_\chi(s)_{\xi,\alpha},$$

où $\zeta_{s,\chi,a,\tau}$ *est une racine de l'unité explicitement déterminée.*

Il est à noter que, comme conséquence des travaux effectués, on obtient une description explicite du foncteur d'induction de Lusztig en termes du groupe de Weyl (lorsque q est assez grand).

Dans le chapitre 8, nous étudions plus précisément le cas où $\mathbf{G}$ est un sous-groupe de Levi d'un groupe déployé de type A. Nous obtenons par exemple, en utilisant uniquement la théorie de Harish-Chandra, un paramétrage des caractères irréductibles de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s))$ par $\mathcal{I}(\mathbf{G},s)$ dont nous montrons qu'il coïncide avec le paramétrage du théorème précédent lorsque q est assez grand. Cela nous permet de retrouver, comme cas particulier des théorèmes du chapitre 7, le résultat de notre thèse [**Bon96**, théorème 16.2.1] sur le calcul de l'induction de Lusztig dans le groupe spécial linéaire. Nous rappelons comment fonctionne la décomposition de Jordan. Nous donnons aussi, comme application de ce travail, un algorithme permettant de calculer les valeurs des caractères irréductibles de $SL(n,q)$ en les éléments unipotents : le cas où $n=4$ est traité complètement.

Dans l'appendice A, nous rassemblons les résultats techniques sur les caractères de produits en couronne que nous utilisons dans les deux derniers chapitres. Dans l'appendice B, nous rappelons des résultats classiques sur les sommes de Gauss et montrons comment ils permettent d'obtenir les valeurs des racines de l'unité $\zeta_{s,\chi,a,\tau}$ intervenant dans l'énoncé du théorème précédent.

Remarque. — Cet article est largement inspiré de notre thèse [**Bon96**], notamment des parties qui n'ont fait l'objet d'aucune publication. Outre le fait d'avoir pu traiter depuis le cas du groupe spécial unitaire, nous avons aussi amélioré et enrichi le traitement des parties communes. L'appendice A est essentiellement contenu dans [**Bon96**, partie 1, chapitre I] : il est à noter que le corollaire **34.3**, qui correspond à [**Bon96**, proposition 1.9.1], est ici affublé d'une preuve correcte, contrairement à ce qui est écrit dans [**Bon96**] ! Le chapitre 3 est une version très enrichie de [**Bon96**, §6]. Le chapitre 4 correspond à [**Bon96**, §7] : remarquons que le groupe noté ici $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ et noté $\bar{W}_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ dans [**Bon96**, §7.4] est défini ici de manière intrinsèque et non par un produit semi-direct peu canonique. Le chapitre 5 correspond à [**Bon96**, §12 et 13] : ici, l'amélioration consiste à utiliser la version précisée du théorème de Digne, Lehrer et Michel sur la restriction de Lusztig des caractères de Gelfand-Graev que l'auteur a obtenue dans [**Bon04a**]. La section 8 correspond à [**Bon96**, §15 et 16] : compte tenu de la remarque précédente, le résultat sur l'induction de Lusztig est ici plus précis. Il faut aussi noter que la convention dans le paramétrage des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ ayant été légèrement modifiée, les formules obtenues ici se retrouvent allégées de certains signes.

Domaine de validité. — L'hypothèse sur q (« q assez grand ») est rendue nécessaire par l'utilisation cruciale d'un théorème de Lusztig [**Lus90**, Théorème 1.14], dont la preuve présentée tout au long de [**Lus90**] n'est valide que lorsque p est presque bon et q est assez grand. Il serait possible d'obtenir une borne explicite à partir de cette preuve. Cependant, G. Lusztig m'a dit récemment qu'il avait trouvé une preuve de [**Lus90**, Théorème 1.14] valide sans restriction sur q et qu'il avait levé l'essentiel des hypothèses sur p. Cela montrerait que le théorème **14.11** sur la restriction de Deligne-Lusztig des caractères de Gelfand-Graev (et qui est démontré dans [**Bon04a**, partie II, théorème 15.2]) est valable sans d'autre hypothèse que d'être en bonne caractéristique. En particulier, pour les groupes de type A, cela montrerait que tous les résultats des chapitres 7 et 8 sont valides sans hypothèse sur q.

Remerciements. — Je tiens à remercier très chaleureusement Jean Michel pour m'avoir lancé dans ce sujet lors de ma thèse, pour m'avoir initié à la théorie des faisceaux-caractères et pour les innombrables et fructueuses discussions que nous avons eues sur ce sujet depuis. Je remercie aussi le rapporteur pour les nombreuses, et surtout pertinentes, remarques qu'il a faites sur la première version de ce texte.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES, NOTATIONS, DÉFINITIONS

Dans la première section de ce chapitre, nous introduisons les notations et conventions générales valables dans tout cet article. Dans la deuxième section, nous introduisons les objets que nous allons étudier (groupes réductifs finis) tout en établissant quelques résultats préliminaires. La troisième section est une collection de résultats hétéroclites.

1. Notations générales

1.A. Notations usuelles. — Nous notons $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Comme il est d'usage, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ désignent respectivement l'anneau des entiers relatifs, le corps des nombres rationnels et le corps des nombres réels. Si r est un nombre premier, $\mathbb{Z}_r$ désigne l'anneau des entiers r-adiques et nous notons $\mathbb{Q}_r$ son corps des fractions. Le corps résiduel de $\mathbb{Z}_r$ est noté $\mathbb{F}_r$. Si $x \in \mathbb{Q}$, nous notons $\nu_r(x) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ sa valuation r-adique. Si $x \neq 0$, nous définissons $x_r = r^{\nu_r(x)}$ et $x_{r'} = x x_r^{-1}$. Nous notons $\mathbb{Z}_{(r)} = \{x \in \mathbb{Q} \mid \nu_r(x) \geqslant 0\}$. Pour finir, posons $\mathbb{Z}[1/r] = \{ar^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

1.B. Groupes, anneaux, corps. — Nous fixons dans cet article un nombre premier p. Soit $\mathbb{F}$ une clôture algébrique du corps fini à p éléments $\mathbb{F}_p$. Si q est une puissance de p, nous notons $\mathbb{F}_q$ le sous-corps de $\mathbb{F}$ de cardinal q. Par *variété* (ou *groupe algébrique*), nous entendons une variété (respectivement un groupe algébrique) sur $\mathbb{F}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons

$$\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F}) = \{\xi \in \mathbb{F}^\times \mid \xi^n = 1\}.$$

Alors $|\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F})| = n_{p'}$.

Nous fixons aussi un nombre premier ℓ différent de p et nous notons $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps des nombres ℓ-adiques $\mathbb{Q}_\ell$. Nous fixons une fois pour toutes un automorphisme involutif $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $x \mapsto \bar{x}$ tel que $\bar{\omega} = \omega^{-1}$ pour toute racine de l'unité ω dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$.

Si E est un ensemble et si $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, on notera $E/\!\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$ dans E et $[E/\!\sim]$ un ensemble de représentants de ces classes d'équivalence. Le lecteur pourra vérifier que, chaque fois que cette notation sera employée (par exemple dans une somme $\sum_{x \in [E/\sim]} f(x)$), le résultat sera indépendant du choix des représentants. Si X est une partie de E, nous noterons 1_X (ou 1_X^E s'il est nécessaire de préciser l'ensemble de référence) la fonction caractéristique de X à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Le cardinal de E sera noté $|E|$: c'est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Soit G un groupe. Si X est un sous-ensemble de G, $\langle X \rangle$ désigne le sous-groupe de G engendré par X, $N_G(X)$ le normalisateur de X dans G et $C_G(X)$ le centralisateur de X dans G. Si $g \in G$, nous notons $o(g) = |\langle g \rangle|$ son ordre. Nous notons G_{tors} l'ensemble des éléments de G d'ordre fini, G_p l'ensemble des éléments de G d'ordre fini égal à une puissance de p et $G_{p'}$ l'ensemble des éléments de G d'ordre fini premier à p. Si $g \in G_{\mathrm{tors}}$, nous notons g_p et $g_{p'}$ les uniques éléments de G_p et $G_{p'}$ respectivement tels que $g = g_p g_{p'} = g_{p'} g_p$: g_p est appelé la p-partie de g tandis que $g_{p'}$ est appelé la p'-partie de g. Remarquons que $o(g_p) = o(g)_p$ et $o(g_{p'}) = o(g)_{p'}$.

Si $\mathcal{A}$ est un groupe agissant sur G et si $\varphi \in \mathcal{A}$, nous noterons $H^1(\varphi, G)$ l'ensemble des classes de *φ-conjugaison* de G (deux éléments g et g' de G sont dits φ-conjugués s'il existe $x \in G$ tel que $g' = x^{-1} g \varphi(x)$). En d'autres termes, $H^1(\varphi, G) = H^1(\mathbb{Z}, G)$, où le générateur 1 de $\mathbb{Z}$ agit sur G via φ. Si φ est d'ordre fini, on a en général $H^1(\varphi, G) \neq H^1(\langle \varphi \rangle, G)$.

Exemple 1.1. — Supposons G abélien. Alors $H^1(\varphi, G) = G/\operatorname{Im}(\varphi - 1)$ où on note $\varphi - 1 : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}\varphi(g)$: en particulier, $H^1(\varphi, G)$ hérite naturellement d'une structure de groupe. Si de plus G est fini, alors $|G^\varphi| = |H^1(\varphi, G)|$.

Nous fixons une fois pour toutes un isomorphisme de groupes

$$\imath : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'} \longrightarrow \mathbb{F}^{\times}$$

et un morphisme injectif de groupes

$$\jmath : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}.$$

On obtient alors un morphisme injectif

$$\kappa : \mathbb{F}^{\times} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$$

défini par $\kappa = \jmath \circ \imath^{-1}$. Pour finir ce paragraphe, nous définissons le morphisme surjectif $\widetilde{\imath} : \mathbb{Q} \to \mathbb{F}^{\times}$ comme étant la composition de $\imath$ avec le morphisme $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'}$. Notons que $\operatorname{Ker} \widetilde{\imath} = \mathbb{Z}[1/p]$. De même, nous notons $\widetilde{\jmath} : \mathbb{Q} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ le composé de $\jmath$ et du morphisme canonique $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; on a $\operatorname{Ker} \widetilde{\jmath} = \mathbb{Z}$.

1.C. Caractères des groupes finis. — Si G est un groupe fini, nous notons $\operatorname{Irr} G$ l'ensemble de ses caractères irréductibles sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $G^\wedge$ le groupe de ses caractères linéaires à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$. On a $G^\wedge \subset \operatorname{Irr} G$; on a $G^\wedge = \operatorname{Irr} G$ si et seulement si G est abélien. Si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes finis, nous noterons $\hat{f} : H^\wedge \to G^\wedge$, $\theta \mapsto \theta \circ f$ le morphisme dual de f.

Si G est un sous-groupe distingué d'un groupe $\widetilde{G}$ et si $\phi \in \widetilde{G}$, nous noterons $\operatorname{Cent}(G\phi)$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel des fonctions $G\phi \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ invariantes par G-conjugaison. Nous définissons sur $\operatorname{Cent}(G\phi)$ le produit scalaire

$$\begin{array}{rccc} \langle,\rangle_{G\phi} : & \operatorname{Cent}(G\phi) \times \operatorname{Cent}(G\phi) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}_\ell \\ & (\gamma,\gamma') & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \gamma(g\phi)\overline{\gamma'(g\phi)}. \end{array}$$

Si H est un sous-groupe de G et si $g \in G$ est tel que ${}^{g\phi}H = H$, nous noterons $\operatorname{Ind}_{Hg\phi}^{G\phi} : \operatorname{Cent}(Hg\phi) \to \operatorname{Cent}(G\phi)$ l'adjoint, pour les produits scalaires $\langle,\rangle_{Hg\phi}$ et $\langle,\rangle_{G\phi}$, de l'application de restriction naturelle $\operatorname{Res}_{Hg\phi}^{G\phi} : \operatorname{Cent}(G\phi) \to \operatorname{Cent}(Hg\phi)$. En fait, si $f \in \operatorname{Cent}(Hg\phi)$, on a

$$(\mathbf{1.2}) \qquad (\operatorname{Inf}_{Hg\phi}^{G\phi} f)(x\phi) = \sum_{\substack{y\in[G/H] \\ y^{-1}x\phi y \in Hg\phi}} f(y^{-1}x\phi y).$$

On en déduit que

$$\operatorname{Ind}_{Hg\phi}^{G\phi} = \operatorname{Res}_{G\phi}^{G\langle\phi\rangle} \circ \operatorname{Ind}_{H\langle g\phi\rangle}^{G\langle\phi\rangle} \widetilde{f},$$

où $\widetilde{f}$ est l'extension par zéro de f à $H\langle g\phi\rangle$. Avec ces notations, $\operatorname{Cent}(G)$ est le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel des fonctions centrales $G \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\operatorname{Irr} G$ en est une base orthonormale. Nous identifions $\mathbb{Z}\operatorname{Irr} G$ avec le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell G$-modules de type fini.

Si $g \in G$, nous noterons γ_g^G la fonction centrale sur G définie par

$$\gamma_g^G(g') = \begin{cases} 0 & \text{si } g \text{ et } g' \text{ ne sont pas conjugués dans } G, \\ |C_G(g)| & \text{sinon.} \end{cases}$$

En fait,

$$\gamma_g^G = \sum_{\gamma\in\operatorname{Irr} G} \overline{\gamma(g)}\gamma.$$

De plus, si $g \in H$, alors

$$\operatorname{Ind}_H^G \gamma_g^H = \gamma_g^G.$$

Pour finir cette sous-section, nous allons donner une formule permettant de calculer l'induction $\operatorname{Ind}_{Hg\phi}^{G\phi}$ dans un cas particulier. Supposons maintenant que $\widetilde{G} = G = H\langle g\rangle$ et $\phi = 1$. En particulier, H est distingué dans G. Pour tout caractère irréductible χ de H invariant par G (c'est-à-dire par g), on fixe une extension $\widetilde{\chi}$ de χ à G (l'existence de $\widetilde{\chi}$ est assurée par la cyclicité de G/H). On note $\widetilde{\chi}_g$ la restriction de $\widetilde{\chi}$ à Hg. Alors $(\widetilde{\chi}_g)_{\chi\in(\mathrm{Irr}\,H)^g}$ est une base orthonormale de $\mathrm{Cent}(Hg)$ et

$$\textbf{(1.3)}\qquad \mathrm{Ind}_{Hg}^G \widetilde{\chi}_g = \sum_{\xi\in(G/H)^\wedge} \xi(g)^{-1}(\widetilde{\chi}\otimes\xi).$$

Ici, un caractère linéaire de G/H est aussi vu comme un caractère linéaire de G.

Démonstration de (**1.3**). — Posons $\gamma = \mathrm{Ind}_{Hg}^G \widetilde{\chi}_g$ et $\gamma' = \sum_{\xi\in(G/H)^\wedge} \xi(g)^{-1}(\widetilde{\chi}\otimes\xi)$. D'après **1.2**, on a, pour $x \in G$,

$$\begin{aligned}
\gamma(x) &= \sum_{\substack{y\in[G/H]\\ y^{-1}xy\in Hg}} \widetilde{\chi}(y^{-1}xy)\\
&= \sum_{\substack{y\in[G/H]\\ y^{-1}xy\in Hg}} \widetilde{\chi}(x)\\
&= \begin{cases} |G/H|\widetilde{\chi}(x) & \text{si } x\in Hg\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\gamma'(x) &= \widetilde{\chi}(x)\Big(\sum_{\xi\in(G/H)^\wedge} \xi(g)^{-1}\xi(x)\Big)\\
&= \begin{cases} |G/H|\widetilde{\chi}(x) & \text{si } x\in Hg\\ 0 & \text{sinon.} \quad \square\end{cases}
\end{aligned}$$

1.D. Groupes algébriques. — Si $\mathbf{H}$ est un groupe algébrique linéaire, nous notons $\mathbf{H}^\circ$ sa composante connexe contenant l'élément neutre, $\mathbf{H}_{\mathrm{uni}}$ sa sous-variété fermée formée des éléments unipotents, $\mathbf{H}_{\mathrm{sem}}$ l'ensemble de ses éléments semi-simples, $\mathbf{Z}(\mathbf{H})$ son centre, $\mathbf{D}(\mathbf{H})$ son groupe dérivé et $\mathbf{R}_u(\mathbf{H})$ son radical unipotent. Nous posons $\mathcal{Z}(\mathbf{H}) = \mathbf{Z}(\mathbf{H})/\mathbf{Z}(\mathbf{H})^\circ$. Nous notons $\mathrm{rg}(\mathbf{H})$ le rang de $\mathbf{H}$ c'est-à-dire la dimension d'un de ses tores maximaux. Nous posons $\mathrm{rg}_{\mathrm{sem}}(\mathbf{H}) = \mathrm{rg}(\mathbf{D}(\mathbf{H}))$. Si $h \in \mathbf{H}$, nous posons $C^\circ_{\mathbf{H}}(h) = C_{\mathbf{H}}(h)^\circ$ et $A_{\mathbf{H}}(h) = C_{\mathbf{H}}(h)/C^\circ_{\mathbf{H}}(h)$. Remarquons que $\mathbf{H}_{\mathrm{sem}} = \mathbf{H}_{p'}$ et que $\mathbf{H}_{\mathrm{uni}} = \mathbf{H}_p$.

Nous appellerons *complément de Levi* de $\mathbf{H}$ tout sous-groupe fermé $\mathbf{L}$ de $\mathbf{H}$ tel que $\mathbf{H} = \mathbf{L} \ltimes \mathbf{R}_u(\mathbf{H})$ (il est à noter qu'il n'existe pas toujours de complément de Levi). Nous appellerons *sous-groupe de Levi* de $\mathbf{H}$ tout complément de Levi d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{H}$. Si $\mathbf{T}$ est un tore de $\mathbf{H}$, nous appellerons *groupe de Weyl de* $\mathbf{H}$ *relativement à* $\mathbf{T}$ le groupe $N_{\mathbf{H}}(\mathbf{T})/C_{\mathbf{H}}(\mathbf{T})$.

Si $F : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ est une isogénie dont une puissance F^δ est un endomorphisme de Frobenius pour une structure rationnelle sur $\mathbf{H}$, on a, d'après le théorème de Lang, $H^1(F, \mathbf{H}) = H^1(F, \mathbf{H}/\mathbf{H}^\circ)$. D'autre part, si $h \in \mathbf{H}^F$, nous noterons, pour alléger les notations lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur F, $\gamma_h^{\mathbf{H}}$ la fonction centrale $\gamma_h^{\mathbf{H}^F}$. Si de plus $\mathbf{H}$ est abélien et si n est un entier naturel non nul, nous notons $N_{F^n/F} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $t \mapsto tF(t) \dots F^{n-1}(t)$ l'application norme.

1.E. Caractères rationnels et sous-groupes à un paramètre. — Soit $\mathbf{H}$ un groupe algébrique linéaire. Nous notons $X(\mathbf{H})$ le groupe (abélien, noté additivement) des caractères rationnels $\mathbf{H} \to \mathbb{F}^\times$ et $Y(\mathbf{H})$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre $\mathbb{F}^\times \to \mathbf{H}$. On a bien sûr $Y(\mathbf{H}) = Y(\mathbf{H}^\circ)$. Si $\pi : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ est un morphisme de groupes algébriques, nous posons $\pi_X : X(\mathbf{H}') \to X(\mathbf{H})$, $x \mapsto x \circ \pi$ et $\pi_Y : Y(\mathbf{H}) \to Y(\mathbf{H}')$, $y \mapsto \pi \circ y$. Remarquons que π_X est un morphisme de groupes. Si $F : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ est l'isogénie précédente, les applications F_X et F_Y seront notées par la même lettre F.

Si $\mathbf{H}$ est commutatif, alors $Y(\mathbf{H})$ est un groupe abélien (que nous noterons additivement) : c'est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $\mathrm{rg}(\mathbf{H})$ et nous définissons alors une forme bilinéaire

$$\langle , \rangle_{\mathbf{H}} : X(\mathbf{H}) \times Y(\mathbf{H}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

par la condition

$$x(y(\xi)) = \xi^{\langle x,y \rangle_{\mathbf{H}}}$$

pour tous $x \in X(\mathbf{H})$, $y \in Y(\mathbf{H})$ et $\xi \in \mathbb{F}^\times$. Cette forme bilinéaire est étendue par linéarité en une forme bilinéaire

$$(X(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \times (Y(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

que l'on notera encore $\langle , \rangle_{\mathbf{H}}$ par abus de notation. Cette dernière forme bilinéaire est non dégénérée.

Si $\pi : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ est un morphisme de groupes algébriques commutatifs, alors π_Y est un morphisme de groupes et π_X et π_Y sont adjoints par rapport à $\langle , \rangle_{\mathbf{H}}$ et $\langle , \rangle_{\mathbf{H}'}$. En d'autres termes,

$$\langle \pi_X(x), y \rangle_{\mathbf{H}} = \langle x, \pi_Y(y) \rangle_{\mathbf{H}'}$$

pour tous $x \in X(\mathbf{H}')$ et $y \in Y(\mathbf{H})$. Nous définissons par ailleurs le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\imath}_{\mathbf{H}} : & Y(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbf{H} \\ & y \otimes_{\mathbb{Z}} r & \longmapsto & y(\tilde{\imath}(r)). \end{array}$$

Soient $x \in X(\mathbf{H})$ et $y \in Y(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Alors

$$x(\tilde{\imath}_{\mathbf{H}}(y)) = \tilde{\imath}(\langle x, y \rangle_{\mathbf{H}}). \tag{1.4}$$

Démonstration de (**1.4**). — Écrivons $y = y' \otimes_{\mathbb{Z}} r$ avec $y' \in Y(\mathbf{H})$ et $r \in \mathbb{Q}$. Alors

$$\begin{aligned} x(\tilde{\imath}_{\mathbf{H}}(y)) &= x(y'(\tilde{\imath}(r))) \\ &= \tilde{\imath}(r)^{\langle x,y' \rangle_{\mathbf{H}}} \\ &= \tilde{\imath}(r\langle x, y' \rangle_{\mathbf{H}}) \\ &= \tilde{\imath}(\langle x, y \rangle_{\mathbf{H}}), \quad \square \end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé.

Remarque. — Si $\mathbf{H}$ est un tore, alors $\langle , \rangle_{\mathbf{H}}$ est une dualité parfaite et $\widetilde{\imath}_{\mathbf{H}}$ est surjective (en effet, l'application $Y(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}^{\times}$, $y \otimes \xi \mapsto y(\xi)$ est un isomorphisme de groupes).

Si A est un groupe agissant sur le groupe commutatif $\mathbf{H}$, nous définissons une action de A sur les $\mathbb{Z}$-modules $X(\mathbf{H})$ et $Y(\mathbf{H})$ par les formules suivantes :

$$\begin{array}{ccc} A \times X(\mathbf{H}) & \longrightarrow & X(\mathbf{H}) \\ (\sigma, x) & \longmapsto & \sigma_X^{-1}(x) = x \circ \sigma^{-1} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} A \times Y(\mathbf{H}) & \longrightarrow & Y(\mathbf{H}) \\ (\sigma, y) & \longmapsto & \sigma_Y(y) = \sigma \circ y. \end{array}$$

Il est alors facile de vérifier que

$$\langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle_{\mathbf{H}} = \langle x, y \rangle_{\mathbf{H}}$$

pour tous $x \in X(\mathbf{H})$, $y \in Y(\mathbf{H})$ et $\sigma \in A$.

1.F. Groupes diagonalisables. — Nous terminons cette section en rappelant quelques faits élémentaires sur les groupes diagonalisables. Premièrement, si $\mathbf{D}'$ est un sous-groupe fermé d'un groupe diagonalisable $\mathbf{D}$ (en particulier, $\mathbf{D}'$ est aussi un groupe diagonalisable), alors la suite de $\mathbb{Z}$-modules

$$0 \longrightarrow X(\mathbf{D}/\mathbf{D}') \longrightarrow X(\mathbf{D}) \longrightarrow X(\mathbf{D}') \longrightarrow 0 \tag{1.5}$$

induite par l'inclusion $\mathbf{D}' \hookrightarrow \mathbf{D}$ est exacte. Si X' est un sous-groupe de $X(\mathbf{D})$ tel que

$$\mathbf{D}' = \{d \in \mathbf{D} \mid \forall\, \chi \in X',\ \chi(d) = 1\}, \tag{$*$}$$

alors l'application naturelle $X(\mathbf{D}) \to X(\mathbf{D}')$ induit un isomorphisme de groupes

$$X(\mathbf{D}') \simeq (X(\mathbf{D})/X')/(X(\mathbf{D})/X')_p. \tag{1.6}$$

Puisque $X(\mathbf{D}'/\mathbf{D}'^{\circ}) \simeq X(\mathbf{D}')_{\mathrm{tors}}$, on déduit de **1.6** un isomorphisme de groupes abéliens finis

$$X(\mathbf{D}'/\mathbf{D}'^{\circ}) \simeq (X(\mathbf{D})/X')_{p'}. \tag{1.7}$$

Nous supposons maintenant, et ce jusqu'à la fin de cette sous-section, que $\mathbf{D}$ est *connexe* (c'est-à-dire que $\mathbf{D}$ est un tore) et que $\mathbf{D}'$ est *fini*. Tout d'abord, l'application

$$\begin{array}{ccc} X(\mathbf{D}') & \longrightarrow & \mathbf{D}'^{\wedge} \\ x & \longmapsto & \kappa \circ x \end{array} \tag{1.8}$$

est un isomorphisme de groupes abéliens finis. L'isomorphisme **1.6** montre que X' est d'indice fini dans $X(\mathbf{D})$. Posons maintenant

$$Y' = \{y \in Y(\mathbf{D}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \mid \forall\, x \in X',\ \langle x, y \rangle_{\mathbf{D}} \in \mathbb{Z}\}.$$

Alors Y' contient $Y(\mathbf{D})$ et la restriction de $\widetilde{\imath}_{\mathbf{D}}$ à Y' a pour image $\mathbf{D}'$ et induit un isomorphisme de groupes abéliens finis

$$(Y'/Y(\mathbf{D}))_{p'} \simeq \mathbf{D}'. \tag{1.9}$$

Démonstration de (**1.9**). — D'après ($*$) et **1.4**, on a $\widetilde{\imath}_{\mathbf{D}}(Y') \subset \mathbf{D}'$. D'autre part, d'après [**Bou52**, §4, n° 8], l'application

$$\begin{array}{ccc} X(\mathbf{D})/X' \times Y'/Y(\mathbf{D}) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times} \\ (x + X', y + Y(\mathbf{D})) & \longmapsto & \widetilde{\jmath}(\langle x, y\rangle_{\mathbf{D}}) \end{array}$$

est une dualité parfaite. Cela montre que $\widetilde{\imath}_{\mathbf{D}}(Y') = \mathbf{D}'$ et que l'on a bien un isomorphisme $(Y'/Y(\mathbf{D}))_{p'} \simeq \mathbf{D}'$ (toujours grâce à **1.4**). □

Lemme 1.10. — *Soit $y \in Y(\mathbf{D})$ et soit $n \in \mathbb{Z}$, premier à p, tels que $y(\widetilde{\imath}(1/n)) = 1$. Alors il existe $y_0 \in Y(\mathbf{D})$ tel que $y = ny_0$.*

Démonstration. — On a $|\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F})| = n$ car n est premier à p. De plus, $\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F}) \subset \operatorname{Ker} y$ par hypothèse. Donc y induit un morphisme de groupes algébriques $\bar{y} : \mathbb{F}^\times/\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F}) \to \mathbf{D}$.

Mais l'application $\mathbb{F}^\times \to \mathbb{F}^\times$, $\xi \mapsto \xi^n$ est séparable car p ne divise pas n. Donc elle induit un isomorphisme de groupes algébriques $\alpha : \mathbb{F}^\times/\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^\times$. Soit $y_0 = \bar{y}\circ\alpha^{-1}$. Alors $y_0 \in Y(\mathbf{D})$ et $y = ny_0$ par construction. □

Proposition 1.11. — *Soient $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ deux tores et soit $\pi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ un morphisme de groupes algébriques de noyau fini. Alors le morphisme $\pi_Y : Y(\mathbf{T}) \to Y(\mathbf{T}')$ est injectif et on a un isomorphisme naturel*

$$(Y(\mathbf{T}')/\operatorname{Im}\pi_Y)_{p'} \simeq \operatorname{Ker}\pi.$$

Démonstration. — Soit $y \in \operatorname{Ker}\pi_Y$. Alors l'image de y est contenue dans $\operatorname{Ker}\pi$ mais est aussi connexe et contient 1. Donc $y = 0$ car $\operatorname{Ker}\pi$ est fini : l'injectivité de π_Y est prouvée.

Notons Y' le sous-groupe de $Y(\mathbf{T}')$ formé des éléments $y' \in Y(\mathbf{T}')$ tels que $ny' \in \operatorname{Im}\pi_Y$ pour un $n \in \mathbb{Z}$ premier à p. Alors $\operatorname{Im}\pi_Y \subset Y'$ et, par construction, $Y'/\operatorname{Im}\pi_Y = (Y(\mathbf{T}')/\operatorname{Im}\pi_Y)_{p'}$.

Soit $y' \in Y'$ et soit $n \in \mathbb{Z}$, non divisible par p, tels que $ny' \in \operatorname{Im}\pi_Y$. Soit y l'unique élément de $Y(\mathbf{T})$ tel que $\pi_Y(y) = ny'$. On pose

$$\sigma(y') = y\Big(\widetilde{\imath}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \in \mathbf{T}.$$

Alors $\pi(\sigma(y')) = (ny')(\widetilde{\imath}(1/n)) = 1$ donc $\sigma(y') \in \operatorname{Ker}\pi$. Il est facile de vérifier que l'application

$$\sigma : Y' \longrightarrow \operatorname{Ker}\pi$$

est bien définie et est un morphisme de groupes.

Il est aussi facile de voir que $\operatorname{Im}\pi_Y \subset \operatorname{Ker}\sigma$. Réciproquement, soit $y' \in \operatorname{Ker}\sigma$. Soient $n \in \mathbb{Z}$, premier à p, et $y \in Y(\mathbf{T})$ tels que $ny' = \pi_Y(y)$. Alors

$$y\Big(\widetilde{\imath}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = 1.$$

D'après le lemme **1.10**, il existe $y_0 \in Y(\mathbf{T})$ tel que $y = ny_0$. En particulier, $y' = \pi_Y(y_0)$ donc $\operatorname{Ker}\sigma \subset \operatorname{Im}\pi_Y$. Cela montre que $\operatorname{Ker}\sigma = \operatorname{Im}\pi_Y$.

Il reste à prouver que σ est surjectif. Soit $t \in \operatorname{Ker} \pi$ et soit n l'ordre de t. Alors n est premier à p et, puisque $\mathbf{T}$ est connexe, il existe $y \in Y(\mathbf{T})$ tel que $t = y(\tilde{\imath}(1/n))$ (voir par exemple [**DM91**, Proposition 0.20]). Alors $\pi_Y(y)(\tilde{\imath}(1/n)) = 1$ donc, d'après le lemme **1.10**, il existe $y' \in Y(\mathbf{T}')$ tel que $ny' = \pi_Y(y)$. Alors $y' \in Y'$ et $\sigma(y') = t$ par construction. □

1.G. Dualité entre tores. — Soient $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}^*$ deux tores. On suppose qu'ils sont munis respectivement d'isogénies F et F^* dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius. Nous dirons que $(\mathbf{T}, F)$ et $(\mathbf{T}^*, F^*)$ sont *duaux* (ou simplement que $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}^*$ sont *duaux*) s'il existe un isomorphisme $\nu : X(\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} Y(\mathbf{T}^*)$ tel que $F^* \circ \nu = \nu \circ F$. Bien sûr, la relation de dualité est symétrique car, en utilisant les dualités parfaites données par $\langle , \rangle_{\mathbf{T}}$ et $\langle , \rangle_{\mathbf{T}^*}$, le morphisme adjoint $\nu^* : X(\mathbf{T}^*) \to Y(\mathbf{T})$ de ν est un isomorphisme.

Supposons donc que $(\mathbf{T}, F)$ et $(\mathbf{T}^*, F^*)$ sont duaux et soit $\nu : X(\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} Y(\mathbf{T}^*)$ un isomorphisme tel que $F^* \circ \nu = \nu \circ F$. Nous identifierons $X(\mathbf{T})$ et $Y(\mathbf{T}^*)$ via ν et nous identifierons $X(\mathbf{T}^*)$ et $Y(\mathbf{T})$ via ν^*. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{T}^F \longrightarrow \mathbf{T} \xrightarrow{F-1} \mathbf{T} \longrightarrow 1.$$

De plus, le morphisme $F - 1 : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ est étale, donc induit un isomorphisme entre $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}/\mathbf{T}^F$. D'après **1.5**, on obtient alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow X(\mathbf{T}) \xrightarrow{F-1} X(\mathbf{T}) \longrightarrow X(\mathbf{T}^F) \longrightarrow 0. \tag{1.12}$$

Par dualité, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow Y(\mathbf{T}^*) \xrightarrow{F^*-1} Y(\mathbf{T}^*) \longrightarrow X(\mathbf{T}^F) \longrightarrow 0. \tag{1.13}$$

Soit maintenant n un entier naturel non nul tel que F^n soit un endomorphisme de Frobenius déployé pour une structure sur un corps fini à q éléments. L'application $\mathbf{T}^{*F^{*n}} \to \mathbf{T}^{*F^*}$, $t \mapsto N_{F^{*n}/F^*}(t)$ est surjective. De plus l'application $Y(\mathbf{T}^*) \to \mathbf{T}^{*F^{*n}}$, $y \mapsto y(\tilde{\imath}(1/(q-1)))$ est surjective. Il est alors facile de vérifier que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow Y(\mathbf{T}^*) \xrightarrow{F^*-1} Y(\mathbf{T}^*) \xrightarrow{f} \mathbf{T}^{*F^*} \longrightarrow 0, \tag{1.14}$$

où $f : Y(\mathbf{T}^*) \to \mathbf{T}^{*F^*}$, $y \mapsto N_{F^{*n}/F^*}(y(\tilde{\imath}(1/(q-1))))$. Il est à noter que l'application f ne dépend pas du choix de n. La comparaison des suites exactes **1.13** et **1.14** et l'isomorphisme **1.8** fournit un isomorphisme $\mathbf{T}^{*F^*} \simeq (\mathbf{T}^F)^\wedge$. Cet isomorphisme ne dépend que du choix de $\imath$ et $\jmath$.

Nous allons l'expliciter. Soit $s \in \mathbf{T}^{*F^*}$. Notons $\hat{s}$ le caractère linéaire de $\mathbf{T}^F$ défini par s via l'isomorphisme précédent. Pour calculer $\hat{s}$, il faut tout d'abord trouver un élément $y \in Y(\mathbf{T}^*) \simeq X(\mathbf{T})$ tel que $s = N_{F^{*n}/F^*}(y(\tilde{\imath}(1/(q-1))))$. Alors

$$\hat{s} = \kappa \circ \operatorname{Res}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{T}^F} y. \tag{1.15}$$

2. Le contexte

2.A. Le problème. — Nous nous intéressons dans cet article à la théorie des caractères d'un groupe fini de la forme $\mathbf{G}^F$ (paramétrage des caractères, table de caractères, théorie de Deligne-Lusztig, théorie de Harish-Chandra, conjecture de Lusztig sur les faisceaux-caractères...), où $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe et $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ est une isogénie telle que F^δ est l'endomorphisme de Frobenius de $\mathbf{G}$ relatif à une structure rationnelle sur $\mathbf{G}$.

Nous nous concentrons plus particulièrement sur les problèmes reliés à la non connexité du centre de $\mathbf{G}$. En d'autres termes, nous essayons de résoudre les questions concernant les groupes à centre non connexe en supposant que la même question est résolue pour les groupes à centre connexe. La stratégie habituelle est la suivante. Il est possible [**DL76**] de construire un groupe réductif connexe $\widetilde{\mathbf{G}}$ (muni lui aussi d'une isogénie encore notée F) dont $\mathbf{G}$ est un sous-groupe fermé F-stable contenant $\mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{G}})$. L'étude précise du foncteur de restriction $\mathrm{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}$ fournit alors des éléments de réponse (théorie de Clifford).

Remarque. — Il n'est pas déraisonnable de supposer que beaucoup de choses sont connues pour les groupes à centre connexe. Par exemple, la conjecture de Lusztig sur les faisceaux-caractères a été résolue par T. Shoji [**Sho95**].

C'est d'autant moins déraisonnable que notre but est d'étudier le groupe spécial linéaire. En effet, ce groupe est inclus dans le groupe général linéaire et pratiquement tout ce qui concerne la table de caractères de ce dernier est connu (aussi bien du point de vue élémentaire de J.A. Green [**Gre55**], que du point de vue de la théorie de Deligne-Lusztig [**LS77**], voire même du point de vue de la théorie des faisceaux-caractères : le lien entre ces trois théories est lui aussi bien compris).

2.B. Plongements. — Comme expliqué ci-dessus, l'un des buts de cet article est d'étudier les foncteurs de restriction entre groupes de même type. Pour cela, nous fixons un groupe réductif connexe $\widetilde{\mathbf{G}}$ muni d'une isogénie $F : \widetilde{\mathbf{G}} \to \widetilde{\mathbf{G}}$ telle que F^δ est un endomorphisme de Frobenius de $\widetilde{\mathbf{G}}$ relatif à une structure sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ (ici, δ est un entier naturel non nul et q est une puissance de p fixés une fois pour toutes : bien qu'ils ne soient pas uniquement déterminés par la donnée de $(\mathbf{G}, F)$, le nombre réel positif $q^{1/\delta}$ l'est).

Nous fixons aussi un sous-groupe fermé connexe F-stable $\mathbf{G}$ de $\widetilde{\mathbf{G}}$. Tout au long de cet article, nous supposerons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(1) Le centre de $\widetilde{\mathbf{G}}$ est connexe ;
(2) Le groupe $\mathbf{G}$ contient le groupe dérivé de $\widetilde{\mathbf{G}}$.

Remarque 2.1. — Puisque tout groupe réductif peut-être plongé dans un groupe à centre connexe de même type [**DL76**], les résultats que nous allons démontrer concernant le groupe $\mathbf{G}$ seront vrais pour tous les groupes réductifs connexes.

Il résulte de ces hypothèses que $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) = \mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}}) \cap \mathbf{G}$ et $\widetilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})$. De plus, $\mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{G}}) = \mathbf{D}(\mathbf{G})$. Nous notons

$$i : \mathbf{G} \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{G}}$$

l'inclusion canonique.

Nous fixons aussi dans cet article un sous-groupe de Borel F-stable $\widetilde{\mathbf{B}}_0$ de $\widetilde{\mathbf{G}}$ ainsi qu'un tore maximal F-stable $\widetilde{\mathbf{T}}_0$ de $\widetilde{\mathbf{B}}_0$. Nous notons $\mathbf{U}_0$ le radical unipotent de $\widetilde{\mathbf{B}}_0$. On pose

$$\mathbf{B}_0 = \widetilde{\mathbf{B}}_0 \cap \mathbf{G} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{T}_0 = \widetilde{\mathbf{T}}_0 \cap \mathbf{G}.$$

Alors $\mathbf{B}_0$ est un sous-groupe de Borel F-stable de $\mathbf{G}$, $\mathbf{T}_0$ est un tore maximal F-stable de $\mathbf{B}_0$ et $\mathbf{U}_0$ est le radical unipotent de $\mathbf{B}_0$.

2.C. Système de racines. — Nous notons W_0 le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}_0$; remarquons que W_0 est canoniquement isomorphe au groupe de Weyl de $\widetilde{\mathbf{G}}$ relativement à $\widetilde{\mathbf{T}}_0$. Nous notons Φ_0 (respectivement $\widetilde{\Phi}_0$) le système de racines de $\mathbf{G}$ (respectivement $\widetilde{\mathbf{G}}$) relativement à $\mathbf{T}_0$ (respectivement $\widetilde{\mathbf{T}}_0$). Le morphisme $i_X : X(\widetilde{\mathbf{T}}_0) \to X(\mathbf{T}_0)$ associé à i induit une bijection entre Φ_0 et $\widetilde{\Phi}_0$. Nous notons Δ_0 (respectivement $\widetilde{\Delta}_0$) la base de Φ_0 (respectivement $\widetilde{\Phi}_0$) associée à $\mathbf{B}_0$ (respectivement $\widetilde{\mathbf{B}}_0$). Si $\alpha \in \Phi_0$, nous notons $\mathbf{U}_\alpha$ le sous-groupe unipotent de dimension 1 de $\mathbf{G}$ normalisé par $\mathbf{T}_0$ et associé à α.

Soit $\phi_0 : X(\mathbf{T}_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to X(\mathbf{T}_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ l'automorphisme d'ordre fini égal à $q^{-1/\delta}F$. Puisqu'il est d'ordre fini, on a $\det \phi_0 \in \{1, -1\}$. Nous poserons

$$\varepsilon_{\mathbf{G}} = (-1)^{\mathrm{rg}\,\mathbf{G}} \det \phi_0 \qquad \text{et} \qquad \eta_{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{D}(\mathbf{G})}.$$

D'autre part, ϕ_0 normalise W_0 et induit sur W_0 le même automorphisme que celui induit par F. Nous noterons aussi $\phi_0 : Y(\mathbf{T}_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to Y(\mathbf{T}_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ l'automorphisme d'ordre fini égal à $q^{-1/\delta}F$. Pour finir, nous noterons $\widetilde{\phi}_0 : \Phi_0 \to \Phi_0$ la bijection telle que, pour toute racine $\alpha \in \Phi_0$, il existe un entier naturel δ_α tel que $F(\alpha) = p^{\delta_\alpha}\widetilde{\phi}_0(\alpha)$ (si ω est une orbite sous l'action de $\widetilde{\phi}_0$, alors $\sum_{\alpha \in \omega} \delta_\alpha > 0$). Bien sûr, $\widetilde{\phi}_0$ stabilise Δ_0 et Φ_0^+.

Si I est une partie de Δ_0, nous noterons Φ_I le sous-système de Φ_0 de base I, W_I le groupe de Weyl de Φ_I, w_I son élément de plus grande longueur, $\mathbf{P}_I$ le sous-groupe parabolique $\mathbf{B}_0 W_I \mathbf{B}_0$ de $\mathbf{G}$, $\mathbf{U}_I$ son radical unipotent et $\mathbf{L}_I$ le complément de Levi de $\mathbf{P}_I$ contenant $\mathbf{T}_0$. Alors $\mathbf{P}_I$ (ou $\mathbf{L}_I$) est F-stable si et seulement si $\widetilde{\phi}_0(I) = I$.

2.D. Dualité. — Nous fixons un triplet $(\widetilde{\mathbf{G}}^*, \widetilde{\mathbf{T}}_0^*, F^*)$ dual de $(\widetilde{\mathbf{G}}, \widetilde{\mathbf{T}}_0, F)$ au sens de [**DM91**, définition 13.10]. Nous fixons aussi un triplet $(\mathbf{G}^*, \mathbf{T}_0^*, F^*)$ dual de $(\mathbf{G}, \mathbf{T}_0, F)$. Le morphisme i induit un morphisme $i^* : \widetilde{\mathbf{G}}^* \to \mathbf{G}^*$ commutant avec F^* et tel que $i^*(\widetilde{\mathbf{T}}_0^*) = \mathbf{T}_0^*$. Il faut cependant faire attention : i^* n'est pas uniquement déterminé par i. Il n'est défini qu'à composition près par un automorphisme intérieur induit par un élément de $\mathbf{T}_0^{*F^*}$. Notons que i^* est surjectif.

2.E. Un résultat à la Borel-Tits. — Borel et Tits ont montré, pour un groupe réductif défini sur un corps quelconque K, que tout K-complément de Levi d'un K-sous-groupe parabolique est le centralisateur d'un K-tore déployé [**BT65**, théorème 4.15].

Ici, F ne définit pas forcément une structure sur un corps fini, mais il est tout de même possible de donner une caractérisation similaire des compléments de Levi F-stables de sous-groupes paraboliques F-stables. Un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$ est dit $\mathbf{G}$-*déployé* (ou $(\mathbf{G}, F)$-*déployé* s'il peut y avoir ambiguïté sur l'isogénie) s'il existe un sous-groupe parabolique F-stable de $\mathbf{G}$ dont c'est un complément de Levi.

Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$. On note Φ et $\Phi_{\mathbf{L}}$ les systèmes de racines respectifs de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{L}$ relativement à $\mathbf{T}$.

Proposition 2.2. — *Avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathbf{L}$ *est* $\mathbf{G}$-*déployé.*

(2) *On a*

$$\Phi_{\mathbf{L}} = \{\alpha \in \Phi \mid \forall v \in \operatorname{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta})),\ \langle \alpha, v\rangle_{\mathbf{T}} = 0\}.$$

(3) *Il existe un sous-*$\mathbb{Q}(q^{1/\delta})$*-espace vectoriel* E *de* $\operatorname{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta}))$ *tel que*

$$\Phi_{\mathbf{L}} = \{\alpha \in \Phi \mid \forall v \in E,\ \langle \alpha, v\rangle_{\mathbf{T}} = 0\}.$$

(4) *Il existe* $v \in \operatorname{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta}))$ *tel que*

$$\Phi_{\mathbf{L}} = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, v\rangle_{\mathbf{T}} = 0\}.$$

Remarque. — Lorsque F est un endomorphisme de Frobenius (par exemple lorsque $\delta = 1$), alors la proposition précédente est une conséquence immédiate du théorème de Borel-Tits.

Démonstration. — Il est clair que (4) $\Rightarrow$ (3). Le fait que (3) $\Rightarrow$ (4) résulte de la finitude de Φ et du fait que $\mathbb{Q}(q^{1/\delta})$ est un corps infini.

Montrons maintenant que (4) $\Rightarrow$ (1). Notons $\widetilde{\phi} : \Phi \to \Phi$ la bijection telle que $F(\alpha)$ soit un multiple positif de $\widetilde{\phi}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Posons

$$\Psi = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, v\rangle_{\mathbf{T}} \geqslant 0\}.$$

Alors $\widetilde{\phi}(\Psi) = \Psi$. De plus, Ψ est close, $\Psi \cap -\Psi = \Phi_{\mathbf{L}}$ et $\Psi \cup -\Psi = \Phi$. Donc il existe un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ dont $\mathbf{L}$ est un complément de Levi et dont Ψ est le « système de racines » relativement à $\mathbf{T}$. Puisque $\widetilde{\phi}(\Psi) = \Psi$, $\mathbf{P}$ est F-stable.

Montrons maintenant que (1) $\Rightarrow$ (4). Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique F-stable de $\mathbf{G}$ dont $\mathbf{L}$ est un complément de Levi. Fixons un entier naturel non nul n tel que

$F^{n\delta}(t) = t^{q^n}$ pour tout $t \in \mathbf{T}$. Notons μ l'endomorphisme de $Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta})$ égal à $\sum_{k=0}^{n\delta-1} q^{k/\delta} F^{n\delta-1-k}$. Alors $\mu \circ (F - q^{1/\delta}) = 0$ et

$$(*) \qquad Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta}) = \operatorname{Ker}(F - q^{1/\delta}) \oplus \operatorname{Ker} \mu.$$

Notons Ψ le « système de racines » de $\mathbf{P}$ relativement à $\mathbf{T}$. Alors il existe $\lambda \in Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ)$ tel que

$$\Psi = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \lambda \rangle_{\mathbf{T}} \geqslant 0\}.$$

Écrivons $\lambda = v_1 + v_2$, où v_1 et v_2 appartiennent à $Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta})$ et vérifient $F(v_1) = q^{1/\delta} v_1$ et $\mu(v_2) = 0$ (voir $(*)$). Posons

$$\Psi' = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, v_1 \rangle_{\mathbf{T}} \geqslant 0\}.$$

Nous allons montrer que $\Psi = \Psi'$. Soit $\alpha \in \Psi$. Puisque Ψ est $\widetilde{\phi}$-stable, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\langle F^k(\alpha), \lambda \rangle_{\mathbf{T}} = \langle \alpha, F^k(\lambda) \rangle_{\mathbf{T}} \geqslant 0$. Par conséquent $\langle \alpha, \mu(\lambda) \rangle_{\mathbf{T}} \geqslant 0$ ou, en d'autres termes, $\langle \alpha, n\delta v_1 \rangle_{\mathbf{T}} \geqslant 0$. Donc $\alpha \in \Psi'$. Réciproquement, soit $\alpha \in \Psi'$. Supposons que $\langle \alpha, \lambda \rangle_{\mathbf{T}} < 0$. Alors, puisque $\Phi \setminus \Psi$ est $\widetilde{\phi}$-stable, on obtient comme précédemment que $\langle \alpha, \mu(\lambda) \rangle_{\mathbf{T}} \langle 0$, c'est-à-dire $\langle \alpha, n\delta v_1 \rangle_{\mathbf{T}} < 0$.

Puisque (3) $\Rightarrow$ (1), on en déduit que (2) $\Rightarrow$ (1). Pour finir, montrons que (1) $\Rightarrow$ (2). Notons

$$\Phi' = \{\alpha \in \Phi \mid \forall v \in \operatorname{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta})),\ \langle \alpha, v \rangle_{\mathbf{T}} = 0\}$$

et soit $v_0 \in \operatorname{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{T}) \otimes \mathbb{Q}(q^{1/\delta}))$ tel que

$$\Phi_{\mathbf{L}} = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, v_0 \rangle_{\mathbf{T}} = 0\}.$$

Alors $v_0 \in \operatorname{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ) \otimes \mathbb{Q}(q^{1/\delta}))$ et donc $\Phi' \subset \Phi_{\mathbf{L}} \subset \Phi'$. □

Corollaire 2.3. — *Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de* $\operatorname{Ker}(F - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q^{1/\delta}))$ *et $\mathcal{L}$ l'ensemble des sous-groupes de Levi F-stables $\mathbf{G}$-déployés de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$. Si $E \in \mathcal{E}$, notons $\mathbf{L}_E$ le sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$ dont le système de racines relativement à $\mathbf{T}$ est*

$$\{\alpha \in \Phi \mid \forall v \in E,\ \langle \alpha, v \rangle = 0\}.$$

Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ E & \longmapsto & \mathbf{L}_E \end{array}$$

est une surjection décroissante.

Remarque 2.4. — Soient $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ deux sous-groupes paraboliques F-stables de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$ et soient $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{L}_2$ les compléments de Levi respectifs de $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ contenant $\mathbf{T}$ (ils sont donc F-stables). Notons $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_2$ les radicaux unipotents respectifs de $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$. Alors, d'après par exemple [**DM91**, proposition 2.1], $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ est un complément de Levi F-stable du sous-groupe parabolique F-stable $(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2).\mathbf{U}_1$ de $\mathbf{G}$. Cela montre qu'il existe un sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{G}$-déployé minimal contenant $\mathbf{T}$.

Cela aurait pu se voir grâce au corollaire **2.3** dont nous reprenons les notations : ce sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{G}$-déployé minimal est $\mathbf{L}_{\operatorname{Ker}(F-q^{1/\delta})}$.

2.F. Quelques propriétés du morphisme i^*. — Soit $\widetilde{\mathbf{T}}$ un tore maximal F-stable de $\widetilde{\mathbf{G}}$ et soit $\widetilde{\mathbf{T}}^*$ un tore maximal F^*-stable de $\widetilde{\mathbf{G}}^*$ dual de $\widetilde{\mathbf{T}}$. On pose

$$\mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{T}^* = j^*(\widetilde{\mathbf{T}}^*).$$

Alors, d'après **1.5**, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow X(\widetilde{\mathbf{T}}/\mathbf{T}) \longrightarrow X(\widetilde{\mathbf{T}}) \longrightarrow X(\mathbf{T}) \longrightarrow 0.$$

Tous les groupes impliqués dans cette suite exacte sont sans torsion donc, par dualité, on obtient que la suite

$$0 \longrightarrow X(\mathbf{T}^*) \longrightarrow X(\widetilde{\mathbf{T}}^*) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X(\widetilde{\mathbf{T}}/\mathbf{T}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

est exacte. Ici, l'application $X(\mathbf{T}^*) \to X(\widetilde{\mathbf{T}}^*)$ est induite par le morphisme $i^* : \widetilde{\mathbf{T}}^* \to \mathbf{T}^*$. En utilisant à nouveau **1.5**, on obtient un isomorphisme de groupes

$$\operatorname{Hom}(X(\widetilde{\mathbf{T}}/\mathbf{T}), \mathbb{Z}) \simeq X(\operatorname{Ker} i^*).$$

Cela prouve la proposition suivante :

Proposition 2.5. — *Le groupe* $\operatorname{Ker} i^*$ *est un tore central F^*-stable de $\widetilde{\mathbf{G}}^*$ qui est dual de $\widetilde{\mathbf{T}}/\mathbf{T}$. De plus, cette dualité est compatible avec les isogénies F et F^*.*

Corollaire 2.6. — *Les tores $\widetilde{\mathbf{G}}/\mathbf{G}$ et* $\operatorname{Ker} i^*$ *sont duaux et cette dualité est compatible avec les isogénies F et F^*.*

Démonstration. — En effet, l'injection $\widetilde{\mathbf{T}} \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{G}}$ induit un isomorphisme de groupes algébriques $\widetilde{\mathbf{T}}/\mathbf{T} \simeq \widetilde{\mathbf{G}}/\mathbf{G}$. □

Si $z \in (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*}$, nous notons $\hat{z}^{\widetilde{\mathbf{G}}}$ le caractère linéaire de $\widetilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F$ défini par la dualité du corollaire **2.6**. Nous identifions $\hat{z}^{\widetilde{\mathbf{G}}}$ avec le caractère linéaire de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ qu'il induit.

Corollaire 2.7. — *Le morphisme $i^* : \widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*} \to \mathbf{G}^{*F^*}$ est surjectif.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la connexité de $\operatorname{Ker} i^*$ et du théorème de Lang. □

2.G. Action de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ sur $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F)$. — Si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ et si $\gamma \in \operatorname{Cent} \mathbf{G}^F$, on pose

$$\begin{array}{rccc} t_z^{\mathbf{G}}\gamma : & \mathbf{G}^F & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}_\ell \\ & g & \longmapsto & \gamma(zg). \end{array}$$

Alors $t_z^{\mathbf{G}}\gamma \in \operatorname{Cent} \mathbf{G}^F$ et l'application

$$t_z^{\mathbf{G}} : \operatorname{Cent} \mathbf{G}^F \longrightarrow \operatorname{Cent} \mathbf{G}^F$$

est une isométrie. D'autre part, l'application

$$t^{\mathbf{G}} : \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F \longrightarrow \mathbf{GL}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\operatorname{Cent} \mathbf{G}^F)$$

est un morphisme de groupes, c'est-à-dire que l'on a défini ainsi une action de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ par isométries sur $\operatorname{Cent} \mathbf{G}^F$.

3. Fourre-tout

3.A. Morphismes isotypiques. — Un morphisme $\pi : \hat{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ entre groupes réductifs est dit *isotypique* si $\operatorname{Ker} \pi$ est central et $\pi(\hat{\mathbf{G}})$ contient le groupe dérivé de $\mathbf{G}$.

Exemple 3.1. — Les morphismes i et i^* sont isotypiques.

3.B. Sous-groupes de Levi auto-opposés. — Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$. On dit que $\mathbf{L}$ est ($\mathbf{G}$-)*auto-opposé* si, pour tout sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{L}$ strictement, on a $|N_{\mathbf{M}}(\mathbf{L})/\mathbf{L}| \geqslant 2$. D'après [**How80**], $\mathbf{L}$ est $\mathbf{G}$-auto-opposé si et seulement si tous les sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ dont $\mathbf{L}$ est un complément de Levi sont conjugués.

Le groupe $\mathbf{G}$ est dit *universellement auto-opposé* si, pour tout morphisme isotypique $\pi : \hat{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ et pour tout groupe réductif $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ dont $\hat{\mathbf{G}}$ est un sous-groupe de Levi, $\hat{\mathbf{G}}$ est $\hat{\mathbf{\Gamma}}$-auto-opposé.

Exemples 3.2

(a) S'il existe une classe unipotente de $\mathbf{G}$ supportant un système local cuspidal (au sens de [**Lus84b**, introduction]), alors $\mathbf{G}$ est universellement auto-opposé [**Lus84b**, théorème 9.2].

(b) Comme nous le verrons dans la proposition **7.1** (b), un groupe cuspidal (voir §7 pour la définition) est universellement auto-opposé.

Soit maintenant I une partie de Δ_0. Alors I est dite (W-)*auto-opposée* si $\mathbf{L}_I$ est $\mathbf{G}$-auto-opposé. Posons

$$W(I) = \{w \in W \mid w(I) = I\},$$
$$W^I = \{w \in W \mid w(I) \subset \Delta_0\}$$

et

$$I^{(1)} = \bigcap_{w \in W^I} w(I).$$

Il est clair que $W(I) \subset W^I$ et il est bien connu que $N_W(W_I) = W(I) \ltimes W_I$. La deuxième définition de sous-groupe de Levi auto-opposé montre que I est W-auto-opposée si et seulement si $W(I) = W^I$, c'est-à-dire si et seulement si $I = I^{(1)}$.

Définissons une suite décroissante $(I^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de Δ_0 par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} I^{(0)} = I \\ I^{(n+1)} = (I^{(n)})^{(1)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Posons $I^{(\infty)} = \cap_{n \in \mathbb{N}} I^{(n)}$. Alors $I^{(\infty)}$ est la plus grande partie W-auto-opposée de Δ_0 contenue dans I.

3.C. Centralisateurs de sous-tores de G. — Le résultat suivant est une généralisation de [**Bon99a**, corollaire 4.2.3] :

Lemme 3.3. — *Soit* $\mathbf{B}$ *un sous-groupe de Borel de* $\mathbf{G}$ *et soit* $\mathbf{T}$ *un tore maximal de* $\mathbf{B}$. *Notons* $\mathbf{L}$ *un complément de Levi d'un sous-groupe parabolique* $\mathbf{P}$ *de* $\mathbf{G}$ *tels que* $\mathbf{T} \subset \mathbf{L}$ *et* $\mathbf{B} \subset \mathbf{P}$. *Soit* Φ^+ *(respectivement* $\Phi^+_{\mathbf{L}}$*) le système de racines positives de* $\mathbf{G}$ *(respectivement* $\mathbf{L}$*) relativement à* $\mathbf{T}$ *associé à* $\mathbf{B}$. *Soit* A *un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(\mathbf{T})$ *stabilisant* Φ^+ *et* $\Phi_{\mathbf{L}}$ *et notons* $W_{\mathbf{L}}$ *le groupe de Weyl de* $\mathbf{L}$ *relativement à* $\mathbf{T}$. *Alors*

$$C_{\mathbf{G}}\big((\mathbf{T}^{W_{\mathbf{L}} \rtimes A})^\circ\big) = \mathbf{L}.$$

Remarque. — Gardons les notations du lemme **3.3**. Alors $W_{\mathbf{L}}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbf{T})$ normalisé par A et $W_{\mathbf{L}} \cap A = \{1\}$ car A stabilise Φ^+ : le produit semi-direct $W_{\mathbf{L}} \rtimes A$ est donc bien défini. De plus, $(\mathbf{T}^{W_{\mathbf{L}}})^\circ = \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$ et ce dernier tore est stable sous l'action de A. Le lemme **3.3** dit donc que

$$C_{\mathbf{G}}\big((\mathbf{Z}(\mathbf{L})^A)^\circ\big) = \mathbf{L}. \square \tag{3.4}$$

Démonstration. — Le groupe $(\mathbf{T}^{W_{\mathbf{L}} \rtimes A})^\circ$ est un sous-tore de $\mathbf{G}$ donc $\mathbf{M} = C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}^{W_{\mathbf{L}} \rtimes A})^\circ)$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$. De plus, $\mathbf{L} \subset \mathbf{M}$ par la remarque précédente.

Soit $\alpha \in \Phi^+$ une racine de $\mathbf{M}$ relativement à $\mathbf{T}$. Alors, d'après [**Bon99a**, Proposition 4.2.1], on a

$$\sum_{g \in A \ltimes W_{\mathbf{L}}} g(\alpha) = 0.$$

Soit

$$\beta = \sum_{w \in W_{\mathbf{L}}} w(\alpha).$$

Supposons que $w(\alpha)$ soit positive pour tout $w \in W_{\mathbf{L}}$. Alors β est une somme de racines positives et

$$\sum_{a \in A} a(\beta) = 0$$

ce qui contredit le fait que A stabilise Φ^+. Donc il existe $w \in W_{\mathbf{L}}$ tel que $w(\alpha)$ n'est pas positive. Par conséquent, $\alpha \in \Phi_{\mathbf{L}}$ car $\mathbf{T} \subset \mathbf{L}$ et $\mathbf{B} \subset \mathbf{P}$. □

3.D. Centralisateur d'éléments semi-simples. — Nous rappelons ici le théorème de Steinberg [**Ste68**, théorème 8.1] :

***Théorème 3.5* (Steinberg)**. — *Si* $\widetilde{s} \in \widetilde{\mathbf{G}}^*$ *est semi-simple, alors* $C_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s})$ *est connexe.*

Remarque. — Le théorème de Steinberg nécessite l'hypothèse de connexité du centre de $\widetilde{\mathbf{G}}$. Il n'y a pas de résultat analogue pour le groupe $\mathbf{G}^*$.

CHAPITRE 2

LE GROUPE $\mathcal{Z}(\mathrm{G})$

Nous étudions ici en détails le groupe des composantes du centre $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Les résultats de ce chapitre sont pour la plupart classiques, sauf les propositions **5.4** et **8.10**. Dans la section 4, nous étudions le morphisme surjectif $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ lorsque $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$. Dans la section 5, nous montrons comment calculer le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et le noyau du morphisme précédent en termes du diagramme de Dynkin affine, du moins lorsque $\mathbf{G}$ est simplement connexe. La section 6 est consacrée aux multiples réalisations du groupe $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ ainsi qu'à ses liens avec les éléments semi-simples de $\mathbf{G}^*$. Dans la section 7, nous rappelons les différentes notions de cuspidalités introduites par l'auteur ([**Bon99b**], [**Bon00a**] et [**Bon04b**]).

Notations

Nous fixons dans ce chapitre un tore maximal F-stable $\widetilde{\mathbf{T}}$ de $\widetilde{\mathbf{G}}$ et nous posons $\mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}$. Nous notons W le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}$; remarquons que W est canoniquement isomorphe au groupe de Weyl de $\widetilde{\mathbf{G}}$ relativement à $\widetilde{\mathbf{T}}$. Nous notons Φ (respectivement $\widetilde{\Phi}$) le système de racines de $\mathbf{G}$ (respectivement $\widetilde{\mathbf{G}}$) relativement à $\mathbf{T}$ (respectivement $\widetilde{\mathbf{T}}$). Le morphisme $i_X : X(\widetilde{\mathbf{T}}) \to X(\mathbf{T})$ associé à i induit une bijection entre Φ et $\widetilde{\Phi}$.

Nous fixons aussi un sous-groupe de Borel $\widetilde{\mathbf{B}}$ de $\widetilde{\mathbf{G}}$ contenant $\widetilde{\mathbf{T}}$ et nous posons $\mathbf{B} = \widetilde{\mathbf{B}} \cap \mathbf{G}$. Il est à noter que $\widetilde{\mathbf{B}}$ n'est pas nécessairement F-stable. Nous notons Δ (respectivement $\widetilde{\Delta}$) la base de Φ (respectivement $\widetilde{\Phi}$) associée à $\mathbf{B}$ (respectivement $\widetilde{\mathbf{B}}$). Alors Δ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $X(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$: nous notons $(\varpi_\alpha^\vee)_{\alpha \in \Delta}$ la base de $Y(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ duale de Δ (pour la dualité induite par $\langle , \rangle_{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ}$).

Si I est une partie de Δ, nous notons Φ_I le sous-système de racines parabolique ayant Φ comme base et nous notons W_I le groupe de Weyl de Φ_I. Nous posons $\mathbf{P}_I = \mathbf{B} W_I \mathbf{B}$ et nous notons $\mathbf{L}_I$ l'unique sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}_I$ contenant $\mathbf{T}$.

Alors Φ_I est le système de racines de $\mathbf{L}_I$ relativement à $\mathbf{T}$ et W_I est le groupe de Weyl de $\mathbf{L}_I$ relativement à $\mathbf{T}$.

4. Calcul de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$

4.A. Le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et le système de racines de G. — Calculer $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et calculer $X(\mathcal{Z}(\mathbf{G})) \simeq \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$ sont des problèmes équivalents. Puisque

$$\mathbf{Z}(\mathbf{G}) = \{t \in \mathbf{T} \mid \forall \alpha \in \Phi,\ \alpha(t) = 1\},$$

on a, d'après **1.7** et **1.9** :

Proposition 4.1. — *Le morphisme canonique $X(\mathbf{T}) \to X(\mathbf{Z}(\mathbf{G}))$ induit un isomorphisme de groupes abéliens*

$$X(\mathcal{Z}(\mathbf{G})) \simeq (X(\mathbf{T})/\langle\Phi\rangle)_{p'}.$$

De plus, $\widetilde{\imath}_{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ}$ induit un isomorphisme

$$\Big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}\varpi_\alpha^\vee / Y(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ)\Big)_{p'} \simeq \mathcal{Z}(\mathbf{G}).$$

4.B. Sous-groupes de Levi. — Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$. Alors :

Proposition 4.2. — *Le morphisme $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ induit par l'inclusion $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathbf{Z}(\mathbf{L})$ est surjectif.*

Démonstration. — On peut supposer (et nous le ferons) que $\mathbf{L} = \mathbf{L}_I$ pour une partie I de Δ. Alors $\langle\Phi_I\rangle$ est un facteur direct de $\langle\Phi\rangle$, donc $(X(\mathbf{T})/\langle\Phi_I\rangle)_{p'} \to (X(\mathbf{T})/\langle\Phi\rangle)_{p'}$ est injectif. Donc, d'après la proposition **4.1**, le morphisme naturel $X(\mathcal{Z}(\mathbf{L})) \to X(\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ est injectif. □

Corollaire 4.3. — *Le groupe $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ agit trivialement sur $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$.*

Corollaire 4.4. — *Soit $\widetilde{\mathbf{L}}$ un sous-groupe de Levi de $\widetilde{\mathbf{G}}$. Alors $\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{L}})$ est connexe.*

Le morphisme surjectif $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ sera noté $h_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ (ou bien $h_{\mathbf{L}}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté). Son morphisme dual sera noté $\hat{h}_{\mathbf{L}} : \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge \hookrightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$. Une fois que $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ est déterminé, le calcul de $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ est équivalent au calcul de $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}}$. La proposition suivante complète la proposition **4.1**.

***Proposition 4.5* (Digne-Lehrer-Michel)**. — *Soit I une partie de Δ. Alors $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}$ est engendré par $(\widetilde{\imath}_{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ}(\varpi_\alpha^\vee))_{\alpha\in\Delta\setminus I}$.*

Démonstration. — En remplaçant $\mathbf{G}$ par $\mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$ si c'est nécessaire, on peut supposer que $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ = 1$. Soit $X_I = X(\mathbf{T}) \cap (\langle\Phi_I\rangle \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. Alors $X_I = X(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ)$. Mais, si $\alpha \in \Delta \setminus I$ et si $x \in X_I$, alors $\langle x, \varpi_\alpha^\vee\rangle_{\mathbf{T}} = 0$. Donc $\widetilde{\imath}_{\mathbf{T}}(\varpi_\alpha^\vee) \in \operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}$.

Réciproquement, soit $z \in \operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I} = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ \cap \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. Il existe donc $y \in Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que $z = \tilde{\imath}_{\mathbf{T}}(y)$. Mais, $(\varpi_\alpha^\vee)_{\alpha\in\Delta\setminus I}$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Donc

$$y = \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} r_\alpha \varpi_\alpha^\vee,$$

avec $r_\alpha \in \mathbb{Q}$ (pour tout $\alpha \in \Delta \setminus I$). Si on pose

$$y' = \sum_{\alpha\in\Delta\setminus I} (r_\alpha)_{p'} \varpi_\alpha^\vee,$$

alors $z = \tilde{\imath}(y')$. Mais, puisque $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$, on a, pour tout $\alpha \in \Delta \setminus I$, $\langle \alpha, y' \rangle = (r_\alpha)_{p'} \in \mathbb{Z}[1/p]$. Donc $(r_\alpha)_{p'} \in \mathbb{Z}$, ce qui montre que

$$z = \prod_{\alpha\in\Delta\setminus I} \tilde{\imath}(\varpi_\alpha^\vee)^{(r_\alpha)_{p'}}.$$

Cela termine la preuve de la proposition **4.5**. □

La proposition **4.5** entraîne le résultat suivant (dont une preuve différente peut être trouvée par exemple dans [**Bon04b**, proposition 2.4]).

Corollaire 4.6. — *Soient I et J deux parties de Δ. Alors*

$$\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_{I\cap J}} = (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}).(\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_J}).$$

Corollaire 4.7. — *Soit I une partie de Δ. Alors* $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I} = \operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_{I(\infty)}}$.

