NICOLAS BERGERON
LAURENT CLOZEL

Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques

Astérisque, tome 303 (2005)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__303__R1_0>

ASTÉRISQUE 303

SPECTRE AUTOMORPHE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES ET APPLICATIONS TOPOLOGIQUES

Nicolas Bergeron
Laurent Clozel

Société Mathématique de France 2005
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

N. Bergeron
Unité Mixte de Recherche 8553 du CNRS, Département de mathématiques et applications (DMA), 45, rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05, France.
E-mail : `Nicolas.Bergeron@ens.fr`

L. Clozel
Université Paris-Sud, Unité Mixte de Recherche 8628 du CNRS, Laboratoire de Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F75, 32Q45, 11G18, 14G35, 22E47, 22E55, 58J50.

Mots clefs. — Spectre automorphe, variétés arithmétiques, conjectures d'Arthur, cohomologie des variétés localement symétriques.

À Natan, Céline et à toute l'équipe de la crèche parentale « Pic Puce »
sans qui ce livre serait déjà fini depuis quelques mois. *N.B.*

SPECTRE AUTOMORPHE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES ET APPLICATIONS TOPOLOGIQUES

Nicolas Bergeron, Laurent Clozel

Résumé. — Ce texte comporte deux parties. Dans la première nous étudions le spectre automorphe des variétés hyperboliques. Nous montrons en particulier un théorème « à la Selberg » sur la première valeur propre du laplacien sur les formes différentielles des variétés hyperboliques complexes de congruence. Notre démonstration passe par la théorie des représentations ; à ce titre nous tentons de faire un effort de vulgarisation de la théorie moderne des formes automorphes à l'attention d'éventuels lecteurs géomètres. Dans la deuxième partie du texte nous appliquons les résultats de la première partie à l'étude de la topologie des variétés hyperboliques complexes ; nous obtenons en particulier un théorème de relèvement de classes de cohomologie. La motivation principale de ce travail est donnée par les conjectures d'Arthur : celles-ci impliquent des restrictions très fortes sur le spectre des variétés arithmétiques qui à leur tour impliquent des propriétés conjecturales sur la géométrie des variétés hyperboliques. Ce texte fournit, outre des énoncés précis, la preuve de formes affaiblies de ces conjectures dans des cas particuliers.

***Abstract* (Automorphic spectrum of hyperbolic manifolds and topological applications)**

This book is made of two parts. The first is concerned with the differential form spectrum of congruence hyperbolic manifolds. We prove Selberg type theorems on the first eigenvalue of the laplacian on differential forms. The method of proof is representation-theoretic; we hope the different chapters may as well serve as an introduction to the modern theory of automorphic forms and its application to spectral questions. The second part of the book is of a more differential geometric flavor; a new kind of lifting of cohomology classes is proved. The main motivation of this work is given by Arthur's conjectures; these conjectures implies strong restrictions on the spectrum of arithmetic manifolds which, in turn, imply conjectural properties on the geometry of hyperbolic manifolds. Together with precise statements of these conjectures, this text gives proofs of weak forms of them in some particular cases.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Un programme conjectural

Soit G un groupe algébrique connexe et presque simple sur $\mathbb{Q}$ tel que le groupe $G(\mathbb{R})$ des points réels soit le produit (avec intersection finie) d'un groupe compact et d'un groupe réel non compact presque simple. Nous noterons ce dernier groupe G^{nc} (nc signifie ici non compact). Dans cette introduction (comme dans la majeure partie du texte) nous supposons G^{nc} isomorphe au groupe $\mathrm{SO}(n,1)$ (resp. $\mathrm{SU}(n,1)$).

L'espace symétrique associé au groupe G (plus précisément au groupe $G(\mathbb{R})$) est alors l'espace hyperbolique réel (resp. complexe) de dimension réelle (resp. complexe) n, nous le noterons X_G, d_G sa dimension réelle et nous supposerons la métrique normalisée de façon à ce que les courbures sectionnelles réelles soient comprises entre -4 et -1 (-1 pour les espaces hyperboliques réels associés aux groupes $\mathrm{SO}(n,1)$ et -4 pour le plan hyperbolique réel associé au groupe $\mathrm{SU}(1,1)$). Posons $d=1$ dans le cas réel, $d=2$ dans le cas complexe (on a donc $d_G = dn$) et $\rho_G = \frac{d_G-2+d}{2}$.

Soit K_f un sous-groupe compact-ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ (où $\mathbb{A}_f$ désigne l'anneau des adèles finis sur $\mathbb{Q}$) tel que le groupe $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$ soit sans torsion. Un tel groupe Γ est appelé *sous-groupe de congruence (sans torsion) de G* [(1)]. On appellera *variété hyperbolique réelle (resp. complexe) de congruence* tout quotient de l'espace hyperbolique réel (resp. complexe) X_G par un sous-groupe de congruence (sans torsion) Γ de G comme ci-dessus.

D'après un théorème de Borel et Harish-Chandra [**14**], une variété hyperbolique réelle (resp. complexe) de congruence est toujours de volume fini et est compacte si et seulement si le groupe G est anisotrope sur $\mathbb{Q}$.

En 1965, Selberg [**91**] a démontré que si Γ est un sous-groupe de congruence du $\mathbb{Q}$-groupe $\mathrm{SL}(2)$, alors la première valeur propre non nulle λ_1 du laplacien sur les

---

[(1)] Lorsque G est défini sur $\mathbb{Z}$, on peut préférer considérer les sous-groupes Γ de $G(\mathbb{Z})$ sans torsion et contenant un sous-groupe de la forme $\ker(G(\mathbb{Z}) \to G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ pour un certain entier $N \geqslant 1$.

fonctions L^2 de $\Gamma\backslash\mathcal{H}^2$ est supérieure ou égale à $\frac{3}{16}$. Il conjecture de plus que $\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4}$, la valeur $\frac{1}{4}$ apparaissant d'ailleurs dans le spectre L^2 d'un quotient $\Gamma\mathcal{H}^2$ pour un certain groupe de congruence Γ.

Après des travaux de Selberg [**91**], Jacquet et Langlands [**55**], Gelbart et Jacquet [**42**], Sarnak [**88**], Elstrodt, Grunewald et Mennicke [**39**], Cogdell, Li, Piatetski-Shapiro et Sarnak [**28**] et Burger et Sarnak [**20**], le second auteur a récemment étendu, dans [**26**], le théorème de Selberg à toutes les variétés hyperboliques de congruence : si G est un groupe $\mathbb{Q}$-algébrique comme ci-dessus et Γ un sous-groupe de congruence de G, alors la première valeur propre non nulle du laplacien sur les fonctions L^2 de $\Gamma\backslash X_G$ est minorée par une constante strictement positive ne dépendant que de la dimension réelle d_G de X_G (« Conjecture τ »).

Le but de ce volume est d'étudier, surtout dans le cadre des variétés hyperboliques, l'extension possible de ce résultat aux *formes différentielles*, et les profondes conséquences géométriques qui en découlent. Le fait que l'on se restreigne aux espaces hyperboliques réels et complexes sera motivé au chapitre 3 où l'on mentionnera des résultats concernant d'autres espaces symétriques. Il est d'ailleurs intéressant de noter que le rang supérieur, $\geqslant 2$, joue encore un rôle spécial dans l'étude du spectre sur les formes différentielles (et non seulement sur celui sur les fonctions) ; on explicitera ce phénomène sur les groupes unitaires $\mathrm{U}(p,q)$. Revenons maintenant à notre groupe G. Dans notre étude nous sommes guidés par la conjecture suivante, qui généralise la Conjecture de Selberg.

Conjecture A. — *Soit G un groupe $\mathbb{Q}$-algébrique comme ci-dessus.*

(1) *Si $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SO}(2n,1)$, alors pour tout entier naturel $i \leqslant n$,*

$$\lambda_1^i(\Gamma\backslash X_G) \geqslant \max(2n-2i-2, 1/4) > 0.$$

(2) *Si $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SO}(2n+1,1)$, alors pour tout entier naturel $i \leqslant n-1$,*

$$\lambda_1^i(\Gamma\backslash X_G) \geqslant 2n-2i-1 > 0.$$

(3) *Si $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(n,1)$, alors pour tout entier naturel $i \leqslant n$,*

$$\lambda_1^i(\Gamma\backslash X_G) \geqslant \max(4(n-i-1), 1) > 0.$$

Ici λ_1^i désigne la première valeur propre non nulle du laplacien de Hodge sur les formes différentielles de degré i et Γ est un sous-groupe de congruence quelconque de G.

La Conjecture A, qui implique en particulier la Conjecture de Selberg, est de nature arithmétique et sûrement très difficile, la prédiction que les constantes explicites de minoration du spectre sont toujours des demi-entiers est une « conjecture de pureté » qui renvoie au théorème de pureté de Deligne. On peut relaxer un peu cette conjecture en un énoncé plus géométrique.

Conjecture A$^-$. — *Soit G comme dans la Conjecture A. Alors, pour tout entier naturel $i \leqslant \frac{d_G}{2} - 1$ il existe une constante strictement positive $\varepsilon(G,i)$ telle que pour tout sous-groupe de congruence Γ dans G,*

$$\lambda_1^i(\Gamma\backslash X_G) \geqslant \varepsilon(G,i).$$

Soit i un entier naturel et G un groupe $\mathbb{Q}$-algébrique comme dans la Conjecture A. On dira que la *Conjecture A$^-$(i) est vérifiée* par G s'il existe une constante strictement positive $\varepsilon(G,i)$ telle que pour tout sous-groupe de congruence Γ de G,

$$\lambda_1^i(\Gamma\backslash X_G) \geqslant \varepsilon(G,i),$$

où λ_1^i désigne encore la première valeur propre non nulle du laplacien de Hodge sur les formes différentielles de degré i.

La solution mentionnée ci-dessus de la Conjecture τ peut donc s'énoncer de la façon suivante : *la Conjecture A$^-$(0) est vérifiée par tout groupe G comme dans la Conjecture A.*

La Conjecture A$^-$ pour les groupes G tels que $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(n,1)$ implique qu'il existe une constante strictement positive $\varepsilon(G)$ telle que la première valeur propre du laplacien de Hodge sur l'ensemble des formes différentielles (de tous les degrés) sur $\Gamma\backslash X_G$, pour n'importe quel sous-groupe de congruence Γ de G, soit supérieure ou égale à $\varepsilon(G)$.

Cette propriété est fausse pour les groupes G tels que $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SO}(n,1)$ lorsque n est impair. En effet, lorsque $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SO}(2n+1,1)$, $\lambda_1^n(\Gamma\backslash X_G)$, la première valeur propre non nulle du laplacien de Hodge sur les formes différentielles de degré n, peut être rendue arbitrairement petite quitte à changer de sous-groupe de congruence Γ de G. Néanmoins si l'on se restreint au spectre des n-formes différentielles *fermées* la Conjecture A$^-$ implique encore une minoration uniforme du spectre sur les n-formes différentielles. On verra que cette propriété est utile géométriquement. Étant donné un entier naturel i et un groupe G comme dans la Conjecture A, on dira que la *Conjecture $A^-_{d=0}(i)$ est vérifiée* par G s'il existe une constante strictement positive $\varepsilon(G,i)$ telle que la première valeur propre du laplacien de Hodge sur les formes différentielles fermées de degré i soit $\geqslant \varepsilon(G,i)$.

Toute la première partie du texte sera motivée par la double Conjecture A, A$^-$. La deuxième partie est quant à elle motivée par une seconde conjecture de nature topologique/géométrique. Cette conjecture concerne l'homologie des variétés hyperboliques réelles ou complexes de congruence. Précisons que tous les groupes de (co-)homologie que nous considérerons dans cet article seront à coefficients rationnels.

Conjecture B. — *Soit M une variété hyperbolique réelle (resp. complexe) de congruence de dimension m. Soit F une sous-variété réelle (resp. complexe) compacte connexe totalement géodésique immergée dans M. Alors, il existe un revêtement fini de congruence $\widehat{M}$ de M tel que :*

(1) *l'immersion de F dans M se relève en un plongement de F dans $\widehat{M}$,*
(2) *l'application induite :*

$$H_p(F) \longrightarrow H_p(\widehat{M})$$

est injective pour tout entier $p \geqslant m/2$.

Nous dirons qu'une variété hyperbolique réelle (resp. complexe) de congruence de dimension réelle m vérifie la Conjecture B(i) pour un certain entier $i \geqslant m/2$, si pour toute sous-variété réelle (resp. complexe) compacte connexe totalement géodésique immergée dans M, il existe un revêtement fini de congruence $\widehat{M}$ de M tel que :

(1) l'immersion de F dans M se relève en un plongement de F dans $\widehat{M}$,
(2) l'application induite :

$$H_i(F) \longrightarrow H_i(\widehat{M})$$

est injective.

La Conjecture B est à comparer avec les propriétés de Lefschetz pour les variétés hyperboliques complexes de congruence mises en évidence par Oda [**81**], Harris et Li [**50**] et Venkataramana [**99**]. Ces propriétés s'énoncent plus facilement dans le langage d'Harris, Li et Venkataramana que l'on rappelle ci-dessous.

Soient $H \subset G$ deux groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$ comme plus haut. Supposons de plus H et G *anisotropes* sur $\mathbb{Q}$ et du même type, orthogonal ou unitaire. L'inclusion $H \subset G$ induit un plongement totalement géodésique naturel $X_H \to X_G$ entre les espaces symétriques associés.

Soit K_f un sous-groupe compact-ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ tel que le groupe $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$ soit sans torsion. Désignons par Γ_H l'intersection de Γ avec $H(\mathbb{Q})$. On obtient alors une application lisse :

$$j = j(\Gamma) : \Gamma_H \backslash X_H \longrightarrow \Gamma \backslash X_G$$

pour chaque sous-groupe de congruence sans torsion de $G(\mathbb{Q})$. Celle-ci induit une application naturelle

$$j_* : H_*(\Gamma_H \backslash X_H) \longrightarrow H_*(\Gamma \backslash X_G). \tag{0.0.1}$$

Remarquons que si g est un élément quelconque de $G(\mathbb{Q})$, on peut translater l'immersion j en une application lisse

$$j_g = j_g(\Gamma) : (H \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H \longrightarrow \Gamma \backslash X_G.$$

On appelle *application de restriction virtuelle*, l'application

$$H^*(\Gamma \backslash X_G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^*((H \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H) \tag{0.0.2}$$

induite en cohomologie par la famille d'applications $(j_g)_{g \in G(\mathbb{Q})}$.

On s'intéresse aux applications (0.0.1) et (0.0.2) *virtuellement* en un deuxième sens : à revêtements fini (de congruence) près. Soient donc $\Gamma' \subset \Gamma$ deux sous-groupes de congruence sans torsion de $G(\mathbb{Q})$. Alors le revêtement fini (de variétés compactes)

$$\Gamma' \backslash X_G \longrightarrow \Gamma \backslash X_G$$

induit, en homologie, une application surjective

$$H_*(\Gamma' \backslash X_G) \longrightarrow H_*(\Gamma \backslash X_G) \tag{0.0.3}$$

et, en cohomologie, une application injective

$$H^*(\Gamma \backslash X_G) \longrightarrow H^*(\Gamma' \backslash X_G). \tag{0.0.4}$$

On obtient ainsi un système projectif (resp. inductif) de groupes d'homologie (resp. de cohomologie) indexé par les sous-groupes de congruence de $G(\mathbb{Q})$. On désigne par $H_*(\mathrm{Sh}^0 G)$ la limite projective du système (0.0.3) et par $H^*(\mathrm{Sh}^0 G)$ la limite inductive du système (0.0.4) (2). En passant à la limite, lorsque Γ varie, dans (0.0.1) et (0.0.2), on obtient les applications naturelles :

$$H_*(\mathrm{Sh}^0 H) \longrightarrow H_*(\mathrm{Sh}^0 G)$$

et

$$H^*(\mathrm{Sh}^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^*(\mathrm{Sh}^0 H).$$

Rappelons que les théorèmes de Lefschetz permettent d'étudier la topologie d'une variété projective complexe par récurrence, en la coupant par un hyperplan de l'espace projectif. Un yoga semblable, mais moins fort, existe pour les variétés hyperboliques complexes de congruence. Il a été dégagé par Harris et Li [**50**] et prouvé par Venkataramana [**99**] : *si $H \subset G$ sont deux groupes comme ci-dessus de type unitaire alors l'application naturelle*

$$H^i(\mathrm{Sh}^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^i(\mathrm{Sh}^0 H)$$

est injective pour tout entier naturel $i \leqslant d_H/2$.

La Conjecture B ci-dessus implique une conjecture plus faible renforçant le yoga de type Lefschetz :

Conjecture B$^-$. — *Soient $H \subset G$ comme plus haut. Alors pour tout entier $i \geqslant d_G/2$, l'application naturelle*

$$H_i(\mathrm{Sh}^0 H) \longrightarrow H_i(\mathrm{Sh}^0 G)$$

est injective.

---

(2) La notation $\mathrm{Sh}^0 G$ renvoie à l'existence d'un espace topologique dont la cohomologie de Čech coïncide avec la limite inductive du système (0.0.4). Lorsque le groupe G est unitaire, cet espace est la variété de Shimura connexe associée à G.

Remarquons que par dualité, la Conjecture B$^-$ implique que l'application naturelle de restriction

$$H^i(\mathrm{Sh}^0\, G) \longrightarrow H^i(\mathrm{Sh}^0\, H)$$

est surjective.

Dans la deuxième partie de cet article, nous relions la Conjecture B à la Conjecture A$^-$ énoncée plus haut. Les résultats de la première partie concernant la Conjecture A vont nous permettre de démontrer des résultats partiels concernant la Conjecture B. Avant de passer à la description de nos résultats, remarquons que d'autres propriétés de type Lefschetz sont conjecturées et étudiées par le premier auteur dans [**9**], ces propriétés sont elles aussi liées à la Conjecture A$^-$.

Enfin soulignons que la plupart des méthodes développées dans cet article devraient se généraliser aux groupes algébriques semi-simples généraux. En ce qui concerne les résultats spectraux, on l'a dit, le cas que nous considérons est le plus intéressant. Néanmoins ceci n'est plus vrai en ce qui concerne les résultats topologiques. À la fin du texte nous décrivons d'ailleurs un théorème de la veine de la Conjecture B mais pour les variétés de congruence associées aux groupes unitaires $\mathrm{U}(p,q)$. C'est un premier résultat, le premier auteur espère revenir à l'étude de ces variétés dans un autre texte, en explicitant la combinatoire (plus riche) des propriétés du type Lefschetz auxquelles on doit s'attendre.

Description des résultats

On l'a rappelé, le second auteur a récemment démontré la Conjecture A$^-(0)$ pour tout groupe G comme dans la Conjecture A. Même la seule Conjecture A$^-(1)$ semble difficile. Il est naturel de commencer à étudier celle-ci sur de petits groupes. Le groupe $\mathrm{SL}(2)$ est trop petit : la Conjecture A$^-(1)$ découle trivialement de la Conjecture A$^-(0)$ (la Conjecture A$^-(i)$ n'est d'ailleurs formulée ci-dessus que pour $i \leqslant \frac{d_G}{2} - 1$ égal à 0 dans notre cas). Le plus petit groupe pour lequel la Conjecture A$^-(1)$ ne découle pas trivialement de A$^-(0)$ est le groupe spécial unitaire en 3 variables $\mathrm{SU}(2,1)$. C'est donc sur ce groupe que porte une bonne partie de notre étude. Nous démontrons notamment :

Théorème 1. — *Si G est un groupe comme dans la Conjecture A avec $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(2,1)$, alors la Conjecture A$^-$ est vraie pour G, avec $\varepsilon(G,0) = \frac{84}{25}$ et $\varepsilon(G,1) = \frac{9}{25}$.*[3]

En fait ce résultat est essentiellement contenu dans l'article [**50**] de Harris et Li. On en donne ici une preuve complète. Celle-ci repose sur la théorie des représentations, on profite de cette occasion pour détailler les liens entre le spectre du laplacien de

(3) Dans [**10**] on a annoncé à tort que $\varepsilon(G,0) = 3$ est optimal, nous verrons qu'en fait la valeur propre 3 n'intervient pas dans le spectre automorphe de G. Ceci explique également que la Conjecture A ci-dessus est plus forte que celle figurant dans [**10**].

Hodge sur les espaces localement symétriques et la théorie des représentations des groupes semi-simples.

Le chapitre 1 rappelle ainsi la formule de Matsushima telle que nous en aurons besoin, on en donne une preuve complète afin de faciliter la lecture. On rappelle également dans cette section les définitions de base de théorie des représentations que nous utiliserons dans le texte.

Le chapitre 2 aborde l'étude du spectre du laplacien sur les quotients arithmétiques via la théorie des représentations. On rappelle beaucoup de résultats de base de théorie des représentations. La démonstration de la Conjecture τ y est esquissée. Enfin on montre que l'extension naïve de la Conjecture A à des groupes plus généraux est fausse. Il serait d'ailleurs intéressant de dégager une conjecture générale pour tous les espaces localement symétriques.

Le chapitre 3 est quant à lui consacré à la théorie des représentations de $\mathrm{GL}(n)$. On se contente le plus souvent de citer les résultats dont nous aurons besoin, on a néanmoins fait un effort pour rendre les résultats maniables à un lecteur prêt à les adopter comme « boîte noire ».

Le chapitre 4 est l'analogue du chapitre précédent pour le groupe $\mathrm{U}(n,1)$, il est néanmoins beaucoup plus détaillé, le groupe $\mathrm{U}(n,1)$ jouant le rôle principal dans le texte. Un certain nombre de résultats classiques rappelés ici sont superflus pour la suite, on a néanmoins tenu à inclure une description détaillée de ceux-ci afin de pouvoir utiliser ce texte dans des travaux ultérieurs. On espère que l'effort fait de collecter ici des résultats épars dans la littérature pourra également être utile par ailleurs.

Le chapitre 5 généralise certains points du chapitre précédent aux groupes unitaires plus généraux. Il est bien connu qu'en rang supérieur la propriété (T) de Kazhdan assure l'existence d'un trou spectral pour le laplacien sur les fonctions sur les variétés localement symétriques. Dans ce chapitre nous montrons que pour les groupes unitaires $\mathrm{SU}(p,q)$ dès que $p \geqslant q \geqslant 2$ (donc dès que le rang est supérieur ou égal à 2) un phénomène analogue apparaît dans l'étude du spectre du laplacien sur les formes différentielles de suffisamment petit degré. Nous déduisons ce Théorème d'un résultat plus général, à paraître (bien que datant du début des années 90), de Vogan. Ce résultat illustre également le rôle spécial joué par les groupes $\mathrm{U}(n,1)$ et $\mathrm{O}(n,1)$ dans ces questions. Groupes pour lesquels on ne peut espérer d'isolation spectrale structurelle mais pour lesquels il faut étudier le spectre automorphe.

Motivé par le chapitre précédent, le chapitre 6 est consacré à la description du yoga d'Arthur pour les groupes $\mathrm{U}(n,1)$ et $\mathrm{O}(n,1)$. Nous précisons notre interprétation des Conjectures d'Arthur pour ces deux groupes, ce qui permet de conforter la Conjecture A.

La suite de la première partie du texte vise à démontrer le Théorème 1 et les résultats que nous décrivons ci-dessous. Le Théorème 1 découle des travaux de Rogawski permettant de réduire l'étude du spectre automorphe de $U(2,1)$ au spectre automorphe de $GL(3)$ par changement de base. Il reste alors à contrôler le spectre automorphe de $GL(n)$. La conjecture standard dans ce cas est la Conjecture de Ramanujan. On a besoin d'une approximation de celle-ci. Une telle approximation nous est fournie par un théorème de Luo, Rudnick et Sarnak. On a en fait besoin d'une généralisation de celui-ci. La démonstration de cette généralisation fait l'objet du chapitre 7.

On peut alors dans le chapitre 8 donner une démonstration complète du Théorème 1. Nous profitons également de ce chapitre pour revenir sur la Conjecture de changement de base faite par Harris et Li dans [**50**], que l'on étend légèrement et que l'on compare aux Conjectures d'Arthur. Nous nous servons de cette conjecture dans la deuxième partie du texte pour étendre la Conjecture B à d'autres groupes semi-simples.

Pour chaque réel strictement positif ε, notons A^p_ε l'hypothèse spectrale suivante sur le groupe G.

$$\mathrm{A}^p_\varepsilon : \begin{cases} \text{si } \lambda \text{ est dans le } p-\text{spectre automorphe de } G, \text{ alors :} \\ 1. \text{ soit } \lambda = (\rho_G - k)^2 - (\rho_G - i)^2 \text{ avec } k = 0, \dots, p \text{ et } i = k, \dots, [\rho_G], \\ 2. \text{ soit } \lambda \geqslant (\rho_G - p)^2 - \varepsilon^2. \end{cases}$$

Nous expliquerons que les Conjectures d'Arthur semblent prévoir que, pour un groupe G comme ci-dessus, chaque hypothèse A^p_0 est vraie pour $p \leqslant [\rho_G]$. Les hypothèses A^p_ε sont donc des approximations aux Conjectures d'Arthur pour le groupe G, lorsque ε est suffisamment petit, ces approximations sont en général plus précises que la Conjecture A^-. Le but du chapitre 9 est la démonstration du théorème suivant qui permet de relever les approximations aux Conjectures d'Arthur.

Théorème 2. — *Soient $H \subset G$ deux groupes $\mathbb{Q}$-algébriques comme dans la Conjecture B. Supposons que H vérifie l'hypothèse A^p_ε pour un certain réel $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel $p \leqslant [\rho_H]$.*

Alors le groupe G vérifie les hypothèses $\mathrm{A}^p_{\rho_G - \rho_H + \varepsilon}$ pour tout entier naturel $p \leqslant [\rho_H]$.

À l'aide des Théorèmes 1 et 2 et de l'analyse de certains groupes unitaires spéciaux (comme ceux intervenant dans la preuve de la Conjecture τ) nous montrons dans le chapitre 10 le théorème suivant.

Théorème 3. — *Si G est un groupe comme dans la Conjecture A avec $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(n,1)$ (et quelques conditions techniques supplémentaires si $n+1$ est une puissance de 2), alors les Conjectures $A^-(0)$ et $A^-(1)$ sont vérifiées par G, avec $\varepsilon(G,0) = 2n-1$ et $\varepsilon(G,1) = \frac{10n-11}{25}$.*

Ceci conclut la première partie, partie spectrale, du texte. Dans la deuxième partie nous nous intéressons à l'homologie des variétés de congruence. Le résultat principal est le théorème suivant.

Théorème 4. — *La Conjecture A^- implique la Conjecture B.*

Plus précisément, soit G un groupe comme dans la Conjecture A et i un entier naturel $\leqslant d_G/2$. Si la Conjecture $A^-_{d=0}(i)$ est vérifiée par G, alors quel que soit Γ sous-groupe de congruence sans torsion de G, la variété $\Gamma\backslash X_G$ vérifie la Conjecture $B(d_G - i)$.

Nous ne prouverons le Théorème 4 que pour $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(n,1)$. Le cas où $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SO}(n,1)$, similaire, est plus simple et complètement traité dans [**8**]. Remarquons néanmoins que puisque la Conjecture $\mathrm{A}^-_{d=0}(1)$ est démontrée, le Théorème 4 implique le célèbre Théorème de Millson selon lequel toute variété hyperbolique (réelle) arithmétique standard (autrement dit provenant d'un groupe orthogonal sur un corps de nombres, *cf.* § 15.2) admet un revêtement fini dont le premier nombre de Betti est non nul.

Nous démontrons en fait un résultat plus général que le Théorème 4, voir chapitre 15 Théorème 15.1.1. Pour cela, après un premier chapitre consacré à l'espace hyperbolique complexe principal objet de cette partie, nous consacrons un long chapitre aux espaces symétriques associés aux groupes unitaires, nous suivons pour l'essentiel les articles de Tong et Wang cités dans la bibliographie. C'est également en suivant les travaux de Tong et Wang que nous construisons dans le chapitre 13 la forme duale aux sous-variétés totalement géodésiques que nous considérons dans le texte.

Allié au Théorème 3, le Théorème 4 nous permet en fin de deuxième partie de démontrer le théorème suivant qui est la première avancée significative vers la Conjecture B.

Théorème 5. — *Soit M une variété hyperbolique complexe compacte de congruence de dimension $d+2$. Soit F une sous-variété complexe compacte connexe totalement géodésique de dimension d et immergée dans M. Alors, il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M tel que :*

(1) *l'immersion de F dans M se relève en un plongement de F dans $\widehat{M}$,*

(2) *l'application induite :*

$$H_{d-1}(F) \longrightarrow H_{d-1}(\widehat{M})$$

est injective.

De plus, pour tout entier N et tout cycle c dans $H_{d-1}(\widehat{F})$, il existe un revêtement fini M_N de M contenant N relevés de c linéairement indépendants dans $H_{d-1}(M_N)$.

On en déduit alors facilement le corollaire suivant.

Corollaire 6. — *Soient $H \subset G$ deux groupes comme dans la Conjecture B^-. Supposons que*

$$\begin{cases} H^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(n-1,1) \\ G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(n,1), \end{cases}$$

alors l'application naturelle

$$H_{2n-3}(\mathrm{Sh}^0\, H) \longrightarrow H_{2n-3}(\mathrm{Sh}^0\, G)$$

est injective.

Remarquons que la démonstration des théorèmes ci-dessus repose de manière essentielle sur l'étude de la cohomologie L^2 de quotients $V = \Gamma\backslash X$, où X est l'espace hyperbolique complexe de dimension complexe n et Γ un groupe discret préservant un sous-espace totalement géodésique de X et agissant cocompactement sur celui-ci. Un cas particulier de ce que nous démontrons au chapitre 14 est le théorème suivant.

Théorème 7. — *Pour tout entier $k < n$, il existe un isomorphisme naturel :*

$$\mathcal{H}^k_{(2)}(V) \xrightarrow{\cong} H^k_c(V).$$

De plus, l'espace $\mathcal{H}^n_{(2)}$ est de dimension infinie.

Le théorème que nous démontrons est plus général ; il repose de manière essentielle sur un théorème de Ohsawa et Tanigushi.

Les démonstrations des Théorèmes 4 et 5 occupent le chapitre 15. Bon nombre des techniques développées dans cette deuxième partie s'étendent à des espaces symétriques plus généraux. Grâce aux résultats spectraux obtenus au chapitre 5 concernant les groupes unitaires $\mathrm{U}(p,q)$, nous démontrons également dans ce chapitre le théorème suivant.

Théorème 8. — *Soient p, q, r trois entiers naturels vérifiant $p \geqslant q \geqslant 2$ et $p \geqslant r$. Soient H, G deux groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$ tels que*

- *H soit un $\mathbb{Q}$-sous-groupe de G,*
- *$H^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(p-r,q)$,*
- *$G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(p,q)$.*

Alors, l'application naturelle

$$H_i(\mathrm{Sh}^0\, H) \longrightarrow H_i(\mathrm{Sh}^0\, G)$$

est injective pour tout entier $i > 2pq - p - q + 1$.

Il serait évidemment intéressant de formuler une conjecture générale suivant le principe de la Conjecture B mais pour tout groupe semi-simple. La combinatoire devrait être plus compliquée. Dans un article en préparation le premier des deux auteurs étudie ce problème en portant une attention particulière au cas des groupes unitaires et orthogonaux.

PARTIE I

SPECTRE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

CHAPITRE 1

THÉORÈME DE MATSUSHIMA

Soit X un espace symétrique simplement connexe de courbure négative sans facteurs euclidiens et soit G un groupe de Lie semi-simple réel connexe agissant transitivement sur X par isométries. Nous supposons que l'application de G vers la composante connexe de l'identité du groupe des isométries de X est un revêtement fini. Dans la suite nous supposons que la métrique riemannienne de X est identique à celle induite par la forme de Killing de G. Nous notons K le groupe d'isotropie dans G d'un point fixé p de X. Puisque X est de courbure négative, le groupe G est de centre fini et sans facteur compact. Notons $\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ la décomposition de Cartan associée au choix du compact maximal K. Nous adoptons la convention classique de noter avec un indice 0 les algèbres de Lie réelles et si $\mathfrak{l}_0$ est une algèbre de Lie réelle, nous notons $\mathfrak{l}$ l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \otimes \mathbb{C}$.

Soit Γ un sous-groupe discret de G tel que $\Gamma \backslash X$ soit compact. Soit $\Omega^p(\Gamma\backslash X;\mathbb{C})$ l'espace des p-formes différentielles ω sur X invariantes par Γ *i.e.*

$$\omega(x; v_1, \dots, v_p) = \omega(\gamma x; \gamma v_1, \dots, \gamma v_p) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Notons $\pi : G \to G/K = X$ la projection canonique. Soit $\widetilde{\omega} = \pi^*\omega$. La forme $\widetilde{\omega}$ est une p-forme sur G, ce que nous notons $\widetilde{\omega} \in \Omega^p(G;\mathbb{C})$. Pour tout $g \in G$, la translation à gauche par g^{-1} fournit un isomorphisme canonique de $T_g(G)$ vers $\mathfrak{g}_0 = T_e(G)$ et donc une identification

$$\Omega^p(G;\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(\Lambda^p(\mathfrak{g}), C^\infty(G;\mathbb{C})). \tag{1.0.1}$$

La forme $\widetilde{\omega}$ provient d'une forme ω sur G/K invariante sous l'action (à gauche de Γ) et via l'identification (1.0.1) appartient à :

$$C^p(\mathfrak{g}, K; C^\infty(\Gamma\backslash G;\mathbb{C})) := \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p(\mathfrak{p}), C^\infty(\Gamma\backslash G;\mathbb{C})),$$

où K agit sur $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ via la représentation adjointe et sur $C^\infty(\Gamma\backslash G;\mathbb{C})$ via la représentation régulière à droite. Réciproquement, il n'est pas difficile de voir qu'à un élément de $C^p(\mathfrak{g}, K; C^\infty(\Gamma\backslash G; \mathbb{C}))$ correspond une p-forme sur G provenant d'une p-forme sur G/K et invariante sous l'action de Γ. Nous résumons tout ceci dans la proposition suivante qui semble avoir été pour la première fois constatée par Gelfand et Fomin [**43**] puis précisée par Matsushima [**77**].

Proposition 1.0.1. — *L'application $\omega \mapsto \omega \circ \pi$ induit un isomorphisme de complexes gradués de $\Omega^*(\Gamma\backslash X; \mathbb{C})$ sur $C^*(\mathfrak{g}, K; C^\infty(\Gamma\backslash G; \mathbb{C}))$.*

Notons Δ le laplacien de Hodge sur les formes différentielles sur X (pour sa structure riemannienne). Soit ω une p-forme sur X telle que $\Delta\omega = \lambda\omega$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après la Proposition 1.0.1, il correspond à ω un élément (que nous notons toujours ω) dans $C^p(\mathfrak{g}, K; C^\infty(\Gamma\backslash G; \mathbb{C}))$.

D'un autre côté, il est bien connu (*cf.* [**44**]) que la représentation régulière droite dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ se décompose en :

$$L^2(\Gamma\backslash G) = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} m(\pi, \Gamma)\mathcal{H}_\pi, \tag{1.0.2}$$

somme discrète de sous-espaces G-invariants irréductibles, indexée par le dual unitaire $\widehat{G}$ de G, et où chaque $m(\pi, \Gamma)$ est fini. Rappelons que le dual unitaire de G désigne l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles unitaires de G, cet ensemble est naturellement muni d'une topologie, nous en rappelons les principales propriétés au chapitre suivant (§ 2.2).

On voit ainsi se dessiner une correspondance entre certaines représentations de G et l'espace des formes différentielles λ-propres pour le laplacien. Avant de donner un énoncé précis, rappelons que l'*opérateur de Casimir* est

$$C = \sum_{1 \leqslant s \leqslant n} X_s . X'_s$$

où (X_s) est une base de $\mathfrak{g}$ et (X'_s) la base duale de $\mathfrak{g}$ par rapport à la forme de Killing.

La (très) légère modification du Théorème de Matsushima [**77**] dont nous aurons besoin s'énonce alors :

Théorème 1.0.2. — *Soit E^p_λ l'espace des p-formes différentielles sur $\Gamma\backslash X$, λ-propres pour le laplacien de X. Alors :*

$$\dim(E^p_\lambda) = \sum_{\substack{\pi \in \widehat{G} \\ \pi(C) = -\lambda}} m(\pi, \Gamma) \dim(\mathrm{Hom}_K(\Lambda^p \mathfrak{p}, \mathcal{H}_\pi)),$$

la somme étant finie.

Dans [**15**] Borel et Wallach redémontrent et étendent le Théorème de Matsushima. C'est une référence de base pour toute la première partie du volume. Nous tentons néanmoins d'y renvoyer le lecteur au minimum.

Remarquons que le Théorème 1.0.2 permet de réduire la Conjecture A$^-$ à un théorème de théorie des représentations. Plus précisément, le Théorème 1.0.2 implique immédiatement le corollaire suivant. C'est sous cette forme que nous appliquerons le Théorème 1.0.2 pour démontrer le Théorème 1 (Ch. 8) ou pour ramener la Conjecture A aux Conjectures d'Arthur (Ch. 6).

Corollaire 1.0.3. — *Soient ε un réel strictement positif et p un entier naturel. Supposons que pour toute représentation π apparaissant dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ et dont un K-type est isomorphe à une sous-représentation de $\Lambda^p\mathfrak{p}$, on a soit $-\pi(C) > \varepsilon$, soit $\pi(C) = 0$. Alors,*

$$\lambda_1^p(\Gamma\backslash X) \geqslant \varepsilon.$$

Avant de démontrer le Théorème 1.0.2, revenons sur l'opérateur de Casimir.

1.1. Sur l'opérateur de Casimir

L'espace $\mathfrak{p}$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$ par rapport à la forme de Killing B. Soit $\{X_u\}$ (resp. $\{X_t\}$) une base orthonormale de $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{k}$) pour la forme B (resp. $-B$). Alors :

$$C = \sum X_u^2 - \sum X_t^2.$$

Soit T une représentation unitaire de G dans un Hilbert $\mathcal{H}$. Un vecteur $\varphi \in \mathcal{H}$ est dit *lisse* ou C^∞ si la fonction $g \mapsto T(g)\varphi$ est C^∞. Soit $\mathcal{H}^\infty$ le sous-espace des vecteurs lisses de $\mathcal{H}$.

Si $X \in \mathfrak{g}$ et $\varphi \in \mathcal{H}^\infty$ nous posons :

$$T(X)\varphi = \left[\frac{d}{dt} T(\exp(tX))\varphi\right]_{|t=0}.$$

Alors :

$$T(C) := \sum T(X_u)^2 - \sum T(X_t)^2.$$

Remarquons que si la représentation T est irréductible, alors $T(C)$ est scalaire. Cela découle du Lemme de Schur et du fait que C est dans le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

Le lemme suivant, dû à Kuga (*cf.* [**15**]), fait le lien entre le laplacien et l'opérateur de Casimir.

Lemme 1.1.1. — *Via l'application de la Proposition 1.0.1, les p-formes λ-propres pour le laplacien sur $\Gamma\backslash X$ correspondent aux éléments ω de $C^p(\mathfrak{g}, K; C^\infty(\Gamma\backslash G))$ tels que*

$$R(C)\omega = -\lambda\omega,$$

où R est la représentation régulière droite de G dans $C^\infty(\Gamma\backslash G)$.

Démonstration. — Soient η^u les 1-formes invariantes à gauche sur G telles que

$$\eta^u(X_v) = \delta_u^v.$$

Soit

$$\omega \in C^p(\mathfrak{g}, K; C^\infty(\Gamma\backslash G)) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p \mathfrak{p}, C^\infty(\Gamma\backslash G))$$

telle que (vue comme forme différentielle) ω vérifie $\Delta\omega = \lambda\omega$.

Nous notons η^U la forme différentielle $\eta^{u_1} \wedge \cdots \wedge \eta^{u_p}$ associée à un multi-indice (ici d'ordre p) $U = (u_1, \ldots, u_p)$. Les η^U associées aux multi-indices d'ordre p forment une base de $C^p(\mathfrak{g}, K; C^\infty(\Gamma\backslash G))$. Décomposons la forme ω selon cette base :

$$\omega = \sum_U \omega_U \eta^U.$$

Il vient immédiatement :

$$(d\omega)_U = -\sum_{1 \leqslant i \leqslant p+1} (-1)^{i-1} R(X_{u_i}) \omega_{U(i)}$$

où U est un multi-indice d'ordre $p+1$ et $U(i)$ est obtenu en enlevant aux éléments de U la i-ième coordonnée (les termes en crochets de Lie dans la différentielle sont nuls car $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ avec $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$).

Puisque, par ailleurs, la métrique riemannienne sur X est induite par la forme de Killing B sur $\mathfrak{p}$, on a :

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \sum_U \int_{\Gamma\backslash G} \omega_U \overline{\omega}'_U.$$

Un calcul simple implique alors le fait suivant.

Fait. — L'adjoint de d est l'opérateur ∂ donné par :

$$(\partial\omega)_U = \sum_v R(X_v)^* \omega_{\{v\} \cup U}$$

où U est cette fois de cardinal $p-1$ et où $R(X_v)^*$ est l'adjoint de $R(X_v)$ (agissant sur $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ muni de la norme L^2) *i.e.* $R(X_v)^* = -R(X_v)$.

Alors :

$$\begin{aligned}
(\partial d\omega)_U &= -\sum_v R(X_v)(d\omega)_{\{v\}\cup U} \\
&= -\sum_v R(X_v)\Big(R(X_v)\omega_U - \sum_i (-1)^i R(X_{u_i}) \omega_{\{v\}\cup U(i)}\Big) \\
&= -\sum_v R(X_v)^2 \omega_U + \sum_{v,i} (-1)^i R(X_v) R(X_{u_i}) \omega_{\{v\}\cup U(i)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(d\partial\omega)_U &= -\sum_i (-1)^{i-1} R(X_{u_i})(\partial\omega)_{U(i)} \\ &= \sum_{i,v} (-1)^{i-1} R(X_{u_i}) R(X_v)\omega_{\{v\}\cup U(i)}.\end{aligned}$$

Mais,

$$R(X_v)R(X_{u_i}) - R(X_{u_i})R(X_v) = R([X_v, X_{u_i}]) \in R(\mathfrak{k})$$

agit trivialement sur ω qui est une forme différentielle sur X. Donc :

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= -\Big(\sum_v R(X_v)^2\Big)\omega \\ &= -R(C)\omega,\end{aligned}$$

car, là encore, $R(X)$ agit trivialement sur ω si $X \in \mathfrak{k}$. Nous avons donc vérifié qu'à travers la correspondance de la Proposition 1.0.1, les formes propres pour le laplacien correspondent à des formes propres pour l'action de $R(C)$, les valeurs propres étant de signes opposés.

1.2. Démonstration du Théorème 1.0.2

Soit E^p_λ l'espace des p-formes différentielles sur $\Gamma\backslash X$, λ-propres pour le laplacien de Hodge. Le laplacien étant un opérateur elliptique, l'espace E^p_λ est de dimension finie et constitué de formes lisses. Il découle de plus de la décomposition L^2 donnée par (1.0.2), que :

$$E^p_\lambda = \bigoplus_\pi m(\pi, \Gamma)\,\mathrm{Hom}_K(\Lambda^p\mathfrak{p}, H_\pi)_\lambda, \tag{1.2.1}$$

E^p_λ étant vu comme un espace de formes L^2, et l'indice λ désignant le sous-espace sur lequel C opère par $-\lambda$. Puisque C appartient au centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, cet espace n'est non nul que si $\pi(C) = -\lambda$.

Par conséquent $\dim(E^p_\lambda)$ est donnée par la formule du Théorème 1.0.2, et la somme est finie. On a en fait canoniquement :

$$E^p_\lambda \cong \bigoplus_{\pi\,:\,\pi(C)=-\lambda} \mathrm{Hom}(\pi, L^2(\Gamma\backslash G)) \otimes \mathrm{Hom}_K(\Lambda^p\mathfrak{p}, \mathcal{H}_\pi),$$

où toutes les formes (a priori L^2) dans cette somme sont C^∞ puisque $R(C)$, l'opérateur induit par C dans l'espace des p-formes sur $X = G/K$, est elliptique.

1.3. Représentations admissibles et spectre automorphe

Plutôt que les représentations irréductibles unitaires de G intervenant dans $L^2(\Gamma\backslash G)$, le Théorème 1.0.2 fait intervenir les $(\mathfrak{g}, K)$-modules d'Harish-Chandra qui leurs sont naturellement associés. Rappelons qu'un $(\mathfrak{g}, K)$-*module* est un espace vectoriel complexe V muni de représentations de $\mathfrak{g}$ et K, soumises aux trois conditions suivantes.

(1) L'action de K sur V est *localement finie*, *i.e.* tout vecteur $v \in V$ appartient à un sous-espace K-invariant $V_1 \subset V$ de dimension finie, et la représentation de K dans V_1 est lisse.

(2) La différentielle de l'action de K (qui est bien définie d'après 1) est égale à la restriction à $\mathfrak{k}$ de l'action de $\mathfrak{g}$.

(3) Si $X \in \mathfrak{g}$, $k \in K$ et $v \in V$, alors $k \cdot (X \cdot v) = (\mathrm{Ad}(k)X) \cdot (k \cdot v)$.

Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation continue de G dans un espace de Hilbert. Rappelons que l'espace $\mathcal{H}_\pi^\infty$ des vecteurs lisses de π est un sous-espace dense de $\mathcal{H}_\pi$ invariant sous l'action de G, et qu'il existe une action naturelle de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{H}_\pi^\infty$. Posons, par ailleurs,

$$\mathcal{H}_\pi^K = \{v \in \mathcal{H}_\pi^\infty \mid \dim\langle \pi(K)v\rangle < +\infty\},$$

où $\langle \pi(K)v\rangle$ désigne le sous-espace engendré par tous les vecteurs de la forme $\pi(k)v$, avec $k \in K$. C'est l'*espace des vecteurs K-finis* de π. D'après Harish-Chandra [**49**], $\mathcal{H}_\pi^K$ est stable sous l'action de K et l'espace des vecteurs K-finis de π est un $(\mathfrak{g}, K)$-module appelé *module de Harish-Chandra de* π.

Le dual unitaire d'un groupe semi-simple G est un objet en général très difficile à déterminer. Il n'est connu que pour un petit nombre de groupes. Il est plus facile de « classifier » une classe plus large de représentations : les représentations *admissibles*. Une représentation π de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ [(1)] est admissible si $\pi(K)$ opère par opérateurs unitaires et si chaque représentation irréductible τ de K n'intervient qu'avec une multiplicité finie (peut-être nulle) dans la restriction $\pi_{|K}$ de π à K. Un théorème de Harish-Chandra [**49**] (voir aussi [**66**]) affirme que toute représentation irréductible unitaire $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ de G est admissible. Comprendre le dual admissible d'un groupe G sera suffisant pour attaquer la Conjecture A$^-$ suivant la méthode fournie par le Corollaire 1.0.3. Étant donnés une représentation admissible π du groupe G et un entier i, nous notons

$$C^i(\pi) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda^i \mathfrak{p}, \mathcal{H}_\pi^K).$$

La description de la différentielle d donnée en 1.1 – qui ne nécessite que la structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module – fait de $C^i(\pi)$ un complexe dont la cohomologie est notée $H^i(\mathfrak{g}, K; \mathcal{H}_\pi^K)$.

On a vu dans les sections précédentes qu'à une représentation $\pi \subset L^2(\Gamma\backslash G)$ telle que $C^i(\pi) \neq 0$ on peut associer une forme différentielle de degré i sur $\Gamma\backslash X$. Celle-ci s'obtient de la manière suivante. Soit $\varphi : \mathcal{H}_\pi^K \to C^\infty(\Gamma\backslash G)$ l'application G-équivariante induite par l'inclusion $\pi \subset L^2(\Gamma\backslash G)$. Fixons une application K-équivariante non nulle $\omega : \Lambda^i\mathfrak{p} \to \mathcal{H}_\pi^K$ (dans $C^i(\pi)$). La forme différentielle associée ω_φ est définie par

$$\omega_\varphi(g.\lambda) = \varphi(\omega(\lambda))(g) \quad (\lambda \in \Lambda^i\mathfrak{p},\ g \in G).$$

[(1)] Attention : la représentation π n'a pas de raison d'être unitaire.

Remarquons que le Théorème 1.0.2 implique que si $\pi(C) = 0$, la forme ω_φ est harmonique de degré i et contribue donc à la cohomologie de degré i de $\Gamma\backslash X$. On dira d'une représentation irréductible unitaire de G qu'elle est *cohomologique de degré* i si $H^i(\mathfrak{g}, K; \mathcal{H}_\pi^K) \neq 0$. Par des arguments ressemblant au calcul du § 1 ceci équivaut à

(1) $\pi(C) = 0$, et
(2) $C^i(\pi) \neq 0$.

(*Cf.* Borel-Wallach [**15**].)
Nous y revenons dans le cas particulier du groupe $\mathrm{SU}(n,1)$ au chapitre suivant.

Pour calculer $\pi(C)$ il suffit de savoir calculer le caractère infinitésimal de π. Notons $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante sur $\mathbb{C}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ son centre. Rappelons que l'on dit de la représentation $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ qu'elle admet un *caractère infinitésimal* χ si χ est un homomorphisme $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ tel que $\pi(z) = \chi(z)id$ pour tout $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. C'est en particulier toujours le cas si $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ est irréductible et admissible.

Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$, l'homomorphisme d'Harish-Chandra γ, *cf.* [**66**], réalise un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ sur la sous-algèbre de $U(\mathfrak{h})$ constituée des éléments fixés par le groupe de Weyl $W = W(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Il correspond donc à chaque forme linéaire Λ dans $\mathfrak{h}'$ un caractère de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$:

$$\chi_\Lambda(z) = \Lambda(\gamma(z)) \text{ pour } z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}), \tag{1.3.1}$$

où l'on a étendu Λ en un homomorphisme d'algèbre de $U(\mathfrak{h})$.

Le morphisme χ_Λ vérifie $\chi_{w\Lambda} = \chi_\Lambda$ pour tout $w \in W$ et réciproquement, si $\chi_{\Lambda'} = \chi_\Lambda$ alors $\Lambda' = w\Lambda$ pour un élément $w \in W$ (voir [**66**, Proposition 8.21]).

On montre de plus, *cf.* [**66**, Proposition 8.21], que tout homomorphisme de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ dans $\mathbb{C}$ est de la forme χ_Λ, comme dans (1.3.1), pour un certain Λ dans $\mathfrak{h}'$. Si π admet un caractère infinitésimal $\chi = \chi_\Lambda$, on dira, par abus de notation, que π a pour caractère infinitésimal Λ ; dans ce cas Λ n'est déterminé que modulo l'action du groupe de Weyl W.

Nous avons donc ramené l'étude du spectre des quotients $\Gamma\backslash X$ à celle de la décomposition en irréductibles des représentations $L^2(\Gamma\backslash G)$ de G (et au calcul de leurs caractères infinitésimaux). Comme annoncé dans l'Introduction nous n'allons considérer que des sous-groupes Γ de congruence.

Supposons maintenant le groupe réel G égal au groupe des points réels $G(\mathbb{R})$ d'un groupe algébrique (toujours noté) G connexe et presque simple sur $\mathbb{Q}$. Nous adoptons la même notation, G, pour désigner le groupe algébrique et le groupe réel. Le contexte permettra d'éviter toute confusion.

On appelle *sous-groupe de congruence de* G tout sous-groupe $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$ de G où K_f est un sous-groupe compact-ouvert du groupe $G(\mathbb{A}_f)$ sur les adèles finis. Remarquons que si G est défini sur $\mathbb{Z}$, un sous-groupe Γ de $G(\mathbb{Z})$ qui contient un sous-groupe de la forme

$$\Gamma_N = \ker(G(\mathbb{Z}) \longrightarrow G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})),$$

pour un certain entier $N \geqslant 1$ est un sous-groupe de congruence. Le groupe Γ agit alors proprement sur X (via la projection de Γ dans G) et d'après un théorème de Borel et Harish-Chandra [**14**] le quotient $\Gamma\backslash X$ est de volume fini. De plus, ce quotient est compact si et seulement si le groupe G est anisotrope sur $\mathbb{Q}$.

Notons toujours $\widehat{G}$ le dual unitaire de G que l'on munit de la topologie de Fell. Nous rappelons la définition et les propriétés standard de la topologie de Fell au § 2.2. Suivant Burger et Sarnak [**20**], on appelle *spectre* de $\Gamma\backslash G$ – où Γ est un sous-groupe de congruence de G – l'ensemble des représentations irréductibles unitaires $\pi \in \widehat{G}$ apparaissant (faiblement si G est isotrope sur $\mathbb{Q}$) dans la représentation régulière de G dans $L^2(\Gamma\backslash G)$:

$$\sigma(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})) = \{\pi \in \widehat{G(\mathbb{R})} \mid \pi \propto L^2(\Gamma\backslash G)\}, \tag{1.3.2}$$

où le symbole $\propto$ désigne l'inclusion faible. Rappelons également la définition du dual automorphe $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ de G donnée dans [**20**] :

$$\widehat{G}_{\mathrm{Aut}} = \overline{\bigcup_{\Gamma\mathrm{cong}} \sigma(\Gamma\backslash G)}. \tag{1.3.3}$$

L'adhérence dans (1.3.3) est prise par rapport à la topologie de Fell. D'après le Théorème 1.0.2 les Conjectures $\mathrm{A}^-(i)$ se ramènent à l'étude des spectres (1.3.2) et en fait comme nous le verrons au chapitre 2 de tout le dual automorphe (1.3.3). Il va s'agir de déterminer si chaque représentation cohomologique π de degré i est isolée ou non dans la réunion $\{\pi\} \cup \widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$. Nous détaillons cette approche dans le chapitre suivant.

Concluons ce premier chapitre en remarquant que l'hypothèse de compacité sur le quotient $\Gamma\backslash X$ n'est pas réellement nécessaire. Il suffit en général de considérer des formes différentielles de carré intégrable, *cf.* [**15**]. On parlera alors de spectre L^2.

CHAPITRE 2

SPECTRE DU LAPLACIEN SUR LES QUOTIENTS ARITHMÉTIQUES

Dans ce chapitre nous exposons les extensions plausibles, aux groupes réductifs généraux et aux formes différentielles, de la Conjecture de Selberg relative aux valeurs propres du laplacien opérant sur les courbes modulaires.

Rappelons d'abord la Conjecture de Selberg. Soit $\Gamma(1) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, et $\Gamma \subset \Gamma(1)$ un sous-groupe de congruence, *i.e.*, un sous-groupe contenant, pour quelque $N \geqslant 1$, le sous-groupe

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\ N) \right\}$$

de $\Gamma(1)$. Alors Γ opère sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$; soit Δ le laplacien invariant (positif) sur $\mathcal{H}$. Alors $L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ se décompose, selon la théorie spectrale, en sous-espaces propres de Δ. Le spectre *discret* de Δ est formé des valeurs propres $\{0, (\lambda_n)_{n \geqslant 1}\}$ où les $\lambda_n > 0$ sont associés aux formes paraboliques – *cf.* Iwanieč [**54**, p. 76].

***Conjecture 2.0.1* (Selberg).** — $\lambda_n \geqslant \frac{1}{4}$.

Quelques remarques. Il est facile de calculer le spectre (continu !) de Δ dans $L^2(\mathcal{H})$: il est égal à $[\frac{1}{4}, +\infty[$. La conjecture est donc que le spectre pour les formes paraboliques est contenu dans le spectre limite (les surfaces $\Gamma(N) \backslash \mathcal{H}$ convergent sur les compacts vers l'espace $\mathcal{H}$). Par ailleurs l'estimée $\lambda_n \geqslant \frac{1}{4}$ est en général fausse si $\Gamma \subset \Gamma(1)$ est un sous-groupe, même arithmétique, qui n'est pas de congruence (*cf.* par exemple [**17**]).

Rappelons la minoration connue à la suite des travaux de Kim, Shahidi et Sarnak :

***Théorème 2.0.2* ([63]).** — $\lambda_n \geqslant \frac{1}{4} - \left(\frac{7}{64}\right)^2$.

Dans la suite de ce mémoire nous considérons un groupe simple G défini sur $\mathbb{Q}$. Soit $G(\mathbb{R})^0$ la composante neutre de $G(\mathbb{R})$: c'est un produit de groupes semi-simples réels. On supposera par commodité que

$$G(\mathbb{R})^0 = U \times G^{\mathrm{nc}}$$

où U est compact et G^{nc} est un groupe simple réel non compact. Soit K un sous-groupe compact maximal de G^{nc} et $X = G^{\mathrm{nc}}/K$. Soit $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ un sous-groupe de congruence. L'analogue de $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ est alors le quotient $\Gamma\backslash X = \Gamma\backslash G^{\mathrm{nc}}/K$. ($\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ se plonge naturellement dans $U \times G^{\mathrm{nc}}$, donc dans G^{nc} ; son image dans G^{nc} est discrète car U est compact).

Soit $A^i_\infty = A^i_\infty(\Gamma\backslash X)$ l'espace des formes différentielles lisses de degré i sur $\Gamma\backslash X$. On sait d'après le chapitre 1 que

$$A^i_\infty(\Gamma\backslash X) \cong \mathrm{Hom}_{K_\infty}(\Lambda^i\mathfrak{p}, C^\infty(\Gamma\backslash X)).$$

Supposons d'abord G anisotrope, *i.e.*, $\Gamma\backslash X$ *compact*. On dispose alors sur A^i_∞ du laplacien de Hodge (positif) Δ^i (que l'on notera Δ, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté), identifié à l'opérateur de Casimir (Ch. 1). On peut le considérer comme un opérateur non borné sur l'espace $A^i_{(2)}$ des formes L^2. Son noyau est composé des formes harmoniques. C'est essentiellement ce cas qui nous intéressera dans la partie géométrique du volume.

En général (si $\Gamma\backslash X$ n'est pas compact), Δ définit encore un opérateur auto-adjoint dans $A^i_{(2)}$, dont le noyau est donné par les formes harmoniques [**15**], mais qui va posséder un spectre continu. Rappelons que l'espace des $\mathcal{H}^i_{(2)}$ des formes harmoniques est de dimension finie et *a fortiori* fermé.

Question 2.0.3. — *Fixons $G/\mathbb{Q}$, et $i \in [0, \dim X]$. Si Γ parcourt l'ensemble des sous-groupes de congruence de $G(\mathbb{Q})$, existe-t-il une minoration uniforme $\varepsilon(G,i) > 0$ du spectre de Δ^i dans l'orthogonal de $\mathcal{H}^i_{(2)}(\Gamma\backslash X)$?*

Dans le cas cocompact, on cherche donc une minoration uniforme

$$\lambda \geqslant \varepsilon(G,i) \tag{2.0.1}$$

sur les valeurs propres $\neq 0$ de Δ^i. En général on veut que le spectre de Δ^i dans $(\mathcal{H}^i_{(2)})^\perp$ soit contenu dans $[\varepsilon(G,i), +\infty[$.

2.1. Le cas des fonctions

Nous considérons d'abord le cas où $i = 0$; on s'intéresse donc au spectre du laplacien sur l'espace $L^2_0(\Gamma\backslash X)$ des fonctions d'intégrale nulle sur $\Gamma\backslash X$, Γ étant un groupe de congruence. Si $G = \mathrm{SL}(2)$, une minoration est donnée par le Théorème 2.0.2 (Selberg avait déjà obtenu la minoration $\lambda_n \geqslant \frac{3}{16}$). Noter que dans ce cas Δ a aussi un spectre continu, mais l'on sait (inconditionnellement) que celui ci est contenu dans $[\frac{1}{4}, \infty[$: *cf.* [**54**, p. 112].

Pour des groupes plus généraux, nous nous contenterons en général d'obtenir des résultats qualitatifs, sans préciser la borne ε. Ceci suffit pour les applications géométriques. Néanmoins, il est important de remarquer que les Conjectures d'Arthur sur le spectre automorphe permettent (convenablement interprétées...) d'obtenir pour G

donné les valeurs optimales (conjecturales) des bornes inférieures $\varepsilon(G,i)$. Nous allons les préciser, dans les chapitres suivants, pour les groupes associés aux variétés hyperboliques réelles et complexes.

Revenons à un groupe G arbitraire. Pour $i=0$, on peut répondre positivement à la Question 2.0.3 en toute généralité. Soit Γ un groupe de congruence, et soit $L^2_0(\Gamma\backslash X)$ l'espace des fonctions d'intégrale nulle, *i.e.*, l'orthogonal de $\mathcal{H}^0_{(2)}(\Gamma\backslash X)=\mathbb{C}$.

Théorème 2.1.1. — *Fixons $G/\mathbb{Q}$. Il existe alors $\varepsilon=\varepsilon(G)>0$ tel que le spectre de Δ dans $L^2_0(\Gamma\backslash X)$, pour* tout *sous-groupe de congruence Γ relatif à G, soit contenu dans $[\varepsilon,+\infty[$.*

Nous allons esquisser la démonstration [**26**], puisque les outils de celle-ci seront utilisés plus loin pour les formes de degré supérieur. Notons $L^2_0(\Gamma\backslash G)$ l'espace des fonctions L^2 d'intégrale nulle sur $\Gamma\backslash G$. C'est une représentation de G (Ch. 1) ; un argument évident montre qu'elle ne contient aucun sous-espace isomorphe à la représentation triviale.

L'action triviale de G sur les constantes correspond à la valeur propre $\lambda=0$ de Δ. Nous voulons montrer qu'il existe un voisinage fixe ($|\lambda|<\varepsilon$) de 0 ne rencontrant pas le spectre de Δ – même pour Γ variable. Nous allons traduire ceci en termes de représentations unitaires de G ; cela nécessite quelques préliminaires.

2.2. Théorie des représentations

Soit G un groupe de Lie connexe. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles unitaires de G. Rappelons que $\widehat{G}$ est muni d'une topologie naturelle, la topologie de Fell. Soit $\pi\in\widehat{G}$ une représentation d'espace $\mathcal{H}$. Si $v\in\mathcal{H}$, le *coefficient* associé est la fonction sur G :

$$c_v(g)=(gv,v)\quad(g\in G). \tag{2.2.1}$$

Soit $\Omega\subset G$ un sous-ensemble compact, $v_1,\dots v_d\in\mathcal{H}$, $\varepsilon>0$. On note $V(\Omega,v_i,\varepsilon)$ l'ensemble des $\rho\in\widehat{G}$ telles qu'il existe $w_1,\dots w_d\in\mathcal{H}_\rho$ vérifiant

$$|c_{w_i}(g)-c_{v_i}(g)|<\varepsilon\quad(g\in\Omega). \tag{2.2.2}$$

On obtient ainsi une base de voisinages de π ; celle-ci définit la topologie sur $\widehat{G}$. Cette topologie n'est pas séparée : par exemple si $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et si $s\in[0,\frac12[$ et $s\to\frac12$, la limite de la représentation irréductible

$$\pi_s=\mathrm{ind}_B^G(|x|^s)$$

où $B=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x&*\\0&x^{-1}\end{smallmatrix}\right)\right\}\subset G$, et l'induction est l'induction unitaire, est formée de la représentation triviale $\mathbb{C}$ et des deux séries discrètes δ_2, δ_{-2} ([**71**]). Elle est néanmoins séparable (tout point a une base dénombrable de voisinages) de sorte que nous pourrons nous limiter, dans les arguments de convergence, à considérer des suites.

Par ailleurs, on peut décrire la topologie de $\widehat{G}$ à l'aide d'un seul coefficient :

Proposition 2.2.1. — *Soit $(\pi_n)_{n\geqslant 1}$, $\pi \in \widehat{G}$. Alors $\pi_n \to \pi$ si et seulement si un coefficient non nul c_u de π ($u \in \mathcal{H}_\pi$) est limite uniforme sur tout compact de coefficients c_{u_n} ($u_n \in \mathcal{H}_{\pi_n}$).*

Voir Dixmier [**34**, Prop. 18.1.5].

Dans le reste de ce paragraphe on suppose G simple et non compact. Soit K un sous-groupe compact maximal. Soit $\widehat{G}_s$ le sous-ensemble de G formé des représentations sphériques, *i.e.*, ayant un vecteur $\neq 0$ fixé par K. On sait que celui-ci est alors unique à un scalaire près [**66**].

Le lemme suivant résulte trivialement de la définition du dual :

Lemme 2.2.2. — *$\widehat{G}_s$ est ouvert dans $\widehat{G}$.*

Noter que le contre-exemple ci-dessus, montrant que $\widehat{G}$ n'est pas séparé, montre aussi que $\widehat{G}_s$ n'est pas fermé.

Puisque $\widehat{G}$ est muni d'une topologie, il est muni d'une structure borélienne. On sait que $\widehat{G}$ est borélien standard, c'est-à-dire isomorphe à $[0,1]$ muni de la structure borélienne usuelle [**34**, 4.6.1].

Nous devrons utiliser la décomposition selon $\widehat{G}$ de représentations unitaires *réductibles* de G. Celle-ci utilise la notion d'intégrale hilbertienne, pour laquelle on renvoie le lecteur à [**34**, A 69] et à [**106**]. Dans notre cas, G est « de type I » au sens de la théorie des représentations [**34**] et nous n'avons besoin que d'un cas très simple.

Toutes les représentations de G, sauf la représentation triviale, se réalisent dans un espace fixe $\mathcal{H}$ de dimension dénombrable ; les opérateurs $\pi(g)$ ($\pi \in \widehat{G}$) sont alors fonctions mesurables de π pour tout g. Posons, pour $\pi = 1_G$ (la représentation triviale) $\mathcal{H}_\pi = \mathbb{C}$, et $\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}$ pour les autres représentations de $\widehat{G}$.

Si μ est une mesure positive sur $\widehat{G}$, la représentation

$$\rho = \int_{\widehat{G}} \mathcal{H}_\pi \, d\mu(\pi)$$

(sur l'espace des fonctions mesurables $\varphi : \widehat{G} \to \mathcal{H} \oplus \mathbb{C}$ telles que $\varphi(\pi) \in \mathcal{H}_\pi$ et que $\int \|\varphi(\pi)\|^2 d\mu(\pi) < \infty$) se définit de façon évidente. On définit de même

$$\rho = \int_{\widehat{G}} M_\pi \widehat{\otimes} \mathcal{H}_\pi \, d\mu(\pi) \tag{2.2.3}$$

où M_π est un espace vectoriel de dimension $m(\pi) \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$ sur lequel G agit trivialement et $\pi \mapsto m(\pi)$ est une fonction borélienne.

Théorème 2.2.3. — *Soit ρ une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

(i) *Il existe une fonction borélienne $\pi \mapsto m(\pi)$, $\widehat{G} \to \{1, 2, \ldots, \infty\}$ et une mesure positive μ sur $\widehat{G}$ telles que*

$$\rho \cong \int_{\widehat{G}} M_\pi \widehat{\otimes} \mathcal{H}_\pi \, d\mu(\pi). \tag{2.2.4}$$

(ii) *Si ρ admet deux représentations (2.2.4), associées à (m, μ) et (m', μ'), les mesures μ et μ' sont équivalentes et les fonctions m et m' égales p.p. (pour μ ou μ').*

Pour les démonstrations, on renvoie à Dixmier [**34**, 8.6.5, 8.6.6].

Si $(\rho, \mathcal{H})$ est donnée et décomposée selon (2.2.4), le *support* de ρ est le support de μ, contenu dans $\widehat{G}$. Si ρ, ρ' sont deux représentations, on dit que ρ est faiblement contenue dans ρ' si $\mathrm{Supp}(\rho) \subset \mathrm{Supp}(\rho')$. (En particulier si $\pi \in \mathrm{Supp}(\rho)$ est irréductible, π est faiblement contenue dans ρ.) Pour les applications, il est important d'avoir une caractérisation intrinsèque de cette relation.

Théorème 2.2.4. — *Soient ρ, ρ' deux représentations unitaires de G. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *ρ' est faiblement contenue dans ρ*

(ii) *Tout coefficient c de ρ' est limite, uniformément sur tout compact, d'une suite de combinaisons linéaires positives de coefficients de ρ.*

Nous aurons besoin de deux résultats supplémentaires.

Le premier est une propriété de continuité de la restriction. Soit $H \subset G$ un sous-groupe semi-simple.

Lemme 2.2.5. — *Soit $\pi_n \in \widehat{G}$ et supposons que $\pi_n \to 1_G$. Soit $S_n \subset \widehat{H}$ le support de $\pi_{n|_H}$. Alors 1_H appartient à l'adhérence de $\sqcup_n S_n$.*

Ceci se déduit aisément de [**34**, 3.4.2].

Le second est un théorème de Howe et Moore [**53**].

Théorème 2.2.6. — *Supposons G simple, non compact et connexe. Si π est une représentation irréductible non triviale de G, les coefficients de π tendent vers 0 à l'infini.*

2.3. Principe de restriction et démonstration du Théorème 2.1.1

La démonstration du Théorème 2.1.1 repose sur une méthode introduite par Burger et Sarnak qui permet de démontrer, pour un groupe G, une propriété telle que le Théorème 2.1.1 par réduction à un sous-groupe plus petit pour lequel le Théorème est déjà connu.

Comme dans tout ce chapitre G est un groupe défini sur $\mathbb{Q}$, nous le supposerons de plus simple (comme $\mathbb{Q}$-groupe) dans ce paragraphe. Soit $\widehat{G}$ le dual du groupe réel G $(= G(\mathbb{R}))$, au sens du § 2.2. On suppose que G n'est pas compact. Si $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de congruence, on peut considérer dans $\widehat{G}$ le support de la représentation $L^2(\Gamma \backslash G)$. On note $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ la clôture dans $\widehat{G}$ de la réunion des supports de $L^2(\Gamma \backslash G)$ quand Γ parcourt tous les sous-groupes de congruence de $G(\mathbb{Q})$. Noter que $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ *dépend donc de la $\mathbb{Q}$-forme* de G.

Soit $H \subset G$ un sous-groupe, défini sur $\mathbb{Q}$, et semi-simple. Les mêmes notions s'appliquent alors à H.

Par ailleurs, si π est une représentation irréductible de G, on peut la restreindre à H. Selon le Théorème 2.1.1, le *support* de $\pi_{|H}$ dans $\widehat{H}$ est bien défini. Burger et Sarnak [**20**] démontrent le théorème suivant :

***Théorème 2.3.1* (Burger, Sarnak).** — *Soient $\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ et $\tau \in \widehat{H}$. Si τ appartient au support de $\pi_{|H}$, $\tau \in \widehat{H}_{\mathrm{Aut}}$.*

Nous renvoyons à [**20**] pour la démonstration. Une variante de celle-ci (permettant de contrôler le laplacien sur les formes différentielles plutôt que sur les fonctions) sera expliquée dans le chapitre 9.

Pour démontrer le Théorème 2.1.1, nous commençons par le reformuler en termes de théorie des représentations.

Théorème 2.3.2. — *(Hypothèses du Théorème 2.1.1) Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de la représentation triviale dans $\widehat{G}$ tel que, pour tout sous-groupe de congruence Γ, le support de $L^2_0(\Gamma\backslash X)$ soit disjoint de $\mathcal{V}$.*

Puisque la représentation triviale 1_G de G n'apparaît pas dans $L^2_0(\Gamma\backslash X)$, ceci équivaut par définition de $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ à :

$$1_G \textit{ est isolée dans } \widehat{G}_{\mathrm{Aut}}. \tag{2.3.1}$$

Les assertions des Théorèmes 2.1.1 et 2.3.2 sont équivalentes. Vérifions-le en supposant pour simplifier que G est anisotrope. D'après le Lemme 2.2.2, le dual sphérique $\widehat{G}_s$ est ouvert dans $\widehat{G}$. Considérons, dans $L^2_0(\Gamma\backslash G) = \widehat{\bigoplus}_\pi \mathcal{H}_\pi$ (somme directe hilbertienne de représentations irréductibles), la partie sphérique $L^2_{0,s} = \widehat{\bigoplus}_{\pi\in\widehat{G}_s} \mathcal{H}_\pi$. Le Théorème 2.3.2 est donc équivalent au fait que les supports de $L^2_{0,s}$ (pour Γ variable) soient séparés de la représentation triviale.

Soit $P = MAN$ un sous-groupe parabolique minimal de G. Une représentation sphérique de G est isomorphe à l'unique sous-quotient sphérique π d'une induite

$$\rho = \mathrm{ind}_P^G(1 \otimes e^\nu \otimes 1)$$

où ν appartient au dual complexe de $\mathfrak{a}_0$ =Lie(A). Si π est unitaire, ν doit être *hermitien, i.e.* : $\overline{\nu} = -w\nu$ pour un w dans le groupe de Weyl $W(G,A)$.

Si π est sphérique et appartient à $L^2_0(\Gamma\backslash G)$, il découle du chapitre 1 que le sous-espace π^K est un sous-espace de $L^2_0(\Gamma\backslash X)$ correspondant à une fonction propre du laplacien, ω, et la valeur propre associée λ de ω est égale à celle de l'opérateur de Casimir, qui opère par $(\delta,\delta) - (\nu,\nu)$, $\delta \in \mathfrak{a}_0^*$ étant la demi-somme des racines de A dans N (*cf.* calcul du caractère infinitésimal [**66**, Prop. 8.2.2]).

Écrivons $\nu = \nu_r + \sqrt{-1}\,\nu_i$, avec $\nu_r, \nu_i \in \mathfrak{a}_0^*$. Alors

$$\nu_r = -w\nu_r,\ \nu_i = w\nu_i \tag{2.3.2}$$

donc ν_r et ν_i sont orthogonaux et

$$(\delta,\delta) - (\nu,\nu) = (\delta,\delta) + (\nu_i,\nu_i) - (\nu_r,\nu_r). \tag{2.3.3}$$

À conjugaison près par W, on peut supposer ν_r contenu dans la chambre de Weyl aiguë et fermée contenant δ. Si π est unitaire on sait alors que $\delta - \nu_r$ est dans la chambre de Weyl fermée obtuse associée [**15**, IV, 5.2].

Par ailleurs la topologie de $\widehat{G}_s$ déduite de celle de $\widehat{G}$ coïncide avec la restriction aux paramètres ν hermitiens de la topologie de $\mathfrak{a}^*$. D'après le Théorème 2.3.2, on a donc $\|\delta - \nu\| = \|\delta - \nu_r\| + \|\nu_i\| \geqslant \varepsilon_1$ où $\varepsilon_1 > 0$ est déterminé par G. Pour ν_r proche de δ, ν_r est régulier et (2.3.2) implique $w = -1$ soit $\nu_i = 0$. Il existe donc $\varepsilon_2 > 0$ tel que $\|\delta - \nu_r\| \geqslant \varepsilon_2$. Enfin, les propriétés de convexité des chambres de Weyl impliquent alors que

$$(\nu_r, \nu_r) \leqslant (\delta, \delta) - \varepsilon$$

où ε est déterminé par ε_2. On en déduit d'après (2.3.3) :

$$\lambda = (\delta, \delta) - (\nu, \nu) \geqslant \varepsilon. \tag{2.3.4}$$

Réciproquement, (2.3.4) implique que la représentation triviale est isolée de $L^2_{0,s}$ car $\lambda = 0$ pour la représentation triviale.

Enfin, si G n'est pas anisotrope, un argument similaire s'applique à la partie continue de $L^2_0(\Gamma\backslash G)$.

La démonstration du Théorème 2.3.2 va reposer sur la méthode de Burger-Sarnak. Nous utilisons la forme (2.3.1) du Théorème. Supposons donné un sous-groupe simple H de G tel que $H(= H(\mathbb{R}))$ soit non compact et que le Théorème soit vrai pour H. Si celui-ci est faux pour G, on peut trouver une suite $\pi_n \in \widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ ($\pi_n \not\cong 1_G$) telle que $\pi_n \to 1_G$. D'après le Lemme 2.2.5, 1_H appartient à l'adhérence de $\bigcup_n \mathrm{Supp}(\pi_{n|_H})$. Si 1_H est isolée dans $\widehat{H}_{\mathrm{Aut}}$, le Théorème 2.2.3 implique que 1_H est contenue discrètement dans $\pi_{n_{|_H}}$ pour $n \gg 0$. Ceci est impossible d'après le Théorème 2.2.6 si $H(\mathbb{R})$ n'est pas compact.

Nous devons enfin trouver – dans tout groupe $\mathbb{Q}$-simple G – un sous-groupe H pour lequel le Théorème soit déjà connu (et $H(\mathbb{R})$ non compact).