4.C. Les groupes $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et $\operatorname{Ker}' i^*$. — Dans cette sous-section, nous construisons un isomorphisme entre les groupes $\operatorname{Ker}' i^*$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$, où $\operatorname{Ker}' i^* = \operatorname{Ker} i^* \cap \mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{G}}^*)$. Pour cela, remarquons tout d'abord que

$$X(\widetilde{\mathbf{T}}/\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})) \simeq \big(\langle\widetilde{\Phi}\rangle \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]\big) \cap X(\widetilde{\mathbf{T}}).$$

Identifions $i_X : X(\widetilde{\mathbf{T}}/\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})) \to X(\mathbf{T})$ et $i_Y^* : Y(\widetilde{\mathbf{T}}^* \cap \mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{G}}^*)) \to Y(\mathbf{T}^*)$. Alors l'image de i_X contient $\langle\Phi\rangle$ et est contenue dans $(\langle\Phi\rangle \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]) \cap X(\mathbf{T})$. D'après la proposition **1.11**, on obtient alors un isomorphisme de groupes abéliens finis

$$(X(\mathbf{T})/\langle\Phi\rangle)_{p'} \simeq \operatorname{Ker}' i^*,$$

ce qui, en composant avec l'isomorphisme de la proposition **4.1**, fournit un isomorphisme

$$X(\mathcal{Z}(\mathbf{G})) \simeq \operatorname{Ker}' i^*.$$

Grâce à l'isomorphisme **1.8**, on obtient finalement un isomorphisme

$$\omega : \operatorname{Ker}' i^* \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge. \tag{4.8}$$

Cet isomorphisme peut être décrit de la façon suivante. Soit $a \in \operatorname{Ker}' i^*$ et soit $n \in \mathbb{Z}$, premier à p, tel que $a^n = 1$. Alors il existe $\tilde{x} \in X(\widetilde{\mathbf{T}}/\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})) \simeq Y(\widetilde{\mathbf{T}}^* \cap \mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{G}}^*))$ tel que $\tilde{x}(\tilde{\imath}(1/n)) = a$ et il existe $x \in X(\mathbf{T})$ tel que $i_X(\tilde{x}) = nx$. En fait, $x \in X(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ)$ et

$$\omega(a) = \kappa \circ \operatorname{Res}_{\mathcal{Z}(\mathbf{G})}^{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ} x. \tag{4.9}$$

Le résultat suivant est immédiat :

Lemme 4.10. — *L'isomorphisme ω ne dépend pas du choix de $\widetilde{\mathbf{T}}$ et $\widetilde{\mathbf{T}}^*$ (il dépend uniquement du choix de $\imath$ et $\jmath$). De plus, $\omega \circ F^* = F \circ \omega$.*

Les groupes $(\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge)^F$ et $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$ sont canoniquement isomorphes. De même, les groupes $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge)$ et $(\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F)^\wedge$ sont canoniquement isomorphes. Donc, grâce à ω, nous pouvons construire des isomorphismes de groupes

$$\begin{aligned} \omega^0 &: (\operatorname{Ker}' i^*)^{F^*} \longrightarrow H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge \\ \omega^1 &: H^1(F^*, \operatorname{Ker}' i^*) \longrightarrow (\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F)^\wedge. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Par dualité, nous obtenons des isomorphismes

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &: \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \longrightarrow (\operatorname{Ker}' i^*)^\wedge \\ \hat{\omega}^0 &: H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})) \longrightarrow ((\operatorname{Ker}' i^*)^{F^*})^\wedge \\ \hat{\omega}^1 &: \mathcal{Z}(\mathbf{G})^F \longrightarrow H^1(F^*, \operatorname{Ker}' i^*)^\wedge. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Tous ces isomorphismes ne dépendent pas du choix de $\widetilde{\mathbf{T}}$ et $\widetilde{\mathbf{T}}^*$.

Remarque. — Une autre description de l'isomorphisme ω^0 sera donnée dans la section 6 (voir diagramme **6.4**).

Remarque 4.13. — Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}^*$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{L}$. Soient $\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})$ et $\widetilde{\mathbf{L}}^* = i^{*-1}(\mathbf{L}^*)$. Notons $\operatorname{Ker}'_{\mathbf{L}} i^* = \mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{L}}^*) \cap \operatorname{Ker} i^*$ et $\omega_{\mathbf{L}} : \operatorname{Ker}'_{\mathbf{L}} i^* \to \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$ l'isomorphisme analogue de ω obtenu en remplaçant $\mathbf{G}$ par $\mathbf{L}$. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}'_{\mathbf{L}} i^* \arrow[r, "\omega_{\mathbf{L}}"] \arrow[d] & \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge \arrow[d, "\hat{h}_{\mathbf{L}}"] \\ \operatorname{Ker}' i^* \arrow[r, "\omega"] & \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge \end{tikzcd}$$

est commutatif. L'application verticale de gauche est bien sûr l'inclusion canonique.

5. Groupes simplement connexes

Nous supposons dans cette section, et uniquement dans cette section, que $\mathbf{G}$ est semi-simple, quasi-simple et simplement connexe et que p ne divise pas le cardinal de $X(\mathbf{T})/\langle\Phi\rangle$. Dans ce cas, le calcul du groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ en termes des poids minuscules est fait dans [**Bou68**, chapitre VI, §2, corollaire de la proposition 5]. Le calcul du groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ peut alors être effectué grâce à la proposition **4.5**. En revanche, la proposition **5.4** nous semble nouvelle : elle contient une description de $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}$ lorsque

I est auto-opposée en termes du groupe d'automorphismes du diagramme de Dynkin affine de $\mathbf{G}$.

5.A. Poids minuscules. — Notons $\widetilde{\alpha}$ la plus grande racine de Δ (elle est bien définie car, puisque $\mathbf{G}$ est quasi-simple, Φ est irréductible). Posons

$$\Delta^{\mathrm{aff}} = \Delta \cup \{-\widetilde{\alpha}\}$$

et

$$W^{\mathrm{aff}} = W \ltimes Y(\mathbf{T}).$$

Puisque $\mathbf{G}$ est simplement connexe, W^{aff} est le groupe de Weyl affine de Φ. On définit

$$\mathrm{Aut}_W(\Delta^{\mathrm{aff}}) = \{w \in W \mid w(\Delta^{\mathrm{aff}}) = \Delta^{\mathrm{aff}}\}.$$

Alors $\mathrm{Aut}_W(\Delta^{\mathrm{aff}})$ est le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin affine de $\mathbf{G}$ induits par un élément de W. Pour finir, nous aurons besoin des notations suivantes :

$$\Delta_{\mathrm{minus}} = \{\alpha \in \Delta \mid \langle \widetilde{\alpha}, \varpi_\alpha^\vee \rangle_{\mathbf{T}} = 1\}$$

et

$$\Delta_{\mathrm{minus}}^{\mathrm{aff}} = \Delta_{\mathrm{minus}} \cup \{-\widetilde{\alpha}\}.$$

Posons conventionnellement $\varpi_{-\widetilde{\alpha}}^\vee = 0$.

Proposition 5.1. — *Supposons* $\mathbf{G}$ *semi-simple, simplement connexe et quasi-simple. Alors l'application* $\Delta_{\mathrm{minus}}^{\mathrm{aff}} \to \mathcal{Z}(\mathbf{G})$, $\alpha \mapsto \widetilde{\imath}(\varpi_\alpha^\vee)$ *est bijective.*

Démonstration. — Voir [**Bou68**, chapitre VI, §2, corollaire de la proposition 5]. □

5.B. Automorphismes du diagramme de Dynkin affine. — Notons C_0 l'alcôve

$$C_0 = \{y \in Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid \Big(\forall \alpha \in \Delta,\ \langle \alpha, y \rangle_{\mathbf{T}} \geqslant 0\Big) \text{ et } \langle -\widetilde{\alpha}, y \rangle_{\mathbf{T}} \leqslant 1 \ \}.$$

Soit $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. Soit $y \in Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ tel que $\widetilde{\imath}_{\mathbf{T}}(y) = z$. Puisque $\langle \alpha, y \rangle_{\mathbf{T}} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Phi$, il existe un unique $w \in W^{\mathrm{aff}}$ tel que $w(C_0) = y + C_0$. Nous notons w_z la projection de w sur W. Alors w_z ne dépend que de z et non du choix de y.

Nous allons maintenant rappeler la formule explicite de $w_{\widetilde{\imath}_{\mathbf{T}}(\varpi_\alpha^\vee)}$ pour $\alpha \in \Delta_{\mathrm{minus}}^{\mathrm{aff}}$. Rappelons que, si $I \subset \Delta_0$, alors w_I désigne l'élément de plus grande longueur de W_I. Si $\alpha \in \Delta^{\mathrm{aff}}$, nous notons $w_\alpha = w_\Delta w_{\Delta \setminus \{\alpha\}}$ (remarquons que $w_{-\widetilde{\alpha}} = 1$). Alors on a, pour tout $\alpha \in \widetilde{\Delta}$,

$$w_{\widetilde{\imath}_{\mathbf{T}}(\varpi_\alpha^\vee)} = w_\alpha \tag{5.2}$$

(voir [**Bou68**, chapitre VI, §2, proposition 6]).

La proposition suivante est démontrée dans [**Bou68**, §2.3]

Proposition 5.3. — *Supposons* $\mathbf{G}$ *semi-simple, quasi-simple et simplement connexe. Alors l'application* $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to \mathrm{Aut}_W(\Delta^{\mathrm{aff}})$, $z \mapsto w_z$ *est bien définie ; c'est un isomorphisme de groupes.*

Compte tenu du corollaire **4.7**, on peut, pour calculer $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}$, se ramener au cas où I est auto-opposée. Dans ce cas, la proposition suivante en fournit une description en termes du groupe d'automorphismes du diagramme de Dynkin affine de $\mathbf{G}$.

Proposition 5.4. — *Supposons* $\mathbf{G}$ *semi-simple, quasi-simple et simplement connexe. Si* I *est une partie auto-opposée de* Δ*, alors*

$$\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I} = \{z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \mid w_z(I) = I\}.$$

Démonstration. — Soit $\alpha \in \Delta$. Compte tenu de **5.2** et de la proposition **4.5**, il suffit de montrer que $w_\alpha(I) = I$ si et seulement si $\alpha \in \Delta \setminus I$. Tout d'abord, si $\alpha \in \Delta \setminus I$, alors $w_{\Delta\setminus\{\alpha\}}(I) = -I$ et $w_\Delta(I) = -I$ car I est auto-opposée. Donc $w_\alpha(I) = I$. Réciproquement, si $\alpha \in I$, alors $w_{\Delta\setminus\{\alpha\}}(\alpha) \in \Phi^+$ et donc $w_\alpha(\alpha) \in \Phi^-$. Par suite, $w_\alpha(\alpha) \notin I$, ce qui montre que $w_\alpha(I) \neq I$. □

6. Le groupe $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$

6.A. Morphisme vers $\mathbf{Out}(\mathbf{G}^F)$. — Commençons par un rappel élémentaire :

Lemme 6.1. — *On a* $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F) = \mathbf{Z}(\mathbf{G})$.

Démonstration. — Nous verrons dans §14.A qu'il existe un élément unipotent $u \in \mathbf{B}_0^F$ tel que $C_{\mathbf{G}}(u) = \mathbf{Z}(\mathbf{G}).C_{\mathbf{U}_0}(u)$. Donc $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F) \subset C_{\mathbf{G}}(u) = \mathbf{Z}(\mathbf{G}).C_{\mathbf{U}_0}(u)$ Si on note w_0 un élément de $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_0)$ représentant l'élément de plus grande longueur de W_0, alors $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F) \subset C_{\mathbf{G}}(w_0 u w_0^{-1}) = \mathbf{Z}(\mathbf{G}).{}^{w_0}C_{\mathbf{U}_0}(u)$. Donc $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F) \subset C_{\mathbf{G}}(u) \cap C_{\mathbf{G}}(w_0 u w_0^{-1}) = \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. D'autre part, il est clair que $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \subset C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F)$. D'où le résultat. □

Remarque 6.2. — Le lemme **6.1** montre en particulier que le centre de $\mathbf{G}^F$ est $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$.

Nous notons $\operatorname{Aut}(\mathbf{G}, F)$ le groupe des automorphismes de $\mathbf{G}$ commutant avec F. Alors le groupe $\operatorname{Int}(\mathbf{G}^F)$ des automorphismes de $\mathbf{G}$ induits par la conjugaison par un élément de $\mathbf{G}^F$ est un sous-groupe distingué de $\operatorname{Aut}(\mathbf{G}, F)$. D'après la remarque **6.2**, le groupe $\operatorname{Int}(\mathbf{G}^F)$ est isomorphe au groupe des automorphismes intérieurs de $\mathbf{G}^F$, ce qui justifie la notation utilisée. Nous notons $\operatorname{Out}(\mathbf{G}, F)$ le groupe quotient $\operatorname{Aut}(\mathbf{G}, F)/\operatorname{Int}(\mathbf{G}^F)$. On a un morphisme canonique $\operatorname{Out}(\mathbf{G}, F) \to \operatorname{Out}(\mathbf{G}^F)$.

Si $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, nous notons g_z un élément de $\mathbf{G}$ tel que $g_z^{-1}F(g_z)$ appartient à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et représente z. Alors l'automorphisme intérieur $\operatorname{int} g_z$ appartient à $\operatorname{Aut}(\mathbf{G}, F)$. On note $\tau_z^{\mathbf{G}}$ son image dans $\operatorname{Out}(\mathbf{G}^F)$.

Proposition 6.3. — *L'application* $\tau^{\mathbf{G}} : H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})) \to \operatorname{Out}(\mathbf{G}^F)$, $z \mapsto \tau_z^{\mathbf{G}}$ *est bien définie : c'est un morphisme injectif de groupes.*

Démonstration. — Soient $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et soient g et h deux éléments de $\mathbf{G}$ tels que $h^{-1}F(h)$ et $g^{-1}F(g)$ appartiennent à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et représentent z. Alors il existe $x \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ tel que $x^{-1}F(x)h^{-1}F(h) = g^{-1}F(g)$. Puisque x est central dans $\mathbf{G}$, on a $F(gh^{-1}x^{-1}) = gh^{-1}x^{-1}$. Posons $y = gh^{-1}x^{-1}$. Alors $y \in \mathbf{G}^F$ et $\operatorname{int} g = \operatorname{int}(y) \circ \operatorname{int}(hx) = \operatorname{int}(y) \circ \operatorname{int}(h)$. Donc l'image de $\operatorname{int} g$ dans $\operatorname{Out}(\mathbf{G}, F)$ coïncide avec l'image de $\operatorname{int} h$. Cela montre que $\tau^{\mathbf{G}}$ est bien définie.

Montrons maintenant que c'est un morphisme de groupes. Soient z et z' deux éléments de $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et soient g et g' deux éléments de $\mathbf{G}$ tels que $g^{-1}F(g)$ et $g'^{-1}F(g')$ appartiennent à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et représentent respectivement z et z'. Alors, si on pose $a = (gg')^{-1}F(gg')$, on a $a = g'^{-1}g^{-1}F(g)F(g') = g'^{-1}F(g')g^{-1}F(g)$ car $g^{-1}F(g)$ est central. Donc $a \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et a représente zz'. Mais $\operatorname{int}(gg') = \operatorname{int}(g) \circ \operatorname{int}(g')$, donc $\tau^{\mathbf{G}}_{zz'} = \tau^{\mathbf{G}}_z \circ \tau^{\mathbf{G}}_{z'}$. Par conséquent, $\tau^{\mathbf{G}}$ est bien un morphisme de groupes.

Pour finir, montrons que $\tau^{\mathbf{G}}$ est injectif. Soit $z \in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et soit $g \in \mathbf{G}$ tel que $g^{-1}F(g)$ appartienne à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et représente z. Supposons que $\operatorname{int}(g)$ induit un automorphisme intérieur de $\mathbf{G}^F$. Alors il existe $h \in \mathbf{G}^F$ tel que $h^{-1}g \in C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}^F) = \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ (voir lemme **6.1**). Donc, si on pose $a = h^{-1}g$, alors $g^{-1}F(g) = (ha)^{-1}F(ha) = a^{-1}F(a)$ car $F(h) = h$. Donc $z = 1$. □

Remarque. — Le morphisme de groupes $\operatorname{Out}(\mathbf{G}, F) \to \operatorname{Out}(\mathbf{G}^F)$ est en général non injectif. Par exemple, si $\mathbf{G}$ est un tore, si $\delta = 1$, et si $\mathbf{G}$ est déployé sur $\mathbb{F}_q$, alors tout automorphisme de $\mathbf{G}$ commute avec F, donc $\operatorname{Out}(\mathbf{G}, F) = \operatorname{Aut}(\mathbf{G})$ car $\mathbf{G}$ est abélien. Mais, si $n = \dim \mathbf{G}$, on a $\operatorname{Aut}(\mathbf{G}) \simeq \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ et $\operatorname{Aut}(\mathbf{G}^F) \simeq \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z})$, donc le morphisme $\operatorname{Aut}(\mathbf{G}) \to \operatorname{Aut}(\mathbf{G}^F)$ a un noyau infini lorsque $n \geqslant 2$.

Le groupe $\operatorname{Out}(\mathbf{G}^F)$ agit sur $\operatorname{Cent} \mathbf{G}^F$ et $\operatorname{Irr} \mathbf{G}^F$ de la façon suivante : si $\tau \in \operatorname{Out}(\mathbf{G}^F)$ et si χ appartient à $\operatorname{Cent} \mathbf{G}^F$ ou $\operatorname{Irr} \mathbf{G}^F$, on pose $\tau(\chi) = \chi \circ \widetilde{\tau}^{-1}$, où $\widetilde{\tau}$ est un automorphisme de $\mathbf{G}^F$ représentant τ. Cela nous définit donc, à travers le morphisme $\tau^{\mathbf{G}}$, une action de $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ sur $\operatorname{Cent} \mathbf{G}^F$ et $\operatorname{Irr} \mathbf{G}^F$. Si V est un sous-espace de $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F)$ stable sous l'action de $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et si $\zeta \in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$, nous noterons V_ζ la composante ζ-isotypique de V. On a donc $V_\zeta = V \cap \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F)_\zeta$.

6.B. Le groupe $\widetilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F$. — Soit $\widetilde{\mathbf{L}}$ un sous-groupe de Levi de $\widetilde{\mathbf{G}}$. On suppose ici que $\widetilde{\mathbf{L}}$ est F-stable. On pose $\mathbf{L} = \mathbf{G} \cap \widetilde{\mathbf{L}}$. Alors $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$. Le morphisme de groupes $h^1_{\mathbf{L}} : H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G})) \to H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{L}))$ induit par $h_{\mathbf{L}}$ est surjectif. S'il y a ambiguïté, nous le noterons $h^{\mathbf{G},1}_{\mathbf{L}}$.

Soit $\widetilde{l} \in \widetilde{\mathbf{L}}^F$. Alors il existe $l \in \mathbf{L}$ et $\widetilde{z} \in \mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})$ tels que $\widetilde{l} = l\widetilde{z}$. Puisque $F(\widetilde{l}) = \widetilde{l}$, on en déduit que $l^{-1}F(l) = F(\widetilde{z})^{-1}\widetilde{z}$. Donc $l^{-1}F(l) \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. On note $\sigma^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(\widetilde{l})$ sa classe dans $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. Il est facile de vérifier que $\sigma^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(\widetilde{l})$ ne dépend que de $\widetilde{l}$ et non du choix de l et $\widetilde{z}$. Il est tout aussi immédiat que $\sigma^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}$ induit un isomorphisme de groupes (toujours noté $\sigma^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}$)

$$\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F \xrightarrow{\sim} H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G})).$$

D'autre part, on a un morphisme canonique

$$\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathbf{L}^F)$$

et un simple calcul montre que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F \arrow[r, "\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}"] \arrow[d] & H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G})) \arrow[d, "h_{\mathbf{L}}^1"] \\
\mathrm{Out}(\mathbf{L}^F) & H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{L})) \arrow[l, "\tau^{\mathbf{L}}"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Lorsque $\mathbf{L}=\mathbf{G}$, l'isomorphisme $\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ sera noté $\sigma_{\mathbf{G}}$. De plus, l'isomorphisme dual de $\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ sera noté $\hat{\sigma}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} : H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge \xrightarrow{\sim} (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F)^\wedge$ (ou $\hat{\sigma}_{\mathbf{G}}$ si $\mathbf{L}=\mathbf{G}$).

En utilisant l'isomorphisme $\omega^0 : (\mathrm{Ker}'\, i^*)^{F^*} \xrightarrow{\sim} H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$ (voir **4.11**), on obtient un diagramme commutatif :

(6.4)
$$\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{Ker}'\, i^*)^{F^*} \arrow[r] \arrow[dl, "\omega^0"'] & (\mathrm{Ker}\, i^*)^{F^*} \arrow[dd, "\sim"] \\
H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge \arrow[dr, "\hat{\sigma}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}"'] & & \\
 & (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F)^\wedge \arrow[r] & (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge.
\end{tikzcd}$$

Démonstration de (**6.4**). — Soit $\widetilde{\mathbf{T}}$ un tore maximal F-stable de $\widetilde{\mathbf{L}}$. Soit $\widetilde{\mathbf{T}}^*$ un tore maximal F^*-stable de $\widetilde{\mathbf{G}}$ dual de $\widetilde{\mathbf{T}}$. Posons $\mathbf{T}=\widetilde{\mathbf{T}}\cap\mathbf{G}$ et $\mathbf{T}^*=i^*(\widetilde{\mathbf{T}}^*)$. Puisque $\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F \simeq \widetilde{\mathbf{T}}^F/\mathbf{T}^F$, il suffit de montrer la commutativité du diagramme **6.4** lorsque $\widetilde{\mathbf{L}}=\widetilde{\mathbf{T}}$, ce que nous supposerons dorénavant.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons $\omega_n^0 : (\mathrm{Ker}'\, i^*)^{F^{*n}} \to H^1(F^n,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$ induit par ω. Notons

$$\beta_n : (\mathrm{Ker}'\, i^*)^{F^{*n}} \longrightarrow (\widetilde{\mathbf{T}}^{F^n})^\wedge$$

le morphisme composé $(\mathrm{Ker}'\, i^*)^{F^{*n}} \to (\mathrm{Ker}\, i^*)^{F^{*n}} \xrightarrow{\sim} (\widetilde{\mathbf{T}}^{F^n})^\wedge$ et

$$\gamma_n : H^1(F^n,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge \longrightarrow (\widetilde{\mathbf{T}}^{F^n})^\wedge$$

le morphisme composé $H^1(F^n, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge \to (\widetilde{\mathbf{T}}^{F^n}/\mathbf{T}^{F^n}.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^{F^n})^\wedge \to (\widetilde{\mathbf{T}}^{F^n})^\wedge$. Il s'agit de montrer que $\gamma_1 \circ \omega_1^0 = \beta_1$. Mais, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{Ker}'\, i^*)^{F^*} \arrow[dl, "\omega_1^0"'] \arrow[dr, "\beta_1"] \arrow[dd] & \\
H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge \arrow[rr, "\gamma_1"] \arrow[dd] & & (\widetilde{\mathbf{T}}^F)^\wedge \arrow[dd, "\hat{N}_{F^n/F}"] \\
 & (\mathrm{Ker}'\, i^*)^{F^{*n}} \arrow[dl, "\omega_n^0"'] \arrow[dr, "\beta_n"] & \\
H^1(F^n, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge \arrow[rr, "\gamma_n"] & & (\widetilde{\mathbf{T}}^{F^n})^\wedge
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ici, toutes les applications verticales sont injectives. En particulier, cela montre qu'il suffit de montrer que $\gamma_n \circ \omega_n^0 = \beta_n$ et donc que l'on peut remplacer F par n'importe laquelle de ses puissances. Par exemple, et c'est ce que nous ferons par la suite, nous pouvons supposer que F est un endomorphisme de Frobenius déployé de $\widetilde{\mathbf{T}}$ (sur un corps fini à q éléments) et que F agit trivialement sur $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. En particulier, F^* est un endomorphisme de Frobenius déployé de $\widetilde{\mathbf{T}}^*$ et F^* agit trivialement sur $\mathrm{Ker}'\, i^*$.

Soit $a \in \mathrm{Ker}'\, i^* = (\mathrm{Ker}'\, i^*)^{F^*}$ et soit $\tilde{t} \in \widetilde{\mathbf{T}}^F$. Puisque F^* est déployé, il existe $\tilde{y} \in Y(\widetilde{\mathbf{T}}^* \cap \mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{G}}^*)) \simeq X(\widetilde{\mathbf{T}}/\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})) \subset X(\widetilde{\mathbf{T}})$ tel que $a = y(\tilde{\imath}(1/(q-1)))$. Soit alors $y \in Y(\mathbf{T}^*) \simeq X(\mathbf{T})$ tel que $i_X(\tilde{y}) = (q-1)y$. Soient maintenant $t \in \mathbf{T}$ et $\tilde{z} \in \mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})$ tels que $\tilde{t} = t\tilde{z}$. Posons $z = t^{-1}F(t) \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. D'après **1.15** et **4.9**, il suffit de montrer que $\tilde{y}(\tilde{t}) = y(z)$. Mais,

$$y(z) = y(t^{-1}F(t)) = y(t^{q-1}) = ((q-1)y)(t) = i_X(\tilde{y})(t) = \tilde{y}(t).$$

Cela montre le résultat car $t\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}}) = \tilde{t}\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})$ et $\tilde{y} \in X(\widetilde{\mathbf{T}}/\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}}))$. □

7. Cuspidalité

7.A. Définition et premières propriétés. — Le groupe réductif $\mathbf{G}$ est dit *cuspidal* si, pour tout sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ propre de $\mathbf{G}$, on a $\mathrm{Ker}\, h_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \neq \{1\}$ (voir [**Bon99b**, §1] ou [**Bon04b**, §2.C]). Nous rappelons ici quelques propriétés des groupes cuspidaux dont le lecteur pourra trouver une preuve dans [**Bon04b**, propositions 2.12 et 2.18 et remarque 2.14].

Proposition 7.1. — *Supposons que* $\mathbf{G}$ *est cuspidal. Alors :*

(a) *Si* $\pi : \hat{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ *est un morphisme isotypique, alors* $\hat{\mathbf{G}}$ *est cuspidal.*

(b) *Le groupe* $\mathbf{G}$ *est universellement auto-opposé.*

(c) *Toutes les composantes quasi-simples de* $\mathbf{G}$ *sont de type* A.

7.B. Sous-groupes de Levi cuspidaux. — Si K est un sous-groupe de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$, nous notons $\mathcal{L}(K)$ (ou $\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(K)$ s'il y a ambiguïté) l'ensemble des sous-groupes de Levi de $\mathbf{G}$ tels que $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}} \subset K$. Nous notons $\mathcal{L}_{\min}(K)$ (ou $\mathcal{L}_{\min}^{\mathbf{G}}(K)$) l'ensemble des éléments minimaux pour l'inclusion de $\mathcal{L}(K)$. La preuve de la proposition suivante peut être trouvée dans [**Bon04b**, lemme 2.16] :

Proposition 7.2. — *Si K est un sous-groupe de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$, alors $\mathcal{L}_{\min}(K)$ est une seule classe de conjugaison de sous-groupes de $\mathbf{G}$. De plus, ses éléments sont cuspidaux.*

Il est facile, en utilisant entre autres la proposition **5.4**, de classifier les groupes $\mathcal{L}_{\min}(K)$ lorsque $\mathbf{G}$ est semi-simple, quasi-simple et simplement connexe. Cette classification est faite dans [**Bon04b**, table 2.17]. Nous la rappelons dans la table **7.3** (cette table ne contient pas les groupes $\mathcal{L}_{\min}(\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ car ce sont les tores maximaux de $\mathbf{G}$). Pour pouvoir lire cette table, il convient de signaler que les copoids fondamentaux en type D_{2r} sont numérotés comme dans [**Bou68**, planches]). D'autre part, dans le diagramme du couple $(\mathbf{G}, \mathbf{L})$, le sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ est représenté par les points noirs. La classification dans le cas général découle de [**Bon04b**, §2.B].

7.C. Caractères linéaires cuspidaux. — Un caractère linéaire $\zeta : \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est dit *cuspidal* si, pour tout sous-groupe de Levi propre $\mathbf{L}$ de $\mathbf{G}$, on a $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}} \not\subset \operatorname{Ker} \zeta$. Nous noterons $\mathcal{Z}_{\mathrm{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$ l'ensemble des caractères linéaires cuspidaux de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Si $\mathcal{Z}_{\mathrm{cus}}^\wedge(\mathbf{G}) \neq \varnothing$, alors $\mathbf{G}$ est cuspidal. En particulier, toutes ses composantes quasi-simples sont de type A (voir proposition **7.1** (c)).

8. Éléments semi-simples et non connexité du centre

Hypothèse. — *Nous fixons dans cette section un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$. Nous fixons aussi un élément semi-simple $\widetilde{s} \in \widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tel que $i^*(\widetilde{s}) = s$.*

L'existence de $\widetilde{s}$ est assurée par le corollaire **2.7**.

8.A. Centralisateur de s. — Soit $\mathbf{B}_1^*$ un sous-groupe de Borel F^*-stable de $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$ et soit $\mathbf{T}_1^*$ un tore maximal F^*-stable de $\mathbf{B}_1^*$. On note W (respectivement $W(s)$, respectivement $W^\circ(s)$) le groupe de Weyl de $\mathbf{G}^*$ (respectivement $C_{\mathbf{G}^*}(s)$, respectivement $C_{\mathbf{G}^*}^\circ(s)$) relativement à $\mathbf{T}_1^*$.

Alors
$$W(s) = \{w \in W \mid w(s) = s\}$$
et $W^\circ(s)$ est un sous-groupe distingué de $W(s)$. De plus, $W(s)/W^\circ(s)$ est canoniquement isomorphe à $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Soit $A(s) = \{w \in W(s) \mid {}^w\mathbf{B}_1^* = \mathbf{B}_1^*\}$. Alors $A(s)$ est un sous-groupe F^*-stable de $W(s)$ et $W(s) = W^\circ(s) \rtimes A(s)$. Donc $A(s)$ est canoniquement isomorphe à $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Nous identifierons par la suite $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ avec $A(s)$, de sorte que

$$W(s) = W^\circ(s) \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s). \tag{8.1}$$

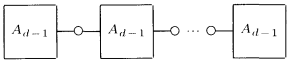
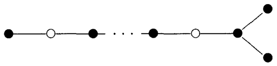
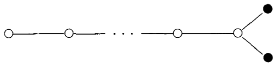
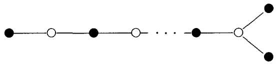
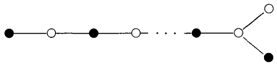
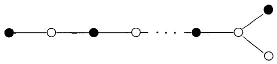
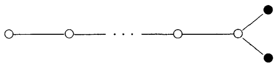
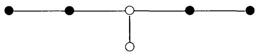
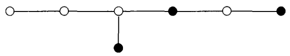
Type de $\mathbf{G}$	$\mathcal{Z}(\mathbf{G})$	K	Type de $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{\min}(K)$	$\mathcal{Z}(\mathbf{L})$	Diagramme de $(\mathbf{G}, \mathbf{L})$
A_r	$\boldsymbol{\mu}_{r+1}$	$\boldsymbol{\mu}_{r+1/d}$ où $d \mid r+1$ et $p \nmid d$	$\underbrace{A_{d-1} \times \cdots \times A_{d-1}}_{\frac{r+1}{d} \text{ fois}}$	$\boldsymbol{\mu}_d$	
B_{2r+1} $p \neq 2$	$\boldsymbol{\mu}_2$	1	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r+1 \text{ fois}}$	$\boldsymbol{\mu}_2$	
B_{2r} $p \neq 2$	$\boldsymbol{\mu}_2$	1	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r \text{ fois}}$	$\boldsymbol{\mu}_2$	
C_r $p \neq 2$	$\boldsymbol{\mu}_2$	1	A_1 (grande racine)	$\boldsymbol{\mu}_2$	
D_{2r+1} $p \neq 2$	$\boldsymbol{\mu}_4$	1	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r-1 \text{ fois}} \times A_3$	$\boldsymbol{\mu}_4$	
		$\boldsymbol{\mu}_2$	$A_1 \times A_1$	$\boldsymbol{\mu}_2$	
D_{2r} $p \neq 2$	$\boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_2$	1	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r+1 \text{ fois}}$	$\boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_2$	
		$\langle \tilde{\iota}_{\mathbf{T}}(\varpi_{2r-1}^\vee) \rangle$	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r \text{ fois}}$	$\boldsymbol{\mu}_2$	
		$\langle \tilde{\iota}_{\mathbf{T}}(\varpi_{2r}^\vee) \rangle$	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r \text{ fois}}$	$\boldsymbol{\mu}_2$	
		$\langle \tilde{\iota}_{\mathbf{T}}(\varpi_1^\vee) \rangle$	$A_1 \times A_1$	$\boldsymbol{\mu}_2$	
E_6 $p \neq 3$	$\boldsymbol{\mu}_3$	1	$A_2 \times A_2$	$\boldsymbol{\mu}_3$	
E_7 $p \neq 2$	$\boldsymbol{\mu}_2$	1	$A_1 \times A_1 \times A_1$	$\boldsymbol{\mu}_2$	

Table 7.3

Soit Φ_1 (respectivement Φ_s) le système de racines de $\mathbf{G}^*$ (respectivement $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$) relativement à $\mathbf{T}_1^*$. Alors
$$\Phi_s = \{\alpha \in \Phi_1 \mid \alpha(s) = 1\}.$$
Pour tout $w \in W(s)$, l'automorphisme $q^{-1/\delta}wF^*$ de $X(\mathbf{T}_1^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est d'ordre fini o_w. Soit N le plus petit commun multiple de $(o_w)_{w\in W(s)}$. On notera ϕ_1 un générateur d'un groupe cyclique $\langle\phi_1\rangle$ d'ordre N et nous ferons agir ϕ_1 sur $X(\mathbf{T}_1)^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ comme $q^{-1/\delta}F^*$. Ainsi, ϕ_1 normalise $W(s)$ et, si $w \in W(s)$, on a $\phi_1 w \phi_1^{-1} = F^*(w)$. On peut donc définir le produit semi-direct $W(s) \rtimes \langle\phi_1\rangle$.

Le but de cette sous-section est de relier le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ aux groupes $\operatorname{Ker}' i^*$, $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$ et $(\widetilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F)^\wedge$. Tout d'abord, considérons l'application
$$\begin{array}{cccc} \varphi_s : & C_{\mathbf{G}^*}(s) & \longrightarrow & \operatorname{Ker}' i^* \\ & g & \longmapsto & [\widetilde{g}, \widetilde{s}] = \widetilde{g}\widetilde{s}\widetilde{g}^{-1}\widetilde{s}^{-1} \end{array}$$
où, pour tout $g \in C_{\mathbf{G}^*}(s)$, $\widetilde{g}$ désigne un élément de $\widetilde{\mathbf{G}}^*$ tel que $i^*(\widetilde{g}) = g$. Alors $\varphi_s(g)$ ne dépend ni du choix de $\widetilde{g}$ ni du choix de $\widetilde{s}$. Puisque $\operatorname{Ker}' i^*$ est central, φ_s est un morphisme de groupes et le noyau de φ_s est $i^*(C_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s}))$. Mais, d'après le théorème **3.5** et par exemple [**DM91**, Proposition 2.3], on a $i^*(C_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s})) = C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ donc φ_s induit un morphisme injectif de groupes encore noté

(8.2)
$$\varphi_s : A_{\mathbf{G}^*}(s) \hookrightarrow \operatorname{Ker}' i^*.$$

Ce morphisme commute à l'action de F^*. Comme conséquence, on obtient le

Lemme 8.3. — *Le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est abélien et, via φ_s,*
$$A_{\mathbf{G}^*}(s) \simeq \{z \in \operatorname{Ker} i^* \mid \widetilde{s} \textit{ et } \widetilde{s}z \textit{ sont conjugués dans } \widetilde{\mathbf{G}}^*\}.$$

Par dualité, φ_s induit un morphisme surjectif $\hat{\varphi}_s : (\operatorname{Ker}' i^*)^\wedge \to A_{\mathbf{G}^*}(s)^\wedge$ et, par composition avec les isomorphismes ω, ω^0, ω^1, $\hat{\omega}$, $\hat{\omega}^0$ et $\hat{\omega}^1$, on obtient des morphismes

(8.4)
$$\begin{aligned} &\omega_s : A_{\mathbf{G}^*}(s) \hookrightarrow \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge, \\ &\omega_s^0 : A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*} \hookrightarrow H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge, \\ &\omega_s^1 : H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s)) \longrightarrow (\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F)^\wedge, \\ &\hat{\omega}_s : \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \twoheadrightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)^\wedge, \\ &\hat{\omega}_s^0 : H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})) \twoheadrightarrow (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge, \\ &\hat{\omega}_s^1 : \mathcal{Z}(\mathbf{G})^F \longrightarrow H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))^\wedge. \end{aligned}$$

Les morphismes ω_s et ω_s^0 sont injectifs tandis que les morphismes $\hat{\omega}_s$ et $\hat{\omega}_s^0$ sont surjectifs. On ne peut cependant rien dire en général concernant les morphismes ω_s^1 et $\hat{\omega}_s^1$.

8.B. Sous-groupes de Levi. — Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}^*$ un sous-groupe de Levi F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{L}$. Supposons que $s \in \mathbf{L}^{*F^*}$. Le morphisme injectif $C_{\mathbf{L}^*}(s) \hookrightarrow C_{\mathbf{G}^*}(s)$ induit un morphisme injectif $A_{\mathbf{L}^*}(s) \hookrightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)$. En effet, le noyau du morphisme naturel $C_{\mathbf{L}^*}(s) \to A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s) \cap \mathbf{L}^*$. Mais, puisque $\mathbf{L}^* = C_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^\circ)$, on a $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s) \cap \mathbf{L}^* = C_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}(\mathbf{Z}(\mathbf{L}^*)^\circ)$. Le résultat découle alors de ce que le centralisateur d'un tore dans un groupe connexe est connexe [**Bor91**, corollaire 11.12]. Il est d'autre part facile de voir que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_{\mathbf{L}^*}(s) & \longrightarrow & \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ A_{\mathbf{G}^*}(s) & \longrightarrow & \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge, \end{array} \tag{8.5}$$

est commutatif. De plus, toutes les applications sont injectives. En effet, l'injectivité de l'application verticale de droite résulte de la proposition **4.2** et l'injectivité de l'autre application verticale a été discutée ci-dessus.

En prenant les points fixes sous F et F^* et en dualisant, on obtient un autre diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G})) & \xrightarrow{\hat{\omega}_s^0} & (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge \\ {\scriptstyle h^1_{\mathbf{L}}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{L})) & \xrightarrow[\hat{\omega}_{\mathbf{L},s}^0]{} & (A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*})^\wedge. \end{array} \tag{8.6}$$

8.C. Centralisateurs de sous-tores. — Fixons maintenant un groupe fini H d'automorphismes de $X(\mathbf{T}_1^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ tel que, si $h \in H$ et $\alpha \in \Phi_1$, alors $h(\alpha)$ soit un multiple réel d'une racine de Φ_1. Cela définit une action de H par permutation sur les racines que nous noterons $h * \alpha$: elle est définie ainsi

$$h * \alpha \in \Phi_1 \cap \mathbb{R}_+^\times h(\alpha).$$

Notons Y^H le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des points fixes de H dans son action sur $Y(\mathbf{T}_1^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Posons

$$\Phi_H = \{\alpha \in \Phi_1 \mid \forall\, v \in Y^H,\ \langle \alpha, v\rangle_{\mathbf{T}_1^*} = 0\}.$$

Alors Φ_H est le système de racines relativement à $\mathbf{T}_1^*$ d'un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}^*$ de $\mathbf{G}^*$. Soit $\mathbf{L}$ le sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$ dont le système de coracines est Φ_H. Nous noterons $W_{\mathbf{L}}$ le groupe de Weyl de $\mathbf{L}^*$ relativement à $\mathbf{T}^*$, $W_{\mathbf{L}}(s)$ le centralisateur de s dans $W_{\mathbf{L}}$, $W^\circ_{\mathbf{L}}(s)$ le groupe de Weyl de $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ relativement à $\mathbf{T}_1^*$. Alors

Proposition 8.7. — *Supposons que H stabilise Φ_s^+ (pour l'action $*$). Alors :*

(a) $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s) = \mathbf{T}_1^*$, *c'est-à-dire* $W^\circ_{\mathbf{L}}(s) = 1$.

(b) $W_{\mathbf{L}}(s)^H \subset A_{\mathbf{G}^*}(s)^H$.

(c) $W_{\mathbf{L}}(s)^H$ *commute avec* $W^\circ(s)^H$.

Démonstration

(a) Soit $\alpha \in \Phi_H \cap \Phi_s^+$ et soit $y \in Y(\mathbf{T}_1^*)$. Alors $\langle \alpha, \sum_{h\in H} h(y)\rangle_{\mathbf{T}_1^*} = 0$ par définition de Φ_H. Mais,

$$\Big\langle \alpha, \sum_{h\in H} h(y)\Big\rangle_{\mathbf{T}_1^*} = \Big\langle \sum_{h\in H} h(\alpha), y\Big\rangle_{\mathbf{T}_1^*}.$$

Donc, $\sum_{h\in H} h(\alpha) = 0$, ce qui est impossible car H stabilise Φ_s^+ (dans son action $*$). Donc $\Phi_H \cap \Phi_s = \varnothing$, ce qui montre (a).

Avant de continuer, introduisons quelques notations. Il existe $v \in Y(\mathbf{T}_1^*)$ tel que $\langle \alpha, v\rangle_{\mathbf{T}_1^*} > 0$ pour tout $\alpha \in \Phi_s^+$. Posons $v_0 = \sum_{h\in H} h(v)$. Alors $v_0 \in Y^H$ et $\langle \alpha, v_0\rangle_{\mathbf{T}_1^*} > 0$ pour tout $\alpha \in \Phi_s^+$ car H stabilise Φ_s^+ (via l'action $*$).

(b) Soit $w \in W_{\mathbf{L}}(s)^H$ et soit $\alpha \in \Phi_s^+$. Posons $f(\alpha) = \sum_{h\in H} h(\alpha)$. Alors $\langle f(\alpha), v_0\rangle_{\mathbf{T}_1^*} > 0$. D'autre part, $f(w(\alpha)) = w(f(\alpha))$ et, puisque $w(v_0) = v_0$, on a $\langle f(w(\alpha)), v_0\rangle_{\mathbf{T}_1^*} > 0$. Cela montre que $\langle w(\alpha), v_0\rangle_{\mathbf{T}_1^*} > 0$ et donc que $w(\alpha) \in \Phi_s^+$. En d'autres termes, $w \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$.

(c) D'après (b), le groupe $W_{\mathbf{L}}(s)^H$ normalise $W^\circ(s)^H$ et $W_{\mathbf{L}}(s)^H \cap W^\circ(s)^H = 1$. D'autre part W^H normalise $W_{\mathbf{L}}$, donc $W(s)^H$ normalise $W_{\mathbf{L}}(s)^H$. D'où (c). □

8.D. Éléments semi-simples cuspidaux. — Un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^*$ (respectivement $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$) est dit *géométriquement cuspidal* (respectivement *rationnellement cuspidal*) s'il existe un élément $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ (respectivement $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$) tel que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$. S'il est nécessaire de préciser le groupe ambiant, nous parlerons d'éléments géométriquement ou rationnellement $\mathbf{G}^*$-cuspidaux. La définition précédente est la même que [**Bon00b**, définition@1.4.1]. Nous commençons cette sous-section par une caractérisation des éléments semi-simples géométriquement cuspidaux.

Proposition 8.8. — *Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$ si et seulement si $a \notin A_{\mathbf{L}^*}(s)$ pour tout sous-groupe de Levi propre $\mathbf{L}^*$ de $\mathbf{G}^*$ contenant s (où on rappelle que $A_{\mathbf{L}^*}(s)$ peut être vu naturellement comme un sous-groupe de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$).*

Démonstration. — S'il existe un sous-groupe de Levi propre $\mathbf{L}^*$ de $\mathbf{G}^*$ contenant s tel que $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s)$, il résulte de la commutativité du diagramme **8.5** que $\omega_s(a)$ n'appartient pas à $\mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$.

Réciproquement, supposons que $a \notin A_{\mathbf{L}^*}(s)$ pour tout sous-groupe de Levi propre $\mathbf{L}^*$ de $\mathbf{G}^*$ contenant s. Nous devons montrer que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$. Pour cela, compte tenu de [**Bon00b**, 1.4.6 et 1.4.7], nous pouvons supposer que $\mathbf{G}$ est semi-simple, simplement connexe et quasi-simple. D'après [**Bon05**, proposition 3.14 (b)], a peut être vu comme un automorphisme du diagramme de Dynkin affine de $\mathbf{G}$. L'hypothèse implique que a agit transitivement sur le diagramme de Dynkin affine (sinon a appartient à un sous-groupe parabolique propre de W). Un examen de la classification des systèmes de racines montre que cela ne peut arriver que lorsque $\mathbf{G}$ est de type A_n. Dans ce cas, a est d'ordre $n+1$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ est aussi d'ordre $n+1$. Par conséquent, $\omega_s(a)$ est injectif et le résultat est immédiat. □

Nous rappelons certaines des propriétés des éléments semi-simples cuspidaux démontrées dans [**Bon00b**, §1.4]. Rappelons que s est dit *isolé* (respectivement *quasi-isolé*) si $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ (respectivement $C_{\mathbf{G}^*}(s)$) n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi propre de $\mathbf{G}^*$.

Proposition 8.9. — *Soit s un élément semi-simple géométriquement cuspidal de $\mathbf{G}^*$. Alors :*

(a) *Toutes les composantes quasi-simples de $\mathbf{G}^*$ sont de type A.*

(b) *Si $\mathbf{L}^*$ est un sous-groupe de Levi propre de $\mathbf{G}^*$ contenant s, alors le morphisme injectif $A_{\mathbf{L}^*}(s) \hookrightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)$ n'est pas surjectif.*

(c) *Si $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$ est de plus rationnellement cuspidal, alors si $\mathbf{L}^*$ est un sous-groupe de Levi F^*-stable propre de $\mathbf{G}^*$ contenant s, alors le morphisme injectif $A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*} \hookrightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ n'est pas surjectif.*

(d) *s est quasi-isolé et régulier.*

(e) *L'application $\omega_s : A_{\mathbf{G}^*}(s) \to \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — (a) découle de la proposition **7.1** (c). (b) découle de la commutativité du diagramme **8.5**. (c) découle de la proposition **8.8**. Le fait que s est quasi-isolé découle de (b). La preuve de la régularité de s est faite dans [**Bon00a**, lemme 3.2.9]. D'où (d). Pour (e), voir [**Bon00b**, proposition 1.4.9]. □

Fixons maintenant $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ et posons

$$\mathbf{L}^*_{s,a} = C_{\mathbf{G}^*}\big(((\mathbf{T}^*_1)^a)^\circ\big).$$

C'est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}^*$ contenant $\mathbf{T}^*_1$. Soit $\mathbf{L}_{s,a}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$ dual de $\mathbf{L}^*_{s,a}$. Notons que $a \in A_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s)$.

Proposition 8.10. — *Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$, alors $\omega_{\mathbf{L}_{s,a},s}(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{L}_{s,a})$. Donc s est géométriquement cuspidal dans $\mathbf{L}^*_{s,a}$.*

Démonstration. — Pour montrer la proposition **8.10**, on peut travailler dans $\mathbf{L}_{s,a}$, c'est-à-dire que l'on peut supposer que $\mathbf{L}_{s,a} = \mathbf{G}$. L'hypothèse signifie donc que $((\mathbf{T}^*_1)^a)^\circ = \mathbf{Z}(\mathbf{G}^*)^\circ$, c'est-à-dire que a est un élément cuspidal [**GP00**, définition 3.1.1] de W. Par suite, si $\mathbf{M}$ est un sous-groupe de Levi propre de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}_1$ et si $\mathbf{M}^*$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}^*$ contenant $\mathbf{T}^*_1$ dual de $\mathbf{M}$, alors $a \notin W_{\mathbf{M}}(s)$. La proposition **8.8** montre alors que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$. □

Corollaire 8.11. — *Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors :*

(a) *$C^\circ_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s) = \mathbf{T}^*_1$, c'est-à-dire $W^\circ_{\mathbf{L}_{s,a}}(s) = 1$.*

(b) *$W_{\mathbf{L}_{s,a}}(s)^a \subset A_{\mathbf{G}^*}(s)$.*

(c) *$W_{\mathbf{L}_{s,a}}(s)^a$ commute avec $W^\circ(s)^a$.*

(d) *$N_W(W_{\mathbf{L}_{s,a}}) = W^a.W_{\mathbf{L}_{s,a}}$.*

(e) *$N_{W(s)}(W_{\mathbf{L}_{s,a}}) = W(s)^a$.*

Démonstration. — Le groupe $\langle a \rangle$ stabilise Φ_s^+. Par conséquent, (a), (b) et (c) découlent de la proposition **8.7**. Montrons (d). Soit $w \in N_W(W_{\mathbf{L}_{s,a}})$. Par construction, a est un élément cuspidal [**GP00**, définition 3.1.1] de $W_{\mathbf{L}_{s,a}}$. Par suite, $waw^{-1} \in W_{\mathbf{L}_{s,a}}$ et est conjugué à a sous W. Donc, d'après [**GP00**, théorème 3.2.11], il existe $x \in W_{\mathbf{L}_{s,a}}$ tel que $waw^{-1} = xax^{-1}$. Donc $w \in W^a.W_{\mathbf{L}_{s,a}}$. Cela montre que $N_W(W_{\mathbf{L}_{s,a}}) \subset W^a.W_{\mathbf{L}_{s,a}}$. L'inclusion réciproque est immédiate.

Montrons pour finir (e). Soit $w \in W(s)$ normalisant $W_{\mathbf{L}_{s,a}}$. Quitte à multiplier w par un élément de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ (et en utilisant (d)), on peut supposer que $w \in W^\circ(s)$. D'après (d), on a $awa^{-1}w^{-1} \in W_{\mathbf{L}_{s,a}}$. Mais, d'autre part, $awa^{-1}w^{-1} \in W^\circ(s)$. Donc, d'après (a), $awa^{-1}w^{-1} = 1$. □

Remarque. — À ce jour, la preuve de [**GP00**, théorème 3.2.11] nécessite la classification des groupes de Coxeter finis et de leurs classes cuspidales. Il faut noter que l'analogue de [**GP00**, théorème 3.2.11] est faux en général pour les groupes de réflexions complexes.

CHAPITRE 3

INDUCTION ET RESTRICTION DE LUSZTIG, SÉRIES DE LUSZTIG

Nous rappelons ici la construction de l'induction et de la restriction de Lusztig ainsi que la définition de séries de Lusztig géométriques et rationnelles. Un des buts de ce chapitre est de fournir une preuve complète de la disjonction des séries de Lusztig rationnelles (en partant de la disjonction des séries géométriques des groupes à centre connexe). Cette preuve est pratiquement entièrement contenue dans [**DM91**, chapitre 14] mais elle n'est pas tout-à-fait complète. Dans la section 9 nous rappelons quelques propriétés de la dualité entre caractères linéaires d'un tore et éléments semi-simples du dual. Nous reprenons notamment un lemme d'Asai [**Asa87**, théorème 2.1.1] sur les caractères centraux associés à des éléments semi-simples géométriquement mais non rationnellement conjugués. Dans la section 10, nous étudions les actions du centre sur les applications de Lusztig. Nous rappelons aussi dans quels cas la formule de Mackey est connue. La section 11 est consacrée à la disjonction des séries de Lusztig ainsi qu'à quelques-unes de leurs propriétés (caractère central, compatibilité à l'induction de Lusztig...).

9. Caractères linéaires de tores maximaux

9.A. Dualité. — Soit $\nabla(\mathbf{G},F)$ l'ensemble des couples $(\mathbf{T},\theta)$ où $\mathbf{T}$ est un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$ et $\theta : \mathbf{T}^F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ est un caractère linéaire. Soit $\nabla^*(\mathbf{G},F)$ l'ensemble des couples $(\mathbf{T}^*,s)$ où $\mathbf{T}^*$ est un tore maximal F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ et $s \in \mathbf{T}^{*F^*}$. Le choix des morphismes $\imath$ et $\jmath$ définis dans §1.B induit une bijection [**DL76**, 5.21.5]

$$\textbf{(9.1)} \qquad \nabla(\mathbf{G},F)/\mathbf{G}^F \longrightarrow \nabla^*(\mathbf{G},F)/\mathbf{G}^{*F^*}.$$

Si $(\mathbf{T},\theta) \in \nabla(\mathbf{G},F)$ et $(\mathbf{T}^*,s) \in \nabla^*(\mathbf{G},F)$, nous écrivons $(\mathbf{T},\theta) \overset{\mathbf{G}}{\longleftrightarrow} (\mathbf{T}^*,s)$ pour dire que $(\mathbf{T},\theta)$ et $(\mathbf{T}^*,s)$ sont associés par la bijection **9.1**.

Lemme 9.2. — *Soient $(\widetilde{\mathbf{T}},\widetilde{\theta}) \in \nabla(\widetilde{\mathbf{G}},F)$, $(\widetilde{\mathbf{T}}^*,\widetilde{s}) \in \nabla^*(\widetilde{\mathbf{G}},F)$ et $z \in (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*}$. Voyons $\hat{z}^{\widetilde{\mathbf{G}}}$ comme un caractère linéaire de $\widetilde{\mathbf{T}}^F$ par restriction depuis $\widetilde{\mathbf{G}}^F$. Alors $(\widetilde{\mathbf{T}},\widetilde{\theta}) \overset{\widetilde{\mathbf{G}}}{\longleftrightarrow} (\widetilde{\mathbf{T}}^*,\widetilde{s})$ si et seulement si $(\widetilde{\mathbf{T}},\widetilde{\theta}\hat{z}^{\widetilde{\mathbf{G}}}) \overset{\widetilde{\mathbf{G}}}{\longleftrightarrow} (\widetilde{\mathbf{T}}^*,\widetilde{s}z)$.*

Démonstration. — Claire. □

9.B. Restriction. — Si $(\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\theta}) \in \nabla(\widetilde{\mathbf{G}}, F)$, nous posons

$$\mathfrak{Res}_{\mathbf{G}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\theta}) = (\widetilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}, \mathrm{Res}_{\widetilde{\mathbf{T}}^F \cap \mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{T}}^F} \widetilde{\theta}) \in \nabla(\mathbf{G}, F).$$

De même, si $(\widetilde{\mathbf{T}}^*, \widetilde{s}) \in \nabla^*(\widetilde{\mathbf{G}}, F)$, nous posons

$${}^*\mathfrak{Res}_{\mathbf{G}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\mathbf{T}}^*, \widetilde{s}) = (i^*(\widetilde{\mathbf{T}}^*), i^*(\widetilde{s})) \in \nabla^*(\mathbf{G}, F).$$

Le lemme suivant se démontre en revenant à la définition de la dualité entre les tores.

Lemme 9.3. — *On a :*

(a) *Soient $(\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\theta})$ et $(\widetilde{\mathbf{T}}^*, \widetilde{s})$ deux éléments de $\nabla(\widetilde{\mathbf{G}}, F)$ et $\nabla^*(\widetilde{\mathbf{G}}, F)$ respectivement. On suppose que $(\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\theta}) \overset{\mathbf{G}}{\longleftrightarrow} (\widetilde{\mathbf{T}}^*, \widetilde{s})$. Alors $\mathfrak{Res}_{\mathbf{G}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\theta}) \overset{\mathbf{G}}{\longleftrightarrow} {}^*\mathfrak{Res}_{\mathbf{G}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\mathbf{T}}^*, \widetilde{s})$.*

(b) *Soient $(\mathbf{T}, \theta)$ et $(\mathbf{T}^*, s)$ deux éléments de $\nabla(\mathbf{G}, F)$ et $\nabla^*(\mathbf{G}, F)$ respectivement. On suppose que $(\mathbf{T}, \theta) \overset{\mathbf{G}}{\longleftrightarrow} (\mathbf{T}^*, s)$. On pose*

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}}) \qquad \textit{et} \qquad \widetilde{\mathbf{T}}^* = i^{*-1}(\mathbf{T}^*)$$

*et soit $\widetilde{s}$ un élément semi-simple de $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tel que $i^*(\widetilde{s}) = s$ (Un tel élément $\widetilde{s}$ existe d'après le corollaire **2.7**). Alors il existe une extension $\widetilde{\theta}$ de θ à $\widetilde{\mathbf{T}}^F$ telle que $(\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\theta}) \overset{\widetilde{\mathbf{G}}}{\longleftrightarrow} (\widetilde{\mathbf{T}}^*, \widetilde{s})$.*

9.C. Conjugaison géométrique et rationnelle. — La définition suivante a été posée par Deligne et Lusztig [**DL76**, définition 5.5].

Définition 9.4. — *Soient $(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ et $(\mathbf{T}_2, \theta_2)$ deux élément de $\nabla(\mathbf{G}, F)$ et soient $(\mathbf{T}_1^*, s_1)$ et $(\mathbf{T}_2^*, s_2)$ deux éléments de $\nabla^*(\mathbf{G}, F)$ tels que $(\mathbf{T}_k, \theta_k) \overset{\mathbf{G}}{\longleftrightarrow} (\mathbf{T}_k^*, s_k)$ pour tout $k \in \{1, 2\}$. On dit que $(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ et $(\mathbf{T}_2, \theta_2)$ sont **géométriquement conjugués** (respectivement **sont dans la même série rationnelle**) si s_1 et s_2 sont géométriquement conjugués (respectivement rationnellement conjugués), c'est-à-dire si ils sont conjugués dans $\mathbf{G}^*$ (respectivement $\mathbf{G}^{*F^*}$).*

Soit s un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$. Nous noterons (s), ou $(s)_{\mathbf{G}^*}$ s'il y a ambiguïté, la classe de conjugaison géométrique de s. De même, nous noterons $[s]$, ou $[s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}$, la classe de conjugaison rationnelle de s. Soit $\nabla^*(\mathbf{G}, F, (s))$ (respectivement $\nabla^*(\mathbf{G}, F, [s])$) l'ensemble des couples $(\mathbf{T}^*, s') \in \nabla^*(\mathbf{G}, F)$ tels que s' est géométriquement (respectivement rationnellement) conjugué à s. Par dualité, nous notons $\nabla(\mathbf{G}, F, (s))$ (respectivement $\nabla(\mathbf{G}, F, [s])$) l'ensemble des couples $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F)$ associés aux couples appartenant à $\nabla^*(\mathbf{G}, F, (s))$ (respectivement $\nabla^*(\mathbf{G}, F, [s])$) par la bijection **9.1**. Rappelons la caractérisation suivante [**DL76**, proposition 5.4] de la conjugaison géométrique des couples de $\nabla(\mathbf{G}, F)$:

***Lemme 9.5* (Deligne-Lusztig)**. — *Soient $(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ et $(\mathbf{T}_2, \theta_2)$ deux éléments de $\nabla(\mathbf{G}, F)$. Alors $(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ et $(\mathbf{T}_2, \theta_2)$ sont géométriquement conjugués si et seulement si il existe un entier naturel non nul n et un élément $g \in \mathbf{G}^{F^n}$ tel que $\mathbf{T}_2 = {}^g\mathbf{T}_1$ et*

$$\theta_2 \circ N_{F^n/F} = {}^g(\theta_1 \circ N_{F^n/F})$$

où $N_{F^n/F} : \mathbf{T}_k^{F^n} \to \mathbf{T}_k^F$, $t \mapsto tF(t) \ldots F^{n-1}(t)$ est la norme de F^n à F ($k = 1$ où 2).

Nous allons maintenant utiliser le groupe $\widetilde{\mathbf{G}}$ (et le fait que son centre est connexe) pour donner une autre définition des séries rationnelles. Tout d'abord, notons que les séries géométriques et rationnelles coïncident dans $\widetilde{\mathbf{G}}$ à cause du théorème de Steinberg (voir théorème **3.5**) :

Proposition 9.6. — *Deux éléments semi-simples de $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ sont géométriquement conjugués si et seulement si ils sont rationnellement conjugués.*

Corollaire 9.7. — *Soit $\widetilde{s} \in \widetilde{\mathbf{G}}^{F*^*}$ un élément semi-simple et soit $s = i^*(\widetilde{s})$. Si $(\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\theta}) \in \nabla(\widetilde{\mathbf{G}}, F, (\widetilde{s}))$, alors $\mathfrak{Res}_{\mathbf{G}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\theta}) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s])$.*

Corollaire 9.8. — *Soient $(\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\theta}_1)$ et $(\widetilde{\mathbf{T}}_2, \widetilde{\theta}_2)$ deux éléments de $\nabla(\widetilde{\mathbf{G}}, F)$. Alors $(\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\theta}_1)$ et $(\widetilde{\mathbf{T}}_2, \widetilde{\theta}_2)$ sont géométriquement conjugués si et seulement si ils appartiennent à la même série rationnelle.*

La prochaine proposition fournit, en termes du groupe $\widetilde{\mathbf{G}}$, un outil pratique pour déterminer si deux éléments semi-simples de $\mathbf{G}^{*F^*}$ sont rationnellement conjugués.

Proposition 9.9. — *Soient s_1 et s_2 deux éléments semi-simples de $\mathbf{G}^{*F^*}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *s_1 et s_2 sont rationnellement conjugués ;*

(2) *Il existe des éléments semi-simples rationnellement conjugués $\widetilde{s}_1$ et $\widetilde{s}_2$ dans $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tels que $i^*(\widetilde{s}_i) = s_i$ pour tout $i \in \{1, 2\}$;*

(3) *Il existe des éléments semi-simples géométriquement conjugués $\widetilde{s}_1$ et $\widetilde{s}_2$ dans $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tels que $i^*(\widetilde{s}_i) = s_i$ pour tout $i \in \{1, 2\}$.*

Démonstration. — D'après la proposition **9.6**, (2) et (3) sont équivalents. Il est par ailleurs clair que (2) implique (1). Il nous reste donc à démontrer que (1) implique (2).

Supposons donc qu'il existe $g \in \mathbf{G}^{*F^*}$ tel que $s_2 = g s_1 g^{-1}$. Puisque $i^* : \widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*} \to \mathbf{G}^{*F^*}$ est surjective (voir corollaire **2.7**), il existe $\widetilde{s}_1 \in \widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ et $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tels que $i^*(\widetilde{s}_1) = s_1$ et $i^*(\widetilde{g}) = g$. Posons maintenant $\widetilde{s}_2 = \widetilde{g}\widetilde{s}_1\widetilde{g}^{-1}$. Alors $\widetilde{s}_1$ et $\widetilde{s}_2$ sont des éléments semi-simples rationnellement conjugués de $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ et $i^*(\widetilde{s}_k) = s_k$ pour tout $k \in \{1, 2\}$. □

Corollaire 9.10. — *Soient $(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ et $(\mathbf{T}_2, \theta_2)$ deux éléments de $\nabla(\mathbf{G}, F)$. Soit $\widetilde{\mathbf{T}}_k = \mathbf{T}_k.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})$ (pour $k \in \{1, 2\}$). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ et $(\mathbf{T}_2, \theta_2)$ appartiennent à la même série rationnelle ;*

(2) *Il existe des extensions $\widetilde{\theta}_1$ et $\widetilde{\theta}_2$ de θ_1 et θ_2 respectivement (à $\widetilde{\mathbf{T}}_1^F$ et $\widetilde{\mathbf{T}}_2^F$ respectivement) telles que $(\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\theta}_1)$ et $(\widetilde{\mathbf{T}}_2, \widetilde{\theta}_2)$ sont géométriquement conjugués.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la proposition **9.9** et du lemme **9.3** (b). □

9.D. Caractères centraux. — La proposition suivante explique comment varient les caractères linéaires $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F}^{\mathbf{T}^F}\theta$ lorsque $(\mathbf{T},\theta)$ parcourt une série géométrique ou rationnelle.

Proposition 9.11. — *Soient* $(\mathbf{T}_1,\theta_1)$ *et* $(\mathbf{T}_2,\theta_2)$ *deux éléments de* $\nabla(\mathbf{G},F)$.

(a) *Si* $(\mathbf{T}_1,\theta_1)$ *et* $(\mathbf{T}_2,\theta_2)$ *sont géométriquement conjugués, alors*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}}^{\mathbf{T}_1^F}\theta_1=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}}^{\mathbf{T}_2^F}\theta_2.$$

(b) *Si* $(\mathbf{T}_1,\theta_1)$ *et* $(\mathbf{T}_2,\theta_2)$ *appartiennent à la même série rationnelle, alors*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F}^{\mathbf{T}_1^F}\theta_1=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F}^{\mathbf{T}_2^F}\theta_2.$$

Démonstration. — (a) Si $(\mathbf{T}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{T}_2,\theta_2)$ sont géométriquement conjugués, alors, d'après le lemme **9.5**, il existe un entier naturel non nul n et un élément $g\in\mathbf{G}^{F^n}$ tel que $\mathbf{T}_2={}^g\mathbf{T}_1$ et

$$\theta_2\circ N_{F^n/F}={}^g(\theta_1\circ N_{F^n/F}).$$

Soit $z\in\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}$. Puisque le groupe $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ}$ est connexe, il existe $z'\in\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F^n}$ tel que $N_{F^n/F}(z')=z$. Donc

$$\theta_2(z)=\theta_2(N_{F^n/F}(z'))=\theta_1(N_{F^n/F}(g^{-1}z'g))=\theta_1(N_{F^n/F}(z'))=\theta_1(z)$$

car z' est central. Cela montre (a).

(b) Si $(\mathbf{T}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{T}_2,\theta_2)$ appartiennent à la même série rationnelle, alors, d'après le corollaire **9.10**, il existe $(\widetilde{\mathbf{T}}_1,\widetilde{\theta}_1)$ et $(\widetilde{\mathbf{T}}_2,\widetilde{\theta}_2)$ dans $\nabla(\widetilde{\mathbf{G}},F)$ tels que

$$\mathfrak{Res}_{\mathbf{G}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\mathbf{T}}_k,\widetilde{\theta}_k)=(\mathbf{T}_k,\theta_k)$$

($k\in\{1,2\}$) et tels que $(\widetilde{\mathbf{T}}_1,\widetilde{\theta}_1)$ et $(\widetilde{\mathbf{T}}_2,\widetilde{\theta}_2)$ sont géométriquement conjugués. Par conséquent, d'après (a) (appliqué au groupe $\widetilde{\mathbf{G}}$) et puisque $\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})$ est connexe, on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F}^{\widetilde{\mathbf{T}}_1^F}\widetilde{\theta}_1=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F}^{\widetilde{\mathbf{T}}_2^F}\widetilde{\theta}_2.$$

Donc (b) découle de ce que $\mathbf{Z}(\mathbf{G})=\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})\cap\mathbf{G}$. □

Si s est un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$, nous notons $\hat{s}:\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ le caractère linéaire défini par

$$\hat{s}=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F}^{\mathbf{T}^F}\theta \tag{9.12}$$

pour tout $(\mathbf{T},\theta)\in\nabla(\mathbf{G},F,[s])$; $\hat{s}$ est bien défini d'après la proposition **9.11** (b). Nous notons d'autre part $\hat{s}^{\circ}$ la restriction de $\hat{s}$ à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}$; le caractère linéaire $\hat{s}^{\circ}$ peut aussi être défini par l'égalité

$$\hat{s}^{\circ}=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}}^{\mathbf{T}^F}\theta \tag{9.13}$$

pour tout $(\mathbf{T},\theta)\in\nabla(\mathbf{G},F,(s))$ (voir proposition **9.11** (a)).

Soit maintenant $\alpha\in H^1(F^*,A_{\mathbf{G}^*}(s))$. Si $g_\alpha\in\mathbf{G}^*$ est tel que $g_\alpha^{-1}F(g_\alpha)\in C_{\mathbf{G}^*}(s)$ et représente α, alors $s_\alpha=g_\alpha s g_\alpha^{-1}\in\mathbf{G}^{*F^*}$ est géométriquement conjugué à s et

$[s_\alpha]$ ne dépend que de α et non pas du choix de g_α. De plus, $(s_\alpha)_{\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))}$ est une famille de représentants des classes de $\mathbf{G}^{*F^*}$-conjugaison contenues dans $(s)_{\mathbf{G}^*}^{F^*}$. D'autre part, d'après la proposition **9.11** (a), $\hat{s}_\alpha \hat{s}^{-1}$ est un caractère linéaire du groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F$. Il est donné par la formule suivante :

Lemme 9.14 **(Asai).** — *Si $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$, alors $\hat{s}_\alpha \hat{s}^{-1} = \omega_s^1(\alpha)$.*

Rappel. — Le morphisme $\omega_s^1 : H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s)) \to (\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F)^\wedge$ a été défini en §8.A.