Nous renvoyons le lecteur à [**26**], puisque cette partie de l'argument n'a rien à voir avec les questions abordées dans ce volume.

Le Théorème 2.1.1 a la conséquence suivante. Soit G anisotrope sur $\mathbb{Q}$ tel que $G(\mathbb{R})^0 = G^{\mathrm{nc}} \times U$ (comme au début de ce chapitre) avec G^{nc} simple non compact et U compact. Avec la terminologie de l'introduction :

Théorème 2.3.3. — *La Conjecture $A^-_{d=0}(1)$ est vérifiée pour G.*

Écrivons en effet, Γ étant un sous-groupe de congruence :

$$L^2(\Gamma\backslash G^{\mathrm{nc}}) = \mathbb{C} \oplus \widehat{\bigoplus}_\pi \pi = \mathbb{C} \oplus L^2_0(\Gamma\backslash G^{\mathrm{nc}})$$

où les représentations π sont irréductibles non triviales. Soit V l'espace des vecteurs K-finis d'une représentation π et considérons le complexe calculant la $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie de π (Ch. 1) :

$$\cdots \longrightarrow C^i(\pi) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda^i \mathfrak{p}, V) \longrightarrow C^{i+1}(\pi) \longrightarrow \cdots. \tag{2.3.5}$$

Si le rang de G^{nc} est > 1, on sait d'après un théorème de Zuckerman et Borel-Wallach [**15**, Cor. V.3.4], que $H^1(\mathfrak{g}, K, V) = \{0\}$ si π n'est pas triviale. Il en est de même si π est triviale car $\mathrm{Hom}_K(\mathfrak{p}, \mathbb{C}) = \{0\}$, et ceci pour tout G^{nc}.

La suite (2.3.5) est donc exacte en $i = 1$; puisque le laplacien opère par l'opérateur de Casimir, dont les valeurs propres sur $A^0 = L^2(\Gamma \backslash G^{\mathrm{nc}}/K)$ sont minorées hors les constantes, on en déduit que les valeurs propres de Δ sur $A^1_{d=0}$ sont minorées.

Si G^{nc} est de rang 1 (donc localement isomorphe à $\mathrm{SU}(n, 1)$ ou $\mathrm{SO}(n, 1)$), ceci reste vrai en dehors des représentations π telles que $H^1(\mathfrak{g}, K, V) \neq 0$. Mais celles-ci représentent exactement les formes harmoniques, pour lesquelles $\Delta\alpha = 0$.

2.4. Représentations non isolées et contre-exemples à A^-

Les derniers paragraphes de ce chapitre sont destinés à mettre en valeur le rôle particulier des groupes $\mathrm{SU}(n, 1)$ et $\mathrm{SO}(n, 1)$ relativement à ces questions. Nous voulons tout d'abord expliquer que la Conjecture $A^-(i)$ ne peut être vraie en général.

Considérons un groupe G anisotrope tel que G^{nc} est simple. Soit $\mathcal{H}^i(\Gamma \backslash X)$ l'espace des i-formes harmoniques. D'après le chapitre 1, $\mathcal{H}^i(\Gamma \backslash X)$ se décompose en sous-espaces relatifs aux représentations irréductibles π de G telles que :

(i) $\pi \subset L^2(\Gamma \backslash G)$

(ii) $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^i \mathfrak{p}, V(\pi)) \neq 0$

(iii) L'opérateur de Casimir opère trivialement sur $V(\pi)$.

Rappelons (Ch. 1) que (ii) et (iii) sont équivalents à

(iv) $H^i(\mathfrak{g}, K; V(\pi)) \neq 0$.

Soit $\pi \in \widehat{G}$ une représentation contenue dans $L^2(\Gamma \backslash G)$, et vérifiant (iv). Supposons de plus que π n'est pas isolée dans $\widehat{G}$. Soit donc $\pi_n \in \widehat{G}$ une suite tendant vers π. La condition (ii) est alors vérifiée par π_n pour $n \gg 0$, par un analogue évident du Lemme 2.2.2. Par ailleurs, si $\rho \in \widehat{G}$, l'opérateur de Casimir C opère par un scalaire $\rho(C)$ sur les vecteurs C^∞ de ρ (§ 1.1). On vérifie alors que $\rho(C)$ est une fonction continue de ρ pour la topologie de $\widehat{G}$ [**11**]. Pour $\pi_n \to \pi$ on a donc $\pi_n(C) \to \pi(C) = 0$; si de plus la suite (π_n) est non stationnaire, $\pi_n(C)$ doit être non nul pour $n \gg 0$ car l'ensemble des représentations unitaires π vérifiant (ii)-(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) est fini. On a donc :

Théorème 2.4.1. — *Soient $\Gamma \subset G$ un sous-groupe de congruence, π une représentation de G vérifiant (i–iii) et $\pi_n \to \pi$ dans $\widehat{G}$, avec (π_n) non stationnaire. Si les représentations π_n appartiennent à $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$, la Conjecture $A^-(i)$ est en défaut pour les degrés i tels que $H^i(\mathfrak{g}, K; V(\pi)) \neq 0$.*

Pour un groupe donné, l'étude de $A^-(i)$ se divise donc en deux questions :

Problème 2.4.2. — Décrire les représentations isolées dans $\widehat{G}$ parmi les représentations cohomologiques.

Problème 2.4.3. — Pour $G/\mathbb{Q}$ donné, soit $\pi \in \widehat{G}$ une représentation cohomologique non triviale et non isolée. La représentation π est-elle isolée *dans* $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}} \cup \{\pi\}$?

Il existe une classe simple de représentations pour lesquelles les deux questions ont une solution négative.

Rappelons qu'une représentation irréductible de G appartient à la série discrète si ses coefficients (§ 2.3) sont de carré intégrable. D'après Harish-Chandra, G a une série discrète si, et seulement si, G contient un sous-groupe de Cartan compact [**66**]. Parmi nos groupes « hyperboliques », $\mathrm{SU}(n,1)$ a toujours une série discrète et $\mathrm{SO}(n,1)$ a une série discrète si et seulement si n est *pair* – ainsi, $\mathrm{SO}(2,1) \approx \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ a une série discrète alors que $\mathrm{SO}(3,1) \approx \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ n'en a pas ($\approx$ désigne l'isomorphisme local).

Rappelons qu'un sous-groupe parabolique $P = M^0AN$ de G est *cuspidal* si M^0 contient un sous-groupe de Cartan compact (donc, possède une série discrète). Une représentation π appartient à la série discrète si, et seulement si, elle apparaît comme sous-module *discret* dans $L^2(G)$. Plus généralement, $\pi \in \widehat{G}$ est tempérée si elle vérifie les conditions équivalentes qui suivent :

(2.4.1) $$\pi \textit{ appartient au support de } L^2(G)$$

(2.4.2) $$\begin{gathered}\pi \textit{ est un sous-module de } \mathrm{ind}_{P=M^0AN}^{G}(\delta \otimes e^{\nu} \otimes 1) \textit{ où } P \textit{ est cuspidal,}\\ \delta \in \widehat{M^0} \textit{ appartient à la série discrète, et } \nu \in i\mathfrak{a}^* \textit{ est unitaire.}\end{gathered}$$

Supposons que G n'a pas de série discrète, et soit $P_f \subset G$ un parabolique tel que A soit de dimension minimale. Alors P_f est nécessairement cuspidal ; si $P_f = M_f\, N_f$, M_f est uniquement déterminé à conjugaison près dans G. On dit que P_f est un parabolique fondamental.

***Théorème 2.4.4* (Borel-Wallach)**. — *Soit $\pi \in \widehat{G}$ une représentation tempérée et supposons que $H^\bullet(\mathfrak{g}, K; V(\pi)) \neq 0$. Alors*

(i) *π est un sous-module de $\mathrm{ind}_{P_f}^{G}(\delta \otimes e^0 \otimes 1)$, $\delta \in \widehat{M^0}$ étant une représentation de la série discrète.*

(ii) *La cohomologie de π est concentrée dans l'intervalle $[q-e, q+e]$ où $q = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}(G/K)$ et $e = \frac{1}{2}(\mathrm{rg}\, G - \mathrm{rg}\, K)$.*

En fait la représentation induite de (i) n'est cohomologique que pour un nombre fini de représentations δ, explicitement décrites [**15**, Thm. 5.1]. On vérifie que $q \pm e$ est entier [**15**, p. 98] ; tous les degrés contenus dans $[q-e, q+e]$ apparaissent dans $H^\bullet(\mathfrak{g}, K; V)$ où V est l'espace des vecteurs K-finis de l'induite totale donnée par (i). Noter que si G a une série discrète, le Théorème reste vrai avec $P_f = G$ – les seules représentations cohomologiques tempérées sont dans la série discrète.

Nous allons déduire de ce théorème :

Théorème 2.4.5. — *Soit G arbitraire, et supposons que G n'a pas de série discrète. Alors la propriété $A(i)$ est en défaut pour $i \in [q-e, q+e]$.*

Soit en effet π une représentation vérifiant les conditions du Théorème 2.4.4 (i) et telle que $H^i(\mathfrak{g}, K, V(\pi)) \neq 0$. Alors π est tempérée *et appartient donc au « dual automorphe »* $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$. Si $\pi_n \to \pi$, $\pi_n \neq \pi$, et π_n apparaît dans la décomposition (continue si G est isotrope) de $L^2(\Gamma_n \backslash G)$ pour un groupe de congruence, la valeur propre associée λ_n de C vérifie $\lambda_n \to 0$, et apparaît dans le spectre (peut-être continu) du laplacien ω_i.

La démonstration a utilisé le théorème suivant :

Théorème 2.4.6. — *Toute représentation tempérée $\pi \in \widehat{G}$ est limite de représentations π_n apparaissant (discrètement) dans $L^2(\Gamma_n \backslash G)$.*

(Si $\pi \in \widehat{G}$, tempérée, n'est pas dans la série discrète, il en résulte aussitôt que $\pi = \lim \pi_n$, $\pi_n \not\cong \pi$, $\pi_n \subset L^2(\Gamma_n \backslash G)$.) Il y a plusieurs démonstrations du Théorème 2.4.6. Supposons d'abord G anisotrope, donc les quotients $\Gamma \backslash G$ compacts. Si $\Gamma_n \subset \Gamma_0$ est une famille de sous-groupes distingués (en fait Γ_{n+1} distingué dans Γ_n) d'intersection $\{1\}$, le théorème est dû à Delorme [**32**] ; on sait même que la suite des mesures spectrales (sur $\widehat{G}$) des $L^2(\Gamma_n \backslash G)$, pondérées par $[\Gamma_0 : \Gamma_n]$, tend vers celle de $L^2(G)$.

Une autre approche du théorème est due à Burger, Li et Sarnak [**19**]. Cet article ne donne pas la démonstration, qui est exposée dans [**22**]. Pour G isotrope, elle implique que π est limite de représentations dans le support de $L^2(\Gamma_n \backslash G)$.

Enfin, le fait que π est limite de représentations π_n apparaissant *discrètement* dans $L^2(\Gamma_n \backslash G)$ résulte de la démonstration donnée dans [**22**]. Nous expliquons l'argument supplémentaire au lecteur familier avec les méthodes adéliques, en supposant G simplement connexe comme dans [**22**] : choisissons une place finie p, et remplaçons $G = G(\mathbb{R})$ par $G_{\infty,p} = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{Q}_p)$. Alors [**22**, § 3], le Théorème 2.4.6 reste vrai, en remplaçant G par $G_{\infty,p}$ et les Γ_n par des sous-groupes S-arithmétiques pour $S = \{\infty, p\}$. Si on remplace $\pi \in \widehat{G}$ par $\pi \otimes \pi_p$ où $\pi_p \in \widehat{G}(\mathbb{Q}_p)$ est supercuspidale, on voit que $\pi \otimes \pi_p$ est limite de représentations « automorphes » $\pi^{(n)} \otimes \pi_p^{(n)}$. Mais alors $\pi_p^{(n)} = \pi_p$ pour tout $n \gg 0$, et cette représentation ne peut apparaître que dans le spectre discret.

Exemple 2.4.6. — *Si $G = \mathrm{SO}(n,1)$ avec n impair $= 2m+1$, on a $q = n/2 = m + \frac{1}{2}$, $e = \frac{1}{2}$, et la cohomologie de π apparaît en degrés $\{m, m+1\}$.*

Terminons en remarquant que le Théorème 2.4.5 est relié, par le théorème de Lück [**74**], au calcul des invariants de Novikov-Shubin de l'espace G/K (Lohoué et Mehdi [**73**]).

2.5. Perspectives : contraintes locales et contraintes automorphes

Nous revenons aux deux Problèmes (2.4.2 et 2.4.3) énoncés dans la section précédente et nous allons décrire, en utilisant toute la force de la théorie des représentations, deux cas opposés où ils peuvent être résolus, amenant à une solution satisfaisante du problème $A^-(i)$.

Le Problème 2.4.2 a en fait été complètement résolu par Vogan, dans un article longtemps clandestin [**101**]. Sa solution est difficile, et nous n'exposerons les résultats que dans les cas qui nous intéressent. Le Problème 2.4.3 est encore plus profond : l'un des buts de ces notes est d'expliquer comment, pour les groupes associés aux espaces hyperboliques, sa solution est implicitement donnée par les Conjectures d'Arthur.

Commençons par le groupe $G = \mathrm{SU}(n,1)$. Le sous-groupe compact maximal est $K \cong \mathrm{U}(n)$. La décomposition de Cartan est $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ avec $\mathfrak{p}_0 \cong \mathbb{C}^n$. On a $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$, le premier facteur s'identifiant à l'espace tangent holomorphe en $o = 1 \cdot K$ à $X = G/K$ et le second à l'espace tangent antiholomorphe. Donc :

$$\Lambda^i(\mathfrak{p}) \cong \bigoplus_{p+q=i} \Lambda^p(\mathbb{C}^n) \otimes \Lambda^q(\mathbb{C}^n). \tag{2.5.1}$$

Le groupe K opère sur $\mathfrak{p}_0$ par $u \cdot X = \det(u)^{-1} uX$ $(u \in K, X \in \mathbb{C}^n)$. Il préserve la décomposition (2.5.1).

On sait que les représentations $\Lambda^p(\mathbb{C}^n)$ sont irréductibles sous K ; chaque facteur de (2.5.1) contient alors une unique représentation irréductible contenant le vecteur $e_p \otimes e_q$, e_p et e_q étant respectivement un vecteur de plus haut poids de Λ^p et Λ^q (sous un tore maximal de K). Notons-la τ_{pq}. On a alors :

Théorème 2.5.1 **(Kumaresan, Vogan-Zuckerman [103], Krajlevic [68])**

(i) *Pour tous p, q tels que $p + q \leqslant n$ il existe une unique représentation unitaire irréductible V_{pq} de G telle que*

(a) $\mathrm{Hom}_K(\tau_{pq}, V_{pq}) \neq 0$.

(b) *L'opérateur de Casimir opère trivialement sur V_{pq}.*

(ii) *Aucune représentation V_{pq} n'est isolée dans $\widehat{G}$.*

(iii) *Les V_{pq} constituent toutes les représentations unitaires cohomologiques de G.*

Noter que d'après (a), (b),

$$H^{p+q}(\mathfrak{g}, K, V_{pq}) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{p+q}\mathfrak{p}, V_{pq}) \neq 0.$$

D'après [**103**] on sait en fait que les autres représentations de $\Lambda^{p+q}\mathfrak{p}$ n'interviennent pas dans V_{pq}, et que τ_{pq} apparaît avec multiplicité 1. En particulier

$$H^{p+q}(\mathfrak{g}, K; V_{pq}) \cong \mathbb{C}. \tag{2.5.2}$$

Par ailleurs (2.5.1) implique une décomposition de Hodge sur la cohomologie [**15**, II, § 4] et :

$$H^{p,q}(\mathfrak{g}, K; V_{pq}) \cong \mathbb{C} \tag{2.5.3}$$

et plus précisément

$$H^{p+r,q+r}(\mathfrak{g}, K; V_{pq}) \cong \mathbb{C} \quad (r = 0, \dots n - p - q), \tag{2.5.4}$$

les autres composantes de Hodge de $H^*(\mathfrak{g}, K; V_{pq})$ étant nulles [**103**, Prop. 3.6].

Il est clair que ces résultats ne laissent aucun espoir quant au Problème *local* 2.4.2. En revanche nous allons voir (Ch. 6) que le Problème global 2.4.3 devrait admettre une solution positive, d'après les Conjectures d'Arthur (Conjecture A de l'introduction).

CHAPITRE 3

REPRÉSENTATIONS DE $\mathrm{GL}(n)$

3.1. Classification de Langlands

La classification de Langlands pour $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ décrit toutes les représentations admissibles de G à équivalence infinitésimale près. Nous notons $K = \mathrm{O}(n)$ le sous-groupe compact maximal de G.

Une représentation admissible irréductible (ρ, V) admet un *caractère central i.e.* un homomorphisme $\omega_\rho : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}^*$ tel que

$$\rho(tI_n) = \omega_\rho(t)\,\mathrm{Id}_V,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

Soit $\mathrm{SL}^{\pm}(m, \mathbb{R})$ le sous-groupe des éléments g de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ tels que $|\det(g)| = 1$. On va d'abord décrire certaines représentations irréductibles de $\mathrm{SL}^{\pm}(m, \mathbb{R})$ pour $m = 1$ et $m = 2$. Pour $m = 1$ il n'y a que deux représentations, toutes les deux de dimension un ; on note la représentation triviale 1 et sgn l'autre. Pour $m = 2$, les représentations qui nous intéressent sont celles qui sont dans la « série discrète » et que nous notons D_l pour $l \in \mathbb{N}^*$. Pour $l \geqslant 1$, la représentation D_l est induite de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$:

$$D_l = \mathrm{ind}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}^{\mathrm{SL}^{\pm}(2,\mathbb{R})}(D_l^+). \tag{3.1.1}$$

Où la représentation D_l^+ est donnée par l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur l'espace des fonctions analytiques f sur le demi-plan de Poincaré de norme

$$\|f\| = \left(\iint |f(z)|^2 y^{l-1} dx dy\right)^{1/2}$$

finie, l'action d'un élément $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ étant donnée par

$$D_l^+(g)f(z) = (bz + d)^{-(l+1)} f\left(\frac{az + c}{bz + d}\right). \tag{3.1.2}$$

Les représentations D_l de $\mathrm{SL}^{\pm}(2, \mathbb{R})$ sont irréductibles et unitaires (*cf.* [**66**], [**71**]) [(1)].

[(1)] Le caractère infinitésimal de D_l est $l\rho$ où $\rho\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) = 1$, voir [**66**, Problème 2 p. 276].

Chaque représentation de G est construite à partir de « blocs élémentaires » : les représentations de $\mathrm{GL}(1,\mathbb{R})$ et de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ que l'on obtient en tensorisant les représentations de $\mathrm{SL}^{\pm}$ ci-dessus par un morphisme $a \mapsto |\det a|_{\mathbb{R}}^{t}$ du groupe des matrices scalaires strictement positives de taille 1 ou 2 vers $\mathbb{C}^*$. Ci-dessous, nous notons $|.|_{\mathbb{R}}$ la valeur absolue ordinaire et $t \in \mathbb{C}$. On obtient donc les « blocs élémentaires » suivant :

$$\left.\begin{matrix} 1 \otimes |.|_{\mathbb{R}}^{t} \\ \mathrm{sgn} \otimes |.|_{\mathbb{R}}^{t} \end{matrix}\right\} \text{ pour } \mathrm{GL}(1,\mathbb{R}), \tag{3.1.3}$$

$$D_l \otimes |\det(.)|_{\mathbb{R}}^{t} \text{ pour } \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}). \tag{3.1.4}$$

À chaque partition de n en somme de 1 et de 2, notée $(n_1,\dots,n_r)$, on associe le sous-groupe diagonal par blocs

$$\mathbb{M} = MA = \mathrm{GL}(n_1,\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_r,\mathbb{R})$$

de G, où comme d'habitude A désigne le sous-groupe des matrices diagonales positives dans le centre de $\mathbb{M}$ et M est un produit de groupes $\{\pm 1\}$ ou $\mathrm{SL}^{\pm}(2,\mathbb{R})$. Pour chaque entier j compris entre 1 et r, soit σ_j une représentation de $\mathrm{GL}(n_j,\mathbb{R})$ de la forme (3.1.3) ou (3.1.4) suivant que $n_j = 1$ ou 2 ; nous noterons t_j le nombre complexe t correspondant. Alors $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ définit, par produit tensoriel, une représentation du sous-groupe diagonal par blocs MA que l'on peut étendre en une représentation du sous-groupe parabolique correspondant $P = MAU$ (constitué des matrices triangulaires supérieures par blocs) par l'identité sur U (les matrices strictement triangulaires supérieures par blocs). Nous notons alors :

$$I(\sigma_1,\dots,\sigma_r) = \mathrm{ind}_P^G(\sigma_1,\dots,\sigma_r), \tag{3.1.5}$$

où ind désigne l'induction unitaire (*cf.* [**66**]).

Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ s'identifient à $\mathbb{C}^n$, de façon unique à l'action près du groupe de Weyl $\mathfrak{S}_n$. D'après [**66**, Proposition 8.22], la représentation définit par (3.1.5) admet alors un caractère infinitésimal

$$(\lambda_{\sigma_1},\dots,\lambda_{\sigma_r}) \in \mathbb{C}^n, \tag{3.1.6}$$

où λ_{σ_j} est égal à t_j lorsque $n_j = 1$ et est égal au couple $(t_j + l_j/2, t_j - l_j/2)$ lorsque $n_j = 2$.

Le théorème qui suit résulte des travaux de Langlands [**72**] et de la thèse de Speh (*cf.* aussi [**65**]).

***Théorème 3.1.1* (Classification de Langlands pour $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$).** — *Soit $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.*

(1) *Si les paramètres t_j de $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ vérifient*

$$n_1^{-1}\,\mathrm{Re}\,t_1 \geqslant n_2^{-1}\,\mathrm{Re}\,t_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r^{-1}\,\mathrm{Re}\,t_r, \tag{3.1.7}$$

alors $I(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ a un unique quotient irréductible, son quotient de Langlands, *que nous notons $J(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$.*

(2) *Toute représentation admissible irréductible de G est infinitésimalement équivalente à une représentation $J(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$.*

(3) *Deux représentations* $J(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ *et* $J(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{r'})$ *sont infinitésimalement équivalentes si et seulement si* $r = r'$ *et il existe une permutation* $j(i)$ *de* $\{1, \ldots, r\}$ *telle que* $\sigma'_i = \sigma_{j(i)}$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant r$.

On peut de la même manière classifier les représentations irréductibles admissibles de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Dans la suite de cette section, nous notons $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et $K = \mathrm{U}(n)$ un sous-groupe compact maximal.

Rappelons que tout caractère (non nécessairement unitaire) de $\mathbb{C}^*$ s'écrit $z \mapsto z^p \overline{z}^q$ où $p, q \in \mathbb{C}$ et $p - q \in \mathbb{Z}$. Le caractère est unitaire si, et seulement si, $\mathrm{Re}(p+q) = 0$. Posons $t_i = \frac{p_i + q_i}{2}$. Pour tout $j = 1, \ldots, n$, soit σ_j un caractère de $\mathbb{C}^*$. Alors $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ définit, par produit tensoriel, une représentation de dimension un du sous-groupe des matrices diagonales de G, que l'on étend, par l'identité, en une représentation de dimension un du sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures dans G. On pose alors :

$$I(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \mathrm{ind}_B^G(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \tag{3.1.8}$$

où l'induction ci-dessus est unitaire.

Une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \times \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ s'identifie à $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, de façon unique modulo $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$. D'après [**66**, Proposition 8.22], la représentation définie par (3.1.8) admet alors un caractère infinitésimal

$$(p_1, \ldots, p_n) \times (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n. \tag{3.1.9}$$

Théorème 3.1.2 **(Classification de Langlands pour** $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$**).** — *Soit* $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

(1) *Si les paramètres* t_j *de* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *vérifient*

$$\mathrm{Re}\, t_1 \geqslant \mathrm{Re}\, t_2 \geqslant \cdots \geqslant \mathrm{Re}\, t_n, \tag{3.1.10}$$

alors $I(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *a un unique quotient irréductible, son* quotient de Langlands, *que nous notons* $J(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

(2) *Toute représentation irréductible admissible de* G *est infinitésimalement équivalente à une représentation* $J(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

(3) *Deux représentations* $J(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *et* $J(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n)$ *sont infinitésimalement équivalentes si et seulement s'il existe une permutation* $j(i)$ *de* $\{1, \ldots, n\}$ *telle que* $\sigma'_i = \sigma_{j(i)}$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Nous renvoyons au livre de Knapp [**66**] pour une démonstration de ces Théorèmes.

3.2. Correspondance de Langlands locale

Le *groupe de Weil de* $\mathbb{R}$, noté $W_{\mathbb{R}}$, est l'extension de $\mathbb{C}^*$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (le groupe de Galois de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$) :

$$W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^* \cup j\mathbb{C}^*,$$

où $j^2 = -1$ et $jcj^{-1} = \overline{c}$. Dans cette section nous décrivons la *correspondance de Langlands locale pour* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *i.e.* une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes semi-simples de dimension n de $W_{\mathbb{R}}$ et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. On va donc s'intéresser aux représentations semi-simples du groupe de Weil de $\mathbb{R}$.

Il existe une suite exacte naturelle

$$1 \longrightarrow U \longrightarrow W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{u} \mathbb{R}^* \longrightarrow 1$$

donnée par

$$\begin{aligned} z &\longmapsto |z|_{\mathbb{C}} = z\overline{z} \ (z \in \mathbb{C}^*) \\ j &\longmapsto -1, \end{aligned}$$

et dont le noyau est $\{z \in \mathbb{C}^* \ : \ |z| = 1\}$. Si $|z| = 1$, on a $z = w/\overline{w} = w(jwj^{-1})^{-1}$ qui est égal au commutateur $[w,j] = wjw^{-1}j^{-1}$. Donc U s'identifie au groupe dérivé de $W_{\mathbb{R}}$.

Par conséquent, les caractères abéliens de $W_{\mathbb{R}}$ sont de la forme $w \mapsto \chi(u(w))$ où χ est un caractère de $\mathbb{R}^*$. Les représentations de dimension un sont donc paramétrées par un signe et un paramètre complexe t comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} (+,t) : \varphi(z) = |z|_{\mathbb{R}}^t \ \text{ et } \ \varphi(j) = +1, \\ (-,t) : \varphi(z) = |z|_{\mathbb{R}}^t \ \text{ et } \ \varphi(j) = -1. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Considérons maintenant une représentation irréductible r de $W_{\mathbb{R}}$ sur un espace V, de degré $\geqslant 2$. Alors $r_{|\mathbb{C}^*}$ est complètement réductible, donc somme directe de caractères. Si χ est un caractère de $\mathbb{C}^*$, soit

$$V(\chi) = \{v \in V \ : \ z.v = \chi(z)v\}.$$

Puisque $jzj^{-1} = \overline{z}$ $(z \in \mathbb{C}^*)$, la somme directe $V(\chi) \oplus V(\chi^\sigma)$, où $\chi^\sigma(z) = \chi(\overline{z})$, est stable par $W_{\mathbb{R}}$. Par conséquent, il existe au plus un couple de caractères $\{\chi, \chi^\sigma\}$ dans la décomposition de V.

Si $\chi = \chi^\sigma$, d'après le paragraphe au-dessus de (3.2.1) χ s'étend en un caractère abélien χ' de $W_{\mathbb{R}}$. Alors $r \otimes (\chi')^{-1}$ est une représentation irréductible de $W_{\mathbb{R}}$, triviale sur $\mathbb{C}^*$, donc représentation de $W_{\mathbb{R}}/\mathbb{C}^* \cong \{\pm 1\}$. Elle est donc de dimension 1, et r est un caractère, décrit dans (3.2.1).

Si $\chi \neq \chi^\sigma$, soit $v \in V(\chi)$. Alors $r(j)v \in V(\chi^\sigma)$ donc v et $r(j)v$ sont indépendants. Alors, l'espace $\langle v, r(j)v\rangle$ est stable par $W_{\mathbb{R}} = \langle j, \mathbb{C}^*\rangle$. Donc r est de dimension 2, donnée dans cette base par les matrices

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} \chi(z) & \\ & \chi(\overline{z}) \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{C}^*, \qquad j \longmapsto \begin{pmatrix} & \chi(-1) \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

C'est la représentation de $W_{\mathbb{R}}$ *induite* à partir du caractère χ de $\mathbb{C}^*$. Nous avons donc obtenu que les classes d'équivalence de représentations irréductibles de dimension > 1

$\varphi : W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ sont classifiées par les paires (l,t) avec l un entier $\geqslant 1$ et t dans $\mathbb{C}$; à chaque paire (l,t) correspond la classe d'équivalence du morphisme suivant :

$$(l,t) : \begin{cases} \varphi(re^{i\theta}) = \begin{pmatrix} r^{2t}e^{il\theta} & \\ & r^{2t}e^{-il\theta} \end{pmatrix} \\ \text{et} \\ \varphi(j) = \begin{pmatrix} & (-1)^l \\ 1 & \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Soit maintenant φ une représentation complexe semi-simple de dimension n de $W_{\mathbb{R}}$. La liste des dimensions des composantes irréductibles de φ donne une partition de n comme somme de 1 et de 2 que l'on note $(n_1,\dots,n_r)$. Soit φ_j la composante irréductible de φ correspondante à l'entier n_j. À φ_j on peut associer une représentation σ_j de $\mathrm{GL}(n_j,\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (+,t) \text{ dans } (3.2.1) &\longmapsto 1 \otimes |.|_{\mathbb{R}}^t \text{ dans } (3.1.3),\\ (-,t) \text{ dans } (3.2.1) &\longmapsto \mathrm{sgn} \otimes |.|_{\mathbb{R}}^t \text{ dans } (3.1.3),\\ (l,t) \text{ dans } (3.2.2) &\longmapsto D_l \otimes |\det(.)|_{\mathbb{R}}^t \text{ dans } (3.1.4). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

De cette façon, on associe à la représentation φ un r-uplet $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$. De plus, quitte à permuter les σ_j, on peut supposer que (3.1.7) est vérifiée. Le Théorème 3.1.1 permet donc de définir l'application :

$$\varphi \longmapsto \rho_{\mathbb{R}}(\varphi) = J(\sigma_1,\dots,\sigma_r) \tag{3.2.4}$$

et implique le :

Théorème 3.2.1 **(Correspondance de Langlands locale pour** $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$**)**
L'application (3.2.4) définit une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes semi-simples de dimension n de $W_{\mathbb{R}}$ et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Remarquons de plus que la classification de Langlands implique l'équivalence des trois assertions suivantes :

(1) le paramètre φ est *tempéré*, *i.e.* est borné ;
(2) $\mathrm{Re}(t_1) = \cdots = \mathrm{Re}(t_r) = 0$;
(3) la représentation $\rho_{\mathbb{R}}(\varphi)$ est tempérée.

Dans la suite nous décrivons l'analogue du Théorème 3.2.1 pour $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Le *groupe de Weil de* $\mathbb{C}$, noté $W_{\mathbb{C}}$, est donné par $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$.

Une représentation semi-simple de dimension n de $W_{\mathbb{C}}$, χ, est donc donnée par n (quasi-)caractères $\chi_1,\dots,\chi_n$ où $\chi_i(z) = z^{p_i}(\overline{z})^{q_i}$. Comme plus haut posons $t_i = \frac{p_i+q_i}{2}$. Quitte à permuter les χ_i, on peut supposer que (3.1.10) est vérifiée. Le Théorème 3.1.2 permet donc de définir l'application :

$$\chi \longmapsto \rho_{\mathbb{C}}(\chi) = J(\chi_1,\dots,\chi_n) \tag{3.2.5}$$

et implique le :

Théorème 3.2.2 **(Correspondance de Langlands locale pour** $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$**)**
L'application (3.2.5) définit une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes semi-simples de dimension n de $W_{\mathbb{C}}$ et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Enfin, remarquons que là encore la classification de Langlands implique que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) le paramètre χ est *tempéré*, *i.e.* borné ;
(2) $\mathrm{Re}(t_1) = \cdots = \mathrm{Re}(t_n) = 0$;
(3) la représentation $\rho_{\mathbb{C}}(\chi)$ est tempérée.

3.3. Un peu de fonctions L

3.3.1. Caractères de Dirichlet et adèles. — Pour simplifier nous commençons par quelques rappels sur ces notions en se plaçant sur le corps $\mathbb{Q}$, mais tous ces résultats admettent un analogue dans le cas d'un corps de nombres quelconque.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soit χ_0 un caractère du groupe multiplicatif fini $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, *i.e.* un morphisme de groupe à valeurs dans le cercle unité. On appelle *caractère de Dirichlet de module n* toute application χ obtenue à partir d'un caractère χ_0 comme ci-dessus par l'extension à $\mathbb{Z}$:

$$\chi(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } (a, n) \neq 1, \\ \chi_0(a \bmod n) & \text{si } (a, n) = 1. \end{cases}$$

Nous dirons de plus que χ est *primitif de conducteur n* si χ ne provient pas par composition d'un caractère de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$ où d divise n.

Dans la suite nous allons ramener en partie l'étude du spectre des formes différentielles des variétés hyperboliques complexe arithmétiques à l'étude du spectre des formes différentielles des revêtements de congruence de

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})\backslash \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/ \mathrm{SO}(n).$$

Ce lien est prédit par la fonctorialité de Langlands, dont nous décrirons quelques cas particuliers dans les prochains chapitres.

Nous voulons donc étudier les formes différentielles sur l'espace symétrique

$$X = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/ \mathrm{SO}(n)$$

invariantes par rapport à un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ et ce simultanément pour différents sous-groupes de congruence. Rappelons qu'un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ qui contient un sous-groupe $\Gamma_N = \{M \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \mid M \equiv I_n \pmod N\}$, pour un certain entier $N \geqslant 1$. À chaque inclusion $\Gamma' \subset \Gamma$ de sous-groupes de congruence correspond une projection de revêtement $\Gamma' \backslash X \to \Gamma \backslash X$. Puisque le nombre de classes d'idéaux de $\mathbb{Q}$ est 1, le théorème qui suit montre que la limite projective de ce système, lim $\mathrm{proj}_\Gamma \Gamma \backslash X$, est égale à

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{Q}) \backslash \mathrm{SL}(n, \mathbb{A}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}),$$

où $\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$. Ainsi l'introduction des adèles permet de transformer l'étude du spectre des quotients de congruence de X en l'étude d'un certain espace de fonctions sur un espace de classes à droite et à gauche du groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{A})$.

Dans la suite nous notons F un corps de nombres et $\mathbb{A}$ son anneau des adèles. Soit $S = S_\infty \cup S_f$ l'ensemble des places de F, réunion des places archimédiennes et des places finies de F. Si $v \in S$, nous notons F_v la complétion de F en la place v ; si v est non-archimédienne, nous notons $\mathfrak{o}_v$ l'anneau des entiers de F_v. Nous notons $\mathbb{A}_f$ l'anneau des adèles finis et F_∞ le produit de toutes les complétions archimédiennes de F. Nous supposerons une certaine familiarité avec la définition de l'anneau des adèles, sa topologie, et le fait que $F \subset \mathbb{A}$ est un sous-groupe discret, avec un quotient $\mathbb{A}/F$ compact.

***Théorème 3.3.1* (Théorème d'approximation forte).** — *Soit F un corps de nombres.*

(1) $\mathrm{SL}(n, F_\infty)\,\mathrm{SL}(n, F)$ *est dense dans* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{A})$.

(2) *Soit K_0 un sous-groupe compact ouvert de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_f)$. *Supposons que l'image de K_0 dans $\mathbb{A}_f^*$ par le déterminant soit $\prod_{v \notin S_\infty} \mathfrak{o}_v^*$. Alors le cardinal de*

$$\mathrm{GL}(n, F)\,\mathrm{GL}(n, F_\infty) \backslash \mathrm{GL}(n, \mathbb{A}) / K_0$$

est égal au nombre de classes d'idéaux de F.

Dans le premier chapitre nous avons ramené l'étude du spectre des formes différentielles sur les quotients $\Gamma \backslash X$ à l'étude de certaines représentations irréductibles unitaires du groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, celles apparaissant dans le spectre automorphe. Les adèles permettent de voir chacune de ces représentations comme la « représentation à l'infini » d'un seul et même groupe, le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{A})$. Il sera en fait plus commode de considérer le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$.

Nous dirons d'une représentation unitaire irréductible de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$ qu'elle est *automorphe* si elle apparaît comme sous-représentation de la représentation régulière droite dans $L^2(\mathrm{GL}(n, F) \backslash \mathrm{GL}(n, \mathbb{A}))$. Remarquons qu'en général une représentation automorphe n'apparaît pas discrètement, ce problème peut être évité en ne considérant que des représentations *cuspidales* pour la définition desquelles nous renvoyons à [**18**].

On appelle *caractère de Hecke* un caractère continu χ de $\mathbb{A}^*/F^*$. Si v est une place non-archimédienne de F, on dit que χ est *non ramifié* en v si χ_v, la composée de χ et de l'inclusion naturelle $F_v \hookrightarrow \mathbb{A}$, est triviale sur $\mathfrak{o}_v^*$. Dans le cas contraire on dit que χ est ramifié en v. Il est facile de vérifier qu'un caractère de Hecke est non ramifié en presque toutes les places. Lorsque $F = \mathbb{Q}$, il découle de la description de $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$

que les caractères de Hecke correspondent aux caractères primitifs de Dirichlet de la façon suivante.

Proposition 3.3.2

(1) *Supposons que $F = \mathbb{Q}$ et que χ est un caractère de $\mathbb{A}^*/F^*$. Il existe alors un unique caractère χ_1 d'ordre fini de $\mathbb{A}^*/F^*$ et un unique nombre imaginaire pur λ tel que $\chi(x) = \chi_1(x)|x|^\lambda$.*

(2) *Supposons que $F = \mathbb{Q}$ et que χ est un caractère d'ordre fini de $\mathbb{A}^*/F^*$. Il existe alors un entier N dont les diviseurs premiers sont exactement les places finies de $\mathbb{Q}$ en lesquelles χ est ramifié, et un caractère primitif de Dirichlet χ_0 modulo N tel que si p est un nombre premier ne divisant pas N, alors $\chi_0(p) = \chi_p(p)$. Cette correspondance $\chi \mapsto \chi_0$ est une bijection entre les caractères d'ordre fini de $\mathbb{A}^*/F^*$ et les caractères primitifs de Dirichlet.*

3.3.2. Fonctions L. — Soit F un corps de nombre et $\mathbb{A}$ son anneau des adèles. La théorie de Langlands veut associer à chaque représentation automorphe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$ une fonction L donnée comme produit eulérien de facteurs L élémentaires, un pour chaque place de F. D'après un théorème de Jacquet-Langlands [**55**] et Flath [**41**], toute représentation irréductible admissible de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$ est un « produit tensoriel restreint » $\pi = \otimes \pi_v$ de représentations de $\mathrm{GL}(n, F_v)$ où v décrit les places de F (y compris les places archimédiennes). D'après Godement-Jacquet [**45**] on peut associer à π une fonction

$$L(\pi, s) = \prod_v L(\pi_v, s).$$

Pour v finie, $L(\pi_v, s)$ est un *facteur eulérien* du type usuel. Pour v infinie, c'est un produit de fonctions Γ. (Godement-Jacquet considéraient les π cuspidales, le cas général est traité par Jacquet [**59**].)

En fait, on peut associer à π une *famille* de fonctions L, associées à des choix de vecteurs dans l'espace de la représentation et à des fonctions auxiliaires. Nous aurons besoin de considérer *la* fonction L ayant à toutes les places le *bon* facteur prédit par la fonctorialité de Langlands [**69**]. Ceci est obtenu par Jacquet [**59**]. Pour les places archimédiennes, d'après le § 3.3, la représentation π_v est associée à une représentation de degré n de $W_\mathbb{C}$ ou $W_\mathbb{R}$. Il suffit donc de d'écrire les facteurs locaux associées à celle-ci, et ceux-ci sont donnés par les propositions suivantes.

Proposition 3.3.3 **(Facteurs L_∞ pour $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$).** — *Soit $\pi = \rho_\mathbb{R}(\varphi)$ une représentation de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Le facteur L_∞, $L(\pi, s) = L(\varphi, s)$ est le produit des $L(\varphi_j, s)$ où les φ_j sont les composantes irréductibles de φ. Et si φ est irréductible, on a :*

$$L(\varphi, s) = \begin{cases} \pi^{-(s+t)/2}\Gamma\left((s+t)/2\right) & \textit{si } \varphi \textit{ est donnée par } (+, t) \textit{ dans (3.2.1)}, \\ \pi^{-(s+t+1)/2}\Gamma\left((s+t+1)/2\right) & \textit{si } \varphi \textit{ est donnée par } (-, t) \textit{ dans (3.2.1)}, \\ 2(2\pi)^{-(s+t+l/2)}\Gamma\left(s+t+l/2\right) & \textit{si } \varphi \textit{ est donnée par } (l, t) \textit{ dans (3.2.2)}. \end{cases}$$

***Proposition 3.3.4* (Facteurs L_∞ pour $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$).** — *Soit $\pi = \rho_{\mathbb{C}}(\chi)$ une représentation de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Le facteur L_∞, $L(\pi,s) = L(\chi,s)$ est le produit des $L(\chi_j,s)$ où les χ_j sont les caractères composant χ. Et si χ est un caractère du type $\chi(z) = z^p(\overline{z})^q$, on a :*

$$L(\chi,s) = 2(2\pi)^{-(s+\max(p,q))}\Gamma\left(s+\max(p,q)\right).$$

3.4. Dual unitaire

3.4.1. Représentations de Speh. — Soit F un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit r un entier égal à 1 si $F=\mathbb{C}$ et égal à 1 ou 2 si $F=\mathbb{R}$. Soit δ une représentation de la série discrète unitaire de $\mathrm{GL}(r,F)$. Ceci équivaut à ce que

- $\delta(z) = z^p(\overline{z})^q$ avec $\mathrm{Re}(\frac{p+q}{2}) = 0$ si $F=\mathbb{C}$,
- $\delta = 1 \otimes |.|_{\mathbb{R}}^t$ ou $\mathrm{sgn}\otimes|.|_{\mathbb{R}}^t$ avec dans les deux cas $\mathrm{Re}(t)=0$ si $F=\mathbb{R}$ et $r=1$ et,
- $\delta = D_l \otimes |\det(.)|_{\mathbb{R}}^t$ si $F=\mathbb{R}$ et $r=2$.

Soit $n = mr$ un multiple de r. On note $\delta|.|^s$ ($s\in\mathbb{C}$) la représentation de $\mathrm{GL}(r,F)$ donnée par $\delta(g)|\det(g)|_F^s$. Considérons la représentation de $\mathrm{GL}(n,F)$ unitairement induite à partir de

$$(\delta|.|^{(m-1)/2}, \delta|.|^{(m-3)/2}, \ldots, \delta|.|^{(1-m)/2}).$$

D'après les Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2, elle admet un unique quotient de Langlands. On le note $\mathrm{Sp}(\delta,m)$.

***Théorème 3.4.1* (Speh [97]).** — *La représentation $\mathrm{Sp}(\delta,m)$ est unitaire.*

3.4.2. Séries complémentaires. — Si $\mathcal{P} : n = n_1 + \cdots + n_r$ ($n_i > 0$) est une partition de n, on note P le parabolique associé, formé des matrices triangulaires supérieures par blocs. Son sous-groupe de Levi est $M = \mathrm{GL}(n_1,F)\times\cdots\times\mathrm{GL}(n_r,F)$. Si π_i est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(n_i,F)$, on note (de façon cohérente avec les notations de la première section) $(\pi_1,\ldots,\pi_r)$ la représentation de P obtenue par extension triviale à P de la représentation tensorielle $\pi_1\otimes\cdots\otimes\pi_r$ de M.

Soit $\mathrm{Sp}(\delta,m)$ une représentation de Speh pour $\mathrm{GL}(n,F)$, $n=mr$. Dans $\mathrm{GL}(2n,F)$,

$$(\mathrm{Sp}(\delta,m)|.|^\alpha, \mathrm{Sp}(\delta,m)|.|^\beta)$$

définit une représentation du sous-groupe parabolique associé à la décomposition $2n = n+n$.

***Théorème 3.4.2* (Vogan [102]).** — *Pour $0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$, la représentation de $\mathrm{GL}(2n,F)$ unitairement induite à partir de*

$$(\mathrm{Sp}(\delta,m)|.|^\alpha, \mathrm{Sp}(\delta,m)|.|^{-\alpha})$$

est irréductible et unitaire.

Soit $V(\delta,m,\alpha)$ la représentation ainsi définie.

3.4.3. Classification

Théorème 3.4.3 **(Vogan [102])**

(1) *Soit* π *une représentation unitaire de* $\mathrm{GL}(n,F)$. *Alors, il existe une partition* $n = m_1r_1 + \cdots + m_sr_s + 2(m_{s+1}r_{s+1} + \cdots + m_{s+t}r_{s+t})$, *des représentations* δ_i *de la série discrète de* $\mathrm{GL}(r_i,F)$ $(i = 1,\ldots,s)$ *et des réels* $0 < \alpha_i < \frac{1}{2}$ $(i = s+1,\ldots,s+t)$ *tels que* π *soit équivalente à l'induite unitaire de*

$$(\mathrm{Sp}(\delta_1,m_1),\ldots,\mathrm{Sp}(\delta_s,m_s),V(\delta_{s+1},m_{s+1},\alpha_{s+1}),\ldots,V(\delta_{s+t},m_{s+t},\alpha_{s+t})).$$

(2) *Cette expression est unique, aux permutations près des* (δ_i,m_i) $(i \leqslant s)$ *et des* (δ_j,m_j,α_j) $(j > s)$.

Le Théorème ci-dessus implique que si les t_j sont les paramètres complexes, comme dans (3.1.7) ou (3.1.10), d'une représentation unitaire de $\mathrm{GL}(n,F)$ alors :

$$\{\overline{t_j}\} = \{-t_k\}. \tag{3.4.1}$$

Enfin, remarquons que le Théorème de classification de Vogan permet (*cf.* [**24**]) de redémontrer que pour une représentation unitaire générique (ce qui est le cas de toute représentation automorphe cuspidale) les t_j comme ci-dessus vérifient :

$$|\operatorname{Re}(t_j)| < \frac{1}{2}. \tag{3.4.2}$$

3.4.4. Retour sur les représentations de Speh. — Il est intéressant de noter que la construction de Speh est assez générale dans le sens qu'elle ne nécessite pas réellement que δ soit une représentation de la série discrète.

Plaçons nous, pour simplifier, sur le corps $\mathbb{C}$. Soit a un entier $\geqslant 1$ et τ une représentation (unitaire) de $\mathrm{GL}(a,\mathbb{C})$. Enfin soit $n = ab$ un multiple de a. Comme au-dessus notons $\tau|.|^s$ $(s \in \mathbb{C})$ la représentation de $\mathrm{GL}(a,\mathbb{C})$ donnée par $\tau(g)|\det(g)|_{\mathbb{C}}^s$. On introduit alors la représentation de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ unitairement induite à partir de

$$(\tau|.|^{(b-1)/2},\tau|.|^{(b-3)/2},\ldots,\tau|.|^{(1-b)/2}). \tag{3.4.3}$$

D'après les Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2, elle admet un unique quotient de Langlands, on le note

$$J(\tau,b).$$

Ces représentations, nous le verrons, jouent (conjecturalement au moins) le rôle de pavés élémentaires dans la description du spectre automorphe. Concluons ce chapitre par le calcul du caractère infinitésimal d'une telle représentation.

Supposons que le caractère infinitésimal de la représentation τ soit

$$(\lambda, \mu) = ((\lambda_1, \ldots, \lambda_a), (\mu_1, \ldots, \mu_a)) \in \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^a$$

toujours dans la paramétrisation d'Harish-Chandra, *cf.* § 1.3. Alors, d'après [**66**, Proposition 8.22], le caractère infinitésimal de $J(\tau, b)$ est

$$\left(\left(\lambda + \frac{b-1}{2}, \lambda + \frac{b-3}{2}, \ldots, \lambda + \frac{1-b}{2}\right), \left(\mu + \frac{b-1}{2}, \ldots, \mu + \frac{1-b}{2}\right)\right) \tag{3.4.4}$$

(vecteur de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$).

CHAPITRE 4

REPRÉSENTATIONS DE $\mathrm{U}(n,1)$

Soit $G = \mathrm{U}(n,1)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ laissant invariante la forme hermitienne :
$$|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 - |z_{n+1}|^2.$$
Soit $K = \mathrm{U}(n+1) \cap G = \mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ de G est :
$$\mathfrak{g}_0 = \{M \in M(n,\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{M} I_{n,1} + I_{n,1} M = 0\},$$
où
$$I_{n,1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_0$ de K est :
$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & i\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R},\ {}^t\overline{A} + A = 0 \right\}.$$
La décomposition de Cartan correspondante est :
$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0,$$
où
$$\mathfrak{p}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ {}^t\overline{z} & 0 \end{pmatrix} \mid z \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \right\}.$$
Cette décomposition est orthogonale relativement à la forme de Killing

$$B(X,Y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(XY) \tag{4.0.1}$$

sur $\mathfrak{g}_0$. Pour cette normalisation de la forme de Killing les courbures sectionnelles de l'espace symétrique associé (l'espace hyperbolique complexe) sont comprises entre -4 et -1, *cf.* deuxième partie.

Soit Ad la représentation adjointe de G. Puisque tout élément de K peut s'écrire
$$k = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad U \in \mathrm{U}(n),\ v \in \mathrm{U}(1)$$

le groupe K agit sur $\mathfrak{p}_0 \cong \mathbb{C}^n$ par $\mathrm{Ad}(k)X = UXv^{-1}$, et cette action préserve la structure complexe naturelle sur $\mathfrak{p}_0$. On en déduit donc la décomposition

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_- \quad \text{avec } \mathfrak{p}_\pm^* \cong \overline{\mathfrak{p}_\pm} \cong \mathfrak{p}_\mp, \tag{4.0.2}$$

comme K-modules. Pour $0 \leqslant r \leqslant 2n$, soit

$$\tau_r := \Lambda^r(\mathrm{Ad}_+ \oplus \mathrm{Ad}_-) \cong \Lambda^r(\mathrm{Ad} \oplus \overline{\mathrm{Ad}})$$

la représentation de K sur $\Lambda^r\mathfrak{p} = \Lambda^r(\mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-)$. Il est bien connu [**15**] (décomposition de Hodge) que chaque représentation τ_r se décompose en

$$\tau_r = \bigoplus_{p+q=r} \tau_{p,q},$$

où

$$\tau_{p,q} := \Lambda^p \overline{\mathrm{Ad}} \otimes \Lambda^q \,\mathrm{Ad}$$

est la représentation de K sur $\Lambda^{p,q}\mathfrak{p} = \Lambda^p\mathfrak{p}_- \otimes \Lambda^q\mathfrak{p}_+$. Via la formule de Matsushima, la décomposition de Lefschetz de la cohomologie d'une variété hyperbolique complexe découle de la décomposition de la représentation $\tau_{p,q}$ en irréductibles. D'après [**15**], on obtient :

$$\tau_{p,q} = \bigoplus_{k=0}^{\min(p,q)} \tau'_{p-k,q-k}, \tag{4.0.3}$$

où pour chaque couple d'entiers positifs (i,j) de somme $i+j \leqslant n$, $\tau'_{i,j}$ est une représentation irréductible.

4.1. Classification de Langlands

Commençons par quelques notations. Soit

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_0. \tag{4.1.1}$$

Alors $\mathfrak{a}_0 := \mathbb{R}H_0$ est un sous-espace de Cartan (*i.e.* abélien maximal) dans $\mathfrak{p}_0$, et le sous-groupe de Lie correspondant de G est paramétré par les éléments :

$$a_t := \exp(tH_0) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$$

où $t \in \mathbb{R}$.

Soit $\alpha \in \mathfrak{a}_0^*$ définie par $\alpha(tH_0) = t$. Alors $R(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ est un système restreint de racines de $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0)$ avec un sous-système positif $R^+(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0) = \{\alpha, 2\alpha\}$. On utilisera dorénavant l'identification :

$$\mathfrak{a}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, \qquad s\alpha \longmapsto s.$$

Soient $\mathfrak{n}_0 = (\mathfrak{g}_0)_\alpha \oplus (\mathfrak{g}_0)_{2\alpha}$ la somme des espaces propres des racines strictement positives, N le sous-groupe de Lie de G correspondant et ρ la demi-somme des racines dans $R^+(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0)$, comptées avec multiplicités. Alors $\rho = n\alpha$ (dim $(\mathfrak{g}_0)_\alpha = 2(n-1)$ et dim $(\mathfrak{g}_0)_{2\alpha} = 1$). Soit M le centralisateur de A dans K. Alors :

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \text{ et } U \in \mathrm{U}(n-1) \right\}.$$

Nous notons $P = MAN$ le sous-groupe parabolique (minimal) usuel de G. Étant donnés $\sigma \in \widehat{M}$ et $s \in \mathbb{C} \cong \mathfrak{a}^*$, l'application :

$$(\sigma \otimes e^s \otimes 1)(ma_t n) = e^{st}\sigma(m)$$

définit une représentation de P dans V_σ. Nous notons $\pi_{\sigma,s}$ l'*induite unitaire* de cette représentation *i.e.* l'action de G sur l'espace

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\sigma,s} &= L^2(G, MAN, \sigma \otimes e^s \otimes 1) \\ &:= \{ f : G \longrightarrow V_\sigma \mid f(xma_t n) = e^{-(s+\rho)t}\sigma(m)^{-1} f(x) \text{ et } f_{|K} \in L^2(K) \} \end{aligned}$$

par translation à gauche : $\pi_{\sigma,s}(g)f(h) = f(g^{-1}h)$. Remarquons que, comme K-module, chaque $\mathcal{H}_{\sigma,s}$ est isomorphe (pour tout s) à l'espace $L^2(K, M, \sigma)$ des fonctions f de carré intégrable sur K telles que $f(km) = \sigma(m^{-1})f(k)$.

Puisque $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{k}_0$ ont même rang n, le groupe G admet une *série discrète* de représentations *i.e.* des représentations irréductibles unitaires dont les coefficients matriciels sont dans L^2.

4.1.1. Représentations induites de P. — Dans cette sous-section nous revenons sur les représentations induites de P pour déterminer leurs K-types.

Puisque $\mathcal{H}_{\sigma,s}$ est $L^2(K, M, \sigma)$, vue comme K-module, le théorème de réciprocité de Frobenius nous dit que

$$\mathrm{Hom}_K(\mathcal{H}_{\sigma,s}, V_{\tau'_{p,q}}) \cong \mathrm{Hom}_M(V_\sigma, V_{\tau'_{p,q}}) \text{ pour tout } s \in \mathbb{C}.$$

On doit donc comprendre comment la représentation $\tau'_{p,q}$ se restreint à M. Ceci est classique, nous suivons ici l'article [**83**] de Pedon.

Soit $\mathfrak{h}_0$ (resp. $\mathfrak{t}_0$) la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}_0$ (resp. $\mathfrak{m}_0$) constituée des éléments diagonaux. Pour chaque entier $1 \leqslant i \leqslant n+1$, soit ε_i la forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ définie par $\varepsilon_i(\mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_{n+1})) = h_i$. Nous conservons les mêmes notations pour leurs restrictions à $\mathfrak{t}$. Les racines pour les paires $(\mathfrak{k}, \mathfrak{h})$ et $(\mathfrak{m}, \mathfrak{t})$ sont, respectivement,

$$\begin{aligned} R_K &:= R(\mathfrak{k}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}, \\ R_M &:= R(\mathfrak{m}, \mathfrak{t}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 2 \leqslant i \neq j \leqslant n\}, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

et les systèmes positifs correspondants (pour l'ordre lexicographique) sont :

$$\begin{aligned} R_K^+ &= \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}, \\ R_M^+ &= \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 2 \leqslant i < j \leqslant n\}. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Les poids de la représentation adjointe Ad de K sont les $\varepsilon_i - \varepsilon_{n+1}$, avec comme vecteur de poids correspondant e_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On en déduit que les plus hauts poids des représentations irréductibles $\Lambda^p \overline{\mathrm{Ad}}$ et $\Lambda^q \,\mathrm{Ad}$ de K sont, respectivement,

$$\mu_{\Lambda^p \overline{\mathrm{Ad}}} = -\sum_{k=n-p+1}^{n} \varepsilon_k + p\varepsilon_{n+1} \text{ et } \mu_{\Lambda^q \mathrm{Ad}} = \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k - q\varepsilon_{n+1}.$$

D'où il découle, à l'aide de [**15**, Lemme 4.9, Chapitre VI], que le plus haut poids de $\tau'_{p,q}$ est :

$$\mu_{\tau'_{p,q}} = \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k - \sum_{k=n-p+1}^{n} \varepsilon_k + (p-q)\varepsilon_{n+1}. \tag{4.1.4}$$

D'après [**6**, Théorème 4.4], on a génériquement [(1)]

$$(\tau'_{p,q})_{|M} = \sigma_{p,q} \oplus \sigma_{p-1,q} \oplus \sigma_{p,q-1} \oplus \sigma_{p-1,q-1},$$

où chaque $\sigma_{a,b}$ est une représentation irréductible de M de plus haut poids

$$\mu_{\sigma_{a,b}} = \frac{a-b}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_{n+1}) + \sum_{k=2}^{b+1} \varepsilon_k - \sum_{k=n-a+1}^{n} \varepsilon_k. \tag{4.1.5}$$

4.1.2. Série discrète. — Revenons maintenant sur les représentations de la série discrète.

Comme à la section précédente, soit $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ la sous-algèbre de Cartan constituée des matrices diagonales. Avec les notations ci-dessus,

$$R_G := R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n+1\},$$

alors que R_K et R_K^+ sont respectivement définis en (4.1.2) et (4.1.3). Le groupe de Weyl W_G (resp. W_K) est le groupe des permutations de $n+1$ (resp. n) éléments. Il y a donc $n+1$ sous-systèmes positifs de R_G qui sont compatibles avec R_K^+. On choisit

$$R_G^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n+1\}.$$

On obtient alors chaque système positif compatible de la façon suivante. Soit s_β la réflexion relative à la racine β, on pose

$$w_j = \prod_{k=j+1}^{n} s_{\varepsilon_k - \varepsilon_{n+1}} \text{ pour chaque } 0 \leqslant j \leqslant n-1, \text{ et } w_n = \mathrm{Id}\,.$$

[(1)] Ce qui signifie que l'on demande que $\sigma_{a,b} = 0$ si $\min(a,b) < 0$ ou si $\max(a,b) > n-1$.

Alors $W_K\backslash W_G = \{W_K w_j \mid 0 \leqslant j \leqslant n\}$ et les $n+1$ sous-systèmes positifs de R_G compatibles avec R_K^+ sont exactement les $w_j.R_G^+$, avec $0 \leqslant j \leqslant n$. Les sommes de racines positives sont :

$$2\delta_G = \sum_{k=1}^{n+1} (n+2-2k)\varepsilon_k, \tag{4.1.6}$$

$$2\delta_K = \sum_{k=1}^{n} (n+1-2k)\varepsilon_k. \tag{4.1.7}$$

Un résultat classique d'Harish-Chandra, *cf.* [**66**, Théorèmes 9.20 et 12.21] par exemple, affirme que les représentations de la série discrète de G sont, à équivalence près, uniquement déterminées par leur paramètre d'Harish-Chandra $w_j\lambda$, où $\lambda \in (i\mathfrak{h}_0^+)'$ est tel que $\lambda + \delta_G$ est intégral (*i.e.*, s'intègre en un caractère du tore diagonal) et $i\mathfrak{h}_0^+$ est la chambre de Weyl positives dans $i\mathfrak{h}_0$ correspondant à R_G^+. Nous notons $\pi_{w_j.\Lambda}$ la représentation de la série discrète correspondante.

Toujours d'après le [**66**, Théorème 9.20], la restriction à K de la représentation $\pi_{w_j\lambda}$ contient avec multiplicité un la représentation de plus haut poids

$$w_j\lambda + w_j\delta_G - 2\delta_K. \tag{4.1.8}$$

De plus, tout plus haut poids d'un K-type de $\pi_{w_j\lambda}$, est de la forme

$$w_j\lambda + w_j\delta_G - 2\delta_K + \sum_{\alpha\in R_G^+} n_\alpha \alpha,$$

où les n_α sont des entiers $\geqslant 0$.

Le fait suivant fait partie du "folklore" mais n'est à notre connaissance pas facile à trouver explicitement écrit dans la littérature. Dans notre cas le fait suivant peut-être vérifié à la main, la démonstration que l'on propose, valable en toute généralité, est tirée de la thèse de Pedon [2].

Fait. — Les représentations $\pi_{w_j\delta_G}$ sont exactement les représentations de la série discrète de G qui contiennent un K-type intervenant comme sous-représentation de la représentation τ_r de K pour un certain entier $0 \leqslant r \leqslant n$. De plus r doit alors être égal à n.

En effet, soit $\pi_{w_j\lambda}$ une représentation de la série discrète de G. Puisque $\lambda + \delta_G$ est intégral et dans la chambre de Weyl positive $(i\mathfrak{h}_0^+)'$, on a $\lambda + \delta_G = \sum_{\alpha\in R_G^+} m_\alpha\alpha$ avec chaque $m_\alpha \in \mathbb{N}^*$. D'un autre côté, on a par définition, $\sum_{\alpha\in R_G^+}\alpha = 2\delta_G$. Donc, $\lambda' := \lambda - \delta_G = \sum_{\alpha\in R_G^+}(m_\alpha - 1)\alpha$ appartient au réseau positif engendré par R_G^+.

Rappelons que tout plus haut poids d'un K-type de $\pi_{w_j\lambda}$ est de la forme $w_j\lambda' + w_j 2\delta_G - 2\delta_K + \sum_{\alpha\in R_G^+} n_\alpha\alpha$, où les n_α sont des entiers $\geqslant 0$.

[2] On remercie R. Parthasarathy et P.-Y. Gaillard de nous avoir envoyé des démonstrations différentes de ce fait.

Considérons maintenant la représentation τ_r pour un certain entier $0 \leqslant r \leqslant n$. Puisque $\mathfrak{p}$ se décompose en sous-espaces de racines $\mathfrak{g}_\alpha$ de dimension 1, les poids de τ_r sont toutes les sommes possibles de p racines distinctes non compactes $\alpha \in R_G \smallsetminus R_K$. En particulier $\mu_j = \sum_{\alpha \in (w_j . R_G^+) \smallsetminus R_K^+} \alpha = w_j 2\delta_G - 2\delta_K$ n'apparaît que comme plus haut poids d'une sous-représentation de τ_n, et tous les autres plus hauts poids de τ_p appartiennent à $\mu_j - \sum_{\alpha \in R_G^+} k_\alpha \alpha$, où les k_α sont des entiers $\geqslant 0$.

Il découle de tout ceci que $\pi_{w_j \lambda}$ et τ_r n'ont pas de K-type en commun, sauf lorsque $\lambda = \delta_G$ et $r = n$.

Si l'on note τ_{μ_j} la représentation irréductible de K de plus haut poids

$$\mu_j = w_j 2\delta_G - 2\delta_K.$$

Celle-ci intervient à la fois comme K-type minimal de $\pi_{w_j \delta_G}$ et comme sous-représentation de la représentation τ_n de K.

Concluons cette sous-section, en remarquant qu'un calcul simple montre que

$$\mu_j = \sum_{k=1}^{j} \varepsilon_k - \sum_{k=j+1}^{n} \varepsilon_k + (n-2j)\varepsilon_{n+1}$$

et donc que

$$\tau_{\mu_j} = \tau'_{n-j,j} \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant n.$$

Enfin, mentionnons simplement qu'on peut définir, par passage aux paramètres singuliers à partir de la construction d'Harish-Chandra, des limites non dégénérées de série discrète (Knapp [**66**], Knapp-Zuckerman [**65**]). Ce sont des représentations unitaires *tempérées* de G.

4.1.3. Caractères infinitésimaux et action du Casimir. — Commençons par remarquer que [**66**, Théorème 9.20] affirme qu'une représentation $\pi_{w_j \Lambda}$ dans la série discrète de G admet un caractère infinitésimal égal à Λ (dans la paramétrisation d'Harish-Chandra rappelée au premier chapitre). En particulier, les $\pi_{w_j \delta_G}$ sont exactement les représentations de la série discrète de G qui ont un caractère infinitésimal trivial. On a donc :

$$\pi_{w_j \delta_G}(C) = 0,$$

où C désigne le Casimir.

La formule de Plancherel, démontrée par Harish-Chandra, spécialisée dans le cas du groupe G implique que le laplacien de Hodge-de Rham n'a pas de valeurs propres *discrètes* autre que la valeur propre 0 (avec multiplicité infinie) sur les formes différentielles de degré n, *cf.* [**83**]. On peut en particulier en déduire que le seul degré où le groupe de cohomologie L^2 réduite de X_G est non trivial est le degré n. Ce théorème peut aussi se démontrer à l'aide de méthodes purement géométriques comme celles développées dans le chapitre 14 de la deuxième partie, cette approche est due à Donnelly et Fefferman.

Nous allons maintenant déterminer les caractères infinitésimaux des représentations induites du paraboliques $P = MAN$. Soit $\mathfrak{t}$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}$ constituée des matrices diagonales. D'après [**66**, Proposition 8.22], si σ admet un caractère infinitésimal Λ_σ la représentation $\pi_{\sigma,s}$ admet un caractère infinitésimal égal à

$$\Lambda_\sigma + s$$

par rapport à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$.

Soit μ_σ le plus haut poids de σ et $2\delta_M = \sum_{k=2}^n (n+2-2k)\varepsilon_k$ la somme des racines dans R_M^+. Alors $\Lambda_\sigma = \mu_\sigma + \delta_M$.

Le Lemme 12.28 de [**66**] implique que

$$\pi_{\sigma,s}(C) = (\langle \Lambda_\sigma + s, \Lambda_\sigma + s\rangle - \langle \delta_G, \delta_G\rangle)\,\mathrm{Id},$$

où $\langle .,.\rangle$ est le produit scalaire induit par la forme de Killing B définie en (4.0.1). Un calcul facile montre alors que

$$\pi_{\sigma,s}(C) = -(n^2 - s^2 - \langle \mu_\sigma, \mu_\sigma + 2\delta_M\rangle)\,\mathrm{Id}\,.$$

En particulier, à l'aide de (4.1.5), on obtient :

$$\pi_{\sigma_{p,q},s}(C) = -((n-p-q)^2 - s^2)\,\mathrm{Id}\,. \tag{4.1.9}$$

Remarquons (voir [**83**] pour plus de détails) qu'à l'aide de la formule de Plancherel pour G, on peut alors démontrer le théorème classique suivant.

Théorème 4.1.1. — *Si pour* $0 \leqslant p+q \leqslant 2n$, *on désigne par* $\mathrm{spec}(\Delta_{p,q})$ *le spectre* L^2 *du laplacien de Hodge-de Rham sur les formes différentielles de type* (p,q) *sur l'espace hyperbolique complexe de dimension* n. *Alors,*

$$\mathrm{spec}(\Delta_{p,q}) = \begin{cases} [(n-p-q)^2, +\infty[& si\ p+q \neq n, \\ \{0\} \cup [1, +\infty[& si\ p+q = n. \end{cases}$$

À l'aide des deux familles de représentations de G que l'on a décrite ci-dessus, on peut décrire toutes les représentations admissibles de G. On montre plus précisément (*cf.* [**66**]) :

***Théorème 4.1.2* (Langlands, Knapp et Zuckerman)**. — *Soit* σ *une représentation irréductible de* M *et soit* s *un nombre complexe de partie réelle* > 0. *Alors la représentation induite* $\pi_{\sigma,s}$ *admet un unique quotient irréductible, son* quotient de Langlands *:* $J_{\sigma,s}$.

Chaque représentation irréductible admissible de G *est soit une représentation de la série discrète de* G, *soit une limite non dégénérée de série discrète, soit une induite* $\pi_{\sigma,s}$ *où* $s \in i\mathbb{R}$ *(et l'induite est irréductible), soit une représentation de la forme* $J_{\sigma,s}$ *comme ci-dessus. Et ces représentations sont deux à deux non équivalentes.*

4.2. Groupe dual

Dans cette section nous expliquons la construction du *groupe dual* de Langlands associé à G.

Tout d'abord, le groupe $G\times_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ obtenu à partir de G par extension des scalaires à $\mathbb{C}$ n'est autre que $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$. Son groupe dual est le groupe complexe $\widehat{G}=\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$, nous le notons aussi ${}^{L}(G/\mathbb{C})$. (Pour les motivations de cette définition voir [**72**] ; voir aussi le cas des groupes orthogonaux, chapitre 6.)

Le groupe dual ${}^{L}G={}^{L}(G/\mathbb{R})$ du groupe *réel* G est un produit semi-direct $\widehat{G}\rtimes\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$; $\widehat{G}$ est le groupe $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$, $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ opère par automorphismes *holomorphes* ($\equiv$ algébriques) et la construction tient compte de la structure de G comme groupe réel.

Nous considérons d'abord un groupe différent, le groupe $H=\mathrm{U}(p+1,p)$ ($n=2p$ pair) ou $H=\mathrm{U}(p+1,p+1)$ ($n=2p+1$ impair). Le groupe réel H est *quasi-déployé*, c'est-à-dire qu'il existe un sous-groupe de Borel $B\subset H\times_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ défini sur $\mathbb{R}$. Si par exemple n est impair, la matrice

$$J=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}$$

définissant la forme hermitienne est semblable à la matrice J_* n'ayant que des 1 sur l'anti-diagonale. Le groupe $H=\mathrm{U}(J)$ est donc isomorphe à

$$\mathrm{U}(J_*)=\{g\in\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})\mid {}^{t}\overline{g}J_*g=J_*\}.$$

La conjugaison complexe associée est

$$\tau : g\longmapsto J_*{}^{t}\overline{g}^{-1}J_* \ ;$$

J_* étant antidiagonale, τ laisse globalement invariante le sous-groupe de Borel $B\subset\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures. Même argument pour n pair (avec la même matrice J_*).

Soit $R(H\times_{\mathbb{R}}\mathbb{C},T)$ l'ensemble des racines positives de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ définies par B, et Δ l'ensemble des racines simples ; $T=(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ est le tore maximal diagonal. La conjugaison complexe τ opère sur R et Δ par ${}^{\tau}\alpha(t)=\overline{\alpha(\tau t)}$, $(t\in T)$. Si $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ sont les racines simples, τ opère par $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\mapsto(\alpha_n^{-1},\dots,\alpha_1^{-1})$.

Puisque $H\times_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=G\times_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, le groupe $\widehat{H}$ est toujours $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$. On fait opérer la conjugaison complexe $\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ de façon holomorphe, sur $\widehat{H}$, de la façon suivante :

(a) σ laisse globalement invariants $\widehat{T}$, $\widehat{B}$, où $\widehat{T}$ est le tore diagonal, $\widehat{B}$ est le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures.

(b) Soient $\widehat{R}$, $\widehat{\Delta}$ définis comme ci-dessus mais relativement à $\widehat{T}$. Alors σ opère par l'action précédente sur $\widehat{R}$, $\widehat{\Delta}$.

La condition suivante est plus délicate. Choisissons un *épinglage* de $\widehat{B}$, c'est-à-dire un choix de matrices nilpotentes dans $M_{n+1}(\mathbb{C}) = \mathrm{Lie}(\widehat{G})$ associées aux racines simples. On choisira

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \cdots \quad X_n = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

(d) σ préserve (globalement) $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

On peut vérifier (*cf.* Borel [**13**]) que σ est uniquement défini par le choix des X_i. Pour notre choix, σ est alors de la forme suivante :

Lemme 4.2.1. — *Pour $g \in \widehat{G} = \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$,*

$$\sigma(g) = w_0{}^t g^{-1} w_0^{-1}, \qquad \textit{où} \quad w_0 = \begin{pmatrix} & & & & (-1)^n \\ & & & \cdots & \\ & & 1 & & \\ & -1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Noter que

$$w_0^2 = (-1)^n. \tag{4.2.1}$$

Revenons enfin à G. Le groupe G est *forme intérieure* de H, *i.e.*, la conjugaison complexe σ_G de $G(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$ définie par G est conjuguée à $\tau = \sigma_H$. (Si $J_{1,n}$ est la matrice de la forme hermitienne définissant G, la première est $g \mapsto J_{1,n}{}^t\overline{g}^{-1} J_{1,n}$ et la seconde est $g \mapsto J^t\overline{g}^{-1}J$.) Par définition (Langlands [**72**], Borel [**13**]), le groupe dual ${}^LG$ s'identifie à ${}^LH = \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ où σ opère comme dans le Lemme 4.2.1.

Nous aurons besoin de quelques notions simples relatives aux groupes duaux. Notons que ${}^LG$ est par construction un groupe réductif complexe (non connexe). Un sous-groupe parabolique ${}^LP$ de ${}^LG$ est un sous-groupe $\widehat{P} \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ où $\widehat{P} \subset \widehat{G}$ est un sous-groupe parabolique. Il revient au même de dire que c'est le normalisateur dans ${}^LG$ de $\widehat{P}$ où $\widehat{P} \subset \widehat{G}$ est un sous-groupe parabolique globalement invariant par σ.

Rappelons qu'un sous-groupe parabolique $\widehat{P}$ de $\widehat{G}$ est conjugué à un unique parabolique *standard*, *i.e.*, contenant $\widehat{B}$. Il en résulte qu'un sous-groupe parabolique ${}^LP$ est conjugué à un unique parabolique contenant ${}^LB = \widehat{B} \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$.

Enfin soit P_0 un sous-groupe parabolique de G (donc défini sur $\mathbb{R}$). Alors $P = P_0 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ défini sur $\mathbb{R}$. La classe de conjugaison de P, en particulier, est définie sur $\mathbb{R}$. On en déduit [**13**] qu'on associe à P un unique sous-groupe parabolique *standard* ${}^LP$ contenant ${}^LB$. Pour notre groupe $G = \mathrm{U}(n,1)$ on vérifie alors :

Lemme 4.2.2. — *Les paraboliques standard* ${}^LP \supset^L B$ *provenant de* G *sont :*

(1) *Le groupe dual* ${}^LG$.

(2) *Le normalisateur de* $\widehat{P} \cong \mathbb{C}^* \times \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^* \ltimes \widehat{N}$ *(où* $\widehat{N}$ *est le radical unipotent).*

Dans (2) $\widehat{P}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par blocs de la taille indiquée. Un parabolique ${}^LP$ *provient de* G si le parabolique standard associé a cette propriété. Le Lemme se déduit de Borel [**13**, § 3]. Langlands appelle de tels paraboliques « pertinents » (*relevant*).

4.3. Paramètres de Langlands

Un *paramètre de Langlands* pour G est un homomorphisme de groupes $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^LG$ tel que

(4.3.1) Le morphisme φ rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} W_{\mathbb{R}} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & {}^LG \arrow[dl] \\ & \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) & \end{tikzcd}$$

(4.3.2) L'image $\varphi(W_{\mathbb{C}}) = \varphi(\mathbb{C}^*) \subset \widehat{G} = \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ est formée d'éléments semi-simples.

(4.3.3) Si ${}^LP \subset {}^LG$ est un parabolique contenant $\varphi(W_{\mathbb{R}})$, ${}^LP$ provient de G.

Noter que (4.3.2) est équivalent à

$$\varphi_{|W_{\mathbb{C}}} : W_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C}) \text{ est semi-simple.} \tag{4.3.4}$$

On identifie deux paramètres conjugués par $\widehat{G}$.

Nous allons décrire tous les paramètres de Langlands pour G. Il sera utile d'abord d'expliciter le changement de base dans cette situation.

Soit $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^L G$ un paramètre de Langlands. Alors φ donne par restriction un paramètre $\varphi_0 : W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^* \to \widehat{G} = \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ qui définit donc (chapitre 3) une représentation de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$.