Démonstration. — Le lemme **9.14** est démontré dans [**Asa87**, théorème 2.1.1] lorsque F agit trivialement sur le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ (et lorsque F est un endomorphisme de Frobenius). L'essentiel de sa preuve s'applique ici encore mais nous préférons la rappeler dans ce cadre légèrement plus général.

Soit $\widetilde{\mathbf{T}}^*$ un tore maximal F^*-stable de $\widetilde{\mathbf{G}}^*$ contenant $\widetilde{s}$ et soit $\widetilde{\mathbf{T}}$ un tore maximal F-stable de $\widetilde{\mathbf{G}}$ dual de $\widetilde{\mathbf{T}}^*$. Posons $\mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}$ et $\mathbf{T}^* = i^*(\widetilde{\mathbf{T}}^*)$. Soit $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ et soit a un élément de $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ représentant α. On peut supposer que a normalise $\mathbf{T}^*$ et que $g_\alpha^{-1} F(g_\alpha) = a$. Alors s_α peut être vu comme un élément de $\mathbf{T}^*$: plus précisément, $s_\alpha \in \mathbf{T}^{*aF^*}$.

Choisissons un entier naturel non nul n (multiple de δ) tel que F^n soit un endomorphisme de Frobenius déployé de $\widetilde{\mathbf{T}}$ (sur le corps fini $\mathbb{F}_{q^{n/\delta}}$) et tel que $(aF^*)^n = F^{*n}$ sur $\widetilde{\mathbf{T}}^*$. On note encore par a l'élément de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ correspondant à $a \in N_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{T}^*)$.

Il existe $\widetilde{x} \in Y(\widetilde{\mathbf{T}}^*) = X(\widetilde{\mathbf{T}})$ tel que

$$\widetilde{s} = N_{F^n/F}(\widetilde{x})\Big(\widetilde{\imath}\Big(\frac{1}{q^{n/\delta}-1}\Big)\Big).$$

On pose $x = \operatorname{Res}_{\mathbf{T}}^{\widetilde{\mathbf{T}}} \widetilde{x}$. Alors

$$s = N_{F^n/F}(x)\Big(\widetilde{\imath}\Big(\frac{1}{q^{n/\delta}-1}\Big)\Big).$$

D'autre part, il existe $x_\alpha \in Y(\mathbf{T}^*) = X(\mathbf{T})$ tel que

$$s = N_{F^n/aF}(x_\alpha)\Big(\widetilde{\imath}\Big(\frac{1}{q^{n/\delta}-1}\Big)\Big).$$

Alors $\hat{s} = \kappa \circ \operatorname{Res}_{\mathbf{Z}^F}^{\mathbf{T}} x$ et $\hat{s}_\alpha = \kappa \circ \operatorname{Res}_{\mathbf{Z}^F}^{\mathbf{T}} x_\alpha$.

Soit $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$. Alors il existe $t \in \mathbf{T}$ tel que $t^{-1}F^n(t) = z$. On pose $u = F(t)$. Puisque $F(z) = z$ on a $u^{-1}F^n(u) = z$. Soit $t_1 = t^{-1}F(t)$ et $t_\alpha = t^{-1}\,{}^aF(t)$. Alors $N_{F^n/F}(t_1) = N_{F^n/aF}(t_\alpha) = z$, $t_1 \in \mathbf{T}^{F^n}$ et $t_\alpha \in \mathbf{T}^{(aF)^n} = \mathbf{T}^{F^n}$. En particulier,

$$\hat{s}(z) = N_{F^n/F}(x)(t_1) \qquad \text{et} \qquad \hat{s}_\alpha(z) = N_{F^n/aF}(x_\alpha)(t_\alpha).$$

Mais,

$$N_{F^n/F}(x)\Big(\widetilde{\imath}\Big(\frac{1}{q^{n/\delta}-1}\Big)\Big) = N_{F^n/aF}(x_\alpha)\Big(\widetilde{\imath}\Big(\frac{1}{q^{n/\delta}-1}\Big)\Big)$$

donc

$$\operatorname{Res}_{\mathbf{T}^{F^n}}^{\mathbf{T}} N_{F^n/F}(x) = \operatorname{Res}_{\mathbf{T}^{F^n}}^{\mathbf{T}} N_{F^n/aF}(x_\alpha).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\hat{s}_\alpha(z)\hat{s}(z)^{-1} &= N_{F^n/F}(x)(t_\alpha t_1^{-1}) \\ &= N_{F^n/F}(x)(aua^{-1}u^{-1}) \\ &= ({}^a N_{F^n/F}(\widetilde{x}) - N_{F^n/F}(\widetilde{x}))(u).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\varphi_s(a) = \widetilde{a}\widetilde{s}\widetilde{a}^{-1}\widetilde{s}^{-1} = ({}^a N_{F^n/F}(\widetilde{x}) - N_{F^n/F}(\widetilde{x}))\Big(\widetilde{\imath}\Big(\frac{1}{q^{n/\delta}-1}\Big)\Big)$$

donc, d'après **4.9**, on a

$$\begin{aligned}\omega_s^1(\alpha)(z) &= \omega_s^1(\alpha)(u^{-1}F^n(u)) \\ &= \omega_s^1(\alpha)(u^{q^{n/\delta}-1}) \\ &= ({}^a N_{F^n/F}(\widetilde{x}) - N_{F^n/F}(\widetilde{x}))(u),\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu. □

10. Induction et restriction de Lusztig

10.A. Définitions. — Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et supposons que $\mathbf{P}$ possède un complément de Levi F-stable $\mathbf{L}$. Soit $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$. Posons, suivant Lusztig [**Lus76**],

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} = \{g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\}.$$

Alors $\mathbf{G}^F$ agit sur $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$ par translations à gauche tandis que $\mathbf{L}^F$ agit par translations à droite. Par conséquent,

$$H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

est un $\mathbf{G}^F$-module-$\mathbf{L}^F$ virtuel et

$$H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}})^\vee = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\vee$$

est un $\mathbf{L}^F$-module-$\mathbf{G}^F$ virtuel. Nous noterons

$$\begin{array}{rccc} R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : & \mathbb{Z}\operatorname{Irr}\mathbf{L}^F & \longrightarrow & \mathbb{Z}\operatorname{Irr}\mathbf{G}^F \\ & \Lambda & \longmapsto & H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} \Lambda \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} {}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : & \mathbb{Z}\operatorname{Irr}\mathbf{G}^F & \longrightarrow & \mathbb{Z}\operatorname{Irr}\mathbf{L}^F \\ & \Gamma & \longmapsto & H_c^*(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F} \Gamma \end{array}$$

les applications d'induction et de restriction de Lusztig respectivement. Elles s'étendent naturellement par linéarité en applications entre espaces de fonctions centrales

$$R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \operatorname{Cent}(\mathbf{L}^F) \longrightarrow \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F)$$

et

$${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F) \longrightarrow \operatorname{Cent}(\mathbf{L}^F).$$

Ces deux applications sont adjointes l'une de l'autre par rapport aux produits scalaires $\langle,\rangle_{\mathbf{L}^F}$ et $\langle,\rangle_{\mathbf{G}^F}$.

***Exemple 10.1* (Induction de Harish-Chandra).** — Si $\mathbf{P}$ est F-stable, alors $\mathbf{U}$ agit par translation à droite sur $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$ et $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}/\mathbf{U} \simeq \mathbf{G}^F/\mathbf{U}^F$. Par conséquent,

$$H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 2\dim \mathbf{U} \\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathbf{G}^F/\mathbf{U}^F] & \text{si } k = 2\dim \mathbf{U}. \end{cases}$$

Par suite, $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ est le reflet, sur les groupes de Grothendieck, d'un vrai foncteur entre les catégories de modules, foncteur qui sera toujours noté $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$. De même pour ${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$. Ces deux foncteurs sont appelés respectivement *induction* et *restriction de Harish-Chandra*. Pratiquement toutes les formules démontrées dans ce chapitre au sujet des applications de Lusztig ont un sens en termes de modules lorsque l'on est en présence d'induction ou de restriction de Harish-Chandra (voir par exemple **10.4**, **10.5**, propositions **10.10** et **10.11**...).

10.B. Actions de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ et $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. — L'action de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ par translation à gauche (ou à droite) sur $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$ commute aux actions de $\mathbf{G}^F$ et $\mathbf{L}^F$. Par conséquent, si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$, alors on a

$$t_z^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ t_z^{\mathbf{L}} \tag{10.2}$$

et

$$t_z^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = {}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ t_z^{\mathbf{G}}. \tag{10.3}$$

Posons $\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})$. Soit $a \in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et soit $\widetilde{l}_a \in \widetilde{\mathbf{L}}^F$ tel que $\sigma_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(a) = \widetilde{l}_a\mathbf{L}^F\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F$. Alors la conjugaison par $\widetilde{l}_a$ induit un automorphisme de $\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}$, ce qui implique que

$$\tau_a^{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ \tau_{h_{\mathbf{L}}^1(a)}^{\mathbf{L}} \tag{10.4}$$

et

$$\tau_{h_{\mathbf{L}}^1(a)}^{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = {}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ \tau_a^{\mathbf{G}}. \tag{10.5}$$

Exemple 10.6. — Soient $\zeta_{\mathbf{L}} \in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{L}))^\wedge$ et $\zeta \in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$ et soient $\lambda \in \mathrm{Cent}(\mathbf{L}^F)_{\zeta_{\mathbf{L}}}$ et $\gamma \in \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F)_\zeta$. Alors, d'après **10.4**, on a

$$R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda \in \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F)_{\zeta_{\mathbf{L}}\circ h_{\mathbf{L}}^1}.$$

D'autre part, si $\zeta = \zeta_{\mathbf{L}} \circ h_{\mathbf{L}}^1$, alors, d'après **10.5**, on a

$${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\gamma \in \mathrm{Cent}(\mathbf{L}^F)_{\zeta_{\mathbf{L}}}.$$

Si $\mathrm{Ker}\,\zeta \not\subset \mathrm{Ker}\,h_{\mathbf{L}}$, alors

$${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\gamma = 0. \quad \square$$

10.C. Restriction de $\widetilde{\mathbf{G}}$ à $\mathbf{G}$. — Notons $\widetilde{\mathbf{P}}$ l'unique sous-groupe parabolique de $\widetilde{\mathbf{G}}$ tel que $\mathbf{P} = \widetilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{G}$ et soit $\widetilde{\mathbf{L}}$ l'unique complément de Levi de $\widetilde{\mathbf{P}}$ tel que $\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}} \cap \mathbf{G}$. Alors $\widetilde{\mathbf{L}}$ est F-stable et $\mathbf{U}$ est le radical unipotent de $\widetilde{\mathbf{P}}$. De plus (voir par exemple [**Bon00a**, lemme 2.1.2 (b)]),

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} = \widetilde{\mathbf{G}}^F \times_{\mathbf{G}^F} \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} = \mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}} \times_{\mathbf{L}^F} \widetilde{\mathbf{L}}^F. \tag{10.7}$$

Par suite, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, un isomorphisme de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$-modules-$\mathbf{L}^F$

$$H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}) \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{G}}^F \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F} H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \tag{10.8}$$

ainsi qu'un isomorphisme de $\mathbf{G}^F$-modules-$\widetilde{\mathbf{L}}^F$

$$H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}) \simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{L}}^F. \tag{10.9}$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 10.10. — *On a :*

(a) $$\operatorname{Ind}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \circ R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \circ \operatorname{Ind}_{\mathbf{L}^F}^{\widetilde{\mathbf{L}}^F},$$

(a*) $$\operatorname{Res}_{\mathbf{L}^F}^{\widetilde{\mathbf{L}}^F} \circ {}^*R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} = {}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F},$$

(b) $$\operatorname{Ind}_{\mathbf{L}^F}^{\widetilde{\mathbf{L}}^F} \circ {}^*R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = {}^*R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \circ \operatorname{Ind}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F},$$

(b*) $$\operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \circ R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} = R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ \operatorname{Res}_{\mathbf{L}^F}^{\widetilde{\mathbf{L}}^F},$$

Démonstration. — Nous démontrerons ici seulement la formule (a), les autres découlant d'arguments similaires. Notons aussi que (a*) et (b*) sont des formules adjointes de (a) et (b). Soit Λ un $\mathbf{L}^F$-module. Alors, d'après **10.8**, on a des isomorphismes de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$-modules

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}\big(H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} \Lambda\big) &\simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{G}}^F \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F} \big(H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} \Lambda\big)\\
&\simeq \big(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{G}}^F \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{G}^F} H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}})\big) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} \Lambda\\
&\simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} \Lambda\\
&\simeq \big(H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{L}}^F} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{L}}^F\big) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} \Lambda\\
&\simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{L}}^F} \big(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{L}}^F \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} \Lambda\big)\\
&\simeq H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{L}}^F} \operatorname{Ind}_{\mathbf{L}^F}^{\widetilde{\mathbf{L}}^F} \Lambda
\end{aligned}$$

et (a) en résulte. □

Nous rappelons aussi la

Proposition 10.11. — *Soit $\tau : \widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ un caractère linéaire. Alors τ peut être vu comme un caractère linéaire de $\widetilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F \simeq \widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F$ et, en utilisant cette identification, on a*

(a) *Si $\widetilde{\lambda} \in \operatorname{Class}(\widetilde{\mathbf{L}}^F)$, alors $R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\lambda} \otimes \tau) = R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\lambda}) \otimes \tau$.*

(b) *Si $\widetilde{\gamma} \in \operatorname{Class}(\widetilde{\mathbf{G}}^F)$, alors ${}^*R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\gamma} \otimes \tau) = {}^*R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\gamma}) \otimes \tau$.*

10.D. Dualité d'Alvis-Curtis. — Notons $\mathcal{P}(\Delta_0)$ l'ensemble des parties de Δ_0. Alors ϕ_0 agit sur $\mathcal{P}(\Delta_0)$ et on note $\mathcal{P}(\Delta_0)^{\phi_0}$ l'ensemble des parties ϕ_0-stables de Δ_0. Avec ces notations, on peut définir

$$D_{\mathbf{G}} = \sum_{I \in \mathcal{P}(\Delta_0)^{\phi_0}} \eta_{\mathbf{L}_I}\, R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_I \subset \mathbf{P}_I} \circ {}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_I \subset \mathbf{P}_I}.$$

Alors $D_{\mathbf{G}} : \mathbb{Z}\operatorname{Irr}\mathbf{G}^F \to \mathbb{Z}\operatorname{Irr}\mathbf{G}^F$ est une involution isométrique [**DM91**, proposition 8.10 et corollaire 8.14] appelée *dualité d'Alvis-Curtis*. Elle s'étend en une application linéaire $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F) \to \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F)$ toujours noté $D_{\mathbf{G}}$.

10.E. Formule de Mackey. — Soit $\mathbf{Q}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{Q}$. Notons $\mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{M})$ l'ensemble des $g \in \mathbf{G}$ tels que $\mathbf{L} \cap {}^g\mathbf{M}$ contient un tore maximal de $\mathbf{G}$. Nous noterons $\Delta^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}, \mathbf{M} \subset \mathbf{Q}}$ l'application linéaire $\operatorname{Cent}(\mathbf{M}^F) \to \operatorname{Cent}(\mathbf{L}^F)$ définie par

$$\Delta^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}, \mathbf{M} \subset \mathbf{Q}} = {}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}} \circ R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M} \subset \mathbf{Q}} - \sum_{g \in [\mathbf{L}^F \backslash \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathbf{M})^F / \mathbf{M}^F]} R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{L} \cap {}^g\mathbf{M} \subset \mathbf{L} \cap {}^g\mathbf{Q}} \circ {}^*R^{{}^g\mathbf{M}}_{\mathbf{L} \cap {}^g\mathbf{M} \subset \mathbf{P} \cap {}^g\mathbf{M}} \circ (\operatorname{ad} g)_{\mathbf{M}^F}.$$

Ici, $(\operatorname{ad} g)_{\mathbf{M}^F} : \operatorname{Cent}(\mathbf{M}^F) \to \operatorname{Cent}({}^g\mathbf{M}^F)$ est l'application induite par la conjugaison par g. Nous dirons que « la formule de Mackey a lieu dans $\mathbf{G}$ » si, pour tout sous-groupe réductif connexe $\mathbf{G}'$ de $\mathbf{G}$ de même rang, pour tous sous-groupes paraboliques $\mathbf{P}'$ et $\mathbf{Q}'$ de $\mathbf{G}'$ et pour tous compléments de Levi F-stables $\mathbf{L}'$ et $\mathbf{M}'$ de $\mathbf{P}'$ et $\mathbf{Q}'$ respectivement, on a $\Delta^{\mathbf{G}'}_{\mathbf{L}' \subset \mathbf{P}', \mathbf{M}' \subset \mathbf{Q}'} = 0$. Il est conjecturé que la formule de Mackey est valide sans hypothèse. Pour l'instant, elle n'est connue que dans les cas suivants :

Théorème 10.12 **(Formule de Mackey)**. — *On a :*

(a) *Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite.*
  (a1) $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{Q}$ *sont* F*-stables.*
  (a2) $\mathbf{L}$ *ou* $\mathbf{M}$ *est un tore maximal de* $\mathbf{G}$.
 Alors $\Delta^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}, \mathbf{M} \subset \mathbf{Q}} = 0$.
(b) *Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite.*
  (b1) $\delta = 1$ *et* $q \neq 2$.
  (b2) $\delta = 1$ *et* $\mathbf{G}$ *ne contient pas de composante quasi-simple de type* E_6, E_7 *ou* E_8.
  (b3) $\delta = 2$ *et* $\mathbf{G}$ *est de type* B_2, G_2 *ou* F_4.
 Alors la formule de Mackey a lieu dans $\mathbf{G}$.

Démonstration. — (a1) est dû à Deligne [**LS79**, théorème 2.5], (a2) est dû à Deligne et Lusztig [**DL83**, théorème 7] et (b1) et (b2) et (b3) seront montrés dans [**BM**]. □

De même que pour le théorème **10.12**, il est conjecturé que le corollaire suivant reste vrai sans hypothèse.

Corollaire 10.13. — *Soit* $\mathbf{P}_0$ *un sous-groupe parabolique de* $\mathbf{G}$ *dont* $\mathbf{L}$ *est un complément de Levi. Supposons l'une des conditions suivantes vérifiées :*

(1) $\mathbf{L}$ *est un tore maximal de* $\mathbf{G}$.

(2) $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_0$ *sont* F*-stables.*

(3) $\delta = 1$ *et* $q \neq 2$.

(4) $\delta = 1$ *et* $\mathbf{G}$ *ne contient pas de composante quasi-simple de type* E_6, E_7 *ou* E_8.

(5) $\delta = 2$ *et* $\mathbf{G}$ *est de type* B_2, G_2 *ou* F_4.

Alors
$$R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}_0}^{\mathbf{G}},$$
$$D_{\mathbf{G}} \circ R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}} R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ D_{\mathbf{L}}$$
et
$$D_{\mathbf{L}} \circ {}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}} {}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \circ D_{\mathbf{G}}.$$

Notation. — Si λ est un caractère virtuel de $\mathbf{L}^F$, nous noterons $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ le groupe $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)/\mathbf{L}^F$ et $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L},\lambda)$ l'ensemble des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ apparaissant dans le caractère virtuel $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda$. A priori, cet ensemble pourrait dépendre du choix de $\mathbf{P}$. Bien sûr, il n'en dépend pas si l'une des hypothèses du corollaire **10.13** est satisfaite. Dans la suite, nous n'emploierons cette notation que lorsque cet ensemble ne dépend pas du choix de $\mathbf{P}$ ou bien lorsque le choix du sous-groupe parabolique sera éclairé par le contexte.

Si $\mathbf{T}$ est un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}$ et si $\mathbf{B}$ est un sous-groupe de Borel contenant $\mathbf{T}$, nous noterons $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^*R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ les applications $R_{\mathbf{T}\subset\mathbf{B}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^*R_{\mathbf{T}\subset\mathbf{B}}^{\mathbf{G}}$. Si la formule de Mackey a lieu dans $\mathbf{G}$, nous noterons $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ les applications $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ et ${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$.

10.F. Fonctions absolument cuspidales. — Une fonction centrale $\gamma : \mathbf{G}^F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est dite *absolument cuspidale* si, pour tout sous-groupe de Levi F-stable propre de $\mathbf{G}$ et pour tout sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ dont $\mathbf{L}$ est un complément de Levi, on a ${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\gamma = 0$ (voir [**Bon00a**, définition du §3.1] ou [**Bon00b**, §4.2]). Nous noterons $\mathrm{Cus}(\mathbf{G}^F)$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel des fonctions absolument cuspidales sur $\mathbf{G}^F$. D'après **10.2** et **10.4**, $\mathrm{Cus}(\mathbf{G}^F)$ est stable sous les actions des groupes $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ et $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. Si la formule de Mackey a lieu dans $\mathbf{G}$, alors

$$\mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F) = \bigoplus_{\mathbf{L}\in[\mathcal{L}(\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^F/\mathbf{G}^F]} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\mathrm{Cus}(\mathbf{L}^F). \tag{10.14}$$

Rappelons que $\mathcal{L}(\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ est l'ensemble des sous-groupes de Levi de $\mathbf{G}$ (voir §7.B) ; $\mathcal{L}(\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^F$ est alors l'ensemble des sous-groupe de Levi F-stables de $\mathbf{G}$, sur lequel le groupe $\mathbf{G}^F$ agit par conjugaison. Remarquons que, d'après **10.4**, l'action de $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ sur $\mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F)$ stabilise $\mathrm{Cus}(\mathbf{G}^F)$.

Exemple 10.15. — Soit $\zeta \in \mathcal{Z}_{\mathrm{cus}}^{\wedge}(\mathbf{G})$ et supposons que ζ est F-stable. Soit $\gamma \in \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F)_\zeta$. Alors, d'après l'exemple **10.6**, γ est absolument cuspidale.

11. Séries de Lusztig géométriques et rationnelles

11.A. Définitions. — Si $(\mathbf{T},\theta) \stackrel{\mathbf{G}}{\longleftrightarrow} (\mathbf{T}^*,s)$, nous noterons $R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s)$ le caractère (virtuel) de Deligne-Lusztig $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$. Fixons un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^{*F*}$. Nous appellerons *série de Lusztig géométrique* (respectivement *rationnelle*) associée à s et nous noterons $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s))$ (respectivement $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s])$) l'ensemble des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ apparaissant dans un $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$, où $(\mathbf{T},\theta) \in \nabla(\mathbf{G},F,(s))$ (respectivement $(\mathbf{T},\theta) \in \nabla(\mathbf{G},F,[s])$). En d'autres termes,

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s)) = \bigcup_{(\mathbf{T},\theta)\in\nabla(\mathbf{G},F,(s))} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{T},\theta)$$

et
$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s]) = \bigcup_{(\mathbf{T},\theta)\in\nabla(\mathbf{G},F,[s])} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{T},\theta).$$

Remarques 11.1

(a) Il est clair que $\nabla(\mathbf{G},F,(s)) = \bigcup_{[t]\,\subset\,(s)} \nabla(\mathbf{G},F,[t])$, donc

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s)) = \bigcup_{[t]\,\subset\,(s)} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[t]).$$

(b) Si $\widetilde{s}$ est un élément semi-simple de $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$, alors, d'après le corollaire **9.8**, on a $\mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F,(\widetilde{s})) = \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F,[\widetilde{s}])$.

(c) Les séries de Lusztig géométriques ou rationnelles sont stables sous l'action de $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. En effet, si $a \in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et si $(\mathbf{T},\theta) \in \nabla(\mathbf{G},F)$, alors $\tau_a^{\mathbf{G}}(R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)) = R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ d'après la formule **10.4**.

(d) Si $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s))$ (respectivement $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s])$) et si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ F}$ (respectivement $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$), alors

$$t_z^{\mathbf{G}}\gamma = \hat{s}^\circ(z)\gamma$$

(respectivement $$t_z^{\mathbf{G}}\gamma = \hat{s}(z)\gamma \quad).$$

En effet, soit $\gamma \in \operatorname{Irr}\mathbf{G}^F$ et notons λ le caractère linéaire de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ tel que $t_z^{\mathbf{G}}\gamma = \lambda(z)\gamma$ pour tout $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$. D'après les formules **10.2** et **9.12**, on a $t_z^{\mathbf{G}} R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta) = \hat{s}(z) R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ pour tout $(\mathbf{T},\theta) \in \nabla(\mathbf{G},F,[s])$. Donc, si $\lambda \neq \hat{s}$, γ et $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ sont orthogonaux.

11.B. Partition en séries géométriques. — La preuve du théorème suivant est due à Deligne et Lusztig [**DL76**, théorème 6.2].

***Théorème 11.2* (Deligne-Lusztig).** — *On a :*

(a) *Soit s un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$, soit $(\mathbf{T},\theta) \in \nabla(\mathbf{G},F,(s))$, soit $\mathbf{U}$ le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$ et soit k un entier naturel. Alors toute composante irréductible de $H_c^k(\mathbf{Y}_\mathbf{U}^\mathbf{G}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^F} \theta$ appartient à la série de Lusztig géométrique $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s))$.*

(b) *On a*
$$\operatorname{Irr}\mathbf{G}^F = \coprod_{(s)} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s)),$$
où (s) parcourt l'ensemble des classes de conjugaison géométriques d'éléments semi-simples de $\mathbf{G}^{*F^*}$.

Le théorème **11.2** combiné au corollaire **9.8** fournit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 11.3. — $\operatorname{Irr}\widetilde{\mathbf{G}}^F = \coprod_{[\widetilde{s}]} \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F,[\widetilde{s}])$.

Si s est un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$, nous noterons $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F,(s))$ le sous-$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel de $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F)$ engendré par $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s))$. Le théorème **11.2** (b) montre que

$$\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F) = \overset{\perp}{\bigoplus_{(s)}} \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F,(s)). \tag{11.4}$$

11.C. Partition en séries rationnelles. — Dans cette sous-section, nous montrons qu'il est possible de remplacer « série géométrique » par « série rationnelle » dans l'énoncé du théorème de Deligne-Lusztig précédent. Ce résultat est bien connu : il était annoncé dans [**Lus77**, 7.5.2] et Lusztig y donnait une indication pour la preuve. Une esquisse presque complète peut aussi être trouvée dans [**DM91**, 14.50]. La preuve (complète) que nous donnons ici ne prétend à aucune originalité : il s'agit juste de suivre les indications des précédents auteurs. Nous l'avons incluse car elle s'inscrit bien dans le cadre des méthodes qui seront développées tout au long de cet article. Nous commençons par des rappels élémentaires.

Proposition 11.5. — *Soient $(\widetilde{\mathbf{T}}^*,\widetilde{s}) \in \nabla^*(\widetilde{\mathbf{G}},F)$ et $z \in (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*}$. Posons $(\mathbf{T},s) = {}^*\mathfrak{Res}_{\mathbf{G}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\mathbf{T}}^*,\widetilde{s})$. Alors*

(a) $\operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} R_{\widetilde{\mathbf{T}}^*}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{s}) = R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s)$.

(b) $R_{\widetilde{\mathbf{T}}^*}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{s}z) = R_{\widetilde{\mathbf{T}}^*}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{s})\hat{z}^{\widetilde{\mathbf{G}}}$.

Démonstration. — (a) résulte du lemme **9.3** et de la proposition **10.10** tandis que (b) découle du lemme **10.11** et de la proposition **9.2**. □

Corollaire 11.6. — *Soit $\widetilde{s}$ un élément semi-simple de $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ et soit $z \in (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*}$. Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}]) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}z]) \\ \gamma & \longmapsto & \gamma\hat{z} \end{array}$$

est bijective.

Les liens entre les séries rationnelles de $\mathbf{G}^F$ et les séries géométriques (ou rationnelles) de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ sont donnés par la proposition suivante.

Proposition 11.7. — *Soit $\widetilde{s}$ un élément semi-simple de $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ et soit $s = i^*(\widetilde{s})$. Alors :*

(a) *Si $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}])$ et si γ est une composante irréductible de la restriction de $\widetilde{\gamma}$ à $\mathbf{G}^F$, alors $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.*

(b) *Soit $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Alors il existe $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}])$ tel que γ est une composante irréductible de la restriction de $\widetilde{\gamma}$ à $\mathbf{G}^F$.*

Démonstration

(a) Soit W le groupe de Weyl de $\widetilde{\mathbf{G}}$ relatif à $\widetilde{\mathbf{T}}_0$. Pour tout $w \in W$, nous choisissons un tore maximal F-stable $\widetilde{\mathbf{T}}_w$ de $\widetilde{\mathbf{G}}$ de type w par rapport à $\widetilde{\mathbf{T}}_0$. On pose aussi

$$n_w = R_{\widetilde{\mathbf{T}}_w}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(1_{\widetilde{\mathbf{T}}_w^F})(1)$$

où $1_{\widetilde{\mathbf{T}}_w^F}$ est le caractère trivial de $\widetilde{\mathbf{T}}_w^F$. Alors, d'après [**Lus78**, corollaire 2.11], on a

$$\sum_{\widetilde{\gamma} \in \operatorname{Irr} \widetilde{\mathbf{G}}^F} \widetilde{\gamma}(1)\widetilde{\gamma} = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \Big(n_w \sum_{\widetilde{\theta} \in (\widetilde{\mathbf{T}}_w^F)^\wedge} R_{\widetilde{\mathbf{T}}_w}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\theta}) \Big).$$

En projetant orthogonalement cette égalité sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}])$ (voir corollaire **11.3**), on obtient

$$\sum_{\widetilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}])} \widetilde{\gamma}(1)\widetilde{\gamma} = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \left(n_w \sum_{\substack{\widetilde{\theta} \in (\widetilde{\mathbf{T}}_w^F)^\wedge \\ (\widetilde{\mathbf{T}}_w, \widetilde{\theta}) \in \nabla(\widetilde{\mathbf{G}}, F, [\widetilde{s}])}} R_{\widetilde{\mathbf{T}}_w}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\theta}) \right).$$

Donc, si $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}])$ et si γ est une composante irréductible de la restriction de $\widetilde{\gamma}$ à $\mathbf{G}^F$, alors la positivité des coefficients du membre de gauche de la précédente égalité montre qu'il existe $(\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\theta}) \in \nabla(\widetilde{\mathbf{G}}, F, [\widetilde{s}])$ tel que γ soit une composante du caractère virtuel $\operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} R_{\widetilde{\mathbf{T}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\theta})$. Il résulte du corollaire **9.7** et de la proposition **11.5** que $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Cela montre (a).

(b) Soit $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Alors il existe un tore maximal F^*-stable $\mathbf{T}^*$ de $\mathbf{G}^*$ contenant s tel que γ est une composante irréductible de $R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{G}}(s)$. Soit $\widetilde{\mathbf{T}}^* = i^{*-1}(\mathbf{T}^*)$. Alors, d'après la proposition **11.5**, γ est une composante irréductible de la restriction de $R_{\widetilde{\mathbf{T}}^*}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{s})$ à $\mathbf{G}^F$. En particulier, il existe une composante irréductible $\widetilde{\gamma}$ de $R_{\widetilde{\mathbf{T}}^*}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{s})$ telle que γ soit une composante irréductible de la restriction de $\widetilde{\gamma}$ à $\mathbf{G}^F$. Mais $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}])$ par définition, donc (b) est démontré. $\square$

***Théorème 11.8* (Lusztig).** — *On a :*

(a) *Soit s un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$, soit $(\mathbf{T},\theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s])$, soit $\mathbf{U}$ le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$ et soit k un entier naturel. Alors toute composante irréductible du $\mathbf{G}^F$-module $H_c^k(\mathbf{Y}_\mathbf{U}^\mathbf{G}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^F} \theta$ appartient à $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.*

(b) *On a*

$$\operatorname{Irr} \mathbf{G}^F = \coprod_{[s]} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]),$$

où $[s]$ parcourt les classes de conjugaison rationnelles d'éléments semi-simples de $\mathbf{G}^{*F^*}$.

Démonstration

(a) Soit $\widetilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}.\widetilde{\mathbf{Z}}$ et soit γ une composante irréductible de $H_c^k(\mathbf{Y}_\mathbf{U}^\mathbf{G}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^F} \theta$. Alors $\operatorname{Ind}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \gamma$ est un sous-$\widetilde{\mathbf{G}}^F$-module of

$$\operatorname{Ind}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} H_c^k(\mathbf{Y}_\mathbf{U}^\mathbf{G}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^F} \theta \simeq H_c^k(\mathbf{Y}_\mathbf{U}^{\widetilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{T}}^F} \operatorname{Ind}_{\mathbf{T}^F}^{\widetilde{\mathbf{T}}^F} \theta$$

(voir l'isomorphisme **10.8**) donc il existe une extension $\widetilde{\theta}$ de θ à $\widetilde{\mathbf{T}}^F$et une composante irréductible $\widetilde{\gamma}$ du $\widetilde{\mathbf{G}}^F$-module $H_c^k(\mathbf{Y}_\mathbf{U}^{\widetilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{T}}^F} \widetilde{\theta}$ tels que γ soit une composante irréductible de la restriction de $\widetilde{\gamma}$ à $\mathbf{G}^F$. D'après le corollaire **9.7**, on a $(\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\theta}) \in \nabla(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{t}])$ pour un élément semi-simple $\widetilde{t}$ de $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tel que $i^*(\widetilde{t}) = s$. Donc, par le théorème **11.2** (a), $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{t}])$. Il résulte alors de la proposition **11.7** (a) que $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.

(b) Soient s_1 et s_2 deux éléments semi-simples de $\mathbf{G}^{*F^*}$ tels que $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s_1])$ et $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s_2])$ ont un élément en commun, disons γ. Pour $k = 1$ ou 2, soit $(\mathbf{T}_k, \theta_k) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s_k])$ tel que γ soit une composante irréductible de $R_{\mathbf{T}_k}^\mathbf{G}(\theta_k)$. Soit $\mathbf{U}_k$ le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}_k$ et soit $\widetilde{\mathbf{T}}_k$ le tore maximal F-stable de $\widetilde{\mathbf{G}}$ contenant $\mathbf{T}_k$. Alors il existe un entier naturel n_k tel que γ soit une composante irréductible de $H_c^{n_k}(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_k}^\mathbf{G}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}_k^F} \theta_k$. Si $\widetilde{\gamma}$ est une composante irréductible de $\operatorname{Ind}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \gamma$, alors, grâce aux isomorphismes **10.8** et **10.9**, il existe un caractère linéaire $\widetilde{\theta}_k : \widetilde{\mathbf{T}}_k^F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ tel que $\widetilde{\gamma}$ est une composante irréductible du $\widetilde{\mathbf{G}}^F$-module $H_c^{n_k}(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}_k}^{\widetilde{\mathbf{G}}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \widetilde{\mathbf{T}}_k^F} \widetilde{\theta}_k$. Mais $(\widetilde{\mathbf{T}}_k, \widetilde{\theta}_k) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [\widetilde{s}_k])$ pour un élément semi-simple $\widetilde{s}_k \in \widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tel que $i^*(\widetilde{s}_k) = s_k$. Donc $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}_1]) \cap \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}_2])$. Par conséquent, d'après le corollaire **11.3** et le théorème **11.2** (a) appliqué à $\widetilde{\mathbf{G}}^F$, on obtient que $\widetilde{s}_1$ et $\widetilde{s}_2$ sont conjugués sous $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$. Cela implique que $[s_1] = [s_2]$. $\square$

Si s est un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$, nous noterons $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$ le sous-$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel de $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F)$ engendré par $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Le théorème **11.2** (b) montre que

(11.9)
$$\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F) = \overset{\perp}{\bigoplus_{[s]}} \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s]).$$

11.D. Induction de Lusztig et séries de Lusztig rationnelles. — Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et supposons que $\mathbf{P}$ admet un sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{L}$. Soit $\mathbf{L}^*$ un sous-groupe de Levi F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{L}$. Alors le foncteur de Lusztig $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ préserve les séries de Lusztig :

***Théorème 11.10* (Lusztig).** — *Soient $s \in \mathbf{L}^{*F^*}_{\mathrm{sem}}$, $\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s]_{\mathbf{L}^{*F^*}})$ et $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$. Alors $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}})$.*

Démonstration. — Soit $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{L}, F, [s]_{\mathbf{L}^{*F^*}})$ tel que λ est une composante irréductible de $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{L}}(\theta)$. Notons qu'alors $(\mathbf{T}, \theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}})$. Soit $\mathbf{B}$ un sous-groupe de Borel de $\mathbf{L}$ contenant $\mathbf{T}$. Nous notons $\mathbf{V}$ et $\mathbf{U}$ les radicaux unipotents de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{P}$ respectivement. Alors il existe un entier naturel k tel que γ soit une composante irréductible du $\mathbf{G}^F$-module $H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} \lambda$ et il existe un entier k' such that λ soit une composante irréductible du $\mathbf{L}^F$-module $H_c^{k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{L}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^F} \theta$. Par suite, γ est une composante irréductible du $\mathbf{G}^F$-module

$$H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} \big(H_c^{k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{L}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^F} \theta\big) \simeq \big(H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} H_c^{k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{L}})\big) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^F} \theta.$$

Mais, par la formule de Künneth et d'après [**DM91**, preuve de 11.5], $H_c^k(\mathbf{Y}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F} H_c^{k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{L}})$ est un sous-$\mathbf{G}^F$-module-$\mathbf{T}^F$ de $H_c^{k+k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{VU}}^{\mathbf{G}})$, donc γ est une composante irréductible de $H_c^{k+k'}(\mathbf{Y}_{\mathbf{VU}}^{\mathbf{G}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{T}^F} \theta$, ce qui montre que $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}})$ d'après le théorème **11.8** (a). $\square$

***Corollaire 11.11*.** — *Soit s un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$, soit $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}})$ et soit λ une composante irréductible de ${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\gamma$. Alors $\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [t]_{\mathbf{L}^{*F^*}})$ pour un élément semi-simple $t \in \mathbf{L}^{*F^*}$ qui est $\mathbf{G}^{*F^*}$-conjugué à s.*

11.E. Stabilisateurs de caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$. — Le résultat suivant a été montré par Lusztig [**Lus88**, proposition 10]. Pour cela, il a tout d'abord réduit le problème au cas où $\mathbf{G}$ est quasi-simple. Puisque ce résultat est évident lorsque $\widetilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F$ est cyclique, il ne lui restait à traiter que le cas des groupes de type D_{2n}. Un délicat argument de comptage lui a alors permis de conclure (cet argument est détaillé dans [**CE04**, chapitre 16]). Il serait plus satisfaisant d'avoir une preuve plus directe, mais nous en sommes incapables.

***Théorème 11.12* (Lusztig).** — *Soit $\widetilde{\gamma}$ un caractère irréductible de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$. Alors la restriction de $\widetilde{\gamma}$ à $\mathbf{G}^F$ est sans multiplicité.*

***Question*.** — Le groupe $\widetilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F$ est un p'-groupe et, si s est un p'-'élément de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$, alors $\widetilde{\mathbf{G}}^F = C_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}(s).\mathbf{G}^F$ car, s étant semi-simple, il est contenu dans un tore maximal. Il est alors naturel de se poser la question suivante :

Soit G un groupe fini et soit N un sous-groupe distingué de G. On suppose que G/N est un p'-groupe et que $G = C_G(g)N$ pour tout p'-élément $g \in G$. Est-ce que la restriction à N d'un caractère irréductible de G est toujours sans multiplicité ?

D'après ce qui précède, une réponse positive à cette question fournirait une preuve du théorème **11.12** qui n'utilise pas la classification des groupes réductifs finis.

Le morphisme $\hat{\omega}_s^0 \circ \sigma_{\mathbf{G}}^{-1} : \widetilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F \to (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$ est surjectif. Nous noterons $\widetilde{\mathbf{G}}^F(s)$ le sous-groupe de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ tel que $\widetilde{\mathbf{G}}^F/\widetilde{\mathbf{G}}^F(s)$ soit isomorphe à $(A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$ via ce morphisme. Bien sûr, $\widetilde{\mathbf{G}}^F(s)$ contient $\mathbf{G}^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F$.

Corollaire 11.13. — *Soient s un élément semi-simple de $\mathbf{G}^{*F^*}$ et $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Soit $\widetilde{\mathbf{G}}^F(\gamma)$ le stabilisateur de γ dans $\widetilde{\mathbf{G}}^F$. Alors $\widetilde{\mathbf{G}}^F(\gamma)$ contient $\widetilde{\mathbf{G}}^F(s)$. En d'autres termes, $\widetilde{\mathbf{G}}^F(s)$ (ou $\operatorname{Ker}\hat{\omega}_s^0$) agit trivialement sur $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.*

Démonstration. — Soit $\widetilde{s}$ un élément semi-simple de $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ tel que $s = i^*(\widetilde{s})$. D'après le théorème **11.12** et la proposition **11.7** (b), il existe $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}])$ tel que

$$\langle \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \widetilde{\gamma}, \gamma \rangle_{\mathbf{G}^F} = 1.$$

Donc, par la théorie de Clifford et en utilisant l'isomorphisme $(\operatorname{Ker} i^*)^{F^*} \simeq (\widetilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F)^\wedge$, il suffit de montrer l'assertion suivante :

Si $z \in (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*}$ vérifie $\widetilde{\gamma} \otimes \hat{z} = \widetilde{\gamma}$, alors $z \in \operatorname{Im} \varphi_s$.

Soit donc $z \in (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*}$ tel que $\widetilde{\gamma} \otimes \hat{z} = \widetilde{\gamma}$. Alors $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}]) \cap \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}z])$ d'après le corollaire **11.6**. Donc $\widetilde{s}$ et $\widetilde{s}z$ sont $\widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$-conjugués ce qui montre que z appartient à l'image de φ_s (voir lemme **8.3**). □

Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, rappelons que $\omega_s^0(a)$ est un caractère linéaire de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$; posons

$$\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a) = \{\gamma \in \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, (s)) \mid \forall\, z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})),\ \tau_z^{\mathbf{G}}\gamma = \omega_s^0(a)(z)\gamma\}$$

et $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a) = \{\gamma \in \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s]) \mid \forall\, z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})),\ \tau_z^{\mathbf{G}}\gamma = \omega_s^0(a)(z)\gamma\}$.

Le corollaire **11.13** montre que

$$\textbf{(11.14)} \qquad \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, (s)) = \overset{\perp}{\bigoplus_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}} \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$$

et

$$\textbf{(11.15)} \qquad \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s]) = \overset{\perp}{\bigoplus_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}} \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a).$$

Nous verrons plus tard que, si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, alors $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a) \neq \varnothing$ (voir **17.2**).

11.F. Fonctions absolument cuspidales. — Posons $\operatorname{Cus}(\mathbf{G}^F, (s)) = \operatorname{Cus}(\mathbf{G}^F) \cap \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, (s))$ et $\operatorname{Cus}(\mathbf{G}^F, [s]) = \operatorname{Cus}(\mathbf{G}^F) \cap \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$. Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, nous poserons $\operatorname{Cus}(\mathbf{G}^F, (s), a) = \operatorname{Cus}(\mathbf{G}^F) \cap \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$ et $\operatorname{Cus}(\mathbf{G}^F, [s], a) = \operatorname{Cus}(\mathbf{G}^F) \cap \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$. On a alors, d'après le théorème **11.10**,

$$\textbf{(11.16)} \qquad \operatorname{Cus}(\mathbf{G}^F) = \overset{\perp}{\bigoplus_{(s)}} \operatorname{Cus}(\mathbf{G}^F, (s)) = \overset{\perp}{\bigoplus_{[s]}} \operatorname{Cus}(\mathbf{G}^F, [s]).$$

De plus, puisque $\mathrm{Cus}(\mathbf{G}^F)$, $\mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,(s))$ et $\mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,[s])$ sont stables par l'action de $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, il résulte de **11.14** et **11.15**

(11.17)
$$\mathrm{Cus}(\mathbf{G}^F,(s)) = \overset{\perp}{\bigoplus_{a\in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}} \mathrm{Cus}(\mathbf{G}^F,(s),a)$$

et

(11.18)
$$\mathrm{Cus}(\mathbf{G}^F,[s]) = \overset{\perp}{\bigoplus_{a\in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}} \mathrm{Cus}(\mathbf{G}^F,[s],a).$$

CHAPITRE 4

THÉORIE DE HARISH-CHANDRA

Rappelons qu'un caractère irréductible γ de $\mathbf{G}^F$ est dit *cuspidal* si, pour tout sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}$ propre de $\mathbf{G}$ et pour tout complément de Levi F-stable $\mathbf{L}$ de $\mathbf{P}$, on a ${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\gamma = 0$.

Dans ce chapitre, nous fixons un complément de Levi F-stable $\widetilde{\mathbf{L}}$ d'un sous-groupe parabolique F-stable $\widetilde{\mathbf{P}}$ de $\widetilde{\mathbf{G}}$ et un caractère irréductible cuspidal $\widetilde{\lambda}$ de $\widetilde{\mathbf{L}}^F$. L'ensemble $\mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, \widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$ est appelé *série de Harish-Chandra* de $\widetilde{\mathbf{G}}$. Notons $\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}} \cap \mathbf{G}$, $\mathbf{P} = \widetilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{G}$ et posons $\lambda = \operatorname{Res}_{\mathbf{L}^F}^{\widetilde{\mathbf{L}}^F} \widetilde{\lambda}$. Soit $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$ (c'est aussi celui de $\widetilde{\mathbf{P}}$). D'après la proposition **12.1** ci-dessous, toutes les composantes irréductibles de λ sont cuspidales. Dans la section 12, nous montrons que ces composantes irréductibles ne sont pas conjuguées sous $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$, c'est-à-dire qu'elles définissent des séries de Harish-Chandra différentes. L'ingrédient principal est un théorème de M. Geck [**Gec93**, page 400]. Nous introduisons aussi une extension centrale $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$ de $W_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$. Dans la section 13, nous montrons que les caractères irréductibles de cette extension centrale paramètrent la réunion de séries de Harish-Chandra $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$ et nous étudions les propriétés de ce paramétrage.

12. Autour d'un théorème de M. Geck

12.A. Rappels. — Les faits suivants se déduisent immédiatement des propositions **10.10** et **10.11**.

Proposition 12.1. — *Soit $\widetilde{\gamma} \in \operatorname{Irr} \widetilde{\mathbf{G}}^F$, soit γ une composante irréductible de la restriction de $\widetilde{\gamma}$ à $\mathbf{G}^F$ et soit $\tau \in (\widetilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F)^\wedge$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\widetilde{\gamma}$ est cuspidal.*

(2) *$\widetilde{\gamma} \otimes \tau$ est cuspidal.*

(3) *γ est cuspidal.*

12.B. Notations. — Nous fixons une composante irréductible λ_1 de λ. Pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, nous notons $\lambda_x = {}^x\lambda_1$. Alors, d'après le théorème de Lusztig **11.12**, on a

$$\lambda = \sum_{x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} {}^x\lambda_1 = \sum_{x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \lambda_x.$$

Puisque le groupe $\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F$ est abélien, on a $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_x) = \widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.

Nous notons $\widetilde{\lambda}^+$ (respectivement λ_x^+, $x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$) le caractère irréductible de $\widetilde{\mathbf{P}}^F$ (respectivement $\mathbf{P}^F$) obtenu en composant le caractère $\widetilde{\lambda}$ (respectivement λ_x) avec le morphisme surjectif $\widetilde{\mathbf{P}}^F \to \widetilde{\mathbf{L}}^F$ (respectivement $\mathbf{P}^F \to \mathbf{L}^F$). Nous fixons un $\widetilde{\mathbf{P}}^F$-module $\widetilde{M}$ ayant $\widetilde{\lambda}^+$ comme caractère. Nous notons M la restriction de $\widetilde{M}$ à $\mathbf{P}^F$ et M_x le sous-$\mathbf{P}^F$-module irréductible de M ayant λ_x^+ comme caractère. Alors

$$\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathbf{P}}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \widetilde{M} = \{\widetilde{f} : \widetilde{\mathbf{G}}^F \to \widetilde{M} \mid \forall y \in \widetilde{\mathbf{P}}^F,\ \forall g \in \widetilde{\mathbf{G}}^F,\ \widetilde{f}(yg) = y.\widetilde{f}(g)\},$$

$$\operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M = \{f : \mathbf{G}^F \to M \mid \forall y \in \mathbf{P}^F,\ \forall g \in \mathbf{G}^F,\ f(yg) = y.f(g)\}$$

et des descriptions similaires sont valides pour $\operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_x$: si $g \in \mathbf{G}^F$ et $f \in \operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M$, alors $g.f$ est la fonction $\mathbf{G}^F \to M$, $h \mapsto f(hg)$ (l'action de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ sur $\operatorname{ind}_{\widetilde{\mathbf{P}}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \widetilde{M}$ se décrit de même). Alors

$$\operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M = \bigoplus_{x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_x. \tag{12.2}$$

Le $\widetilde{\mathbf{G}}^F$-module $\operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathbf{P}}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \widetilde{M}$ a pour caractère $R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \widetilde{\lambda}$. De même, les $\mathbf{G}^F$-modules $\operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M$ et $\operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_x$ ont pour caractères $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \lambda$ et $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \lambda_x$ respectivement.

Soit $f \in \operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M$. Notons $\widetilde{f}$ la fonction $\widetilde{\mathbf{G}}^F \to \widetilde{M} = M$ définie comme suit. Soit $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathbf{G}}^F$. Alors il existe $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathbf{P}}^F$ et $g \in \mathbf{G}^F$ tels que $\widetilde{g} = \widetilde{x}g$. On pose $\widetilde{f}(\widetilde{g}) = \widetilde{x}.f(g)$: remarquons que $\widetilde{f}(\widetilde{g})$ ne dépend pas du choix de $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathbf{P}}^F$ et $g \in \mathbf{G}^F$ tels que $\widetilde{g} = \widetilde{x}g$. Alors la restriction de $\widetilde{f}$ à $\mathbf{G}^F$ est égale à f et il est facile de vérifier que l'application

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M & \longrightarrow & \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \operatorname{Ind}_{\widetilde{\mathbf{P}}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \widetilde{M} \\ f & \longmapsto & \widetilde{f} \end{array} \tag{12.3}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{G}^F$-modules.

Le groupe $W_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$ est naturellement isomorphe à $W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda}) = N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})/\mathbf{L}^F$. En général, nous nous réfèrerons à ce dernier car il est plus adapté à notre situation. Par exemple, il est naturellement un sous-groupe de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$.

12.C. Un théorème de M. Geck. — Dans [**Gec93**, corollaire 2], Geck énonce le résultat suivant : *le caractère $R_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\lambda_1)$ a une composante irréductible de multiplicité* 1. Cependant, pour l'obtenir, il a en fait démontré le résultat plus fort suivant [**Gec93**, page 400] :

***Théorème 12.4* (Geck).** — *Le caractère $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda$ a une composante irréductible de multiplicité* 1.

Esquisse de la preuve de Geck. — Soient $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\gamma}'$ deux composantes irréductibles de $R_{\widetilde{\mathbf{L}}\subset\widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}\widetilde{\lambda}$ dont la restriction à $\mathbf{G}^F$ ont une composante irréductible commune. Alors, par la théorie de Clifford et par le théorème **11.12**, ces deux restrictions coïncident. En particulier, $\widetilde{\gamma}(1)=\widetilde{\gamma}'(1)$. Pour prouver le théorème **12.4**, il est donc suffisant de montrer qu'il existe une composante irréductible $\widetilde{\gamma}$ de $R_{\widetilde{\mathbf{L}}\subset\widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}\widetilde{\lambda}$, apparaissant avec la multiplicité 1 et telle que $\widetilde{\gamma}(1)\neq\widetilde{\gamma}'(1)$ pour toute autre composante irréductible $\widetilde{\gamma}'$ de $R_{\widetilde{\mathbf{L}}\subset\widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}\widetilde{\lambda}$. En fait, Geck montre que le degré générique de la signature de l'algèbre de Hecke associée à la donnée $(\widetilde{\mathbf{G}},\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ a une valuation supérieure à celle des degrés génériques des autres caractères irréductibles de l'algèbre de Hecke [**Gec93**, théorème 1], ce qui permet de conclure. □

Remarque. — Lusztig [**Lus84a**] a montré que $R_{\widetilde{\mathbf{L}}\subset\widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}\widetilde{\lambda}$ possède une composante irréductible de multiplicité 1. Donc le théorème de Geck généralise celui de Lusztig. Mais il faut bien noter que la preuve de Geck utilise le résultat de Lusztig.

Cette version plus forte **12.4** du théorème de Geck est nécessaire pour montrer le résultat (très utile) suivant :

Corollaire 12.5

(a) *Pour tout $x\in\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, le caractère $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda_x$ possède une composante irréductible de multiplicité* 1.

(b) *Si x et y sont deux éléments distincts de $\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, alors les caractères cuspidaux λ_x et λ_y ne sont pas conjugués sous $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$. De façon équivalente,*
$$\langle R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda_x, R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda_y\rangle_{\mathbf{G}^F}=0.$$

(c) *On a $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)=W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda_x)$ pour tout $x\in\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.*

(d) *Si γ est une composante irréductible de $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda$, alors $\widetilde{\mathbf{G}}^F(\gamma)$ est contenu dans $\mathbf{G}^F.\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.*

Démonstration. — L'assertion (a) résulte du théorème **12.4** et de l'égalité :
$$R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda=\sum_{x\in\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} {}^x R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda_1.$$
En fait, (a) est l'énoncé original de Geck [**Gec93**, corollaire 2].

Prouvons maintenant (b) et (c). Les groupes $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$ et $\widetilde{\mathbf{L}}^F$ agissent sur $\operatorname{Irr}\mathbf{L}^F$ et ces deux actions commutent. Donc, si x et y appartiennent à $\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ et si $n\in N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$ est tel que ${}^n\lambda_x=\lambda_y$, alors $n\in N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$. Par conséquent, prouver (b) et (c) est équivalent à prouver que $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ agit trivialement sur $E=\{\lambda_x\mid x\in$

$\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)\}$. Puisque les actions de $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ et $\widetilde{\mathbf{L}}^F$ sur E commutent, toutes les orbites de $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ sur E ont le même cardinal, disons n. Mais alors n divise la multiplicité de toute composante irréductible de $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda$. Donc, d'après le théorème **12.4**, $n=1$ et (b) et (c) en résultent.

(d) Soit $g\in\widetilde{\mathbf{G}}^F$ tel que ${}^g\gamma=\gamma$. On peut supposer que $g\in\widetilde{\mathbf{L}}^F$. Par hypothèse, il existe $x\in\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ tel que γ est une composante irréductible de $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\lambda_x$. Mais ${}^g\gamma=\gamma$ donc γ est aussi une composante irréductible de $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}{}^g\lambda_x$. Donc, d'après (b), $g\in\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_x)=\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. □

12.D. Une extension centrale de $W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. — Posons

$$W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})=\{(w,\theta)\in W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}})\times(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge\mid {}^w\widetilde{\lambda}=\widetilde{\lambda}\otimes\theta\}.$$

Notons qu'en fait $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})\subset W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)\times(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge$. Nous identifierons $W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ avec le sous-groupe $W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})\times\{1\}$ de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. De même, nous identifierons $(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ avec le sous-groupe $\{1\}\times(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. La première projection

$$\begin{array}{ccc} W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda}) & \longrightarrow & W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda) \\ (w,\theta) & \longmapsto & w \end{array}$$

est surjective (d'après le théorème **11.12** et la théorie de Clifford) et son noyau est égal à $(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$. De plus, $(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ est central dans $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. La deuxième projection

$$\begin{array}{ccc} W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda}) & \longrightarrow & (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge \\ (w,\theta) & \longmapsto & \theta \end{array}$$

n'est pas surjective en général et son noyau est $W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. Nous notons $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1)$ le sous-groupe de $\widetilde{\mathbf{L}}^F$ contenant $\mathbf{L}^F$ tel que l'image de cette deuxième projection soit $(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1))^\wedge$. En fait, le groupe $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1)$ est contenu dans $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. On a des isomorphismes canoniques

$$W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})\simeq(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1))^\wedge \tag{12.6}$$

et

$$W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})\simeq(\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1))^\wedge. \tag{12.7}$$

Résumons tout ceci dans le diagramme suivant, dans lequel toutes les suites horizontales ou verticales sont exactes et tous les carrés sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda}) \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge \arrow[r] \arrow[d, equal] & W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda}) \arrow[r] \arrow[d] & W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge \arrow[r] & (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & (\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Remarque 12.8. — Les isomorphismes **12.6** et **12.7** entraînent que les groupes $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$ et $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$ sont abéliens.

Proposition 12.9. — *On a :*

(a) $(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge = \{\theta \in (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge \mid (R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \widetilde{\lambda}) \otimes \theta = R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \widetilde{\lambda}\}$.

(b) *Si* $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$, *alors* $\widetilde{\mathbf{G}}^F(\gamma)$ *contient* $\mathbf{G}^F.\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$.

Démonstration

(a) Soit $\theta \in (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$. Alors il existe $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}})$ tel que $(w, \theta) \in W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$. Par conséquent, ${}^w\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda} \otimes \theta$. Donc, d'après la proposition **10.11**, on a $(R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \widetilde{\lambda}) \otimes \theta = R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \widetilde{\lambda}$. Réciproquement, soit $\theta \in (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge$ tel que $(R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \widetilde{\lambda}) \otimes \theta = R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \widetilde{\lambda}$. Alors, d'après la proposition **10.11**, on a $R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} (\widetilde{\lambda} \otimes \theta) = R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \widetilde{\lambda}$. De plus, $\widetilde{\lambda}$ et $\widetilde{\lambda} \otimes \theta$ sont cuspidaux d'après la proposition **12.1**. Donc il existe $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L})$ tel que ${}^w\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda} \otimes \theta$. En d'autres termes, $(w, \theta) \in W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$ donc $\theta \in (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$.

(b) Soit $\widetilde{\gamma}$ une composante irréductible de $R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \widetilde{\lambda}$ telle que γ soit une composante irréductible de la restriction de $\widetilde{\gamma}$ à $\mathbf{G}^F$. D'après le théorème **11.12** et la théorie de Clifford, (b) est équivalent à l'énoncé suivant : si $\theta \in (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F)^\wedge$ est tel que $\widetilde{\gamma} \otimes \theta = \widetilde{\gamma}$, alors $\theta \in (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$. Mais, si $\widetilde{\gamma} \otimes \theta = \widetilde{\gamma}$, alors $\widetilde{\gamma}$ est une composante irréductible de $R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \widetilde{\lambda}$ ainsi que de $R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} (\widetilde{\lambda} \otimes \theta)$. Par suite, $R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \widetilde{\lambda} = R_{\widetilde{\mathbf{L}} \subset \widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} (\widetilde{\lambda} \otimes \theta)$ et donc $\theta \in (\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$ d'après (a). $\square$

Corollaire 12.10. — *Si* $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}, \lambda)$, *alors* $\mathbf{G}^F.\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \subset \widetilde{\mathbf{G}}^F(\gamma) \subset \mathbf{G}^F.\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.

13. Algèbres d'endomorphismes

13.A. Description. — Nous noterons dans ce chapitre $\widetilde{\mathcal{H}}$ l'algèbre d'endomorphismes du $\widetilde{\mathbf{G}}^F$-module $\mathrm{Ind}_{\widetilde{\mathbf{P}}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \widetilde{M}$ et $\mathcal{H}$ l'algèbre d'endomorphismes du $\mathbf{G}^F$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M$. Alors $\widetilde{\mathcal{H}}$ est, via l'isomorphisme **12.3**, une sous-algèbre de $\mathcal{H}$. Pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, nous notons $\mathcal{H}_x$ l'algèbre d'endomorphismes du $\mathbf{G}^F$-module $\mathrm{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_x$. Alors, d'après le corollaire **12.5** (b), on a

$$\mathcal{H} = \prod_{x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \mathcal{H}_x$$

et donc
$$\mathrm{Irr}\,\mathcal{H} = \coprod_{x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \mathrm{Irr}\,\mathcal{H}_x.$$

Cela nous donne un morphisme d'algèbres $\widetilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}_x$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.

D'après [**HL80**, lemme 6.5] et d'après le corollaire **12.5**, le caractère irréductible λ_1 de $\mathbf{L}^F$ s'étend en en un caractère irréductible ν_1 de $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$.

Lemme 13.1. — *Avec les notations précédentes, on a :*
(a) *Le stabilisateur de* ν_1 *dans* $\widetilde{\mathbf{L}}^F$ *est* $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1)$.
(b) *Le stabilisateur, dans* $\widetilde{\mathbf{L}}^F$, *de la restriction de* ν_1 *à* $N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$ *est* $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.

Démonstration. — Soit $\widetilde{N} = N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda).\widetilde{\mathbf{L}}^F$. Alors, d'après la formule de Mackey, on a

$$\mathrm{Res}_{\widetilde{\mathbf{L}}^F}^{\widetilde{N}} \mathrm{Ind}_{N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})}^{\widetilde{N}} \nu_1 = \mathrm{Ind}_{\mathbf{L}^F}^{\widetilde{\mathbf{L}}^F} \lambda_1.$$

Le caractère $\mathrm{Ind}_{\mathbf{L}^F}^{\widetilde{\mathbf{L}}^F} \lambda_1$ est sans multiplicité, donc le caractère $\mathrm{Ind}_{N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})}^{\widetilde{N}} \nu_1$ est sans multiplicité. Soit $\widetilde{\nu}$ une de ses composantes irréductibles telle que $\mathrm{Res}_{\widetilde{\mathbf{L}}^F}^{\widetilde{N}} \widetilde{\nu}$ a $\widetilde{\lambda}$ comme composante irréductible. Alors

$$\mathrm{Res}_{\widetilde{\mathbf{L}}^F}^{\widetilde{N}} \widetilde{\nu} = \sum_{\tau \in (\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge} \widetilde{\lambda} \otimes \widetilde{\tau}$$

où, pour chaque $\tau \in (\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge$, $\widetilde{\tau}$ désigne une extension de τ à $\widetilde{\mathbf{L}}^F$: alors le caractère $\widetilde{\lambda} \otimes \widetilde{\tau}$ ne dépend que de τ et non du choix de $\widetilde{\tau}$. Cette décomposition a lieu car l'orbite de $\widetilde{\lambda}$ sous cette action de $\widetilde{N}$ est $\{\widetilde{\lambda} \otimes \widetilde{\tau} \mid \tau \in (\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge\}$.

Soit θ un caractère linéaire de $\widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F \simeq \widetilde{N}/N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$. Alors, par la théorie de Clifford, l'énoncé (a) du lemme **13.1** est équivalent à l'assertion suivante :

$$(*) \qquad \widetilde{\nu} \otimes \theta = \widetilde{\nu} \textit{ si et seulement si } \widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \subset \mathrm{Ker}\,\theta.$$

Montrons (∗). Supposons tout d'abord que $\widetilde{\nu} \otimes \theta = \widetilde{\nu}$. Alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{Res}^{\widetilde{N}}_{\widetilde{\mathbf{L}}^F} \widetilde{\nu}) \otimes \theta &= \mathrm{Res}^{\widetilde{N}}_{\widetilde{\mathbf{L}}^F} (\widetilde{\nu} \otimes \theta) \\ &= \mathrm{Res}^{\widetilde{N}}_{\widetilde{\mathbf{L}}^F} \widetilde{\nu}\end{aligned}$$

ce qui implique que $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \subset \operatorname{Ker} \theta$.

Réciproquement, supposons que $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \subset \operatorname{Ker} \theta$. Alors $\mathrm{Res}^{\widetilde{N}}_{\widetilde{\mathbf{L}}^F} (\widetilde{\nu} \otimes \theta) = \mathrm{Res}^{\widetilde{N}}_{\widetilde{\mathbf{L}}^F} \widetilde{\nu}$ donc $\widetilde{\nu} \otimes \theta$ est une composante irréductible de $\mathrm{Ind}^{\widetilde{N}}_{N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} \nu_1$ et $\mathrm{Res}^{\widetilde{N}}_{\widetilde{\mathbf{L}}^F} (\widetilde{\nu} \otimes \theta)$ a $\widetilde{\lambda}$ comme composante irréductible. Ceci implique que $\widetilde{\nu} \otimes \theta = \widetilde{\nu}$. D'où (a).

(b) découle d'un argument similaire. □

Pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F / \widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, nous choisissons un représentant $\widetilde{x}$ de x dans $\widetilde{\mathbf{L}}^F$. Alors ${}^{\widetilde{x}}\nu_1$ est une extension de λ_x à $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$. Nous posons

$$\nu = \sum_{x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F / \widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} {}^{\widetilde{x}}\nu_1.$$

Alors ν est une extension de λ à $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$. Pour chaque $x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F / \widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, nous notons μ_x la restriction de ${}^{\widetilde{x}}\nu_1$ à $N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$.

Remarque 13.2. — Soit $x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F / \widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. Alors, si $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1) \neq \widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, le caractère ${}^{\widetilde{x}}\nu_1$ depend du choix de $\widetilde{x}$ d'après le lemme **13.1** (a), tandis que le caractère μ_x n'en dépend pas d'après le lemme **13.1** (b). Ceci justifie la notation.

Posons

$$\mu = \sum_{x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F / \widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \mu_x$$

de sorte que μ est la restriction de ν à $N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda})$. Par la formule de Mackey, on a

$$\mathrm{Res}^{N_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}_{\widetilde{\mathbf{L}}^F} \mathrm{Ind}^{N_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}_{N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})} \mu_1 = \mathrm{Ind}^{\widetilde{\mathbf{L}}^F}_{\mathbf{L}^F} \lambda_1$$

donc il existe une unique composante irréductible $\widetilde{\mu}$ de $\mathrm{Ind}^{N_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}_{N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})} \mu_1$ telle que

$$\mathrm{Res}^{N_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}_{\widetilde{\mathbf{L}}^F} \widetilde{\mu} = \widetilde{\lambda}.$$

D'après le lemme **13.1** (b), on a

$$\mu = \mathrm{Res}^{N_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}_{N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})} \widetilde{\mu}. \tag{13.3}$$

Fixons une représentation $\widetilde{\sigma} : N_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda}) \to \mathbf{GL}(\widetilde{M})$ ayant pour caractère $\widetilde{\mu}$ et une représentation $\sigma : N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda) \to \mathbf{GL}(M)$ ayant pour caractère ν étendant toutes deux les representations de $\widetilde{\mathbf{L}}^F$ et $\mathbf{L}^F$ sur $\widetilde{M}$ et M respectivement. Alors

$$\mathrm{Res}^{N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)}_{N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})} \sigma = \mathrm{Res}^{N_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}_{N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})} \widetilde{\sigma} \tag{13.4}$$

d'après **13.3**. Pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F / \widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, notons σ_x la restriction de σ au sous-espace M_x de M.

Pour tout $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$, nous notons $\dot{w}$ un representant de w dans $N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ et nous définissons, pour tous $f \in \operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_1$ et $g \in \mathbf{G}^F$,

$$T_w(f)(g) = \sum_{u \in \mathbf{U}^F} \sigma_1(\dot{w}) f(\dot{w}^{-1} u g).$$

Alors, d'après [**HL80**, proposition 3.9], $(T_w)_{w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)}$ est une base de $\mathcal{H}_1$. De même, nous définissons, pour tous $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$, $\widetilde{f} \in \operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \widetilde{M}$ et $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathbf{G}}^F$,

$$\widetilde{T}_w(\widetilde{f})(\widetilde{g}) = \sum_{u \in \mathbf{U}^F} \widetilde{\sigma}(\dot{w}) \widetilde{f}(\dot{w}^{-1} u \widetilde{g}).$$

Alors, encore d'après [**HL80**, proposition 3.9], $(\widetilde{T}_w)_{w \in W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}$ est une base de $\widetilde{\mathcal{H}}$.

D'après [**HL80**, corollaire 5.4], il existe des isomorphismes de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbres

$$\mathcal{H}_1 \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell[W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)] \tag{13.5}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{H}} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell[W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})]. \tag{13.6}$$

De plus, l'image de $\widetilde{T}_w$ dans $\mathcal{H}_1$ est T_w d'après **13.4** donc, par un argument de déformation, les isomorphismes ci-dessus peuvent être choisis de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{H}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \overline{\mathbb{Q}}_\ell[W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})] \arrow[d] \\ \mathcal{H}_1 \arrow[r, "\sim"] & \overline{\mathbb{Q}}_\ell[W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)] \end{tikzcd} \tag{13.7}$$

soit commutatif. Nous ferons bien sûr ce choix-là par la suite.

Remarque 13.8. — Une fois choisie une racine carrée de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et une fois choisis ν_1 et $\widetilde{\nu}$, alors les bijections entre ensembles de caractères irréductibles induites par les isomorphismes **13.5** et **13.6** sont uniquement déterminées (voir [**HL83**, théorème 4.8] et [**BC72**, théorème 2.9]).

13.B. Paramétrage des caractères dans une série de Harish-Chandra. — D'après le corollaire **12.5** (b), on a

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L},\lambda) = \coprod_{x \in \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L},\lambda_x).$$

Les isomorphismes **13.5** et **13.6** induisent des bijections

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L},\lambda_1) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F,\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda}) \\ \chi & \longmapsto & \widetilde{R}_\chi. \end{array}$$

Théorème 13.9. — *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(a) $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}\lambda_1 = \displaystyle\sum_{\eta\in \operatorname{Irr} W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)} \eta(1) R_\eta.$

(b) *Soit* $\eta \in \operatorname{Irr} W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ *et* $\chi \in \operatorname{Irr} W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. *Alors*

$$\langle R_\eta, \operatorname{Res}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F} \widetilde{R}_\chi\rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \operatorname{Res}^{W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)}_{W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})} \eta, \chi\rangle_{W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}.$$

(c) *Soit* $l \in \widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ *et soit* ξ *le caractère linéaire de* $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ *associé à* l *via l'isomorphisme* ***12.7***. *Soit* η *un caractère irréductible de* $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$. *Alors*

$$^{l}R_\eta = R_{\eta\otimes\xi}.$$

Démonstration. — L'assertion (a) est immédiate. Montrons maintenant (b). Faisons ici agir $\mathbf{G}^F$ et $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ à droite sur M et $\widetilde{M}$ respectivement. Soient V_η (respectivement $\widetilde{V}_\chi$) un $\mathcal{H}_1$-module (respectivement $\widetilde{\mathcal{H}}$-module) irréductible ayant pour caractère η (respectivement χ) à travers les isomorphismes **13.5** et **13.6**. On voit V_η comme un $\mathcal{H}$-module. Posons $M_\eta = M^* \otimes_{\mathcal{H}} V_\eta$ et $\widetilde{M}_\chi = \widetilde{M}^* \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}}} \widetilde{V}_\chi$. Alors M_η (respectivement $\widetilde{M}_\chi$) est un $\mathbf{G}^F$-module (respectivement $\widetilde{\mathbf{G}}^F$-module) à droite irréductible ayant pour caractère R_η (respectivement $\widetilde{R}_\chi$). On a

$$\begin{aligned}
\langle R_\eta, \operatorname{Res}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F} \widetilde{R}_\chi\rangle_{\mathbf{G}^F} &= \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \operatorname{Hom}_{\mathbf{G}^F}\big(M_\eta, \operatorname{Res}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F} \widetilde{M}_\chi\big)\\
&= \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} M_\eta^* \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F} \operatorname{Res}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F} \widetilde{M}_\chi\\
&= \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} V_\eta^* \otimes_{\mathcal{H}} \big(M \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F} \operatorname{Res}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F} \widetilde{M}^*\big) \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}}} \widetilde{V}_\chi.
\end{aligned}$$

Or, $\operatorname{Res}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F} \widetilde{M}^* = M^*$ et $M \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\mathbf{G}^F} M^* = \mathcal{H}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\langle R_\eta, \operatorname{Res}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F} \widetilde{R}_\chi\rangle_{\mathbf{G}^F} &= \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} V_\eta^* \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{H} \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}}} \widetilde{V}_\chi\\
&= \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} V_\eta^* \otimes_{\widetilde{\mathcal{H}}} \widetilde{V}_\chi.
\end{aligned}$$

La commutativité du diagramme **13.7** montre que ce dernier terme est égal à

$$\langle \operatorname{Res}^{W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)}_{W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})} \eta, \chi\rangle_{W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})},$$

ce qui montre (b).

(c) Puisque $l \in \widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$, l'automorphisme $\widetilde{\sigma}(l)$ de M stabilise M_1. Soit $f \in \operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F} M_1$. Posons

$$\begin{array}{rccc}
\omega_l(f): & \mathbf{G}^F & \longrightarrow & M_1\\
& g & \longmapsto & \widetilde{\sigma}(l)(f(l^{-1}gl)).
\end{array}$$

Alors $\omega_l(f) \in \operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F} M_1$ et

$$\omega_l : \operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F} M_1 \longrightarrow \operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F} M_1$$

est un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels. De plus, si $g \in \mathbf{G}^F$, alors $l^{-1}gl$ agit sur $\operatorname{Ind}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{P}^F} M_1$ comme $\omega_l^{-1} g \omega_l$.

Si e_η désigne l'idempotent primitif central de $\mathcal{H}_1$ associé à η, alors (c) est équivalent à l'égalité

$$\omega_l e_\eta \omega_l^{-1} = e_{\eta\otimes\xi}.$$

Par définition, cela découle de l'égalité suivante, que nous allons démontrer par la suite :

$$\omega_l T_w \omega_l^{-1} = \tau_w(l)^{-1} T_w$$

pour tout $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)$, où τ_w est le caractère linéaire de $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ associé à l par l'isomorphisme

$$W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \widetilde{\lambda}) \simeq (\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G}, \lambda_1))^\wedge.$$

Donc soient $f \in \operatorname{Ind}_{\mathbf{P}^F}^{\mathbf{G}^F} M_1$ et $g \in \mathbf{G}^F$. Alors

$$\begin{aligned}
(\omega_l T_w \omega_l^{-1} f)(g) &= \widetilde{\sigma}(l)(T_w \omega_l^{-1} f)(l^{-1}gl) \\
&= \sum_{u\in\mathbf{U}^F} \widetilde{\sigma}(l)\sigma_1(\dot{w}).(\omega_l^{-1} f)(\dot{w}^{-1}ul^{-1}gl) \\
&= \sum_{u\in\mathbf{U}^F} \widetilde{\sigma}(l)\sigma_1(\dot{w})\widetilde{\sigma}(l)^{-1}.f(l\dot{w}^{-1}ul^{-1}g) \\
&= \sum_{u\in\mathbf{U}^F} \widetilde{\sigma}(l)\sigma_1(\dot{w})\widetilde{\sigma}(l)^{-1}.f(l\dot{w}^{-1}l^{-1}ug) \\
&= \sum_{u\in\mathbf{U}^F} \widetilde{\sigma}(l)\sigma_1(\dot{w})\widetilde{\sigma}(l)^{-1}.f(l\dot{w}^{-1}l^{-1}\dot{w}\dot{w}^{-1}ug) \\
&= \sum_{u\in\mathbf{U}^F} \widetilde{\sigma}(l)\sigma_1(\dot{w})\widetilde{\sigma}(l)^{-1}\sigma_1(l\dot{w}^{-1}l^{-1}\dot{w}).f(\dot{w}^{-1}ug) \\
&= \widetilde{\sigma}(l)\sigma_1(\dot{w})\widetilde{\sigma}(l)^{-1}\sigma_1(l\dot{w}^{-1}l^{-1}\dot{w})\sigma_1(\dot{w})^{-1}.(T_w f)(g).
\end{aligned}$$

D'après **13.4**, on a $\sigma_1(l\dot{w}^{-1}l^{-1}\dot{w}) = \widetilde{\sigma}(l)\widetilde{\sigma}(\dot{w}^{-1}l^{-1}\dot{w})$. Donc

$$(\omega_l T_w \omega_l^{-1} f)(g) = \widetilde{\sigma}(l)\sigma_1(\dot{w})\sigma_1(\dot{w}^{-1}l^{-1}\dot{w})\sigma_1(\dot{w})^{-1}.(T_w f)(g).$$

De plus, par définition de τ_w, la représentation

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1) & \longrightarrow & \mathbf{GL}(M_1) \\
l & \longmapsto & \sigma_1(\dot{w})\sigma_1(\dot{w}^{-1}l\dot{w})\sigma_1(\dot{w})^{-1}
\end{array}$$

admet le même caractère que la représentation

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1) & \longrightarrow & \mathbf{GL}(M_1) \\
l & \longmapsto & \tau_w(l)\widetilde{\sigma}(l)
\end{array}$$

et leur restriction à $\mathbf{L}^F$ est égale à σ_1. Donc

$$\sigma_1(\dot{w})\sigma_1(\dot{w}^{-1}l\dot{w})\sigma_1(\dot{w})^{-1} = \tau_w(l)\widetilde{\sigma}(l)$$

pour tout $l \in \widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. D'où le résultat. □

Remarque 13.10. — Une fois choisi l'isomorphisme d'algèbres $\widetilde{\mathcal{H}} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell[W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})]$, l'isomorphisme $\mathcal{H}_1 \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell[W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)]$ est déterminé à un caractère linéaire près de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ c'est-à-dire, d'après le théorème **13.9** (c), à conjugaison près par un élément de $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$.

13.C. Paramétrage de $\boldsymbol{\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L},\lambda)}$. — Soit maintenant η un caractère irréductible de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. Alors la restriction de η au sous-groupe central $(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ est un multiple d'un caractère linéaire de $(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$. Donc η definit un élément x_η de $\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$. Choisissons un relevé $\widetilde{x}_\eta$ de x_η dans $\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1)$ et soit ξ_η le caractère linéaire de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ associé à $\widetilde{x}_\eta$ par l'isomorphisme $\big(W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})\big)^\wedge \simeq \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1)$. Alors $\eta\otimes\xi_\eta^{-1}$ est un caractère irréductible de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ et $(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ est contenu dans son noyau. Donc il peut être vu comme un caractère irréductible de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$. On définit alors

$$R_\eta = {}^{\widetilde{x}_\eta}R_{\eta\otimes\xi_\eta^{-1}}. \tag{13.11}$$

Remarquons que R_η ne dépend pas du choix du représentant $\widetilde{x}_\eta$ de x_η (voir théorème **13.9** (c)). De plus, si η contient $(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ dans son noyau, alors η peut être vu comme un caractère irréductible de $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ et le caractère R_η défini par **13.11** coïncide avec le caractère R_η défini au début de la sous-section 13.B. S'il y a ambiguïté, ce caractère irréductible sera noté $R_\eta^{\mathbf{G}}$. Le théorème suivant est une conséquence de cette discussion :

Théorème 13.12

(a) *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L},\lambda) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta \end{array}$$

est bijective.

(b) *On a*

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}\lambda = \sum_{\eta\in\operatorname{Irr} W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})} \eta(1)R_\eta.$$

(c) *Soit η et χ deux caractères irréductibles de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ et $W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ respectivement. Alors*

$$\big\langle R_\eta, \operatorname{Res}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F}\widetilde{R}_\chi\big\rangle_{\mathbf{G}^F} = \big\langle \operatorname{Res}^{W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}_{W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}\eta,\chi\big\rangle_{W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}.$$

(d) *Soit $\eta\in\operatorname{Irr} W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. Alors $R_\eta\in\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L},\lambda_{x_\eta})$.*

(e) *Soient $l\in\widetilde{\mathbf{L}}^F$ et $\eta\in\operatorname{Irr} W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. Notons ξ_l le caractère linéaire de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ associé à l via l'isomorphisme $\big(W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})\big)^\wedge \simeq \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1)$ induit par **12.6**. Alors*

$${}^lR_\eta = R_{\eta\otimes\xi_l}.$$

Corollaire 13.13. — *Soit η un caractère irréductible de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. Alors*

(a) *La restriction de η à $W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ est sans multiplicité.*

(b) *Soit $\widetilde{\mathbf{L}}^F_\eta$ le sous-groupe de $\widetilde{\mathbf{L}}^F$ contenant $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1)$ tel que*

$$\widetilde{\mathbf{L}}^F_\eta/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1) \simeq \{\xi \in (W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda}))^\wedge \mid \eta\otimes\xi = \eta\}.$$

(Rappelons que l'on a un isomorphisme $(W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda}))^\wedge \simeq \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1)$.)
Alors

$$\widetilde{\mathbf{G}}^F(R_\eta) = \mathbf{G}^F.\widetilde{\mathbf{L}}^F_\eta.$$

Démonstration. — L'assertion (a) résulte du théorème **13.12** (c) et du théorème **11.12**. L'assertion (b) découle du théorème **13.12** (d). □

Remarques 13.14

(a) Gardons les notations du corollaire **13.13** (b). Le sous-groupe $(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1))^\wedge$ est central donc tout caractère linéaire ξ de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ vérifiant $\eta\otimes\xi = \eta$ doit contenir ce sous-groupe dans son noyau. Donc $\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1)\subset\widetilde{\mathbf{L}}^F_\eta\subset\widetilde{\mathbf{L}}^F(\lambda_1)$ (comparer avec le corollaire **12.10**).

(b) Comme dans la remarque suivant le théorème **13.9**, le paramétrage de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L},\lambda)$ donné dans le théorème **13.12** (a) est bien défini à tensorisation près par un caractère linéaire de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ (une fois l'isomorphisme $\widetilde{\mathcal{H}} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell[W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})]$ choisi) donc il est bien défini à conjugaison près par un élément de $\widetilde{\mathbf{L}}^F$. Pour fixer précisément ce paramétrage, il faut choisir une composante irréductible de la restriction de $\widetilde{R}_1$ à $\mathbf{G}^F$ et associer à cette composante irréductible le caractère trivial de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$: c'est équivalent à choisir une extension ν_1 de la composante irréductible μ_1 de la restriction de $\widetilde{\nu}$ à $N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ telle que $\operatorname{Res}_{\mathbf{L}^F}^{N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}\mu_1 = \lambda_1$.

13.D. Action de $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. — Soit $z\in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. Notons ξ_z le caractère linéaire du groupe $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ image de z par la suite de morphismes

$$H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G})) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F \longrightarrow \widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\mathbf{G},\lambda_1) \xrightarrow{\sim} (W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})/W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda}))^\wedge.$$

Ici, le dernier isomorphisme est le dual de **12.6**. On peut voir ξ_z comme un caractère linéaire de $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. La proposition suivante est immédiate.

Proposition 13.15. — *Soient $z\in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et $\eta\in\operatorname{Irr} W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$. Alors $\tau_z^{\mathbf{G}}R_\eta = R_{\eta\xi_z}$.*

13.E. Induction de Harish-Chandra. — Pour une preuve de l'analogue du théorème suivant pour la série de Harish-Chandra $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L},\lambda_1)$, voir [**HL83**]. Le théorème ci-dessous en découle facilement.

Théorème 13.16. — *Soit* $\mathbf{M}$ *un sous-groupe de Levi* F*-stable de* $\mathbf{G}$ *tel que* $\mathbf{L}\subset\mathbf{M}$. *On choisit une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W'_{\mathbf{M}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{M}^F,\mathbf{L},\lambda) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta^{\mathbf{M}} \end{array}$$

telle que $\langle R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}\subset\mathbf{Q}} R_1^{\mathbf{M}}, R_1^{\mathbf{G}}\rangle_{\mathbf{G}^F}\neq 0$. *Alors*

$$\big\langle R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}\subset\mathbf{Q}} R_\eta^{\mathbf{M}}, R_\zeta^{\mathbf{G}}\big\rangle_{\mathbf{G}^F} = \big\langle \operatorname{Ind}_{W'_{\mathbf{M}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}^{W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})} \eta,\zeta\big\rangle_{W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}$$

pour tous caractères irréductibles η *et* ζ *de* $W'_{\mathbf{M}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ *et* $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})$ *respectivement.*

Remarque 13.17. — Après avoir choisi une racine carrée de q, choisir une bijection

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W'_{\mathbf{M}^F}(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{M}^F,\mathbf{L},\lambda) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta^{\mathbf{M}} \end{array}$$

est équivalent à choisir une extension ν_1' de λ_1 à $N_{\mathbf{M}^F}(\mathbf{L},\lambda)$ (voir [**HL83**, théorème 4.8] et [**BC72**, théorème 2.9]). Si nous demandons à cette bijection de vérifier

$$\langle R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}\subset\mathbf{Q}} R_1^{\mathbf{M}}, R_1^{\mathbf{G}}\rangle_{\mathbf{G}^F}\neq 0,$$

alors nous devons choisir pour ν_1' la restriction de ν_1 et, pour la racine carrée de q, la même que celle choisie pour le groupe $\mathbf{G}^F$.

CHAPITRE 5

AUTOUR DES CARACTÈRES DE GELFAND-GRAEV

Le but de ce chapitre est d'étudier les caractères de Gelfand-Graev ainsi que leurs composantes irréductibles, appelés *caractères réguliers*. Dans les groupes à centre non connexe, il peut y avoir plusieurs caractères de Gelfand-Graev (ils sont paramétrés par $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$) et ce ne sont pas forcément des fonctions uniformes, contrairement à ce qui se passe dans les groupes à centre connexe [**DL76**, §10]. Dans la section 14, nous rappelons la définition et les premières propriétés de ces caractères, comme les résultats de Digne, Lehrer et Michel [**DLM97**] ou l'auteur [**Bon04a**, partie II] sur la restriction de Lusztig. Dans la section 15, nous rappelons comment sont paramétrés les caractères réguliers ou semi-simples (un *caractère semi-simple* est, au signe près, le dual d'Alvis-Curtis d'un caractère régulier). La section 16 est consacrée à l'étude des séries de Harish-Chandra au-dessus d'un caractère semi-simple cuspidal en adaptant l'étude faite au chapitre précédent à ce cas particulier. Dans la dernière section de ce chapitre, nous étudions les combinaisons linéaires d'induits de Lusztig de caractères semi-simples.

14. Caractères de Gelfand-Graev

14.A. Éléments unipotents réguliers. — Si $g \in \mathbf{G}$, alors $\dim C_{\mathbf{G}}(g) \geqslant \dim \mathbf{T}_0$. Un élément g de $\mathbf{G}$ est dit *régulier* si $\dim C_{\mathbf{G}}(g) = \dim \mathbf{T}_0$. L'ensemble des éléments réguliers de $\mathbf{G}$ forme un ouvert dense de $\mathbf{G}$ (voir [**Ste65**, théorème 1.3 (a)]).

Concentrons-nous maintenant sur les éléments unipotents réguliers. Tout d'abord, il existe des éléments unipotents réguliers [**Ste65**, théorème 3.1]. Ils sont tous conjugués dans $\mathbf{G}$ [**Ste65**, théorème 3.3] : notons $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$ la classe de conjugaison des éléments unipotents réguliers de $\mathbf{G}$. Un élément unipotent u de $\mathbf{G}$ est régulier si et seulement si il est contenu dans un seul sous-groupe de Borel [**Ste65**, corollaire 3.12 (b)]. Un élément unipotent $u \in \mathbf{U}_0$ est régulier si et seulement si $u \notin \mathbf{U}_I$ pour toute partie non vide I de Δ_0 [**Ste65**, lemme 3.2]. Notons $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}$ l'ensemble des éléments unipotents réguliers de $\mathbf{U}_0$: c'est un ouvert dense de $\mathbf{U}_0$.

Soit $\mathbf{U}_1 = \prod_{\alpha\in\Phi_0^+\setminus\Delta_0} \mathbf{U}_\alpha$, où Φ_0^+ est le système de racines positives de Φ_0 associé à Δ_0. Alors $\mathbf{U}_1$ est le groupe dérivé de $\mathbf{U}_0$. De plus, l'action de $\mathbf{U}_1$ par translation (à droite ou à gauche) sur $\mathbf{U}_0$ stabilise $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}$. Il est de plus clair que $\widetilde{\mathbf{T}}_0$ agit transitivement sur $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}/\mathbf{U}_1$. En particulier, $(\mathbf{U}_{0,\text{rég}}/\mathbf{U}_1)^F = \mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F/\mathbf{U}_1^F$ est non vide. D'autre part, le stabilisateur de tout élément de $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}/\mathbf{U}_1$ dans $\widetilde{\mathbf{T}}_0$ est $\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})$. Ce dernier étant connexe, on en déduit que $\widetilde{\mathbf{T}}_0^F$ agit transitivement sur $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F/\mathbf{U}_1^F$.

Proposition 14.1. — *Soit $u \in \mathbf{U}_{0,\text{rég}}$. Alors :*

(a) $C_{\mathbf{G}}(u) = \mathbf{Z}(\mathbf{G}).C_{\mathbf{U}_0}(u)$.

(b) *Si p est bon pour $\mathbf{G}$, alors $C_{\mathbf{U}_0}(u)$ est connexe.*

(c) *L'application $\mathbf{U}_0 \to u\mathbf{U}_1$, $x \mapsto xux^{-1}$ est surjective.*

(d) *Si u' est un autre élément de $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}$, alors il existe $b \in \mathbf{B}_0$ tel que $u' = bub^{-1}$.*

(e) *$\mathbf{B}_0$ est l'unique sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ contenant u.*

Démonstration. — L'assertion (a) découle du fait que le stabilisateur, dans $\mathbf{T}_0$, d'un élément de $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}/\mathbf{U}_1$ est égal à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$. Pour (b), voir [**SS70**, 3.7]. Montrons maintenant (c). Soit $f : \mathbf{U}_0 \to u\mathbf{U}_1$, $x \mapsto xux^{-1}$. C'est un morphisme de variété. L'image de f est une orbite sous l'action d'un groupe unipotent, donc c'est une sous-variété fermée de $u\mathbf{U}_1$. De plus, la dimension des fibres de f est toujours égale à

$$\dim C_{\mathbf{U}_0}(u) = \dim C_{\mathbf{G}}(u) - \dim \mathbf{Z}(\mathbf{G}) = |\Delta_0|.$$

Par conséquent, la dimension de l'image de f est

$$\dim \mathbf{U}_0 - \dim C_{\mathbf{U}_0}(u) = |\Phi_0^+| - |\Delta_0| = \dim \mathbf{U}_1.$$

Puisque $u\mathbf{U}_1$ est irréductible, l'image de f est bien $u\mathbf{U}_1$. (d) découle de (c) et du fait que $\mathbf{T}_0$ agit transitivement sur $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}/\mathbf{U}_1$. (e) est clair. □

14.B. Caractères réguliers de $\mathbf{U}_0^F$. — Un caractère linéaire $\psi : \mathbf{U}_0^F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est dit *régulier* s'il contient $\mathbf{U}_1^F$ dans son noyau et si $\operatorname{Res}^{\mathbf{U}_0^F}_{\mathbf{U}_I^F} \psi \neq 1$ pour toute partie stricte ϕ_0-stable I de Δ_0 (le lecteur peut aisément vérifier que cette définition coïncide avec [**DLM92**, définition 2.3]). Rappelons que $\mathbf{U}_I$ désigne le radical unipotent de $\mathbf{P}_I$. Notons $(\mathbf{U}_0^F)^\wedge_{\text{rég}}$ l'ensemble des caractères linéaires réguliers de $\mathbf{U}_0^F$.

Fixons maintenant et ce jusqu'à la fin de cet article un caractère linéaire non trivial $\chi_1 : \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\,\times}$. Si n est un entier naturel non nul, nous noterons $\chi_n : \mathbb{F}_{p^n} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\,\times}$, $x \mapsto \chi_1(\operatorname{Tr}_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p}(x))$. Avec ces choix, on obtient [**DLM97**, §2] une application bijective $\widetilde{\mathbf{T}}_0^F$-équivariante $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F/\mathbf{U}_1^F \xrightarrow{\sim} (\mathbf{U}_0^F)^\wedge_{\text{rég}}$. Cela montre que le groupe $\widetilde{\mathbf{T}}_0^F$ agit transitivement sur l'ensemble des caractères réguliers de $\mathbf{U}_0^F$ et que le stabilisateur d'un caractère régulier dans $\widetilde{\mathbf{T}}_0^F$ est $\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F$. Par conséquent, $\widetilde{\mathbf{T}}_0^F/\mathbf{T}_0^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F \simeq H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ agit librement sur l'ensemble des $\mathbf{T}_0^F$-orbites dans $(\mathbf{U}_0)^\wedge_{\text{rég}}$.

On appelle *caractère de Gelfand-Graev* de $\mathbf{G}^F$ tout caractère de la forme $\operatorname{Ind}_{\mathbf{U}_0^F}^{\mathbf{G}^F} \psi$, où ψ est un caractère régulier de $\mathbf{U}_0^F$. Notons $\operatorname{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{G}^F)$ l'ensemble des classes de $\mathbf{G}^F$-conjugaison d'éléments unipotents réguliers de $\mathbf{G}^F$ et $\operatorname{GG}(\mathbf{G}^F)$ l'ensemble des caractères de Gelfand-Graev de $\mathbf{G}^F$. La dernière remarque du précédent paragraphe montre que $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ agit transitivement sur $\mathrm{GG}(\mathbf{G}^F)$ (en particulier, il n'y a qu'un caractère de Gelfand-Graev dans $\widetilde{\mathbf{G}}^F$).

Si $[u] \in \mathrm{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{G}^F)$, alors $[u] \cap \mathbf{U}_0^F$ est contenu dans $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F$ et son image dans $\mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F/\mathbf{U}_1^F$ est une $\mathbf{T}_0^F$-orbite. On peut donc lui associer un caractère de Gelfand-Graev $\Gamma_u^{\mathbf{G}}$: l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{G}^F) & \longrightarrow & \mathrm{GG}(\mathbf{G}^F) \\ [u] & \longmapsto & \Gamma_u^{\mathbf{G}} \end{array}$$

est surjective et $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$-équivariante. Nous verrons plus tard qu'elle est bijective.

Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cet article, nous fixons un élément unipotent régulier $u \in \mathbf{U}_{0,\text{rég}}^F$, nous notons ψ le caractère régulier de $\mathbf{U}_0^F$ associé et nous posons

$$\Gamma^{\mathbf{G}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{U}_0^F}^{\mathbf{G}^F} \psi.$$

Une fois fixé ψ, l'ensemble des $\mathbf{T}_0^F$-orbites de caractères réguliers de $\mathbf{U}_0^F$ est en bijection naturelle avec $\widetilde{\mathbf{T}}_0^F/\mathbf{T}_0^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F \simeq H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. Soient $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et $\tilde{t}_z \in \widetilde{\mathbf{T}}_0^F$ tels que $\sigma_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{G}}(\tilde{t}_z \mathbf{T}_0^F.\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}})^F) = z$. Posons $\psi_z = \psi \circ (\mathrm{ad}\, \tilde{t}_z)^{-1}$. Alors $\{\psi_z \mid z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))\}$ est un ensemble de représentants des $\mathbf{T}_0^F$-orbites de caractères linéaires réguliers de $\mathbf{U}_0^F$. On définit alors

$$\Gamma_z^{\mathbf{G}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{U}_0^F}^{\mathbf{G}^F} \psi_z. \tag{14.2}$$

Remarquons que $\Gamma_z^{\mathbf{G}}$ ne dépend que de z et que

$$\Gamma_z^{\mathbf{G}} = \Gamma^{\mathbf{G}} \circ (\mathrm{ad}\, \tilde{t}_z)^{-1} = \tau_z^{\mathbf{G}} \Gamma^{\mathbf{G}}. \tag{14.3}$$

Donc les caractères de Gelfand-Graev de $\mathbf{G}^F$ sont les $\Gamma_z^{\mathbf{G}}$ où z parcourt $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$.

14.C. Restriction de Harish-Chandra. — Le théorème suivant a été montré par Digne, Lehrer et Michel [**DLM92**, théorème 2.9] (voir aussi [**Asa87**, preuve du lemme 3.6.1] pour un énoncé moins fort).

***Théorème 14.4* (Digne-Lehrer-Michel).** — *Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique F-stable de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}$ un complément de Levi F-stable de $\mathbf{P}$. Alors ${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\Gamma^{\mathbf{G}}$ est un caractère de Gelfand-Graev de $\mathbf{L}^F$. Plus précisément, si $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{P}$ et $\mathbf{T}_0 \subset \mathbf{L}$, alors la restriction de ψ à $\mathbf{U}_0^F \cap \mathbf{L}^F$ est un caractère régulier de $\mathbf{U}_0^F \cap \mathbf{L}^F$ et*

$${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\Gamma^{\mathbf{G}} = \mathrm{Ind}_{\mathbf{U}_0^F\cap\mathbf{L}^F}^{\mathbf{L}^F}(\mathrm{Res}_{\mathbf{U}_0^F\cap\mathbf{L}^F}^{\mathbf{U}_0^F} \psi).$$

Notation. — Sous les hypothèses et notations du théorème **14.4**, on pose

$$\Gamma^{\mathbf{L}} = {}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\Gamma^{\mathbf{G}}. \tag{14.5}$$

Remarquons que $\Gamma^{\mathbf{L}}$ ne dépend pas de $\mathbf{P}$. Si on pose $\Gamma_z^{\mathbf{L}} = \tau_z^{\mathbf{L}}\Gamma^{\mathbf{L}}$ pour tout $z \in H^1(F, \mathbf{Z}(\mathbf{L}))$, alors, d'après **10.4**, on a

(14.6) $$\Gamma^{\mathbf{L}}_{h^1_{\mathbf{L}}(z)} = {}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}\Gamma^{\mathbf{G}}_z$$

pour tout $z \in H^1(F, \mathbf{Z}(\mathbf{G}))$.

14.D. Dualité d'Alvis-Curtis. — Les résultats de cette section sont dûs eux aussi à Digne, Lehrer et Michel.

***Théorème 14.7* (Digne-Lehrer-Michel).** — *On a :*

(a) *Si $g \in \mathbf{G}^F$ est tel que $D_{\mathbf{G}}\Gamma^{\mathbf{G}}(g) \neq 0$, alors g est un élément unipotent régulier.*

(b) *Si z et z' sont deux éléments de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, alors*
$$\langle D_{\mathbf{G}}\Gamma^{\mathbf{G}}_z, \Gamma^{\mathbf{G}}_{z'}\rangle_{\mathbf{G}^F} = \eta_{\mathbf{G}}|\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F|\delta_{z,z'}.$$

Démonstration. — voir [**DLM92**, théorème 2.12 (i) et (ii)]. □

***Corollaire 14.8* (Digne-Lehrer-Michel).** — *La famille $(\Gamma^{\mathbf{G}}_z)_{z\in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))}$ est libre. En particulier, si z et z' sont deux éléments distincts de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, alors $\Gamma^{\mathbf{G}}_z \neq \Gamma^{\mathbf{G}}_{z'}$.*

14.E. Restriction de Lusztig. — Nous fixons dans cette sous-section un sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{L}$ de $\mathbf{G}$.

Hypothèse. — *Nous supposerons dans cette sous-section, et seulement dans cette sous-section, que p est un bon nombre premier pour $\mathbf{G}$.*

Dans [**Bon99b**, §2], l'auteur a défini une application
$$\mathrm{res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}} : \mathrm{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{G}^F) \longrightarrow \mathrm{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{L}^F).$$

Rappelons sa définition (pour la preuve des faits utilisés dans la discussion suivante, nous nous référons à [**Bon99b**]).

Tout d'abord, si $\mathbf{L}$ est un complément de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$, notons $\pi_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}} : \mathbf{P} \to \mathbf{L}$ la projection canonique et posons
$$\begin{array}{rccc} \rho^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}} : & \mathrm{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{G}^F) & \longrightarrow & \mathrm{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{L}^F) \\ & [g]_{\mathbf{G}^F} & \longmapsto & \pi_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}([g]^F_{\mathbf{G}} \cap \mathbf{P}). \end{array}$$

Il est bien connu que $\rho^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}$ est bien définie et ne dépend pas du choix du sous-groupe parabolique F-stable ayant $\mathbf{L}$ comme sous-groupe de Levi [**DLM92**, proposition 5.3].

Revenons au cas général. Soit $\mathbf{L}_1$ un sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{L}$-déployé de $\mathbf{L}$ minimal tel que l'application $h^{\mathbf{L}}_{\mathbf{L}_1}$ soit un isomorphisme. Le groupe $\mathbf{L}_1$ étant cuspidal, il existe alors un sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{G}$-déployé $\mathbf{L}_2$ qui lui est géométriquement conjugué. Alors l'application
$$\begin{array}{rccc} c_{\mathbf{L}} : & \mathrm{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{L}_2^F) & \longrightarrow & \mathrm{Uni}_{\text{rég}}(\mathbf{L}_1^F) \\ & [l]_{\mathbf{L}_2^F} & \longmapsto & [l]_{\mathbf{G}^F} \cap \mathbf{L}_1^F \end{array}$$

est bien définie et bijective. De plus, $\rho_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{L}}$ est elle aussi bijective. On pose alors, comme dans [**Bon99b**, page 279],

$$\mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = (\rho_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{L}})^{-1} \circ c_{\mathbf{L}} \circ \rho_{\mathbf{L}_2}^{\mathbf{G}}.$$

Nous allons maintenant définir une autre application $\mathrm{Uni}_{\mathrm{rég}}(\mathbf{G}^F) \to \mathrm{Uni}_{\mathrm{rég}}(\mathbf{L}^F)$. Notons g un élément de $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{L}_1 = {}^g\mathbf{L}_2$. Puisque $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{L}_2$ sont F-stables, $F(g)g^{-1}$ appartient à $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_1)$. Notons $w_{\mathbf{L}}$ sa classe dans $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_1)$. Nous noterons ici $\varphi_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{G}} : W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_1) \to \mathcal{Z}(\mathbf{L}_1)$ le morphisme de groupes noté $\varphi_{\mathbf{L}_1,v_1}^{\mathbf{G}}$ dans [**Bon04a**, partie I, corollaire 3.8], où v_1 est un élément unipotent régulier de $\mathbf{L}_1$. Il est à noter que ce morphisme a été calculé explicitement dans [**Bon04a**, partie II, table 1]. Identifions $\mathcal{Z}(\mathbf{L}_1)$ et $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ via $h_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{L}}$ et notons $z_{\mathbf{L}}$ l'image dans $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{L}))$ de l'élément $\varphi_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{G}}(w_{\mathbf{L}})$ de $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$. On pose alors

$$\mathrm{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \tau_{z_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}} \circ \mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}.$$

Nous rappelons les propriétés des applications $\mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et $\mathrm{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$.

Proposition 14.9. — *On a :*

(a) *Les applications* $\mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ *et* $\mathrm{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ *ne dépendent pas des choix de* $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ *et* g *effectués ci-dessus.*

(b) *Si* $z \in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, *alors* $\mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ \tau_z^{\mathbf{G}} = \tau_{h_{\mathbf{L}}(z)}^{\mathbf{L}} \circ \mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ *et* $\mathrm{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \circ \tau_z^{\mathbf{G}} = \tau_{h_{\mathbf{L}}(z)}^{\mathbf{L}} \circ \mathrm{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$.

(c) *Les applications* $\mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ *et* $\mathrm{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ *sont surjectives.*

(d) *Si* $\mathbf{M}$ *est un sous-groupe de Levi* F*-stable de* $\mathbf{L}$, *alors* $\mathrm{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ \mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ *et* $\mathrm{dlm}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{dlm}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ \mathrm{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$.

Démonstration. — Les assertions (a), (b) et (c) sont évidentes. Le fait que $\mathrm{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ \mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ est démontré dans [**Bon04b**, proposition 7.5 (c)]. Il suffit alors d'appliquer [**Bon04a**, partie II, corollaire 2.4] pour obtenir que $\mathrm{dlm}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{dlm}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ \mathrm{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$. □

Notation. — *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cet article, nous noterons, lorsque* p *est bon pour* $\mathbf{G}$, $u_{\mathbf{L}}$ *un représentant de la classe de* $\mathbf{L}^F$*-conjugaison* $\mathrm{dlm}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}[u]_{\mathbf{G}^F}$. *D'autre part, nous noterons* $\Gamma^{\mathbf{L}}$ *le caractère de Gelfand-Graev de* $\mathbf{L}^F$ *associé à* $[u_{\mathbf{L}}]_{\mathbf{L}^F}$.

La conjecture suivante propose une généralisation du théorème de Digne-Lehrer-Michel sur la restriction de Harish-Chandra d'un caractère de Gelfand-Graev.

Conjecture $\mathfrak{G}$. — *Si* $\mathbf{L}$ *est un complément de Levi* F*-stable d'un sous-groupe parabolique* $\mathbf{P}$ *de* $\mathbf{G}$, *alors* ${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\Gamma^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\Gamma^{\mathbf{L}}$.

Conjecture $\mathfrak{G}'$. — *Si* $\mathbf{L}$ *est un complément de Levi* F*-stable d'un sous-groupe parabolique* $\mathbf{P}$ *de* $\mathbf{G}$, *alors* ${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}\gamma_u^{\mathbf{G}} = \gamma_{u_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}$.

Rappelons que la notation $\gamma_u^{\mathbf{G}}$ a été définie dans la sous-section 1.D : c'est la fonction caractéristique de la classe de $\mathbf{G}^F$-conjugaison de u. Nous dirons que « la conjecture $\mathfrak{G}$ (resp. $\mathfrak{G}'$) a lieu dans $\mathbf{G}$ » si, pour tout sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$, pour tout sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{M}$ et pour tout complément de Levi F-stable $\mathbf{L}$ de $\mathbf{P}$, on a ${}^*R^{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}\Gamma^{\mathbf{M}} = \varepsilon_{\mathbf{M}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\Gamma^{\mathbf{L}}$ (resp. ${}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}\gamma^{\mathbf{M}}_{u_{\mathbf{M}}} = \gamma^{\mathbf{L}}_{u_{\mathbf{L}}}$).

Proposition 14.10. — *Si la formule de Mackey a lieu dans* $\mathbf{G}$, *alors la conjecture* $\mathfrak{G}$ *a lieu dans* $\mathbf{G}$ *si et seulement si la conjecture* $\mathfrak{G}'$ *a lieu dans* $\mathbf{G}$.

Démonstration. — Cela résulte facilement de [**DLM97**, propositions 2.1 et 2.5]. □

Lorsque le centre de $\mathbf{G}$ est connexe, ces conjectures ont été montrées par Digne-Lehrer-Michel [**DLM92**, proposition 5.4] : en effet, dans ce cas, les fonctions centrales $\Gamma^{\mathbf{G}}$ et $\gamma^{\mathbf{G}}_u$ sont des combinaisons linéaires explicites de caractères de Deligne-Lusztig $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(\theta)$, où $(\mathbf{T},\theta) \in \nabla(\mathbf{G}, F)$. Il suffit alors de calculer ${}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(\theta)$: cela se fait en utilisant la formule de Mackey qui est valable dans ce cas (voir théorème **10.12** (a2)).

Lorsque le centre de $\mathbf{G}$ n'est pas connexe, ces conjectures ne sont démontrées qu'en utilisant la théorie des faisceaux-caractères, ce qui restreint leur domaine de validité (notamment à cause de l'emploi de [**Lus90**, théorème 1.14]).

Théorème 14.11. — *Si p est bon pour* $\mathbf{G}$, *si F est un $\mathbb{F}_q$-endomorphisme de Frobenius de* $\mathbf{G}$ *et si $q > q_0(\mathbf{G})$, où $q_0(\mathbf{G})$ est un constante ne dépendant que de la donnée radicielle associée à* $\mathbf{G}$, *alors les conjectures* $\mathfrak{G}$ *et* $\mathfrak{G}'$ *ont lieu dans* $\mathbf{G}$.

Remarque. — Dans [**DLM97**, théorème 3.7], Digne-Lehrer-Michel ont montré que ${}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}\Gamma^{\mathbf{G}}$ est égal, au signe $\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}$ près, à un caractère de Gelfand-Graev de $\mathbf{L}^F$. En revanche, ils n'ont pas déterminé lequel. En étudiant plus précisément l'algèbre d'endomorphismes de l'induit d'un faisceau-caractère cuspidal supporté par la classe unipotente régulière [**Bon04a**] et en intégrant cette information supplémentaire dans la preuve de Digne-Lehrer-Michel, nous avons obtenu le théorème ci-dessus [**Bon04a**, partie II, théorème 15.2].

15. Caractères réguliers et caractères semi-simples

Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cet article, nous fixons un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$. *Nous fixons aussi un élément semi-simple* $\widetilde{s} \in \widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}$ *tel que* $i^*(\widetilde{s}) = s$.

Nous reprenons les notations introduites dans la section 8 ($\mathbf{T}^*_1$, $\mathbf{B}^*_1$, Φ_s, ϕ_1...). Pour tout $w \in W^\circ(s)$, nous choisissons un tore maximal F^*-stable $\mathbf{T}^*_w$ de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ de type w par rapport à $\mathbf{T}^*_1$. Notons $\varepsilon : W \to \{1, -1\}$ le caractère signature de W. Nous noterons ε_s (respectivement ε°_s) sa restriction à $W(s)$ (respectivement $W^\circ(s)$). Alors, si $w \in W^\circ(s)$, on a $\varepsilon_{\mathbf{T}^*_w} = \varepsilon(w)\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}$ et donc, d'après le corollaire **10.13**,

$$D_{\mathbf{G}}R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}^*_w}(s) = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}\varepsilon(w)R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}^*_w}(s). \tag{15.1}$$

Exemple 15.2. — Il se peut que la restriction du caractère signature à $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ soit non triviale, comme le montre le cas où $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_2(\mathbb{F})$, $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ est un endomorphisme de Frobenius déployé et s est l'unique élément d'ordre 2 de $\mathbf{T}^*_0$.

Soient $\widetilde{\mathbf{T}}_1^* = i^{*-1}(\mathbf{T}_1^*)$. Alors W est canoniquement isomorphe au groupe de Weyl de $\widetilde{\mathbf{G}}^*$ relativement à $\widetilde{\mathbf{T}}_1^*$ et, puisque $C_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s})$ est connexe (voir théorème **3.5**), on a $W(\widetilde{s}) = W^\circ(\widetilde{s})$ et $A_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s}) = \{1\}$. De plus, $W(\widetilde{s}) = W^\circ(s)$ car $W^\circ(s)$ est le groupe de Weyl du système de racines Φ_s. Pour tout $w \in W(\widetilde{s})$, on pose $\widetilde{\mathbf{T}}_w^* = i^{*-1}(\mathbf{T}_w^*)$. D'après la proposition **10.11** (a), on a, pour tout $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$,

$$(\mathbf{15.3}) \qquad R_{\widetilde{\mathbf{T}}_w^*}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{s}) \otimes \widehat{\varphi_s(a)} = R_{\widetilde{\mathbf{T}}_{a^{-1}wa}^*}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{s})$$

car $\widetilde{s}\varphi_s(a) = a\widetilde{s}a^{-1}$. En particulier,

$$(\mathbf{15.4}) \qquad R_{\mathbf{T}_{awa^{-1}}^*}^{\mathbf{G}}(s) = R_{\mathbf{T}_w^*}^{\mathbf{G}}(s).$$

D'après la formule de Mackey (théorème **10.12** (a2)), on a, pour tous w, $w' \in W^\circ(s)$,

(**15.5**)

$$\langle R_{\mathbf{T}_w^*}^{\mathbf{G}}(s), R_{\mathbf{T}_{w'}^*}^{\mathbf{G}}(s)\rangle_{\mathbf{G}^F} = \begin{cases} |C_{W(s)}(w\phi_1)| & \text{si } w\phi_1 \text{ et } w'\phi_1 \text{ sont conjugués sous } W(s), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

15.A. Définition. — Un caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$ est dit *régulier* (respectivement *semi-simple*) s'il est une composante irréductible d'un caractère de Gelfand-Graev de $\mathbf{G}^F$ (respectivement du dual d'Alvis-Curtis d'un caractère de Gelfand-Graev de $\mathbf{G}^F$). Nous allons dans cette section paramétrer les caractères réguliers (et semi-simples) de $\mathbf{G}^F$ appartenant à $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$ ou $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$. Nous allons aussi établir les premières propriétés (action de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$, restriction de Harish-Chandra...).

Posons

$$(\mathbf{15.6}) \qquad \begin{aligned} \rho_s = \rho_s^{\mathbf{G}} &= \frac{\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}}{|W^\circ(s)|} \sum_{w \in W^\circ(s)} R_{\mathbf{T}_w^*}^{\mathbf{G}}(s), \\ \chi_s = \chi_s^{\mathbf{G}} &= \frac{\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}}{|W^\circ(s)|} \sum_{w \in W^\circ(s)} \varepsilon(w) R_{\mathbf{T}_w^*}^{\mathbf{G}}(s). \end{aligned}$$

Remarquons que, d'après **15.1**,

$$(\mathbf{15.7}) \qquad \chi_s = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} D_{\mathbf{G}}(\rho_s).$$

Alors, d'après le corollaire **11.5**, on a

$$(\mathbf{15.8}) \qquad \begin{aligned} \rho_s &= \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \rho_{\widetilde{s}}, \\ \chi_s &= \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \chi_{\widetilde{s}}. \end{aligned}$$

D'après la proposition **10.11**, on a

$$(\mathbf{15.9}) \qquad \begin{aligned} \rho_{\widetilde{s}} \otimes \hat{z} &= \rho_{\widetilde{s}z}, \\ \chi_{\widetilde{s}} \otimes \hat{z} &= \chi_{\widetilde{s}z}, \end{aligned}$$

pour tout $z \in (\operatorname{Ker} i^*)^{F^*}$.

***Théorème 15.10* (Deligne-Lusztig).** — *On a :*

(a) $\langle \chi_{\widetilde{s}}, \Gamma^{\widetilde{\mathbf{G}}} \rangle_{\widetilde{\mathbf{G}}^F} = 1$.

(b) *$\rho_{\widetilde{s}}$ et $\chi_{\widetilde{s}}$ sont des caractères irréductibles de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ et ils appartiennent à $\mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}])$.*

(c) *Le caractère de Gelfand-Graev de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ a la décomposition suivante :*

$$\Gamma^{\widetilde{\mathbf{G}}} = \sum_{[\widetilde{s}]} \chi_{\widetilde{s}}.$$

Remarque. — Le théorème précédent est démontré dans [**DL76**, théorème 10.7] lorsque F est un endomorphisme de Frobenius. Dans le contexte légèrement plus général dans lequel nous nous plaçons, le résultat reste valide. En effet, d'après [**DL76**, page 161], il faut seulement utiliser le fait que la formule de Mackey a lieu lorsque l'un des deux sous-groupes de Levi est un tore (voir théorème **10.12** (a2)).

***Corollaire 15.11* (Asai).** — *On a :*

(a) $\langle \chi_s, \Gamma^{\mathbf{G}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = 1$.

(b) *ρ_s et χ_s sont des caractères de $\mathbf{G}^F$ sans multiplicité et toute composante irréductible de ρ_s ou χ_s appartient à $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.*

(c) *Si $\chi_{s,1}$ est l'unique composante irréductible commune à $\Gamma^{\mathbf{G}}$ et χ_s (voir (a)), alors*

$$\Gamma^{\mathbf{G}} = \sum_{[s]} \chi_{s,1}.$$

Démonstration. — (a) résulte du théorème **15.10** (a), de **15.8** et de la réciprocité de Frobenius. (b) résulte du théorème **15.10** (b), de (a), de **15.8** et de la proposition **11.7** (a). (c) découle de (b) et du théorème **15.10** (c). □

On pose $\rho_{s,1} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} D_{\mathbf{G}}(\chi_{s,1}) \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. C'est une composante irréductible de ρ_s. S'il y a ambiguïté, on notera $\rho^{\mathbf{G}}_{s,1}$ et $\chi^{\mathbf{G}}_{s,1}$ les caractères irréductibles $\rho_{s,1}$ et $\chi_{s,1}$ de $\mathbf{G}^F$ respectivement.

***Corollaire 15.12* (Digne-Lehrer-Michel).** — *Soit $\mathbf{L}$ un complément de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$. Notons $\mathbf{L}^*$ un complément de Levi F^*-stable d'un sous-groupe parabolique F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{L}$. Alors*

$${}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}} \rho^{\mathbf{G}}_{s,1} = \sum_{[t]_{\mathbf{L}^{*F^*}} \subset [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}} \rho^{\mathbf{L}}_{t,1}$$

et

$${}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L} \subset \mathbf{P}} \chi^{\mathbf{G}}_{s,1} = \sum_{[t]_{\mathbf{L}^{*F^*}} \subset [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}} \chi^{\mathbf{L}}_{t,1}.$$

Démonstration. — La deuxième égalité résulte du théorème **14.4**, du corollaire **15.11** (c), et du corollaire **11.11**. La première découle de la seconde et de la relation de commutation entre l'induction de Harish-Chandra et la dualité d'Alvis-Curtis [**DM91**, théorème 8.11]. □

Si $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$, on pose

$$\rho_{s,\xi} = \tau_z^{\mathbf{G}} \rho_{s,1} \qquad \text{et} \qquad \chi_{s,\xi} = \tau_z^{\mathbf{G}} \chi_{s,1},$$

où $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ est tel que $\hat{\omega}_s^0(z) = \xi$ (d'après le corollaire **11.13**, les caractères $\chi_{s,\xi}$ et $\rho_{s,\xi}$ ne dépendent que de ξ et non du choix de z). S'il y a ambiguïté, nous noterons $\rho_{s,\xi}^{\mathbf{G}}$ et $\chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}}$ les caractères irréductibles $\rho_{s,\xi}$ et $\chi_{s,\xi}$ de $\mathbf{G}^F$ respectivement ($\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$).

La proposition suivante décrit les caractères réguliers ou semi-simples appartenant à $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.

Proposition 15.13 **(Asai)**. — *Le stabilisateur de $\rho_{s,1}$ (ou $\chi_{s,1}$) dans $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ est égal à $\widetilde{\mathbf{G}}^F(s)$. Par conséquent,*

$$\rho_s = \sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge} \rho_{s,\xi}$$

et

$$\chi_s = \sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge} \chi_{s,\xi}.$$

Démonstration. — Seule la première assertion nécessite une preuve, la deuxième résultant immédiatement de la première et du corollaire **15.11** (b). Mais, par la théorie de Clifford, elle découle de la formule **15.3**. □

Corollaire 15.14

(a) *Si $z \in H^1(F, \mathbf{Z}(\mathbf{G}))$ et si $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$, alors*

$$\tau_z^{\mathbf{G}} \rho_{s,\xi} = \rho_{s,\xi\hat{\omega}_s^0(z)}$$

et

$$\tau_z^{\mathbf{G}} \chi_{s,\xi} = \chi_{s,\xi\hat{\omega}_s^0(z)}.$$

(b) *$\chi_{s,\xi}$ est une composante irréductible de $\Gamma_z^{\mathbf{G}}$ si et seulement si $\xi = \hat{\omega}_s^0(z)$.*

Corollaire 15.15 **(Digne-Lehrer-Michel)**. — *Soit $\mathbf{L}$ un complément de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$. Soit $\mathbf{L}^*$ un complément de Levi F^*-stable d'un sous-groupe parabolique F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{L}$. Soit $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$. Pour tout $t \in \mathbf{L}^{*F^*}$ tel qu'il existe $g \in \mathbf{G}^{*F^*}$ vérifiant ${}^g s = t$, on pose $\xi_t = \operatorname{Res}_{A_{\mathbf{L}^*}(t)^{F^*}}^{A_{\mathbf{G}^*}(t)^{F^*}} {}^g\xi$; le caractère linéaire ξ_t ne dépend pas du choix de g. Alors*

$${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \rho_{s,\xi}^{\mathbf{G}} = \sum_{[t]_{\mathbf{L}^*F^*} \subset [s]_{\mathbf{G}^*F^*}} \rho_{t,\xi_t}^{\mathbf{L}}$$

et

$${}^*R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} \chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}} = \sum_{[t]_{\mathbf{L}^*F^*} \subset [s]_{\mathbf{G}^*F^*}} \chi_{t,\xi_t}^{\mathbf{L}}.$$

Démonstration. — Cela résulte du corollaire **15.12**, de la commutativité du diagramme **8.6** et de **10.5**. □

Proposition 15.16. — *On a $\rho_s = \chi_s$ si et seulement si $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ est un tore maximal de $\mathbf{G}^*$. Dans ce cas, il existe un caractère linéaire ξ_s d'ordre 1 ou 2 de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ tel que, pour tout $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$, on ait*

$$D_{\mathbf{G}}\rho_{s,\xi} = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}\rho_{s,\xi\xi_s}.$$

Démonstration. — La première assertion est immédiate. Supposons donc que $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ est un tore maximal de $\mathbf{G}^*$. Notons ξ_s le caractère linéaire de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ tel que

$$D_{\mathbf{G}}\rho_{s,1} = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}\rho_{s,\xi_s}.$$

Puisque $\tau_z^{\mathbf{G}} \circ D_{\mathbf{G}} = D_{\mathbf{G}} \circ \tau_z^{\mathbf{G}}$ pour tout $z \in H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$, on en déduit la formule donnée dans la proposition **15.16**. Pour finir, puisque $D_{\mathbf{G}}$ est une involution, on a $\xi_s^2 = 1$. □

Exemple 15.17. — Le caractère linéaire ξ_s de la proposition **15.16** peut être non trivial. En effet, supposons ici que $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_2(\mathbb{F})$, que F est l'endomorphisme de Frobenius déployé standard sur $\mathbb{F}_q$ et que p (ou q) est impair. Notons s l'unique élément de $\mathbf{T}_0^*$ d'ordre 2 et notons θ l'unique caractère linéaire de $\mathbf{T}_0^F$ d'ordre 2. Alors $\rho_s = R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}_0}(\theta)$ et ${}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}_0}(\rho_{s,1}) = \theta$ d'après le corollaire **15.12**. D'autre part, $D_{\mathbf{G}} = (R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}_0} \circ {}^*R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}_0}) - \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}\operatorname{Irr}\mathbf{G}^F}$. Donc $D_{\mathbf{G}}(\rho_{s,1}) = \rho_{s,\xi}$, où ξ est l'unique caractère non trivial de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

16. Caractères semi-simples ou réguliers cuspidaux

Nous allons ici étudier les séries de Harish-Chandra associées à un caractère cuspidal semi-simple (ou régulier).

16.A. Caractérisation de la cuspidalité. — Soit $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$. Si $\rho_{s,\xi}$ est cuspidal, alors $D_{\mathbf{G}}\rho_{s,\xi} = \eta_{\mathbf{G}}\rho_{s,\xi}$ et donc $D_{\mathbf{G}}\rho_s = \eta_{\mathbf{G}}\rho_s$. En particulier, $\rho_s = \chi_s$. Donc un caractère irréductible cuspidal est semi-simple si et seulement si il est régulier. Dorénavant, nous fixons un couple $(\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\theta}_1) \in \nabla(\widetilde{\mathbf{G}}, F)$ tel que $(\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\theta}_1) \overset{\widetilde{\mathbf{G}}}{\longleftrightarrow} (\widetilde{\mathbf{T}}_1^*, \widetilde{s})$ et nous posons $(\mathbf{T}_1, \theta_1) = \mathfrak{Res}^{\widetilde{\mathbf{G}}}_{\mathbf{G}}(\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\theta}_1)$. Le lemme suivant précise quand est-ce qu'un caractère semi-simple est cuspidal.

Lemme 16.1. — *Soit $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$. Le caractère irréductible $\rho_{s,\xi}$ de $\mathbf{G}^F$ est cuspidal si et seulement si $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ est un tore maximal F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ qui n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi F^*-stable $\mathbf{G}^*$-déployé.*

Démonstration. — Remarquons que, d'après le corollaire **12.1**, $\rho_{s,\xi}$ est cuspidal si et seulement si le caractère irréductible $\rho_{\widetilde{s}}$ de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ l'est. Il est donc suffisant de montrer le théorème pour $\widetilde{\mathbf{G}}$.

Si $\rho_{\widetilde{s}}$ est cuspidal, alors $D_{\widetilde{\mathbf{G}}}\rho_{\widetilde{s}} = \eta_{\widetilde{\mathbf{G}}}\rho_{\widetilde{s}}$ donc $\rho_{\widetilde{s}} = \chi_{\widetilde{s}}$. Cela montre que $C_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s})$ est un tore maximal de $\widetilde{\mathbf{G}}^*$ donc que $C_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s}) = \widetilde{\mathbf{T}}_1^*$. Dans ce cas,

$$\rho_{\widetilde{s}} = \varepsilon_{\widetilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\widetilde{\mathbf{T}}_1^*} R_{\widetilde{\mathbf{T}}_1^*}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{s})$$

donc $C_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s})$ n'est contenu dans aucun complément de Levi F^*-stable d'un sous-groupe parabolique F^*-stable propre de $\widetilde{\mathbf{G}}^*$.

Réciproquement, supposons que $C_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s})$ soit un tore maximal F^*-stable de $\widetilde{\mathbf{G}}^*$ qui n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi F^*-stable $\mathbf{G}^*$-déployé. Alors $\rho_{\widetilde{s}} = \varepsilon_{\widetilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{\widetilde{\mathbf{T}}_1} R_{\widetilde{\mathbf{T}}_1}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\theta}_1)$. Soit $\widetilde{\mathbf{L}}$ un complément de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable propre $\widetilde{\mathbf{P}}$ de $\widetilde{\mathbf{G}}$. Alors, d'après la formule de Mackey (voir théorème **10.12** (a2)), on a

$$^*R_{\widetilde{\mathbf{L}}\subset\widetilde{\mathbf{P}}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} R_{\widetilde{\mathbf{T}}_1}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\theta}_1) = 0,$$

ce qui montre la cuspidalité de $\rho_{\widetilde{s}}$. □

16.B. Groupe d'inertie. — Notons $\widetilde{\mathbf{L}}_s$ (respectivement $\widetilde{\mathbf{L}}_s^*$) le sous-groupe de Levi F-stable (respectivement F^*-stable) $\widetilde{\mathbf{G}}$-déployé (respectivement $\widetilde{\mathbf{G}}^*$-déployé) contenant $\widetilde{\mathbf{T}}_1$ (respectivement $\widetilde{\mathbf{T}}_1^*$) et minimal pour ces propriétés (voir remarque **2.4**). Alors, $\widetilde{\mathbf{L}}_s$ et $\widetilde{\mathbf{L}}_s^*$ sont duaux. On pose $\mathbf{L}_s = \widetilde{\mathbf{L}}_s \cap \mathbf{G}$ et $\mathbf{L}_s^* = i^*(\widetilde{\mathbf{L}}_s^*)$. Soit $\widetilde{\mathbf{P}}_s$ un sous-groupe parabolique F-stable de $\widetilde{\mathbf{G}}$ dont $\widetilde{\mathbf{L}}_s$ soit un complément de Levi. On pose $\mathbf{P}_s = \widetilde{\mathbf{P}}_s \cap \mathbf{G}$. En appliquant le corollaire **2.3** au groupe $C_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s})$, on obtient que $C_{\widetilde{\mathbf{L}}_s^*}(\widetilde{s}) = \widetilde{\mathbf{T}}_1^*$. Donc, d'après le lemme **16.1**, $\rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s}$ est un caractère irréductible cuspidal de $\widetilde{\mathbf{L}}_s^F$. Donc, d'après le corollaire **12.1**, les caractères irréductibles $\rho_{s,\xi}^{\mathbf{L}_s}$ de $\mathbf{L}_s^F$ sont cuspidaux pour tout $\xi \in (A_{\mathbf{L}_s^*}(s)^{F^*})^\wedge$. Le groupe W^{ϕ_1} stabilise $\mathrm{Ker}(F^* - q^{1/\delta}, Y(\mathbf{T}_1^*) \otimes \mathbb{Q}(q^{1/\delta}))$ donc il normalise $\mathbf{L}^*$. On a en fait le résultat plus précis suivant :

Proposition 16.2. — *Le groupe* $W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s})$ *est canoniquement isomorphe à* $W(s)^{F^*}$.

Démonstration. — On a

$$\rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s} = \pm R_{\widetilde{\mathbf{T}}_1}^{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\theta}_1).$$

Le groupe $W(s)^{F^*}$ est isomorphe à $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ et le groupe $W(\widetilde{s})^{F^*}$ est isomorphe à $W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\theta}_1)$. De plus, puisque $C_{\widetilde{\mathbf{L}}_s^*}(\widetilde{s}) = \widetilde{\mathbf{T}}_1^*$, on a $W_{\mathbf{L}_s^F}(\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\theta}_1) = \{1\}$.

Le groupe $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ normalise $\mathbf{L}_s$. Soit $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$. Notons τ_w le caractère linéaire ${}^w\widetilde{\theta}_1.\widetilde{\theta}_1^{-1}$ de $\widetilde{\mathbf{T}}_1^F/\mathbf{T}_1^F \simeq \widetilde{\mathbf{L}}^F/\mathbf{L}^F$. Alors

$$^w\rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s} = \rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s} \otimes \tau_w.$$

Donc, si on note $\bar{w}$ l'image de w dans $W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}})$, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1) & \longrightarrow & W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s}) \\ & w & \longmapsto & (\bar{w}, \tau_w) \end{array}$$

est un morphisme de groupes bien défini.

Montrons d'abord que α est injective. Soit $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ tel que $\alpha(w) = 1$. Alors $\tau_w = 1$ donc $w \in W_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\theta}_1)$. Mais $\bar{w} = 1$ donc $w \in W_{\mathbf{L}_s^F}(\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\theta}_1)$ c'est-à-dire $w = 1$.

Il reste à montrer que α est surjective. Soit $(w, \tau) \in W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s})$. Notons $\dot{w}$ un représentant de w dans $N_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}_s)$. On a

$$R_{{}^{\dot{w}}\widetilde{\mathbf{T}}_1}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s}({}^{\dot{w}}\widetilde{\theta}_1) = R_{\widetilde{\mathbf{T}}_1}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s}(\widetilde{\theta}_1 \otimes \tau)$$

donc il résulte de la formule de Mackey (théorème **10.12** (2)) qu'il existe $l \in \mathbf{L}^F$ tel que $({}^{\dot{w}}\widetilde{\mathbf{T}}_1, {}^{\dot{w}}\widetilde{\theta}_1) = ({}^{l}\widetilde{\mathbf{T}}_1, {}^{l}(\widetilde{\theta}_1 \otimes \tau))$. Soit $\dot{w}_+ = l^{-1}\dot{w}$. Alors $\dot{w}_+ \in N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$ et, si on note w_+ son image dans $W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)$, alors $\alpha(w_+) = (w, \tau)$. □

Soit $W_{\mathbf{L}_s}(s)$ le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{L}_s^*}(s)$ relativement à $\mathbf{T}_1^*$. On a $W_{\mathbf{L}_s}(s) = A_{\mathbf{L}_s^*}(s)$ car $C^\circ_{\mathbf{L}_s^*}(s) = i^*(C_{\widetilde{\mathbf{L}}_s^*}(\widetilde{s})) = \mathbf{T}_1^*$. Donc $A_{\mathbf{L}_s^*}(s)$ est un sous-groupe F^*-stable de $W(s)$.

Proposition 16.3

(a) $A_{\mathbf{L}_s^*}(s)^{F^*}$ *est contenu dans* $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$.

(b) $A_{\mathbf{L}_s^*}(s)^{F^*}$ *est central dans* $W(s)^{F^*}$.

(c) $\widetilde{\mathbf{G}}^F(s) = \mathbf{G}^F.\widetilde{\mathbf{L}}_s^F(\mathbf{G}, \rho_{s,1}^{\mathbf{L}_s})$.

(d) $\rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \in \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, \widetilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s})$.

Démonstration. — (a) découle de la proposition **8.7** (b). (b) résulte du fait que $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est abélien, de (a) et de la proposition **8.7** (c). Montrons (c). Reprenons les notations de la preuve de la proposition **16.2** et voyons τ_w comme un caractère linéaire de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$. Par définition de $\widetilde{\mathbf{L}}_s^F(\mathbf{G}, \rho_{s,1}^{\mathbf{L}_s})$, on a $\mathbf{G}^F.\widetilde{\mathbf{L}}_s^F(\mathbf{G}, \rho_{s,1}^{\mathbf{L}_s}) = \cap_{w \in W_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_1, \theta_1)} \operatorname{Ker} \tau_w$. Mais, par la commutativité du diagramme **6.4**, τ_w est égal à $\widehat{\omega_s^0(a_w)}^{\widetilde{\mathbf{G}}}$, où a_w désigne l'image de w dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Le résultat découle alors de la définition de $\widetilde{\mathbf{G}}^F(s)$. (d) découle de l'égalité

$$\langle R_{\widetilde{\mathbf{L}}_s \subset \widetilde{\mathbf{P}}_s}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s}, \rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{G}}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = 1,$$

qui a été montrée dans le corollaire **15.12**. □

Remarque 16.4. — Le sous-groupe $A_{\mathbf{L}_s^*}(s)^{F^*}$ de $W(s)^{F^*} \simeq W'_{\mathbf{G}^F}(\widetilde{\mathbf{L}}, \rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}})$ est isomorphe au sous-groupe central $(\widetilde{\mathbf{L}}^F/\widetilde{\mathbf{L}}^F(\rho_{\widetilde{s}}))^\wedge$ défini dans le §12.D.

16.C. La série $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}_s, \rho_s^{\mathbf{L}_s})$. — D'après le théorème **13.12** (a) et d'après la proposition **16.2** on obtient des bijections

$$\textbf{(16.5)} \qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W(\widetilde{s})^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, \widetilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s}) \\ \chi & \longmapsto & \widetilde{R}_\chi[\widetilde{s}] \end{array}$$

et

$$\textbf{(16.6)} \qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}_s, \rho_s^{\mathbf{L}_s}) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta[s] \end{array}.$$

D'après [**Lus84a**, chapitre 8], la bijection **16.5** est bien définie une fois fixée la convention suivante :

$$\textbf{(16.7)} \qquad \widetilde{R}_1[\widetilde{s}] = \rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{G}}}$$

et, par la remarque **13.14** (b), la bijection **16.6** est bien définie une fois fixée la convention suivante :

$$\textbf{(16.8)} \qquad R_1[s] = \rho_{s,1}^{\mathbf{G}}.$$

S'il y a ambiguïté, nous noterons $R_\eta^{\mathbf{G}}[s]$ le caractère irréductible $R_\eta[s]$ de $\mathbf{G}^F$ ($\eta \in \operatorname{Irr} W(s)^{F^*}$) et par $R_\chi^{\widetilde{\mathbf{G}}}[\widetilde{s}]$ le caractère irréductible $\widetilde{R}_\chi[\widetilde{s}]$ de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ ($\chi \in \operatorname{Irr} W(\widetilde{s})^{F^*}$).

Remarque 16.9. — D'après le théorème **11.10**, on a

$$\mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, \widetilde{\mathbf{L}}_s, \rho_{\widetilde{s}}^{\widetilde{\mathbf{L}}_s}) \subset \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}])$$

et
$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}_s, \rho_s^{\mathbf{L}_s}) \subset \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]).$$

Grâce aux théorèmes **13.12** et **13.16**, on obtient :

Théorème 16.10

(a) *Si η et χ sont des caractères irréductibles de $W(s)^{F^*}$ et $W(\widetilde{s})^{F^*}$ respectivement, alors*

$$\langle R_\eta[s], \operatorname{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \widetilde{R}_\chi[\widetilde{s}] \rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \operatorname{Res}_{W(\widetilde{s})^{F^*}}^{W(s)^{F^*}} \eta, \chi \rangle_{W(\widetilde{s})^{F^*}}.$$

(b) *Si $\eta \in \operatorname{Irr} W(s)^{F^*}$ et $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$, alors*

$$^{g_\xi}R_\eta[s] = R_{\eta\otimes\xi}[s].$$

(c) *Soit $\mathbf{L}$ un complément de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{L}_s$. Fixons un sous-groupe de Levi F^*-stable $\mathbf{L}^*$ d'un sous-groupe parabolique F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ contenant $\mathbf{L}_s^*$ et tel que la $\mathbf{L}^F$-classe de conjugaison de $\mathbf{L}_s$ soit associée à la $\mathbf{L}^{*F^*}$-classe de conjugaison de $\mathbf{L}_s^*$. Notons $W_{\mathbf{L}}(s)$ le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{L}^*}(s)$ relativement à $\mathbf{T}_1^*$. Alors*

$$\langle R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} R_\eta^{\mathbf{L}}[s], R_\zeta^{\mathbf{G}}[s] \rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}}^{W(s)^{F^*}} \eta, \zeta \rangle_{W(s)^{F^*}}$$

pour tous caractères irréductibles η et ζ de $W_{\mathbf{L}}(s)^{F^*}$ et $W(s)^{F^*}$ respectivement.

Remarquons que l'assertion (c) du théorème précédent **16.10** utilise le corollaire **15.12**.

17. Caractères semi-simples et fonctions absolument cuspidales

17.A. Un exemple de fonction absolument cuspidale. — Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, on pose

$$\dot{\rho}_{s,a} = \dot{\rho}_{s,a}^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} \sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge} \xi(a)^{-1} \rho_{s,\xi}.$$

Il est facile de retrouver les caractères irréductibles $\rho_{s,\xi}$ comme combinaisons linéaires des $\dot{\rho}_{s,a}$. En effet, si $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$, on a

$$\rho_{s,\xi} = \frac{\varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \sum_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \xi(a) \dot{\rho}_{s,a}. \tag{17.1}$$

Par ailleurs, il résulte du corollaire **15.14** que

$$\dot{\rho}_{s,a} \in \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a). \tag{17.2}$$

Si a et b sont deux éléments de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, un calcul élémentaire montre que

$$\langle \dot{\rho}_{s,a}, \dot{\rho}_{s,b} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \begin{cases} |A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}| & \text{si } a = b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{17.3}$$

D'après l'exemple **10.6**, on a :

Proposition 17.4. — *Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ est tel que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\text{cus}}(\mathbf{G})$, alors $\dot{\rho}_{s,a}$ est une fonction absolument cuspidale.*

17.B. Restriction de Lusztig. — Nous travaillerons sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse. — *Nous supposerons jusqu'à la fin de ce chapitre que p est bon pour $\mathbf{G}$.*

Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}^*$ un sous-groupe de Levi F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{L}$. L'hypothèse entraîne que l'application $\operatorname{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ entre ensemble de classes unipotentes régulières est bien définie (voir §14.E). En particulier, le caractère de Gelfand-Graev $\Gamma^{\mathbf{L}}$ est lui aussi bien défini. Nous allons ici donner une formule pour la restriction de Lusztig des caractères $\rho_{s,\xi}^{\mathbf{G}}$.