Lemme 4.3.1. — *Si $\varphi_0 : W_{\mathbb{C}} \to \widehat{G}$ provient par restriction d'un paramètre pour G.*

(1) *La représentation φ_0 de $\mathbb{C}^*$ est isomorphe à $z \mapsto \widetilde{\varphi_0(\overline{z})} = {}^t\varphi_0(\overline{z})^{-1}$.*

(2) *La représentation π_0 de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ associée est isomorphe à sa conjuguée $\pi_0 \circ \sigma_G$, où σ_G est la conjugaison complexe définie par G.*

Démonstration. — La propriété 2. se déduit de 1. Rappelons que σ_G et σ_H sont conjugués, H étant la forme intérieure décrite dans la section précédente. Mais H a un sous-groupe de Borel, défini par

$$B_H = \{g \in B = B_{\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})} \mid {}^t\overline{g} J_* g = J_*\}$$

(section 4.2). Son tore maximal s'identifie à

$$\{z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^* \mid z_1 \overline{z}_{n+1} = z_2 \overline{z}_n = \cdots = 1 \text{ (et } z_{p+1}\overline{z}_{p+1} = 1 \text{ si } n = 2p+1)\}.$$

et la conjugaison complexe sur le tore maximal $T \cong (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ de B est donnée par $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \mapsto (\overline{z}_{n+1}^{-1}, \ldots, \overline{z}_1^{-1})$. Si $\varphi_0 = \chi_1 \oplus \cdots \oplus \chi_{n+1}$ vérifie 1., on peut réordonner les caractères de sorte que $\chi_{n+1}(z) = \chi_1(\overline{z})^{-1}, \ldots, \chi_1(z) = \chi_{n+1}(\overline{z})^{-1}$. Alors $\pi_0 \cong \pi_0 \circ \sigma_G$ par transport de structure.

La propriété 1. résulte d'un calcul simple. Écrivons $\varphi(j) = (h, \sigma) \in \widehat{G} \times \{\sigma\}$. La définition de ${}^L G$ comme produit semi-direct donne

$$(h,\sigma)^{-1} = (w_0 {}^t h w_0^{-1}, \sigma);$$

on utilise les identités

$$ {}^t w_0 = (-1)^n w_0 = w_0^{-1}. \tag{4.3.5}$$

Alors,

$$\varphi(\overline{z}) = \varphi(jzj^{-1}) = (h w_0 {}^t\varphi(z)^{-1} w_0^{-1} h^{-1}, 1)$$

comme il résulte de l'expression du produit semi-direct et des égalités précédentes. D'où le point 1.

Proposition 4.3.2. — *Soit φ une paramètre de Langlands dont l'image n'est contenue dans aucun parabolique propre de ${}^L G$. Alors φ est à conjugaison près de la forme*

$$z \longmapsto ((z/\overline{z})^{p_1}, \ldots, (z/\overline{z})^{p_{n+1}})$$

où $p_1, \ldots, p_{n+1} \in \frac{n}{2} + \mathbb{Z}$, $p_i \neq p_j$;

$$j \longmapsto (w_0^{-1} = (-1)^n w_0, \sigma).$$

Démonstration. — Soit $\varphi_0 = \varphi_{|\mathbb{C}^*}$. On peut supposer que $\varphi_0(\mathbb{C}^*) \subset \widehat{T}$. D'après le premier point du Lemme 4.3.1 on peut supposer

$$\varphi_0(z) = (\chi_1(z), \ldots, \chi_{n+1}(z))$$

où $\chi_{n+2-i}(z) = \chi_i(\overline{z})^{-1}$. Notons comme ci-dessus $\varphi(j) = (h, \sigma)$, et considérons la restriction de φ_0 à $\mathbb{R}_+^*$. Nous notons u un élément de $\widehat{T} = (\mathbb{C}^*)^{n+1}$. Quitte à réordonner les χ_i, on peut supposer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\varphi_0(x) = (x^{s_1}, x^{s_1}, \ldots, x^{s_2}, x^{s_2}, \ldots, \ldots x^{s_r}, x^{-s_r}, \ldots, x^{-s_1}) =: u$$

où les s_i sont distincts et $s_i \neq 0$ si $i < r$ (si s_r est nul, on ne sépare pas les occurrences de $x^{s_r} = 1$ et de x^{-s_r}).

On a $\sigma u \sigma^{-1} = w_0 {}^t u^{-1} w_0^{-1} = w_0 u^{-1} w_0^{-1} = u$. La conjugaison par $(1, \sigma) \in {}^L G$ fixe donc u. Puisque x est réel, $\varphi(j)\varphi_0(x)\varphi(j)^{-1} = \varphi_0(x)$. Donc $(h, 1)$ commute à u. Si $r > 1$, il en résulte que h appartient au parabolique propre de $\widehat{G}$ de type $(n_1, n_2, \ldots, n_r, n_r, \ldots, n_1)$ (un seul bloc médian si $s_r = 0$). Puisque celui-ci est normalisé par l'action de σ, on voit que $\varphi_0(\mathbb{C}^*)$, et $\varphi(j)$ appartiennent à un parabolique propre de ${}^L G$. On en déduit donc que tous les caractères χ_i sont de la forme $(z/\overline{z})^{p_i}$ avec $p_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Soit alors $z \in \mathbb{C}^*$ et $u = \varphi_0(z)$. Puisque ${}^t u^{-1} = u^{-1}$, l'argument précédent montre que $\mathrm{Ad}(hw_0)u^{-1} = u^{-1}$. Supposons par exemple que $p_1 = p_2 = \cdots = p_r$, les autres p_i étant différents. On peut supposer φ_0 de la forme

$$(\ldots, (z/\overline{z})^{p_1}, \ldots, (z/\overline{z})^{p_1}, \ldots)$$

les occurrences de $(z/\overline{z})^{p_1}$ étant symétriques par rapport à $\frac{n+2}{2}$. Alors $\mathrm{Ad}(hw_0)$ normalise un parabolique de $\widehat{G}$ qui s'étend en un parabolique de ${}^L G$, et on en déduit de nouveau que φ passe par un parabolique propre.

Vérifions la condition de parité sur les p_i. Rappelons qu'avec la notation de Langlands pour les caractères complexes (Ch. 3) $(z/\overline{z})^p$ ($p \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$) est égal à $(-1)^{2p}$ pour $z = -1$, et que $\varphi(j) = (h, \sigma)$ opère sur $\widehat{T}$ par $\mathrm{Ad}(hw_0)$. Soit $u = \varphi_0(z) = ((z/\overline{z})^{p_1}, \ldots, (z/\overline{z})^{p_{n+1}})$. On a vu que $\mathrm{Ad}(hw_0)u = u$; puisque φ_0 est un caractère régulier, ceci implique maintenant que $\mathrm{Ad}(hw_0)u = u$ pour tout $u \in \widehat{T}$, donc $hw_0 \in \widehat{T}$; écrivons $h = vw_0^{-1}$ où $v \in \widehat{T}$. Alors $\varphi(j) = (vw_0^{-1}, \sigma)$ et

$$\begin{aligned}\varphi(j^2) &= (vw_0^{-1}, \sigma)(vw_0^{-1}, \sigma) = (vw_0^{-1} w_0 v^t w_0 w_0^{-1}, 1)\\ &= ((-1)^n, 1)\end{aligned}$$

– on utilise de nouveau (4.3.5). Mais $j^2 = -1$ et la remarque précédente implique $p_i \equiv \frac{n}{2} \pmod 1$.

Enfin l'égalité, vraie pour $u \in \widehat{T}$:

$$(u, 1)(w_0^{-1}, \sigma)(u^{-1}, 1) = (u, 1)(w_0^{-1} w_0 u w_0^{-1}, \sigma) = (u^2 w_0^{-1}, \sigma)$$

implique qu'à conjugaison près (par $\widehat{T}$, donc sans changer φ_0) $\varphi(j)$ est de la forme indiquée.

La proposition suivante complète la description des paramètres de Langlands pour G.

Proposition 4.3.3. — *Soit φ un paramètre de Langlands pour G dont l'image est contenue dans le parabolique de type $(1, n-1, 1)$. Alors φ est à conjugaison près de la forme*

$$\begin{aligned} z &\longmapsto \big(\chi(z), (z/\overline{z})^{p_1}, \dots, (z/\overline{z})^{p_{n-1}}, \chi(\overline{z})^{-1}\big) \\ j &\longmapsto \big(\big(\begin{smallmatrix} & & \varepsilon_1 \\ & w_0 & \\ \varepsilon_2 & & \end{smallmatrix}\big), \sigma\big), \quad \varepsilon_1\varepsilon_2 = \chi(-1) \end{aligned}$$

où χ est un caractère arbitraire de $\mathbb{C}^*$ et les p_i sont tous disjoints et appartiennent à $\frac{n}{2} + \mathbb{Z}$.

Démonstration. — En effet l'image de φ_0 est contenue à conjugaison près dans $\mathbb{C}^* \times \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$, sur lequel σ opère de façon analogue à l'action précédente (sur le bloc médian) et en permutant les deux facteurs $\mathbb{C}^*$. On est alors ramené au cas précédent. Les détails sont laissés au lecteur.

On dira d'un paramètre de Langlands φ qu'il est *discret* s'il est comme dans la Proposition 4.3.2. Et on dira d'un paramètre de Langlands qu'il est *tempéré* s'il est borné. Remarquons que les paramètres de Langlands tempérés sont

(1) les paramètres discrets et
(2) les paramètres de la Proposition 4.3.3 avec χ unitaire.

4.4. Classification et paramètres de Langlands

La classification de la série discrète de G a été rappelé au § 4.1.2. On va en déduire :

***Théorème 4.4.1* (Langlands)**

(1) *À tout paramètre de Langlands φ pour G est associé un ensemble fini $\Pi(\varphi)$ de représentations admissibles irréductibles de G.*

(2) *Les $\Pi(\varphi)$ correspondant à tous les paramètres (à conjugaison près) sont disjoints, et leur réunion est le dual admissible de G.*

Soit en effet φ un paramètre discret (Proposition 4.3.2). Notons T_c le tore diagonal $\mathrm{U}(1)^{n+1}$ de G. Soit Λ le réseau des caractères de T_c ; donc $\Lambda = \mathbb{Z}^{n+1}$; on peut considérer $(p_1, \dots, p_{n+1})$ comme un élément de $\frac{1}{2}\Lambda$. De plus $\delta_G = \big(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \dots, -\frac{n}{2}\big)$ (*cf.* (4.1.6)) ; toujours d'après la Proposition 4.3.2, $p \in \Lambda + \delta_G$. D'après le § 4.1.2, on peut lui associer une représentation de la série discrète.

Par ailleurs $(p_1, \dots, p_{n+1})$ n'est défini qu'à l'ordre près, donc modulo le groupe de Weyl $W_G = \Sigma_{n+1}$; et deux choix d'ordre conjugués par $W_K = \Sigma_n$ définissent la même représentation. On associe donc dans ce cas à φ l'ensemble de $(n+1)$ représentations correspondantes à l'orbite de W_G (modulo conjugaison par W_K). C'est le *L-paquet* associé à φ.

Si au contraire φ est comme dans la Proposition 4.3.3, il définit de même une représentation τ du groupe U$(n-1)$ dont le paramètre d'Harish-Chandra est $(p_1,\dots,p_{n-1})$. Choisissons χ (en le remplaçant au besoin par $\chi(\overline{z})^{-1}$) de la forme

$$\chi(z)=z^{\alpha}(\overline{z})^{\beta} \text{ avec } \operatorname{Re}(\alpha+\beta)\geqslant 0.$$

Le groupe U$(n-1)\times\mathbb{C}^*$ est le sous-groupe de Levi du parabolique minimal P de G. On distingue alors deux cas :

(1) Si $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0$, la représentation $\operatorname{ind}_P^G(\tau\otimes\chi)$ a un unique quotient irréductible, son quotient de Langlands (section 4.1) $J(\tau,\chi)$. On définit alors $\Pi(\varphi)=\{J(\tau,\chi)\}$.

(2) Supposons $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)=0$: χ est donc unitaire, ainsi que la représentation induite. Celle-ci est en fait de longueur 1 ou 2 selon des résultats généraux de Knapp et Zuckerman [**65**] et ses composantes sont de multiplicité 1. L'ensemble $\Pi(\varphi)$, de cardinal 1 ou 2, est l'ensemble de ces composantes.

Remarque. — Dans le cas 2, et si $\operatorname{ind}_P^G(\tau\otimes\chi)$ est réductible, elle se scinde en deux représentations qui sont des limites de séries discrètes et qui ont une description analogue aux représentations de la série discrète (§ 4.1.2). Nous ne donnons pas de description plus explicite de celles-ci, pour la raison suivante. Dans la section suivante, nous calculons la valeur propre de l'opérateur de Casimir dans une représentation induite contenant un K-type $\Lambda^p\mathfrak{p}^+\otimes\Lambda^q\mathfrak{p}^-$ associé aux formes différentielles. Dans le chapitre 8 nous vérifions pour les induites de caractères *unitaires* que ces valeurs propres vérifient trivialement les bornes de la Conjecture A(1). Par conséquent, pour démontrer celle-ci, nous n'avons pas à nous soucier des induites de caractères unitaires ou de leurs sous-modules.

Décrivons maintenant les caractères infinitésimaux des représentations obtenues. Dans le cas des séries discrètes le caractère infinitésimal, d'après Harish-Chandra est simplement $\lambda=(p_1,\dots,p_{n+1})\in\mathbb{C}^n\cong\mathfrak{a}+\mathfrak{t}$.

Considérons maintenant les représentations induites ; soit $\chi(z)=z^{\alpha}(\overline{z})^{\beta}$, avec $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)\geqslant 0$. Soit $M=\mathrm{U}(n-1)\times\mathrm{U}(1)$ le groupe défini au § 4.1.3 et σ la représentation induisante de M. Le caractère infinitésimal de σ est alors

$$\lambda_\sigma=(p_1,\dots,p_{n-1},\alpha-\beta)$$

et son plus haut poids

$$\mu_\sigma=\lambda_\sigma-\delta_M=\Big(p_1-\frac{n-2}{2},p_2-\frac{n-4}{2},\dots,p_{n-1}+\frac{n-2}{2},\alpha-\beta\Big)$$

où on a ordonné les p_i par $p_1>p_2>\cdots>p_n$.

À conjugaison près par G, l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}+\mathfrak{t}$ s'identifie aux matrices de la forme

$$H = \begin{pmatrix} X+\sqrt{-1}\,Y & & & & \\ & \sqrt{-1}\,X_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sqrt{-1}\,X_{n-1} & \\ & & & & -X+\sqrt{-1}\,Y \end{pmatrix}.$$

La valeur du caractère infinitésimal sur une telle matrice est alors

$$\lambda_\pi(H) = \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{n-1} p_j X_j + \sqrt{-1}\,(\alpha-\beta)Y + sX$$

où $s=\alpha+\beta$. Pour la forme duale à la forme de Killing (4.0.1), on a alors

$$\langle \lambda_\pi, \lambda_\pi \rangle = s^2 + (\alpha-\beta)^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} p_j^2. \tag{4.4.1}$$

Remarquons que les paramètres de Langlands discrets correspondent exactement aux L-paquets contenant une représentation discrète (et dans ce cas toutes les représentations dans le L-paquet sont discrètes). De même, les paramètres de Langlands tempérés correspondent exactement aux L-paquets contenant une représentation tempérée (et dans ce cas toutes les représentations dans le L-paquet sont tempérées).

On peut maintenant poser la question de la fonctorialité. Un paramètre de Langlands $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^L G$ pour G induit un paramètre de Langlands $\varphi_{|\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \to \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ pour $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$. Or les paramètres de Langlands de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$ paramètrent les représentations admissibles. On obtient donc une application naturelle ϕ de l'ensemble des L-paquets de G dans l'ensemble des représentations admissibles de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$. Et le problème de fonctorialité, ici de changement de base, s'énonce comme suit.

***Question* (Fonctorialité).** — L'application ϕ envoie-t-elle tout L-paquet contenant une représentation automorphe vers une représentation automorphe de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$?

Une réponse positive à cette question permettrait d'exploiter toute approximation de la Conjecture de Ramanujan sur $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$. Néanmoins, la réponse à la question ci-dessus est fausse en général comme on peut facilement le déduire du Théorème 6.5.1 (Ch. 6).

Malgré cela, on peut espérer que l'application ϕ envoie de nombreux L-paquets automorphes de G sur des représentations automorphes de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$. On reviendra sur cette question au chapitre 8.

Enfin, et bien que nous n'en ayons pas besoin, remarquons que l'on connaît le dual unitaire de G (*cf.* [**68**]). Premièrement tout L-paquet contenant une représentation unitaire n'est constitué que de représentations unitaires. On peut donc parler de *L-paquet unitaire*. La description du dual unitaire de G est difficile, nous utiliserons au chapitre 6 la description qu'en font Knapp et Speh dans [**64**]. Il en résulte en particulier que les L-paquets Π_φ où le paramètre φ est

- tempéré, ou
- contient la représentation $J_{\sigma_{a,b},s}$ pour $0 < s \leqslant \frac{n-(a+b)}{2}$,

sont unitaires. Au contraire, si $s > \frac{n-(a+b)}{2}$, la représentation $J_{\sigma_{a,b},s}$ n'est pas unitaire. Nous donnons la description complète du dual unitaire de U$(2,1)$ au § 4.6.

4.5. K-types des représentations induites, action du Casimir

Soit φ un paramètre de Langlands définissant une représentation induite, celle-ci est donc paramétrée par les données $(p_j)_{j\leqslant n-1}$, α, β. Soit I_φ la représentation induite et J_φ son quotient de Langlands. La représentation I_φ ne nous intéresse que si

$$\mathrm{Hom}_K(I_\varphi, \Lambda^p\mathfrak{p}_+ \otimes \Lambda^q\mathfrak{p}_-) = \mathrm{Hom}_M(\sigma, \Lambda^p\mathfrak{p}_+ \otimes \Lambda^q\mathfrak{p}_-) \neq 0.$$

D'après le § 4.1.1 il existe alors un entier $k \in [0, \min(p,q)]$ tel que

$$\mu_\sigma = \left(p_1 - \frac{n-2}{2}, \dots, p_{n-1} + \frac{n-2}{2}, \alpha - \beta\right) \quad (= (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, \alpha - \beta))$$

soit de la forme

$$(\underbrace{1, \dots 1}_{b \text{ termes}}, 0 \dots 0, \underbrace{-1, \dots -1}_{a \text{ termes}}, a - b)$$

et (a,b) de la forme (π, ρ), $(\pi - 1, \rho)$, $(\pi, \rho - 1)$ ou $(\pi - 1, \rho - 1)$ avec

$$(\pi, \rho) = (p - k, q - k).$$

On a donc

$$\alpha - \beta = a - b.$$

En utilisant les identités

$$p_\sigma = \mu + \delta_K \quad (\text{où } p = (p_1, \dots p_{n-1}, \alpha - \beta))$$

et

$$\langle \delta_K, \delta_K \rangle - \langle \delta_G, \delta_G \rangle = -n^2$$

un calcul simple donne alors :

Proposition 4.5.1. — *La représentation J_φ intervient dans le spectre des (p,q)-formes si et seulement s'il existe un entier $k \in [0, \min(p,q)]$ tel que*

(1) $\mu_1 = \dots = \mu_{q-k} = 1$, $\mu_{q-k+1} = \dots = \mu_{n-p+k-1} = 0$, $\mu_{n-p+k} = \dots = \mu_{n-1} = -1$ *et* $\alpha - \beta = p - q$ *et dans ce cas*

$$J_\varphi(C) = -((n - p - q + 2k)^2 - (\alpha + \beta)^2),$$

ou bien

(2) $k \leqslant p-1$, $\mu_1 = \cdots = \mu_{q-k} = 1$, $\mu_{q-k+1} = \cdots = \mu_{n-p+k} = 0$, $\mu_{n-p+k+1} = \cdots = \mu_{n-1} = -1$ *et* $\alpha - \beta = (p-q-1)$ *et dans ce cas*

$$J_\varphi(C) = -((n-p-q+2k+1)^2 - (\alpha+\beta)^2),$$

ou bien

(3) $k \leqslant q-1$, $\mu_1 = \cdots = \mu_{q-k-1} = 1$, $\mu_{q-k} = \cdots = \mu_{n-p+k-1} = 0$, $\mu_{n-p+k} = \cdots = \mu_{n-1} = -1$ *et* $\alpha - \beta = (p-q+1)$ *et dans ce cas*

$$J_\varphi(C) = -((n-p-q+2k+1)^2 - (\alpha+\beta)^2),$$

ou bien

(4) $k \leqslant p-1$, $k \leqslant q-1$, $\mu_1 = \cdots = \mu_{q-k-1} = 1$, $\mu_{q-k} = \cdots = \mu_{n-p+k} = 0$, $\mu_{n-p+k+1} = \cdots = \mu_{n-1} = -1$ *et* $\alpha - \beta = (p-q)$ *et dans ce cas*

$$J_\varphi(C) = -((n-p-q+2k+2)^2 - (\alpha+\beta)^2).$$

4.6. Représentations de $\mathrm{U}(2,1)$

Dans cette section, nous détaillons la classification des représentations de $\mathrm{U}(2,1)$, le cas dont nous aurons le plus besoin dans la suite. Dans cette section $G = \mathrm{U}(2,1)$. Si $\chi \in \mathrm{Hom}(MA, \mathbb{C}^*)$, il existe u, $v \in \mathbb{C}^*$ uniques vérifiant $u - v \in \mathbb{Z}$ et un unique entier $r \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\chi\left(\begin{pmatrix} e^t e^{i\theta} & & \\ & e^{i\eta} & \\ & & e^{-t}e^{i\theta} \end{pmatrix}\right) = e^{(u+v)t} e^{i(u-v)\theta} e^{ir(\eta+2\theta)}.$$

Nous noterons $\chi = (u, v, r)$. (3)

Cette fois l'ensemble des morphismes admissibles se scinde en deux familles (Propositions 4.3.2 et 4.3.3).

(1) Les morphismes de la forme :

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} (z/\overline{z})^a & & \\ & (z/\overline{z})^b & \\ & & (z/\overline{z})^c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(j) = \left(\begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \sigma\right)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $a \geqslant b \geqslant c$.

(3) La paramétrisation que l'on adopte ici est légèrement différente de celle des sections précédentes. Nous adoptons en effet la paramétrisation de Rogawski dans [**86**] dont nous utiliserons les résultats par la suite. Le lecteur constatera qu'il n'est néanmoins pas difficile de se raccrocher aux résultats des sections précédentes.

(2) Les morphismes de la forme :

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} z^u \overline{z}^v & & \\ & \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^\mu & \\ & & z^{-v}\overline{z}^{-u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(j) = \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (-1)^{u-v} \end{pmatrix}, \sigma \right)$$

avec $\mu \in \mathbb{Z}$, $u, v \in \mathbb{C}$, $u - v \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Re}(u+v) \geqslant 0$ et si $u + v = 0$ alors $u \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. [4]

Décrivons la correspondance de Langlands.

Premier cas : Le paramètre φ est dans la première famille.

Premier sous-cas : $a > b > c$. Alors (nous adoptons ici les notations de [**86**]) :

$$\Pi_\varphi = \{D_\varphi, D_\varphi^+, D_\varphi^-\}$$

est le L-paquet *discret* (et donc *unitaire*) constitué des représentations de la série discrète ayant pour caractère infinitésimal

$$\chi_\varphi = (a - b, b - c, b).$$

Deuxième sous-cas : $a > b = c$. Alors :

$$\Pi_\varphi = \{\pi_\varphi^1, \pi_\varphi^2\}$$

est le L-paquet *tempéré* (et donc *unitaire*) composé des constituants irréductibles de l'induite unitaire du caractère

$$\chi_\varphi^+ = (b - a, a - c, a).$$

On a numéroté ces constituants de façon à ce que π_φ^1 soit un constituant de l'induite unitaire du caractère

$$\chi_\varphi^- = (a - c, c - b, c).$$

Troisième sous-cas : $a = b > c$. Alors :

$$\Pi_\varphi = \{\pi_\varphi^1, \pi_\varphi^2\}$$

est le L-paquet *tempéré* (et donc *unitaire*) composé des constituants irréductibles de l'induite unitaire du caractère χ_φ^- et numérotés de façon à ce que π_φ^1 soit un constituant de l'induite unitaire du caractère χ_φ^+.

Quatrième sous-cas : $a = b = c$. Alors :

$$\Pi_\varphi = \{i_G(\chi_\varphi)\}$$

est le L-paquet *tempéré* (et donc *unitaire*) constitué de l'induite unitaire (qui est irréductible) du caractère χ_φ.

Deuxième cas : Le paramètre φ est dans la seconde famille.

[4] Le cas où $u \in \mathbb{Z}$ est déjà décrit dans (1).

Premier sous-cas : $u, v \in \mathbb{Z}$ et $u \leqslant 0 < v$. Alors l'induite unitaire du caractère

$$\chi_\varphi = (u, v, \mu)$$

a un unique quotient irréductible que l'on note J_φ (attention ce n'est pas tout à fait la notation de [**86**]) et :

$$\Pi_\varphi = \{J_\varphi\}.$$

Ce L-paquet n'est *pas tempéré* et est *unitaire si et seulement si* $u + v = 1$.

Deuxième sous-cas : $u, v \in \mathbb{Z}$ et $v \leqslant 0 < u$. Alors l'induite unitaire du caractère χ_φ a un unique quotient irréductible que l'on note J_φ et :

$$\Pi_\varphi = \{J_\varphi\}.$$

Ce L-paquet n'est *pas tempéré* et est *unitaire si et seulement si* $u + v = 1$.

Troisième sous-cas : $u, v \in \mathbb{Z}$ et $u, v > 0$. Alors l'induite unitaire du caractère χ_φ a un unique quotient irréductible que l'on note F_φ et :

$$\Pi_\varphi = \{F_\varphi\}.$$

Ce L-paquet n'est *pas tempéré* et *de dimension finie.* (La représentation F_φ est triviale si et seulement si $(u, v, \mu) = (1, 1, 0)$.)

Quatrième sous-cas : $(u, v) \notin \mathbb{Z}^2$. Alors l'induite unitaire du caractère χ_φ est irréductible et :

$$\Pi_\varphi = \{i_G(\chi_\varphi)\}.$$

Ce L-paquet est *tempéré si et seulement si* $\mathrm{Re}(u + v) = 0$ et *unitaire si et seulement si* $(\mathrm{Re}(u + v) = 0)$ *ou* $(u = v$ *et* $|u + v| < 2)$ *ou* $(u - v$ *impair et* $|u + v| < 1)$.

Concluons cette section par la description d'une autre fonctorialité reliant d'une part certaines représentations de $\mathrm{U}(1, 1)$ et de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ et d'autre part les représentations de $\mathrm{U}(1, 1) \times \mathrm{U}(1)$, et celles de $\mathrm{U}(2, 1)$.

Les constructions du § 4.2 s'appliquent à $\mathrm{U}(1, 1)$ et définissent donc un groupe dual ${}^L\mathrm{U}(1, 1) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$; on définit ${}^L\mathrm{U}(1) = \mathbb{C}^* \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, σ opère par $z \mapsto z^{-1}$; si $H = \mathrm{U}(1, 1) \times \mathrm{U}(1)$, ${}^LH = (\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ est défini par l'action de σ sur les deux composantes. De façon évidente, on obtient alors les « formes de Weil » des L-groupes, $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \rtimes W_\mathbb{R}$ et $(\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*) \rtimes W_\mathbb{R}$.

Pour chaque entier n, on peut alors former les morphismes injectifs qui suivent :

$$\beta_n : \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \rtimes W_\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}), \tag{4.6.1}$$

dont la restriction à $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ est l'identité et la restriction au groupe de Weil $W_\mathbb{R}$ est donnée par :

$$\beta_n(z) = \begin{pmatrix} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{1}{2}+n} & \\ & \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{1}{2}+n} \end{pmatrix} \times z \text{ si } z \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad \beta_n(j) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \times j;$$

et par ailleurs

$$\xi_n : (\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*) \rtimes W_\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \rtimes W_\mathbb{R} \tag{4.6.2}$$

où :

(1) la restriction de ξ_n à $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*$ est donnée par le morphisme :

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\times\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$$
$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}, \alpha\right) \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & \alpha & 0 \\ c & 0 & d\end{pmatrix},$$

(2) la restriction de ξ_n au groupe de Weil $W_{\mathbb{R}}$ est donnée par :

$$\xi_n(z) = \begin{pmatrix} (z/\overline{z})^{\frac{1}{2}+n} & & \\ & 1 & \\ & & (z/\overline{z})^{\frac{1}{2}+n}\end{pmatrix} \times z \quad \text{si } z\in\mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad \xi_n(j) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix} \times j.$$

On vérifie facilement que ce sont bien des morphismes.

Chaque L-paramètre $W_{\mathbb{R}} \to {}^L\,\mathrm{U}(1,1)$ induit bien évidemment un morphisme $W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \rtimes W_{\mathbb{R}}$ qui composé avec l'un quelconque des morphismes β_n induit une représentation semi-simple irréductible $W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ et donc un L-paramètre pour le groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Là encore se pose la question de la fonctorialité : à une représentation automorphe de $\mathrm{U}(1,1)$ correspond-il une représentation automorphe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ via la correspondance induite par les morphismes β_n ?

On a ainsi deux (si l'on oublie l'entier n) manières de relever des représentations de $\mathrm{U}(1,1)$ au groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ (la seconde étant le changement de base : simplement la restriction à $\mathbb{C}^*$ d'un paramètre $W_{\mathbb{R}} \to {}^L\,\mathrm{U}(1,1)$), les deux seront importantes dans la suite.

De même chaque L-paramètre $W_{\mathbb{R}} \to {}^L(\mathrm{U}(1,1)\times\mathrm{U}(1))$ induit bien évidemment un morphisme $W_{\mathbb{R}} \to (\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*) \rtimes W_{\mathbb{R}}$ qui composé avec l'un quelconque des morphismes ξ_n induit un morphisme $W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}) \rtimes W_{\mathbb{R}}$ qui est un L-paramètre pour le groupe $\mathrm{U}(2,1)$. Là encore se pose la question de la fonctorialité : à une représentation automorphe de $\mathrm{U}(1,1)\times\mathrm{U}(1)$ correspond-il une représentation automorphe de $\mathrm{U}(2,1)$ via la correspondance induite par les morphismes ξ_n ?

C'est faux en général, mais nous verrons au chapitre 8 que les deux types de fonctorialité que nous avons évoqués dans ce chapitre suffisent essentiellement à décrire tout le spectre automorphe de $\mathrm{U}(2,1)$.

CHAPITRE 5

REPRÉSENTATIONS DE $\mathrm{U}(a,b)$ $(a,b>1)$

Dans ce chapitre, nous décrivons le groupe dual de $\mathrm{U}(a,b)$ pour $a,b>1$, puis ses représentations cohomologiques. Pour celles-ci, nous décrivons explicitement les données de Langlands, d'abord comme réalisations explicites par des quotients de Langlands de représentations standard (§ 5.2) puis comme paramètres dans le groupe dual (§ 5.3). Enfin, nous explicitons pour ce groupe le Théorème de Vogan caractérisant les représentations cohomologiques isolées dans le dual unitaire.

5.1. Groupe dual

La description du groupe dual a déjà été donnée dans le chapitre 4, puisqu'il ne dépend que de la forme intérieure quasi-déployée de G, qui est la même que pour le groupe $\mathrm{U}(n-1,1)$ associé (on pose $n=a+b$). Ainsi

$$\widehat{G}=\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$$

et ${}^LG=\widehat{G}\rtimes\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, l'élément non-trivial $\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ opérant par

$$g\longmapsto w_0\,{}^tg^{-1}w_0^{-1}\quad(g\in\widehat{G}),\qquad w_0=\begin{pmatrix} & & & & (-1)^{n+1}\\ & & & \iddots & \\ & & 1 & & \\ & -1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Nous notons $G=\mathrm{U}(a,b)$ le groupe unitaire défini par la forme hermitienne de matrice

$$\begin{pmatrix}1_a & 0\\ 0 & -1_b\end{pmatrix}.$$

et $K=\mathrm{U}(a)\times\mathrm{U}(b)$ le sous-groupe compact maximal associé ; soient $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{k}_0$ leurs algèbres de Lie réelles respectives. On a

$$\mathfrak{g}_0=\mathrm{Lie}(G)=\mathfrak{k}_0\oplus\mathfrak{p}_0,\qquad \mathfrak{p}_0=\left\{\begin{pmatrix}0 & Y\\ {}^t\overline{Y} & 0\end{pmatrix}\mid Y\in M_{a,b}(\mathbb{C})\right\}.$$

Enfin $\mathfrak{p}_0 \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}^{ab} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{ab} \oplus \mathbb{C}^{ab} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ le premier facteur étant l'espace tangent holomorphe à l'origine à $X = G/K$ et le second l'espace tangent antiholomorphe. Noter que $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ s'identifie naturellement à $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, que $\mathfrak{p}_0 \otimes \mathbb{C} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \right\}$ et qu'alors $\mathfrak{p}^+$ peut être défini par $Z = 0$, la structure holomorphe sur $\mathfrak{p}_0$ étant définie par l'action adjointe de

$$\iota = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K.$$

5.2. Représentations cohomologiques

D'après Vogan et Zuckerman [**103**], celles-ci sont associées aux algèbres paraboliques θ-stables.

Soit $T \subset G$ le tore diagonal compact,

$$\mathfrak{t}_0 = \mathrm{Lie}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} iH_1 & & \\ & \ddots & \\ & & iH_n \end{pmatrix} \mid H_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Modulo $W_K = \mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b$ on peut supposer

$$H_1 \geqslant \cdots \geqslant H_a, \ H_{a+1} \geqslant \cdots \geqslant H_n.$$

Il sera commode de noter

$$X = (H_1, \dots H_a) \in \mathbb{R}^a \text{ et } Y = (H_{a+1}, \dots, H_n) \in \mathbb{R}^b.$$

On associe à H l'algèbre de Lie $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ donnée par

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{g}^H \tag{5.2.1}$$

(5.2.2) $\mathfrak{u}$ *est la somme des espaces radiciels de* $(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ *associés aux racines* α *telles que* $\langle \alpha, H \rangle > 0$.

Rappelons quelques propriétés de la représentation $A_\mathfrak{q}$ (§ 1.). Soit

$$\begin{aligned} &\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}^- \\ &R^\pm = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}^\pm), \ R = R^+ + R^- \\ &\mu = 2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = \text{ somme des racines de } \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} \text{ par rapport à } \mathfrak{t}. \end{aligned}$$

Proposition 5.2.1

(1) *$A_\mathfrak{q}$ contient, avec multiplicité* 1, *le K-type de plus haut poids μ.*

(2) *On a*

$$H^{p+R^+, q+R^-}(\mathfrak{g},\mathfrak{k}; A_\mathfrak{q}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k}}(\Lambda^{2p}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}), \mathbb{C}).$$

En particulier $H^{R^+,R^-} \cong \mathbb{C}$, et la cohomologie n'intervient qu'en degrés supérieurs.

Pour (2) voir [**103**, Prop. 6.19].

Nous allons maintenant décrire la paramétrisation de $A_\mathfrak{q}$ à l'aide de l'induction parabolique. (La construction de Vogan et Zuckerman est par induction *cohomologique*, *cf.* [**103**]). Nous aurons besoin des données combinatoires suivantes. Soit r le nombre de valeurs distinctes des coordonnées H_i, et soit

$$Z_1 > \cdots > Z_r \quad (Z_j \in \mathbb{R})$$

ces valeurs. Alors

$$X = (\underbrace{Z_1, \dots Z_1}_{a_1}, \underbrace{Z_2, \dots Z_2}_{a_2}, \dots) \qquad Y = (\underbrace{Z_1, \dots Z_1}_{b_1}, \underbrace{Z_2, \dots Z_2}_{b_2}, \dots)$$

donc $a = \sum a_j$, $b = \sum b_j$.

L'algèbre $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ est en fait réelle, $= \mathfrak{l}_0 \otimes \mathbb{C}$ avec

$$\mathfrak{l}_0 \cong \prod_j \mathfrak{u}(a_j, b_j). \tag{5.2.3}$$

Soit $d_j = \inf(a_j, b_j) \geqslant 0$, $c_j = \sup(a_j, b_j) - \inf(a_j, b_j) \geqslant 0$, $n_j = a_j + b_j$.

Remarque **(*cf.* [101,** Thm. A8]**).** — Pour obtenir toutes les représentations cohomologiques unitaires, il suffit de considérer les sous-algèbres $\mathfrak{q}$ telles que le sous-groupe connexe $L \subset G$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_0$ soit sans facteur compact non-abélien. On peut donc supposer $a_j = 1$ (resp. $b_j = 1$) si $b_j = 0$ (si $a_j = 0$).

Nous allons associer à $\mathfrak{q}$ un sous-groupe parabolique $P = MAN$ de G, ainsi qu'une représentation induisante de MA.

La composante déployée A est la composante neutre d'un tore maximal déployé de L. On prend

$$A = \prod_{d_j > 0} A_j, \ A_j \subset L_j \cong \mathrm{U}(a_j, b_j).$$

Si $0 < a_j \leqslant b_j$, $\mathfrak{a}_j = \mathrm{Lie}(A_j)$ est donnée, dans $\mathfrak{l}_j = M(a_j + b_j, \mathbb{C})$, par

$$\mathfrak{a}_j = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} t_1 & & \\ & \ddots & 0 \\ & & t_a \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_a \\ & 0 & \end{matrix} & 0 \end{array}\right), \quad a = a_j. \tag{5.2.4}$$

Si $0 < b_j \leqslant a_j$,

$$\mathfrak{a}_j = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & t_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & t_b \\ & & & & 0 & \\ \hline t_1 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & 0 & \\ & & t_b & & & \end{array}\right), \quad b = b_j. \tag{5.2.5}$$

Soit $\mathbb{M}$ le centralisateur de A dans G. On a $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^a \oplus \mathbb{C}^b$; on vérifie que si $a_j \leqslant b_j$ (5.2.4) $\mathbb{M}$ doit préserver le sous-espace $\mathbb{C}^{2a_j}$ de $\mathbb{C}^a$ déterminé par (5.2.4) ; de même si $b_j \leqslant a_j$. Sur ce sous-espace, $\mathbb{M}$ opère par le centralisateur de $A_j \cong (\mathbb{R}_+^*)^{d_j}$, d'où un facteur $(\mathbb{C}^*)^{d_j}$; sur l'orthogonal de $\bigoplus_j \mathbb{C}^{2d_j}$, $\mathbb{M}$ opère comme $\mathrm{U}(a - \sum d_j,\ b - \sum d_j)$.