Proposition 17.5. — *Supposons que la formule de Mackey et la conjecture $(\mathfrak{G})$ ont lieu dans $\mathbf{G}$. Soit $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$. Pour tout $t \in \mathbf{L}^{*F^*}$ tel qu'il existe $g \in \mathbf{G}^{*F^*}$ vérifiant ${}^g s = t$, on pose $\xi_t = \operatorname{Res}^{A_{\mathbf{G}^*}(t)^{F^*}}_{A_{\mathbf{L}^*}(t)^{F^*}} {}^g\xi$; le caractère linéaire ξ_t ne dépend pas du choix de g. Alors*

$${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \rho_{s,\xi}^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{\mathbf{L}} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} \sum_{[t]_{\mathbf{L}^{*F^*}} \subset [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{L}^*}(t)} \rho_{t,\xi_t}^{\mathbf{L}}$$

et

$${}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \chi_{s,\xi}^{\mathbf{G}} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{\mathbf{L}} \sum_{[t]_{\mathbf{L}^{*F^*}} \subset [s]_{\mathbf{G}^{*F^*}}} \chi_{t,\xi_t}^{\mathbf{L}}.$$

Remarque 17.6. — La proposition **17.5** généralise le corollaire **15.15** tout comme le théorème **14.11** généralisait le théorème **14.4**.

Corollaire 17.7. — *Supposons que la formule de Mackey et la conjecture* ($\mathfrak{G}$) *ont lieu dans* $\mathbf{G}$. *Soit* $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. *Pour tout* $t \in \mathbf{L}^{*F^*}$ *tel qu'il existe* $g \in \mathbf{G}^{*F^*}$ *vérifiant* ${}^g s = t$, *on note* a_t *l'élément* gag^{-1} *de* $A_{\mathbf{G}^*}(t)^{F^*}$; *l'élément* a_t *ne dépend pas du choix de* g. *Alors*

$$ {}^*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s,a}^{\mathbf{G}} = \sum_{\substack{[t]_{\mathbf{L}^*F^*} \subset [s]_{\mathbf{G}^*F^*} \\ a_t \in A_{\mathbf{L}^*}(t)^{F^*}}} \frac{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|}{|A_{\mathbf{L}^*}(t)^{F^*}|} \dot{\rho}_{t,a_t}^{\mathbf{L}}. $$

17.C. Combinaisons linéaires d'induits de caractères semi-simples. — Soit $w \in W(s)$. On fixe un élément $g_w \in \mathbf{G}^*$ tel que $g_w^{-1}F(g_w)$ normalise $\mathbf{T}_1^*$ et représente w. On pose alors $\mathbf{T}_w^* = {}^{g_w}\mathbf{T}_1^*$ et $s_w = g_w s g_w^{-1}$. D'après le théorème de Lang, on peut choisir g_w de sorte que $s_w = s_\alpha$, où α désigne la classe de w dans $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. C'est ce que nous ferons dans la suite. Il est à noter que le couple $(\mathbf{T}_w^*, s_w)$ est bien défini à $\mathbf{G}^{*F^*}$-conjugaison près par w (et même par la classe de w dans $H^1(F^*, W(s))$: en effet, le stabilisateur du couple $(\mathbf{T}_1^*, s)$ dans $\mathbf{G}^*$ est égal à l'image inverse de $W(s)$ dans $N_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{T}_1^*)$).

Fixons maintenant $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Alors le sous-groupe de Levi F^*-stable $\mathbf{L}_{s,a}^*$ a été défini dans §8.D. Si $w \in W(s)^a$, on pose $\mathbf{L}_{s,a,w}^* = {}^{g_w}\mathbf{L}_{s,a}^*$. Alors le couple $(\mathbf{L}_{s,a,w}^*, s_w)$ est bien défini à $\mathbf{G}^{*F^*}$-conjugaison près par w (et même par la classe de w dans $H^1(F^*, W(s)^a)$: en effet, le stabilisateur du couple $(\mathbf{L}_{s,a}^*, s)$ dans $\mathbf{G}^*$ est égal à l'image inverse de $W(s)^a$ dans $N_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{T}_1^*)$ d'après le corollaire **8.11** (e)). De plus, puisque $a \in A_{\mathbf{L}_{s,a}^*}(s)^{F^*}$ par construction, on en déduit que $a \in A_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}(s)^{F^*}$ pour tout $w \in W(s)^a$ (à travers le morphisme injectif naturel $A_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}(s) \hookrightarrow A_{\mathbf{G}^*}(s)$). Notons que

$$ \textbf{(17.8)} \qquad C^\circ_{\mathbf{L}_{s,a,w}^*}(s_w) = \mathbf{T}_w^* $$

(voir corollaire **8.11** (a)). Notons $\mathbf{L}_{s,a,w}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$ dual de $\mathbf{L}_{s,a,w}^*$. Alors le couple $(\mathbf{L}_{s,a,w}, \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}})$ est bien défini à $\mathbf{G}^F$-conjugaison près par w (et même par la classe de w dans $H^1(F^*, W(s)^a)$. Donc la fonction $R_{\mathbf{L}_{s,a,w}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}$ est bien définie : nous la noterons $\mathcal{R}_{s,a,w}$. Elle appartient à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$. Si α désigne la classe de w dans $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$, alors, d'après le théorème **11.10** et **17.2**, on a

$$ \textbf{(17.9)} \qquad \mathcal{R}_{s,a,w} \in \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s_\alpha], a). $$

Si $f \in \mathrm{Cent}(W(s)^a \phi_1)$, on pose :

$$ \mathcal{R}(s,a)_f = \frac{1}{|W(s)^a|} \sum_{w \in W(s)^a} f(w\phi_1) \mathcal{R}_{s,a,w}. $$

D'après **17.9**, cela nous définit une application linéaire $\mathcal{R}(s,a) = \mathcal{R}(s,a)^{\mathbf{G}}$: $\mathrm{Cent}(W(s)^a\phi_1) \to \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$. S'il est nécessaire de préciser le groupe ambiant, nous noterons $\mathcal{R}_{s,a,w}^{\mathbf{G}}$ la fonction $\mathcal{R}_{s,a,w}$ et $\mathcal{R}(s,a)_f^{\mathbf{G}}$ la fonction $\mathcal{R}(s,a)_f$.

Remarque 17.10. — Si $\tau \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$, nous identifierons τ à une fonction centrale sur $W(s)^a\phi_1$ de la façon suivante : si $w \in W(s)^a$, l'image de $w\phi_1$ par cette fonction centrale est égale à $\tau(\bar{w})$, où $\bar{w}$ est l'image de w à travers la suite de morphismes $W(s)^a \to A_{\mathbf{G}^*}(s) \to H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. Avec cette notation, on a, pour tout $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ et pour tout $f \in \mathrm{Cent}(W(s)^a\phi_1)$,

$$t_z^{\mathbf{G}}\mathcal{R}(s,a)_f = \hat{s}(z)\mathcal{R}(s,a)_{f\hat{\omega}_s^1(\bar{z})}.$$

Ici, $\bar{z}$ désigne l'image de z dans $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F$. Pour montrer cela, il suffit de remarquer que, d'après le lemme **9.14** et d'après la remarque **11.1** (d), on a

$$t_z^{\mathbf{G}}\mathcal{R}_{s,a,w} = \hat{s}(z)\hat{\omega}_s^1(\bar{z})(\bar{w})\mathcal{R}_{s,a,w}$$

pour tout $w \in W(s)^a$.

Proposition 17.11. — *Supposons que la formule de Mackey a lieu dans* $\mathbf{G}$. *Soit* $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ *et soient* w *et* w' *deux éléments de* $W(s)^a$. *Alors*

$$\langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'}\rangle_{\mathbf{G}^F} = \begin{cases} |C_{W(s)^a}(w\phi_1)| & \textit{si } w\phi_1 \textit{ et } w'\phi_1 \textit{ sont conjugués sous } W(s)^a, \\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. — D'après la formule de Mackey, et compte tenu de la proposition **17.4**, on a

$$\langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'}\rangle_{\mathbf{G}^F} = \sum_{n\in[\mathcal{N}_{w,w'}^F/\mathbf{L}_{s,a,w'}^F]} \langle \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}, {}^n\dot{\rho}_{s_{w'},a}^{\mathbf{L}_{s,a,w'}}\rangle_{\mathbf{L}_{s,a,w}^F},$$

où $\mathcal{N}_{w,w'} = \{n \in \mathbf{G} \mid \mathbf{L}_{s,a,w} = {}^n\mathbf{L}_{s,a,w'}\}$. D'autre part, on a une bijection naturelle entre $[\mathcal{N}_{w,w'}^F/\mathbf{L}_{s,a,w'}^F]$ et $[\mathcal{N}_{w,w'}^{*F^*}/\mathbf{L}_{s,a,w'}^{*F^*}]$ (où bien sûr $\mathcal{N}_{w,w'}^* = \{n \in \mathbf{G}^* \mid \mathbf{L}_{s,a,w}^* = {}^n\mathbf{L}_{s,a,w'}^*\}$) et, à travers cette bijection, on a

$$\langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'}\rangle_{\mathbf{G}^F} = \sum_{n\in[\mathcal{N}_{w,w'}^{*F^*}/\mathbf{L}_{s,a,w'}^{*F^*}]} \langle \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}, \dot{\rho}_{ns_{w'}n^{-1},a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}\rangle_{\mathbf{L}_{s,a,w}^F}.$$

En particulier, si les couples $(\mathbf{L}_{s,a,w}^*, s_w)$ et $(\mathbf{L}_{s,a,w'}^*, ns_{w'}n^{-1})$ ne sont pas conjugués sous $\mathbf{G}^{*F^*}$ (c'est-à-dire si $w\phi_1$ et $w'\phi_1$ ne sont pas conjugués sous $W(s)^a$), alors $\langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'}\rangle_{\mathbf{G}^F} = 0$. Nous pouvons donc supposer maintenant que $w = w'$. On a, dans ce cas,

$$\langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'}\rangle_{\mathbf{G}^F} = \sum_{n\in[N_{\mathbf{G}^{*F^*}}(\mathbf{L}_{s,a,w}^*)/\mathbf{L}_{s,a,w}^{*F^*}]} \langle \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}, \dot{\rho}_{ns_wn^{-1},a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}\rangle_{\mathbf{L}_{s,a,w}^F}.$$

Soit maintenant $n \in N_{\mathbf{G}^{*F^*}}(\mathbf{L}^*_{s,a,w})$. Posons $\beta_n = \langle \dot{\rho}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}_{s_w,a}, \dot{\rho}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}_{ns_wn^{-1},a} \rangle_{\mathbf{L}^F_{s,a,w}}$. Si s_w et ns_wn^{-1} ne sont pas $\mathbf{L}^{*F^*}_{s,a,w}$-conjugués, alors $\beta_n = 0$. Si s_w et ns_wn^{-1} sont $\mathbf{L}^{*F^*}_{s,a,w}$-conjugués, alors il existe un représentant de la classe de n dans $N_{\mathbf{G}^{*F^*}}(\mathbf{L}^*_{s,a,w})/\mathbf{L}^{*F^*}_{s,a,w}$ qui centralise s_w et alors $\beta_n = |A_{\mathbf{L}^*_{s,a,w}}(s_w)^{F^*}|$. Par suite,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}_{s,a,w}, \mathcal{R}_{s,a,w'} \rangle_{\mathbf{G}^F} &= |A_{\mathbf{L}^*_{s,a,w}}(s_w)^{F^*}| \\ &\qquad \times \big| \big(N_{\mathbf{G}^{*F^*}}(\mathbf{L}^*_{s,a,w}) \cap C_{\mathbf{G}^*}(s_w)^{F^*}\big)/C_{\mathbf{L}^*_{s,a,w}}(s_w)^{F^*} \big| \\ &= \big| \big(N_{\mathbf{G}^{*F^*}}(\mathbf{L}^*_{s,a,w}) \cap C_{\mathbf{G}^*}(s_w)^{F^*}\big)/C^\circ_{\mathbf{L}^*_{s,a,w}}(s_w)^{F^*} \big|.\end{aligned}$$

Or, $C^\circ_{\mathbf{L}^*_{s,a,w}}(s_w) = \mathbf{T}^*_w$ et, d'après le corollaire **8.11** (e), on a $\big(N_{\mathbf{G}^*}(\mathbf{L}^*_{s,a}) \cap C_{\mathbf{G}^*}(s)\big)/\mathbf{T}^*_1 \simeq W(s)^a$. D'où le résultat. □

Corollaire 17.12. — *Supposons que la formule de Mackey a lieu dans* $\mathbf{G}$. *Alors l'application* $\mathcal{R}(s,a) : \mathrm{Cent}(W(s)^a\phi_1) \to \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$ *est une isométrie.*

17.D. Induction de Lusztig. — Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}^*$ un sous-groupe de Levi F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{L}$. On suppose que $\mathbf{L}^*$ contient un élément $s' \in \mathbf{L}^{*F^*}$ géométriquement conjugué à s. Le but de cette section est de décrire l'action de l'induction de Lusztig $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}$ sur l'image de $\mathcal{R}(s',a)^{\mathbf{L}}$, pour $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s')^{F^*}$. Le résultat décrit cette action en termes d'une induction tordue entre les groupes $W_{\mathbf{L}}(s')$ et $W(s)$. Avant d'exprimer ce résultat, nous avons besoin de comparer ces deux groupes. On fixe un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}^*$ de $\mathbf{G}^*$ dont $\mathbf{L}^*$ est un sous-groupe de Levi et on note $\mathbf{V}^*$ le radical unipotent de $\mathbf{P}^*$.

Fixons tout d'abord un élément $g \in \mathbf{G}^*$ tel que $gsg^{-1} = s'$. Soit $\mathbf{B}^*_{\mathbf{L}}$ un sous-groupe de Borel F^*-stable de $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s')$ et soit $\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}}$ un tore maximal F^*-stable de $\mathbf{B}^*_{\mathbf{L}}$. Alors ${}^{g^{-1}}(\mathbf{B}^*_{\mathbf{L}} C_{\mathbf{V}^*}(s'))$ est un sous-groupe de Borel de $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ et ${}^{g^{-1}}\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}}$ est un tore maximal de ${}^{g^{-1}}(\mathbf{B}^*_{\mathbf{L}} C_{\mathbf{V}^*}(s'))$. Donc il existe $h \in C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ tel que

$$(\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}}, \mathbf{B}^*_{\mathbf{L}} C_{\mathbf{V}^*}(s')) = {}^{gh}(\mathbf{T}^*_1, \mathbf{B}^*_1).$$

Notons que $(gh)s(gh)^{-1} = s'$. Par suite, $(gh)^{-1}F^*(gh)$ normalise $\mathbf{T}^*_1$ et centralise s : on note $w_{\mathbf{L}}$ sa classe dans $W(s)$. Puisque le couple $(\mathbf{T}^*_{\mathbf{L}}, \mathbf{B}^*_{\mathbf{L}})$ est bien défini à conjugaison près par un élément de $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s')^{F^*}$, l'élément $w_{\mathbf{L}}$ est bien défini par le couple $(\mathbf{L}^*, s')$. En particulier, si on identifie $A_{\mathbf{L}^*}(s')$ avec le sous-groupe correspondant de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ (via la conjugaison par gh), alors $w_{\mathbf{L}}$ commute avec $A_{\mathbf{L}^*}(s')$. D'autre part, via la conjugaison par gh, nous verrons $W_{\mathbf{L}}(s')$ et $W^\circ_{\mathbf{L}}(s')$ comme des sous-groupes $w_{\mathbf{L}}F^*$-stables de $W(s)$ et $W^\circ(s)$ respectivement.

Proposition 17.13. — *Soit $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s')^{F^*}$ et identifions a avec un élément de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ comme ci-dessus. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cent}(W_{\mathbf{L}}(s')^a w_{\mathbf{L}}\phi_1) \arrow[r, "\mathcal{R}(s',a)^{\mathbf{L}}"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s')^a w_{\mathbf{L}}\phi_1}^{W(s)^a\phi_1}"'] & \mathrm{Cent}(\mathbf{L}^F,(s'),a) \arrow[d, "R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}"] \\
\mathrm{Cent}(W(s)^a\phi_1) \arrow[r, "\mathcal{R}(s,a)^{\mathbf{G}}"] & \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,(s),a)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. — Si $w \in W_{\mathbf{L}}(s')^a$ (vu comme un sous-groupe de $W(s)^a$), nous fixons un élément $l_w \in \mathbf{L}^{*F^*}$ tel que $l_w^{-1}F^*(l_w)$ appartienne au normalisateur de $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^*$ et représente $(gh)w(gh)^{-1}$. On a $\mathbf{T}_{\mathbf{L}}^* = (gh)\mathbf{T}_1^*(gh)^{-1}$ et remarquons que $(l_w gh)^{-1}F^*(l_w gh)$ normalise $\mathbf{T}_1^*$ et représente $ww_{\mathbf{L}}$. La proposition découle alors facilement de cette observation, de la transitivité de l'induction et de [**Bon99a**, lemme 3.1.1]. □

17.E. Transformés de Fourier de caractères semi-simples. — Si A est un groupe abélien fini et si φ est un automorphisme de A, on note $\mathcal{M}(A,\varphi)$ le groupe $(A^\varphi)^\wedge \times H^1(\varphi, A)$. Son dual $\mathcal{M}(A,\varphi)^\wedge$ est égal à $A^\varphi \times H^1(\varphi,A)^\wedge$. Si $(a,\tau) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)^\wedge$, on pose

$$\hat{\rho}_{s,a,\tau} = \hat{\rho}_{s,a,\tau}^{\mathbf{G}} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \sum_{(\xi,\alpha)\in\mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s),F^*)} \tau(\alpha)\xi(a)^{-1}\rho_{s_\alpha,\xi}.$$

Ici, nous avons identifié le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s_\alpha)$ avec le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ (via la conjugaison par l'élément g_α tel que $g_\alpha s g_\alpha^{-1} = s_\alpha$) : cette identification ne change pas l'action du morphisme de Frobenius car $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est abélien. Si $(\xi,\alpha) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)$, alors

$$\rho_{s_\alpha,\xi} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \sum_{(a,\tau)\in\mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s),F^*)^\wedge} \tau(\alpha)^{-1}\xi(a)\hat{\rho}_{s,a,\tau}. \tag{17.14}$$

Proposition 17.15. — *Soient (a,τ) et (a',τ') deux éléments de $\mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s),F^*)^\wedge$. Alors :*

(a) $\hat{\rho}_{s,a,\tau} \in \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,(s),a)$.

(b) $\displaystyle \hat{\rho}_{s,a,\tau} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \sum_{\alpha\in H^1(F^*,A_{\mathbf{G}^*}(s))} \tau(\alpha)\dot{\rho}_{s_\alpha,a}$.

(c) $\langle \hat{\rho}_{s,a,\tau}, \hat{\rho}_{s,a',\tau'}\rangle_{\mathbf{G}^F} = \begin{cases} 1 & \textit{si } (a,\tau)=(a',\tau'), \\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$

(d) *Si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$, alors $t_z^{\mathbf{G}}\hat{\rho}_{s,a,\tau} = \hat{s}(z)\hat{\rho}_{s,a,\tau\hat{\omega}_s^1(\bar{z})}$.*

(e) *Si la formule de Mackey et la conjecture $(\mathfrak{G})$ ont lieu dans $\mathbf{G}$, alors*

$$\hat{\rho}_{s,a,\tau} = \mathcal{R}(s,a)_\tau.$$

Ici, τ est vu comme la fonction centrale sur $W(s)^a\phi_1$ qui envoie $w\phi_1$ sur $\tau(\bar{w})$, où $\bar{w}$ désigne l'image de w dans $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$.

Démonstration. — (a), (b) et (c) sont évidents. (d) se montre de la même manière que la première égalité de la remarque **17.10**. Montrons (e). Tout d'abord, d'après (a) et le corollaire **17.12**, on a $\langle \hat{\rho}_{s,a,\tau}, \hat{\rho}_{s,a,\tau}\rangle_{\mathbf{G}^F} = \langle \mathcal{R}(s,a)_\tau, \mathcal{R}(s,a)_\tau\rangle_{\mathbf{G}^F} = 1$. Il nous reste à montrer que

$$(*) \qquad \langle \hat{\rho}_{s,a,\tau}, \mathcal{R}(s,a)_\tau\rangle_{\mathbf{G}^F} = 1.$$

Soit $w \in W(s)^a$ et notons α la classe de w dans $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. Pour montrer $(*)$, il suffit de montrer que

$$(**) \qquad \big\langle \hat{\rho}_{s,a,\tau}, \tau(\alpha) R_{\mathbf{L}_{s,a,w}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}\big\rangle_{\mathbf{G}^F} = 1.$$

Mais, d'après (b), d'après **17.9** et d'après le théorème **11.10**, on a, par adjonction,

$$\big\langle \hat{\rho}_{s,a,\tau}, \tau(\alpha) R_{\mathbf{L}_{s,a,w}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}\big\rangle_{\mathbf{G}^F} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|}\big\langle \tau(\alpha)^* R_{\mathbf{L}_{s,a,w}}^{\mathbf{G}} \rho_{s_\alpha,a}, \tau(\alpha)\dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}\big\rangle_{\mathbf{G}^F}.$$

Par suite, d'après **17.3** et le corollaire **17.7**, on a

$$\big\langle \hat{\rho}_{s,a,\tau}, \tau(\alpha) R_{\mathbf{L}_{s,a,w}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s_w,a}^{\mathbf{L}_{s,a,w}}\big\rangle_{\mathbf{G}^F} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|} \times \frac{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|}{|A_{\mathbf{L}^*_{s,a,w}}(s_w)^{F^*}|} \times |A_{\mathbf{L}^*_{s,a,w}}(s_w)^{F^*}| = 1,$$

ce qui montre $(**)$. □

Exemple 17.16. — Supposons dans cet exemple, et uniquement dans cet exemple, que $a = 1$. Nous poserons alors $\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}(s,1)$. D'autre part, $\mathbf{L}^*_{s,1,w} = \mathbf{T}^*_w$. Si η est un caractère irréductible F^*-stable de $W(s)$ et si $\widetilde{\eta}$ est une extension de η à $W(s) \rtimes \langle\phi_1\rangle$, alors $\mathcal{R}(s)_{\widetilde{\eta}}$ est un *caractère fantôme* de $\mathbf{G}^F$. Tous les caractères fantômes de $\mathbf{G}^F$ ne sont pas obtenus ainsi.

17.F. Séries rationnelles. — Nous allons maintenant construire une isométrie $\mathcal{R}[s,a]$ de l'espace des fonctions centrales sur $W^\circ(s)^a\phi_1$ invariantes par l'action de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ vers $\mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$. Si $f \in \mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)$, on pose

$$\mathcal{R}[s,a]_f = \mathcal{R}[s,a]_f^{\mathbf{G}} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|.|W^\circ(s)^a|} \sum_{w \in W^\circ(s)^a} f(w\phi_1)\mathcal{R}_{s,a,w}.$$

D'après **17.9**, on a $\mathcal{R}_{s,a,w} \in \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$ pour tout $w \in W^\circ(s)^a$. On a donc défini une application $\mathcal{R}[s,a] = \mathcal{R}[s,a]^{\mathbf{G}} : \mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1) \to \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$ dont il est facile de vérifier que, si $f \in \mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)$ et $b \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, alors

$$(\mathbf{17.17}) \qquad \mathcal{R}[s,a]_f = \mathcal{R}[s,a]_{{}^b f}.$$

En particulier, l'image de $\mathcal{R}[s,a]$ est égale à l'image de sa restriction à $\big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$. Si f et g sont deux éléments de $\big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$, on pose

$$\langle f, g\rangle_{s,a} = \frac{\langle f, g\rangle_{W^\circ(s)^a\phi_1}}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|}.$$

Alors $\langle,\rangle_{s,a}$ est un produit scalaire sur $\big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$.

Proposition 17.18. — *Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Alors l'application*

$$\mathcal{R}[s,a] : \big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \longrightarrow \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,[s],a)$$

est une isométrie (pour les produits scalaires $\langle,\rangle_{s,a}$ et $\langle,\rangle_{\mathbf{G}^F}$).

Démonstration. — Si $f \in \mathrm{Cent}(W(s)^a\phi_1)$, on note $\mathrm{Res}^\circ_{s,a} f$ sa restriction à $W^\circ(s)^a\phi_1$. Il est alors immédiat que $\mathrm{Res}^\circ_{s,a} f$ est stable sous l'action de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Cela nous définit donc une application $\mathrm{Res}^\circ_{s,a} : \mathrm{Cent}(W(s)^a\phi_1) \to \big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$. Réciproquement, si $f \in \big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$, on pose, pour $w \in W^\circ(s)^a\phi_1$ et $b \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$,

$$(\mathrm{Ext}^\circ_{s,a} f)(wb\phi_1) = \begin{cases} f(cwc^{-1}\phi_1) & \text{si } b = c^{-1}F^*(c) \text{ pour un } c \in A_{\mathbf{G}^*}(s), \\ 0 & \text{si } b \neq c^{-1}F^*(c) \text{ pour tout } c \in A_{\mathbf{G}^*}(s). \end{cases}$$

Il est à noter que la première formule ne dépend pas du choix de c car f est invariante sous l'action de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Il est alors clair que $\mathrm{Ext}^\circ_{s,a} f \in \mathrm{Cent}(W(s)^a\phi_1)$. On a donc défini une application $\mathrm{Ext}^\circ_{s,a} : \big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \to \mathrm{Cent}(W(s)^a\phi_1)$. De plus,

$$\mathrm{Res}^\circ_{s,a} \circ \mathrm{Ext}^\circ_{s,a} = \mathrm{Id}_{(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1))^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}}. \tag{17.19}$$

D'autre part, $\mathrm{Ext}^\circ_{s,a}$ est une isométrie (pour les produits scalaires $\langle,\rangle_{s,a}$ et $\langle,\rangle_{W(s)^a\phi_1}$) et le diagramme

$$\begin{tikzcd} \big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \arrow[r, "\mathcal{R}[s,a]"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^\circ_{s,a}"'] & \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,[s],a) \arrow[d] \\ \mathrm{Cent}(W(s)^a\phi_1) \arrow[r, "\mathcal{R}(s,a)"] & \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,(s),a) \end{tikzcd} \tag{17.20}$$

est commutatif. Les applications $\mathcal{R}(s,a)$, $\mathrm{Ext}^\circ_{s,a}$ et l'injection $\mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,[s],a) \hookrightarrow \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,(s),a)$ étant des isométries, on en déduit que $\mathcal{R}[s,a]$ est une isométrie. □

Remarque 17.21. — Il était possible de démontrer directement en utilisant la proposition **17.11** que $\mathcal{R}[s,a]$ est une isométrie. Nous avons cependant voulu introduire les applications $\mathrm{Res}^\circ_{s,a}$ et $\mathrm{Ext}^\circ_{s,a}$ car elles nous seront utiles par la suite.

Proposition 17.22. — *Si la formule de Mackey et la conjecture ($\mathfrak{G}$) ont lieu dans $\mathbf{G}$, alors*

$$\mathcal{R}[s,a]_1 = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|}\dot{\rho}_{s,a}.$$

Ici, 1 est vu comme la fonction constante et égale à 1.

Démonstration. — Notons $\pi_{[s]} : \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F) \to \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$ la projection orthogonale. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cent}(W(s)^a\phi_1) \arrow[r, "\mathcal{R}(s,a)"] \arrow[d, "\mathrm{Res}^\circ_{s,a}"'] & \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a) \arrow[d, "\pi_{[s]}"] \\
\big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \arrow[r, "\mathcal{R}[s,a]"] & \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)
\end{tikzcd} \tag{17.23}$$

est commutatif. D'où $\mathcal{R}[s,a]_1 = \pi_{[s]}\mathcal{R}(s,a)_1$. Le résultat découle alors de la proposition **17.15** (e). □

Nous concluons ce chapitre par un résultat décrivant l'induction de Lusztig à travers les applications $\mathcal{R}[s,a]$. Soit donc $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}^*$ un sous-groupe de Levi F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{L}$. On suppose que $s \in \mathbf{L}^{*F^*}$. Reprenons les notations de §17.D (en remplaçant s' par s), de sorte que $W_{\mathbf{L}}(s)$ est vu comme un sous-groupe $w_{\mathbf{L}}F^*$-stable de $W(s)$. Remarquons aussi que, puisque $s' = s$, on a $w_{\mathbf{L}} \in W^\circ(s)$.

Proposition 17.24. — *Supposons que $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}$. Alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cent}(W^\circ_{\mathbf{L}}(s)^a w_{\mathbf{L}}\phi_1) \arrow[r, "|A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}|\mathcal{R}[s,a]^{\mathbf{L}}"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{W^\circ(s)^a\phi_1}_{W^\circ_{\mathbf{L}}(s)^a w_{\mathbf{L}}\phi_1}"'] & \mathrm{Cent}(\mathbf{L}^F, [s]) \arrow[d, "R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}"] \\
\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1) \arrow[r, "|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|\mathcal{R}[s,a]^{\mathbf{G}}"] & \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s]).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Le même argument que dans la preuve de la proposition **17.13** allié encore à [**Bon99a**, lemme 3.1.1] prouve immédiatement cette proposition. □

CHAPITRE 6

FAISCEAUX-CARACTÈRES

L'objet de ce chapitre est l'étude de l'influence de la non connexité du centre de $\mathbf{G}$ sur la théorie des faisceaux-caractères. Le centre de $\mathbf{G}$ agit sur les faisceaux-caractères de deux façons. La première est la trace de l'action par conjugaison : cette action induit une action sur chaque faisceau-caractère par multiplication par un caractère linéaire de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Le calcul de ce caractère linéaire est classique mais nous le rappelons ici (voir proposition **18.4**). La deuxième action est l'action par translation : le translaté d'un faisceau-caractère par un élément de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ est encore un faisceau-caractère. Cela induit une action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ par permutation de l'ensemble des (classes d'isomorphie de) faisceaux-caractères. Nous étudions cette action à travers le processus d'induction parabolique (voir théorème **19.4**). Nous en profitons pour tirer quelques conséquences de ce théorème sur le paramétrage ou sur les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères. À partir de la section 21, nous nous consacrons aux faisceaux-caractères apparaissant dans l'induit d'un faisceau-caractère cuspidal dont le support rencontre la classe unipotente régulière. Nous y établissons un paramétrage de tels faisceaux-caractères séries par séries et obtenons une formule pour leurs fonctions caractéristiques comme combinaisons linéaires d'induits de Lusztig de caractères semi-simples (voir théorème **22.5**). Comme conséquence, nous obtenons que la fonction caractéristique d'un faisceau-caractère, non nécessairement cuspidal, dont le support rencontre la classe unipotente régulière est une transformée de Fourier de caractères semi-simples (voir le corollaire **22.7**).

18. Action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur les faisceaux-caractères

Nous rappelons dans cette section comment sont construits les faisceaux-caractères avant d'étudier l'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$.

18.A. Systèmes locaux kummériens. — Fixons un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$ ainsi qu'un tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{B}$. Soit $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{B}$. Nous fixons aussi un tore maximal $\mathbf{T}^*$ de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{T}$. Nous identifierons le groupe de Weyl W de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}$ avec celui de $\mathbf{G}^*$ relativement à $\mathbf{T}^*$. Nous ferons aussi l'identification $X(\mathbf{T}) = Y(\mathbf{T}^*)$.

Notons $\mathcal{S}(\mathbf{T})$ l'ensemble des classes d'isomorphie de systèmes locaux kummériens sur $\mathbf{T}$. Le produit tensoriel munit $\mathcal{S}(\mathbf{T})$ d'une structure de groupe abélien. D'autre part, le groupe W agit naturellement sur $\mathcal{S}(\mathbf{T})$. Le choix des applications $\imath$, $\jmath$ et κ construites dans §1.B permet de construire un isomorphisme W-équivariant de groupes abéliens $\mathbf{T}^* \simeq \mathcal{S}(\mathbf{T})$, $s \mapsto \mathcal{L}_s$. Nous allons rappeler sa définition : si $s \in \mathbf{T}^*$, il existe $x \in X(\mathbf{T}) = Y(\mathbf{T}^*)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, premier à p, tels que $\tilde{\imath}_{\mathbf{T}^*}(x/n) = s$. On note $e_n : \mathbb{F}^\times \to \mathbb{F}^\times$, $z \mapsto z^n$. C'est un revêtement étale galoisien de groupe $\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F})$. Nous noterons $\mathcal{X}_n$ le système local sur $\mathbb{F}^\times$ associé à ce revêtement et au caractère linéaire $\kappa : \boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F}) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$. On a alors :

$$\mathcal{L}_s = x^* \mathcal{X}_n. \tag{18.1}$$

Ici, $x : \mathbf{T} \to \mathbb{F}^\times$ est seulement vu comme un morphisme de variétés.

18.B. Faisceaux-caractères. — Fixons maintenant un élément w de W et un représentant $\dot{w}$ de w dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$. Nous noterons $\pi_{\dot{w}} : \mathbf{B}w\mathbf{B} \to \mathbf{T}$ l'unique application telle que, si v et v' appartiennent à $\mathbf{U}$ et $t \in \mathbf{T}$, alors $\pi_{\dot{w}}(v\dot{w}tv') = t$. C'est un morphisme de variétés. Soient

$$\hat{\mathbf{Y}}_w = \{(g, h\mathbf{U}) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid h^{-1}gh \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}$$

et

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_w = \{(g, h\mathbf{B}) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \mid h^{-1}gh \in \mathbf{B}w\mathbf{B}\}.$$

Notons $\beta_w : \hat{\mathbf{Y}}_w \to \widetilde{\mathbf{Y}}_w$ l'application canonique. Posons

$$\begin{array}{rccc} \alpha_{\dot{w}} : & \hat{\mathbf{Y}}_w & \longrightarrow & \mathbf{T} \\ & (g, h\mathbf{U}) & \longmapsto & \pi_{\dot{w}}(h^{-1}gh) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \gamma_w : & \widetilde{\mathbf{Y}}_w & \longrightarrow & \mathbf{G} \\ & (g, h\mathbf{B}) & \longmapsto & g. \end{array}$$

Alors $\alpha_{\dot{w}}$, β_w et γ_w sont des morphismes de variétés bien définis. Nous avons donc construit un diagramme

$$\mathbf{T} \xleftarrow{\ \alpha_{\dot{w}}\ } \hat{\mathbf{Y}}_w \xrightarrow{\ \beta_w\ } \widetilde{\mathbf{Y}}_w \xrightarrow{\ \gamma_w\ } \mathbf{G}.$$

Le groupe $\mathbf{T}$ agit sur $\hat{\mathbf{Y}}_w$ de la façon suivante : si $t \in \mathbf{T}$ et si $(g, h\mathbf{U}) \in \hat{\mathbf{Y}}_w$, on pose

$$t * (g, h\mathbf{U}) = (g, ht^{-1}\mathbf{U}).$$

Alors β_w est une fibration principale de groupe $\mathbf{T}$. D'autre part, le groupe $\mathbf{T}$ agit sur $\mathbf{T}$ de la façon suivante : si t et t' appartiennent à $\mathbf{T}$, on pose

$$t *_w t' = \dot{w}^{-1} t \dot{w} t' t^{-1}.$$

Alors il est facile de vérifier que $\alpha_{\dot{w}}$ est $\mathbf{T}$-équivariante. De plus, le groupe $\mathbf{G}$ agit diagonalement sur $\hat{\mathbf{Y}}_w$ et $\widetilde{\mathbf{Y}}_w$ par conjugaison sur la première coordonnée et par translation à gauche sur la deuxième, et il agit sur $\mathbf{G}$ par conjugaison. Les morphismes β_w et γ_w sont alors $\mathbf{G}$-équivariants.

Soit $s \in \mathbf{T}^*$ et supposons que w vérifie $w(s) = s$. Alors, d'après [**Lus85**, 2.2.2], $\mathcal{L}_s$ est $\mathbf{T}$-équivariant pour l'action $*_w$. En particulier, $\alpha_{\dot{w}}^* \mathcal{L}_s$ est un système local $\mathbf{T}$-équivariant sur $\hat{\mathbf{Y}}_w$. Par suite, il existe un unique (à isomorphisme près) système local $\widetilde{\mathcal{L}}_{w,s}$ sur $\widetilde{\mathbf{Y}}_w$ tel que $\beta_w^* \widetilde{\mathcal{L}}_{w,s} \simeq \alpha_{\dot{w}}^* \mathcal{L}_s$. De plus, puisque $\alpha_{\dot{w}}^* \mathcal{L}_s$ est $\mathbf{G}$-équivariant, il en est de même de $\widetilde{\mathcal{L}}_{w,s}$. Posons :

$$K_{w,s} = K_{w,s}^{\mathbf{G}} = R(\gamma_w)_! \widetilde{\mathcal{L}}_{w,s}.$$

On rappelle qu'un faisceau pervers irréductible A sur $\mathbf{G}$ est appelé un *faisceau-caractère* s'il existe un triplet (s, w, i) où $s \in \mathbf{T}^*$ et $w \in W$ vérifient $w(s) = s$ et i est un entier relatif tels que A soit une composante du faisceau pervers ${}^pH^i(K_{w,s})$. Nous noterons $\mathrm{FCar}(\mathbf{G})$ l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux-caractères sur $\mathbf{G}$. Il est à noter que tout faisceau-caractère est $\mathbf{G}$-équivariant pour l'action par conjugaison.

Nous allons conclure cette sous-section par une construction explicite du système local $\widetilde{\mathcal{L}}_{w,s}$. Pour cela, écrivons $s = \tilde{\imath}_{\mathbf{T}^*}(x/n)$ comme précédemment. Dire que $w(s) = s$ équivaut à dire que $\lambda = w(x/n) - x/n \in X(\mathbf{T})$. En d'autres termes, $w(x) - x = n\lambda$, avec $\lambda \in X(\mathbf{T})$. Soit $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\lambda$ le fibré en droite associé à λ (il est obtenu en quotientant par $\mathbf{B}$ la variété $\mathbf{G} \times \mathbb{F}$, $\mathbf{B}$ agissant diagonalement sur $\mathbf{G} \times \mathbb{F}$ par translations à droite sur la première coordonnée et par le caractère $\widetilde{\lambda}$ sur la deuxième). Si $(g, z) \in \mathbf{G} \times \mathbb{F}$, nous noterons $g *_\lambda z$ sa classe dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\lambda$. Nous noterons $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\lambda^\times$ le complémentaire de la section nulle dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}_\lambda$. Posons alors

$$\hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n} = \big\{(g, h\mathbf{U}, z) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbb{F}^\times \mid h^{-1}gh \in \mathbf{B}w\mathbf{B} \text{ et } z^n = x(\pi_{\dot{w}}(h^{-1}gh))\big\}$$

et $$\widetilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n} = \big\{(g, h *_\lambda z) \in \mathbf{G} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}_\lambda^\times \mid h^{-1}gh \in \mathbf{B}w\mathbf{B} \text{ et } z^n = x(\pi_{\dot{w}}(h^{-1}gh))\big\}.$$

Il est facile de voir que les variétés $\hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ et $\widetilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ sont bien définies. Notons $\hat{f}_{w,x,n} : \hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n} \to \hat{\mathbf{Y}}_w$, $(g, h\mathbf{U}, z) \mapsto (g, h\mathbf{U})$ et $\widetilde{f}_{w,x,n} : \widetilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n} \to \widetilde{\mathbf{Y}}_w$, $(g, h *_\lambda z) \mapsto (g, h\mathbf{B})$. Posons aussi $\widetilde{\alpha}_{w,x,n} : \hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n} \to \mathbb{F}^\times$, $(g, h\mathbf{U}, z) \mapsto z$ et $\widetilde{\beta}_{w,x,n} : \hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n} \to \widetilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$, $(g, h\mathbf{U}, z) \mapsto (g, h *_\lambda z)$. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^\times \arrow[d, "e_n"'] & \hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n} \arrow[l, "\widetilde{\alpha}_{w,x,n}"'] \arrow[r, "\widetilde{\beta}_{w,x,n}"] \arrow[d, "\hat{f}_{w,x,n}"'] & \widetilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n} \arrow[d, "\widetilde{f}_{w,x,n}"'] & \\
\mathbb{F}^\times & \hat{\mathbf{Y}}_w \arrow[l, "x \circ \alpha_{\dot{w}}"'] \arrow[r, "\beta_w"] & \widetilde{\mathbf{Y}}_w \arrow[r, "\gamma_w"] & \mathbf{G}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. De plus, les carrés sont cartésiens et les morphismes $\hat{f}_{w,x,n}$ et $\widetilde{f}_{w,x,n}$ sont des revêtements galoisiens de groupe $\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F})$. Le lemme suivant est alors immédiat :

Lemme 18.2. — *$\widetilde{\mathcal{L}}_{w,s}$ est le système local sur $\widetilde{\mathbf{Y}}_w$ associé au revêtement étale $\widetilde{f}_{w,x,n}$ et au caractère linéaire $\kappa : \boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F}) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$.*

Remarque 18.3. — Le groupe $\mathbf{T}$ agit sur $\hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ comme suit : si $t \in \mathbf{T}$ et si $(g, h\mathbf{U}, z) \in \hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$, alors on pose

$$^{t}(g, h\mathbf{U}, z) = (g, ht^{-1}\mathbf{U}, \lambda(t)z).$$

Il est alors facile de voir que $\widetilde{f}_{w,x,n}$ est $\mathbf{T}$-équivariant et que $\widetilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ est le quotient de $\hat{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ par cette action de $\mathbf{T}$.

18.C. Action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. — Si A est un faisceau pervers irréductible $\mathbf{G}$-équivariant sur $\mathbf{G}$, l'action par conjugaison de $\mathbf{G}$ sur lui-même induit une action de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ sur A. Cette action se factorise par le groupe connexe $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$ et, puisque A est irréductible, cette action est donnée par un caractère linéaire $\zeta_A : \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$. La proposition suivante donne un moyen de calculer ce caractère linéaire lorsque A est un faisceau-caractère :

Proposition 18.4. — *Soit A un faisceau-caractère sur $\mathbf{G}$. Soient $s \in \mathbf{T}^*$, $w \in W$ et $i \in \mathbb{Z}$ tels que $w(s) = s$ et A soit une composante irréductible de ${}^pH^i(K_{w,s})$. Notons $\bar{w}$ l'image de w dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors*

$$\zeta_A = \omega_s(\bar{w}).$$

Démonstration. — Pour cela, il suffit de calculer l'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur $\widetilde{\mathcal{L}}_{w,s}$. En effet, l'action de $\mathbf{G}$ sur $\widetilde{\mathbf{Y}}_w$ induit une action trivale de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$, donc $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ agit sur le système local $\widetilde{\mathcal{L}}_{w,s}$ par multiplication par un caractère linéaire, qui ne peut être que ζ_A.

On utilise pour cela la description de $\widetilde{\mathcal{L}}_{w,s}$ donnée par le lemme **18.2** dont on reprend les notations (x, n, λ...). Le groupe $\mathbf{G}$ agit sur $\widetilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$ comme suit : si $\gamma \in \mathbf{G}$ et si $(g, h *_\lambda z) \in \widetilde{\mathbf{Y}}_{w,x,n}$, on pose

$$^{\gamma}(g, h *_\lambda z) = (\gamma g \gamma^{-1}, \gamma h *_\lambda z).$$

Alors $\widetilde{f}_{w,x,n}$ est $\mathbf{G}$-équivariant et il suffit de regarder comment agit $\gamma \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. On a, si $\gamma \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$,

$$^{\gamma}(g, h *_\lambda z) = (g, h *_\lambda \lambda(\gamma) z).$$

Or, on a $\lambda(\gamma)^n = x(w^{-1}(\gamma))x(\gamma)^{-1} = 1$ car γ est central, donc $\lambda(\gamma) \in \boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F})$. Par suite, γ agit sur $\widetilde{\mathcal{L}}_{w,s}$ par multiplication par $\kappa(\lambda(\gamma))$. Mais, par définition de ω_s, on a $\kappa(\lambda(\gamma)) = \omega_s(\bar{w})(\bar{\gamma})$, où $\bar{\gamma}$ désigne la classe de γ dans $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ (voir **4.9**). $\square$

18.D. Séries géométriques. — Soit s un élément semi-simple de $\mathbf{G}^*$. Nous noterons FCar$(\mathbf{G},(s))$ l'ensemble des (classes d'isomorphie de) faisceaux-caractères A sur $\mathbf{G}$ tels qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$, $t \in (s) \cap \mathbf{T}^*$ et $w \in W$ tels que $w(t) = t$ et A soit une composante de ${}^pH^i(K_{w,t})$.

Il résulte de [**Lus85**, proposition 11.2 (c)] que

$$\operatorname{FCar}(\mathbf{G}) = \coprod_{(s)} \operatorname{FCar}(\mathbf{G},(s)). \tag{18.5}$$

Bien sûr, les ensembles FCar$(\mathbf{G})$ et FCar$(\mathbf{G},(s))$ ne dépendent pas des choix de $\mathbf{T}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{T}^*$. Nous utiliserons à loisir cette souplesse en fonction des questions que nous aborderons.

Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$, notons FCar$(\mathbf{G},(s),a)$ l'ensemble des (classes d'isomorphie de) faisceaux-caractères A sur $\mathbf{G}$ tels qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$, $t \in (s) \cap \mathbf{T}^*$ et $w \in W$ tels que $w(t) = t$, $\bar{w} \sim a$ et A soit une composante de ${}^pH^i(K_{w,t})$. Ici, la notation $\bar{w} \sim a$ signifie que la classe $\bar{w}$ de w dans $A_{\mathbf{G}^*}(t) \simeq A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est égale à a, l'isomorphisme entre $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ et $A_{\mathbf{G}^*}(t)$ étant induit par un élément conjuguant s en t. La proposition **18.4** montre que

$$\operatorname{FCar}(\mathbf{G},(s)) = \coprod_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)} \operatorname{FCar}(\mathbf{G},(s),a) \tag{18.6}$$

et que

$$\operatorname{FCar}(\mathbf{G},(s),a) = \{A \in \operatorname{FCar}(\mathbf{G},(s)) \mid \zeta_A = \omega_s(a)\}. \tag{18.7}$$

19. Action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur FCar($\mathbf{G}$)

Si $s \in \mathbf{T}^*$ et $w \in W$ sont tels que $w(s) = s$ et si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$, alors $(t_z^{\mathbf{G}})^* K_{w,s} \simeq K_{w,s}$. Cela montre en particulier que, si $A \in \operatorname{FCar}(\mathbf{G},(s))$, alors

$$(t_z^{\mathbf{G}})^* A \in \operatorname{FCar}(\mathbf{G},(s)). \tag{19.1}$$

De plus, si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$, alors $(t_z^{\mathbf{G}})^* A \simeq A$. Cela nous définit donc une action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur l'ensemble FCar$(\mathbf{G})$ ainsi que sur toutes les séries géométriques FCar$(\mathbf{G},(s))$.

Le but de cette section est de décrire cette action via le processus d'induction des faisceaux-caractères. Nous nous restreindrons aux faisceaux-caractères apparaissant dans l'induit de faisceaux-caractères cuspidaux dont le support contient des éléments unipotents. Nous aurons pour cela besoin d'introduire des notions développées dans [**Bon04a**, partie I].

19.A. Notations. — Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$, soit $\mathbf{C}$ une classe unipotente et supposons que $\mathbf{C}$ supporte un système local cuspidal $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{L}$ un système local kummérien sur $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$. Posons $\mathcal{F} = \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{E}$. C'est un système local cuspidal sur $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ\mathbf{C}$. Rappelons que l'existence d'un système local cuspidal supporté par

$\mathbf{C}$ implique que $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ stabilise $\mathbf{C}$ et $\mathcal{E}$ et donc stabilise $\mathbf{\Sigma}$ et $\mathcal{F}$ (voir [**Lus84b**, théorème 9.2 (b)]).

Soient $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}_{\text{rég}} = \{z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ} \mid C^{\circ}_{\mathbf{G}}(z) = \mathbf{L}\}$ et $\mathbf{\Sigma}_{\text{rég}} = \mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}_{\text{rég}}\mathbf{C}$. On note $\mathcal{L}_{\text{rég}}$ la restriction de $\mathcal{L}$ à $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}_{\text{rég}}$ et $\mathcal{F}_{\text{rég}}$ la restriction de $\mathcal{F}$ à $\mathbf{\Sigma}_{\text{rég}}$. On a $\mathcal{F}_{\text{rég}} = \mathcal{L}_{\text{rég}} \boxtimes \mathcal{E}$. Posons $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})/\mathbf{L}$. Fixons maintenant $v \in \mathbf{C}$ et notons ζ le caractère irréductible du groupe $A_{\mathbf{L}}(v)$ associé à sa représentation sur $\mathcal{E}_v$ par monodromie. Fixons aussi $x \in X(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, premier à p, tels que $\mathcal{L} = x^*\mathcal{X}_n$.

Si $w \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$, alors $w \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ si et seulement si $w(x/n) - x/n \in X(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ})$. Dans ce cas, nous notons $\hat{w}$ la restriction de $w(x/n) - x/n$ à $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L})^{\circ}$. Alors il est facile de vérifier que $\hat{w}$ est trivial sur $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^{\circ}$, c'est-à-dire que $\hat{w} \in X(\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}})$. En composant avec κ, nous verrons $\hat{w}$ comme un élément de $(\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}})^{\wedge}$ (voir **1.8**). L'application

$$\begin{array}{rccc} \omega_{\mathcal{L}} : & W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) & \longrightarrow & (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}})^{\wedge} \\ & w & \longmapsto & \hat{w} \end{array}$$

est un morphisme de groupes ne dépendant que de $\mathcal{L}$ et non pas du choix de x et n. Nous noterons $W^{+}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ son noyau. Par dualité, on obtient une application surjective

$$\hat{\omega}_{\mathcal{L}} : \operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}} \longrightarrow (W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})/W^{+}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}))^{\wedge}.$$

19.B. Induction. — Soit $A = IC(\overline{\mathbf{\Sigma}}, \mathcal{F})[\dim \mathbf{\Sigma}]$. C'est un faisceau-caractère cuspidal sur $\mathbf{L}$. Nous allons rappeler ici la construction du faisceau pervers induit de A. Pour cela, posons

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{G} \times \mathbf{\Sigma}_{\text{rég}}, \qquad \widetilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{G} \times_{\mathbf{L}} \mathbf{\Sigma}_{\text{rég}} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = \bigcup_{g \in \mathbf{G}} g\mathbf{\Sigma}_{\text{rég}}g^{-1}.$$

Ici, $\mathbf{G} \times_{\mathbf{L}} \mathbf{\Sigma}_{\text{rég}}$ désigne le quotient de $\mathbf{G} \times \mathbf{\Sigma}_{\text{rég}}$ par l'action diagonale de $\mathbf{L}$ par translations à droite sur le premier facteur et par conjugaison sur le deuxième. Notons $\alpha : \hat{\mathbf{Y}} \to \mathbf{\Sigma}_{\text{rég}}$ la deuxième projection, $\beta : \hat{\mathbf{Y}} \to \widetilde{\mathbf{Y}}$ la projection canonique et $\pi : \widetilde{\mathbf{Y}} \to \mathbf{Y}$ l'application telle que $\pi \circ \beta(g, x) = gxg^{-1}$.

Alors $\mathbf{Y}$ est une sous-variété localement fermée lisse de $\mathbf{G}$, π est un revêtement étale galoisien de groupe $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathbf{\Sigma})$ et α et β sont des morphismes de variétés (voir [**Lus84b**, §3] ou [**Bon04a**, §1]). Il existe alors un système local $\widetilde{\mathcal{F}}_{\text{rég}}$ sur $\widetilde{\mathbf{Y}}$ tel que $\alpha^*\mathcal{F}_{\text{rég}} \simeq \beta^*\widetilde{\mathcal{F}}_{\text{rég}}$. Par conséquent, π étant un revêtement étale, $\pi_*\widetilde{\mathcal{F}}_{\text{rég}}$ est un système local sur $\mathbf{Y}$. On a alors [**Lus84b**, proposition 4.5]

$$\text{(19.2)} \qquad \operatorname{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A = IC\big(\overline{\mathbf{Y}}, \pi_*\widetilde{\mathcal{F}}_{\text{rég}}\big)[\dim \mathbf{Y}].$$

19.C. Algèbre d'endomorphismes. — Comme dans [**Bon04a**, §3], posons $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v) = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v)/C^{\circ}_{\mathbf{L}}(v)$ et $W^{\circ}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v) = (N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}) \cap C^{\circ}_{\mathbf{G}}(v))/C^{\circ}_{\mathbf{L}}(v)$. L'introduction du système local $\mathcal{L}$ nous conduit à considérer les sous-groupes $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L})/C^{\circ}_{\mathbf{L}}(v)$ et $W^{\circ}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) = (N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \cap C^{\circ}_{\mathbf{G}}(v))/C^{\circ}_{\mathbf{L}}(v)$.

Rappelons que $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},v) = W_{\mathbf{G}}^{\circ}(\mathbf{L},v) \times A_{\mathbf{L}}(v)$ (voir [**Bon04a**, 5.3]). D'autre part, $A_{\mathbf{L}}(v)$ stabilise $\mathcal{L}$, donc est contenu dans $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},v,\mathcal{L})$. Par suite

$$W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},v,\mathcal{L}) = W_{\mathbf{G}}^{\circ}(\mathbf{L},v,\mathcal{L}) \times A_{\mathbf{L}}(v). \tag{19.3}$$

Puisque $W_{\mathbf{G}}^{\circ}(\mathbf{L},v) \simeq W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$, on a $W_{\mathbf{G}}^{\circ}(\mathbf{L},v,\mathcal{L}) \simeq W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$. Par suite, si $w \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$, nous noterons $\dot{w}$ un représentant de w choisi dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L}) \cap C_{\mathbf{G}}^{\circ}(v)$.

Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre d'endomorphismes du faisceau pervers semi-simple $\operatorname{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A$. Nous allons construire, en suivant [**Lus84b**, proposition 3.5 et théorème 9.2] et [**Bon04a**, §5 et 6], un isomorphisme entre $\mathcal{A}$ et l'algèbre de groupe de $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L}) \simeq W_{\mathbf{G}}^{\circ}(\mathbf{L},\mathcal{L})$.

Soit $w \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$. Soit τ'_w l'isomorphisme $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (\operatorname{int}\dot{w})^*\mathcal{E}$ qui induit l'identité sur $\mathcal{E}_v$. Soit σ_w l'isomorphisme $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} (\operatorname{int}\dot{w})^*\mathcal{L}$ qui induit l'identité sur $\mathcal{L}_1$. Alors $\theta'_w = \sigma_w \boxtimes \tau'_w$ est un isomorphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} (\operatorname{int}\dot{w})^*\mathcal{F}$. Il lui correspond [**Lus84b**, §3.4] un automorphisme Θ'_w de $\operatorname{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A$.

Dans [**Bon04a**, corollaires 6.2 et 6.7] a été construit un caractère linéaire $\gamma_{\mathbf{L},v,\zeta}^{\mathbf{G}} : W_{\mathbf{G}}^{\circ}(\mathbf{L},v) \to \{1,-1\}$. Nous noterons $\tau_w = \gamma_{\mathbf{L},v,\zeta}(w)\tau'_w$, $\theta_w = \gamma_{\mathbf{L},v,\zeta}^{\mathbf{G}}(w)\theta'_w$ et $\Theta_w = \gamma_{\mathbf{L},v,\zeta}^{\mathbf{G}}(w)\Theta'_w$. Compte tenu des choix qui ont été faits, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & w & \longmapsto & \Theta_w \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Si η est un caractère irréductible de $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$, nous noterons K_η le faisceau-caractère, composant irréductible de $\operatorname{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A$, associé au caractère η grâce à l'isomorphisme de Lusztig Θ. En d'autres termes, $\operatorname{Hom}(K_\eta, \operatorname{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A)$ est un $\mathcal{A}$-module admettant η comme caractère. Notons que, si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$, alors $(t_z^{\mathbf{L}})^* A \simeq A$, donc $(t_z^{\mathbf{G}})^* \operatorname{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A \simeq \operatorname{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A$. Par suite, on obtient une action de $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}}$ sur $\{K_\eta \mid \eta \in \operatorname{Irr} W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})\}$, c'est-à-dire une action de $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}}$ sur $\operatorname{Irr} W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$. Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de cette section, à savoir la description de cette action.

Théorème 19.4. — *Soient $\eta \in \operatorname{Irr} W_{\mathbf{G}}^{\circ}(\mathbf{L},v,\mathcal{L})$ et soit $z \in \operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}}$. Notons $\dot{z}$ un représentant de z dans $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$. Alors*

$$(t_{\dot{z}}^{\mathbf{G}})^* K_\eta \simeq K_{\eta\hat{\omega}_{\mathcal{L}}(z)}.$$

Démonstration. — Nous reprenons ici les constructions de [**Bon04a**, §5 et 6], mais nous devons tenir compte du système local $\mathcal{L}$ (qui, dans [**Bon04a**], était supposé constant). Il nous faut donc les modifier légèrement en introduisant le revêtement étale de $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$ qui trivialise le système local $\mathcal{L}$.

Soit

$$\mathbf{Z}_{x,n} = \{(z,\xi) \in \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ \times \mathbb{F}^\times \mid x(z) = \xi^n\}.$$

Alors la permière projection $p_1 : \mathbf{Z}_{x,n} \to \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$ est un revêtement étale de groupe $\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F})$: le système local $\mathcal{L}$ est celui associé à ce revêtement et au caractère κ de $\boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F})$.

Notons $\mathbf{Z}_{x,n,\text{rég}}$ l'image inverse de $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ_{\text{rég}}$ dans $\mathbf{Z}_{x,n}$. Posons

$$\widetilde{\mathbf{Y}}'_{x,n} = \mathbf{G}/C^\circ_{\mathbf{L}}(v) \times \mathbf{Z}_{x,n,\text{rég}}.$$

Comme dans [**Bon04a**, §3.A], posons

$$\widetilde{\mathbf{Y}}' = \mathbf{G}/C^\circ_{\mathbf{L}}(v) \times \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ_{\text{rég}}$$

et notons $\widetilde{f} : \widetilde{\mathbf{Y}}' \to \widetilde{\mathbf{Y}}$ l'application naturelle. Soit $\widetilde{f}^+ : \widetilde{\mathbf{Y}}'_{x,n} \to \widetilde{\mathbf{Y}}$ l'application définie par composition de $\mathrm{Id}_{\mathbf{G}/C^\circ_{\mathbf{L}}(v)} \times p_1$. Notons $\pi^+ = \pi \circ \widetilde{f}^+$.

Le groupe $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) \times \boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F})$ agit à droite sur $\widetilde{\mathbf{Y}}'_{x,n}$ de la façon suivante : si $(w, \xi) \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) \times \boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F})$ et si $(gC^\circ_{\mathbf{L}}(v), z, \xi') \in \widetilde{\mathbf{Y}}'_{x,n}$, on note $\lambda_w = w(x/n) - x/n \in X(\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ)$ et on pose

$$(gC^\circ_{\mathbf{L}}(v), z, \xi') \cdot (w, \xi) = (g\dot{w}C^\circ_{\mathbf{L}}(v), \dot{w}^{-1}z\dot{w}, \lambda_w(z)\xi\xi').$$

Il est alors facile de vérifier, en utilisant [**Bon04a**, §3.A], que $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L}) \times \boldsymbol{\mu}_n(\mathbb{F})$ agit librement sur $\widetilde{\mathbf{Y}}'_{x,n}$.

Fixons maintenant $z \in \operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}}$ et notons $\dot{z}$ un représentant de z dans $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$. Soit $z_1 \in \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$ tel que $z_1^n = z$. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} t_1 : & \widetilde{\mathbf{Y}}'_{x,n} & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{Y}}'_{x,n} \\ & (gC^\circ_{\mathbf{L}}(v), z', \xi) & \longmapsto & (gC^\circ_{\mathbf{L}}(v), zz', x(z_1)\xi) \end{array}$$

est un automorphisme de variété vérifiant $\pi^+ \circ t_1 = t^{\mathbf{G}}_{\dot{z}} \circ \pi^+$. Le théorème **19.4** découle immédiatement de ces remarques et du fait que, si $w \in W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, v, \mathcal{L})$, alors

$$t_1^{-1}(t_1(gC^\circ_{\mathbf{L}}(v), z', \xi) \cdot w) = \big(g\dot{w}C^\circ_{\mathbf{L}}(v), \dot{w}^{-1}z'\dot{w}, \lambda_w(z_1^{-1}w^{-1}z_1w)\xi\big)$$

et $\kappa \circ \lambda_w(z_1^{-1}w^{-1}z_1w) = \omega_{\mathcal{L}}(w)(z) = \hat{\omega}_{\mathcal{L}}(z)(w)$. □

19.D. Un analogue du théorème 13.12 pour les faisceaux-caractères. — Posons

$$W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) = \{(w, \mu) \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \times \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge \mid \hat{\omega}_{\mathcal{L}}(w) = \operatorname{Res}^{\mathcal{Z}(\mathbf{G})}_{\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}}} \mu\}.$$

Alors l'application $W^+_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \to W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$, $w \mapsto (w, 1)$ est un morphisme de groupes injectif qui nous permettra d'identifier $W^+_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$ avec un sous-groupe de $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. De plus, l'application $\omega'_{\mathcal{L}} : W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$, $(w, \mu) \mapsto \mu$ est un morphisme de groupes dont le noyau est $W^+_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Nous noterons $\hat{\omega}'_{\mathcal{L}} : \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to (W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})/W^+_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}))^\wedge$ le morphisme dual.

D'autre part, l'application $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge \to W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$, $\mu \mapsto (1, \mu \circ h_{\mathbf{L}})$ est aussi un morphisme injectif de groupes : nous identifierons $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$ avec le sous-groupe correspondant de $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$. Alors l'application $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}) \to W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})$, $(w, \mu) \mapsto w$ est surjective et son noyau est $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$. En d'autres termes,

$$W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L})/\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge \simeq W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}, \mathcal{L}). \tag{19.5}$$

Pour finir, notons que $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$ est central dans $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L})$. Résumons tout ceci dans le diagramme suivant, dans lequel toutes les suites verticales ou horizontales sont exactes et tous les carrés sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & W^+_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & W^+_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L}) \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge \arrow[r] \arrow[d, equal] & W'_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d, "\omega'_\mathcal{L}"] & W_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d, "\omega_\mathcal{L}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge \arrow[r] & \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & (\operatorname{Ker} h_\mathbf{L})^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Soit η un caractère irréductible de $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L})$. Notons z_η l'élément de $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ (vu comme un caractère linéaire de $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$) par lequel $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$ agit sur la représentation de $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L})$ associée à η. Notons $\tilde{z}_\eta$ un élément de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ tel que $h_\mathbf{L}(\tilde{z}_\eta)=z_\eta$. Nous verrons $\tilde{z}_\eta$ comme un caractère linéaire de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$, c'est-à-dire comme un caractère linéaire de $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L})$. Posons

$$K_\eta = (t^\mathbf{G}_{\tilde{z}_\eta})^* K_{\eta\hat{\omega}'_\mathcal{L}(\tilde{z}_\eta)^{-1}}. \tag{19.6}$$

Remarquons tout d'abord que cette notation a un sens. Premièrement, $\eta\hat{\omega}'_\mathcal{L}(\tilde{z}_\eta^{-1})$ est trivial sur $\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge$ donc peut être vu comme un caractère irréductible de $W_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L})$ d'après **19.5**. D'autre part, en vertu du théorème **19.4**, le membre de droite ne dépend pas du choix de $\tilde{z}_\eta$. On a donc montré le résultat suivant :

Proposition 19.7. — *L'application $\eta \mapsto K_\eta$ est une bijection entre* $\operatorname{Irr} W'_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L})$ *et l'ensemble des composantes irréductibles de* $\operatorname{Ind}^\mathbf{G}_\mathbf{L}(\oplus_{z\in\mathcal{Z}(\mathbf{L})}(t^\mathbf{L}_z)^*A)$. *De plus*

$$\operatorname{Ind}^\mathbf{G}_\mathbf{L}\Big(\bigoplus_{z\in\mathcal{Z}(\mathbf{L})}(t^\mathbf{L}_z)^*A\Big) = \bigoplus_{\eta\in\operatorname{Irr} W'_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L})} K_\eta^{\oplus\,\eta(1)}.$$

La proposition **19.7** suggère fortement qu'il doit exister un isomorphisme naturel entre l'algèbre d'endomorphismes du faisceau pervers $\operatorname{Ind}^\mathbf{G}_\mathbf{L}\big(\oplus_{z\in\mathcal{Z}(\mathbf{L})}(t^\mathbf{L}_z)^*A\big)$ et l'algère de groupes de $W'_\mathbf{G}(\mathbf{L},\mathcal{L})$. Nous allons ici le construire. Pour cela, posons $A'=\oplus_{z\in\mathcal{Z}(\mathbf{L})}(t^\mathbf{L}_z)^*A$ et notons $\mathcal{L}'$ le système local $\oplus_{z\in\mathcal{Z}(\mathbf{L})}(t^\mathbf{L}_z)^*\mathcal{L}$ sur $\mathbf{Z}(\mathbf{L})$.

Soit $(w,\mu) \in W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$. On a construit un isomorphisme $\sigma_w : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} (\operatorname{int}\dot{w})^*\mathcal{L}$. Si $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$, la preuve du théorème **19.4** montre que l'action de $(\sigma_w)_z$ sur $\mathcal{L}_z$ est $\hat{\omega}_{\mathcal{L}}(w)(z)\operatorname{Id}_{\mathcal{L}_z} = \mu(z)\operatorname{Id}_{\mathcal{L}_z}$. Par suite, il existe un unique isomorphisme $\sigma_{w,\mu} : \mathcal{L}' \xrightarrow{\sim} (\operatorname{int}\dot{w})^*\mathcal{L}'$ tel que, pour tout $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$, on ait $(\sigma_w)_z = \mu(z)\operatorname{Id}_{\mathcal{L}'_z}$. Par tensorisation avec τ_w, on obtient un isomorphisme $\theta_{w,\mu} : \mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} (\operatorname{int}\dot{w})^*\mathcal{F}'$, où $\mathcal{F}' = \mathcal{L}' \boxtimes \mathcal{E}$.

À travers le diagramme d'induction, $\theta_{w,\mu}$ induit un automorphisme $\Theta_{w,\mu}$ du faisceau pervers $\operatorname{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A'$. Si on note $\mathcal{A}'$ l'algèbre d'endomorphisme de $\operatorname{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A'$, alors :

Théorème 19.8. — *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & \overline{\mathbb{Q}}_\ell W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L}) & \longrightarrow & \mathcal{A}' \\ & (w,\mu) & \longmapsto & \Theta_{w,\mu} \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres. Si η est un caractère irréductible de $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$, alors la composante irréductible de $\operatorname{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} A'$ associée à η à travers l'isomorphisme Θ est K_η.

20. Fonctions caractéristiques

Nous allons maintenant introduire dans ce chapitre l'isogénie F. Un faisceau pervers A sur $\mathbf{G}$ sera dit *F-stable* s'il est isomorphe à F^*A. Nous noterons $\operatorname{FCar}(\mathbf{G})^F$ l'ensemble des (classes d'isomorphie de) faisceaux-caractères F-stables. Si A est un faisceau pervers F-stable sur $\mathbf{G}$ et si $\varphi : A \xrightarrow{\sim} F^*A$ est un isomorphisme, nous noterons $\mathcal{X}_{A,\varphi} : \mathbf{G}^F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ la *fonction caractéristique* de A, définie par

$$\mathcal{X}_{A,\varphi}(g) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \operatorname{Tr}(\varphi_x, \mathcal{H}^i_x A)$$

pour tout $g \in \mathbf{G}^F$. Bien sûr, $\mathcal{X}_{A,\varphi}$ dépend de φ. Cependant, si A est irréductible, alors φ est bien déterminée à un scalaire près. En conséquence, la fonction $\mathcal{X}_{A,\varphi}$ est bien déterminée par A à un scalaire près.

20.A. Cas classique. — Reprenons les notations de la section précédente ($\mathbf{L}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}$,...). Supposons donc maintenant que $\mathbf{L}$ est F-stable, que $\mathbf{T}$ est F-stable, que $F(v) = v$ et que $F^*\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$. Fixons un isomorphisme $\varphi : F^*\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$. Cet isomorphisme s'étend en un isomorphisme $\varphi^\# : F^*A \xrightarrow{\sim} A$. Soit g_w un élément de $\mathbf{G}$ tel que $g_w^{-1}F(g_w) = \dot{w}^{-1}$. Posons

$$\mathbf{L}_w = {}^{g_w}\mathbf{L}, \quad v_w = {}^{g_w}v, \quad \mathbf{C}_w = {}^{g_w}\mathbf{C}, \quad \mathbf{\Sigma}_w = {}^{g_w}\mathbf{\Sigma},$$

$$\mathcal{L}_w = (\operatorname{ad} g_w^{-1})^*\mathcal{L}, \quad \mathcal{E}_w = (\operatorname{ad} g_w^{-1})^*\mathcal{E}, \quad \mathcal{F}_w = (\operatorname{ad} g_w^{-1})^*\mathcal{F} \quad \text{et} \quad A_w = (\operatorname{ad} g_w^{-1})^*A.$$

Alors $\mathcal{F}_w = \mathcal{L}_w \boxtimes \mathcal{E}_w$. De plus, $\mathbf{L}_w$, v_w, $\mathbf{C}_w$, $\mathbf{\Sigma}_w$, $\mathcal{L}_w$, $\mathcal{E}_w$, $\mathcal{F}_w$ et A_w sont F-stables et, suivant la construction de [**Lus90**, §9.3], on obtient un isomorphisme $\varphi_w : F^*\mathcal{F}_w \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_w$. Il s'étend en un isomorphisme $\varphi_w^\# : F^*A_w \xrightarrow{\sim} A_w$.

Fixons maintenant un caractère F-stable η de $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$. On note ϕ l'automorphisme de $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$ induit par F. On choisit une extension $\widetilde{\eta}$ de η au produit semi-direct $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L}) \rtimes \langle\phi\rangle$. Ce choix d'une extension (ainsi que celui de φ) détermine un isomorphisme $\varphi_{\widetilde{\eta}} : F^*K_\eta \xrightarrow{\sim} K_\eta$. Il résulte de [**Lus85**, partie II, 10.4.5 and 10.6.1] et [**Lus90**, proposition 9.2] que :

***Théorème 20.1* (Lusztig).** — *Supposons p presque bon pour $\mathbf{G}$ et q assez grand. Avec les notations précédentes, on a*

$$\mathcal{X}_{K_\eta,\varphi_{\widetilde{\eta}}} = \frac{1}{|W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})|} \sum_{w\in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})} \widetilde{\eta}(\phi w) R_{\mathbf{L}_w}^{\mathbf{G}} \mathcal{X}_{A_w,\varphi_w}.$$

20.B. Translation par $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. — Nous allons étudier ici le comportement des fonctions caractéristiques vis-à-vis de la translation par un élément du centre. Cela sera fait en termes du paramétrage de la proposition **19.7**.

Le système local $\mathcal{L}$ étant F-stable, il en est de même du système local $\mathcal{L}'$ sur $\mathbf{Z}(\mathbf{L})$. De même, le système local $\mathcal{F}'$ est F-stable. On fixe un isomorphisme $\varphi' : F^*\mathcal{F}' \simeq \mathcal{F}'$ étendant φ.

Soit $(w,\mu) \in W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$. Dans la sous-section 19.D, nous avons construit un isomorphisme $\theta_{w,\mu} : \mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} (\operatorname{int} \dot{w})^*\mathcal{F}'$. Reprenons les notations de la précédente sous-section et posons $\mathcal{L}'_w = (\operatorname{int} g_w^{-1})^*\mathcal{L}'$, $\mathcal{F}'_w = (\operatorname{int} g_w^{-1})^*\mathcal{F}'$ et $A'_w = (\operatorname{int} g_w^{-1})^*A'$. En suivant encore [**Lus90**, §9.3], on obtient un isomorphisme $\varphi'_{w,\mu} : F^*\mathcal{F}'_w \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'_w$. Cet isomorphisme s'étend en un isomorphisme $\varphi'^{\#}_{w,\mu} : F^*A'_w \xrightarrow{\sim} A'_w$.

Fixons maintenant un caractère irréductible η de $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$. Alors K_η est F-stable si et seulement si η est F-stable. Notons $\widetilde{\eta}$ une extension de η au produit semi-direct $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L}) \rtimes \langle\phi\rangle$, où ϕ est l'automorphisme de $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$ induit par F. Comme dans le cas classique, le choix de $\widetilde{\eta}$ détermine un isomorphisme $\varphi_{\widetilde{\eta}} : F^*K_\eta \xrightarrow{\sim} K_\eta$. Le théorème suivant découle presque immédiatement du théorème de Lusztig précédent.

Théorème 20.2. — *Supposons p presque bon pour $\mathbf{G}$ et q assez grand. On a*

$$\mathcal{X}_{K_\eta,\varphi_{\widetilde{\eta}}} = \frac{1}{|W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})|} \sum_{(w,\mu)\in W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})} \widetilde{\eta}((w,\mu)\phi) R_{\mathbf{L}_w}^{\mathbf{G}} \mathcal{X}_{A'_w,\varphi'^{\#}_{w,\mu}}.$$

Démonstration. — Notons $z = z_\eta \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})$. Puisque η est F-stable, on a $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})^F$. L'algèbre d'endomorphisme du faisceau pervers $\operatorname{Ind}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(t_z^{\mathbf{L}})^*A$ s'identifie, via la construction précédente, à la sous-algèbre de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})$ égale à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\mathcal{L})e_z$, où e_z est l'idempotent central $\frac{1}{|\mathcal{Z}(\mathbf{L})|}\sum_{\tau\in\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge} \tau(z)^{-1}\tau$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lusztig en remarquant que la restriction de $\mathcal{X}_{A'_w,\varphi'^{\#}_{w,\mu}}$ à $z\overline{\Sigma}_w^F$ est égale à

$$\frac{1}{|\mathcal{Z}(\mathbf{L})|} \sum_{\tau\in\mathcal{Z}(\mathbf{L})^\wedge} \tau(z)^{-1} \mathcal{X}_{A'_w,\varphi'^{\#}_{w,\mu\tau}}. \qquad \square$$

21. Éléments unipotents réguliers

Hypothèse. — *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cet article, nous supposerons que p est bon pour $\mathbf{G}$.*

Nous nous intéressons ici aux faisceaux-caractères apparaissant dans l'induit, à partir d'un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ de $\mathbf{G}$, de faisceaux-caractères cuspidaux dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{L})\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{L}}$. On rappelle que, puisque p est supposé bon pour $\mathbf{G}$, le groupe $A_{\mathbf{L}}(u_{\mathbf{L}})$ est isomorphe à $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$. Si $\zeta \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})^{\wedge}$, nous noterons $\mathcal{E}_\zeta$ le système local $\mathbf{L}$-équivariant sur $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{L}}$ tel que l'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ sur la fibre en $u_{\mathbf{L}} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{L}}$ se fasse par le caractère ζ. Si $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{L})$, on notera $\dot{z}$ un représentant de z dans $\mathbf{Z}(\mathbf{L})$. En d'autres termes, $z = \dot{z}\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$.

21.A. Cuspidalité. — Fixons un système local kummérien $\mathcal{L}$ sur $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$, un élément $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et un caractère linéaire ζ de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Posons $\mathcal{F} = ((t_z^{\mathbf{G}})^*\mathcal{L}) \boxtimes \mathcal{E}_\zeta$: c'est un système local sur $z\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}} = \dot{z}\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$.

Proposition 21.1. — *$\mathcal{F}$ est un système local cuspidal si et seulement si $\zeta \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^{\wedge}(\mathbf{G})$.*

Démonstration. — voir [**Bon00b**, proposition 1.2.2]. □

Soit $\mathrm{FCar}_{\text{rég}}^{\text{cus}}(\mathbf{G})$ l'ensemble des (classes d'isomorphie de) faisceaux-caractères cuspidaux dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. Soit $\mathrm{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$ un ensemble de représentants (modulo l'action naturelle de $\mathbf{G}$) des triplets (s,a,τ), où s est un élément semi-simple de $\mathbf{G}^*$, $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est tel que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}_{\text{cus}}^{\wedge}(\mathbf{G})$ et $\tau \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{\wedge}$. Nous allons construire une bijection entre $\mathrm{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$ et $\mathrm{FCar}_{\text{rég}}^{\text{cus}}(\mathbf{G})$.

Soit $(s,a,\tau) \in \mathrm{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$. On peut supposer, et nous le ferons, que $s \in \mathbf{T}^*$. Par hypothèse, l'élément s est géométriquement cuspidal et donc $\omega_s : A_{\mathbf{G}^*}(s) \to \mathcal{Z}(\mathbf{G})^{\wedge}$ est un isomorphisme (voir proposition **7.1** (e)). En particulier, $\hat{\omega}_s : \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to A_{\mathbf{G}^*}(s)^{\wedge}$ est aussi un isomorphisme. Posons $z = \hat{\omega}_s^{-1}(\tau)$ et notons $\mathcal{L}_{s,z}$ la restriction de $\mathcal{L}_s$ à $z^{-1} = \dot{z}^{-1}\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$. Posons maintenant

$$\mathcal{F}_{s,a,\tau} = \mathcal{F}_{s,a,\tau}^{\mathbf{G}} = \mathcal{L}_{s,z} \boxtimes \mathcal{E}_{\omega_s(a)}.$$

Notons que $\mathcal{L}_{s,z} \simeq (t_{\dot{z}}^{\mathbf{G}})^*\mathcal{L}_{s,1}$. C'est un système local $\mathbf{G}$-équivariant irréductible cuspidal sur la variété lisse $z^{-1}\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}} = \dot{z}^{-1}\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. Posons

$$A_{s,a,\tau} = A_{s,a,\tau}^{\mathbf{G}} = IC\big(\overline{z^{-1}\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}}, \mathcal{F}_{s,a,\tau}\big)[\dim \mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}].$$

C'est un faisceau pervers $\mathbf{G}$-équivariant irréductible sur $\mathbf{G}$.

Lemme 21.2. — *Soit $(s,a,\tau) \in \mathrm{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$.*

(a) $\zeta_{A_{s,a,\tau}} = \omega_s(a)$.

(b) *$A_{s,a,\tau}$ est l'extension par zéro du système local $\mathcal{E}_{s,a,\tau}$.*

(c) $A_{s,a,\tau} \in \mathrm{FCar}(\mathbf{G},(s))$.

(d) *$A_{s,a,\tau}$ est cuspidal.*

Remarque. — Il est connu que le prolongement d'intersection d'un système local cuspidal est son extension par zéro (en bonne caractéristique), ce qui démontre (c). Nous rappelons cependant ici un argument élémentaire s'appliquant dans ce cas.

Démonstration. — Soit $(s,a,\tau) \in \mathrm{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$. Rappelons que l'existence de (s,a,τ) implique que toutes les composantes quasi-simples de $\mathbf{G}$ sont de type A. Posons $\zeta = \omega_s(a)$ et $z = \hat{\omega}_s^{-1}(\tau)$.

(a) découle du fait que $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ agit sur $\mathcal{E}_\zeta$ via le caractère linéaire ζ.

(b) Soit x un élément de l'adhérence de $z\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$ n'appartenant pas à $z\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. Puisque toutes les composantes quasi-simples de $\mathbf{G}$ sont de type A, ceci implique qu'il existe un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ propre de $\mathbf{G}$ contenant x. En particulier, $\mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ \subset C_{\mathbf{G}}^\circ(x)$. Donc $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L})^\circ$ agit trivialement sur la fibre en x de $A_{s,a,\tau}$. Par suite, si cette fibre est non nulle, la restriction de ζ à $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}}$ est triviale, ce qui contredit la proposition **21.1**. Donc $(A_{s,a,\tau})_x = 0$.

(c) Rappelons que toutes les composantes quasi-simples de $\mathbf{G}$ sont de type A. La classification des éléments quasi-isolés réguliers [**Bon05**] montre que, quitte à conjuguer le triplet (s,a,τ), on peut supposer que $s \in \mathbf{T}^*$ et que a est un élément de Coxeter standard de W. Nous allons calculer $K_{a,s}$ dans ces conditions.

Tous les éléments de $\mathbf{B}a\mathbf{B}$ sont réguliers et $\mathbf{B}a\mathbf{B}$ rencontre toutes les classes de conjugaison d'éléments réguliers [**Ste65**, remarque 8.8]. La proposition **18.4** et l'argument du (b) montre que le support de $K_{a,s}$ est contenu dans $\mathbf{Z}(\mathbf{G}).\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. Notons $i : \mathbf{Z}(\mathbf{G})\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}} \hookrightarrow \mathbf{G}$, $\widetilde{\mathbf{Y}}$ l'image inverse de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$ dans $\widetilde{\mathbf{Y}}_a$, $\gamma : \widetilde{\mathbf{Y}} \to \mathbf{Z}(\mathbf{G})\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$ la restriction de γ_a et $\widetilde{\mathcal{L}}$ la restriction de $\widetilde{\mathcal{L}}_{a,s}$ à $\widetilde{\mathbf{Y}}$. On a alors

$$(*) \qquad K_{a,s} = i_! R\gamma_! \widetilde{\mathcal{L}}.$$

Fixons un élément unipotent régulier $x \in \mathbf{B}a \cap a\mathbf{B}^- \cap \boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \times \mathbf{Z}(\mathbf{G}) & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{Y}} \\ & (g\mathbf{Z}(\mathbf{G}), t) & \longmapsto & (tgxg^{-1}, g\mathbf{B}). \end{array}$$

Nous allons montrer que φ est un morphisme de variété bijectif purement inséparable. On a construit une action de $\mathbf{G}$ sur $\widetilde{\mathbf{Y}}_a$. Le groupe $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ agit aussi sur $\widetilde{\mathbf{Y}}_a$ par translation de la première coordonnée. Cette action conserve $\widetilde{\mathbf{Y}}$. Cela munit $\widetilde{\mathbf{Y}}$ d'une action de $\mathbf{G} \times \mathbf{Z}(\mathbf{G})$. On remarque alors que φ est $\mathbf{G} \times \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ équivariant. Il suffit donc de montrer que φ est bijectif. En effet, cela montre que la variété $\widetilde{\mathbf{Y}}$ est une orbite sous l'action d'un groupe algébrique, donc elle est lisse, donc elle est normale et un morphisme bijectif entre variétés normales est purement inséparable [**Bor91**, théorème 18.2].

Soient $(g\mathbf{Z}(\mathbf{G}), t)$ et $(g'\mathbf{Z}(\mathbf{G}), t')$ deux éléments de $\mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \times \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ ayant même image par φ. Alors la partie semi-simple de $tgxg^{-1}$ coïncide avec celle de $t'g'xg'^{-1}$, c'est-à-dire $t = t'$. On a par conséquent $g^{-1}g' \in \mathbf{B} \cap C_{\mathbf{G}}(x)$. Mais, d'après [**Bon04a**, corollaire 10.3], $\mathbf{U} \cap C_{\mathbf{G}}(x) = 1$ donc la partie unipotente de $g^{-1}g'$ est égale à 1. Donc, puisque x est un unipotent régulier, on en déduit que $g\mathbf{Z}(\mathbf{G}) = g'\mathbf{Z}(\mathbf{G})$, ce qui montre l'injectivité de φ.

Montrons maintenant la surjectivité de φ. Soit $(g, h\mathbf{B}) \in \widetilde{\mathbf{Y}}$. Alors, par définition, il existe $t \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ et $y \in \mathbf{G}$ tels que $g = tyxy^{-1}$. Posons $k = h^{-1}y$. Alors, par hypothèse, $kxk^{-1} \in \mathbf{B}a\mathbf{B} \cap \boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$. Donc, d'après [**Bon04a**, corollaire 10.3] et [**Ste65**, théorème 1.4], il existe $b \in \mathbf{B}$ tel que $kxk^{-1} = bxb^{-1}$. En d'autres termes, $yxy^{-1} = hbxb^{-1}h^{-1}$. Donc $(g, h\mathbf{B}) = \varphi(hb\mathbf{Z}(\mathbf{G}), t)$.

Posons $\widetilde{\mathcal{L}}' = \varphi^*\widetilde{\mathcal{L}}$. Puisque φ est bijectif et purement inséparable, on a $\varphi_*\widetilde{\mathcal{L}}' = \widetilde{\mathcal{L}}$ et donc

$$K_{a,s} = i_! R\gamma'_! \widetilde{\mathcal{L}}',$$

où $\gamma' : \mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \times \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \to \mathbf{Z}(\mathbf{G})\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$, $(g\mathbf{Z}(\mathbf{G}), t) \mapsto tgxg^{-1}$. Alors $\widetilde{\mathcal{L}}' = \widetilde{\mathcal{E}} \boxtimes (\bigoplus_{z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})} \mathcal{L}_{s,z})$, où $\widetilde{\mathcal{E}}$ est un système local $\mathbf{G}$-équivariant irréductible sur $\mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})$. L'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ sur $\widetilde{\mathcal{E}}$ étant donnée par ζ, $\widetilde{\mathcal{E}}'$ est l'unique système local sur $\mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ sur lequel $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ agit par ζ. Pour $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})$, notons $i_z : z\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}} \hookrightarrow \mathbf{G}$. Notons $\delta : \mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \to \boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$, $g\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \mapsto gvg^{-1}$ et $\mathcal{E} = R\delta_! \widetilde{\mathcal{E}}$. Alors

$$K_{a,s} = \bigoplus_{z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})} i_{z!}(\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{L}_{s,z}).$$

Il nous reste à calculer $\mathcal{E}$. En décomposant δ en la suite de morphismes $\mathbf{G}/\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \xrightarrow{\delta'} \mathbf{G}/C_{\mathbf{G}}(u) \to \boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}$, on est ramené au calcul de $R\delta'_! \widetilde{\mathcal{E}}$. Mais, puisque δ' est un morphisme lisse dont les fibres sont isomorphes à $C_{\mathbf{U}}(u)$, qui est, comme variété algébrique, un espace affine de dimension $\mathrm{rg}_{\mathrm{sem}}(\mathbf{G})$, on a

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\zeta[-2\,\mathrm{rg}_{\mathrm{sem}}(\mathbf{G})].$$

On en déduit que

$$\textbf{(21.3)} \qquad K_{a,s} = \bigoplus_{\tau \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^\wedge} A_{s,a,\tau}[m],$$

pour un $m \in \mathbb{Z}$ que je n'ai pas envie de calculer. Cela montre (c).

(d) est évident. □

Proposition 21.4. — *L'application* $\mathrm{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G}) \to \mathrm{FCar}_{\text{rég}}^{\text{cus}}(\mathbf{G})$, $(s, a, \tau) \mapsto A_{s,a,\tau}$ *est bijective. De plus,* $A_{s,a,\tau} \in \mathrm{FCar}(\mathbf{G}, (s))$.

Démonstration. — Soit $(s, a, \tau) \in \mathrm{Cus}_{\text{rég}}(\mathbf{G})$. Le fait que $A_{s,a,\tau}$ est un faisceau-caractère cuspidal dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}$ est montré dans le lemme **21.2**. Cela montre que l'application est bien définie.

Montrons qu'elle est surjective. Soit $A \in \mathrm{FCar}_{\text{rég}}^{\text{cus}}(\mathbf{G})$. D'après [**Lus85**, §7], il existe $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})$, un système local $\mathcal{L}$ sur $z = \dot{z}\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$ et $\zeta \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})_{\text{cus}}^\wedge$ tel que $A = IC\big(\overline{z\mathcal{U}_{\text{rég}}^{\mathbf{G}}}, \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{F}_\zeta\big)[\mathrm{rg}\,\mathbf{G}]$. Notons que $\zeta_A = \zeta$.

Soit s tel que $A \in \mathrm{FCar}(\mathbf{G}, (s))$ (voir **18.5**). Il existe $w \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ tel que $w(s) = s$ et A est une composante irréductible de ${}^pH^i(K_{w,s})$. Notons a la classe de w dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. D'après la proposition **18.4**, on a $\zeta = \omega_s(a)$. Posons maintenant $\tau = \hat{\omega}_s(z) \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^\wedge$.

Puisque $A \in \mathrm{FCar}(\mathbf{G},(s))$, la restriction de $\mathcal{L}_s$ à $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ$ est égale à $t_{\dot z}^*\mathcal{L}$, où $t_{\dot z} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, $g \mapsto \dot z g$ est la translation par $\dot z$. Donc $\mathcal{L}_{s,z} = \mathcal{L}$, ce qui montre que $A = A_{s,a,\tau}$.

Montrons maintenant qu'elle est injective. Soient (s,a,τ) et (s',a',τ') deux éléments de $\mathrm{Cus}_{\mathrm{rég}}(\mathbf{G})$ tels que $A_{s,a,\tau} \simeq A_{s',a',\tau'}$. D'après **18.5** et le lemme **21.2** (c), s et s' sont conjugués sous $\mathbf{G}^*$. On peut donc supposer qu'ils sont égaux. De plus, $\zeta_{A_{s,a,\tau}} = \zeta_{A_{s,a',\tau'}}$ donc, d'après la proposition **18.4**, on a $\omega_s(a) = \omega_s(a')$. Donc $a = a'$ car ω_s est injectif. Pour finir, les supports de $A_{s,a,\tau}$ et $A_{s,a,\tau'}$ sont égaux, ce qui implique que $\hat\omega_s^{-1}(\tau) = \hat\omega_s^{-1}(\tau')$, d'où l'on déduit que $\tau = \tau'$. $\square$

21.B. Induction. — Fixons un élément semi-simple $s \in \mathbf{T}^*$ et un élément $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Posons $\mathbf{L}_{s,a} = C_{\mathbf{G}}((\mathbf{T}^a)^\circ)$. Alors, d'après la proposition **8.10**, $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{L}_{s,a})$. Notons $\mathrm{FCar}_{\mathrm{rég}}(\mathbf{G},(s),a)$ l'ensemble des faisceaux-caractères apparaissant dans $\mathrm{Ind}_{\mathbf{L}_{s,a}}^{\mathbf{G}}(\oplus_{\tau \in A_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s)^\wedge} A^{\mathbf{L}}_{s,a,\tau})$. Il est à noter que $\mathrm{FCar}_{\mathrm{rég}}(\mathbf{G},(s),a)$ est contenu dans $\mathrm{FCar}(\mathbf{G},(s),a)$. Alors, d'après la proposition **19.7**, on a une bijection

$$\mathrm{Irr}\, W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a},\mathcal{L}_{s,a}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{FCar}_{\mathrm{rég}}(\mathbf{G},(s),a), \tag{21.5}$$

où $\mathcal{L}_{s,a}$ désigne la restriction de $\mathcal{L}_s$ à $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_{s,a})^\circ$. Si η est un caractère irréductible de $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a},\mathcal{L}_{s,a})$, nous noterons $K(s,a)_\eta$ le faisceau-caractère lui correspondant par la bijection **21.5**. Il nous reste à déterminer le groupe $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a},\mathcal{L}_{s,a})$. C'est fait dans la proposition suivante (comparer avec la proposition **16.2**).

Proposition 21.6. — *Si $s \in \mathbf{T}^*$ et $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$, alors $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a},\mathcal{L}_{s,a})$ est canoniquement isomorphe à $W(s)^a \simeq A_{\mathbf{G}^*}(s) \ltimes W^\circ(s)^a$. A travers cet isomorphisme, on a $A_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s) \simeq \mathcal{Z}(\mathbf{L}_{s,a})^\wedge$ et $W(s)^a/A_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s) \simeq W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a},\mathcal{L}_{s,a})$.*

Démonstration. — Soit $w \in W(s)^a$. Alors w normalise $\mathbf{L}_{s,a}$ et $\mathcal{L}_{s,a}$. Posons

$$\begin{array}{rccc} \aleph : & W(s)^a & \longrightarrow & W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a},\mathcal{L}_{s,a}) \\ & w & \longmapsto & (\widetilde{w},\omega_s(\bar w)), \end{array}$$

où $\widetilde{w}$ désigne la classe de w dans $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a})$ et $\bar w$ la classe de w dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Nous allons montrer que $\aleph$ est un isomorphisme.

Le fait que l'application $\aleph$ est bien définie découle immédiatement de la construction de ω_s et de la définition de $W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a},\mathcal{L}_{s,a})$. Soit $w \in W(s)^a$ tel que $\aleph(w) = (1,1)$. Alors $w \in W_{\mathbf{L}_{s,a}}(s)^a = A_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s)$ car s est géométriquement cuspidal dans $\mathbf{L}^*_{s,a}$ donc régulier (voir les propositions **8.10** et **8.9**). Mais alors $\omega_s(w) = 1$ et donc $w = 1$ d'après l'injectivité de ω_s. Cela montre l'injectivité de $\aleph$.

Il nous reste à montrer la surjectivité. Soit $(w,\mu) \in W'_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_{s,a},\mathcal{L}_{s,a})$. Soit $\dot w$ un représentant de w dans W. Il résulte de **18.5** (appliqué au groupe $\mathbf{L}_{s,a}$) que l'on peut supposer que $\dot w \in W(s)$. Il est alors facile de vérifier que

$$\omega_{\mathcal{L}_{s,a}}(w) = \mathrm{Res}^{\mathcal{Z}(\mathbf{G})}_{\mathrm{Ker}\, h_{\mathbf{L}}}\, \omega_s(\dot w). \tag{21.7}$$

Donc $\mathrm{Res}^{\mathcal{Z}(\mathbf{G})}_{\mathrm{Ker}\, h_{\mathbf{L}}}\, \mu = \mathrm{Res}^{\mathcal{Z}(\mathbf{G})}_{\mathrm{Ker}\, h_{\mathbf{L}}}\, \omega_s(\dot w)$. Puisque $A_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s) \simeq \mathcal{Z}(\mathbf{L}_{s,a})^\wedge$, il existe $a \in A_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s)$ tel que $\mu = \omega_s(\dot w)\omega_s(a) = \omega_s(\dot w a)$. Quitte à changer de représentant de

w dans $W(s)$, on peut donc supposer que $\omega_s(\dot{w}) = \mu$. Notons b la classe de $\dot{w}$ dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors $w' = b^{-1}\dot{w} \in W^\circ(s)$ et normalise $\mathbf{L}_{s,a}$. Donc, d'après le corollaire **8.11** (e), $aw' = w'a$ et donc $a\dot{w} = \dot{w}a$. Par suite, $\dot{w} \in W(s)^a$ et $\aleph(\dot{w}) = (w,\mu)$, ce qui montre la surjectivité de $\aleph$. $\square$

22. Lien avec les caractères semi-simples

Le but de cette section est de calculer les fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères F-stables appartenant à $\mathrm{FCar}_{\text{rég}}(\mathbf{G},(s),a)$, où s est un élément semi-simple de $\mathbf{G}^*$ et $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Tout d'abord, remarquons que, si $\mathrm{FCar}(\mathbf{G},(s))^F \neq \varnothing$, alors (s) est une classe de conjugaison F^*-stable. Par conséquent, on peut supposer que $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$, ce qui sera fait par la suite. D'autre part, si $\mathrm{FCar}(\mathbf{G},(s),a)^F \neq \varnothing$, alors on a, pour tout $A \in \mathrm{FCar}(\mathbf{G},(s),a)^F$, $\zeta_A = \omega_s(a) \in (\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge)^F$. Puisque ω_s est injectif, cela implique que $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$.

Par conséquent, nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse. — *Dans cette section, nous fixons un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$ et un élément $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Nous reprenons les notations des chapitres précédents ($\mathbf{T}_1^*$, $\mathbf{T}_1$,...) et nous supposons que $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1$ et $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}_1^*$.*

Nous aurons d'autre part besoin de la notation suivante. Si $\zeta \in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$, nous posons

$$\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta) = \eta_{\mathbf{G}} q^{-\frac{1}{2}\,\mathrm{rg}_{\mathrm{sem}}(\mathbf{G})} \sum_{z \in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))} \zeta(z)^{-1} \sum_{t \in \mathbf{T}_0^F/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F} \psi_z(tut^{-1}).$$

Remarquons que $\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)$ est égal à $\eta_{\mathbf{G}} q^{-\frac{1}{2}\,\mathrm{rg}_{\mathrm{sem}}(\mathbf{G})}$ fois le scalaire noté $\sigma_{\zeta^{-1}}$ dans [**DLM97**, §2]. En particulier [**DLM97**, proposition 2.5] :

Lemme 22.1. — *Si $\zeta \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$ est F-stable, alors $\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)$ est une racine quatrième de l'unité.*

Remarque 22.2. — Le calcul de $\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)$ lorsque $\zeta \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$ sera effectué dans l'appendice B (voir section 37).

22.A. Cas cuspidal. — Nous allons rappeler dans cette sous-section comment les transformées de Fourier de caractères semi-simples sont reliées aux fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères cuspidaux dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathbf{G}}_{\text{rég}}$.

Supposons dans cette sous-section, et uniquement dans cette sous-section, que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$. Dans ce cas, on a

$$\mathrm{FCar}(\mathbf{G},(s),a)^F = \{A_{s,a,\tau} \mid \tau \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))^\wedge\}.$$

Posons $A_{s,a} = \oplus_{\tau\in(A_{\mathbf{G}^*}(s))^\wedge} A_{s,a,\tau}$. Alors $A_{s,a}$ est F-stable et il existe un unique isomorphisme $\varphi_{s,a} : F^* A_{s,a} \xrightarrow{\sim} A_{s,a}$ tel que, pour tout $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$, on ait

$$(\varphi_{s,a})_{zu} = \hat{s}(z) q^{\frac{1}{2}\operatorname{rg}_{\mathrm{sem}}(\mathbf{G})} \operatorname{Id}_{(A_{s,a})_{zu}}.$$

Si $\tau \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))^\wedge$, notons $\varphi_{s,a,\tau}$ la restriction de $\varphi_{s,a}$ en un isomorphisme $F^* A_{s,a,\tau} \xrightarrow{\sim} A_{s,a,\tau}$. Il résulte de [**Bon00b**, théorème 6.2.2] que

$$\mathcal{X}_{A_{s,a,\tau},\varphi_{s,a,\tau}} = \mathcal{G}(\mathbf{G}, \omega_s(a)) \hat{\rho}_{s,a,\tau}. \tag{22.3}$$

22.B. Le résultat. — Revenons au cas général, c'est-à-dire ne supposons plus que $\omega_s(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$. On note alors $A_{s,a}$ le faisceau pervers $\oplus_{\tau\in(A_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s))^\wedge} A^{\mathbf{L}_{s,a}}_{s,a,\tau}$ sur $\mathbf{L}_{s,a}$ et on note $\varphi_{s,a} : F^* A_{s,a} \xrightarrow{\sim} A_{s,a}$ l'isomorphisme tel que, pour tout $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{s,a})^F$, on ait

$$(\varphi_{s,a})_{zu_{\mathbf{L}_{s,a}}} = \hat{s}(z) q^{\frac{1}{2}\operatorname{rg}_{\mathrm{sem}}(\mathbf{L}_{s,a})} \operatorname{Id}_{(A_{s,a})_{zu_{\mathbf{L}_{s,a}}}}.$$

Si $\tau \in H^1(F^*, A_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s))^\wedge$, on note $\varphi_{s,a,\tau}$ la restriction de $\varphi_{s,a}$ en un isomorphisme $F^* A^{\mathbf{L}_{s,a}}_{s,a,\tau} \xrightarrow{\sim} A^{\mathbf{L}_{s,a}}_{s,a,\tau}$. D'après **22.3** appliquée à $\mathbf{L}_{s,a}$, on a

$$\mathcal{X}_{A_{s,a,\tau},\varphi_{s,a,\tau}} = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a},s}(a)) \hat{\rho}^{\mathbf{L}_{s,a}}_{s,a,\tau}. \tag{22.4}$$

Soit η un caractère irréductible F^*-stable de $W(s)^a$. Soit $\tilde{\eta}$ une extension de η à $W(s)^a \rtimes \langle\phi_1\rangle$. Le choix de cette extension fixe un isomorphisme $\varphi_{s,a,\tilde{\eta}}$: $F^* K(s,a)_\eta \xrightarrow{\sim} K(s,a)_\eta$.

Théorème 22.5. — *Supposons que p est bon pour $\mathbf{G}$ et que q est assez grand. Soit η un caractère irréductible F^*-stable de $W(s)^a$. Soit $\tilde{\eta}$ une extension de η à $W(s)^a \rtimes \langle\phi_1\rangle$. Alors*

$$\mathcal{R}(s,a)_{\tilde{\eta}} = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a},s}(a)) \mathcal{X}_{K(s,a)_\eta,\varphi_{s,a,\tilde{\eta}}}.$$

Démonstration. — Soit $w \in W(s)^a$. Notons $\dot{w}$ un représentant de w dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_1)$. Fixons $g_w \in \mathbf{G}$ tel que $g_w^{-1} F(g_w) = \dot{w}$. On note $\bar{w}$ la classe de w dans $W(s)/A_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s)$. On peut choisir la famille $(g_w)_{w\in W(s)}$ de sorte que, si $w \in W(s)$ et $b \in A_{\mathbf{L}^*_{s,a}}(s)$, on ait ${}^{g_w}\mathbf{L}_{s,a} = {}^{g_{wb}}\mathbf{L}_{s,a}$. Par suite, on peut poser

$$\mathbf{L}_{\bar{w}} = {}^{g_w}\mathbf{L}_{s,a} = \mathbf{L}_{s,a,w}.$$

Posons $\mathbf{\Sigma}' = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{s,a}).\mathbf{C}$. Reprenons maintenant les hypothèses et notations du théorème **20.2** et supposons de plus que $\mathbf{C}$ soit la classe unipotente régulière de $\mathbf{L}_{s,a}$, que $\mathcal{L}'$ soit égal à la restriction de $\mathcal{L}_s$ à $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_{s,a})$, que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\omega_{\mathbf{L}_{s,a},s}(a)}$, que $\mathcal{F}' = \mathcal{L}' \boxtimes \mathcal{E}$ et que $\varphi' = \varphi_{s,a}$. Posons alors

$$\mathbf{C}_{\bar{w}} = {}^{g_w}\mathbf{C}, \quad \mathbf{\Sigma}'_{\bar{w}} = {}^{g_w}\mathbf{\Sigma}',$$

$$\mathcal{L}'_{\bar{w}} = (\operatorname{ad} g_w^{-1})^* \mathcal{L}', \quad \mathcal{E}_{\bar{w}} = (\operatorname{ad} g_w^{-1})^* \mathcal{E}, \quad \mathcal{F}'_{\bar{w}} = (\operatorname{ad} g_w^{-1})^* \mathcal{F}' \quad \text{et} \quad A_{\bar{w}} = (\operatorname{ad} g_w^{-1})^* A_{s,a}.$$

L'élément w définit quant à lui un isomorphisme $\varphi_w : F^* A_{\bar{w}} \xrightarrow{\sim} A_{\bar{w}}$ qui, lui, dépend de w et pas seulement de $\bar{w}$.

Compte tenu du théorème **20.2**, il nous reste à montrer que

$$(*) \qquad \dot{\rho}^{\mathbf{L}_{\bar{w}}}_{s_w,a} = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a}, s}(a))\mathcal{X}_{A_{\bar{w}},\varphi_w}.$$

Rappelons que $s_w = g_w s g_w^{-1}$. On pose $\mathbf{T}_w = {}^{g_w}\mathbf{T}_1$ et $\mathcal{L}_{s,w} = (\operatorname{ad} g_w^{-1})^* \mathcal{L}_s$. En fait, $\mathcal{L}'_{\bar{w}}$ est la restriction de $\mathcal{L}_{s,w}$ à $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_{\bar{w}})$. Par conséquent, on a, pour tous $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{\bar{w}})^F$ et $x \in \mathbf{\Sigma}'^F_{\bar{w}}$,

$$\mathcal{X}_{A_{\bar{w}},\varphi_w}(zx) = \hat{s}_w(z)\mathcal{X}_{A_{\bar{w}},\varphi_w}(x).$$

D'autre part, l'action de $\mathcal{Z}(\mathbf{L}_{\bar{w}})$ par conjugaison sur $\mathcal{F}'_{\bar{w}}$ montre que, pour prouver $(*)$, il suffit de montrer que

$$(**) \qquad \mathcal{X}_{A_{\bar{w}},\varphi_w}(u_{\mathbf{L}_{\bar{w}}}) = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a},s}(a))\dot{\rho}^{\mathbf{L}_{\bar{w}}}_{s_w,a}(u_{\mathbf{L}_{\bar{w}}}).$$

Mais, d'après le corollaire **37.5** (voir l'appendice B), on a $\mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a},s}(a)) = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{\bar{w}}, \omega_{\mathbf{L}_{\bar{w}},s}(a))$. Donc il suffit de montrer, d'après **22.4**, que $\mathcal{X}_{A_{\bar{w}},\varphi_w}(u_{\mathbf{L}_{\bar{w}}}) = q^{\frac{1}{2}\operatorname{rg}_{\mathrm{sem}} \mathbf{L}_{\bar{w}}}$, ce qui découle de [**Bon04a**, théorème 15.10]. □

Nous allons nous intéresser maintenant aux faisceaux-caractères dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathbf{G}}_{\text{rég}}$. Soit $K \in \operatorname{FCar}(\mathbf{G}, (s))$ dont le support rencontre $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathbf{G}}_{\text{rég}}$. Notons a l'unique élément de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ tel que $\zeta_K = \omega_s(a)$ (voir la proposition **18.4**). Alors K est une composante irréductible de $\operatorname{Ind}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_{s,a}} A_{s,a}$. Notons η_K le caractère irréductible de $W(s)^a$ correspondant.

Lemme 22.6. — *Soit $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et supposons que le support de K contienne $z\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}$. Alors $\eta_K = \hat{\omega}_s(z)$.*

Démonstration. — Quitte à translater K par un élément de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ (c'est-à-dire, d'après le théorème **19.4**, à multiplier η_K par un caractère linéaire de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$), on peut supposer que le support de K contient $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathbf{G}}_{\text{rég}}$. En utilisant les constructions de [**Bon04a**, partie I], on s'aperçoit, en utilisant [**Bon04a**, corollaire 6.7], que l'on peut supposer que $\mathcal{L}' = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Dans ce cas, il découle de la définition de Θ et [**Bon04a**, corollaire 6.2] que $\eta_K = 1$. □

Corollaire 22.7. — *Soit $K \in \operatorname{FCar}(\mathbf{G}, (s))^F$ dont le support rencontre $z\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathbf{G}}_{\text{rég}}$, pour un $z \in \mathcal{Z}(\mathbf{G})^F$. Posons $\tau = \hat{\omega}^1_s(z)$ et notons $\tilde{\tau}$ l'extension de τ à $A_{\mathbf{G}^*}(s) \rtimes \langle\phi_1\rangle$ qui est triviale sur $\langle\phi_1\rangle$. Alors*

$$\mathcal{X}_{K,\varphi_{s,a,\tilde{\tau}}} = \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a},s}(a))\hat{\rho}_{s_\alpha,a,\tau}.$$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du théorème **22.5**, du lemme **22.6** et de la proposition **17.15** (e). □

CHAPITRE 7

GROUPES DE TYPE A

Hypothèse. — *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cet article, nous supposerons que toutes les composantes quasi-simples de* $\mathbf{G}$ *sont de type* A*. Nous supposerons aussi que* $\delta = 1$*, c'est-à-dire que* $F : \widetilde{\mathbf{G}} \to \widetilde{\mathbf{G}}$ *est un endomorphisme de Frobenius.*

Rappelons que l'hypothèse ci-dessus implique que la formule de Mackey a lieu dans $\mathbf{G}$ (voir théorème **10.12**). Le but de ce chapitre est d'obtenir, lorsque q est assez grand, un paramétrage des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ (voir théorème **23.9**) et de montrer que la conjecture de Lusztig a lieu (voir corollaire **24.11**). Concernant l'hypothèse portant sur q, le lecteur peut se référer à la remarque intitulée « Domaine de validité » à la fin de l'introduction.

23. Description de $\mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$

23.A. Structure de $W(s) \rtimes \langle \phi_1 \rangle$. — Notons ici $\Phi_{(1)},\ldots, \Phi_{(r)}$ les composantes irréductibles de Φ_s et posons $\Phi_{(i)}^+ = \Phi_s^+ \cap \Phi_{(i)}$ et $\Delta_{(i)} = \Delta \cap \Phi_{(i)}$. Notons $W_{(i)}$ le groupe de Weyl du système de racines $\Phi_{(i)}$. Alors $W^\circ(s) = W_{(1)} \times \cdots \times W_{(r)}$.

Chaque $W_{(i)}$ est isomorphe à un groupe symétrique et $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ permute les $W_{(i)}$. Il est possible de choisir une famille d'isomorphismes $W_{(i)} \simeq \mathfrak{S}_{n_i}$ (où n_i est un entier naturel $\geqslant 2$) telle que $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ agisse seulement par permutation des composantes. Une fois un tel choix d'isomorphismes effectué, il existe $w_s \in W^\circ(s)$ tel que $w_s F^*$ (ou $w_s\phi_1$) agisse sur $W^\circ(s)$ seulement par permutation des composantes. Il n'est pas défini de manière unique car le centre de $W^\circ(s)$ n'est pas forcément trivial. Cependant, cette non unicité ne peut se produire que lorsqu'il existe des i tels que $n_i = 2$. Si $n_i = 2$, nous supposerons que la composante de w_s dans $W_{(i)}$ est égale à 1. Cela définit w_s de façon unique. S'il est nécessaire de préciser, nous le noterons $w_{\mathbf{G},s}$.

Lemme 23.1. — w_s *commute avec les éléments de* $A_{\mathbf{G}^*}(s)$.

Démonstration. — Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. Alors $F^*(a) \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$. D'autre part, $[w_s\phi_1, a]$ agit sur $W^\circ(s)$ seulement par permutation des composantes. Donc $[w_s\phi_1, a]F^*(a)a^{-1}$ agit seulement par permutation des composantes. Or, $[w_s\phi_1, a]F^*(a)a^{-1} = w_s\ {}^{F^*(a)}w_s^{-1} \in W^\circ(s)$. Par suite, $w_s\ {}^{F^*(a)}w_s^{-1}$ est central dans $W^\circ(s)$ et donc égal à 1 compte tenu du choix précis fait pour w_s. □

23.B. Fonctions absolument cuspidales. — Nous rappelons la description de l'espace des fonctions absolument cuspidales dans notre cas [**Bon00b**, théorème 4.3.3] :

Théorème 23.2. — *Si $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, alors*

$$\mathrm{Cus}(\mathbf{G}^F, [s], a) = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \dot{\rho}_{s,a} & \text{si } \omega_s(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corollaire 23.3. — *Soit $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Alors l'application*

$$\mathcal{R}[s,a] : \big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \longrightarrow \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a)$$

est une isométrie bijective (pour les produits scalaires $\langle , \rangle_{s,a}$ et $\langle , \rangle_{\mathbf{G}^F}$).

Démonstration. — Le fait que $\mathcal{R}[s,a]$ est une isométrie a été montré dans la proposition **17.18**. Il nous reste à montrer la surjectivité de $\mathcal{R}[s,a]$. Puisque la formule de Mackey a lieu dans $\mathbf{G}$ (voir théorème **10.12**), on a

$$\mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a) = \bigoplus_{\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{s,a}} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\mathrm{Cus}(\mathbf{L}^F, [s], a)),$$

où $\mathcal{L}_{s,a}$ est l'ensemble des sous-groupes de Levi F-stables de $\mathbf{G}$ dont un dual $\mathbf{L}^*$ contient s et tels que $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}$. Mais, d'après le théorème **23.2**, on a

$$\mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s], a) = \bigoplus_{\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{s,a,\mathrm{cus}}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \dot{\rho}_{s,a}^{\mathbf{L}},$$

où $\mathcal{L}_{s,a,\mathrm{cus}}$ est l'ensemble des $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{s,a}$ tels que $\omega_{\mathbf{L},s}(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{L})$. Il suffit alors de montrer que, si $\mathbf{L}^*$ est un sous-groupe de Levi F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ contenant s et vérifiant que $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s)$ et $\omega_{\mathbf{L},s}(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{L})$, alors $\mathbf{L}^*$ est conjugué sous $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ à un $\mathbf{L}_{s,a,w}$ pour un $w \in W^\circ(s)^a$. Reprenons les notations du §17.D ($W^\circ_{\mathbf{L}}(s)$, $W_{\mathbf{L}}(s)$, $A_{\mathbf{L}^*}(s)$ et $w_{\mathbf{L}}$). Alors $w_{\mathbf{L}}$ commute avec a et est le type du tore $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)$ (voir corollaire **8.11** (a)). Par suite, on peut supposer que $C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s) = \mathbf{T}^*_{w_{\mathbf{L}}}$. Puisque $\omega_{\mathbf{L},s}(a) \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{L})$, on a $\mathbf{L}^* = C_{\mathbf{G}^*}(((\mathbf{T}^*_{w_{\mathbf{L}}})^a)^\circ)$, ce qui montre que $\mathbf{L}^*$ est conjugué sous $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ à $\mathbf{L}_{s,a,w_{\mathbf{L}}}$. □

23.C. Une autre isométrie. — Fixons encore $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. L'élément $w_s\phi_1$ agit sur $W^\circ(s)^a$ par permutation des composantes donc, d'après **33.6**, on a une isométrie bijective naturelle entre $\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1) = \mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a w_s\phi_1)$ et $\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^{\langle a, w_s\phi_1\rangle})$. Cette isométrie commute à l'action de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. De même, a agissant par permutation des composantes de $W^\circ(s)^{w_sF^*}$, on a une isométrie bijective naturelle entre $\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^{\langle a, w_s\phi_1\rangle})$ et $\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a)$ commutant à l'action de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Nous noterons

$$\sigma_{s,a} : \mathrm{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a) \longrightarrow \mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)$$

la composition de ces isométries. Posons alors $R[s,a] = \mathcal{R}[s,a] \circ \sigma_{s,a}$. Notons que, si $b \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ et si $f \in \mathrm{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a)$, alors, d'après **17.17**, on a

$$R[s,a]_{{}^bf} = R[s,a]_f. \tag{23.4}$$

L'application $\sigma_{s,a}$ se restreint en une isométrie bijective toujours notée

$$\sigma_{s,a} : \big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \longrightarrow \big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^a\phi_1)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$$

à condition de munir $\big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$ du produit scalaire $\langle,\rangle'_{s,a} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|}\langle,\rangle_{W^\circ(s)^{w_sF^*}a}$. L'application $R[s,a] : \big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \to \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,[s],a)$ est alors une isométrie bijective (pour les produits scalaires $\langle,\rangle'_{s,a}$ et $\langle,\rangle_{\mathbf{G}^F}$). Faisons l'identification isométrique canonique

$$\mathrm{Cent}(W(s)^{w_sF^*}) = \overset{\perp}{\bigoplus_{a\in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}} \big(\mathrm{Cent}(W^\circ(s)^{w_sF^*}a)\big)^{A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}}$$

et, à travers cette identification, posons

$$R[s] = \bigoplus_{a\in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} R[s,a].$$

On a alors :

Proposition 23.5. — *L'application* $R[s] : \mathrm{Cent}(W(s)^{w_sF^*}) \longrightarrow \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,[s])$ *est une isométrie bijective.*

Si cela s'avère nécessaire, nous noterons $\sigma^{\mathbf{G}}_{s,a}$, $R[s,a]^{\mathbf{G}}$ et $R[s]^{\mathbf{G}}$ les applications $\sigma_{s,a}$, $R[s,a]$ et $R[s]$.

23.D. Quelques propriétés de l'isométrie $R[s]$. — Nous allons commencer par étudier l'action de $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ à travers cette isométrie. Si $z \in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et si $f \in \mathrm{Cent}(W(s)^{w_sF^*})$, alors

$$\tau_z^{\mathbf{G}} R[s]_f = R[s]_{f\hat{\omega}_s^0(z)}, \tag{23.6}$$

où $\hat{\omega}_s^0(z)$ est vu comme un caractère linéaire de $W(s)^{w_sF^*} = W^\circ(s)^{w_sF^*} \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$.

Nous allons maintenant étudier un cas particulier d'induction de Lusztig. Un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}^*$ de $\mathbf{G}^*$ est dit $(s,\mathbf{G}^*)$-déployé s'il est F^*-stable et s'il contient $\mathbf{T}^*_{w_s}$. Un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ de $\mathbf{G}$ est dit $(s,\mathbf{G})$-déployé s'il est F^*-stable et s'il contient $\mathbf{T}_{w_s}$. Nous allons ici calculer l'induction de Lusztig $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} : \mathrm{Cent}(\mathbf{L}^F,[s]) \to \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,[s])$ lorsque $\mathbf{L}$ est $(s,\mathbf{G})$-déployé en utilisant les isométries $R[s]^{\mathbf{L}}$ et $R[s]^{\mathbf{G}}$. Mais avant cela, nous allons étudier quelques-unes des propriétés de ces sous-groupes de Levi.

Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi $(s, \mathbf{G})$-déployé. Notons $\mathbf{L}^*$ un sous-groupe de Levi F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ contenant $\mathbf{T}^*_{w_s}$ tel que le triplet $(\mathbf{L}^*, \mathbf{T}^*_{w_s}, F^*)$ soit dual de $(\mathbf{L}, \mathbf{T}_{w_s}, F)$. Par définition, $\mathbf{L}^*$ est $(s, \mathbf{G}^*)$-déployé. Comme dans §17.D, définissons un sous-groupe parabolique standard $W^\circ_{\mathbf{L}}(s)$ de $W^\circ(s)$ ainsi qu'un élément $w_{\mathbf{L}}$ de $W^\circ(s)$. Notons $w_{\mathbf{L},s}$ l'élément de $W^\circ_{\mathbf{L}}(s)$ défini comme w_s. Alors il est possible de choisir $w_{\mathbf{L}}$ et $w_{\mathbf{L},s}$ tels que $w_s = w_{\mathbf{L},s} w_{\mathbf{L}}$. Par suite $W^\circ_{\mathbf{L}}(s) w_{\mathbf{L}} \phi_1 = W^\circ_{\mathbf{L}}(s) w_s \phi_1$ et l'application $R[s]^{\mathbf{L}}$ est une isométrie $\mathrm{Cent}(W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cent}(\mathbf{L}^F, [s])$.

Proposition 23.7. — *Soit* $\mathbf{L}$ *un sous-groupe de Levi* $(s, \mathbf{G})$*-déployé de* $\mathbf{G}$*. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cent}(W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}) \arrow[r, "R[s]^{\mathbf{L}}"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}}^{W(s)^{w_s F^*}}"'] & \mathrm{Cent}(\mathbf{L}^F, [s]) \arrow[d, "R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}"] \\
\mathrm{Cent}(W(s)^{w_s F^*}) \arrow[r, "R[s]^{\mathbf{G}}"] & \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. — Soit $a \in A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}$. Soit f une fonction centrale sur $W^\circ_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*} a$ invariante par l'action de $A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}$. Notons $f^\#$ son extension par 0 en une fonction centrale sur $W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}$. Il nous suffit de montrer que

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} R[s]^{\mathbf{L}}_{f^\#} = \Big(R[s]^{\mathbf{G}} \circ \mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}}^{W(s)^{w_s F^*}}\Big)(f^\#).$$

Posons $I = \mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}}^{W(s)^{w_s F^*}} f^\#$, $g = \mathrm{Ind}_{W^\circ_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*} a}^{W^\circ(s)^{w_s F^*} a} f$ et notons $g^\#$ l'extension de g par 0 en une fonction (pas forcément centrale) sur $W(s)^{w_s F^*}$. Notons tout de même que $g^\#$ est invariante par $W^\circ(s)^{w_s F^*}$-conjugaison. On a alors

$$f^\# = \frac{1}{|A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}|} \mathrm{Ind}_{W^\circ_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*} a}^{W_{\mathbf{L}}(s)^{w_s F^*}} f$$

et donc

$$I = \frac{1}{|A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}|} \sum_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} {}^a g^\#.$$

Compte tenu de **23.4**, on a donc

$$R[s]^{\mathbf{G}}_I = \frac{|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|}{|A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}|} R[s, a]^{\mathbf{G}}_g.$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}| R[s, a]^{\mathbf{G}}_g = |A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}| R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} R[s, a]^{\mathbf{L}}_f.$$

En d'autres termes, nous devons montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cent}(W_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^{w_sF^*}a) \arrow[r, "|A_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}|R[s,a]^{\mathbf{L}}"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_{W_{\mathbf{L}}^{\circ}(s)^{w_sF^*}a}^{W^{\circ}(s)^{w_sF^*}a}"'] & \mathrm{Cent}(\mathbf{L}^F,[s],a) \arrow[d, "R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}"] \\
\mathrm{Cent}(W^{\circ}(s)^{w_sF^*}a) \arrow[r, "|A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}|R[s,a]^{\mathbf{G}}"] & \mathrm{Cent}(\mathbf{G}^F,[s],a),
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Cela découle de la commutativité du diagramme **33.8** et de la proposition **17.24**. □

Nous terminons par une formule exprimant $R[s]_f$ dans un cas particulier. Si ξ est un caractère linéaire de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, nous verrons ξ comme une fonction centrale sur $W(s)^{w_sF^*}$ comme dans la formule **23.6**.

Proposition 23.8. — *Supposons que la conjecture* ($\mathfrak{G}$) *a lieu dans* $\mathbf{G}$. *Soit* $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*})^\wedge$. *Alors*

$$R[s]_\xi = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C^{\circ}_{\mathbf{G}^*}(s)}\rho_{s,\xi}.$$

Démonstration. — Notons $1_{s,a}$ la fonction sur $W^{\circ}(s)^{w_sF^*}a$ constante et égale à 1. Alors $\sigma_{s,a}(1_{s,a})$ est constante et égale à 1. Puisque $\xi = \sum_{a\in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \xi(a)1_{s,a}$, on a

$$R[s]_\xi = \sum_{a\in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} \xi(a)\mathcal{R}[s,a]_{\sigma_{s,a}(1_{s,a})}.$$

Il suffit alors d'utiliser **17.1** et la proposition **17.22**. □

23.E. Caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$. — Nous allons montrer ici que, si η est un caractère irréductible de $W(s)^{w_sF^*}$, alors $\pm R[s]_\eta$ est un caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$. Nous aurons cependant besoin de la conjecture ($\mathfrak{G}$) ce qui, à l'heure actuelle, restreint le domaine de validité de ce résultat au cas où q est grand. Sachant que c'est une fonction centrale de norme 1, il suffit de montrer que c'est un caractère virtuel de $\mathbf{G}^F$. Pour cela, nous utiliserons le corollaire **34.3** ainsi que les propositions **23.7** et **23.8**.

Théorème 23.9. — *Supposons que la conjecture* ($\mathfrak{G}$) *a lieu dans* $\mathbf{G}$. *Soit* $\eta \in \mathrm{Cent}(W(s)^{w_sF^*})$. *Alors* $R[s]_\eta \in \pm\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s])$ *si et seulement si* $\eta \in \pm\,\mathrm{Irr}\,W(s)^{w_sF^*}$.

Démonstration. — Nous allons commencer par montrer le lemme suivant :

Lemme 23.10. — *Soit* W_1 *un sous-groupe parabolique* w_sF^**-stable de* $W^{\circ}(s)$ *et soit* A_1 *son normalisateur dans* $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. *Alors il existe un sous-groupe de Levi* $(s,\mathbf{G})$*-déployé* $\mathbf{L}$ *de* $\mathbf{G}$ *tel que* $W_{\mathbf{L}}(s) = W_1 \rtimes A_1$.

Démonstration. — On peut identifier le groupe $W_1 \rtimes A_1$ à un sous-groupe F-stable de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_{w_s})/\mathbf{T}_{w_s}$. Posons alors
$$\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}\big((\mathbf{T}_{w_s}^{W_1 \rtimes A_1})^\circ\big).$$
Alors $\mathbf{L}$ est F-stable et $(s, \mathbf{G})$-déployé. D'autre part, d'après le lemme **3.3**, on a $W_{\mathbf{L}}^\circ(s) = W_1$. Il est de plus clair que $W_{\mathbf{L}}(s)$ contient $W_1 \rtimes A_1$. Comme A_1 est le normalisateur de $W_{\mathbf{L}}^\circ(s) = W_1$ dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$, on en déduit que $W_{\mathbf{L}}(s) = W_1 \rtimes A_1$. $\square$

Soit maintenant $\eta \in \mathbb{Z}\operatorname{Irr} W(s)^{w_s F^*}$. D'après le lemme **23.10** et le corollaire **34.3**, il existe une famille $(\mathbf{L}_i)_{i\in\mathcal{S}}$ de sous-groupes de Levi $(s, \mathbf{G})$-déployés de $\mathbf{G}$, des caractères linéaires ξ_i de $W_{\mathbf{L}_i}(s)^{w_s F^*}$ triviaux sur $W_{\mathbf{L}_i}^\circ(s)^{w_s F^*}$ $(i \in \mathcal{S})$ et une famille d'entiers relatifs $(a_i)_{i\in\mathcal{S}}$ tels que
$$\eta = \sum_{i\in\mathcal{S}} a_i \operatorname{Ind}_{W_{\mathbf{L}_i}(s)^{w_s F^*}}^{W(s)^{F^*}} \xi_i.$$
D'après les propositions **23.7** et **23.8**, on a
$$R[s]_\eta = \sum_{i\in\mathcal{S}} a_i \varepsilon_{\mathbf{L}_i} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{L}_i^*}(s)} R_{\mathbf{L}_i}^{\mathbf{G}} \rho_{s,\xi_i}^{\mathbf{L}_i}.$$
Par suite, $R[s]_\eta$ est un caractère virtuel de $\mathbf{G}^F$. Si η est de plus irréductible, $R[s]_\eta$ est un caractère virtuel de norme 1 (voir proposition **23.5**), donc c'est, au signe près, un caractère irréductible. $\square$

Comme conséquence directe de la preuve du théorème précédent, on obtient :

Corollaire 23.11. — *Supposons que la conjecture* $(\mathfrak{G})$ *a lieu dans* $\mathbf{G}$. *Notons* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des couples* $(\mathbf{L}, \rho)$ *ou* $\mathbf{L}$ *est un sous-groupe de Levi* $(s, \mathbf{G})$*-déployé de* $\mathbf{G}$ *et* $\rho \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s])$ *est un caractère semi-simple. Soit* $\gamma \in \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\gamma \in \mathbb{Z}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.
(2) $\gamma \in \sum_{(\mathbf{L},\rho)\in\mathcal{S}} \mathbb{Z} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \rho$.

Corollaire 23.12. — *Supposons que la conjecture* $(\mathfrak{G})$ *a lieu dans* $\mathbf{G}$. *Notons* $\mathcal{R}$ *l'ensemble des couples* $(\mathbf{L}, \chi)$ *ou* $\mathbf{L}$ *est un sous-groupe de Levi* $(s, \mathbf{G})$*-déployé de* $\mathbf{G}$ *et* $\chi \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s])$ *est un caractère régulier. Soit* $\gamma \in \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, [s])$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\gamma \in \mathbb{Z}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.
(2) $\gamma \in \sum_{(\mathbf{L},\chi)\in\mathcal{R}} \mathbb{Z} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \chi$.

23.F. Signes. — Nous allons terminer cette section en expliquant comment déterminer le signe intervenant dans le théorème **23.9**. Plus précisément, soit $\eta \in \operatorname{Irr} W(s)^{w_s F^*}$. D'après le théorème **23.9**, il existe un unique $\varepsilon_\eta \in \{1, -1\}$ tel que $\varepsilon_\eta R[s]_\eta$ soit un caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$. Pour calculer ε_η, nous rappelons la construction des caractères irréductibles de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ par Lusztig et Srinivasan [**LS77**] dans le cadre de la théorie de Deligne-Lusztig. Si χ est un caractère irréductible F^*-stable de $W(\widetilde{s}) = W^\circ(\widetilde{s}) = W^\circ(s)$, nous noterons $\hat{\chi}$ son *extension préférée* (au sens de [**Lus85**, chapitre IV, §17]) au groupe $W(\widetilde{s}) \rtimes \langle \phi_1 \rangle$. Rappelons aussi que l'isométrie $\mathcal{R}(\widetilde{s}) : \mathrm{Cent}(W(\widetilde{s})\phi_1) \to \mathrm{Cent}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, (\widetilde{s}))$ a été définie dans l'exemple **17.16**.

***Théorème 23.13* (Lusztig-Srinivasan).** — *Si χ est un caractère irréductible F^*-stable de $W(\widetilde{s})$, alors la fonction centrale $\varepsilon_{\widetilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{C_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s})}\mathcal{R}(\widetilde{s})_{\hat{\chi}}$ est un caractère irréductible de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ appartenant à $\mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, (\widetilde{s}))$. De plus, l'application*

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Irr}\, W(\widetilde{s}))^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\widetilde{\mathbf{G}}^F, [\widetilde{s}]) \\ \chi & \longmapsto & \varepsilon_{\widetilde{\mathbf{G}}}\varepsilon_{C_{\widetilde{\mathbf{G}}^*}(\widetilde{s})}\mathcal{R}(\widetilde{s})_{\hat{\chi}} \end{array}$$

est bijective.

Si χ est un caractère irréductible de $W^\circ(s)$, nous noterons $A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)$ son stabilisateur. Notons $\mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)$ l'ensemble des couples (χ,ξ) où $\chi \in (\mathrm{Irr}\, W^\circ(s))^{F^*}$ et $\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*})^\wedge$. Si $(\chi,\xi) \in \mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)$, on note χ_ϕ le caractère irréductible de $W^\circ(s)^{w_s F^*}$ correspondant à χ par la bijection **33.4** : alors $A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*}$ est le stabilisateur de χ_ϕ dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Notons $\widetilde{\chi}_\phi$ l'extension canonique de χ_ϕ à $W^\circ(s)^{w_s F^*} \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*}$ (voir proposition **33.1**). Posons alors

$$\eta_{\chi,\xi} = \mathrm{Ind}_{W^\circ(s)^{w_s F^*} \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*}}^{W(s)^{w_s F^*}} (\widetilde{\chi}_\phi \otimes \xi).$$

Le groupe $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ agit sur $\mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)$ par conjugaison sur la première composante. D'après **33.2**, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*) & \longrightarrow & \mathrm{Irr}\, W(s)^{w_s F^*} \\ (\chi,\xi) & \longmapsto & \eta_{\chi,\xi} \end{array} \tag{23.14}$$

est surjective et ses fibres sont les orbites sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Notons maintenant $\widetilde{\chi}$ l'extension canonique de χ à $W^\circ(s) \rtimes \langle w_s\phi_1 \rangle = W^\circ(s) \rtimes \langle \phi_1 \rangle$.

Proposition 23.15. — *Soit χ un caractère irréductible F^*-stable de $W^\circ(s)$. Alors*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{G}^F}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F} \mathcal{R}(\widetilde{s})_{\widetilde{\chi}} = \sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*})^\wedge} R[s]_{\eta_{\chi,\xi}}.$$

Démonstration. — On a

$$\sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*})^\wedge} \eta_{\chi,\xi} = \mathrm{Ind}_{W^\circ(s)^{w_s F^*}}^{W(s)^{w_s F^*}} \chi_\phi.$$

Cette fonction centrale est nulle en dehors de $W^\circ(s)^{w_s F^*}$ et coïncide avec $\sum_{a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}} {}^a\chi_\phi$ sur $W^\circ(s)^{w_s F^*}$. Compte tenu de **23.4**, on a

$$\sum_{\xi \in (A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*})^\wedge} R[s]_{\eta_{\chi,\xi}} = |A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}| \times R[s,1]_{\chi_\phi}.$$

Mais, par construction, $R[s,1]_{\chi_\phi} = \mathcal{R}(s,1)_{\widetilde{\chi}}$. Le résultat découle alors de la proposition **11.5** (a). □

D'après [**Lus85**, chapitre IV, §17], il existe un unique $\varepsilon_\chi \in \{1,-1\}$ tel que $\hat{\chi} = \varepsilon_\chi \widetilde{\chi}$ sur $W^\circ(s)\phi_1$. Ce signe est déterminé à partir des deux exemples extrêmes suivants :

Exemple 23.16. — Si $w_s = 1$, alors $\varepsilon_\chi = 1$ (voir corollaire **35.3**).

Exemple 23.17. — Si $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$ est quasi-simple et si $w_s \neq 1$, alors, d'après [**Lus85**, chapitre IV, §17.2 (a)], on a $\varepsilon_\chi = (-1)^{\mathbf{a}_\chi}$, où $\mathbf{a}_\chi$ est le $\mathbf{a}$-invariant attaché à χ (voir [**Lus85**, §16.2]).

Il résulte alors de la proposition **23.15** et du théorème de Lusztig-Srinivasan que :

Corollaire 23.18. — *Si* $(\chi, \xi) \in \mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), F^*)$, *alors* $\varepsilon_{\eta_{\chi,\xi}} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} \varepsilon_\chi$.

23.G. Restriction. — Nous allons terminer cette section par un résultat concernant la restriction des caractères de $\mathbf{G}^F$ à un sous-groupe du même type. Soit donc $\mathbf{G}'$ un sous-groupe réductif connexe F-stable de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{D}(\mathbf{G})$. Notons $j : \mathbf{G}' \hookrightarrow \mathbf{G}$ l'injection canonique. Cette injection induit un morphisme surjectif $j^* : \mathbf{G}^* \to \mathbf{G}'^*$ commutant à l'action de F^* (ici, $(\mathbf{G}'^*, F^*)$ désigne un dual de $(\mathbf{G}', F)$). Posons $s' = j^*(s)$. L'application j induit une injection $W(s) \hookrightarrow W(s')$ commutant avec F^* et telle que $W^\circ(s) = W^\circ(s')$ (avec des notations évidentes). Il est alors facile de vérifier que, si $\eta \in \operatorname{Cent}(W(s)^{F^*})$, alors

$$\operatorname{Res}^{\mathbf{G}^F}_{\mathbf{G}'^F} R[s]^{\mathbf{G}}_\eta = R[s']^{\mathbf{G}'}_{\operatorname{Ind}^{W(s')^{F^*}}_{W(s)^{F^*}} \eta}. \tag{23.19}$$

24. Conjecture de Lusztig

Dorénavant, nous noterons $\mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, [s])$ l'ensemble $\{\varepsilon_\eta R[s]_\eta \mid \eta \in \operatorname{Irr} W(s)^{w_s F^*}\}$. Il est vraisemblable qu'en général $\mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, [s]) = \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$. Cependant, nous ne sommes pour l'instant capable de le prouver que lorsque q est assez grand (voir le théorème **23.9**). Nous travaillerons néanmoins avec cet ensemble. Nous posons $\mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, (s)) = \coprod_{\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))} \mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, [s_\alpha])$.

24.A. Familles. — Reprenons les notations précédant le lemme **9.14**. Si $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$, soit $\delta(\alpha)$ l'élément de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ représenté par $g_\alpha^{-1} F(g_\alpha)$. En fait, l'application $\delta : H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s)) \to A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est une section du morphisme canonique $A_{\mathbf{G}^*}(s) \to H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. Ce n'est en général pas un morphisme de groupes.

Le groupe $W(s_\alpha)$ est naturellement isomorphe à $W(s)$ (grâce à la conjugaison par g_α), mais nous devons le munir d'un automorphisme de Frobenius différent $\delta(\alpha)F^*$. Par exemple, on a une application surjective (voir **23.14**)

$$\mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), \delta(\alpha)F^*) \longrightarrow \operatorname{Irr} W(s)^{w_s \delta(\alpha) F^*}$$

qui induit une application surjective

$$\mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), \delta(\alpha)F^*) \longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, [s_\alpha]).$$

On en déduit une troisième application surjective

$$\coprod_{\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))} \mathcal{I}(W^\circ(s), A_{\mathbf{G}^*}(s), \delta(\alpha)F^*) \longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, (s)). \tag{24.1}$$

Les fibres de cette application sont des $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$-orbites (en effet, puisque $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est abélien, on a $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{aF^*} = A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ pour tout $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$). Nous allons ici donner une autre description de cette surjection en termes de familles.

Soit χ un caractère irréductible de $W^\circ(s)$. S'il existe $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ tel que χ est $\delta(\alpha)F^*$-stable, alors l'orbite de χ sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est F^*-stable. Réciproquement, si l'orbite de χ sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ est F^*-stable, alors il existe $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ et $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ tels que $\chi = {}^{a^{-1}\delta(\alpha)F^*(a)}({}^{F^*}\chi)$. En particulier, ${}^a\chi$ est $\delta(\alpha)F^*$-stable. Nous allons donc utiliser les $A_{\mathbf{G}^*}(s)$-orbites F^*-stables de caractères irréductibles pour regrouper les éléments de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ en familles. On note

$$\mu_\chi : H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)) \longrightarrow H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$$

le morphisme naturel de groupes.

Si χ est un caractère irréductible de $W^\circ(s)$, nous noterons $[\chi]$ son orbite sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)$. On note $A_{\mathbf{G}^*}(s)\backslash \operatorname{Irr} W^\circ(s)$ l'ensemble de ces orbites. Fixons un élément F^*-stable $[\chi] \in A_{\mathbf{G}^*}(s)\backslash \operatorname{Irr} W^\circ(s)$. Alors, d'après le calcul précédent, on peut choisir χ de sorte que χ soit $\delta(\alpha_\chi)F^*$-stable pour un $\alpha_\chi \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. Bien sûr, le couple (χ, α_χ) n'est pas uniquement déterminé par $[\chi]$. De plus, l'élément α_χ n'est pas forcément déterminé par le choix de χ.