Donc

$$\mathbb{M} = MA,\ A \cong (\mathbb{R}_+^*)^{\sum d_j},$$

$$M \cong \prod_j \mathrm{U}(1)^{d_j} \times \mathrm{U}(a - \textstyle\sum d_j, b - \sum d_j). \tag{5.2.6}$$

On vérifie que $\mathbb{M}$ est bien le sous-groupe de Levi d'un parabolique (réel) de G.

Nous devons déterminer une représentation $\sigma \otimes \nu$ de $\mathbb{M} = MA$. On a $\nu \in \mathfrak{a}^*$, $\nu = \bigoplus_j \nu_j$. Dans le cas (5.2.4) on pose pour $T = (t_1, \dots t_{a_j}) \in \mathfrak{a}_j$:

$$\nu_j(T) = (n_j - 1)t_1 + \cdots + (n_j + 1 - 2a_j)t_{a_j} \quad (n_j = a_j + b_j). \tag{5.2.7}$$

Dans le cas (5.2.5) on posera de même :

$$\nu_j(T) = (n_j - 1)t_1 + \cdots + (n_j + 1 - 2b_j)t_{b_j}. \tag{5.2.8}$$

On renvoie le lecteur à Vogan-Zuckerman [**103**, p. 82] pour la justification de ce choix. (ν est la demi-somme des racines de A dans une algèbre d'Iwasawa de $\mathfrak{l}$.)

La représentation σ de M appartient à la série discrète. On décrit donc son paramètre d'Harish-Chandra (*cf.* § 4.1.2). Soit T^+ la composante compacte d'un tore maximal θ-stable, contenant A, de L. On prendra de façon naturelle

$$T^+ = \prod_j \mathrm{U}(1)^{d_j} \times \prod_j \mathrm{U}(1)^{c_j}, \tag{5.2.9}$$

les facteurs $\mathrm{U}(1)^{d_j}$ sont plongés dans $\mathrm{U}(a_j, b_j)$ de façon à commuter à $\mathfrak{a}_j$ et les facteurs $\mathrm{U}(1)^{c_j}$ sont contenus dans $\mathrm{U}(a_j)$ si $a_j > b_j$ et dans $\mathrm{U}(b_j)$ si $a_j < b_j$. Alors T^+ est un tore maximal de M.

En fait T^+ est un tore maximal de $C = M \cap L = \prod_j \mathrm{U}(1)^{d_j} \times \prod_j \mathrm{U}(c_j)$.

Sur chaque facteur $\mathrm{U}(c_j)$ (contenu dans $\mathrm{U}(a_j)$ si $a_j > b_j$ ou dans $\mathrm{U}(b_i)$ si $a_j < b_i$) choisissons le système de racines positives naturel par rapport au tore diagonal :

$$\Delta = \left\{ u_k u_l^{-1} \mid k < l,\ u = (u_k) \in \mathrm{U}(1)^{c_j} \right\}.$$

Soit ρ_c la demi-somme des racines positives dans $\frac{1}{2}(\Lambda_{T^+})$, $\Lambda_{T^+} \subset it^*$ étant le réseau des caractères.

Alors :

(5.2.10) *Le paramètre d'Harish-Chandra de σ est égal à $\lambda_\sigma = \rho_c + \rho(\mathfrak{u})$.*

Il nous sera nécessaire de connaître explicitement λ_σ selon la paramétrisation (5.2.9) de T^+. On note un élément $t \in T^+$ selon (5.2.9) :

$$t = (v_{ik}, u_{jk}) \ (k \leqslant d_j, l \leqslant c_j).$$

De même si $X \in \mathrm{Lie}(T^+)$,

$$X = (V_{jk}, U_{jl}).$$

Lemme 5.2.2

(1) $\rho_c(X) = \sum_j \left(\frac{c_j - 1}{2}\right) U_{j,1} + \cdots + \left(\frac{1-c_j}{2}\right) U_{j,c_j}$,

(2) $\rho_{\mathfrak{u}}(X) = \sum_j \frac{m_j}{2} \left(\sum_k 2V_{jk} + \sum_l U_{jl}\right)$ *où* $m_j = -n_1 - \cdots - n_{j-1} + n_{j+1} + \cdots + n_r$.

L'assertion (1) résulte de la description précédente de ρ_c ; quant à (2) noter que $L_{\mathbb{C}} = \prod_j \mathrm{GL}(n_j, \mathbb{C})$ est le sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$; $L_{\mathbb{C}}$ opère sur $\mathfrak{u}$ avec pour déterminant

$$2\rho_{\mathfrak{u}} = (\det g_1)^{m_1} (\det g_2)^{m_2} \cdots (\det g_r)^{m_r};$$

la formule (2) s'en déduit par restriction.

Vérifions que λ_σ est bien le paramètre d'Harish-Chandra pour une série discrète de M (défini par (5.2.6)). Tout d'abord, λ_σ est intégral sur $\prod_j \mathrm{U}(1)^{d_j} \subset T^+$. Sur $T^+ \cap \mathrm{U}(a - \sum d_j, b - \sum d_j)$, variables $u_{j,l}$, on doit vérifier d'après le § 4.1.2 que les coordonnées de λ_σ sont $\equiv \frac{a+b-2\sum d_j - 1}{2}[1]$. Ceci résulte du Lemme (noter que $c_j \equiv n_j$ [2]). Enfin, on vérifie que λ_σ est régulier dans $X^*(T^+)$ (par rapport aux racines de M).

Soit P un sous-groupe parabolique de G de radical de Levi MA : $P = MAN$.

***Proposition 5.2.3* (Vogan-Zuckerman [103])**

(1) *La représentation unitairement induite*

$$I(\sigma, \nu) = \mathrm{ind}_P^G(\sigma \otimes e^\nu)$$

admet un unique quotient irréductible $J(\sigma, \nu)$.

(2) $J(\sigma, \nu) \cong A_{\mathfrak{q}}$.

5.3. Paramètres des $A_{\mathfrak{q}}$ en dualité de Langlands

Rappelons que ${}^LG = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, σ opérant par

$$g \longmapsto w_0 {}^tg^{-1} w_0^{-1}, \qquad w_0 = \begin{pmatrix} & & & & (-1)^{n+1} \\ & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & 1 & & \\ & -1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbb{M}$ le groupe de Levi associé à $\mathfrak{q}$: on vérifie facilement que

$$\mathbb{M} \cong \prod_j (\mathbb{C}^\times)^{d_j} \times \mathrm{U}(A,B)$$

où $A = a - \sum d_j$, $B = b - \sum d_j$; soit $N = A + B$, $D = \sum d_i$.

Soit $\widehat{\mathbb{M}} = (\mathbb{C}^*)^D \times \mathrm{GL}(N,\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^*)^D \subset \widehat{G}$ (plongement par blocs diagonaux). Alors $\widehat{\mathbb{M}}$ est stable par l'action de w_0, et ${}^L\widehat{\mathbb{M}} = \widehat{\mathbb{M}} \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ s'identifie naturellement au groupe dual de $\mathbb{M}$.

D'après Langlands [**72**], le paramètre $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^LG$ associé à $A_{\mathfrak{q}}$ est obtenu par composition à partir de celui de $\sigma \otimes e^\nu$. Pour simplifier, nous ne décrivons que $\varphi_{|W_{\mathbb{C}}}$ où $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$.

La représentation $\sigma \otimes e^\nu$ de $\mathbb{M}$ détermine un caractère de $(\mathbb{C}^*)^D$, déduit de (5.2.7) (ou (5.2.8)) et du Lemme 5.2.2. Rappelons que $D = \sum d_j$; les variables de $(\mathbb{C}^*)^D$ peuvent être indexées par (j,k), $k \leqslant d_j$ (§ 5.3). Le caractère associé est donné par

$$z = z_{jk} \longmapsto (z/\overline{z})^{\frac{m_j}{2}} (z\overline{z})^{\frac{n_j+1-2k}{2}} \tag{5.3.1}$$

(Lemme 5.2.2). Par dualité de Langlands, la partie relative au facteur $(\mathbb{C}^*)^D \times (\mathbb{C}^*)^D$ de $\widehat{\mathbb{M}}$ est alors :

$$\varphi_1 : z \longmapsto \begin{pmatrix} (z/\overline{z})^{\frac{m_j}{2}} (z\overline{z})^{\frac{n_j+1-2k}{2}} & \\ & (z/\overline{z})^{\frac{m_j}{2}} (z\overline{z})^{-\frac{n_j+1-2k}{2}} \end{pmatrix}$$

(matrices diagonales; l'ordre des entrées j,k dans le second facteur doit être inverse de l'ordre du premier facteur, pour que φ_1 soit compatible à l'action de w_0).

Par ailleurs σ donne par restriction une représentation (discrète) de $\mathrm{U}(A,B)$, dont le paramètre de Langlands se déduit du paramètre d'Harish-Chandra comme on l'a expliqué dans le chapitre 4 pour $\mathrm{U}(n,1)$; toujours d'après le Lemme 5.2.2, on en déduit

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathrm{GL}(N,\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto \left((z/\overline{z})^{\frac{m_j+c_j+1-2l}{2}} \right) \ (j = 1, \dots r,\ l \leqslant c_j). \end{aligned}$$

On remarquera que $N \equiv n$ [2], que $c_j \equiv n_j$ [2] et qu'il résulte alors de l'expression de m_j que $m_j + c_j + 1 - 2l \equiv N - 1$ [2], ce qui est nécessaire pour que φ_2 définisse une série discrète pour $\mathrm{U}(A,B)$ (*cf.* la Prop. 4.3.2 en rang 1).

Récapitulons le résultat obtenu :

Proposition 5.3.1. — *Le paramètre de Langlands de* $A_{\mathfrak{q}}$:

$$\varphi_{|W_{\mathbb{C}}} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \widehat{\mathbb{M}} \subset \widehat{G}$$

est donné par

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} (z/\overline{z})^{\frac{m_j}{2}} (z\overline{z})^{\frac{n_j+1-2k}{2}} & & \\ & (z/\overline{z})^{\frac{m_j+c_j+1-2l}{2}} & \\ & & (z/\overline{z})^{\frac{m_j}{2}} (z\overline{z})^{-\frac{n_j+1-2k}{2}} \end{pmatrix}$$

$(k \leqslant d_j,\ l \leqslant c_j)$.

5.4. Représentations cohomologiques isolées

Dans ce paragraphe nous explicitons pour $\mathrm{U}(a,b)$ un théorème de Vogan [**101**, Théorème A10] caractérisant les représentations cohomologiques *isolées*.

Nous conservons les notations du § 5.2, donc :

$$Z_1 > \cdots > Z_r.$$

Nous ferons sur les données l'hypothèse de non-dégénérescence expliquée dans la Remarque suivant la Proposition 5.2.1, soit

$$\text{(H0)} \qquad a_j = 0 \Longrightarrow b_j = 1, \quad b_j = 0 \Longrightarrow a_j = 1.$$

Le facteur correspondant de $L = \prod \mathrm{U}(a_j, b_j)$ est $\mathrm{U}(1)$. Notons

$$\begin{array}{ll} j_1 < \cdots < j_t & (0 \leqslant t \leqslant r) \\ Z_{j1} > \cdots > Z_{jt} & \end{array}$$

les autres valeurs de j. Pour de tels j le facteur $L_j \cong \mathrm{U}(a_j, b_j)$ est non compact. Considérons l'hypothèse suivante :

(H1) *Si $j = j_i$ $(i \leqslant t)$ le rang semi-simple de L_j est $> 1 \Longleftrightarrow a_j, b_j \geqslant 2$.*

Supposons enfin que $t < r$. Notons $I = \{j, j+1, \dots, j+k\}$ un intervalle non vide d'entiers contenu dans $\{1, \dots, r\} - \{j_1, \dots, j_t\}$. Pour $j \in I$ on a donc $\{a_j, b_j\} = \{0, 1\}$.
(H2)
Si $t < r$, a_j (et donc b_j) est constant sur tout intervalle I du complémentaire de $\{j_t\}$.

Proposition 5.4.1 **(Vogan [101])**. — *Supposons* $\mathfrak{q}$ *associée aux données* (a_j, b_j) *vérifiant* (H0). *Alors la représentation* $A_{\mathfrak{q}}$ *est isolée dans le dual de* § $\mathrm{U}(a,b)$ *si et seulement si* (H1) *et* (H2) *sont vérifiées.*

Rappelons (§ 5.2) que la cohomologie de $A_{\mathfrak{q}}$ n'apparaît qu'en degrés $\geqslant R = R(\mathfrak{q})$.

Corollaire 5.4.2 ($\mathrm{rg}\, G \geqslant 2$). — *Si* $A_{\mathfrak{q}}$ *n'est pas isolée, la cohomologie de* $A_{\mathfrak{q}}$ *n'apparaît qu'en degrés* $i \geqslant a + b - 2$.

Noter que si $t=0$, (H2) veut dire que a_j (et donc b_j) est constant. Le cas où $t=0$ correspond à $L=\mathrm{U}(1)^n$; la représentation $A_{\mathfrak{q}}$ est alors une série discrète. Sous (H0) la condition (H2) impliquerait alors que $a_j \equiv 1$ et $b_j \equiv 0$ (ou l'inverse), ce qui est impossible puisque $a,b>0$. Donc (H2) est violée si $A_{\mathfrak{q}}$ est une série discrète : celles-ci ne sont pas isolées.

Remarque. — Du point de vue de la théorie des représentations de G, ce résultat ne peut être amélioré. Considérons par exemple $\mathrm{U}(2,2)$. On peut choisir $\mathfrak{q}$ de sorte que $\mathfrak{l}$ est l'algèbre diagonale par blocs $\mathfrak{u}(2,1)\times\mathfrak{u}(1)$. Elle viole (H1) donc $A_{\mathfrak{q}}$ n'est pas isolée ; sa cohomologie apparaît en degrés $\geqslant R=2$. On trouve aisément de tels exemples en dimensions supérieures.

Démontrons le Corollaire. Tout d'abord, un calcul simple donne

$$R = ab - \sum_{j=1}^{r} a_j b_j = ab - \sum_{i=1}^{t} a^i b^i$$

où on a écrit pour simplifier $a^i, b^i = a_{j_i}, b_{j_i}$.

Supposons que $\mathfrak{q}$ viole (H1). Alors (à l'ordre près) on peut supposer $a^1=1$, $b^1\geqslant 1$. Alors

$$\sum_{i=2}^{t} a^i b^i \leqslant \Big(\sum a^i\Big)\Big(\sum b^i\Big) = (a-1)(b-b^1)$$

donc

$$\begin{aligned} R &\geqslant ab - b^1 - (a-1)(b-b^1) \\ &= b + (a-2)b^1 \geqslant a+b-2 \end{aligned}$$

($a\geqslant 2$ puisque $\operatorname{rg} G \geqslant 2$).

Supposons que $\mathfrak{q}$ viole (H2). Donc $t<r$ et $j\mapsto a_j$ prend les valeurs 1 et 0 (donc $b_j=0,1$) sur $\{1,\dots,n\}-\{j_t\}$. Alors $\sum a^i \leqslant a-1$, $\sum b^i \leqslant b-1$ et dans ce cas

$$R \geqslant ab-(a-1)(b-1) = a+b-1 > a+b-2.$$

Il nous reste à déduire la Proposition 5.4.1 des résultats de Vogan. D'après le Théorème A.10 de [**101**], $A_{\mathfrak{q}}$ est isolée si et seulement si $\mathfrak{q}$ vérifie certaines conditions (0)-(3). Ici (0) est notre hypothèse (H0) ; (1) est automatiquement vérifiée si $G=\mathrm{U}(a,b)$; (2) est (H1). Il nous reste à exprimer (3).

La construction-classification de Vogan-Zuckerman [**103**] pour les $A_{\mathfrak{q}}$ est la suivante. Tout d'abord on a $A_{\mathfrak{q}} = \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}(\mathbb{C})$ où $\mathbb{C}$ est la représentation triviale de $\mathfrak{l}$ et le foncteur $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{\dim(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k})}$ est défini dans les références citées par [**103**]. Supposons donné un système de racines positives $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ pour $(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ tel que les racines de $\mathfrak{u}$ soient positives. Alors, avec les notations usuelles :

$$\rho_{\mathfrak{g}} = \rho_{\mathfrak{u}} + \rho_{\mathfrak{l}}.$$

Le caractère infinitésimal de $\mathbb{C}_{\mathfrak{l}}$ est $\rho_{\mathfrak{l}}$; $\lambda = \rho_{\mathfrak{g}}$ vérifie les hypothèses du Théorème A.10 de [**101**] pour $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$.

Soit $\Pi \subset \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ l'ensemble des racines simples et $\Pi(\mathfrak{l})$ le sous-ensemble formé des racines simples de $\mathfrak{l}$. Alors la condition (3) de Vogan s'écrit :

$$\text{(H2}'\text{)} \qquad \langle \beta^\vee, \lambda \rangle = \langle \beta^\vee, \rho_{\mathfrak{g}} \rangle \neq 1$$

pour toute racine (imaginaire) non compacte $\beta \in \Pi$ orthogonale à $\Pi(\mathfrak{l})$.

Il s'agit d'expliciter (H2$'$). Rappelons (§ 5.2) que $H = (X, Y)$. Les valeurs des coordonnées sont

$$\begin{aligned} &Z_1 > Z_2 > \cdots > Z_r \\ \text{et} \quad &Z_{j_1} > Z_{j_2} > \cdots > Z_{j_t} \end{aligned}$$

sont les valeurs de multiplicités > 1, donc $\geqslant 4$ d'après (H1). Écrivons alors

$$\text{(5.4.1)} \qquad X = (X_1 > X_2 > \cdots > X_{\alpha_1} > \underbrace{Z_{j_1}}_{a_1} > \cdots > X_{\alpha_2} > \underbrace{Z_{j_2}}_{a_2} > \cdots > X_\alpha);$$

les X_i apparaissant avec multiplicité 1 d'après (H0) ; de même

$$\text{(5.4.2)} \qquad Y = (Y_1 > \cdots > Y_{\beta_1} > \underbrace{Z_{j_1}}_{b_1} > \cdots > Y_{\beta_2} > \underbrace{Z_{j_2}}_{b_2} > \cdots > Y_\beta).$$

Enfin soit H' égal à $H = (X, Y)$, réordonné de façon positive :

$$\text{(5.4.3)} \qquad H' = \sigma H = (Z_1 > Z_2 > \cdots > \underbrace{Z_{j_1}}_{n_1} > \cdots > \underbrace{Z_{j_2}}_{n_2} > \cdots > Z_r),$$

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

La base $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ est un ensemble de racines positives ε telles que $\langle \varepsilon, H \rangle \geqslant 0$; σ l'envoie sur un ensemble de racines telles que $\langle \varepsilon, H' \rangle \geqslant 0$, que l'on prendra égal à l'ensemble usuel puisque H' est dominant. Alors

$$\begin{aligned} \sigma\Pi &= \{\varepsilon_i = (0, \ldots, 0, 1, -1, 0, \ldots),\ i = 1, \ldots n-1\} \\ \sigma\Pi(\mathfrak{l}) &= \{\varepsilon_i \mid H'_i = H'_{i+1}\}, \end{aligned}$$

et σ envoie l'orthogonal de $\Pi(\mathfrak{l})$ sur l'ensemble des racines ε_i telles que

$$\text{(5.4.4)} \qquad \{i, i+1\} \subset \{1, \ldots, n\} - \cup_{i=1}^t I_i,$$

I_i étant le support de Z_{j_i} dans l'expression de H' (5.4.3).

Par ailleurs, le système de racines étant de type A_{n-1}, $\beta^\vee = \beta$ si $\beta \in \Pi$ et donc $\langle \beta^\vee, \rho_{\mathfrak{g}} \rangle = 1$. La condition (H2$'$) est donc équivalente à

(H2$''$) *Il n'y a pas de racine imaginaire non compacte dans Π orthogonale à $\Pi(\mathfrak{l})$.*

Soit donc ε_i vérifiant (5.4.4). Ceci implique donc que i et $i+1$ appartiennent à une composante connexe de cardinal $\geqslant 2$ de $\{1, \ldots, n\} - \cup I_i$. Supposons par exemple que α_1 ou $\beta_1 > 1$ et que $\alpha_1 + \beta_1 \geqslant 2$. Alors dans l'expression (5.4.3) $i, i+1$ sont deux indices associés à $Z_i > Z_{i+1} > Z_{j_1}$. Alors $\sigma^{-1}\varepsilon_i$ est associée dans les expressions

(5.4.1) et (5.4.2) à deux couples de la forme (X_i, X_{i+1}), $(X_j, Y_{j'})$ ou (Y_j, Y_{j+1}) à gauche de Z_{j_1}. Dans le second cas, la racine de valeur $X_j - Y_{j'}$ est non compacte.

Donc Z_1 et Z_2 sont tous deux (par exemple) de la forme (X_1, X_2) ; il en est de même pour X_2 et X_3, etc. Ceci veut dire que pour tout $j < j_1$ on a $a_j = 1$ (ou $b_j = 1$), conformément à (H2). Le même argument s'applique à toute composante connexe, et il est clair que (H2) est en fait équivalente à (H2$''$).

CHAPITRE 6

CONSÉQUENCES DES CONJECTURES D'ARTHUR

Dans deux articles fondamentaux, Arthur a donné une description conjecturale des représentations des groupes réductifs qui peuvent apparaître dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ pour un sous-groupe de congruence. Le but de ce chapitre est d'expliquer les conséquences de ces conjectures pour la théorie spectrale des formes différentielles.

Les Conjectures d'Arthur reposent elles-mêmes sur la construction hypothétique de « paquets locaux » (*cf.* [**3**, § 4]), familles finies de représentations de G jouissant de propriétés de stabilité. Arthur lui-même ne dit rien de la construction de ces « paquets », sauf dans le cas des représentations cohomologiques [**3**, § 5]. En particulier, sa formulation ne précise pas quels « paramètres » (§ 6.1) devraient apparaître quand G n'est pas quasi-déployé. Pour les groupes réels, ces paquets locaux sont a priori construits par Adams, Barbasch et Vogan [**1**]. Mais la construction, qui repose sur la géométrie algébrique, les singularités d'orbites et les faisceaux pervers, est très difficile.

Pour des groupes de rang 1 assez simples tels que ceux qui nous intéressent, nous avons préféré utiliser la théorie d'Arthur *a minima*. Une conséquence non ambiguë de celle-ci est la description d'une famille de *caractères infinitésimaux*, les seuls possibles pour les représentations apparaissant dans $L^2(\Gamma\backslash G)$. Pour les groupes de rang 1, ces restrictions sur le caractère infinitésimal imposent des limitations sévères aux représentations.

6.1. Paramètres d'Arthur

Soit G un groupe réductif réel, nous noterons $G = G(\mathbb{R})$, $\widehat{G}$ le groupe dual (groupe réductif complexe) connexe, ${}^LG = \widehat{G} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ le groupe dual. (Pour les groupes unitaires v. ch. 4 ; pour les groupes orthogonaux v. § 3-4).

Définition 6.1.1. — Un paramètre d'Arthur pour G est un homomorphisme

$$\psi : W_{\mathbb{R}} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow {}^LG \qquad (6.1.1)$$

tel que

(i) Le diagramme

$$\begin{tikzcd} W_{\mathbb{R}} \arrow[rr] \arrow[dr] & & {}^L G \arrow[dl] \\ & \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(ii) La restriction $\psi|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}$ est holomorphe ($\equiv$ algébrique).

(iii) L'image de $\psi|_{W_{\mathbb{R}}}$ est d'adhérence compacte.

On déduit de ψ un « paramètre de Langlands »

$$\begin{aligned} \varphi_\psi : W_{\mathbb{R}} &\longrightarrow {}^L G \\ w &\longmapsto \psi\left(w, \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & 0 \\ 0 & |w|^{-1/2} \end{pmatrix}\right) \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

où, pour $w \in W_{\mathbb{R}}$, $|w|$ est la valeur absolue de l'image de w dans $\mathbb{R}^\times$ (Ch. 3).

Noter que φ_ψ ne définit pas toujours une représentation de G car il ne vérifie pas nécessairement la condition (4.3.3) de la Définition du § 4.3.

Soit $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Rappelons que le centre de $\mathfrak{Z}$ de $U(\mathfrak{g})$ s'identifie à $S(\mathfrak{h})^W$, W étant le groupe de Weyl $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On peut vérifier alors que φ_ψ définit un caractère infinitésimal, *i.e.* un élément de $\mathfrak{h}^*/W$ (pour tout choix de $\mathfrak{h}$). Nous le ferons explicitement pour les groupes qui nous intéressent. Nous utiliserons alors la formulation très faible suivante des Conjectures d'Arthur :

Conjecture 6.1.2. — *Si une représentation irréductible π de G apparaît (faiblement) dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ pour un sous-groupe de congruence, son caractère infinitésimal λ_π est associé à un paramètre d'Arthur φ_ψ.*

6.2. $G = \mathrm{U}(n, 1)$

Si $G = \mathrm{U}(n,1)$ toute algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ s'identifie à $\mathbb{C}^{n+1}$, de façon unique modulo l'action de $\mathfrak{S}_{n+1} = W$. Les racines sont données par

$$(x_1, \dots x_{n+1}) \longmapsto x_i - x_j \quad (i \neq j).$$

Soit ${}^L G = \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$.

Rappelons que ${}^L G$ a été construit dans ce cas au § 4.2 ; l'élément non trivial $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ opère par

$$g \longmapsto w_0 {}^t g^{-1} w_0^{-1}, \qquad w_0 = \begin{pmatrix} & & & (-1)^n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Soit
$$\psi : W_{\mathbb{R}} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow {}^LG$$
un paramètre d'Arthur, considérons sa restriction
$$\psi_0 : (W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{G} = \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C}).$$
D'après la définition 6.1.1 (iii) ψ_0 est semi-simple et s'écrit donc :
$$\psi_0 = \bigoplus_{j=1}^{r} r_j \otimes \chi_j \tag{6.2.1}$$
r_j étant une représentation irréductible de degré n_j ($\sum n_j = n+1$) de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et χ_j un caractère de $\mathbb{C}^\times$, *unitaire* d'après (iii). Par ailleurs définissons ψ_0^σ par
$$\psi_0^\sigma(z,s) = \psi_0(\overline{z},s) \quad (z \in \mathbb{C}^\times, s \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})).$$
La condition (i) implique que ψ_0^σ est équivalente à la duale $\widetilde{\psi}_0$ de ψ_0, soit
$$\{r_j, \chi_j^\sigma\} = \{r_j, \chi_j^{-1}\} \tag{6.2.2}$$
où $\chi^\sigma(z) = \chi(\overline{z})$.

Chaque bloc de (6.2.1) contribue une somme de caractères à $\varphi_\psi|_{\mathbb{C}^\times}$, de la forme
$$z \longmapsto \begin{pmatrix} (z\overline{z})^{\frac{n_j-1}{2}} & & \\ & \ddots & \\ & & (z\overline{z})^{\frac{1-n_j}{2}} \end{pmatrix} \otimes \chi_j(z). \tag{6.2.3}$$

Écrivons, de la façon usuelle,
$$\chi_j = z^{p_j}\overline{z}^{q_j} \quad (p_j - q_j \in \mathbb{Z},\ p_j + q_j \in \sqrt{-1}\,\mathbb{R}).$$

Définissons $(P_1, \dots P_{n+1}, Q_1, \dots Q_{n+1})$, modulo l'action diagonale de $\mathfrak{S}_{n+1}$: $\tau(P,Q) = (\tau P, \tau Q)$, par
$$(P_{j,k}, Q_{j,k}) = \Big(p_j + \frac{n_j+1-2k}{2}, q_j + \frac{n_j+1-2k}{2}\Big),\ k = 1, \dots, n_j. \tag{6.2.4}$$

Nous allons déduire de la Conjecture d'Arthur :

Lemme 6.2.1. — *Selon l'identification naturelle avec $\mathbb{C}^{n+1}$ d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, le caractère infinitésimal de toute représentation de G associée à ψ est égal à $P \in \mathbb{C}^{n+1}$ (modulo $\mathfrak{S}_{n+1}$).*

Soit en effet φ_ψ le paramètre de Langlands, donné par ses blocs (6.2.4). Noter que puisque σ opère sur $\widehat{G}$ par $g \mapsto w_0{}^tg^{-1}w_0^{-1}$, on a (*cf.* 6.2.3) :
$$\{(P_i, Q_i)\} = \{(-Q_i, -P_i)\}$$
où les (P_i, Q_i) $(i = 1, \dots n+1)$ sont les couples $(P_{j,k}, Q_{j,k})$.

Soit $G^* = \mathrm{U}(a,b)$, où $a+b = n+1$ et $a-b = 0$ ou 1, la forme intérieure quasi-déployée de G. D'après la classification de Langlands (§ 4.3-4.4 pour $\mathrm{U}(n,1)$; [**72**]), φ_ψ définit *toujours* une famille finie de représentations de G^*. (La condition (4.3.3) qui restreignait fortement les paramètres pour $G = \mathrm{U}(n,1)$ n'intervient pas ici, car tous les paraboliques ${}^L P$ de ${}^L G^* = {}^L G$ proviennent de G^*.) Par ailleurs G et G^* ont la même complexification, et leurs sous-algèbres de Cartan complexifiées s'identifient donc canoniquement (modulo l'action de $\mathfrak{S}_{n+1}$). Il est alors implicite dans l'article d'Arthur [**3**, § 4], et il résulte explicitement de la description par Adams, Barbasch et Vogan des paquets d'Arthur ([**1**] : voir en particulier Thm. 22.7, Cor. 19.16 et les définitions précédant celui-ci) que le caractère infinitésimal d'une représentation *de* G associée à ψ est égal, modulo cette identification, à celui d'une représentation de G^* associée par Langlands à φ_ψ. Nous calculons donc dans G^*.

Il suffit alors de suivre les constructions de Langlands [**72**]. Soit ${}^L M \subset {}^L G^* = {}^L G$ un sous-groupe de Levi minimal contenant l'image de φ_ψ. Alors ${}^L M$ est le groupe dual d'un sous-groupe de Levi cuspidal M^* de G^*, donc de la forme

$$M^* \cong (\mathbb{C}^\times)^s \times \mathrm{U}(A,B)$$

où $A - B = a - b = 0$ ou 1, et $n + 1 = N + 2s$, avec $N = A + B$; si G^* est défini par la matrice J^* du § 4.2, M^* s'écrit sous forme diagonale par blocs :

$$M^* = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & z_s & & & & \\ & & & u & & & \\ & & & & \overline{z}_s^{-1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \overline{z}_1^{-1} \end{pmatrix} \right\},$$

$u \in \mathrm{U}(A,B)$.

D'après des calculs analogues à ceux du § 4.3 (et résultant de [**72**]), un paramètre $\varphi = \varphi_\psi : W_\mathbb{R} \to {}^L M$, minimal, se restreint alors à $W_\mathbb{C} \subset W_\mathbb{R}$ en

$$\varphi^0 : z \longmapsto \begin{pmatrix} \eta_1(z) & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \eta_s(z) & & & & & & \\ & & & (z/\overline{z})^{\alpha_1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & (z/\overline{z})^{\alpha_N} & & & \\ & & & & & & \eta_s(\overline{z})^{-1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \eta_1(\overline{z})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Les caractères qui figurent dans cette expression sont ceux de (6.2.3) – pour tous les blocs – et leurs exposants $z^p\overline{z}^q$ sont donc donnés par (6.2.4). Vu la condition de minimalité, φ^0 définit une représentation de la série discrète de M^* (modulo le centre) et on a donc comme au § 4.3 : $\alpha_j \in \frac{N+1}{2} + \mathbb{Z}$; le bloc central de φ^0 définit une représentation δ de la série discrète de $\mathrm{U}(A, B)$ et les représentations associées de G^* sont des sous-quotients de

$$\mathrm{ind}_{P^*}^{G^*}(\eta \otimes \delta \otimes \mathbb{1}) =: I$$

où $P^* = M^* N^*$ est le parabolique associé et $\eta \otimes \delta$ désigne

$$\eta_1(z_1) \cdots \eta_s(z_s)\delta(u), \ \ (z, u) \in M^*.$$

Une sous-algèbre de Cartan (réelle) de M^* est donnée par

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ X = \begin{pmatrix} z_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && z_s &&&&&& \\ &&& \sqrt{-1}\ \theta_1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \sqrt{-1}\ \theta_N &&& \\ &&&&&& -\overline{z}_s && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& -\overline{z}_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

($z_i \in \mathbb{C}$, $\theta_j \in \mathbb{R}$.)

Posons $\eta_i = z^{a_i} \overline{z}^{b_i}$ $(a_i - b_i \in \mathbb{Z})$ pour $i = 1, \ldots, s$. Le calcul usuel du caractère infinitésimal d'une induite donne

$$\lambda_I(X) = \sum_{i=1}^{s} a_i z_i + \sum_{i=1}^{s} b_i \overline{z}_i + \sqrt{-1} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \theta_j.$$

En fonction des valeurs propres X_i de X, ceci s'écrit

$$\lambda_I(X) = \sum_{i=1}^{s} a_i X_i - \sum_{i=1}^{s} b_i X_{i+s} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j X_{2r+j}.$$

Mais, revenant à l'expression de φ^0, on voit que le paramètre P associé est donné par

$$P = (a_1, \ldots, a_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, -b_1, \ldots, -b_s).$$

D'où le Lemme.

Remarque. — Des calculs analogues s'appliquent aux groupes orthogonaux, et nous les admettrons (Lemme 6.3.1, Lemme 6.4.1).

Considérons alors une représentation irréductible unitaire π de G et son paramètre de Langlands $\varphi_\pi : W_\mathbb{R} \to {}^L G$.

Cas A. π est une série discrète ou une limite de série discrète

Dans ce cas (*cf.* Ch. 4) son caractère infinitésimal est

$$P = (p_1, \dots p_{n+1}),\ p_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},\ p_i \equiv \frac{n}{2}\ \ [1].$$

Alors π est toujours associée à un paramètre d'Arthur tempéré : on prend $r = n+1$, r_j triviale et

$$\chi_j = z^{p_j}(\overline{z})^{-p_j} \quad j = 1, \dots n+1;$$

Cas B. π est un quotient de Langlands $J(\sigma, \chi)$ où σ est une représentation de $\mathrm{U}(n-1)$ *et χ un caractère de* $\mathbb{C}^\times$ (*cf.* § 4.3)

Écrivons $\chi = z^\alpha(\overline{z})^\beta$, $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$.

Si la représentation $J(\sigma, \chi)$ est unitaire on sait que la donnée (σ, χ) doit être *hermitienne* [**64**](1). Le groupe de Weyl $W(G, M)$ s'identifie à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, opérant trivialement sur $\mathrm{U}(n-1)$ et par $z \mapsto \overline{z}^{-1}$ sur $\mathbb{C}^\times$. On a alors $\overline{\chi} = \chi^{-1}$ ou $\overline{\chi} = w \cdot \chi^{-1}$ $(w \neq 1)$ soit : χ unitaire ou $\overline{\chi}(z) = \chi(\overline{z})$, *i.e.* : $\alpha + \beta \in i\mathbb{R}$ ou $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Le second cas (si $\alpha + \beta \neq 0$) correspond aux représentations non tempérées.

Par ailleurs le caractère infinitésimal de σ est représenté par $P_\sigma \in \mathbb{C}^{n-1}$,

$$P_\sigma = (m_1, \dots m_{n-1}),\ m_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},\ m_i \equiv \frac{n}{2}\ \ [1],\ m_{i+1} > m_i.$$

Celui de $J(\sigma, \chi)$ est donné par

$$P = (P_\sigma, \alpha, -\beta) \tag{6.2.5}$$

qui doit être de la forme (6.2.4).

On en déduit donc que tous les coefficients P_i de (6.2.4) doivent être dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, sauf au plus deux.

Supposons alors que $\alpha \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ($\Leftrightarrow \beta \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$). Il y a deux possibilités que nous examinons maintenant.

La première possibilité est que

$$\alpha = p_j \text{ et } -\beta = p_{j'} \text{ avec } j \neq j' \text{ et } n_j = n_{j'} = 1. \tag{6.2.6}$$

D'après (6.2.2) $\chi_j = z^{p_j}(\overline{z})^{q_j}$ apparaît avec $\chi_j^{-\sigma} = z^{-q_j}(\overline{z})^{-p_i}$. Donc $p_{j'} = -q_j$, d'où $\beta = q_j$ et $\alpha + \beta = p_j + q_j \in i\mathbb{R}$; χ est alors unitaire.

La seconde possibilité est que

$$\begin{aligned} \alpha &= p_j + \tfrac{1}{2} \\ -\beta &= p_j - \tfrac{1}{2}. \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Alors $\alpha + \beta = 1$, contrairement à l'hypothèse puisque $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$. On en déduit :

(1) Les auteurs remercient A. Knapp pour d'utiles explications concernant l'état de la classification des représentations unitaires irréductibles.

Lemme 6.2.2. — *Si $J(\sigma,\chi)$ est associée à un paramètre d'Arthur, χ est unitaire ou de la forme*

$$z^{\alpha}\overline{z}^{\beta},\ \ \alpha,\beta \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Nous allons en fait démontrer un résultat bien plus précis. Rappelons (§ 4.5) que nous ne nous intéressons qu'aux représentations σ apparaissant dans $\Lambda^*\mathfrak{p}$. D'après le § 4.5, on a alors $\sigma = \sigma_{a,b}$ avec $a + b \leqslant n - 1$, et

$$P_\sigma = \Big(\underbrace{\frac{n}{2},\dots,\frac{n}{2}-(b-1)}_{b};\frac{n}{2}-(b+1),\dots,-\frac{n}{2}+(a+1);\underbrace{-\frac{n}{2}+(a-1),\dots,-\frac{n}{2}}_{a}\Big)$$

où chacune des suites d'entiers séparés par « ; » est une suite d'entiers consécutifs et décroissants.