Soit maintenant $(\xi, \alpha) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi), F^*)$. Alors il existe $a \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ tel que

$$a^{-1}\delta(\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi)\delta(\alpha_\chi)^{-1}F^*(a) \in A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)$$

et représente α. On pose alors

$$\chi_\alpha = {}^a\chi.$$

Le caractère χ_α est déterminé à $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$-conjugaison près et il est facile de vérifier que χ_α est stable sous l'action de $\delta(\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi)F^*$. On pose alors

(24.2) $$R(s,\chi,\alpha_\chi)_{\alpha,\xi} = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}\varepsilon_\chi R[s_{\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi}]_{\eta_{\chi_\alpha},\xi} \in \mathcal{E}'(\mathbf{G}^F, (s)).$$

Alors la fonction centrale $R(s,\chi,\alpha_\chi)_{\alpha,\xi}$ dépend uniquement du choix du couple χ, α_χ et δ (pour plus de précision, voir la remarque **24.7**) : rappelons que c'est un caractère irréductible, du moins lorsque q est assez grand (voir le théorème **23.9** et le corollaire **23.18**).

Proposition 24.3. — *Soient (ξ,α) et (ξ',α') deux éléments de $\mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi), F^*)$. Alors $R(s,\chi,\alpha_\chi)_{\alpha,\xi} = R(s,\chi,\alpha_\chi)_{\alpha',\xi'}$ si et seulement si $(\xi,\alpha) = (\xi',\alpha')$.*

Démonstration. — Soient (ξ,α) et (ξ',α') deux éléments de $\mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi), F^*)$ tels que $R(s,\chi,\alpha_\chi)_{\alpha,\xi} = R(s,\chi,\alpha_\chi)_{\alpha',\xi'}$. Alors, par construction, on sait que $\mu_\chi(\alpha) = \mu_\chi(\alpha')$, les caractères χ_α et $\chi_{\alpha'}$ sont conjugués sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ et $\xi = \xi'$ (d'après la proposition **23.15**). Soient a et a' deux éléments de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ tels que $a^{-1}\delta(\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi)\delta(\alpha_\chi)^{-1}F^*(a)$ et $a'^{-1}\delta(\mu_\chi(\alpha')\alpha_\chi)\delta(\alpha_\chi)^{-1}F^*(a')$ appartiennent à $A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)$ et représentent α et α' respectivement. Alors, puisque $\chi_\alpha = {}^a\chi$ et

$\chi_{\alpha'} = {}^{a'}\chi$ sont conjugués sous $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$, il existe $b \in A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)$ et $c \in A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ tels que $a' = abc$. Cela montre que $\alpha = \alpha'$. $\square$

Si on note $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s),[\chi])$ l'ensemble $\{R(s,\chi,\alpha_\chi)_{\alpha,\xi} \mid (\xi,\alpha) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi),F^*)\}$, alors $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s),[\chi])$ ne dépend que de $[\chi]$ et non du choix de χ et α_χ. On a alors

$$\textbf{(24.4)} \qquad \mathcal{E}'(\mathbf{G}^F,(s)) = \coprod_{[\chi] \in \left(A_{\mathbf{G}^*}(s) \backslash \operatorname{Irr} W^\circ(s)\right)^{F^*}} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s),[\chi])$$

et la proposition **24.3** montre qu'il y a une bijection

$$\textbf{(24.5)} \qquad \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi),F^*) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s),[\chi])$$

pour tout $[\chi] \in \left(A_{\mathbf{G}^*}(s) \backslash \operatorname{Irr} W^\circ(s)\right)^{F^*}$. Cette bijection dépend du choix de χ, α_χ, δ. Nous noterons $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F,(s),[\chi])$ le sous-$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel de $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F,(s))$ engendré par $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s),[\chi])$. On a, d'après **24.4**,

$$\textbf{(24.6)} \qquad \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F,(s)) = \overset{\perp}{\bigoplus_{[\chi] \in \left(A_{\mathbf{G}^*}(s) \backslash \operatorname{Irr} W^\circ(s)\right)^{F^*}}} \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F,(s),[\chi])$$

Remarque 24.7. — Nous allons montrer ici que la bijection **24.5** (que nous noterons ici f) ne dépend « pas trop » du choix de la section δ. Soit $\delta' : H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s)) \to A_{\mathbf{G}^*}(s)$ une autre section de l'application canonique $A_{\mathbf{G}^*}(s) \to H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$. Pour tout $\alpha \in H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$, il existe $e_\alpha \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ tel que $\delta'(\alpha) = e_\alpha^{-1}\delta(\alpha)F^*(e_\alpha)$. Il faut d'abord noter que e_α n'est pas uniquement déterminé, mais que la classe $e_\alpha A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$ l'est. Posons $\chi' = {}^{e_{\alpha_\chi}^{-1}}\chi$. Alors χ' est $\delta'(\alpha_\chi)F^*$-stable. Notons $f' : \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi),F^*) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s),[\chi])$ la bijection analogue de **24.5** obtenue en partant du triplet $(\chi', \alpha_\chi, \delta')$. Nous allons montrer que

$$(*) \qquad f = f'.$$

Soit $(\alpha,\xi) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi),F^*)$. Choisissons un élément a dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ tel que

$$a^{-1}\delta(\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi)\delta(\alpha_\chi)^{-1}F^*(a) \in A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi).$$

Posons $a' = e_{\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi}^{-1} e_{\alpha_\chi} a$. Alors

$$a'^{-1}\delta'(\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi)\delta'(\alpha_\chi)^{-1}F^*(a') \in A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi).$$

Posons comme précédemment $\chi_\alpha = {}^a\chi$ et $\chi'_\alpha = {}^{a'}\chi'$. Alors $\eta_{\chi_\alpha,\xi}$ est un caractère irréductible de $W(s)^{w_s\delta(\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi)F^*}$ et $\eta_{\chi'_\alpha,\xi}$ est un caractère irréductible de

$$W(s)^{w_s\delta'(\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi)F^*} = e_{\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi} W(s)^{w_s\delta(\mu_\chi(\alpha_\chi)\alpha)F^*} e_{\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi}^{-1}.$$

Pour montrer $(*)$, il nous suffit de montrer que $\eta_{\chi_\alpha,\xi} = {}^{e_{\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi}}\eta_{\chi'_\alpha,\xi}$. Cela découle immédiatement du fait que $\chi_\alpha = {}^{e_{\mu_\chi(\alpha)\alpha_\chi}}\chi'_\alpha$.

24.B. Transformation de Fourier. — Fixons $\chi \in \operatorname{Irr} W^\circ(s)$ dont la $A_{\mathbf{G}^*}(s)$-orbite est F^*-stable et soit α_χ un élément de $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ tel que χ soit $\delta(\alpha_\chi)F^*$-stable. Si $(\xi, \alpha) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi), F^*)$, notons $R(s,\chi,\alpha_\chi)_{\alpha,\xi}$ la fonction centrale définie précédemment grâce à ce choix-ci via **24.2**.

Si $(a,\tau) \in \mathcal{M}^\vee(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi), F^*)$, posons

$$\hat{R}(s,\chi,\alpha_\chi)_{a,\tau} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*}|} \sum_{(\xi,\alpha)\in\mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi),F^*)} \xi(a)^{-1}\tau(\alpha) R(s,\chi,\alpha_\chi)_{\alpha,\xi}.$$

Il découle immédiatement de cette définition que, si $(\xi,\alpha) \in \mathcal{M}(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi), F^*)$, alors
(**24.8**)

$$R(s,\chi,\alpha_\chi)_{\alpha,\xi} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)^{F^*}|} \sum_{(a,\tau)\in\mathcal{M}^\vee(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi),F^*)} \xi(a)\tau(\alpha)^{-1} \hat{R}(s,\chi,\alpha_\chi)_{a,\tau}.$$

Notons par ailleurs que $(\hat{R}(s,\chi,\alpha_\chi)_{a,\tau})_{(a,\tau)\in\mathcal{M}^\vee(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi),F^*)}$ est une base orthonormale de $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), [\chi])$. La proposition suivante décrit l'action de $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$ et de $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$ sur $\operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), [\chi])$ dans cette base.

Proposition 24.9. — *Soit $(a,\tau) \in \mathcal{M}^\vee(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi), F^*)$. Alors :*

(a) $\hat{R}(s,\chi,\alpha_\chi)_{a,\tau} \in \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F, (s), a)$.

(b) *Soit $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$. Notons τ_z la restriction à $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi))$ du caractère linéaire $\hat{\omega}_s^1(\bar{z})$ de $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$, où $\bar{z}$ désigne la classe de z dans $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^F$. Alors*

$$t_z^{\mathbf{G}} \hat{R}(s,\chi,\alpha_\chi)_{a,\tau} = \hat{s}_{\alpha_\chi}(z) \hat{R}(s,\chi,\alpha_\chi)_{a,\tau\tau_z}.$$

Démonstration. — La première assertion découle immédiatement de la définition. La deuxième découle du lemme **9.14** et de la remarque **11.1** (d). □

24.C. Conjecture de Lusztig. — Fixons un caractère χ de $W^\circ(s)$ et un élément α_χ de $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ tels que ${}^{\delta(\alpha_\chi)F^*}\chi = \chi$. Soit $(a,\tau) \in \mathcal{M}^\vee(A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi), F^*)$. Notons χ_a le caractère irréductible de $W^\circ(s)^a$ associé à χ par la bijection **33.4**. Son stabilisateur dans $A_{\mathbf{G}^*}(s) \rtimes \langle\phi_1\rangle$ est $A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi) \rtimes \langle\delta(\alpha_\chi)\phi_1\rangle$. On note $\tilde{\chi}_a$ l'extension canonique de χ_a à $W^\circ(s)^a \rtimes (A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi) \rtimes \langle\delta(\alpha_\chi)\phi_1\rangle)$. On note $\tilde{\tau}_{\alpha_\chi}$ l'extension de τ à $A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi) \rtimes \langle\delta(\alpha_\chi)\phi_1\rangle$ telle que $\tilde{\tau}_{\alpha_\chi}(\delta(\alpha_\chi)\phi_1) = 1$. Pour finir, on pose

$$\eta_{\chi,a,\tau} = \operatorname{Ind}_{W^\circ(s)^a \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)}^{W(s)^a} (\tilde{\chi}_a \otimes \tau)$$

et

$$\tilde{\eta}_{\chi,\alpha_\chi,a,\tau} = \operatorname{Ind}_{W^\circ(s)^a \rtimes (A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)\rtimes\langle\delta(\alpha_\chi)\phi_1\rangle)}^{W(s)^a \rtimes \langle\phi_1\rangle} (\tilde{\chi}_a \otimes \tilde{\tau}_{\alpha_\chi}).$$

Alors $\eta_{\chi,a,\tau}$ est un caractère F^*-stable de $W(s)^a$ et $\tilde{\eta}_{\chi,\alpha_\chi,a,\tau}$ est une extension de $\eta_{\chi,a,\tau}$ à $W(s)^a \rtimes \langle\phi_1\rangle$.

Théorème 24.10. — *Avec les notations précédentes, on a*

$$\hat{R}(s,\chi,\alpha_\chi)_{a,\tau} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} \varepsilon_\chi \mathcal{R}(s,a)_{\tilde{\eta}_{\chi,\alpha_\chi,a,\tau}}.$$

Démonstration. — Quitte à changer d'élément semi-simple F^*-stable dans (s), on peut supposer que $\alpha_\chi = 1$ (rappelons qu'alors, puisqu'on a choisi $g_1 = 1$, on a $\delta(\alpha_\chi) = 1$). D'autre part, d'après la remarque **24.7**, nous pourrons supposer que $\delta(\mu_1(\alpha)) \in A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)$ pour tout $\alpha \in A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)$. Ici, $\mu_1 : A_{\mathbf{G}^*}(s) \to H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s))$ est l'application canonique.

Soit $\alpha \in A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)$. Notons $\bar{\alpha}$ la classe de α dans $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi))$. Alors il existe $b \in A_{\mathbf{G}^*}(s)$ tel que $b^{-1}\delta(\mu_1(\alpha))F^*(b) = \alpha$ et on pose $\chi_\alpha = {}^b\chi$. Alors $R[s_{\mu_1(\alpha)}]_{\eta_{\chi_\alpha,\xi}}$ ne dépend que de $\bar{\alpha}$ et est égal à $R[s_{\mu_\chi(\bar{\alpha})}]_{\eta_{\chi_{\bar{\alpha}},\xi}}$. Par suite, si on note $\chi_{\alpha,a}$ le caractère irréductible de $W^\circ(s)^a$ associé à χ_α par la bijection **33.4**, on a

$$\hat{R}(s,\chi,\alpha_\chi)_{a,\tau} = \frac{1}{|A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)|} \sum_{\alpha \in A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)} \tau(\alpha)^{-1} \mathcal{R}[s_{\mu_1(\alpha)}, a]_{\widetilde{\chi}_{\alpha,a}}.$$

D'autre part, si $w \in W^\circ(s)^a$, on a $\widetilde{\chi}_{\alpha,a}(w\delta(\mu_1(\alpha))\phi_1) = \widetilde{\chi}_a(b^{-1}wb\alpha)$ et $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_{s_{\mu_1(\alpha)},w,a}} \dot{\rho}^{\mathbf{L}_{s_{\mu_1(\alpha)},w,a}}_{s_{w\delta(\mu_1(\alpha))},a} = R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_{s,w\alpha,a}} \dot{\rho}^{\mathbf{L}_{s,w\alpha,a}}_{s_{w\alpha},a}$. Par suite,

$$\hat{R}(s,\chi,\alpha_\chi)_{a,\tau} = \frac{1}{|W^\circ(s)^a \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)|} \sum_{w \in W^\circ(s)^a \rtimes A_{\mathbf{G}^*}(s,\chi)} (\widetilde{\chi}_a \otimes \widetilde{\tau}_1)(w\phi_1) R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_{s,w,a}} \dot{\rho}^{\mathbf{L}_{s,w,a}}_{s_w,a},$$

ce qui montre le résultat (voir aussi [**Bon99a**, lemme 3.1.1]). □

Le théorème **24.10** et le théorème **22.5** montrent la conjecture de Lusztig pour tous les groupes de type A lorsque q est assez grand :

***Corollaire 24.11* (Conjecture de Lusztig en type A).** — *Avec les notations précédentes, on a*

$$\hat{R}(s,\chi,\alpha_\chi)_{a,\tau} = \varepsilon_{\mathbf{G}} \varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} \varepsilon_\chi \mathcal{G}(\mathbf{L}_{s,a}, \omega_{\mathbf{L}_{s,a},s}(a))^{-1} \mathcal{X}_{K(s,a)_{\eta_{\chi,a,\tau}}, \widetilde{\eta}_{\chi,\alpha_\chi,a,\tau}}.$$

25. Table de caractères de $\mathbf{G}^F$

Le but de cette section est de décrire un algorithme théorique pour calculer la table de caractères de $\mathbf{G}^F$. Comme d'habitude, la validité de cet algorithme n'est démontrée que pour q assez grand, mais il est vraisemblable qu'il s'applique en toute généralité. Cet algorithme se présente en deux étapes. La première est une réduction du problème au calcul des valeurs des caractères en les éléments unipotents. Cet aspect est théoriquement très facile mais il est très difficile de le mettre en œuvre concrètement (par exemple par l'écriture d'un programme pour ordinateur). La deuxième étape consiste à décrire les valeurs des caractères en les éléments unipotents. Nous proposons une solution sommaire à ce problème, impliquant des résultats récents de T.Shoji [**Sho05**] : le cas où $\mathbf{G}^F = \mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ sera traité de façon plus détaillée dans le chapitre suivant 8.

25.A. Réduction au cas unipotent. — Soit $g \in \mathbf{G}^F$. Posons $t = g_{p'}$ et $u = g_p$: alors t est la partie semisimple de g tandis que u en est la partie unipotente. Une des particularités des groupes de type A est que $C^\circ_{\mathbf{G}}(t)$ est toujours un sous-groupe de Levi (F-stable bien sûr) de $\mathbf{G}$. On a alors, d'après [**DM91**, exercice 12.22],

$$R^{\mathbf{G}}_{C^\circ_{\mathbf{G}}(t)}(\gamma_g^{C^\circ_{\mathbf{G}}(t)}) = \gamma_g^{\mathbf{G}}.$$

Par suite, si γ est un caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$, on a

$$\gamma(g) = {}^*R^{\mathbf{G}}_{C^\circ_{\mathbf{G}}(t)}(\gamma)(g). \tag{25.1}$$

car $\gamma(g) = \langle \gamma, \gamma_g^{\mathbf{G}} \rangle_{\mathbf{G}^F}$. Or, déterminer l'application ${}^*R^{\mathbf{G}}_{C^\circ_{\mathbf{G}}(t)}$ (dans la base des caractères irréductibles) est équivalent à déterminer l'application $R^{\mathbf{G}}_{C^\circ_{\mathbf{G}}(t)}$, ce qui a été fait lorsque q est assez grand : il suffit de combiner la proposition **17.13** (ou la proposition **17.24**) et le théorème **23.9**. Pour finir la réduction au cas unipotent, il suffit de remarquer que, si λ est un caractère irréductible de $C^\circ_{\mathbf{G}}(t)^F$, alors $\lambda(g) = \omega_\lambda(t)\lambda(u)$, où ω_λ est le caractère linéaire du centre de $C^\circ_{\mathbf{G}}(s)^F$ égal à $\lambda/\lambda(1)$. Ce dernier peut être déterminé grâce à la remarque **11.1** (d).

25.B. Valeurs en les éléments unipotents. — Nous allons commencer par réduire la question de la valeur des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ en les éléments unipotents au cas où $\mathbf{G}^F = \mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ ou $\mathbf{G}^F = \mathbf{SU}_n(\mathbb{F}_q)$. Suivant les arguments de [**Lus92**, 0.1], le calcul de ces valeurs se ramène au cas où le groupe dérivé de $\mathbf{G}$ est simplement connexe. Par la formule **23.19**, on se ramène au cas où $\mathbf{G}$ est lui-même semi-simple. Par produits directs, on se ramène au cas où F permute transitivement les composantes quasi-simples de $\mathbf{G}$, ce dernier cas se ramenant facilement (par une descente des scalaires) au cas où $\mathbf{G}$ est quasi-simple, semi-simple et simplement connexe.

Supposons donc jusqu'à la fin de cette section que $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n(\mathbb{F})$ et que $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ est un endomorphisme de Frobenius sur $\mathbb{F}_q$. Compte tenu du corollaire **24.11**, le calcul des valeurs des caractères irréductibles en les éléments unipotents est ramené au calcul des valeurs des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères en les éléments unipotents. Ce calcul implique un algorithme effectif donné par G. Lusztig [**Lus85**, partie V, théorème 24.4] et la détermination précise de certaines normalisations pour ces fonctions caractéristiques [**Lus85**, 24.2.2]. Cette dernière étape a été complétée récemment par T. Shoji dans le cas où $\mathbf{G}^F = \mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ ou $\mathbf{SU}_n(\mathbb{F}_q)$ (voir [**Sho05**, théorème 3.4] pour le cas déployé et [**Sho05**, théorème 4.4] pour le cas non déployé). Nous proposons dans le chapitre 8 (voir théorème **28.7**) une preuve plus courte du résultat de T. Shoji pour le cas déployé.

CHAPITRE 8

LE GROUPE SPÉCIAL LINÉAIRE

Nous précisons dans ce chapitre, dans le cas du groupe spécial linéaire (ou de groupes légèrement plus généraux), quelques-uns des résultats obtenus dans le chapitre précédent. Nous établissons aussi une *décomposition de Jordan* des caractères et sa compatibilité avec l'induction de Lusztig (voir le diagramme **27.1**).

Hypothèse. — *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de ce chapitre, nous fixons un groupe à centre connexe* $\widetilde{\mathbf{G}}_{\bullet}$ *de type* A_{n-1} *muni d'un endomorphisme de Frobenius déployé* F *sur* $\mathbb{F}_q$ *et nous supposerons que* $\widetilde{\mathbf{G}}$ *est un sous-groupe de Levi* F*-stable de* $\widetilde{\mathbf{G}}_{\bullet}$.

Notons avant de commencer que l'hypothèse entraîne que $w_s = 1$ et donc que $\varepsilon_\chi = 1$ pour tout caractère irréductible F^*-stable χ de $W^\circ(s)$ (voir exemple **23.16**). En d'autres termes, F^* agit sur $W^\circ(s)$ (qui est un produit direct de groupes symétriques) seulement par permutation des composantes.

Un autre but de ce chapitre est de décrire un algorithme permettant de calculer les valeurs des caractères irréductibles de $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ en les éléments unipotents. Les résultats tels que nous les écrivons doivent permettre à un spécialiste d'écrire un programme pour ordinateur capable de calculer ces valeurs particulières : nous ne le faisons pas (faute de compétence) mais il est possible de traiter à la main le cas où $\mathbf{G}^F = \mathbf{SL}_4(\mathbb{F}_q)$ et le cas où n est premier et impair (dans ce dernier cas, nous n'apportons rien de nouveau, les résultats étant essentiellement contenus dans [**Leh73**], voire [**DLM92**]). Rappelons que le cas de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ a été traité par Schur [**Sch07**] et Jordan [**Jor07**].

26. Théorie de Harish-Chandra

Commençons par décrire les séries de Harish-Chandra contenues dans $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s])$.

Proposition 26.1. — *On a* $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]) = \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, \mathbf{L}_s, \rho_s^{\mathbf{L}_s})$.

Démonstration. — D'après la proposition **23.5**, on a $|\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s])| = |\operatorname{Irr} W(s)^{F^*}|$. D'après **16.6**, on a $|\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L}_s,\rho_s^{\mathbf{L}_s})| = |\operatorname{Irr} W(s)^{F^*}|$. Puisque $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\mathbf{L}_s,\rho_s^{\mathbf{L}_s})$ est contenu dans $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s])$, on a en fait l'égalité de ces deux ensembles. □

D'après la proposition **26.1** et d'après **16.6**, on obtient une bijection

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s]) \\ \eta & \longmapsto & R_\eta[s]. \end{array}$$

En fait, cette bijection coïncide avec celle obtenue via l'isométrie $R[s]$, du moins lorsque q est assez grand :

Théorème 26.2. — *Si la conjecture ($\mathfrak{G}$) a lieu dans* $\mathbf{G}$, *alors* $R_\eta[s] = \varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}R[s]_\eta$ *pour tout* $\eta \in \operatorname{Irr} W(s)^{F^*}$.

Démonstration. — Soit W_1 un sous-groupe parabolique standard F^*-stable de $W^\circ(s)$ et soit A_1 son normalisateur dans $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Alors, par le même raisonnement que dans la preuve du lemme **23.10**, on a $W_1 \rtimes A_1 = W_{\mathbf{L}}(s)$ pour

$$\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}\big((\mathbf{T}_1^{W_1\rtimes(A_1\rtimes\langle\phi_1\rangle)})^\circ\big).$$

Le groupe $\mathbf{L}$ est en fait $\mathbf{G}$-déployé. Donc, compte tenu du corollaire **34.3**, de la proposition **23.7** et du théorème **16.10** (c), il suffit de montrer le résultat lorsque η se factorise en un caractère linéaire de $A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. Cela découle alors de **16.7**, du théorème **16.10** (b) et de la proposition **23.8**. □

La preuve du théorème **26.2** montre également la version suivante plus précise du corollaire **23.11**. Il n'y a pas besoin d'hypothèse sur q car on peut passer par la théorie de Harish-Chandra et le théorème **16.10** (c).

Corollaire 26.3. — *Notons $\mathcal{S}_d$ l'ensemble des couples $(\mathbf{L},\rho)$ ou $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi $\mathbf{G}$-déployé de $\mathbf{G}$ dont un dual $\mathbf{L}^*$ dans $\mathbf{G}^*$ contient s et $\rho \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F,[s])$ est un caractère semi-simple. Soit $\gamma \in \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F,[s])$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\gamma \in \mathbb{Z}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s])$.

(2) $\gamma \in \sum_{(\mathbf{L},\rho)\in\mathcal{S}_d} \mathbb{Z}R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\rho$.

Corollaire 26.4. — *Notons $\mathcal{R}_d$ l'ensemble des couples $(\mathbf{L},\chi)$ ou $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi $\mathbf{G}$-déployé de $\mathbf{G}$ dont un dual $\mathbf{L}^*$ dans $\mathbf{G}^*$ contient s et $\chi \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F,[s])$ est un caractère régulier. Soit $\gamma \in \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F,[s])$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\gamma \in \mathbb{Z}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s])$.

(2) $\gamma \in \sum_{(\mathbf{L},\chi)\in\mathcal{R}_d} \mathbb{Z}R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\chi$.

27. Décomposition de Jordan

D'après [**Bon99a**, proposition 6.4.3], l'application i^* induit une bijection entre $\mathcal{E}(i^{*-1}(C_{\mathbf{G}^*}(s))^{F^*}, 1)$ et $\mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1)$. Par suite, d'après [**Bon99a**, 7.4.3], on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} W(s)^{F^*} & \longrightarrow & \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1) \\ \eta & \longmapsto & R_{s,\eta}. \end{array}$$

On obtient donc une bijection

$$\begin{array}{cccc} \aleph_{\mathbf{G},s} : & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]) & \longrightarrow & \mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1) \\ & R_\eta[s] & \longmapsto & R_{s,\eta} \end{array}$$

appelée *décomposition de Jordan* des caractères de $\mathbf{G}^F$.

Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{L}^*$ un sous-groupe de Levi F^*-stable de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{L}$ et contenant s. D'après le théorème **26.2**, d'après la proposition **17.24** et d'après [**Bon99a**, théorème 7.6.1], le diagramme

(**27.1**)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\mathcal{E}(\mathbf{L}^F, [s]) \arrow[r, "\aleph_{\mathbf{L},s}"] \arrow[d, "\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}} R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}"'] & \mathbb{Z}\mathcal{E}(C_{\mathbf{L}^*}(s)^{F^*}, 1) \arrow[d, "\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{L}^*}(s)} R_{C_{\mathbf{L}^*}(s)}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}"] \\ \mathbb{Z}\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, [s]) \arrow[r, "\aleph_{\mathbf{G},s}"] & \mathbb{Z}\mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, 1) \end{tikzcd}$$

est commutatif lorsque la conjecture ($\mathfrak{G}$) a lieu dans $\mathbf{G}$.

28. Normalisation des fonctions caractéristiques des faisceaux-caractères

Le but de la fin de ce chapitre est de présenter un algorithme permettant de calculer les valeurs des caractères irréductibles de $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ en les éléments unipotents. Comme cela est expliqué dans la section 25, le calcul de la table de caractères du groupe $\mathbf{G}^F$ étudié dans ce chapitre se ramène (de façon très indirecte) à ce cas. Une des étapes essentielles est de déterminer les normalisations des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères définies par Lusztig [**Lus85**, partie V, §24] (voir §25.B). C'est ce qui est fait dans cette section. Pour cela, nous nous placerons dans le cadre suivant :

Hypothèse. — *Nous supposerons jusqu'à la fin de ce chapitre que* $\widetilde{\mathbf{G}} = \mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$*, que* $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n(\mathbb{F})$ *et que* $F : \widetilde{\mathbf{G}} \to \widetilde{\mathbf{G}}$ *est l'endomorphisme de Frobenius déployé naturel de* $\widetilde{\mathbf{G}}$ *sur* $\mathbb{F}_q$*.*

On écrit $q = p^r$ et $p^{1/2}$ désigne la racine carrée de p définie dans l'appendice B (voir la fin de la section 36). Si e est un entier relatif, on posera $q^{e/2} = (p^{1/2})^{re}$. Nous identifions $\widetilde{\mathbf{G}}^*$ avec $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$ et $\mathbf{G}^*$ avec $\mathbf{PGL}_n(\mathbb{F})$, l'endomorphisme de Frobenius F^* étant l'endomorphisme de Frobenius déployé naturel. Nous prenons pour l'application $i^* : \widetilde{\mathbf{G}}^* \to \mathbf{G}^*$ la projection canonique.

28.A. Préliminaires. — Soit $\mathbf{B}_0$ le sous-groupe de Borel F-stable de $\mathbf{G}$ formé des matrices triangulaires supérieures et soit $\mathbf{T}_0$ le tore maximal F-stable de $\mathbf{B}_0$ formé des matrices diagonales. Notons u_n l'élément unipotent régulier de $\mathbf{G}^F = \mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ égal à

$$u_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $d_n = \operatorname{pgcd}(n, q-1)$ et $\mathcal{Z}_n = H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G}))$. Alors $\mathcal{Z}_n$ est cyclique d'ordre d_n. Nous identifierons W_0 et le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Soit $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des partitions de n. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathcal{P}(n)$, soit λ^* sa partition duale, soit $b_\lambda = \sum_{i=1}^r (i-1)\lambda_i$, soit $\mathbf{L}_\lambda$ le sous-groupe de Levi F-stable déployé formé des matrices diagonales par blocs de la forme $\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_r)$, où $A_i \in \mathbf{GL}_{\lambda_i}(\mathbb{F})$ et soit $\mathfrak{S}_\lambda$ le groupe de Weyl de $\mathbf{L}_\lambda$ relativement à $\mathbf{T}_0$. Soit $\mathbf{P}_\lambda$ le sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{B}_0\mathfrak{S}_\lambda\mathbf{B}_0$ de $\mathbf{G}$: $\mathbf{L}_\lambda$ est un complément de Levi de $\mathbf{P}_\lambda$. On note $\mathbf{V}_\lambda$ le radical unipotent de $\mathbf{P}_\lambda$. On pose $u_\lambda = \operatorname{diag}(u_{\lambda_1}, \dots, u_{\lambda_r})$. C'est un élément unipotent régulier F-stable de $\mathbf{L}_\lambda$ et il est facile de vérifier que $u_\lambda = \pi_{\mathbf{L}_\lambda \subset \mathbf{P}_\lambda}(u_n)$. Soit $\mathcal{Z}_\lambda = H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{L}_\lambda))$. On note d_λ le plus grand diviseur commun de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ et $q-1$. Alors d_λ divise d_n et $\mathcal{Z}_\lambda$ est cyclique d'ordre d_λ. On note $h_\lambda^1 : \mathcal{Z}_n \to \mathcal{Z}_\lambda$ le morphisme surjectif $h_{\mathbf{L}_\lambda}^1$. Si ζ est un caractère linéaire de $\mathcal{Z}_\lambda$, on note $o(\zeta)$ son ordre et $\widetilde{\zeta} = \zeta \circ h_\lambda^1$. Le groupe $\mathcal{Z}_\lambda$ s'identifie au groupe $H^1(F, A_{\mathbf{L}_\lambda}(u_\lambda)) = H^1(F, A_{\mathbf{G}}(u_\lambda))$. Si $z \in \mathcal{Z}_\lambda$, on notera $u_{\lambda,z}$ un représentant de la classe de conjugaison $\tau_z^{\mathbf{L}_\lambda}[u_\lambda]_{\mathbf{L}_\lambda^F}$. Ce représentant sera choisi dans $\mathbf{U}_0 \cap \mathbf{L}_\lambda$ (c'est possible). Pour simplifier, nous noterons $\gamma_{\lambda,z}$ la fonction centrale $\gamma_{u_{\lambda,z}}^{\mathbf{G}}$. Si ζ est un caractère linéaire de $\mathcal{Z}_\lambda$, on pose

$$\hat{\gamma}_{\lambda,\zeta} = \frac{1}{|\mathcal{Z}_\lambda|} \sum_{z \in \mathcal{Z}_\lambda} \zeta(z)^{-1} \gamma_{\lambda,z}.$$

Par suite,

$$\hat{\gamma}_{\lambda,z} \in \operatorname{Cent}(\mathbf{G}^F)_{\widetilde{\zeta}}. \tag{28.1}$$

Rappelons le résultat suivant :

Proposition 28.2. — *On a :*

(a) $\{u_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}(n)\}$ *est un ensemble de représentants des classes de conjugaison unipotentes de* $\mathbf{G}$.

(b) *Si* $\lambda \in \mathcal{P}(n)$, *alors* $\dim C_{\mathbf{G}}(u_\lambda) = n - 1 + 2b_\lambda$.

(c) $\{u_{\lambda,z} \mid \lambda \in \mathcal{P}(n) \text{ et } z \in \mathcal{Z}_\lambda\}$ *est un ensemble de représentants des classes de conjugaison unipotentes de* $\mathbf{G}^F$.

Si e est un diviseur de n, on note $\lambda(e)$ la partition $(e, e, \ldots, e)$ de n (où e est donc répété n/e fois). On pose $\mathbf{L}(e) = \mathbf{L}_{\lambda(e)}$, $\mathfrak{S}_n(e) = \mathfrak{S}_{\lambda(e)}$, $\mathbf{P}(e) = \mathbf{P}_{\lambda(e)}$, $u(e) = u_{\lambda(e)}$, $\mathbf{V}(e) = \mathbf{V}_{\lambda(e)}$, $\mathcal{Z}(e) = \mathcal{Z}_{\lambda(e)}$, $d(e) = d_{\lambda(e)}$ et $h^1(e) = h^1_{\lambda(e)}$. Remarquons que $d(e) = \mathrm{pgcd}(e, q-1)$. Soit $\mathcal{W}(e)$ le groupe $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}(e))/\mathbf{L}(e)$, que l'on identifie à $N_{\mathfrak{S}_n}(\mathfrak{S}(e))/\mathfrak{S}(e)$, qui lui-même est identifié à $\mathfrak{S}_{n/e}$. Si $\lambda \in \mathcal{P}(n/e)$, on note $e\lambda$ la partition de n obtenue en multipliant toutes les parts de λ par e et on note $\mathcal{W}_\lambda(e)$ le groupe $N_{\mathfrak{S}_{e\lambda}}(\mathfrak{S}(e))/\mathfrak{S}(e)$. C'est un sous-groupe de $\mathcal{W}(e)$. À travers l'identification $\mathcal{W}(e) \simeq \mathfrak{S}_{n/e}$, le groupe $\mathcal{W}_\lambda(e)$ s'identifie à $\mathfrak{S}_\lambda$. Si $z \in \mathcal{Z}(e)$, on pose $u(e)_z = u_{\lambda(e),z}$.

28.B. Fonctions caractéristiques. — Supposons maintenant que e divise aussi $q-1$ (c'est-à-dire que e divise d_n). Remarquons qu'alors $\mathcal{Z}(e) \simeq \mathcal{Z}(\mathbf{L}(e))$. Soit ζ un caractère linéaire *injectif* de $\mathcal{Z}(e)$. Alors le système local $\mathcal{E}_\zeta$ sur $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathbf{L}(e)}_{\text{rég}} = (u(e))_{\mathbf{L}(e)}$ est cuspidal et F-stable. On fixe un isomorphisme $\varphi_\zeta : F^*\mathcal{E}_\zeta \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\zeta$ de sorte que son action sur la fibre en $u(e)$ soit l'identité. On note alors $\mathcal{X}(e)_\zeta$ la fonction caractéristique $\mathcal{X}_{\mathcal{E}_\zeta,\varphi_\zeta}$. On a, pour tout $l \in \mathbf{L}(e)^F$,

$$\mathcal{X}(e)_\zeta = \begin{cases} \zeta(z)^{-1} & \text{si } [l]_{\mathbf{L}(e)^F} = [u(e)_z]_{\mathbf{L}(e)^F}, \\ 0 & \text{si } (l)_{\mathbf{L}(e)} \neq \boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathbf{L}(e)}_{\text{rég}}. \end{cases} \tag{28.3}$$

Si $\lambda \in \mathcal{P}(n/e)$, on note χ_λ le caractère de $\mathcal{W}(e) \simeq \mathfrak{S}_{n/e}$ associé (voir appendice A, section 34). Par la correspondance de Springer, χ_λ est associé au couple $(u_{e\lambda}, \widetilde{\zeta})$ (notons que $\widetilde{\zeta}$ est a priori un caractère de $\mathcal{Z}_n$ mais il se factorise par $h^1_{e\lambda}$ pour donner un caractère linéaire de $\mathcal{Z}_{e\lambda}$ que nous noterons encore $\widetilde{\zeta}$). Le choix particulier de φ_ζ induit un choix bien défini (voir [**Lus85**, partie V, 24.2.2]) d'un isomorphisme $\varphi_{e\lambda,\zeta} : F^*K_{e\lambda,\widetilde{\zeta}} \xrightarrow{\sim} K_{e\lambda,\widetilde{\zeta}}$, où $K_{e\lambda,\widetilde{\zeta}}$ est l'extension perverse du système local $\mathcal{E}_{\widetilde{\zeta}}$ sur la classe de conjugaison de $u_{e\lambda}$: cet isomorphime agit sur la fibre en $u_{e\lambda}$ par multiplication par une racine de l'unité que nous noterons provisoirement $\eta_{e\lambda,\widetilde{\zeta}}$ (nous montrerons dans le théorème **28.7** que $\eta_{e\lambda,\widetilde{\zeta}} = 1$). Notons $\mathcal{X}_{e\lambda,\widetilde{\zeta}}$ (respectivement $\mathcal{Y}_{e\lambda,\widetilde{\zeta}}$) la fonction caractéristique $\mathcal{X}_{K_{e\lambda,\widetilde{\zeta}},\varphi_{e\lambda,\zeta}}$ (respectivement $\mathcal{X}_{\mathcal{E}_{\widetilde{\zeta}},\varphi_{e\lambda,\zeta}}$). Pour finir, on pose

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{e\lambda,\widetilde{\zeta}} = q^{b_{e\lambda}+(n-n/e)/2}\mathcal{X}_{e\lambda,\zeta}, \quad \widetilde{\mathcal{Y}}_{e\lambda,\widetilde{\zeta}} = q^{b_{e\lambda}+(n-n/e)/2}\mathcal{Y}_{e\lambda,\zeta}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{X}}(e)_\zeta = q^{(n-n/e)/2}\mathcal{X}(e)_\zeta.$$

Ces normalisations coïncident avec celles de [**DLM97**, 1.5] d'après la proposition **28.2** (b). Notons que $b_{e\lambda} = eb_\lambda$. Soit maintenant $\varepsilon_e : \mathcal{W}(e) \to \mathcal{Z}(e)$ le morphisme noté $\varphi^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}(e),u(e),\zeta}$ dans [**Bon04a**, partie I, corollaire 3.8]. Il est possible d'en donner une description explicite [**Bon04a**, partie II, table 1] :

$$\begin{cases} \textit{si } e \textit{ est impair, alors } \varepsilon_e = 1\,; \\ \textit{si } e \textit{ est pair, alors } \varepsilon_e \textit{ est la signature de } \mathfrak{S}_{n/e}. \end{cases} \tag{28.4}$$

Ici, la deuxième assertion doit être entendue comme suit : puisque e est pair, $\mathcal{Z}(e)$ est cyclique d'ordre pair, et ε_e est l'unique morphisme non trivial $\mathfrak{S}_{n/e} \to \mathcal{Z}(e)$.

Soit $w \in \mathcal{W}(e) \simeq \mathfrak{S}_{n/e}$. Nous allons choisir un représentant particulier de w dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}(e))$. Tout d'abord, quitte à multiplier par un élément de $\mathbf{L}(e)$, on peut choisir un représentant qui centralise $u(e)$. De plus, ce représentant peut être choisi de sorte que sa classe dans $A_{\mathbf{G}}(u(e)) \simeq A_{\mathbf{L}(e)}(u(e)) \simeq \mathcal{Z}(e)$ soit égale à $\varepsilon_e(w)$. Nous noterons $\dot{w}$ un tel représentant. Fixons maintenant $g_w \in \mathbf{G}$ tel que $g_w^{-1}F(g_w) = \dot{w}$. Posons

$$\mathbf{L}(e,w) = {}^{g_w}\mathbf{L}(e) \quad \text{et} \quad u(e,w) = g_w u(e) g_w^{-1}.$$

Alors $u(e,w)$ est un élément unipotent régulier de $\mathbf{L}(e,w)^F$ et on a

$$\text{(28.5)} \qquad \mathrm{dlm}_{\mathbf{L}(e,w)}^{\mathbf{G}}[u_n]_{\mathbf{G}^F} = [u(e,w)]_{\mathbf{L}(e,w)^F}.$$

Si $z \in \mathcal{Z}(e) \simeq H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{L}(e,w)))$, on pose $u(e,w)_z = x_z u(e,w) x_z^{-1}$, où $x_z \in \mathbf{L}(e,w)$ est tel que $x_z^{-1}F(x_z)$ appartienne au centre de $\mathbf{L}(e,w)$ et représente z. Soit $\mathcal{X}(e,w)_\zeta$ la fonction caractéristique du faisceau $(\mathrm{ad}\, g_w^{-1})^*\mathcal{E}_\zeta$ sur $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\text{rég}}^{\mathbf{L}(e,w)}$ pour un isomorphisme dont l'action sur la fibre en $u(e,w)$ est l'identité. Posons $\widetilde{\mathcal{X}}(e,w)_\zeta = q^{(n-n/e)/2}\mathcal{X}(e,w)_\zeta$. Avec ces notations, le théorème **20.1** implique que (voir par exemple [**DLM97**, section 3]), si q est assez grand, alors

$$\text{(28.6)} \qquad \widetilde{\mathcal{X}}_{e\lambda,\tilde{\zeta}} = \frac{1}{|\mathcal{W}(e)|} \sum_{w \in \mathcal{W}(e)} \chi_\lambda(w) R_{\mathbf{L}(e,w)}^{\mathbf{G}}(\widetilde{\mathcal{X}}(e,w)_\zeta).$$

28.C. Normalisation. — Le théorème qui vient a été démontré par T. Shoji [**Sho05**, théorème 3.4]. Nous en proposons une preuve totalement différente. Notre preuve a l'avantage d'être plus courte que celle de T. Shoji (mais pas totalement élémentaire, car elle repose sur le théorème **14.11**). Elle a l'inconvénient de ne s'appliquer qu'au groupe spécial linéaire, alors que les méthodes géométriques développées par T. Shoji permettent (en rajoutant comme autre ingrédient la théorie des algèbres de Hecke graduées) de traiter le cas du groupe spécial unitaire [**Sho05**, théorème 4.4] ainsi que les autres groupes (T. Shoji annonce dans [**Sho05**, fin de l'introduction] que ces autres cas seront traités dans la suite de [**Sho05**]).

Théorème 28.7. — *Si e divise d_n, si ζ est un caractère linéaire injectif de $\mathcal{Z}(e)$ et si $\lambda \in \mathcal{P}(n/e)$, alors $\eta_{e\lambda,\zeta} = 1$. En d'autres termes,*

$$\mathcal{X}_{e\lambda,\zeta}(u_{e\lambda}) = \mathcal{Y}_{e\lambda,\zeta}(u_{e\lambda}) = 1.$$

Démonstration. — Avant de commencer la preuve proprement dite de ce théorème, remarquons que, d'après **28.5**, le théorème **14.11** s'écrit ainsi dans ce cas particulier :

$$\text{(28.8)} \qquad \textit{Si } q \textit{ est assez grand, alors } {}^*R_{\mathbf{L}(e,w)}^{\mathbf{G}}\gamma_n = \gamma_{u(e,w)}^{\mathbf{L}(e,w)}.$$

La racine de l'unité $\eta_{e\lambda,\zeta}$ est déterminée par l'action de F sur un certain groupe de cohomologie [**Lus85**, partie V, 24.2]. Si on remplace F par F^m, cette racine de l'unité est remplacée par $\eta_{e\lambda,\zeta}^m$. Cela montre que l'on peut supposer que q est assez grand. Nous pouvons donc utiliser les formules **28.6** et **28.8**.

Soit $\gamma = R_{\mathbf{L}_{e\lambda}}^{\mathbf{G}} \gamma_{u_{e\lambda}}^{\mathbf{L}_{e\lambda}}$. Nous allons effectuer le produit scalaire de γ avec les deux membres de **28.6**. Notons $\trianglelefteq$ l'ordre de dominance sur les partitions [**GP00**, définition 5.4.6] et $\triangleleft$ l'ordre de dominance strict. Rappelons que

(28.9) $\mu \trianglelefteq \nu$ *si et seulement si* $(u_\mu)_{\mathbf{G}} \subset \overline{(u_\nu)_{\mathbf{G}}}$.

En particulier,

$$\mathcal{X}_{e\lambda,\tilde{\zeta}} = \mathcal{Y}_{e\lambda,\tilde{\zeta}} + \sum_{\mu \triangleleft e\lambda} \sum_{z \in \mathcal{Z}_\mu} \alpha_{\mu,z} \gamma_{\mu,z},$$

où les $\alpha_{\mu,z}$ appartiennent à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. D'autre part, si $\mu \in \mathcal{P}(n)$ est tel que $(u_\mu)_{\mathbf{G}} \cap u_\lambda \mathbf{V}_\lambda \neq \varnothing$, alors $\lambda \trianglelefteq \mu$ (d'après **28.9** et par exemple [**DLM92**, proposition 5.8]). Par suite, d'après [**DLM92**, proposition 5.7 et lemme 5.12], on a

$$\gamma = \beta \gamma_{e\lambda,1} + \sum_{\mu \triangleleft e\lambda} \sum_{z \in \mathcal{Z}_\mu} \beta_{\mu,z} \gamma_{\mu,z},$$

où β et les $\beta_{\mu,z}$ sont des nombres rationnels positifs ou nuls. On en déduit que

$$\langle \mathcal{X}_{e\lambda,\tilde{\zeta}}, \gamma \rangle_{\mathbf{G}^F} = \beta \langle \mathcal{Y}_{e\lambda,\tilde{\zeta}}, \gamma_{e\lambda,1} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \beta \eta_{e\lambda,\zeta}.$$

En utilisant **28.6**, on en déduit que

$$\beta \eta_{e\lambda,\zeta} = \frac{q^{-b_{e\lambda}}}{|\mathcal{W}(e)|} \sum_{w \in \mathcal{W}(e)} \chi_\lambda(w) \langle R_{\mathbf{L}(w,e)}^{\mathbf{G}}(\mathcal{X}(w,e)_\zeta), R_{\mathbf{L}_{e\lambda}}^{\mathbf{G}} \gamma_{u_{e\lambda}}^{\mathbf{L}_{e\lambda}} \rangle_{\mathbf{G}^F}.$$

Fixons $w \in \mathcal{W}(e)$. Appliquons la formule de Mackey en remarquant que $\mathcal{X}(e,w)_\zeta$ est une fonction absolument cuspidale sur $\mathbf{L}(e,w)^F$. Posons

$$\mathcal{N}_{\lambda,w} = \{ g \in [\mathbf{L}(e,w)^F \backslash \mathcal{S}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}(e,w), \mathbf{L}_{e\lambda})^F / \mathbf{L}_{e\lambda}^F] \mid \mathbf{L}(e,w) \subset {}^g\mathbf{L}_{e\lambda} \}.$$

On a

$$\langle R_{\mathbf{L}(w,e)}^{\mathbf{G}}(\mathcal{X}(e,w)_\zeta), R_{\mathbf{L}_{e\lambda}}^{\mathbf{G}} \gamma_{u_{e\lambda}}^{\mathbf{L}_{e\lambda}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = \sum_{g \in \mathcal{N}_{\lambda,w}} \langle \mathcal{X}(e,w)_\zeta, {}^*R_{\mathbf{L}(e,w)}^{g\mathbf{L}_{e\lambda}g^{-1}} \gamma_{gu_{e\lambda}g^{-1}}^{g\mathbf{L}_{e\lambda}g^{-1}} \rangle_{\mathbf{L}(e,w)^F}.$$

Or, d'après le théorème **14.4**, on a ${}^*R_{g\mathbf{L}_{e\lambda}g^{-1}}^{\mathbf{G}} \gamma_n = \gamma_{gu_{e\lambda}g^{-1}}^{g\mathbf{L}_{e\lambda}g^{-1}}$. En appliquant **28.8**, on obtient que

$$\langle R_{\mathbf{L}(e,w)}^{\mathbf{G}}(\mathcal{X}(e,w)_\zeta), R_{\mathbf{L}_{e\lambda}}^{\mathbf{G}} \gamma_{u_{e\lambda}}^{\mathbf{L}_{e\lambda}} \rangle_{\mathbf{G}^F} = |\mathcal{N}_{\lambda,w}|.$$

Mais $\mathcal{N}_{\lambda,w}$ est naturellement en bijection avec l'ensemble des $x \in [\mathcal{W}(e)/\mathcal{W}_\lambda(e)]$ tels que $x^{-1}wx \in \mathcal{W}_\lambda(e)$. Par conséquent, d'après **34.1**, on a

$$\frac{1}{|\mathcal{W}(e)|} \sum_{w \in \mathcal{W}(e)} \chi_\lambda(w) |\mathcal{N}_{w,\lambda}| = \langle \chi_\lambda, \operatorname{Ind}_{\mathcal{W}_\lambda(e)}^{\mathcal{W}(e)} 1_{\mathcal{W}_\lambda(e)} \rangle_{\mathcal{W}(e)} = 1.$$

D'où

$$\beta \eta_{e\lambda,\zeta} = q^{-b_{e\lambda}}.$$

Puisque β est un nombre rationnel positif ou nul et puisque $\eta_{e\lambda,\zeta}$ est une racine de l'unité, la preuve du théorème est complète. □

29. Algorithme

29.A. Deux familles de polynômes. — Soit $\mathbf{q}$ une indéterminée. Notons $\Omega = (\Omega_{\lambda\mu}(\mathbf{q}))_{\lambda,\mu\in\mathcal{P}(n)}$ la matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}(\mathbf{q})$ définie par :

$$\Omega_{\lambda\mu}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^{-b_\lambda - b_\mu} \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} \frac{\chi_\lambda(w^{-1})\chi_\mu(w)}{\det(\mathbf{q}\,\mathrm{Id}_{X(\mathbf{T}_0)} - w)}.$$

C'est une matrice symétrique et, d'après [**Lus85**, partie V, théorème 24.8] et **28.9**, il existe un unique couple (P, Λ) de matrices à coefficients dans $\mathbb{Q}(\mathbf{q})$ telles que

$$(E) \qquad \begin{cases} \Lambda \textit{ est diagonale}\,; \\ P_{\lambda\lambda}(\mathbf{q}) = 1 \textit{ pour tout } \lambda \in \mathcal{P}(n)\,; \\ P_{\lambda\mu}(\mathbf{q}) = 0 \textit{ si } \lambda \ntrianglelefteq \mu\,; \\ {}^t P \Lambda P = \Omega. \end{cases}$$

Il est à noter que, si on multiplie la matrice Ω par un élément quelconque non nul de $\mathbb{Q}(\mathbf{q})$, la variable P du couple de solution demeurera inchangée. Comme nous ne nous intéressons qu'à elle, nous avons éliminé, dans la formule donnant Ω, quelques facteurs encombrant par rapport à la formule originale de Lusztig [**Lus85**, partie V, 24.7]. Toujours d'après [**Lus85**, partie V, théorème 24.8], les $P_{\lambda\mu}$ sont des polynômes en $\mathbf{q}$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ et

$$\textbf{(29.1)} \qquad \mathcal{X}_{\mu,1}(u_\lambda) = P_{\lambda\mu}(q)$$

pour tous λ, $\mu \in \mathcal{P}(n)$, c'est-à-dire que $\widetilde{\mathcal{X}}_{\mu,1}(u_\lambda) = q^{b_\mu} P_{\lambda\mu}(q)$ est la valeur en u_λ du caractère unipotent de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ (ou $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$) associé à χ_μ. Nous donnons ici pour information les matrices P obtenues pour $n \in \{2, 3, 4\}$:

$\lambda\backslash\mu$	11	2
11	1	1
2	0	1

$\lambda\backslash\mu$	111	21	3
111	1	$\mathbf{q}+1$	1
21	0	1	1
3	0	0	1

$\lambda\backslash\mu$	1111	211	22	31	4
1111	1	$\mathbf{q}^2+\mathbf{q}+1$	$\mathbf{q}^2+1$	$\mathbf{q}^2+\mathbf{q}+1$	1
211	0	1	1	$\mathbf{q}+1$	1
22	0	0	1	1	1
31	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1

Si $w \in \mathfrak{S}_n$, notons $\boldsymbol{\mu}(w)$ l'unique partition de n telle que w soit conjugué à un élément de Coxeter de $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}(w)}$: l'application $\boldsymbol{\mu}$ induit une bijection entre les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ et les partitions de n. Si λ et μ sont des partitions de n, on pose

$$Q_{\lambda,\mu}(\mathbf{q}) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}(n)} \chi_\nu(w) \mathbf{q}^{b_\nu} P_{\lambda\nu}(\mathbf{q}),$$

où $w \in \mathfrak{S}_n$ est tel que $\boldsymbol{\mu}(w) = \mu$. Notons que $Q_{\lambda\mu}(\mathbf{q}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{q}]$ et que $Q_{\lambda\mu}(\mathbf{q})$ est le polynôme noté Q_μ^λ dans [**Gre55**, définition 4.2].

Nous donnons la valeur de ces polynômes pour $n \in \{2, 3, 4\}$ (elle peuvent être trouvées à la fin de [**Gre55**]) :

$\lambda \backslash \mu$	11	2
11	$\mathbf{q}+1$	$1-\mathbf{q}$
2	1	1

$\lambda \backslash \mu$	111	21	3
111	$(\mathbf{q}+1)(\mathbf{q}^2+\mathbf{q}+1)$	$1-\mathbf{q}^3$	$(\mathbf{q}-1)(\mathbf{q}^2-1)$
21	$2\mathbf{q}+1$	1	$1-\mathbf{q}$
3	1	1	1

$\lambda \backslash \mu$	1111	211	22	31	4
1111	$(\mathbf{q}+1)^2(\mathbf{q}^2+1)$ $(\mathbf{q}^2+\mathbf{q}+1)$	$(1-\mathbf{q}^4)(\mathbf{q}^2+\mathbf{q}+1)$	$(\mathbf{q}-1)^2(\mathbf{q}^2+1)$ $(\mathbf{q}^2+\mathbf{q}+1)$	$(\mathbf{q}^2-1)$ $(\mathbf{q}^4-1)$	$(1-\mathbf{q})^3(\mathbf{q}+1)$ $(\mathbf{q}^2+\mathbf{q}+1)$
211	$(\mathbf{q}+1)$ $(3\mathbf{q}^2+2\mathbf{q}+1)$	$-\mathbf{q}^3+\mathbf{q}^2+\mathbf{q}+1$	$(1-\mathbf{q})(\mathbf{q}^2+1)$	$1-\mathbf{q}^2$	$(\mathbf{q}-1)(\mathbf{q}^2-1)$
22	$(2\mathbf{q}+1)(\mathbf{q}+1)$	$\mathbf{q}+1$	$2\mathbf{q}^2-\mathbf{q}+1$	$1-\mathbf{q}^2$	$1-\mathbf{q}$
31	$3\mathbf{q}+1$	$\mathbf{q}+1$	$1-\mathbf{q}$	1	$1-\mathbf{q}$
4	1	1	1	1	1

29.B. Les fonctions $\widetilde{\mathcal{X}}_{e\boldsymbol{\mu},\widetilde{\zeta}}$. — Il résulte du théorème **28.7** et de [**DLM03**, théorème 8.1] que, si e divise d_n, si ζ est un caractère linéaire injectif de $\mathcal{Z}(e)$, si λ et μ sont des partitions de n/e et si $z \in \mathcal{Z}_\mu$, alors

$$\widetilde{\mathcal{X}}_{e\mu,\widetilde{\zeta}}(u_{e\lambda,z}) = \widetilde{\zeta}(z)^{-1} q^{b_\mu + (n-n/e)/2} q^{(e-1)b_\lambda} P_{\lambda\mu}(q). \tag{29.2}$$

Supposons maintenant que q est assez grand. Nous allons déterminer, pour tout $w \in \mathfrak{S}_{n/e}$, la fonction $R_{\mathbf{L}(e,w)}^{\mathbf{G}} \widetilde{\mathcal{X}}(e,w)_\zeta$ intervenant dans la formule **28.6**. Cette fonction ne dépend que de la classe de conjugaison de w dans $\mathfrak{S}_{n/e}$. On a, d'après **28.6** et **29.2** :

$$\big(R_{\mathbf{L}(e,w)}^{\mathbf{G}} \widetilde{\mathcal{X}}(e,w)_\zeta\big)(u_{e\lambda,z}) = \widetilde{\zeta}(z)^{-1} q^{(e-1)b_\lambda + (n-n/e)/2} Q_{\lambda\boldsymbol{\mu}(w)}(\mathbf{q}). \tag{29.3}$$

Une fois ces fonctions déterminées, nous allons donner les valeurs des racines de l'unité $\mathcal{G}(\mathbf{L}(e,w),\zeta)$. Pour cela, il faut remarquer que $\mathcal{G}(\mathbf{L}(e,w),\zeta) = \mathcal{G}(\mathbf{L}(e),\zeta)$ d'après le corollaire **37.5**. Posons

$$\mathcal{G}_{e,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } e \text{ est impair,} \\ -\lambda_r(-1)^{\frac{(q-1)(e-2)}{8}} & \text{si } e \text{ est pair.} \end{cases}$$

Ici, λ_r désigne la racine quatrième de l'unité définie dans l'appendice B (voir **36.3**). Alors, d'après **37.2** et la proposition **37.4**, on a

$$\textbf{(29.4)} \qquad \mathcal{G}(\mathbf{L}(e,w),\zeta) = (\mathcal{G}_{e,q})^{n/e}.$$

29.C. Donnée semi-simple. — Notons c_n l'élément de Coxeter $(1,2,\ldots,n)$ de W_0. Soit A_n le sous-groupe de $W_0 = \mathfrak{S}_n$ engendré par c_n. Si d divise n, on note A_d le sous-groupe de A_n d'ordre d. Avec les notations de §5.A, on a

$$\mathrm{Aut}_{W_0}(\Delta_0^{\mathrm{aff}}) = A_n.$$

Ici, nous voyons W_0 comme le groupe de Weyl de $\mathbf{T}_0^*$. Ainsi, par la proposition **5.3**, $(A_n)_{p'}$ s'identifie avec $\mathrm{Ker}'\, i^*$ qui, à travers l'isomorphisme ω (voir **4.8**), s'identifie à $\mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$. Nous noterons encore $\omega : (A_n)_{p'} \to \mathcal{Z}(\mathbf{G})^\wedge$ cet isomorphisme.

Nous appellerons *donnée semi-simple géométrique* de $\mathbf{G}$ tout couple (d,ν) où d est un diviseur de n premier à p et ν est une partition de n/d. Si (d,ν) est une donnée semi-simple géométrique, nous noterons $W^\circ(d,\nu)$ le sous-groupe parabolique de $\mathfrak{S}_{(n/d,\ldots,n/d)} \simeq (\mathfrak{S}_{n/d})^d$ qui correspond, à travers cet isomorphisme, à $(\mathfrak{S}_\nu)^d$. En d'autres termes, $W^\circ(d,\nu)$ est égal à $\mathfrak{S}_\nu \times \cdots \times \mathfrak{S}_\nu$, vu comme sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ de la façon la plus naturelle. Il est immédiat que A_d normalise $W^\circ(d,\nu)$ et que $A_d \cap W^\circ(d,\nu) = 1$: on pose $W(d,\nu) = A_d \ltimes W^\circ(d,\nu)$. L'action de A_d se fait simplement par permutation cyclique des d facteurs $\mathfrak{S}_\nu$ de $W^\circ(d,\nu)$.

Nous allons montrer comment associer à une classe de conjugaison géométrique d'éléments semi-simples de $\mathbf{G}^*$ une unique donnée semi-simple géométrique. Soit $s \in \mathbf{G}^*$. Posons $d = |A_{\mathbf{G}^*}(s)|$: rappelons que d est premier à p (voir **8.2**). Quitte à conjuguer s, on peut choisir $s \in \mathbf{T}_0^*$. D'après [**Bon05**, proposition 3.14 (d)], ce choix peut être fait de sorte que $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ soit un sous-groupe de A_n (c'est donc A_d). Par suite, $W^\circ(s)$ est un sous-groupe parabolique de W_0 normalisé par A_d : quitte à conjuguer par un élément de $C_{W_0}(A_d)$, on peut s'arranger pour que $W^\circ(s)$ soit égal à $W^\circ(d,\nu)$ pour une partition ν de n/d qui ne dépend que de la classe de conjugaison de s dans $\mathbf{G}^*$. On a alors

$$\textbf{(29.5)} \qquad A_{\mathbf{G}^*}(s) = A_d, \quad W^\circ(s) = W^\circ(d,\nu) \quad \text{et} \quad W(s) = W(d,\nu).$$

Nous appellerons *donnée semi-simple rationnelle* de $\mathbf{G}$ tout triplet (d,ν,x), où (d,ν) est une donnée semi-simple géométrique et x est un élément de W_0 qui normalise

$W^\circ(d,\nu)$ et tel que $xax^{-1} = a^q$ pour tout $a \in A_d$. Dans ce cas, notons que x normalise aussi A_d et $W(d,\nu)$.

Nous allons montrer comment associer à une classe de conjugaison rationnelle d'éléments semi-simples de $\mathbf{G}^*$ une donnée semi-simple rationnelle. Soit donc $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$ et reprenons les notations de la section 8 ($\mathbf{T}_1^*$, $W(s)$...). Posons $d = |A_{\mathbf{G}^*}(s)|$. D'après **29.5**, il existe une unique partition ν de n/d et il existe $g \in \mathbf{G}^*$ tels que ${}^g\mathbf{T}_1^* = \mathbf{T}_0^*$ et

$$A_{\mathbf{G}^*}(gsg^{-1}) = A_d, \quad W^\circ(gsg^{-1}) = W^\circ(d,\nu) \quad \text{et} \quad W(gsg^{-1}) = W(d,\nu).$$

Notons $\dot{w} = g^{-1}F(g)$. Alors $\dot{w}$ normalise $\mathbf{T}_0^*$ et $wF(gsg^{-1})w^{-1} = gsg^{-1}$. Soit x l'élément de longueur minimale de $wW^\circ(d,\lambda)$, où w est la classe de $\dot{w}$ dans W_0. Alors, quitte à remplacer g par gh, avec $h \in C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$, on peut supposer que $w = x$. On a alors $xF(gsg^{-1})x^{-1} = gsg^{-1}$ et, à travers la conjugaison par g, on a les identifications suivantes :

(1) $W(s) \simeq W(d,\nu)$, $W^\circ(s) \simeq W^\circ(d,\nu)$ et $A_{\mathbf{G}^*}(s) \simeq A_d$.
(2) F^* s'identifie à la conjugaison par x.

D'après (2), on a donc $xax^{-1} = a^q$ pour tout $a \in A_d$, comme attendu. Il est à noter que le triplet (d,ν,x) n'est pas uniquement déterminé par la classe de conjugaison rationnelle de s : seule la classe de A_d-conjugaison de x l'est. Remarquons d'autre part que x est le type de $\mathbf{T}_1^*$ relativement à $\mathbf{T}_0^*$. par conséquent,

(29.6)
$$\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)} = \varepsilon(x),$$

où $\varepsilon : W_0 \to \{1,-1\}$ est la signature.

D'après (1), (2), **29.6** et le théorème **26.2**, on obtient une bijection, toujours notée $R[s]$:

$$\begin{array}{rccc} R[s] : & \operatorname{Irr} W(d,\nu)^x & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,[s]) \\ & \eta & \longmapsto & R_\eta[s] = \varepsilon(x)R[s]_\eta. \end{array}$$

Si γ est une fonction centrale sur $\mathbf{G}^F$, on note γ^{uni} l'extension par zéro de la restriction de γ aux éléments unipotents. Notre but est de décrire un algorithme permettant de calculer $R_\eta[s]^{\mathrm{uni}}$ pour tout $\eta \in \operatorname{Irr} W(d,\nu)^x$. Cet algorithme montre en particulier que ses valeurs sont des polynômes en $q^{1/2}$ qui ne dépendent que de (d,λ,x) et de la congruence de q modulo $2d$.

29.C.1. Les fonctions $\mathcal{R}^{\mathrm{uni}}_{s,a,w}$. — Soit $a \in A_d^x \simeq A_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}$. On note e_a son ordre. Notons que e_a divise d et $q-1$. On a alors $W^\circ(d,\nu)^a \simeq (\mathfrak{S}_\nu)^{d/e_a}$. Le groupe $\mathbf{L}_{s,a}$ est alors $\mathbf{G}$-conjugué à $\mathbf{L}(e_a)$. À travers cette conjugaison, $W^\circ(d,\nu)^a$ (qui normalise $\mathbf{L}_{s,a}$) s'identifie à $W^\circ(d/e_a,\nu)$ (remarquons que $W^\circ(d/e_a,\nu)$ est bien un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{(d/e_a).(n/d)} = \mathfrak{S}_{n/e_a}$). On note x_a l'élément de $\mathfrak{S}_{n/e_a}$ qui permute les composantes irréductibles de $W^\circ(d/e_a,\lambda)$ comme le fait F^* sur $W^\circ(s)^a$. Ainsi, si $w \in W^\circ(s)^a \simeq W^\circ(d,\nu)^a \simeq W^\circ(d/e_a,\nu)$, $\mathbf{L}_{s,a,w}$ est alors $\mathbf{G}^F$-conjugué à $\mathbf{L}(e_a, wx_a)$. D'autre part, d'après l'égalité $(**)$ dans la preuve du théorème **22.5**, $(\dot{\rho}_{s,a,w}^{\mathbf{L}_{s,a,w}})^{\mathrm{uni}}$ est $\mathbf{G}^F$-conjuguée à $(\mathcal{G}_{e_a,q})^{n/e}\widetilde{\mathcal{X}}(e_a,wx)_{\omega(a)}$. Par suite,

$$\textbf{(29.7)}\qquad \mathcal{R}_{s,a,w}^{\mathrm{uni}} = (\mathcal{G}_{e_a,q})^{n/e_a} R_{\mathbf{L}(e_a,wx_a)}^{\mathbf{G}}\widetilde{\mathcal{X}}(e_a,wx)_{\omega(a)}.$$

29.C.2. Les fonctions $\mathcal{R}[s,a]_{\widetilde{\chi}}^{\mathrm{uni}}$. — Fixons maintenant un caractère irréductible x-stable χ de $W^\circ(d,\nu)^a$. On note $\widetilde{\chi}$ son extension canonique à $W^\circ(d,\nu)^a \rtimes \langle x\rangle$. Il découle de **29.7** que

$$\textbf{(29.8)}\quad \mathcal{R}[s,a]_{\widetilde{\chi}}^{\mathrm{uni}} = \frac{(\mathcal{G}_{e_a,q})^{n/e_a}}{|A_d^x|.|W^\circ(d/e_a,\nu)|}\sum_{w\in W^\circ(d/e_a,\nu)} \widetilde{\chi}(wx_a)R_{\mathbf{L}(e_a,wx_a)}^{\mathbf{G}}\widetilde{\mathcal{X}}(e_a,wx_a)_{\omega(a)}.$$

29.C.3. Les fonctions $R_\eta[s]^{\mathrm{uni}}$. — Reprenons les notations de §23.F. Soit $(\chi,\xi)\in \mathcal{I}(W^\circ(d,\nu),A_d,x)$. Comme dans §23.F, soit

$$\eta_{\chi,\xi} = \mathrm{Ind}_{W^\circ(d,\nu)^x\rtimes A_d(\chi)^x}^{W(d,\nu)}(\widetilde{\chi}_x\otimes\xi),$$

où $\widetilde{\chi}_x$ est défini comme $\widetilde{\chi}_\phi$ l'était dans §23.F. Alors, d'après le théorème **26.2**, on a

$$R_{\eta_{\chi,\xi}}[s] = \frac{\varepsilon(x)}{|A_d(\chi)^x|}\sum_{a\in A_d(\chi)^x}\xi(a)\mathcal{R}[s,a]_{\widetilde{\chi}_a}.$$

Ici, $\widetilde{\chi}_a$ est un caractère irréductible de $W^\circ(d,\nu)^a\rtimes\langle x_a\rangle$. Par suite, d'après **29.8**, on a

$$\textbf{(29.9)}\quad R_{\eta_{\chi,\xi}}[s](u_{\lambda,z}) = \frac{\varepsilon(x)}{|A_d(\chi)^x|}\sum_{\substack{a\in A_d(\chi)^x\\ e_a|d_\lambda}}\Bigg(\frac{\xi(a)\omega(a)(z)^{-1}(\mathcal{G}_{e_a,q})^{n/e_a}}{|W^\circ(d/e_a,\nu)|} \\ q^{(n-n/e_a)/2}q^{(e_a-1)b_{\lambda/e_a}}\sum_{w\in W^\circ(d/e_a,\nu)}\widetilde{\chi}_a(wx_a)Q_{(\lambda/e_a),\boldsymbol{\mu}(wx_a)}(q)\Bigg)$$

pour tout $\lambda\in\mathcal{P}(n)$ et $z\in\mathcal{Z}_\lambda$.