De plus, si $J(\sigma,\chi)$ rencontre $\Lambda^*\mathfrak{p}$, on doit avoir, avec les notations précédentes :

$$a - b = \alpha - \beta$$

(§ 4.5). Donc χ est de la forme

$$\chi(z) = (z/\overline{z})^{\frac{a-b}{2}}(z\overline{z})^{s} \tag{6.2.8}$$

et l'on s'intéresse au cas où J n'est pas tempérée, donc $s \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Proposition 6.2.3. — *On suppose que $\sigma = \sigma_{ab}$ et que χ est de la forme (6.2.8) avec s réel > 0. Alors $J(\sigma,\chi)$ est unitaire et associée à un paramètre d'Arthur si, et seulement si :*

$$s = \frac{n-(a+b)}{2} - k,\ \ 0 \leqslant k \leqslant \Big[\frac{n-(a+b)}{2}\Big]. \tag{6.2.9}$$

Nous ne démontrons que l'implication directe, la seule utilisée dans ces notes. Soit $s_0 = \frac{n-(a+b)}{2}$. On sait que le dual unitaire de $G = \mathrm{U}(n,1)$ est complètement classifié. Nous utilisons la description des résultats par Knapp [**66**, § 3] – voir aussi [**68**]. Il en résulte que $I(\sigma,\chi)$ est irréductible et unitaire pour $s \in\,]0, s_0[$ et que $J(\sigma,\chi)$ est (irréductible) unitaire pour $s = s_0$. Pour $s > s_0$ la représentation n'est pas unitaire. Si le caractère infinitésimal de $J(s,\chi)$ provient d'un paramètre d'Arthur, nous devons vérifier que s vérifie (6.2.9).

Nous revenons à la description du caractère infinitésimal P donnée avant le Lemme 6.2.2. On sait déjà que $\alpha,\beta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, avec $\alpha \equiv \beta[1]$.

Lemme 6.2.4. — *La relation* (6.2.9) *est équivalente à*

$$\alpha,\beta \equiv \frac{n}{2}\ \ [1].$$

En effet, puisque $\alpha - \beta = a - b$ et a, b sont entiers :

$$s = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(\alpha-\beta) + \beta = \frac{1}{2}(a-b) + \beta \equiv \frac{1}{2}(a+b) + \beta\ \ [1]$$

donc $s \equiv \frac{n-(a+b)}{2} \Leftrightarrow \alpha,\beta \equiv \frac{n}{2}$.

Nous démontrons donc que $\alpha, \beta \equiv \frac{n}{2}$ si $J(\sigma, \chi)$ est associée à un paramètre d'Arthur. Pour ceci nous allons reformuler la paramétrisation des représentations du groupe unitaire.

Les paramètres de Langlands (§ 4.3) ou d'Arthur (§ 6.1) sont de la forme

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & {}^LG \arrow[dl] \\ & \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) & \end{tikzcd}$$

avec $W = W_{\mathbb{R}}$ (Langlands) ou $W_{\mathbb{R}} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (Arthur). (On notera simplement S le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Dans le cas de Langlands, on désigne donc par ψ le paramètre noté φ au § 4.3). Le groupe W est de la forme $W^0 \amalg W^0 j$, où j s'envoie sur $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$; il contient un élément, noté $-1 \in W^0$, tel que $j^2 = -1$. Enfin, on notera $z \mapsto \overline{z}$ l'action de j, par conjugaison, sur W^0.

On suppose que G est un groupe unitaire de rang m ; ${}^LG$ est décrit au § 4.2. La donnée de ψ se réduit aux données suivantes :

(Aa) $\quad \psi_0 : W_0 \to \widehat{G} = \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$

(Ab) $\quad \psi(j) = (g, \sigma), \ g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$

avec les restrictions suivantes :

(A1) $\quad (g, \sigma)^2 = \psi_0(-1)$ soit :
$\quad gw_0{}^t g^{-1} w_0^{-1} = \psi_0(-1)$

(A2) $\quad (g, \sigma)\psi_0(z)(g, \sigma)^{-1} = \psi_0(\overline{z})$, soit :
$\quad gw_0{}^t\psi_0(z)^{-1} w_0^{-1} g^{-1} = \psi_0(\overline{z}) \ (z \in W_0)$.

Posant $h = gw_0$, et en tenant compte de l'identité ${}^t w_0 = (-1)^{m+1} w_0$, les conditions se réécrivent :

(A1) $\quad h\, {}^t h^{-1} = (-1)^{m+1} \psi_0(-1)$

(A2) $\quad h\, {}^t\psi_0(z)^{-1} h^{-1} = \psi_0(\overline{z}) \ (z \in W_0)$.

Notons $V = \mathbb{C}^m$ et soit V^* l'espace dual, lui aussi identifié à $\mathbb{C}^m$ par la base duale. On peut alors considérer ψ_0, h comme les données suivantes :

(Ba) $\quad \psi_0 =$ représentation de W_0 sur V.

(Bb) $\quad H =$ isomorphisme $V^* \to V$.

Soit $H^* : V^* \to V$ l'adjoint. Les contraintes sont alors :

(B1) $\quad H\psi_0^*(z)H^{-1} = \psi_0(\overline{z}) \quad (z \in W_0)$

(B2) $\quad H(H^*)^{-1} = (-1)^{m+1}\psi_0(-1)$.

Réciproquement, une donnée (B) détermine, après choix d'une base de V, une donnée (A).

Nous appliquons ceci à une donnée d'Arthur, avec $m = n + 1$. Donc $W = W_{\mathbb{R}} \times S$; la représentation ψ_0 de $W_0 = \mathbb{C}^\times \times S$ est semi-simple, unitaire en restriction à $\mathbb{C}^\times$.

Les considérations du début du § 6.2 s'appliquent. On supposera

(6.2.10) *Les coefficients* P_i **de** $P \in \mathbb{C}^{n+1}$ – *cf.* (6.2.4) – *appartiennent à* $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, **et** $(n-1)$ *d'entre eux sont* $\equiv \frac{n}{2}[1]$.

Cette condition est vraie dans notre cas, *cf.* (6.2.5). La Proposition 6.2.3 sera donc démontrée modulo le

Lemme 6.2.5. — *Il n'existe pas de donnée* (B) *vérifiant* (6.2.10), *et telle que les deux autres coefficients* $\alpha, -\beta$ *de* P *vérifient* $\alpha, \beta \equiv \frac{n+1}{2}$ [1] *et soient distincts.*

(Remarquer que $\alpha = -\beta$ correspond à $s = 0$, donnée permise pour une représentation d'Arthur.)

Soient χ_j les caractères apparaissant dans l'expression (6.2.1) de ψ_0. Alors $\chi_j = z^p\overline{z}^q$, avec $p \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $p-q \in \mathbb{Z}$ et $p+q \in i\mathbb{R}$. Donc $\chi_j = (z/\overline{z})^{p_j}$, $p_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Soit par ailleurs φ_ψ la représentation de $W_\mathbb{R}$ déduite de ψ et φ_ψ^0 sa restriction à $\mathbb{C}^\times$. On a donc *sous* φ_ψ^0 :

$$V = \bigoplus_\eta V(\eta)$$

où $\eta = z^p(\overline{z})^q$ décrit les caractères de $\mathbb{C}^\times$. Soit

$$T = \bigoplus_{\eta'} V(\eta')$$

où η' décrit les caractères tels que $p \notin \frac{n}{2} + \mathbb{Z}$. Par hypothèse T est de dimension 2.

Lemme 6.2.6. — T *est stable par* $W_0 = \mathbb{C}^\times \times S$ (*pour la représentation* ψ_0)

En effet V se décompose canoniquement sous W_0 en somme d'espaces isotypiques, eux-mêmes multiples de représentations $\chi \otimes \rho$ où $\chi = (z/\overline{z})^p$ et ρ est une représentation irréductible de S. Sous φ_ψ^0, $\chi \otimes \rho$ donne des caractères d'exposants $p' = p + \frac{r-1}{2}$+(entier) où $r = \dim \rho$. Ils ont tous la même parité (mod 1), d'où le Lemme 6.2.6.

Soit $T^* \subset V^*$ défini de façon analogue. D'après (B1) H envoie T sur T^*, et c'est alors un isomorphisme. Donc la donnée B définie par (T, ψ_0, H) vérifie les conditions (B) ; dans (B2) $\psi_0(-1)$ est bien sûr un endomorphisme de T. Il faut alors distinguer deux cas :

Cas I. — $T \cong \chi \otimes \rho_2$ où ρ_2 est irréductible.

On peut considérer $H : T \to T^*$ comme une forme bilinéaire sur T. D'après (B1) H est invariante par S, donc antisymétrique. D'après (B2) on a donc :

$$-1 = (-1)^n \psi_0(-1) = (-1)^n \chi(-1)$$

ce qui implique que $\chi = (z/\overline{z})^p$ avec $p \equiv \frac{n+1}{2}$ [1]. Mais alors les exposants $\{p+\frac{1}{2}, p-\frac{1}{2}\}$ de φ_ψ apparaissant dans T appartiennent à $\frac{n}{2} + \mathbb{Z}$, contradiction.

Cas II. — $T \cong \chi_1 \oplus \chi_2$, S opérant trivialement.

Dans ce cas $\chi_1 = (z/\overline{z})^\alpha$, $\chi_2 = (z/\overline{z})^\beta$ et donc $\chi_1 \neq \chi_2$ par hypothèse. Soient (e, f) la base de T associée et e^*, f^* la base duale de T^*. D'après (B1) $H : V^* \to V$ s'écrit dans ces bases sous forme diagonale, $H = \left(\begin{smallmatrix} a & \\ & b \end{smallmatrix}\right)$. Alors $H(H^*)^{-1} = 1$ d'où (B2) $\psi_0(-1) = (-1)^n$. Or $\psi_0(-1) = (-1)^{2\alpha}(= (-1)^{2\beta})$ donc $\alpha \equiv \beta \equiv \frac{n}{2}$ [1].

Ceci achève la démonstration du Lemme 6.2.5.

En combinant la Proposition 6.2.3, le calcul des représentations σ apparaissant dans Λ^{pq} (§ 4.5) et le calcul des valeurs propres correspondantes (Prop. 4.5.1), on en déduit :

Corollaire 6.2.7. — *Soit π une représentation unitaire irréductible de G telle que* $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^p\mathfrak{p}^+ \otimes \Lambda^q\mathfrak{p}^-, \pi) \neq 0$ *est associée à un paramètre d'Arthur. Alors la valeur propre λ de l'opérateur de Casimir dans $\mathcal{H}_\pi$ vérifie :*

$$\lambda = [n - a - b]^2 - [n - a - b - 2k]^2,$$

pour $a \leqslant p$, $b \leqslant q$, $(p - q) - (a - b) \in \{-1, 0, 1\}$ et $0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n-(a+b)}{2}\right]$.

6.3. $G = \mathrm{SO}(n, 1)$, n impair

Le groupe G n'est pas connexe : son sous-groupe compact maximal est $K = S(\mathrm{O}(n) \times \{\pm 1\}) \cong \mathrm{O}(n)$. Puisque les Conjectures d'Arthur ne s'appliquent *a priori* qu'aux groupes algébriques (et que nous préférons éviter de considérer le groupe des spineurs), nous considérons néanmoins, pour l'instant, G. Posons $n = 2\ell - 1$, de sorte que ℓ est le rang absolu de G.

Pour n impair, le groupe dual ${}^LG$ a pour composante neutre

$$\widehat{G} = \mathrm{SO}(n + 1, \mathbb{C}). \tag{6.3.1}$$

Par ailleurs, si ℓ est *pair*, G est forme intérieure de $G^* = \mathrm{SO}(\ell - 1, \ell + 1)$; si ℓ est *impair* G est forme intérieure de $G^* = \mathrm{SO}(\ell, \ell)$, le groupe G^* étant toujours quasi-déployé, et déployé dans le second cas. On en déduit que

$$ {}^LG = \mathrm{SO}(n + 1, \mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \text{ (produit direct)}, \qquad \ell \text{ impair} \tag{6.3.2}$$

$$ {}^LG = \mathrm{SO}(n + 1, \mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \qquad \ell \text{ pair}. \tag{6.3.3}$$

Dans le second cas, l'action de $\sigma \neq 1$ respecte un sous-groupe de Borel, par exemple les matrices triangulaires supérieures dans $\mathrm{SO}(2m + 2, \mathbb{C}) \cong \mathrm{SO}(2m + 2, \widehat{J})$ où $\widehat{J}$ est la forme de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_\ell \\ 1_\ell & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle doit aussi respecter un épinglage (voir § 4.2).

Supposons G défini par la forme de matrice

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 1_{n-1} & \\ \hline & \begin{matrix} & 1 \\ 1 & \end{matrix} \end{array}\right).$$

Le sous-groupe parabolique propre (minimal) de G s'écrit

$$P = MN$$

où $M \subset G$ stabilise la décomposition correspondante $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}^2$; donc

$$M = S(\mathrm{O}(n-1) \times \mathrm{O}(1,1))$$

où

$$\mathrm{SO}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^\times \right\} \tag{6.3.4}$$

et

$$\mathrm{O}(1,1) = \langle \mathrm{SO}(1,1), \varepsilon \rangle, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}. \tag{6.3.5}$$

On pose

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} : a > 0 \right\} \subset \mathrm{O}(1,1) \subset M, \tag{6.3.6}$$

et

$$M = {}^0MA \tag{6.3.7}$$

où la composante neutre de ${}^0M$ est ${}^0M^0 \cong \mathrm{SO}(n-1)$ et ${}^0M = \langle {}^0M^0, \varepsilon, \eta \rangle$,

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(1,1).$$

Si τ est une représentation irréductible de ${}^0M$ et $s \in \mathbb{C}$ soit

$$I(\tau, s) = \mathrm{ind}_{{}^0MAN}^G (\tau \otimes e^s \otimes 1).$$

On utilise la classification de Langlands (*cf.* Ch. 4 pour $\mathrm{U}(n,1)$, [**72**]). Pour n impair G n'a pas de série discrète. Alors toute représentation admissible irréductible de G est de la forme suivante :

$$\pi \text{ est un sous-module de } I(\tau, s); \tau \in \widehat{{}^oM}, s \in i\mathbb{R}. \tag{6.3.8}$$

$$\begin{aligned} &\pi \text{ est l'unique quotient irréductible } J(\tau, s) \text{ de } I(\tau, s) \\ &\text{où } \rho \in \widehat{{}^oM} \text{ et } \mathrm{Re}(s) > 0. \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

Dans le cas (6.3.8) on sait en fait que $I(\tau, s)$ est irréductible ; sa restriction à G^0 est en fait irréductible, *cf.* [**65**]. [2]

Par ailleurs, une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ est donnée par les matrices

$$X = \left(\begin{array}{ccccc|cc} & -x_1 & & & & & \\ x_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & -x_{\ell-1} & & \\ & & & x_{\ell-1} & & & \\ \hline & & & & & x_\ell & \\ & & & & & & -x_\ell \end{array}\right) \quad (x_i \in \mathbb{R}). \tag{6.3.10}$$

Posons $y_i = \sqrt{-1}\ x_i$ $(i \leqslant \ell - 1)$, $y_\ell = x_\ell$. Les coordonnées y donnent un isomorphisme

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^\ell$$

pour lequel les racines dans $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sont réelles. Le groupe de Weyl W est $\mathfrak{S}_\ell \ltimes \{\pm 1\}^{\ell-1}$, $\{\pm 1\}^{\ell-1}$ étant le sous-groupe de $\{\pm 1\}^\ell$, opérant diagonalement, défini par $\Pi s_i = 1$.

Soit ${}^0\mathfrak{h} = \mathbb{C}^{\ell-1}$, naturellement plongé dans $\mathfrak{h}$. C'est une algèbre de Cartan pour ${}^0\mathfrak{m}$. Soit $\lambda_\tau \in {}^0\mathfrak{h}^*$ le caractère infinitésimal de τ, défini modulo $\mathfrak{S}_{\ell-1} \ltimes (\pm 1)^{\ell-2}$. Celui de $I(\tau, s)$ est alors

$$\lambda_{\tau,s} = (\lambda_\tau, s) \in \mathbb{C}^\ell. \tag{6.3.11}$$

Si $J(\tau, s)$ est unitaire on a $s \in i\mathbb{R}$ ou $s \in \mathbb{R}$ (ceci n'étant possible que pour certaines valeurs de τ).

Soit alors

$$\psi : W_\mathbb{R} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow {}^LG$$

un paramètre d'Arthur pour G, et considérons

$$\psi_0 : \mathbb{C}^\times \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{G} \subset \mathrm{GL}(2\ell, \mathbb{C}).$$

Le paramètre $(\varphi_\psi)_{|\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \to \widehat{G}$, étant semi-simple, est (à conjugaison près) d'image contenue dans le tore maximal $\widehat{T} = \{\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_l, x_l^{-1}, \ldots, x_1^{-1})\}$ de $\widehat{G}$. On peut donc écrire $\varphi_\psi = (\eta_1, \ldots, \eta_l, \eta_l^{-1}, \ldots, \eta_1^{-1})$ où les η_i sont des caractères, de la formes $z^{P_i}(\overline{z})^{Q_i}$. Posons $P' = (P_1, \ldots, P_l) \in \mathfrak{h} = \mathbb{C}^l$. On vérifie aisément que P' est uniquement défini modulo W. Noter que le paramètre $P \in \mathbb{C}^{2l} = \mathbb{C}^{n+1}$ associé à $\varphi_\psi : \mathbb{C}^* \to \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$ est $(P', -P')$. Si π est dans le paquet d'Arthur défini par ψ, on a alors :

Lemme 6.3.1. — *Le caractère infinitésimal de π est paramétré par P'.*

---

[2] Nous n'utiliserons pas ce fait, sauf en notant dans tous les cas $J(\tau, s)$ la représentation π pour uniformiser les notations.

On l'admettra (voir la démonstration du Lemme 6.2.1).

Nous supposons maintenant π donnée par (6.3.8) ou (6.3.9). Puisque τ est une représentation irréductible de ${}^0M$, son caractère infinitésimal λ_τ est celui de sa restriction à ${}^0M^0 = \mathrm{SO}(n-1)$; on a alors, le tore maximal de $\mathrm{SO}(n-1)$ étant paramétré par (6.3.10) :

$$\lambda_\tau = \mu_\tau + \rho$$
$$\rho = (\ell-2, \ell-1, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{\ell-1}$$
$$\mu_\tau = (\mu_1, \ldots, \mu_{\ell-1}),\ \mu_1 \in \mathbb{Z},\ \mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{\ell-1}, \mu_{\ell-2} + \mu_{\ell-1} \geqslant 0$$

de sorte que λ_τ vérifie :

$$\begin{aligned}&\lambda_\tau = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{\ell-1})\\ &\lambda_i \in \mathbb{Z},\ \lambda_1 > \cdots > \lambda_{\ell-1},\ \lambda_{\ell-2} + \lambda_{\ell-1} > 0.\end{aligned} \tag{6.3.12}$$

Par ailleurs le caractère infinitésimal de π est paramétré par

$$P' = (\lambda_\tau, s). \tag{6.3.13}$$

Or le paramètre $(P', -P')$ associé à

$$\psi : W_{\mathbb{C}} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C})$$

vérifie les conditions du § 6.2 ; on a :

$$(P', -P') = (p_j + \tfrac{n_j+1-2k}{2}) \quad \mathrm{mod}\ \ \mathfrak{S}_{n+1}. \tag{6.3.14}$$

Nous allons utiliser ces relations pour démontrer :

Lemme 6.3.2. — *Si le caractère infinitésimal d'une représentation unitaire $\pi = J(\tau, s)$ est associé à un paramètre d'Arthur, $s \in i\mathbb{R}$ ou $s \in \mathbb{Z}$.*

La démonstration est un peu compliquée. Nous démontrons d'abord sous les mêmes hypothèses :

Lemme 6.3.3. — *$s \in i\mathbb{R}$ ou $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.*

Supposons en effet $s \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. D'après (6.3.13) et (6.3.14),

$$s = p + \tfrac{m+1-2k}{2} \text{ pour un } p = p_j,\ m = n_j. \tag{6.3.15}$$

Donc $p \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Par ailleurs la représentation $\chi \otimes r_j$ de $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, où $\chi = z^p(\overline{z})^q$, apparaît avec sa duale. Puisque $p \neq 0$, $\chi \neq \widetilde{\chi} = \chi^{-1}$. Si $m > 1$, (6.3.14) contient au moins quatre coordonnées $\notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, contrairement à (6.3.13). Donc $m = 1$. Enfin, on a $p + q \in i\mathbb{R}$ (χ est unitaire), $p - q \in \mathbb{Z}$ donc $p \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} + i\mathbb{R}$. Or $p = s$ et $s \in i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}$ car π est unitaire. D'où $s \in i\mathbb{R}$.

Pour démontrer le Lemme 6.3.2, nous pouvons maintenant supposer que $s \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$; nous allons dériver une contradiction. Noter que si $s \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, $p \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$; puisque $p + q \in i\mathbb{R}$ et $p - q \in \mathbb{Z}$ on a $p = -q$. Par ailleurs l'argument précédent montre toujours que $m = 1$.

Supposons d'abord ℓ *impair*, de sorte (6.3.2) que

$$^L G = \mathrm{SO}(2\ell, \mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}).$$

Vu comme représentation de $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{SL}(2)$, on a

$$\psi = \chi \oplus \chi^{-1} \oplus \sum_i \chi_i \otimes r_i,$$
$$\chi(z) = (z/\overline{z})^p.$$

Pour tout i, on a de plus $p_i + \frac{n_i+1}{2} \in \mathbb{Z}$, où $\chi_i(z) = z^{p_i}(\overline{z})^{q_i}$, toujours d'après (6.3.13).

Soit j l'élément extérieur de $W_\mathbb{R}$ et $\psi(j) = (x, \sigma) \in {}^L G$. Alors

$$\psi(\overline{z}, g) = x\psi(z, g)x^{-1} \quad (z \in \mathbb{C}^\times, g \in \mathrm{SL}(2)). \tag{6.3.16}$$

Notons ψ_f la partie de ψ dont la restriction φ_ψ est d'exposants fractionnaires :

$$\psi_f(z) = (\chi(z), \chi^{-1}(z), 1, \ldots, 1).$$

On déduit facilement de (6.3.16), en considérant les classes d'isotypie de ψ vue comme représentation de degré 2ℓ, que

$$\psi_f(\overline{z}) = x\,\psi_f(z)x^{-1}. \tag{6.3.17}$$

En utilisant la forme explicite de $\widehat{G}$ donnée après (6.3.6), on peut écrire à conjugaison près ψ_f sous la forme

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} \chi &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& \ddots && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& \chi^{-1} \end{pmatrix}$$

où on a abrégé $\chi(z)$ en χ. L'équation (6.3.17) montre que x préserve la décomposition isotypique associée de $\mathbb{C}^{2\ell}$, donc s'écrit (x', x'') où $x' \in \mathrm{O}(2)$, $x'' \in \mathrm{O}(2\ell-2)$ et $\det(x')\det(x'') = 1$.

Alors l'équation (6.3.17) implique

$$x' \begin{pmatrix} \chi & \\ & \chi^{-1} \end{pmatrix} (x')^{-1} = \begin{pmatrix} \chi^{-1} & \\ & \chi \end{pmatrix}$$

d'où $x' = \begin{pmatrix} & u^{-1} \\ u & \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2) - \mathrm{SO}(2)$; $u \in \mathbb{C}^\times$. Mais alors $(x')^2 = 1$, contrairement à la condition

$$\psi(j)^2 = \psi(j^2) = \psi(-1) = \begin{pmatrix} -1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& \ddots && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& -1 \end{pmatrix}.$$

(Car $p \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $p \notin \mathbb{Z}$ donc $\chi(-1) = -1$.)

Le calcul est similaire mais plus compliqué si ℓ est pair. Dans ce cas $\widehat{G} = \mathrm{SO}(2\ell, \mathbb{C})$,

$${}^LG = \mathrm{SO}(2\ell, \mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$$

et nous devons préciser l'action de σ donnée par Langlands. Avec le même choix de la forme quadratique $\widehat{J}$, $\widehat{G}$ a pour sous-groupe de Borel $\widehat{B}$ ses matrices triangulaires supérieures ; l'action de σ doit préserver $\widehat{G}$, $\widehat{B}$, le tore diagonal $\widehat{T}$ ainsi qu'un épinglage (§ 4.2), et être non triviale. Sur $\widehat{T}$, on a alors

$$\sigma : \begin{pmatrix} x_1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && x_\ell &&& \\ &&& x_\ell^{-1} && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& x_1^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && x_\ell^{-1} &&&& \\ &&& x_\ell &&& \\ &&&& x_{\ell-1}^{-1} && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& x_1^{-1} \end{pmatrix}$$

de sorte que σ échange les deux dernières racines $\alpha_{\ell-1} = x_{\ell-1}\, x_\ell^{-1}$ et $\alpha_\ell = x_{\ell-1}x_\ell$ du diagramme de Dynkin. Un calcul simple montre que

$$\sigma(g) = w\ g\ w^{-1} \quad (g \in \widehat{G})$$

$$w = \begin{pmatrix} 1_{\ell-1} &&& \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ &&& 1_{\ell-1} \end{pmatrix}$$

est l'automorphisme cherché. Noter que $w \in O(\widehat{J})$.

Considérons alors, comme pour ℓ impair, l'homomorphisme ψ_f :

$$\begin{tikzcd} W_{\mathbb{R}} \arrow[rr] \arrow[dr] && {}^LG \arrow[dl] \\ & \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) & \end{tikzcd}$$

Quitte à conjuguer ψ_f par un élément de $\widehat{G}$, on peut supposer que $\psi_f(\mathbb{C}^\times) \subset \widehat{T}$, puis que

$$\psi_f(z) = \begin{pmatrix} \chi & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \chi^{-1} \end{pmatrix}$$

avec la notation précédente. Soit $\psi(j) = (x, \sigma)$. Alors

$$\begin{aligned} \psi_f(\overline{z}) = \begin{pmatrix} \chi^{-1} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \chi \end{pmatrix} &= (x, \sigma)\psi_f(z)(x, \sigma)^{-1} \\ &= x \ w \ \psi_f(z) w^{-1} x^{-1} \\ &= x \ \psi_f(z) x^{-1}. \end{aligned}$$

Ceci implique comme dans le cas impair que $x \in \mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(2\ell - 2)$ et que sa composante dans $\mathrm{O}(2)$ est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} & z^{-1} \\ z & \end{smallmatrix}\right)$. Comme précédemment, ceci contredit le fait que $\chi(j^2) = \chi(-1) = -1$.

D'après la classification du dual unitaire de G, on déduit alors du Lemme 6.3.2 :

Proposition 6.3.4. — *Toute représentation unitaire π de G dont le caractère infinitésimal est associé à un paramètre d'Arthur est de la forme $J(\tau, s)$ où*

(i) $s \in i\mathbb{R}$

ou

(ii) $s \in \mathbb{Z}$.

Pour τ fixé, et dans le cas (ii), la longueur du paramètre $s \in \mathbb{Z}$ est bien sûr contrôlée par la description, connue, des séries complémentaires (voir par exemple [**64**] pour un guide sur la littérature concernant les duaux unitaires). Si $\tau = \mathbb{1}$ (représentation triviale), $\pi_{\tau,s}$ est unitaire si $|s| \leqslant \ell - 1$; pour les représentations d'Arthur, on a donc $s \in i\mathbb{R}$ ou $\pm s = 1, 2, \ldots, \ell - 1 = \frac{n-1}{2}$; le point $s = \ell - 1$ est la demi-somme des racines ρ de N dans A, et correspond à la représentation triviale. La Conjecture 6.1.2 implique donc une conjecture de Burger et Sarnak [**20, 19**] :

Conjecture 6.3.5

(i) *Si une représentation sphérique $J(1, s)$ apparaît dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ pour un sous-groupe de congruence, $s \in i\mathbb{R}$ ou $s \in \{1, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$.*

(ii) *En particulier les valeurs propres du laplacien associées vérifient*
$\lambda \geqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$
ou $\lambda = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - k^2$, $k = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$.
La première valeur propre $\neq 0$ *est donc* $\lambda_1 = n-2$.

La partie (ii) résulte de (i) et des calculs suivant le Théorème 2.3.2.

6.4. $G = \mathrm{SO}(n,1)$, n pair

On supposera $n \geqslant 4$. Les remarques du § 3 sur la connexité restent exactes, ainsi que la description du parabolique minimal. Par ailleurs G est un groupe de type C_ℓ où $\ell = \frac{n}{2}$ et son dual (connexe) est

$$\widehat{G} = \mathrm{Sp}(\ell) = Sp\Big(\frac{n}{2}\Big),$$

le groupe symplectique de la forme alternée sur $\mathbb{C}^{2\ell}$ de matrice

$$\widehat{J} = \begin{pmatrix} & & & & & -1 \\ & & & & \iddots & \\ & & & -1 & & \\ & & 1 & & & \\ & \iddots & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}.$$

On a dans $\widehat{G}$ un tore maximal $\widehat{T}$ formé des matrices

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & x_\ell & & & \\ & & & x_\ell^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & x_1^{-1} \end{pmatrix} \tag{6.4.1}$$

et un sous-groupe de Borel $\widehat{B}$ formé des matrices triangulaires supérieures de $\widehat{G}$. Enfin

$${}^L G = \widehat{G} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}).$$

Une représentation admissible irréductible π de G est de la forme suivante :

(6.4.2) π appartient à la série discrète.

(6.4.3) π est un sous-module de $I(\tau, s)$, $\tau \in \widehat{{}^0M}$, $s \in i\mathbb{R}$.

(6.4.4) $\pi = J(\tau, s)$ est l'unique quotient irréductible de $I(\tau, s)$ où $\tau \in \widehat{{}^0M}$ et $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Comme dans (6.3.10) une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ est donnée par les matrices

$$X = \left(\begin{array}{cccccc|cc} & -x_1 & & & & & & \\ x_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & & -x_{\ell-1} & & & \\ & & & x_{\ell-1} & & & & \\ & & & & & 0 & & \\ \hline & & & & & & x_\ell & \\ & & & & & & & -x_\ell \end{array}\right) \quad (x_i \in \mathbb{R}).$$

On a de nouveau $\mathfrak{h}_0 \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^\ell$, le groupe de Weyl étant maintenant $\mathfrak{S}_\ell \ltimes \{\pm 1\}^\ell = W$.

Soit $\psi : W_{\mathbb{R}} \times \mathrm{SL}(2) \to {}^L G$ un paramètre d'Arthur, et $P \in \mathbb{C}^{2\ell}$ le paramètre holomorphe associé (*cf.* § 6.3). Alors $P = (P', -P')$ où $P' \in \mathbb{C}^\ell$ est bien défini modulo l'action de W. Donc P' définit naturellement un élément de $\mathfrak{h}^*$, et on peut vérifier :

Lemme 6.4.1. — *P' est le caractère infinitésimal de la représentation associée à φ_ψ.*

La démonstration est laissée au lecteur (*cf.* Lemme 6.2.1).

Par ailleurs ${}^0\mathfrak{m} \cong \mathfrak{so}(n-1)$, l'algèbre de Lie ${}^0\mathfrak{m}$ s'identifie à $\mathbb{C}^{\ell-1} \subset \mathbb{C}^\ell$ et λ_τ vérifie

$$\lambda_\tau = \mu_\tau - \rho$$

$$\rho = (\ell - \tfrac{3}{2}, \ell - \tfrac{5}{2}, \dots, \tfrac{1}{2}) \tag{6.4.5}$$

$$\mu_\tau = (\mu_1, \dots, \mu_{\ell-1}),\ \mu_i \in \mathbb{Z},\ \mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{\ell-1} \geqslant 0. \tag{6.4.6}$$

On a donc

$$\lambda_\tau = (\lambda_i),\ \lambda_i \in \tfrac{1}{2} + \mathbb{Z},\ \lambda_1 > \cdots > \lambda_{\ell-1} > 0. \tag{6.4.7}$$

Le caractère infinitésimal de $I(\tau, s)$ est alors

$$\lambda_I = (\lambda_\tau, s). \tag{6.4.8}$$

Lemme 6.4.2. — *Si le caractère infinitésimal d'une représentation unitaire $\pi = J(\tau, s)$ est associé à un paramètre d'Arthur, $s \in i\mathbb{R}$ ou $s \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.*

Tout d'abord, le Lemme 6.3.3 s'applique et montre que $s \in i\mathbb{R}$ ou $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Supposons alors $s = p \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$. Comme après le Lemme 6.3.3, $\psi : \mathbb{C}^\times \times \mathrm{SL}(2) \to \mathrm{GL}(2\ell, \mathbb{C})$ est de la forme

$$\psi = \chi \oplus \chi^{-1} \oplus \sum_i \chi_i \otimes r_i$$

où $\chi(z) = (z/\overline{z})^p$. Les exposants holomorphes P_j apparaissant dans $\sum_i \chi_i \otimes r_i$ doivent être dans $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ d'après (6.4.8) et (6.4.7). On peut considérer comme dans le § 6.3 la partie de ψ d'exposants P *entiers* :

$$\psi_e(z) = (\chi(z), \chi^{-1}(z), 1) \quad \text{et} \quad \psi_e(\overline{z}) = x\ \psi_e(z) x^{-1}$$

où $\psi(j) = (x, \sigma) \in \widehat{G} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$.

Revenant au choix (6.4.1) de $\widehat{T}$ on peut supposer

$$\psi_e(z) = \begin{pmatrix} \chi & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \chi^{-1} \end{pmatrix}, \quad \psi_e(\overline{z}) = \begin{pmatrix} \chi^{-1} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \chi \end{pmatrix}.$$

Alors x préserve la décomposition correspondante $\mathbb{C}^{2\ell} = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^{2\ell-2}$ et s'écrit $x = (x', x'')$, $x' \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, $x'' \in \mathrm{Sp}(\ell - 1, \mathbb{C})$. La relation $x\psi_e(z)x^{-1} = \psi_e(\overline{z})$ implique $x' = \left(\begin{smallmatrix} & b \\ a & \end{smallmatrix}\right)$, $-ab = 1$, d'où $x'^2 = -1$ contrairement à $\chi(j^2) = \chi(-1) = 1$.

Comme précédemment, on en déduit :

Proposition 6.4.3. — *Toute représentation unitaire π de G dont le caractère infinitésimal est associé à un paramètre d'Arthur est de la série discrète, ou égale à un sous-module de $I(\tau, s)$ ou à $J(\tau, s)$ avec*

(i) $s \in i\mathbb{R}$

(ii) $s \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

Pour les représentations sphériques, on a alors :

***Conjecture 6.4.4* (Burger-Sarnak)**

(i) *Si une représentation $J(1, s)$ ($s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$) apparaît dans $L^2(\Gamma\backslash G)$, alors* $\pm s \in \{\frac{1}{2}, \dots \frac{n-1}{2}\}$.

(ii) *En particulier les valeurs propres du laplacien associées vérifient*

$\lambda \geqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$

ou $\lambda = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2} - k\right)^2 \; k = 0, 1, \dots \frac{n-2}{2}$.

La première valeur propre $\neq 0$ *est* $\lambda_1 = n - 2$. [3]

6.5. Existence des représentations exceptionnelles

Comme nous l'avons rappelé les Conjectures 6.3.5 et 6.4.4 sont dues à Burger et Sarnak (*cf.* [**20**]). Il montrent de plus que si G est un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe orthogonal sur un corps de nombres et tel que $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SO}(n, 1)$, les valeurs propres

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - k^2$$

pour $k = \frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2} - \left[\frac{n-1}{2}\right]$ apparaissent dans le spectre automorphe de G. Ce qui montre que les Conjectures 6.3.5 et 6.4.4 sont optimales.

[3] Pour $n > 2$! C'est $\frac{1}{4}$ pour $n = 2$.

Le Corollaire 6.2.7 et les Conjectures d'Arthur impliquent une conjecture beaucoup plus forte que la Conjecture A pour tout groupe G tel que $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(n,1)$. Nous pensons que cette conjecture est optimale dans le même sens que la conjecture de Burger et Sarnak est optimale. La grande différence est que nous considérons cette fois tout le spectre automorphe et non seulement le spectre sphérique. Bien que nous ne sachions pas montrer que cette conjecture est optimale, nous pouvons montrer le résultat suivant.

Théorème 6.5.1. — *Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe unitaire sur un corps de nombres et tel que $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(n,1)$. Soient a,p,q,k des entiers vérifiant*

- $0 \leqslant a \leqslant p,q \leqslant n$;
- $p-q \in \{-1,0,1\}$;
- $0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n-2a}{2}\right]$.

Alors, le dual automorphe $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ de G contient une représentation unitaire irréductible π de G telle que $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^p\mathfrak{p}^+ \otimes \Lambda^q\mathfrak{p}^-, \pi) \neq 0$ et dont la valeur propre de l'opérateur de Casimir dans $\mathcal{H}_\pi$ est égale à

$$(n-2a)^2 - (n-2a-2k)^2.$$

Démonstration. — Nous conservons les notations du § 2. On suppose que $\sigma = \sigma_{a,b}$ et que χ est de la forme (6.2.8) avec $s = \frac{n-2a-2k}{2}$. La Proposition 4.5.1 implique que $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^p\mathfrak{p}^+ \otimes \Lambda^q\mathfrak{p}^-, J(\sigma,\chi)) \neq 0$.

D'après [**90**, Theorem 7.7] la représentation $J(\sigma,\chi)$ apparaît discrètement comme sous-représentation de $L^2(H\backslash G)$ pour $H = S(\mathrm{U}(a+k) \times \mathrm{U}(n-a-k,1))$.

Puisque G provient (par restriction des scalaires) d'un groupe unitaire sur un corps de nombres, il contient un $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique H tel que $H^{\mathrm{nc}} \cong S(\mathrm{U}(a+k) \times \mathrm{U}(n-a-k,1))$. Un théorème de Burger, Li et Sarnak [**19**] affirme que si $\rho \in \widehat{H}_{\mathrm{Aut}}$ et si π est une représentation de G faiblement contenue dans l'induite (unitaire) de ρ de H à G, alors $\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$. La représentation triviale 1_H de H appartient bien évidemment à $\widehat{H}_{\mathrm{Aut}}$ et l'induite de H à G de 1_H est $L^2(H\backslash G)$. La représentation $J(\sigma,\chi)$ appartient donc à $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$.

Remarquons que d'après les Propositions 6.3.4 et 6.4.3, les Conjectures d'Arthur impliquent la Conjecture A pour tout groupe G vérifiant $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SO}(n,1)$. On peut de même facilement déduire des Propositions 6.3.4 et 6.4.3 et des Conjectures d'Arthur, une généralisation de la Conjecture A. Cette conjecture n'est certainement pas optimale. Un (fastidieux) exercice d'algèbre linéaire permettrait sûrement d'obtenir un résultat optimal.