30. Le cas où n est premier et impair

Si n est premier mais ne divise pas $q-1$, alors $H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))=1$ et tout caractère irréductible de $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ est alors la restriction d'un caractère irréductible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_q)$: le calcul de ses valeurs découle du travail de J.A. Green [**Gre55**]. Cela justifie de se placer ici dans le cadre suivant :

Hypothèse. — *Nous supposons dans cette section, et dans cette section seulement, que n est premier et impair et qu'il divise $q-1$.*

Notons que F agit alors trivialement sur $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$, donc $\mathbf{Z}(\mathbf{G})\simeq\mathcal{Z}(\mathbf{G})\simeq\mathcal{Z}_n$. Si $s\in\mathbf{G}_{\mathrm{sem}}^{*F^*}$, alors $|A_{\mathbf{G}^*}(s)|$ divise n. Si $|A_{\mathbf{G}^*}(s)|=1$, alors tout caractére irréductible de $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(s))$ est la restriction d'un caractère irréductible de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ (voir corollaire **11.13**), donc le calcul de ses valeurs découle de [**Gre55**]. Le cas intéressant est donc le cas où

$|A_{\mathbf{G}^*}(s)| = n$. En fait, cette condition détermine complètement la classe de conjugaison géométrique de s (voir le lemme **30.1** (a) ci-dessous). Nous poserons donc par la suite :

$$\widetilde{s} = \mathrm{diag}(1, \eta_n, \eta_n^2, \ldots, \eta_n^{n-1}) \quad \text{et} \quad s = i^*(\widetilde{s}),$$

où $\eta_n = \widetilde{\jmath}(1/n)$ est une racine primitive n-ème de l'unité dans $\mathbb{F}$. Puisque n divise $q-1$, on a $\eta_n \in \mathbb{F}_q$ et donc $\widetilde{s} \in \widetilde{\mathbf{G}}^{*F^*}_{\mathrm{sem}}$ et $s = \mathbf{G}^{*F^*}_{\mathrm{sem}}$. Soit $c_n = (1, 2, \ldots, n) \in \mathfrak{S}_n \simeq W_0$. Alors $A_{\mathbf{G}^*}(s) = \langle c_n \rangle$ et F^* agit trivialement sur $\langle c_n \rangle$, d'où $H^1(F^*, A_{\mathbf{G}^*}(s)) = \langle c_n \rangle$. Si $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on note s_i l'élément noté $s_{c_n^i}$ dans 9.D. On a alors :

Lemme 30.1. — *Avec ces notations, on a :*

(a) *Si $t \in \mathbf{G}^*$ est tel que $|A_{\mathbf{G}^*}(t)| = n$, alors $(s) = (t)$.*

(b) *$\{s_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison rationnelles contenues dans (s).*

(c) *Si $0 \leqslant i \leqslant n-1$, alors $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s_i)$ est un tore maximal de type c_n^i, $\varepsilon_{C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s_i)} = 1$ et*

$$|C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}| = \begin{cases} (q-1)^{n-1} & \text{si } i = 0, \\ q^{n-1} + \cdots + q + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit maintenant $z_n = \mathrm{diag}(\eta_n, \ldots, \eta_n) \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})^F$. Alors $H^1(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})) = \mathcal{Z}_n = \langle z_n \rangle$. Si $0 \leqslant j \leqslant n-1$, on posera $u_{n,j} = u_{n,z_n^j}$ pour simplifier et on notera ξ_j le caractère linéaire de $A_{\mathbf{G}^*}(s)$ (ou $A_{\mathbf{G}^*}(s_i)$) dont l'image par ω_s est z_n^j. Pour finir, on pose $\rho_{i,j} = \rho_{s_i,\xi_j}$. On a alors

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s)) = \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s), [1]) = \{\rho_{i,j} \mid 0 \leqslant i, j \leqslant n-1\}.$$

Notons que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \rho_{i,j} = \rho_{s_i}.$$

Soit u un élément unipotent de $\mathbf{G}^F$. Alors $|A_{\mathbf{G}}(u)|$ divise n. Si $|A_{\mathbf{G}}(u)| = 1$, alors $[u]_{\mathbf{G}^F} = [u]_{\widetilde{\mathbf{G}}^F}$ et donc la formule précédente montre que

$$\rho_{i,j}(u) = \frac{\rho_{s_i}(u)}{n}.$$

Ce calcul se ramène donc au calcul de la valeur d'un caractère de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$ en u, ce qui se déduit de [**Gre55**]. Le problème intéressant est donc le calcul de $\rho_{i,j}$ en l'élément unipotent $u_{n,k}$. Le résultat, qui découle de [**Leh73**] (ou de [**DLM97**, théorème 3.15 (iii)], de **37.4** et du lemme **30.1** (c)), est le suivant : si $0 \leqslant i, j, k \leqslant n-1$, alors

$$\textbf{(30.2)} \qquad \rho_{i,j}(u_{n,k}) = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{(n-1)/2}}{n} + q^{(n-1)/2} & \text{si } j = k, \\[2ex] \dfrac{1 - q^{(n-1)/2}}{n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

31. Le cas où $n = 4$

Nous supposerons dans cette section que $n = 4$. Comme on a pu le voir dans tout cet article, la difficulté du problème du calcul de la table de caractères de $\mathbf{G}^F$ croit avec le nombre de diviseurs de $|\mathcal{Z}_4| = d_4 = \mathrm{pgcd}(4, q-1)$. Si $d_4 = 1$, c'est-à-dire si $p = 2$, alors tout caractère irréductible de $\mathbf{G}^F$ est restriction d'un caractère irréductible de $\widetilde{\mathbf{G}}^F = \mathbf{GL}_4(\mathbb{F}_q)$, et donc la table de caractères de $\mathbf{G}^F$ découle des travaux de Steinberg [**Ste51b**] ou Green [**Gre55**]. Le cas nouveau est donc celui ou $d_4 \geqslant 2$, c'est-à-dire le cas où q (donc p) est impair.

Hypothèse. — *Nous supposerons dans cette section que $n = 4$ et que q est impair.*

On a alors

$$(\mathcal{G}_{1,q})^4 = 1 \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{G}_{2,q})^2 = (-1)^{(q-1)/2}. \tag{31.1}$$

Si de plus $q - 1$ est divisible par 4, alors

$$\mathcal{G}_{4,q} = -\lambda_r(-1)^{(q-1)/4}. \tag{31.2}$$

Fixons un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$, une donnée semi-simple rationnelle (d, ν, x) associée à s, un couple $(\chi, \xi) \in \mathcal{I}(W^\circ(d, \lambda), A_d, x)$, une partition λ de 4 et un élément $z \in \mathcal{Z}_\lambda$. Notre but est de donner une table des valeurs de $R_{\eta_{\chi,\xi}}[s](u_{\lambda,z})$. Nous ne donnerons pas toutes les valeurs : nous nous restreindrons aux cas où ces valeurs ne se déduisent pas directement de la connaissance de la table de caractères de $\mathbf{GL}_4(\mathbb{F}_q)$ (voir [**Ste51b**] ou [**Gre55**]).

Tout d'abord, d'après **23.6**, on peut se ramener au cas où $\xi = 1$, ce que nous supposerons par la suite. De plus, si $d_\lambda = 1$, alors, d'après la proposition **23.15** et d'après **23.6**, on a $R_{\eta_{\chi,\xi}}[s](u_\lambda) = \varepsilon(x)\mathcal{R}(\widetilde{s})_{\widetilde{\chi}}(u_\lambda)/|A_d(\chi)^x|$, et donc nous n'étudierons pas de cas. Par suite, nous supposerons que $\lambda = (2, 2)$ ou $\lambda = (4)$.

Commençons par le cas où $\lambda = (4)$. On note ζ_2 le caractère linéaire d'ordre 2 de $\mathcal{Z}_4$ et, si $d_4 = 4$, on note ζ_4 un caractère linéaire d'ordre 4 de $\mathcal{Z}_4$. Il résulte de la formule **29.9** et de **31.1** et **31.2** que

(31.3)

$$R_{\eta_{\chi,1}}[s](u_{4,z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \neq 1, \\ \varepsilon(x) & \text{si } \chi = 1 \text{ et } |A_d^x| = 1, \\ \dfrac{\varepsilon(x)}{2}(1 + (-1)^{(q-1)/2}\zeta_2(z)q) & \text{si } \chi = 1 \text{ et } |A_d^x| = 2, \\ \dfrac{\varepsilon(x)}{4}\big(1 + q\zeta_2(z) & \\ \qquad -\lambda_r(-1)^{(q-1)/4}q^{3/2}(\zeta_4(z) + \zeta_4(z)^{-1})\big) & \text{si } \chi = 1 \text{ et } |A_d^x| = 4. \end{cases}$$

Notons que le dernier cas ne peut se produire que lorsque $d_4 = 4$, c'est-à-dire lorsque 4 divise $q - 1$.

Étudions maintenant le cas où $\lambda = (2,2)$. Si $|A_d(\chi)^x| = 1$, alors, d'après **23.15**, $R_{\eta_{\chi,1}}[s]$ est la restriction à $\mathbf{G}^F$ d'un caractère irréductible de $\widetilde{\mathbf{G}}^F$, donc nous ne nous intéresserons pas à ce cas. Supposons donc que $|A_d(\chi)^x| \geqslant 2$. Notons a l'élément de A_d d'ordre 2. Identifions le groupe $\mathcal{Z}_{22}$ avec $\{1,-1\}$. Alors $\omega(a)$ se factorise en un caractère linéaire de $\mathcal{Z}_{22}$ et on a $\omega(a)(z) = z$. La formule **29.9** et la formule **31.1** montrent que

$$\textbf{(31.4)}\quad R_{\eta_{\chi,1}}[s](u_{22,z}) = \frac{\varepsilon(x)}{|A_d(\chi)^x|}\Bigg(\Big(\frac{1}{|W^\circ(d,\nu)|}\sum_{w\in W^\circ(d,\nu)} \widetilde{\chi}_1(wx)Q_{22,\boldsymbol{\mu}(wx)}(q)\Big) + \frac{(-1)^{(q-1)/2}zq^2}{|W^\circ(d/2,\nu)|}\sum_{w\in W^\circ(d/2,\nu)} \widetilde{\chi}_a(wx_a)Q_{11,\boldsymbol{\mu}(wx_a)}(q)\Big)\Bigg).$$

À la fin de ce chapitre, nous donnons la table des valeurs du caractère $R_{\eta_{\chi,1}}[s](u)$ en $u \in \{1, u_{22,1}, u_{22,-1}\}$ en fonction de la donnée semi-simple rationnelle (d,ν,x) associée à s et du caractère $\chi \in \operatorname{Irr} W^\circ(d,\lambda)$. Nous nous sommes restreints aux cas où $|A_d(\chi)^x| \geqslant 2$. Dans cette table, lorsqu'une donnée semi-simple rationnelle est surmontée de l'exposant $^{(i)}$, cela signifie qu'elle ne peut exister que lorsque $q \equiv i \bmod 4$. D'autre part, nous avons posé, pour simplifier, $\varepsilon_q = (-1)^{(q-1)/2}$.

32. Questions en suspens

1. Il serait intéressant d'étudier les questions abordées dans ce chapitre (séries de Harish-Chandra, décomposition de Jordan, calcul de la table de caractères) dans le cas des groupes de type A non nécessairement déployés. Concernant la question de la décomposition de Jordan, il faudrait établir l'analogue de [**Bon99a**, bijection 7.4.3]. Pour la commutativité de l'analogue du diagramme **27.1**, il suffirait d'établir le pendant de [**Bon99a**, théorème 7.3.2].

2. À travers le théorème **23.9**, on obtient un paramétrage des caractères irréductibles de $\mathbf{G}^F$ par les paires (χ,ξ) en utilisant seulement un caractère de Gelfand-Graev de $\mathbf{G}^F$. Dans le cas déployé, un autre paramétrage par les paires (χ,ξ) a été obtenu par Shoji [**Sho98**] (ou encore [**Bon00b**]) en utilisant les caractères de Gelfand-Graev généralisés. Il serait intéressant de relier ces deux paramétrages. Cela permettrait de relier les transformées de Fourier introduites ici et les *caractères fantômes* définis par Shoji dans [**Sho06**].

3. Il doit être possible de terminer le calcul complet de la table de caractères de $\mathbf{SL}_4(\mathbb{F}_q)$.

(d,ν,x)	χ	1	$u_{22.1}$	$u_{22.-1}$
$(4,1,1)^{(1)}$	1	$\frac{(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{4}$	$\frac{(q+1)^3}{4}$	$\frac{(-q^2+2q+1)(q+1)}{4}$
$(4,1,(1,2,3,4))^{(1)}$	1	$\frac{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)}{4}$	$\frac{(q-1)(1+q^2)}{4}$	$\frac{(q-1)(1-q^2)}{4}$
$(4,1,(1,3)(2,4))^{(1)}$	1	$\frac{(q-1)(q^2+1)(q^3-1)}{4}$	$\frac{q^3+3q^2-q+1}{4}$	$-\frac{q^3-q^2+q-1}{4}$
$(4,1,(1,4,3,2))^{(1)}$	1	$\frac{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)}{4}$	$\frac{(q-1)(1+q^2)}{4}$	$\frac{(q-1)(1-q^2)}{4}$
$(4,1,(2,4))^{(3)}$	1	$\frac{(q^4-1)(q^2+q+1)}{2}$	$\frac{q^3+q^2-q-1}{2}$	$-\frac{q^3+q^2+q+1}{2}$
$(4,1,(1,2)(3,4))^{(3)}$	1	$\frac{(q-1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{2}$	$\frac{q^3+q^2-q+1}{2}$	$-\frac{q^3-3q^2+q-1}{2}$
$(2,11,1)$	1	$\frac{(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{2}$	$\frac{2q^2+3q+1}{2}+\varepsilon_q\frac{q^2-q^3}{2}$	$\frac{2q^2+3q+1}{2}-\varepsilon_q\frac{q^2-q^3}{2}$
$(2,11,(2,4))$	1	$\frac{(q^4-1)(q^2+q+1)}{2}$	$-\frac{q+1}{2}(1+\varepsilon_q q^2)$	$-\frac{q+1}{2}(1-\varepsilon_q q^2)$
$(2,11,(1,2)(3,4))$	1	$\frac{(q-1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{2}$	$\frac{2q^2-q+1}{2}+\varepsilon_q\frac{q^2-q^3}{2}$	$\frac{2q^2-q+1}{2}-\varepsilon_q\frac{q^2-q^3}{2}$
$(2,11,(1,3)(2,4))$	1	$\frac{(q-1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{2}$	$\frac{2q^2-q+1}{2}+\varepsilon_q\frac{q^3+q^2}{2}$	$\frac{2q^2-q+1}{2}-\varepsilon_q\frac{q^3+q^2}{2}$
$(2,11,(1,2,3,4))$	1	$\frac{(q-1)^3(q+1)(q^2+q+1)}{2}$	$\frac{q-1}{2}(1+\varepsilon_q q^2)$	$\frac{q-1}{2}(1-\varepsilon_q q^2)$
$(2,2,1)$	$1\boxtimes 1$	$\frac{(q^2+1)(q^2+q+1)}{2}$	$\frac{q+1}{2}+\frac{1+\varepsilon_q}{2}q^2$	$\frac{q+1}{2}+\frac{1-\varepsilon_q}{2}q^2$
	$\varepsilon\boxtimes\varepsilon$	$\frac{q^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{2}$	$\frac{q^2(1+\varepsilon_q q)}{2}$	$\frac{q^2(1-\varepsilon_q q)}{2}$
$(2,2,(1,3)(2,4))$	$1\boxtimes 1$	$\frac{(q-1)(q^3-1)}{2}$	$\frac{1-q}{2}+\frac{1+\varepsilon_q}{2}q^2$	$\frac{1-q}{2}+\frac{1-\varepsilon_q}{2}q^2$
	$\varepsilon\boxtimes\varepsilon$	$\frac{q^2(q-1)(q^3-1)}{2}$	$\frac{q^2(1+\varepsilon_q q)}{2}$	$\frac{q^2(1-\varepsilon_q q)}{2}$

TABLE DES VALEURS DES CARACTÈRES DE $\mathbf{SL}_4(\mathbb{F}_q)$
EN LES ÉLÉMENTS UNIPOTENTS

APPENDICE A

PRODUITS EN COURONNE

Nous allons rappeler dans cet appendice quelques faits sur les caractères de produits en couronne de groupe finis. Nous reprendrons essentiellement ce qui est fait dans [**Bon99a**, §2].

Dans cet appendice, r, $d_1, \ldots, d_r$ désigneront des entiers naturels non nuls. On fixe des groupes finis $G_1, \ldots, G_r$ et on pose

$$G^\circ = \prod_{i=1}^{r} (\underbrace{G_i \times \cdots \times G_i}_{d_i \text{ fois}}).$$

On fixe aussi un morphisme de groupes $A \to \mathfrak{S}_{d_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{d_r}$. Alors A agit sur G° via ce morphisme par permutation des composantes et on pose

$$G = G^\circ \rtimes A.$$

33. Extension canonique

33.A. Définition. — Si χ est un caractère irréductible de G°, on note $A(\chi)$ son stabilisateur dans A et $G(\chi)$ son stabilisateur dans G. On a $G(\chi) = G^\circ \rtimes A(\chi)$. La proposition suivante est classique et sa preuve peut par exemple être trouvée dans [**Bon99a**, Proposition 2.3.1] :

Proposition 33.1. — *Soit χ un caractère irréductible de G°. Alors il existe une unique extension $\widetilde{\chi}$ de χ à $G(\chi)$ telle que $\widetilde{\chi}(\alpha)$ soit un entier naturel non nul pour tout $\alpha \in A(\chi)$.*

Soit $\mathcal{I}(G^\circ, A)$ l'ensemble des couples (χ, ξ) où $\chi \in \operatorname{Irr} G^\circ$ et $\xi \in \operatorname{Irr} A(\chi)$. Le groupe A agit par conjugaison sur $\mathcal{I}(G^\circ, A)$ et, par la théorie de Clifford, l'application

(33.2)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(G^\circ, A) & \longrightarrow & \operatorname{Irr} G \\ (\chi, \xi) & \longmapsto & \operatorname{Ind}_{G(\chi)}^{G} (\widetilde{\chi} \otimes \xi) \end{array}$$

induit une bijection entre $\mathcal{I}(G^\circ, A)/A$ et $\operatorname{Irr} G$.

Le caractère irréductible $\widetilde{\chi}$ de la proposition **33.1** sera appelé l'*extension canonique* de χ à $G(\chi)$. Soit $a \in A$. Dans [**Bon99a**, 2.2], l'auteur a construit une application

$$\pi_a : G^\circ a \longrightarrow G^{\circ a} \tag{33.3}$$

induisant une bijection bien définie entre l'ensemble des classes de conjugaison de $G^\circ \rtimes \langle a \rangle$ contenues dans $G^\circ a$ et l'ensemble des classes de conjugaison de $(G^\circ)^a$ ainsi qu'une bijection

$$\begin{array}{ccc} (\operatorname{Irr} G^\circ)^a & \longrightarrow & \operatorname{Irr}((G^\circ)^a) \\ \chi & \longmapsto & \chi_a. \end{array} \tag{33.4}$$

Si $\chi \in (\operatorname{Irr} G^\circ)^a$, nous noterons $\widetilde{\chi}_a$ la restriction de $\widetilde{\chi}$ à $G^\circ a$. Alors $(\widetilde{\chi}_a)_{\chi \in (\operatorname{Irr} G^\circ)^a}$ est une base orthonormale de $\operatorname{Cent}(G^\circ a)$. Ces deux applications satisfont la propriété suivante : si χ est un caractère irréductible de G° et si $a \in A(\chi)$, alors

$$\widetilde{\chi}(w) = \chi_a(\pi_a(w)) \tag{33.5}$$

pour tout $w \in G^\circ a$. Rappelons aussi que $\pi_a(a) = 1$ donc $\widetilde{\chi}(a) = \chi_a(1)$. D'autre part, l'application π_a induit une application linéaire

$$\begin{array}{cccc} \pi_a^* : & \operatorname{Cent}((G^\circ)^a) & \longrightarrow & \operatorname{Cent}(G^\circ a) \\ & f & \longmapsto & f \circ \pi_a \end{array} \tag{33.6}$$

et l'égalité **33.5** montre que c'est une isométrie.

Exemple 33.7. — Nous rappelons ici la définition de ces deux applications dans un cas particulier dont le cas général peut aisément se déduire par produit direct. Supposons que $r = 1$ et posons $d = d_1$. Supposons aussi que ${}^a(w_1, \ldots, w_d) = (w_d, w_1, \ldots, w_{d-1})$. Alors $G_1 \simeq (G^\circ)^a$ et, via cet isomorphisme,

$$\pi_a(w_1, \ldots, w_d) = w_1 \ldots w_d$$

et

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr} G_1 & \longrightarrow & (\operatorname{Irr} G^\circ)^a \\ \chi & \longmapsto & \underbrace{\chi \otimes \cdots \otimes \chi}_{d \text{ fois}} \end{array}$$

est la bijection réciproque de la bijection **33.4**.

33.B. Induction. — Fixons maintenant $a \in A$ et une famille $(H_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant d_i}$, où H_{ij} est un sous-groupe de G_i. On pose

$$H^\circ = \prod_{i=1}^{r} (H_{i1} \times \cdots \times H_{id_i})$$

et on suppose que H° est a-stable. Alors la restriction de π_a à $H^\circ a$ est l'analogue de π_a pour le groupe H° et on a encore une isométrie toujours notée π_a^* :

$$\operatorname{Cent}((H^\circ)^a) \longrightarrow \operatorname{Cent}(H^\circ a).$$

D'autre part, il résulte de [**Bon99a**, lemme 3.2.1] que le diagramme

(33.8)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cent}((H^\circ)^a) \arrow[r, "\pi_a^*"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_{(H^\circ)^a}^{(G^\circ)^a}"'] & \mathrm{Cent}(H^\circ a) \arrow[d, "\mathrm{Ind}_{H^\circ a}^{G^\circ a}"] \\ \mathrm{Cent}((G^\circ)^a) \arrow[r, "\pi_a^*"] & \mathrm{Cent}(G^\circ a) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Proposition 33.9. — *On a :*

(a) *Si* $\chi \in (\mathrm{Irr}\, G^\circ)^a$, *alors*
$$\mathrm{Ind}_{G^\circ a}^G \widetilde{\chi}_a = \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}\, G(\chi)/G^\circ} \overline{\xi(a)}\, \mathrm{Ind}_{G(\chi)}^G (\widetilde{\chi} \otimes \xi).$$

(b) *L'application* $\mathrm{Ind}_{G^\circ a}^G$ *a pour image l'espace des fonctions centrales sur* G *qui s'annulent en dehors de* $G^\circ[a]$, *où* $[a]$ *est la classe de conjugaison de* a *dans* A.

Démonstration. — (a) Par la transitivité de l'induction, on peut supposer, et nous le ferons, que $G(\chi) = G$. Notons $A' = \langle a \rangle$ et $G' = G^\circ \rtimes A'$. Nous noterons $\widetilde{\chi}'$ la restriction de $\widetilde{\chi}$ à G'. D'après **1.3**, on a
$$\mathrm{Ind}_{G^\circ a}^G \widetilde{\chi}_a = \mathrm{Ind}_{G'}^G \Big(\sum_{\xi \in A'^\wedge} \xi(a)^{-1} (\widetilde{\chi} \otimes \xi) \Big).$$
Par conséquent,
$$\mathrm{Ind}_{G^\circ a}^G \widetilde{\chi}_a = \widetilde{\chi} \otimes \Big(\mathrm{Ind}_{A'}^A \Big(\sum_{\xi \in A'^\wedge} \xi(a)^{-1} \xi \Big) \Big).$$
Il ne reste donc plus qu'à montrer que
$$\mathrm{Ind}_{A'}^A \Big(\sum_{\xi \in A'^\wedge} \overline{\xi(a)} \xi \Big) = \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}\, A} \overline{\xi(a)} \xi,$$
ce qui est évident.

(b) D'après les formules données dans la preuve de **1.3**, l'application $\mathrm{Ind}_{G^\circ a}^{G'}$ a pour image l'espace des fonctions centrales sur G' nulles en dehors de $G^\circ a$. (b) en découle car toute classe de conjugaison de G contenue dans $G^\circ[a]$ rencontre $G^\circ a$. □

34. Produits en couronne de groupes symétriques

Nous ferons dans cette section l'hypothèse suivante :

Hypothèse. — *Jusqu'à la fin de cette section, nous fixons une famille d'entiers naturels non nuls* $(n_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ *et nous supposons que* $G_i = \mathfrak{S}_{n_i}$, *le groupe symétrique de degré* n_i.

Si n est un entier naturel, nous notons $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des partitions de n. Notons $\trianglelefteq$ l'ordre de dominance sur $\mathcal{P}(n)$ (voir par exemple [**GP00**, définition 5.4.6]) et $\triangleleft$ l'ordre de dominance strict. Fixons un entier $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Notons $\varepsilon_i : G_i \to \{1, -1\}$ la signature. Si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_x)$ est une partition de n_i, nous noterons $G_{i,\lambda}$ un sous-groupe (parabolique) de G_i isomorphe à $\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_x}$ (sous-groupe de Young). Nous noterons λ^* la partition duale de λ. Notons χ_λ l'unique caractère irréductible commun à $\operatorname{Ind}_{G_{i,\lambda}}^{G_i} 1_{G_{i,\lambda}}$ et $\varepsilon_i \otimes \operatorname{Ind}_{G_{i,\lambda^*}}^{G_i} 1_{G_{i,\lambda^*}}$ (voir [**GP00**, théorème 5.4.7]). Toujours d'après [**GP00**, théorème 5.4.7], on a

$$\operatorname{Ind}_{G_{i,\lambda}}^{G_i} 1_{G_{i,\lambda}} = \chi_\lambda + \sum_{\lambda \triangleleft \mu} \beta_{\lambda\mu} \chi_\mu. \tag{34.1}$$

Revenons à notre groupe G°. Nous noterons $\mathcal{P}$ l'ensemble des familles $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant d_i}$ où λ_{ij} est une partition de n_i. Le groupe A agit naturellement sur $\mathcal{P}$ par permutations. On définit l'ordre de dominance $\triangleleft$ sur $\mathcal{P}$ par produit direct des ordres de dominance. Soit

$$G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{i=1}^{r} (G_{i,\lambda_{i1}} \times \cdots \times G_{i,\lambda_{id_i}})$$

et nous notons $A_{\boldsymbol{\lambda}}$ le stabilisateur de $\boldsymbol{\lambda}$ dans A, c'est-à-dire le normalisateur de $G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}}$ dans A. On pose

$$G_{\boldsymbol{\lambda}} = G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}} \rtimes A_{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Nous noterons $\chi_{\boldsymbol{\lambda}}$ le caractère irréductible de G° défini par

$$\chi_{\boldsymbol{\lambda}} = \bigotimes\nolimits_{i=1}^{r} (\chi_{\lambda_{i1}} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda_{id_i}}).$$

Il est facile de vérifier que

$$A(\chi_{\boldsymbol{\lambda}}) = A_{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Notons $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des couples $(\boldsymbol{\lambda}, \xi)$ tels que $\boldsymbol{\lambda} \in [\mathcal{P}/A]$ et $\xi \in \operatorname{Irr} A_{\boldsymbol{\lambda}}$. Posons maintenant

$$\chi^+_{\boldsymbol{\lambda},\xi} = \operatorname{Ind}_{G^\circ \rtimes A_{\boldsymbol{\lambda}}}^{G} (\chi_{\boldsymbol{\lambda}} \otimes \xi)$$

et

$$\Pi_{\boldsymbol{\lambda},\xi} = \operatorname{Ind}_{G_{\boldsymbol{\lambda}}}^{G} \xi.$$

Alors l'application $\mathcal{P}^+ \to \mathcal{I}(G^\circ, A)$, $(\boldsymbol{\lambda}, \xi) \mapsto (\chi_{\boldsymbol{\lambda}}, \xi)$ induit une bijection entre $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{I}(G^\circ, A)/A$. Par conséquent, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^+ & \longrightarrow & \operatorname{Irr} G \\ (\boldsymbol{\lambda}, \xi) & \longmapsto & \chi^+_{\boldsymbol{\lambda},\xi} \end{array}$$

est bijective.

Proposition 34.2. — *Si* $(\boldsymbol{\lambda}, \xi) \in \mathcal{P}^+$, *alors*

$$\Pi_{\boldsymbol{\lambda},\xi} = \chi^+_{\boldsymbol{\lambda},\xi} + \sum_{\substack{(\boldsymbol{\mu},\xi') \in \mathcal{P}^+ \\ \boldsymbol{\lambda} \triangleleft \boldsymbol{\mu}}} \beta_{\boldsymbol{\lambda},\xi,\boldsymbol{\mu},\xi'} \chi^+_{\boldsymbol{\mu},\xi'},$$

où $\beta_{\boldsymbol{\lambda},\xi,\boldsymbol{\mu},\xi'} \in \mathbb{N}$.

Démonstration. — Tout d'abord, remarquons que, si le résultat de la proposition est vrai lorsque $A = A_{\boldsymbol{\lambda}}$, alors il est vrai dans le cas général. Nous pouvons donc supposer, et nous le ferons, que $A = A_{\boldsymbol{\lambda}}$.

Soit $(\boldsymbol{\mu}, \xi') \in \mathcal{P}^+$ tel que $\langle \Pi_{\boldsymbol{\lambda},\xi}, \chi^+_{\boldsymbol{\mu},\xi'} \rangle_G \neq 0$. Alors

$$\langle \operatorname{Res}^G_{G^\circ} \Pi_{\boldsymbol{\lambda},\xi}, \operatorname{Res}^G_{G^\circ} \chi^+_{\boldsymbol{\mu},\xi'} \rangle_{G^\circ} \neq 0.$$

Mais, par la formule de Mackey

$$\operatorname{Res}^G_{G^\circ} \Pi_{\boldsymbol{\lambda},\xi} = \xi(1) \sum_{a \in [A/A_{\boldsymbol{\lambda}}]} \operatorname{Ind}^{G^\circ}_{G^\circ_{{}^a\boldsymbol{\lambda}}} 1_{G^\circ_{{}^a\boldsymbol{\lambda}}}$$

et

$$\operatorname{Res}^G_{G^\circ} \chi^+_{\boldsymbol{\mu},\xi'} = \xi(1) \sum_{a \in [A/A_{\boldsymbol{\mu}}]} \chi_{{}^a\boldsymbol{\mu}}.$$

Par suite, il existe $a \in A$ tel que $\langle \operatorname{Ind}^{G^\circ}_{G^\circ_{{}^a\boldsymbol{\lambda}}} 1_{G^\circ_{{}^a\boldsymbol{\lambda}}}, \chi_{\boldsymbol{\mu}} \rangle_{G^\circ} \neq 0$. D'après **34.1**, ceci implique que $\boldsymbol{\mu} = {}^a\boldsymbol{\lambda}$ ou que ${}^a\boldsymbol{\lambda} \lhd \boldsymbol{\mu}$. Dans le premier cas, on a alors $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}$ car $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ parcourent $[\mathcal{P}/A]$. Il nous reste donc à montrer que, si ξ et ξ' sont deux caractères irréductibles de $A_{\boldsymbol{\lambda}}$, alors

$$(*) \qquad \langle \Pi_{\boldsymbol{\lambda},\xi}, \chi^+_{\boldsymbol{\lambda},\xi'} \rangle_G = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = \xi' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $A = A_{\boldsymbol{\lambda}}$, on a

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{\boldsymbol{\lambda},\xi}, \chi^+_{\boldsymbol{\lambda},\xi'} \rangle_G &= \langle \xi, \xi' \otimes \operatorname{Res}^G_{G_{\boldsymbol{\lambda}}} \widetilde{\chi}_{\boldsymbol{\lambda}} \rangle_{G_{\boldsymbol{\lambda}}} \\ &= \frac{1}{|A_{\boldsymbol{\lambda}}|} \sum_{a \in A_{\boldsymbol{\lambda}}} \xi(a)\overline{\xi'(a)} \Big(\frac{1}{|G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}}|} \sum_{w \in G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}}} \widetilde{\chi}_{\boldsymbol{\lambda}}(wa) \Big). \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de montrer que, pour tout $a \in A_{\boldsymbol{\lambda}}$,

$$(**) \qquad \frac{1}{|G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}}|} \sum_{w \in G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}}} \widetilde{\chi}_{\boldsymbol{\lambda}}(wa) = 1.$$

mais,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}}|} \sum_{w \in G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}}} \widetilde{\chi}_{\boldsymbol{\lambda}}(wa) &= \langle 1_{G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}} a}, \operatorname{Res}^G_{G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}} a} \widetilde{\chi}_{\boldsymbol{\lambda}} \rangle_{G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}} a} \\ &= \big\langle \operatorname{Ind}^{G^\circ a}_{G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}} a} 1_{G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}} a}, \operatorname{Res}^G_{G^\circ a} \widetilde{\chi}_{\boldsymbol{\lambda}} \big\rangle_{G^\circ a} \\ &= \big\langle \operatorname{Ind}^{(G^\circ)^a}_{(G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}})^a} 1_{(G^\circ_{\boldsymbol{\lambda}})^a}, (\chi_{\boldsymbol{\lambda}})_a \big\rangle_{(G^\circ)^a} \\ &= 1, \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité découlant de la commutativité du diagramme **33.8**, la dernière découlant de la formule **34.1** appliquée au groupe $(G^\circ)^a$. □

Les deux corollaires suivants découlent facilement (par une récurrence descendante sur $b_{\boldsymbol{\lambda}}$) de la proposition **34.2**.

Corollaire 34.3. — $\mathbb{Z}\operatorname{Irr} G = \bigoplus_{(\boldsymbol{\lambda},\xi)\in\mathcal{P}^+} \mathbb{Z}\Pi_{\boldsymbol{\lambda},\xi}$.

Corollaire 34.4. — *Soit $\eta \in \operatorname{Cent}(G)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\eta \in \mathbb{Z}\operatorname{Irr} G$.
(2) *Pour tout* $(\boldsymbol{\lambda},\xi) \in \mathcal{P}^+$, $\langle \operatorname{Res}_{G_{\boldsymbol{\lambda}}}^{G} \eta, \xi\rangle_{G_{\boldsymbol{\lambda}}} \in \mathbb{Z}$.

35. Extension canonique, extension préférée

Soit (W°, S) un groupe de Coxeter cristallographique fini. Notons $\operatorname{Aut}_{\mathrm{Coxeter}}(W^\circ, S)$ le groupe des automorphismes σ de W° tels que $\sigma(S) = S$. Fixons un groupe fini A et un morphisme de groupes $A \to \operatorname{Aut}_{\mathrm{Coxeter}}(W^\circ, S)$. A travers ce morphisme, A agit sur W° et on peut former le produit semi-direct $W = W^\circ \rtimes A$.

Soit χ un caractère irréductible de W°. Si $a \in A(\chi)$, Lusztig [**Lus85**, chapitre IV, §17] a défini une extension de χ à $W^\circ \rtimes \langle a\rangle$, appelée *extension préférée* dont une des propriétés est que la représentation sous-jacente est définie sur $\mathbb{Q}$. Nous voulons montrer ici la proposition suivante :

Proposition 35.1. — *Il existe une unique extension de χ à $W^\circ \rtimes A(\chi)$ dont la restriction à tout sous-groupe $W^\circ \rtimes \langle a\rangle$, où a parcourt $A(\chi)$, soit l'extension préférée de Lusztig.*

Démonstration. — L'unicité de l'extension vérifiant les conditions de l'énoncé est évidente. Montrons en l'existence. Tout d'abord, nous pouvons travailler à conjugaison près par un élément de A en raison du lemme suivant (dont la preuve est immédiate) :

Lemme 35.2. — *Soient a et b deux éléments de A. Notons $\widetilde{\chi}$ l'extension préférée de Lusztig à $W^\circ \rtimes \langle a\rangle$. Alors ${}^b\widetilde{\chi}$ est l'extension préférée de Lusztig de ${}^b\chi$ à $W^\circ \rtimes \langle bab^{-1}\rangle$.*

Nous pouvons supposer, et nous le ferons, que $A = \operatorname{Aut}_{\mathrm{Coxeter}}(W^\circ, S)$ et que le morphisme $A \to \operatorname{Aut}_{\mathrm{Coxeter}}(W^\circ, S)$ est l'identité. Par produit direct, on peut aussi supposer, et nous le ferons, que $A(\chi)$ agit transitivement sur l'ensemble des composantes irréductibles de W°. En d'autres termes, W° est un produit direct de d copies d'un groupe de Coxeter cristallographique fini irréductible (W_1, S_1), on peut écrire $\chi = \chi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \chi_d$ où, pour tout i, χ_i est un caractère irréductible de W_1, $A = (A_1)^d \rtimes \mathfrak{S}_d$, où $A_1 = \operatorname{Aut}_{\mathrm{Coxeter}}(W_1, S_1)$ et l'image de $A(\chi)$ dans $\mathfrak{S}_d$ est un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_d$.

Soit $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Puisque l'image de $A(\chi)$ dans $\mathfrak{S}_d$ est un sous-groupe transitif, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ et $(b_1, \ldots, b_d) \in (A_1)^d$ tels que $\sigma(1) = i$ et $\sigma.(b_1, \ldots, b_d) \in A(\chi)$. En particulier, ${}^{b_i}\chi_i = \chi_1$. Par conséquent, il existe $(a_1, \ldots, a_d) \in (A_1)^d$ tels que, pour tout i, on ait $\chi_i = {}^{a_i}\chi_1$.

Notons τ le cycle de longueur d égal à $(1, 2, \dots, d)$. Alors, quitte à remplacer χ par ${}^{(a_1,\dots,a_d)}\chi$ (en utilisant le lemme **35.2**), on peut supposer, et nous le ferons, que $\chi_1 = \cdots = \chi_d$. En particulier, $A(\chi) = A_1(\chi_1)^d \rtimes \mathfrak{S}_d$.

Supposons démontré le résultat lorsque $d = 1$. Notons alors $\widetilde{\chi}_1$ l'extension de χ_1 à $W_1 \rtimes A_1(\chi_1)$ telle que $\mathrm{Res}_{W_1 \rtimes \langle a \rangle}^{W_1 \rtimes A(\chi_1)} \widetilde{\chi}_1$ soit l'extension préférée de χ_1 à $W_1 \rtimes A_1(\chi_1)$. Alors l'extension canonique de $\widetilde{\chi}_1 \otimes \cdots \otimes \widetilde{\chi}_1$ à $W = (W_1 \rtimes A_1)^d \rtimes \mathfrak{S}_d$ vérifie les conditions de l'énoncé.

On est donc ramené au cas où $d = 1$, c'est-à-dire au cas où $W^\circ = W_1$ est irréductible. On peut même supposer que $A(\chi_1) \neq 1$. Dans ce cas, à part lorsque W_1 est de type D_4, A_1 est cyclique d'ordre 2 et le résultat est évident. Supposons donc que W° est de type D_4. Alors $A \simeq \mathfrak{S}_3$. Deux cas peuvent se produire :

• Si 3 ne divise pas $|A(\chi)|$, alors $|A(\chi)| = 2$ et le résultat est évident.

• Si 3 divise $|A(\chi)|$, alors, d'après [**Lus84a**, proposition 3.2], $A(\chi) = A$ et il existe une extension $\widetilde{\chi}'$ de χ à $W^\circ \rtimes A(\chi)$ dont la restriction à $W^\circ \rtimes \langle b \rangle$ est l'extension préférée de Lusztig lorsque $b \in A$ est d'ordre 3. Notons ε le caractère signature de $A \simeq \mathfrak{S}_3$. Il est alors clair que $\widetilde{\chi}'$ ou $\widetilde{\chi}' \otimes \varepsilon$ satisfait aux conditions de la proposition. □

L'extension de χ vérifiant les conditions de la proposition précédente sera appelée l'*extension préférée* de χ à $W^\circ \rtimes A(\chi)$.

Corollaire 35.3. — *Si A agit sur W° seulement par permutation des composantes irréductibles, alors l'extension préférée de χ à $W^\circ \rtimes A(\chi)$ est l'extension canonique.*

Corollaire 35.4. — *Soit A' un sous-groupe de A et posons $W' = W^\circ \rtimes A'$. Soit $\chi \in \mathrm{Irr}\, W^\circ$ et notons $\widetilde{\chi}$ (respectivement $\widetilde{\chi}'$) l'extension canonique de χ à $W(\chi)$ (respectivement $W'(\chi)$). Alors $\widetilde{\chi}'$ est la restriction de $\widetilde{\chi}$.*

APPENDICE B

SOMMES DE GAUSS

Le but de cet appendice est de donner des formules pour les racines de l'unité $\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)$ lorsque $\zeta \in \mathcal{Z}^{\wedge}_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$ est F-stable. D'après [**DLM97**, proposition 2.4], $\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)$ peut être décrit par un produit de *sommes de Gauss*. Dans la section 36, nous rappelons quelques propriétés générales des sommes de Gauss. Nous appliquons ces résultats dans la section 37 pour calculer explicitement les racines de l'unité.

Notation. — Nous noterons r l'entier naturel non nul tel que $q = p^r$.

36. Sommes de Gauss

Un caractère additif $\chi_1 : \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ non trivial a été fixé dans le §14.B. Si $s \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que $\chi_s : \mathbb{F}_{p^s} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ est défini par $\chi_s = \chi_1 \circ \mathrm{Tr}_s$, où $\mathrm{Tr}_s : \mathbb{F}_{p^s} \to \mathbb{F}_p$ est la trace. Si $s \in \mathbb{N}^*$ et si $\theta : \mathbb{F}_{p^s}^{\times} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ est un caractère linéaire, nous noterons

$$\mathcal{G}_s(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{F}_{p^s}^{\times}} \theta(x)\chi_s(x)$$

la *somme de Gauss* associée. La première identité sur les sommes de Gauss est bien connue : si θ est non trivial, alors

$$\mathcal{G}_s(\theta)\mathcal{G}_s(\theta^{-1}) = p^s\theta(-1). \qquad \textbf{(36.1)}$$

Nous allons maintenant traiter un cas particulier intervenant dans le groupe spécial unitaire (voir la preuve de la proposition **37.4**). Il s'agit des sommes de Gauss de la forme $\mathcal{G}_{2r}(\theta)$, où θ est un caractère linéaire non trivial de $\mathbb{F}_{q^2}^{\times}$ tel que $\theta^{q+1} = 1$ (rappelons que $q = p^r$). Tout d'abord, notons qu'un tel caractère est trivial sur $\mathbb{F}_q^{\times}$ (surjectivité de la norme). Il découle alors de la formule **36.1** que $\mathcal{G}(\theta) = \pm q$. Nous allons déterminer exactement le signe.

Pour cela, notons $\mathrm{Tr} : \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_q$ la trace. Elle est surjective et $\mathbb{F}_q$-linéaire. Donc il existe $\xi \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ tel que $\mathrm{Tr}\,\xi = 0$, de sorte que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} = \mathbb{F}_q\xi$. Si q est pair, alors $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} = \mathbb{F}_q$ (donc on peut prendre $\xi = 1$). Si q est impair, ξ est un élément de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ tel que ξ^2 appartient à $\mathbb{F}_q$ mais n'est pas le carré d'un élément de $\mathbb{F}_q$. Alors, si θ est un caractère linéaire non trivial de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ tel que $\theta^{q+1} = 1$, on a

$$\mathcal{G}_{2r}(\theta) = \theta(\xi)q. \tag{36.2}$$

Remarque. — On a toujours $\xi^2 \in \mathbb{F}_q^\times$, donc $\theta(\xi) \in \{1, -1\}$. De plus $\theta(\xi)$ ne dépend pas du choix de ξ. Notons aussi que, si q est pair, on a $\xi \in \mathbb{F}_q^\times$ donc $\theta(\xi) = 1$.

*Preuve de **36.2**.* — Nous remercions J.L. Waldspurger pour nous avoir présenté la formule **36.2** ainsi que l'argument suivant. Tout d'abord, puisque θ est trivial sur $\mathbb{F}_q^\times$, on a

$$\mathcal{G}_{2r}(\theta) = \frac{1}{q-1} \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times} \sum_{y \in \mathbb{F}_q^\times} \theta(xy)\chi_r(\mathrm{Tr}(x)).$$

Par un changement de variable évident, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{2r}(\theta) &= \frac{1}{q-1} \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times} \sum_{y \in \mathbb{F}_q^\times} \theta(x)\chi_r(y\,\mathrm{Tr}(x)) \\
&= \frac{1}{q-1} \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times} \theta(x)\Big(\sum_{y \in \mathbb{F}_q^\times} \chi_r(y\,\mathrm{Tr}(x))\Big) \\
&= \frac{1}{q-1}\Bigg((q-1) \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}} \theta(x) - \sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \\ \mathrm{Tr}\,x \neq 0}} \theta(x)\Bigg) \\
&= \frac{1}{q-1}\Bigg(q \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}} \theta(x) - \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^2}^\times} \theta(x)\Bigg)
\end{aligned}$$

Puisque θ est non trivial, la deuxième somme est nulle. Puisque $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} = \mathbb{F}_q\xi$ et que θ est trivial sur $\mathbb{F}_q^\times$, la première somme vaut $(q-1)\theta(\xi)$. Au bilan, il nous reste $\mathcal{G}_{2r}(\theta) = \theta(\xi)q$. $\square$

Nous terminons cette section par un cas particulier classique, dû à Gauss. Supposons ici p impair. Soit $L_s : \mathbb{F}_{p^s}^\times \to \{1, -1\}$ le *caractère de Legendre*, c'est-à-dire l'unique caractère d'ordre 2. La formule **36.1** montre que $\lambda_s = p^{-s/2}\mathcal{G}_s(L_s)$ est une racine quatrième de l'unité. Sa valeur dépend du choix de χ_1 ainsi que du choix d'une racine carrée de p dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Posons $i = \tilde{\jmath}(1/4)$ (rappelons que $\jmath : \mathbb{Q} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est le morphisme de groupe de noyau $\mathbb{Z}$ défini dans la sous-section 1.B). Alors i est une racine primitive quatrième de l'unité. Si $p \equiv 1 \bmod 4$, on prend $p^{1/2} = \mathcal{G}_1(L_1)$. Si

$p \equiv 3 \bmod 4$, on prend $p^{1/2} = i^{-1}\mathcal{G}_1(L_1)$. Il résulte de **36.1** que $p^{1/2}$ est bien une racine carrée de p. Alors, d'après [**Gau02**, VII.356], on a

$$\lambda_s = \begin{cases} (-1)^{s-1} & \text{si } p \equiv 1 \bmod 4, \\ (-1)^{s-1} i^s & \text{si } p \equiv 3 \bmod 4. \end{cases} \tag{36.3}$$

Ayant fixé une racine carrée de p, nous poserons, pour tout $s \in \mathbb{Z}$, $q^{s/2} = (p^{1/2})^{rs}$.

37. Calcul de $\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)$

37.A. Propriétés générales. — Rappelons qu'il a été fixé un morphisme injectif $\kappa : \mathbb{F}^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\,\times}$ qui fournit, par restriction à $\mathbb{F}_q^\times$ un caractère linéaire que l'on notera encore κ. Avant d'exprimer $\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)$ sous forme d'un produit de $\mathcal{G}_s(\kappa^m)$, nous aurons besoin de quelques notations. Notons $(\varpi_\alpha^\vee)_{\alpha\in\Delta_0}$ la $\mathbb{Q}$-base de $Y(\mathbf{T}_0/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ)$ duale de Δ_0. Notons Δ_0/ϕ_0 l'ensemble des orbites de ϕ_0 dans Δ_0. Pour finir, si $\omega \in \Delta_0/\phi_0$, notons $\alpha_\omega \in \omega$ un représentant et r_ω l'entier naturel non nul tel que $F^{|\omega|}(\alpha_\omega) = p^{r_\omega}\alpha_\omega$.

Soit $\zeta \in H^1(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G}))^\wedge$. Fixons $\dot{\zeta} \in X(\mathbf{T}_0/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ)$ tel que $\zeta = \kappa \circ \mathrm{Res}_{\mathcal{Z}(\mathbf{G})}^{\mathbf{T}_0/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ}\dot{\zeta}$. Alors, d'après [**DLM97**, proposition 2.4], on a $(q^{|\omega|}-1)\langle\dot{\zeta},\varpi_{\alpha_\omega}^\vee\rangle_{\mathbf{T}_0} \in \mathbb{Z}$ pour tout $\omega \in \Delta_0/\phi_0$ (car $(F-1)(\dot{\zeta})$ est trivial sur $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$) et

$$\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta) = \eta_{\mathbf{G}}\, q^{-\frac{1}{2}\mathrm{rg}_{\mathrm{sem}}(\mathbf{G})} \prod_{\omega\in\Delta_0/\phi_0} \mathcal{G}_{r_\omega}\big(\kappa^{(p^{r_\omega}-1)\langle\dot{\zeta},\varpi_{\alpha_\omega}^\vee\rangle_{\mathbf{T}_0}}\big). \tag{37.1}$$

Il est immédiat que le membre de droite ne dépend pas du choix de κ, ce qui est souhaitable. Nous allons maintenant rappeler quelques propriétés des nombres $\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)$.

Soit $\hat{\mathbf{G}}$ un groupe réductif connexe muni d'un endomorphisme de Frobenius $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{F}_q$ et soit $\pi : \hat{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ un morphisme isotypique défini sur $\mathbb{F}_q$. Alors π induit un morphisme surjectif $\mathcal{Z}(\hat{\mathbf{G}}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{G})$ et, si on note alors $\hat{\zeta} = \zeta\circ\pi \in \mathcal{Z}(\hat{\mathbf{G}})^\wedge$, alors il découle facilement de **37.1** que

$$\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta) = \mathcal{G}(\hat{\mathbf{G}},\hat{\zeta}). \tag{37.2}$$

D'autre part, si $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \times \cdots \times \mathbf{G}_0$ (k fois) et si F permute transitivement les composantes $\mathbf{G}_0$, notons $\zeta_0 \in H^1(F^k,\mathcal{Z}(\mathbf{G}_0))$ le caractère correspondant à ζ. On a alors, d'après [**DLM97**, preuve de la proposition 2.5],

$$\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta) = \mathcal{G}(\mathbf{G}_0,\zeta_0). \tag{37.3}$$

Ici, $\mathcal{G}(\mathbf{G}_0,\zeta_0)$ est calculé en utilisant l'isogénie F^k.

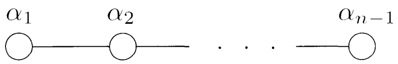
37.B. Cas cuspidal. — Nous supposons maintenant que $\zeta \in \mathcal{Z}_{\mathrm{cus}}^\wedge(\mathbf{G})$ et que ζ est F-stable. Alors toutes les composantes irréductibles de $\mathbf{G}$ sont de type A. Par suite, compte tenu de **37.2** et **37.3**, il suffit de calculer $\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)$ lorsque $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n(\mathbb{F})$ et $F = \sigma^k \circ F_{\mathrm{nat}}$, où $k \in \{0,1\}$, $F_{\mathrm{nat}} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ est l'endomorphisme de Frobenius déployé sur $\mathbb{F}_q$ et $\sigma : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, $g \mapsto J^t g^{-1} J$. Ici, J désigne la matrice monomiale dont les coefficients sur la deuxième diagonale sont tous égaux à 1.

Proposition 37.4. — *Supposons que $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_n(\mathbb{F})$ et que $F = \sigma^k \circ F_{\mathrm{nat}}$, où $d \in \{0,1\}$. On pose $\varepsilon = (-1)^d$. Soit $\zeta \in \mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$ et supposons que ζ est F-stable. Alors ζ est d'ordre n, n divise $q - \varepsilon$, et :*

$$\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ -\lambda_r(-1)^{\frac{(q-\varepsilon)(n-2)}{8}} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}$$

Remarque. — La formule de la proposition précédente est close grâce à **36.3**.

Démonstration. — Le fait que ζ est d'ordre n découle de la table **7.3**. Par conséquent, ζ est injectif et F-stable, donc F agit trivialement sur $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$. Par conséquent, n divise $q-\varepsilon$ car F agit sur $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ par élévation à la puissance εq. En particulier, n est premier à p. Nous aurons besoin de quelques notations. On numérote les $n-1$ racines simples comme suit :



Notons pour simplifier $\varpi_j^\vee = \varpi_{\alpha_j}^\vee$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Il existe alors un entier $k \in \mathbb{Z}$ premier à n tel que, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n-1$, on ait

$$\langle \dot{\zeta}, \varpi_j^\vee \rangle_{\mathbf{T}_0} \equiv \frac{kj}{n} \bmod \mathbb{Z}.$$

• Commençons par étudier le cas déployé (c'est-à-dire $d = 0$, ou encore $\varepsilon = 1$). Alors ϕ_0 est l'identité et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta) &= (-1)^{n-1} q^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{G}_r((\kappa^{(q-1)/n})^{kj}) \\ &= (-1)^{n-1} q^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{G}_r((\kappa^{(q-1)/n})^{j}), \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de ce que k est premier à n. Notons γ le caractère linéaire $\kappa^{(q-1)/n}$ de $\mathbb{F}_q^\times$. En regroupant j et $n-j$ et en utilisant **36.1**, on obtient :

$$\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta) = \begin{cases} \gamma(-1)^{1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ -\lambda_r \gamma(-1)^{1+2+\cdots+\frac{n-2}{2}} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Si q est pair, alors n est impair et $\kappa(-1) = \kappa(1) = 1$, donc $\gamma(-1) = 1$, ce qui montre le résultat dans ce cas. Supposons maintenant q impair. Alors $\kappa(-1) = -1$ et $\gamma(-1) = (-1)^{(q-1)/n}$. Cela montre le résultat annoncé si n est pair. Lorsque n est impair, alors $(q-1)/n$ est pair donc $\gamma(-1) = 1$, comme attendu.

• Étudions maintenant le cas où $d=1$, c'est-à-dire $\varepsilon=-1$. Alors $\phi_0(\alpha_j)=\alpha_{n-j}$ pour tout $1\leqslant j\leqslant n-1$. Deux cas se présentent :

$$\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)=\begin{cases} q^{-\frac{n-1}{2}}\displaystyle\prod_{j=1}^{(n-1)/2}\mathcal{G}_{2r}((\kappa^{(q^2-1)/n})^{kj}) & \text{si } n \text{ est impair,}\\ -\lambda_r q^{-\frac{n-2}{2}}\displaystyle\prod_{j=1}^{(n-2)/2}\mathcal{G}_{2r}((\kappa^{(q^2-1)/n})^{kj}) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Notons γ la restriction de $\kappa^{k(q^2-1)/n}$ à $\mathbb{F}_{q^2}^\times$. Alors γ est non trivial et $\gamma^{q+1}=1$ car n divise $q+1=q-\varepsilon$. Notons, comme dans la preuve de **36.2**, ξ un générateur du noyau de la trace $\mathrm{Tr}:\mathbb{F}_{q^2}\to\mathbb{F}_q$. D'après **36.2**, on a

$$\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)=\begin{cases}\gamma(\xi)^{1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair,}\\ -\lambda_r\gamma(\xi)^{1+2+\cdots+\frac{n-2}{2}} & \text{si } n \text{ est pair.}\end{cases}$$

Si q est pair, alors n est impair et $\gamma(\xi)=1$ car $\xi\in\mathbb{F}_q^\times$ et γ est trivial sur $\mathbb{F}_q^\times$. Supposons maintenant que q est impair. Lorsque n est impair, alors $\gamma(\xi)^2=\gamma(\xi)^n=1$ (car $\xi^2\in\mathbb{F}_q^\times$ et γ est trivial sur $\mathbb{F}_q^\times$) et donc $\gamma(\xi)=1$, ce qui montre le résultat attendu. Supposons maintenant n pair. Alors q et k sont impairs et on peut prendre $\xi=\xi_0^{(q+1)/2}$, où ξ_0 est un générateur de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$. On a alors $\gamma(\xi)=\kappa(\xi_0^{(q^2-1)/2})^{k(q+1)/n}$. Or, $\xi_0^{(q^2-1)/2}=-1$, donc $\gamma(\xi)=(-1)^{k(q+1)/n}=(-1)^{(q+1)/n}$. Cela termine la preuve de la proposition. □

Corollaire 37.5. — *Soit $F':\mathbf{G}\to\mathbf{G}$ un endomorphisme de Frobenius de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{F}_q$. Soit $\zeta\in\mathcal{Z}^\wedge_{\mathrm{cus}}(\mathbf{G})$. On suppose que ζ est F-stable et F'-stable. On note $\mathcal{G}'(\mathbf{G},\zeta)$ l'analogue de la constante $\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)$ calculée en utilisant l'endomorphisme de Frobenius F'. Alors*

$$\mathcal{G}'(\mathbf{G},\zeta)=\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta).$$

Démonstration. — En utilisant **37.2**, on se ramène au cas où $\mathbf{G}$ est semi-simple et simplement connexe, ce que nous supposerons par la suite. Par produit direct, on peut même supposer que $\mathbf{G}=\mathbf{SL}_n(\mathbb{F})^m$, où m est un entier naturel non nul. On note $\mathbf{G}_i$ la i-ième composante quasi-simple de $\mathbf{G}$: on a donc $\mathbf{G}_i\simeq\mathbf{SL}_n(\mathbb{F})$. On note σ (respectivement σ') la permutation de $E=\{1,2,\ldots,m\}$ telle que $F(\mathbf{G}_i)=\mathbf{G}_{\sigma(i)}$ (respectivement $F'(\mathbf{G}_i)=\mathbf{G}_{\sigma'(i)}$). Si n est impair, il résulte de **37.3** et de la proposition **37.4** que $\mathcal{G}(\mathbf{G},\zeta)=\mathcal{G}'(\mathbf{G},\zeta)=1$. Nous supposerons donc que n est pair.

Si $\omega\in E/\sigma$ (respectivement $\omega\in E/\sigma'$), on note ε_ω (respectivement ε'_ω) l'élément de $\{1,-1\}$ défini ainsi : fixons un représentant i_ω de ω et posons

$$\varepsilon_\omega=\begin{cases}1 & \text{si } F^{|\omega|} \text{ est un endomorphisme de Frobenius de } \mathbf{G}_{i_\omega} \text{ déployé sur } \mathbb{F}_{q^{|\omega|}},\\ -1 & \text{sinon}\end{cases}$$

(respectivement

$$\varepsilon'_\omega = \begin{cases} 1 & \text{si } F'^{|\omega|} \text{ est un endomorphisme de Frobenius de } \mathbf{G}_{i_\omega} \text{ déployé sur } \mathbb{F}_{q^{|\omega|}}, \\ -1 & \text{sinon}). \end{cases}$$

Il est à noter que ε_ω ne dépend pas du choix de i_ω. De plus, n divise $q^{|\omega|} - \varepsilon_\omega$. D'après **37.3** et la proposition **37.4**, on a :

$$\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = \prod_{\omega \in E/\sigma} \Big((-\lambda_{r|\omega|})(-1)^{\frac{(q^{|\omega|} - \varepsilon_\omega)(n-2)}{8}} \Big).$$

D'après **36.3**, on a $-\lambda_{rs} = (-\lambda_r)^s$ pour tout entier naturel non nul s. Par conséquent, si $(n_\omega)_{\omega \in E/\sigma}$ est une famille d'entiers relatifs impairs, on a

$$\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = (-\lambda_r)^m (-1)^{\frac{n-2}{8} \sum_{\omega \in E/\sigma} n_\omega (q^{|\omega|} - \varepsilon_\omega)}.$$

Posons $k = |E/\sigma|$ et notons $E/\sigma = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$. Nous allons maintenant faire un choix particulier pour la famille $(n_\omega)_{\omega \in E/\sigma}$. Si $i \geqslant 1$, posons $n_{\omega_i} = \varepsilon_{\omega_1} \dots \varepsilon_{\omega_i} q^{|\omega_1| + \dots + |\omega_{i-1}|}$. Alors $\sum_{\omega \in E/\sigma} n_\omega (q^{|\omega|} - \varepsilon_\omega) = \varepsilon q^m - 1$, où $\varepsilon = \prod_{\omega \in E/\sigma} \varepsilon_\omega$. Par suite, n divise $\varepsilon q^m - 1$ et

$$\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = (-\lambda_r)^m \Big((-1)^{\frac{n(n-2)}{8}} \Big)^{\frac{\varepsilon q^m - 1}{n}}.$$

De même, si on pose $\varepsilon' = \prod_{\omega \in E/\sigma'} \varepsilon'_\omega$, on a

$$\mathcal{G}'(\mathbf{G}, \zeta) = (-\lambda_r)^m \Big((-1)^{\frac{n(n-2)}{8}} \Big)^{\frac{\varepsilon' q^m - 1}{n}}.$$

Si $n = 2$, alors on a facilement que $\mathcal{G}(\mathbf{G}, \zeta) = \mathcal{G}'(\mathbf{G}, \zeta)$. Si $n > 2$, alors il nous suffit de montrer que $\varepsilon = \varepsilon'$. Mais, n divise $\varepsilon q^m - 1$ et $\varepsilon' q^m - 1$. Donc n divise $\varepsilon - \varepsilon'$. Comme $n > 2$, on obtient que $\varepsilon = \varepsilon'$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[Asa87] T. Asai – « Twisting operators on the space of class functions of finite special linear groups », in *The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, p. 99–148.

[BC72] C. T. Benson & C. W. Curtis – « On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), p. 251–273.

[BM] C. Bonnafé & J. Michel – « Mackey formula for Lusztig induction », en préparation.

[Bon96] C. Bonnafé – « Foncteurs de Lusztig dans le groupe spécial linéaire sur un corps fini », Thèse, Université Paris VII, 1996.

[Bon99a] ———, « Produit en couronne de groupes linéaires », *J. Algebra* **211** (1999), no. 1, p. 57–98.

[Bon99b] ———, « Regular unipotent elements », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328** (1999), no. 4, p. 275–280.

[Bon00a] ———, « Mackey formula in type A », *Proc. London Math. Soc. (3)* **80** (2000), no. 3, p. 545–574, *Corrigenda* : « Mackey formula in type A », *Proc. London Math. Soc.* **86** (2003), p. 435-442.

[Bon00b] ———, « Opérateurs de torsion dans $\mathbf{SL}_n(q)$ et $\mathbf{SU}_n(q)$ », *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), no. 3, p. 309–345.

[Bon04a] ———, « Actions of relative Weyl groups I », *J. Group Theory* **7** (2004), p. 1–37, « Actions of relative Weyl groups II », *J. Group Theory* **8** (2005), p. 351–387.

[Bon04b] ———, « Éléments unipotents réguliers des sous-groupes de Levi », *Canad. J. Math.* **56** (2004), no. 2, p. 246–276.

[Bon05] ———, « Quasi-isolated elements in reductive groups », *Comm. Algebra* **33** (2005), no. 7, p. 2315–2337.

[Bor91] A. Borel – *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Bou52] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. XIV. Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II : Algèbre. Chapitre VI : Groupes et corps ordonnés. Chapitre VII : Modules sur les anneaux principaux*, Actualités Sci. Ind., no. 1179, Hermann et Cie, Paris, 1952.

[Bou68] ______, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337, Hermann, Paris, 1968.

[Bri21] H. W. Brinkman – « The group characteristics of the ternary linear fractional group and of various other groups », Bull. Amer. Math. Soc., vol. 27, 1921.

[BT65] A. Borel & J. Tits – « Groupes réductifs », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1965), no. 27, p. 55–150.

[CE04] M. Cabanes & M. Enguehard – *Representation theory of finite reductive groups*, New Mathematical Monographs, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[DL76] P. Deligne & G. Lusztig – « Representations of reductive groups over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **103** (1976), no. 1, p. 103–161.

[DL83] ______, « Duality for representations of a reductive group over a finite field. II », *J. Algebra* **81** (1983), no. 2, p. 540–545.

[DLM92] F. Digne, G. Lehrer & J. Michel – « The characters of the group of rational points of a reductive group with nonconnected centre », *J. Reine Angew. Math.* **425** (1992), p. 155–192.

[DLM97] ______, « On Gel′fand-Graev characters of reductive groups with disconnected centre », *J. Reine Angew. Math.* **491** (1997), p. 131–147.

[DLM03] ______, « The space of unipotently supported class functions on a finite reductive group », *J. Algebra* **260** (2003), no. 1, p. 111–137.

[DM90] F. Digne & J. Michel – « On Lusztig's parametrization of characters of finite groups of Lie type », Astérisque, vol. 181-182, 1990, p. 113–156.

[DM91] ______, *Representations of finite groups of Lie type*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 21, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[Gau02] C. Gauss – *Disquisitiones arithmeticae*, 1802.

[Gec93] M. Geck – « A note on Harish-Chandra induction », *Manuscripta Math.* **80** (1993), no. 4, p. 393–401.

[GP00] M. Geck & G. Pfeiffer – *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 21, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.

[Gre55] J. A. Green – « The characters of the finite general linear groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **80** (1955), p. 402–447.

[HL80] R. B. Howlett & G. I. Lehrer – « Induced cuspidal representations and generalised Hecke rings », *Invent. Math.* **58** (1980), no. 1, p. 37–64.

[HL83] ______, « Representations of generic algebras and finite groups of Lie type », *Trans. Amer. Math. Soc.* **280** (1983), no. 2, p. 753–779.

[How80] R. B. Howlett – « Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups », *J. London Math. Soc. (2)* **21** (1980), no. 1, p. 62–80.

[Jor07] H. E. Jordan – « Group-Characters of Various Types of Linear Groups », *Amer. J. Math.* **29** (1907), no. 4, p. 387–405.

[Leh71] G. I. Lehrer – « On the discrete series characters of linear groups », Thèse, University of Warwick, 1971.

[Leh73] ______, « The characters of the finite special linear groups », *J. Algebra* **26** (1973), p. 564–583.

[LS77] G. Lusztig & B. Srinivasan – « The characters of the finite unitary groups », *J. Algebra* **49** (1977), no. 1, p. 167–171.

[LS79] G. Lusztig & N. Spaltenstein – « Induced unipotent classes », *J. London Math. Soc. (2)* **19** (1979), no. 1, p. 41–52.

[Lus76] G. Lusztig – « On the finiteness of the number of unipotent classes », *Invent. Math.* **34** (1976), no. 3, p. 201–213.

[Lus77] ______, « Irreducible representations of finite classical groups », *Invent. Math.* **43** (1977), no. 2, p. 125–175.

[Lus78] ______, *Representations of finite Chevalley groups*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 39, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.

[Lus84a] ______, *Characters of reductive groups over finite fields*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1984.

[Lus84b] ______, « Intersection cohomology complexes on a reductive group », *Invent. Math.* **75** (1984), no. 2, p. 205–272.

[Lus85] ______, « Character sheaves I », *Adv. in Math.* **56** (1985), no. 3, p. 193–237, « Character sheaves II », *Adv. in Math.* **57** (1985), 226-265 ; « Character sheaves III », *Adv. in Math.* **57** (1985), 266–315 ; « Character sheaves IV », *Adv. in Math.* **59** (1986), 1–63 ; « Character sheaves V », *Adv. in Math.* **61** (1986), 103–155.

[Lus88] ______, « On the representations of reductive groups with disconnected centre », Astérisque, no. 168, 1988, p. 10, 157–166.

[Lus90] ______, « Green functions and character sheaves », *Ann. of Math. (2)* **131** (1990), no. 2, p. 355–408.

[Lus92] ______, « Remarks on computing irreducible characters », *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), no. 4, p. 971–986.

[Sch07] I. Schur – « Untersuchungen über die Darstellung des endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen », *J. für Math.* **132** (1907).

[SF73] W. A. Simpson & J. S. Frame – « The character tables for SL(3, q), SU(3, q^2), PSL(3, q), PSU(3, q^2) », *Canad. J. Math.* **25** (1973), p. 486–494.

[Sho95] T. Shoji – « Character sheaves and almost characters of reductive groups. I, II », *Adv. Math.* **111** (1995), no. 2, p. 244–313, 314–354.

[Sho98] ______, « Shintani descent for special linear groups », *J. Algebra* **199** (1998), no. 1, p. 175–228.

[Sho05] ______, « Generalized Green functions and unipotent classes for finite reductive groups, I », 2005, preprint `math.RT/0507057`.

[Sho06] ______, « Lusztig's conjecture for finite special linear groups », *Represent. Theory* **10** (2006), p. 164–222.

[Sri68] B. Srinivasan – « The characters of the finite symplectic group Sp(4, q) », *Trans. Amer. Math. Soc.* **131** (1968), p. 488–525.

[SS70] T. A. Springer & R. Steinberg – « Conjugacy classes », in *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 131, Springer, Berlin, 1970, p. 167–266.

[Ste51a] R. Steinberg – « A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field », *Trans. Amer. Math. Soc.* **71** (1951), p. 274–282.

[Ste51b] ______, « The representations of $\mathrm{GL}(3,q), \mathrm{GL}(4,q), \mathrm{PGL}(3,q)$, and $\mathrm{PGL}(4,q)$ », *Canadian J. Math.* **3** (1951), p. 225–235.

[Ste65] ______, « Regular elements of semisimple algebraic groups », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1965), no. 25, p. 49–80.

[Ste68] ______, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[Wal04] J.-L. Waldspurger – « Une conjecture de Lusztig pour les groupes classiques », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2004), no. 96, p. vi+166.

INDEX