CHAPITRE 7

THÉORÈME DE LUO-RUDNICK-SARNAK

Dans ce chapitre nous démontrons la légère généralisation suivante d'un théorème de Luo, Rudnick et Sarnak [**75**].

***Théorème 7.0.1* (Approximation de Ramanujan).** — *Soit F un corps de nombres et $\mathbb{A}$ son anneau des adèles. Soit n un entier $\geqslant 2$ et $\pi = \otimes_v \pi_v$ une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$. Alors, en chaque place archimédienne v la représentation π_v est un quotient de Langlands*

$$\pi_v = J(\sigma_{1,v}, \ldots, \sigma_{r,v}),$$

où les $\sigma_{j,v}$ sont comme dans les Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 et tels que pour tout $j = 1, \ldots, r$,

$$|\operatorname{Re}(t_{j,v})| \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2+1}.$$

Remarquons que depuis l'annonce de nos résultats dans [**10**] W. Müller nous a informé qu'il a, conjointement avec B. Speh, lui aussi étendu le résultat de Luo, Rudnick et Sarnak aux représentations non ramifiées.

Fixons un corps de nombres F, $\mathbb{A}$ son anneau des adèles et n un entier $\geqslant 2$.

7.1. Fonction L de Rankin-Selberg

Dans cette section nous faisons quelques rappels concernant la théorie de Rankin-Selberg. De la même manière que l'on a associé à une représentation automorphe une fonction L, la théorie de Rankin-Selberg associe une fonction L (dite de Rankin-Selberg) à toute paire de représentations irréductibles unitaires cuspidales $\pi = \otimes_v \pi_v$ et $\pi' = \otimes_v \pi'_v$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A})$ respectivement. Cette fonction L est encore donnée par un produit eulérien

$$L(s, \pi \times \pi') = \prod_v L(s, \pi_v \times \pi'_v)$$

où v décrit l'ensemble des places de F.

Nous allons commencer par décrire les facteurs locaux $L(s,\pi_v\times\pi'_v)$ lorsque v est une place finie, puis lorsque v est une place archimédienne ; enfin nous nous intéresserons à la fonction L globale.

Fixons v une place de F. Dans les trois prochaines sous-sections nous nous intéressons aux facteurs locaux, pour simplifier les notations on notera $F = F_v$ et $\pi = \pi_v$. Pour l'instant F est donc un corps local de caractéristique zéro.

Si π est une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, nous notons $\widetilde{\pi}$ *la représentation contragrédiente* que l'on peut réaliser dans le même espace que π par l'action $\widetilde{\pi}(g) = \pi({}^tg^{-1})$.

Soient π_i, $i = 1,\ldots,r$, des représentations admissibles irréductibles des groupes respectifs $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$. Alors $\pi = \pi_1\otimes\cdots\otimes\pi_r$ est une représentation admissible irréductible de
$$M(F) = \mathrm{GL}_{n_1}(F)\times\cdots\times\mathrm{GL}_{n_r}(F).$$
Pour $\underline{s} = (s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{C}^r$ soit $\pi_i[s_i]$ la représentation de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ définie par
$$\pi_i[s_i](g) = |\det|^{s_i}\pi_i(g),\quad g\in\mathrm{GL}_{n_i}(F).$$
Nous notons
$$I_P^G(\pi,\underline{s}) = \mathrm{ind}_{P(F)}^{G(F)}(\pi_1[s_1]\otimes\cdots\otimes\pi_r[s_r])$$
l'induite unitaire.

Remarquons que Shalika a démontré que la composante locale d'une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ est générique [**95**]. Et Jacquet et Shalika [**60**] ont montré que toute représentation irréductible unitaire générique π de $\mathrm{GL}_n(F)$ est équivalente à une représentation induite (et non seulement à un quotient)
$$\pi = I_P^G(\sigma,\underline{s}),$$
où P est un sous-groupe parabolique standard de type $(n_1,\ldots,n_r)$ de GL_n, $\underline{s}\in\mathbb{C}^r$ et σ est une représentation de carré intégrable de $M_P(F)$, le sous-groupe de Levi de P sur le corps local F [(1)].

Dans les trois sous-sections suivantes nous décrivons les facteurs locaux de la fonction L de Rankin-Selberg lorsque F est non-archimédien, ou bien égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$.

7.1.1. F non-archimédien. — Comme nous l'avons rappelé, toute représentation irréductible unitaire générique π de $\mathrm{GL}_n(F)$ est isomorphe à une représentation induite
$$\pi\cong I_P^G(\sigma,\underline{s}), \tag{7.1.1}$$
où P est défini par une partition $(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ avec $n_{i+1}\leqslant n_i$, $\underline{s} = (s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{C}^r$ et $\sigma = \otimes_i\sigma_i$ où chaque σ_i est une représentation de la série discrète de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$.

[(1)] C'est la seule propriété des représentations génériques que nous utiliserons, le lecteur non familier peut donc accepter comme « boîte noire » le fait que toute représentation π comme ci-dessus est obtenue comme induite, résultat qui découle de [**95**] et [**60**].

Soit π (resp. π') une représentation irréductible unitaire générique de $\mathrm{GL}_n(F)$ (resp. $\mathrm{GL}_{n'}(F)$). On définit le facteur local de Rankin-Selberg pour la paire (π, π') par récurrence. Tout d'abord, $L(s, \pi \times \pi') = L(s, \pi' \times \pi)$. Si π est comme dans (7.1.1),

$$L(s, \pi \times \pi') = \prod_{i=1}^{r} L(s + s_i, \sigma_i \times \pi'). \tag{7.1.2}$$

Il reste à définir les facteurs L pour des représentations de la série discrète. De la même manière que les représentations de la série discrète forment les blocs pour construire toutes les représentations unitaires génériques du groupe linéaire, ce sont les représentations supercuspidales qui forment les blocs élémentaires permettant de construire toutes les représentations de la série discrète. Rappelons donc qu'une représentation ρ de $\mathrm{GL}_d(F)$ est dite *supercuspidale* si elle n'apparaît comme sous-quotient d'aucune représentation induite d'un sous-groupe parabolique propre. Les représentations supercuspidales sont donc exactement les représentations qui ne sont pas accessibles par le procédé d'induction. Les représentations supercuspidales peuvent aussi être caractérisées par le fait que leurs coefficients matriciels sont à support compact modulo le centre de G. On renvoie à [**12**] pour plus de détails sur les représentations supercuspidales.

Soit maintenant σ une représentation de carré intégrable de $\mathrm{GL}_m(F)$. D'après Bernstein et Zelevinski [**12**], il existe un diviseur $d|m$, un sous-groupe parabolique standard P de type $(d, \ldots, d)$ de $\mathrm{GL}_m(F)$, et une représentation ρ de $\mathrm{GL}_d(F)$ supercuspidale, irréductible et unitaire tels que σ soit l'unique quotient irréductible de la représentation induite $\mathrm{ind}_P^G(\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r)$, où $r = m/d$ et $\rho_j = \rho[j - (r+1)/2]$. On désigne cette représentation par $\sigma = \Delta(r, \rho)$.

Soit donc $\sigma = \Delta(r, \rho)$ (resp. $\sigma' = \Delta(r', \rho')$) une représentation de la série discrète de $\mathrm{GL}_m(F)$ (resp. $\mathrm{GL}_{m'}(F)$), avec $m \leqslant m'$. On pose alors :

$$L(s, \sigma \times \sigma') = \prod_{j=1}^{r} L\Big(s + \frac{r + r'}{2} - j, \rho \times \rho'\Big). \tag{7.1.3}$$

La description des facteurs L de Rankin-Selberg est donc réduite au cas de deux représentations supercuspidales. Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations supercuspidales de respectivement $\mathrm{GL}_{k_1}(F)$ et $\mathrm{GL}_{k_2}(F)$. Lorsque ρ_2 n'est pas un twist de ρ_1, *i.e.* s'il n'existe pas de nombre complexe $t \in \mathbb{C}$ tel que $\rho_2 \cong \rho_1[t]$, en particulier lorsque $k_1 \neq k_2$, on pose $L(s, \rho_1 \times \rho_2) = 1$. On pose enfin

$$\begin{aligned} L(s, \rho_1 \times \widetilde{\rho}_1[t]) &= L(s + t, \rho_1 \times \widetilde{\rho}_1) \\ &= (1 - q^{-a(t+s)})^{-1}, \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

où $a|k_1$ est l'ordre du groupe cyclique des caractères non ramifiés $\chi = |\det|^u$ tels que $\rho_1 \otimes \chi \cong \rho_1$. Si $\sigma_i = \Delta(r_i, \rho_i)$, (7.1.3) et (7.1.4) impliquent

$$\begin{aligned} L(s + 2\operatorname{Re}(s_i), \sigma_i \times \widetilde{\sigma}_i) &= \prod_{j=1}^{r_i} L(s + 2\operatorname{Re}(s_i) + r_i - j, \rho \times \widetilde{\rho}) \\ &= \prod_{j=1}^{r_i} (1 - q^{-a_i(s+2\operatorname{Re}(s_i)+r_i-j)})^{-1}, \end{aligned}$$

où a_i est l'ordre du groupe cyclique des caractères non ramifiés χ tels que $\rho_i \otimes \chi$ est isomorphe à ρ_i. On en déduit que si $\pi = I_P^G(\sigma, \underline{s})$ est une représentation irréductible unitaire de la série principale de $\mathrm{GL}_n(F)$ et si i est un indice tel que $\operatorname{Re}(s_i) > 0$, il existe un facteur de la fonction $L(s, \pi \times \widetilde{\pi})$ ayant un pôle en $s = -2\operatorname{Re}(s_i)$.

7.1.2. $F = \mathbb{R}$. — Soit π (resp. π') une représentation irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{R})$). On définit les facteurs locaux réels de la fonction L de Rankin-Selberg attachée à la paire de représentation (π, π') à partir des représentations semisimples φ et φ' du groupe de Weil $W_\mathbb{R}$ de degrés respectifs n et n' associées par la correspondance de Langlands locale aux représentations π et π'.

Nous avons déjà décrit les facteurs L associés à une représentation semisimple du groupe de Weil $W_\mathbb{R}$. Remarquons que le produit tensoriel $\varphi \otimes \varphi'$ définit une représentation semisimple du groupe de Weil $W_\mathbb{R}$ de degré nn'. On définit alors :

$$L(s, \pi \times \pi') = L(s, \varphi \otimes \varphi'). \tag{7.1.5}$$

Supposons que la représentation π est isomorphe au quotient de Langlands $J(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ où les σ_j sont comme dans le Théorème 3.1.1. D'après le Théorème 3.4.3 on déduit de l'unitarité de π que pour chaque entier $j \in [1, r]$

– soit t_j est imaginaire pure,

– soit $\operatorname{Re}(t_j) > 0$ et il existe $k \neq j$ tel que $n_k = n_j$, $l_k = l_j$ (ceux-ci pouvant être égaux à un entier comme à l'un des signes $+$ ou $-$) et $t_j = -\overline{t}_k$.

En utilisant la description des facteurs L donnée par la Proposition 3.3.3, on déduit de (7.1.5) que $L(s, \pi \times \widetilde{\pi})$ est un produit de facteurs Gamma de la forme

$$4(2\pi)^{-2s-2t_i+2t_j-\max(l_i,l_j)}\Gamma\Big(s + t_i - t_j + \frac{|l_i - l_j|}{2}\Big)\Gamma\Big(s + t_i - t_j + \frac{l_i + l_j}{2}\Big)$$

ou

$$4(2\pi)^{-2s-l_i}\Gamma\Big(s + t_i - t_j + \frac{l_i}{2}\Big)\Gamma\Big(s + t_j - t_i + \frac{l_i}{2}\Big)$$

ou

$$\pi^{-\frac{s+t_i-t_j+\varepsilon_{i,j}}{2}}\Gamma\Big(\frac{s + t_i - t_j + \varepsilon_{i,j}}{2}\Big),$$

où $\varepsilon_{i,j} \in \{0, 1\}$ avec $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_i + \varepsilon_j \bmod 2$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$ et les ε_i correspondent aux signes dans la Proposition 3.3.3. Puisque π est unitaire on déduit de ces formules que pour tout indice $i \leqslant r$ tel que $\mathrm{Re}(t_i) \neq 0$, le L-facteur local $L(s, \pi \times \widetilde{\pi})$ contient un facteur Gamma du type

$$\Gamma(s + 2\,\mathrm{Re}(t_i)) \qquad \text{ou} \qquad \Gamma\Big(\frac{s + 2\,\mathrm{Re}(t_i)}{2}\Big).$$

Puisque la fonction Gamma $\Gamma(s)$ n'a pas de zéro, on conclut que $L(s, \pi \times \pi')$ a son premier pôle en $s = 2 \max |\mathrm{Re}(t_i)|$. Rappelons enfin que le Théorème 3.4.3 implique que $\mathrm{Re}(t_i) < \frac{1}{2}$ puisque π est générique.

7.1.3. $F = \mathbb{C}$. — Le cas $F = \mathbb{C}$ se traite de la même manière que le cas $F = \mathbb{R}$. Soit π une représentation irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ isomorphe au quotient de Langlands $J(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, où les σ_j sont comme dans le Théorème 3.1.2. Comme dans le cas réel, le fait que π est unitaire et générique se traduit par le fait que la partie réelle de chaque t_i est strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ et que pour chaque i tel que $\mathrm{Re}(t_i) \neq 0$ il existe $k \neq i$ tel que $p_k - q_k = p_i - q_i$ et $t_i = -\bar{t}_k$.

Le groupe de Weil est cette fois égal à $\mathbb{C}^*$ et les facteurs locaux de la fonction L de Rankin-Selberg se définissent comme dans le cas réel. On obtient en particulier que

$$L(s, \pi \times \widetilde{\pi}) = \prod_{i,j=1}^{n} 2(2\pi)^{-\frac{s + t_i - t_j + \frac{|p_i - q_i - p_j - q_j|}{2}}{2}} \Gamma\Big(s + t_i - t_j + \frac{|p_i - q_i - p_j - q_j|}{2}\Big).$$

Comme dans le cas réel, on en déduit que si π est unitaire, le facteur L : $L(s, \pi \times \widetilde{\pi})$, contient pour tout indice i tel que $\mathrm{Re}(t_i) \neq 0$ la fonction

$$\Gamma(s + 2\,\mathrm{Re}(t_i))$$

comme facteur. Puisque la fonction Gamma $\Gamma(s)$ n'a pas de zéro, on conclut que $L(s, \pi \times \pi')$ a son premier pôle en $s = 2 \max |\mathrm{Re}(t_i)|$.

7.1.4. La fonction L globale. — Les sous-sections précédentes permettent de définir au moins formellement la fonction L de Rankin-Selberg globale d'une paire de représentations unitaires cuspidales automorphes $\pi = \otimes_v \pi_v$ et $\pi' = \otimes_v \pi'_v$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A})$, où $\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles d'un corps de nombre F. La fonction L de Rankin-Selberg est définie par le produit eulérien :

$$L(s, \pi \times \pi') = \prod_v L(s, \pi_v \times \pi'_v), \tag{7.1.6}$$

où v décrit l'ensemble des places de F.

Comme pour la fonction zêta de Riemann l'intérêt de cette fonction dans l'étude des représentations automorphes provient de ce qu'elle définit une vraie fonction analytique lorsque s est dans un demi-plan et que cette fonction se prolonge méromorphiquement au plan complexe tout entier et vérifie une équation fonctionnelle. Il est devenu récemment possible de démontrer toutes ces propriétés, ainsi que d'autres, de la fonction L de Rankin-Selberg en adoptant le point de vue naturel des représentations intégrales développé par Jacquet, Shalika, Piatetski-Shapiro ([**56**], [**61**]) et, plus récemment, Cogdell et Piatetski-Shapiro [**29**]. C'est le point de vue que nous adoptons ici. Soulignons néanmoins que les résultats que nous utiliserons pouvaient être obtenus en combinant les méthodes de Jacquet, Shalika et Piatetski-Shapiro [**56**], Shahidi [**93**], [**94**], [**92**] et Moeglin et Waldspurger [**78**]. Cette dernière approche est celle utilisée par Müller et Speh.

On résume les propriétés de la fonction L de Rankin-Selberg dont nous aurons besoin dans le théorème suivant.

Théorème 7.1.1. — *Chaque produit (7.1.6) est convergent lorsque la partie réelle de s est suffisamment grande. Ces produits définissent des fonctions holomorphes de s qui se prolongent méromorphiquement au plan complexe tout entier. Les fonctions ainsi obtenues, et toujours notées $L(s, \pi \times \pi')$, ont les propriétés suivantes :*

(1) *Chaque fonction $L(s, \pi \times \pi')$ reste bornée dans les bandes verticales (loin de ses pôles).*

(2) *Elles satisfont à l'équation fonctionnelle*

$$L(s, \pi \times \pi') = \varepsilon(s, \pi \times \pi') L(1 - s, \widetilde{\pi} \times \widetilde{\pi}'),$$

où le facteur ε est une fonction entière de s de la forme

$$\varepsilon(s, \pi \times \pi') = W(\pi \times \pi')(D_{F/\mathbb{Q}}^{nn'} N(\pi \times \pi'))^{\frac{1}{2} - s},$$

où $D_{F/\mathbb{Q}}$ est le discriminant du corps de nombre F, $W(\pi \times \pi')$ est un nombre complexe de module 1, et $N(\pi \times \pi')$ un nombre entier.

(3) *Si $n' < n$, la fonction $L(s, \pi \times \pi')$ est entière.*

(4) *Si $n' = n$, la fonction $L(s, \pi \times \pi')$ a au plus des pôles simples qui interviennent si et seulement si $\pi \cong \widetilde{\pi}'[i\sigma]$ avec σ réel, et qui dans ce cas sont $s = -i\sigma$ et $s = 1 - i\sigma$.*

Il n'est pas question de donner une preuve complète de ce résultat ici, une récente prépublication de Cogdell et Piatetski-Shapiro [**29**] contient la preuve complète de ce Théorème. Afin d'en faciliter la reconstitution, nous donnons les grandes idées de la preuve lorsque $n = n'$, le cas qui nous intéressera par la suite.

Soient donc (π, V_π) et $(\pi', V_{\pi'})$ deux représentations cuspidales unitaires de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. Soient $\omega = \otimes \omega_v$ et $\omega' = \otimes \omega'_v$ leurs caractères centraux. Fixons $\psi = \otimes \psi_v$ un caractère additif continu non trivial de $\mathbb{A}$ qui soit trivial sur F et $\varphi \in V_\pi$ et $\varphi' \in V_{\pi'}$ deux formes cuspidales.

Commençons par démontrer la convergence de la fonction $L(s, \pi \times \pi')$ définie comme produit eulérien.

Soit S un ensemble fini de places de F, contenant toutes les places à l'infini et tel que pour toute place $v \notin S$ on ait π_v et π'_v non ramifiées, *i.e.* ayant un vecteur fixe sous l'action du compact maximal.

Pour les places $v \notin S$, pour lesquelles π_v et π'_v sont donc non ramifiées, on vérifie que

$$L(s, \pi_v \times \pi'_v) = \det(I - q_v^{-s} A_{\pi_v} \otimes A_{\pi'_v})^{-1}$$

où A_{π_v} et $A_{\pi'_v}$ sont les paramètres de Satake associés à π_v et π'_v et dont les valeurs propres sont toutes de valeur absolue inférieure à $q_v^{1/2}$. Donc, *cf.* [**58**] pour plus de détails, la fonction L partielle

$$L^S(s, \pi \times \pi') = \prod_{v \notin S} L(s, \pi_v \times \pi'_v) = \prod_{v \notin S} \det(I - q_v^{-s} A_{\pi_v} \otimes A_{\pi'_v})^{-1}$$

est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$. On en déduit la même chose pour la fonction L globale.

Il nous faut maintenant démontrer les propriétés analytiques de cette fonction. Comme dans le cas classique de la fonction zêta de Riemann, il va s'agir de représenter la fonction L de Rankin-Selberg par une intégrale. C'est là qu'interviennent des séries d'Eisenstein. Commençons donc par décrire ces séries d'Eisenstein.

Pour construire ces séries d'Eisenstein on peut suivre [**58**]. Dans GL_n soit P_n le sous-groupe stabilisant le vecteur $(0, \ldots, 0, 1)$. On a $P_n \backslash \mathrm{GL}_n \cong F^n - \{0\}$. Si on désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur $\mathbb{A}^n$, alors chaque $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ définie une fonction lisse sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$, invariante à gauche sous $P_n(\mathbb{A})$, par $g \mapsto \Phi((0, \ldots, 0, 1)g) = \Phi(e_n g)$. Considérons la fonction

$$F(g, \Phi; s) = |\det(g)|^s \int_{\mathbb{A}^*} \Phi(a e_n g) |a|^{ns} \omega(a) \omega'(a) d^* a.$$

Si $P'_n = Z_n P_n$ est le sous-groupe parabolique de GL_n associé à la partition $(n-1, 1)$ alors on prouve [**58**] que l'on peut former les séries d'Eisenstein

$$E(g, \Phi; s) = \sum_{\gamma \in P'_n(F) \backslash \mathrm{GL}_n(F)} F(\gamma g, \Phi; s).$$

Si l'on remplace dans cette somme la fonction F par sa définition et que l'on permute le signe somme et l'intégrale, on obtient que ces séries convergent absolument dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$ [**58**] et que

$$E(g, \Phi; s) = |\det(g)|^s \int_{F^* \backslash \mathbb{A}^*} \Theta'_\Phi(a, g) |a|^{ns} \omega(a) \omega'(a) d^* a$$

qui est essentiellement l'expression de la série d'Eisenstein comme transformée de Mellin de la série Thêta

$$\Theta_\Phi(a, g) = \sum_{\xi \in F^n} \Phi(a \xi g),$$

où au-dessus on a noté $\Theta'_\Phi(a, g) = \Theta_\Phi(a, g) - \Phi(0)$. En appliquant la transformée de Poisson à Θ_Φ, on obtient [**58**, Section 4] :

Proposition 7.1.2. — *La série d'Eisenstein $E(g, \Phi; s)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan $\mathbb{C}$ avec au plus des pôles simples en $s = -i\sigma, 1 - i\sigma$ quand $\omega\omega'$ définit un caractère non ramifié de la forme $\omega(a)\omega'(a) = |a|^{in\sigma}$. Comme fonction de g elle est lisse et à croissance lente et comme fonction de s elle reste bornée dans les* *bandes verticales (loin des pôles possibles), uniformément pour g dans un compact. Elle vérifie de plus une équation fonctionnelle.*

Pour chaque paire de formes cuspidales $\varphi \in V_\pi$ et $\varphi' \in V_{\pi'}$ on peut considérer l'intégrale

$$I(s;\varphi,\varphi',\Phi) = \int_{Z_n(\mathbb{A})\,\mathrm{GL}_n(F)\backslash\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})} \varphi(g)\varphi'(g)E(g,\Phi;s)dg.$$

Celle-ci est bien définie puisque les formes cuspidales sont rapidement décroissantes. Elle définit donc une fonction méromorphe de s, bornée dans les bandes verticales loin des pôles et elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$I(s;\varphi,\varphi',\Phi) = I(1-s;\widetilde{\varphi},\widetilde{\varphi}',\widehat{\Phi}),$$

provenant de l'équation fonctionnelle de la série d'Eisenstein, où $\widetilde{\varphi}(g) = \varphi((g^t)^{-1})$ et de même pour $\widetilde{\varphi}'$.

Ces intégrales sont des fonctions entières sauf si $\omega(a)\omega'(a) = |a|^{in\sigma}$ est non ramifié. Dans ce cas, les résidus de cette intégrale en $s = -i\sigma$ et $s = 1 - i\sigma$ définissent des dualités invariantes entre π et $\pi'[-i\sigma]$ ou de manière équivalente entre $\widetilde{\pi}$ et $\widetilde{\pi}'[i\sigma]$. Ainsi un résidu ne peut être non nul que si $\pi \cong \widetilde{\pi}[i\sigma]$ et réciproquement, on peut dans ce cas trouver φ, φ' et Φ tel que ce résidu ne soit pas nul.

Pour relier nos intégrales aux produits eulériens, on remplace φ et φ' par leur décomposition en séries de Fourier qui est dans ce cas de la forme

$$\varphi(g) = \sum_{\gamma\in N_n(F)\backslash P_n(F)} W_\varphi(\gamma g),$$

où W_φ est la fonction de Whittaker sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ associée à φ définie par ψ :

$$W_\varphi(g) = \int_{N_n(F)\backslash N_n(\mathbb{A})} \varphi(ng)\psi(n)dn,$$

ψ étant un caractère non dégénéré de $N_n(F)\backslash N_n(\mathbb{A})$ (*cf.* [**29**]). En développant l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} I(s;\varphi,\varphi',\Phi) &= \int_{N_n(\mathbb{A})\backslash\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})} W_\varphi(g)W_{\varphi'}(g)\Phi(e_ng)|\det(g)|^s dg \\ &=: \Psi(s;W_\varphi,W_{\varphi'},\Phi). \end{aligned}$$

Cette dernière expression converge pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ par une estimée de jauge de Jacquet, Shalika et Piatetski-Shapiro, *cf.* [**29**].

Pour arriver à une expression sous la forme d'un produit Eulérien, on suppose que φ, φ' et Φ se décomposent en produit tensoriels via $\pi = \otimes\pi_v$, $\pi' = \otimes\pi'_v$ et $\mathcal{S}(\mathbb{A}^n) = \otimes\mathcal{S}(F_v^n)$ de telle manière que l'on ait $W_\varphi(g) = \prod_v W_{\varphi_v}(g_v)$, $W_{\varphi'}(g) = \prod_v W_{\varphi'_v}(g_v)$ et $\Phi(g) = \prod_v \Phi_v(g_v)$. Alors,

$$\Psi(s;W_\varphi,W_{\varphi'},\Phi) = \prod_v \Psi_v(s;W_{\varphi_v},W_{\varphi'_v},\Phi_v),$$

où

$$\Psi_v(s; W_{\varphi_v}, W_{\varphi'_v}, \Phi_v) = \int_{N_n(F_v)\backslash \mathrm{GL}_n(F_v)} W_{\varphi_v}(g_v) W_{\varphi'_v}(g_v)\Phi_v(e_n g_v)|\det(g_v)|^s dg_v,$$

qui converge lorsque $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ d'après des estimées de jauges locales de Jacquet, Shalika et Piatetski-Shapiro, *cf.* [**29**].

Nous allons maintenant pouvoir démontrer que la fonction L globale de Rankin-Selberg peut être prolongée méromorphiquement au plan complexe tout entier. Jacquet et Shalika [**61**] montrent que pour un choix approprié de $\varphi \in V_\pi$, $\varphi' \in V_{\pi'}$ et $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)$ on a

$$\det(I - q_v^{-s} A_{\pi_v} \otimes A_{\pi'_v})^{-1} = \Psi_v(s; W_{\varphi_v}, W_{\varphi'_v}, \Phi_v).$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} I(s;\varphi,\varphi',\Phi) &= \Big(\prod_{v\in S} \Psi_v(s; W_{\varphi_v}, W_{\varphi'_v}, \Phi_v)\Big) L^S(s, \pi\times\pi') \\ &= \Big(\prod_{v\in S} \frac{\Psi_v(s; W_{\varphi_v}, W_{\varphi'_v}, \Phi_v)}{L(s,\pi_v\times\pi'_v)}\Big) L(s, \pi\times\pi') \\ &= \Big(\prod_{v\in S} e_v(s; W_{\varphi_v}, W_{\varphi'_v}, \Phi_v)\Big) L(s, \pi\times\pi'). \end{aligned}$$

Chaque fonction $e_v(s; W_{\varphi_v}, W_{\varphi'_v}, \Phi_v)$ est entière. Pour les places non-archimédiennes cela découle du Théorème 2.7 de [**56**] et pour les places archimédiennes cela découle du Théorème 1.2 (et de son Corollaire) de [**29**]. On en déduit que la fonction $L(s,\pi\times\pi')$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe.

Attaquons-nous maintenant à l'équation fonctionnelle. Partons de l'équation fonctionnelle de l'intégrale globale :

$$I(s;\varphi,\varphi',\Phi) = I(1-s; \widetilde{\varphi}, \widetilde{\varphi}', \widehat{\Phi}).$$

Comme plus haut, pour un choix approprié de φ, φ' et Φ,

$$I(s;\varphi,\varphi',\Phi) = \Big(\prod_{v\in S} e_v(s; W_{\varphi_v}, W_{\varphi'_v}, \Phi_v)\Big) L(s, \pi\times\pi')$$

alors que d'un autre côté

$$I(1-s;\widetilde{\varphi},\widetilde{\varphi}',\widehat{\Phi}) = \Big(\prod_{v\in S} e_v(1-s; W_{\widetilde{\varphi}_v}, W_{\widetilde{\varphi}'_v}, \widehat{\Phi}_v)\Big) L(1-s, \widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}').$$

Mais d'après le Théorème 2.7 de [**56**] (pour les places non-archimédiennes) et le Théorème 5.1 de [**61**] (pour les places archimédiennes), pour chaque place $v \in S$ on a

$$e_v(1-s; W_{\widetilde{\varphi}_v}, W_{\widetilde{\varphi}'_v}, \widehat{\Phi}_v) = \big(\omega_{\pi'_v}(-1)\big)^{n-1} \varepsilon(s, \pi_v\times\pi'_v, \psi_v) e_v(s; W_{\varphi_v}, W_{\varphi'_v}, \Phi_v),$$

où le facteur epsilon est décrit explicitement dans les références ci-dessus et $\omega_{\pi'_v}$ est le caractère central de la représentation π'_v.

En combinant tout cela, on obtient

$$L(s,\pi\times\pi')=\left(\prod_{v\in S}\left(\omega_{\pi'_v}(-1)\right)^{n-1}\varepsilon(s,\pi_v\times\pi'_v,\psi_v)\right)L(1-s,\widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}').$$

Le produit intervenant ci-dessus est classiquement noté $\varepsilon(s,\pi\times\pi')$ (il est bien sûr indépendant de ψ). Sa valeur est aisément calculable à l'aide des références citées plus haut.

Nous admettrons que la fonction L reste bornée dans les bandes verticales, propriété démontrée dans [**29**]. Concluons cette section par l'étude des pôles de la fonction L. Ceux-ci sont évidemment reliés aux pôles de l'intégrale globale $I(s;\varphi,\varphi',\Phi)$. On a montré que pour un choix approprié de φ, φ' et Φ,

$$I(s;\varphi,\varphi',\Phi)=\left(\prod_{v\in S}e_v(s;W_{\varphi_v},W_{\varphi'_v},\Phi_v)\right)L(s,\pi\times\pi').$$

D'un autre côté, pour tout $s_0\in\mathbb{C}$ et pour tout v il existe un choix local W_v, W'_v et Φ_v tel que $e_v(s_0;W_v,W'_v,\Phi_v)\neq 0$. Pour les places v archimédiennes c'est démontré dans [**29**, Théorème 1.2 et son Corollaire]. Pour les places v non-archimédiennes cela découle de [**56**, Théorème 2.7] qui décrit chaque facteur L local comme générateur de l'idéal fractionnaire engendré par les intégrales locales correspondantes. Ceci implique l'existence d'un ensemble fini de fonctions $W_{v,i}$, $W'_{v,i}$ et $\Phi_{v,i}$ telles que

$$L(s,\pi_v\times\pi'_v)=\sum_i\Psi(s;W_{v,i},W'_{v,i},\Phi_{v,i})$$

autrement dit

$$1=\sum_i e(s;W_{v,i},W'_{v,i},\Phi_{v,i}).$$

D'où l'on conclut que pour tout $s_0\in\mathbb{C}$ l'un des $e(s_0;W_{v,i},W'_{v,i},\Phi_{v,i})$ doit être non nul.

On déduit des cas locaux que pour chaque $s_0\in\mathbb{C}$, il existe des fonctions globales φ, φ' et Φ telles que

$$\frac{I(s_0;\varphi,\varphi',\Phi)}{L(s_0,\pi\times\pi')}\neq 0.$$

Les pôles de la fonction globale $L(s,\pi\times\pi')$ sont donc exactement ceux de la famille d'intégrales globales $\{I(s;\varphi,\varphi',\Phi)\}$, où φ, φ' et Φ varient. Et l'étude de ces fonctions permet de conclure la démonstration du Théorème 7.1.1.

7.2. Démonstration du Théorème 7.0.1

Soit F un corps de nombres de degré d d'anneau des entiers $\mathcal{O}=\mathcal{O}_F$. Nous noterons $U=U_F$ son groupe des unités et $D=D_{F/\mathbb{Q}}$ son discriminant. Enfin soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F. Pour n un entier $\geqslant 2$, soit $\pi=\otimes\pi_v$ une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ que l'on normalise de façon à ce qu'elle ait un caractère central unitaire. Rappelons que la décomposition $\pi = \otimes \pi_v$ est donnée par un Théorème de Flath [**41**], c'est d'ailleurs en fait un produit tensoriel restreint dans le sens que pour presque toute place v de F, la représentation π_v de $\mathrm{GL}_n(F_v)$ est *non ramifiée i.e.* admet un vecteur $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v)$-invariant.

La fonction L standard, $L(s,\pi)$, associée à π (*cf.* § 3.3) est de la forme :

$$L(s,\pi) = \prod_v L(s,\pi_v).$$

Chaque $L(s,\pi_v)$ est le facteur d'Euler local (*cf.* § 3.3). Puisque π est cuspidale, en chaque place archimédienne v de F, on a rappelé que la représentation π_v de $\mathrm{GL}(n,F_v)$ est générique et s'obtient comme une induite pleine :

$$\pi_v = J(\sigma_{1,v},\dots,\sigma_{r,v}),$$

où chaque $\sigma_{j,v}$ est comme dans les Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2. Le facteur L local $L(s,\pi_v)$ est calculé dans les Propositions 3.3.3 et 3.3.4.

Sous ces notations, la Conjecture de Ramanujan généralisée pour π et pour les places archimédiennes postule que :

$$\mathrm{Re}(t_{j,v}) = 0 \text{ pour tout } j.$$

Jacquet et Shalika [**58, 57**], en utilisant la généricité de π, ont montré que :

$$|\,\mathrm{Re}(t_{j,v})| < \frac{1}{2}. \tag{7.2.1}$$

Remarquons encore une fois (avec [**24**]) que cela découle de la classification de Vogan du dual unitaire de $\mathrm{GL}(n)$ (*cf.* Théorème 3.4.3).

La preuve du Théorème 7.0.1 repose en grande partie sur la théorie de Rankin-Selberg dont on a rappelé les principaux résultats dans la section précédente. Soit π comme ci-dessus et $\widetilde{\pi}$ la représentation contragrédiente de π. Soit S un ensemble fini de places de F.

Si χ est un caractère unitaire de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ soit

$$L^S(s,(\pi\otimes\chi)\times\widetilde{\pi}) = \prod_{v\notin S} L(s,(\pi_v\otimes\chi_v)\times\widetilde{\pi}_v).$$

On peut aussi former la fonction L totale

$$L(s,(\pi\otimes\chi)\times\widetilde{\pi})$$

qui jouit des propriétés données par le Théorème 7.1.1. On en déduit que L^S est holomorphe dans tout le plan complexe (sauf peut-être en $s = 0,1$ si $\pi\otimes\chi \cong \widetilde{\pi}$, et donc pour tout χ en un point au plus, d'abscisse 0 ou 1) car

$$\prod_{v\in S} L(s,(\pi_v\otimes\chi_v)\times\widetilde{\pi}_v)^{-1}$$

est holomorphe.

Comme dans [**75**] la démonstration du Théorème 7.0.1 va reposer sur le théorème suivant qui est le résultat principal de [**75**] :

Théorème 7.2.1. — *Soit β un réel $> 1 - \frac{2}{n^2+1}$, il existe alors un ensemble infini $\mathcal{X}$ de caractères χ de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ tels que :*

(1) $\chi_v = 1$ *($v \in S$)*
(2) $L^S(\beta, (\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi}) \neq 0$.

Idée de la démonstration. — Supposons pour simplifier $F = \mathbb{Q}$ et $S = \{\infty\}$. Un caractère de Dirichlet primitif χ de $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ vérifie le point 1. si et seulement s'il est pair. Considérons donc un tel caractère et supposons en outre son conducteur q premier. On peut vérifier que

$$W((\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi}) = W(\pi \times \widetilde{\pi})\chi(N(\pi \times \widetilde{\pi})) \left(\frac{G_\chi}{\sqrt{q}}\right)^{n^2},$$

où G_χ désigne la somme de Gauss associée à χ. La fonction $L^\infty(s, (\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi})$ est donnée par un produit eulérien, c'est donc une série de Dirichlet de la forme :

$$L^\infty(s, (\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi}) = \sum_{m \geqslant 1} \frac{\chi(m)\lambda_{\pi\times\widetilde{\pi}}(m)}{m^s}. \tag{7.2.2}$$

La démonstration du Théorème 7.2.1 découle de la proposition suivante.

Proposition 7.2.2. — *Soit β un réel $> 1 - \frac{2}{n^2+1}$. On a :*

$$\sum_{Q \leqslant q \leqslant 2Q} \sum_{\chi(q)} L^\infty(\beta, (\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi}) \gg_{\pi,\beta} \frac{Q^2}{\log Q},$$

où q est premier et χ est un caractère de Dirichlet comme ci-dessus de conducteur q.

La démonstration de cette Proposition consiste à appliquer à la série de Dirichlet (7.2.2) un traitement de théorie analytique des nombres classique en s'appuyant sur le fait que l'on connaît son équation fonctionnelle, d'après le Théorème 7.1.1.

Nous nous intéressons ici au comportement de la série $L^\infty(s, (\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi})$ dans la bande critique $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Il nous faut tout d'abord obtenir une expression maniable de cette série, ce qui n'est pas immédiat puisque nous sommes en dehors de la zone d'absolue convergence. Il existe néanmoins une méthode standard pour obtenir une telle expression : la méthode dite de « l'équation fonctionnelle approchée », *cf.* [**38**] ou [**48**]. Cette méthode repose sur la connaissance de l'équation fonctionnelle et la translation d'intégrales de chemin. Elle permet d'obtenir l'expression suivante, lorsque $0 < \beta < 1$:

$$L(\beta, (\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi}) = \sum_{m \geqslant 1} \frac{\chi(m)\lambda_{\pi\times\widetilde{\pi}}(m)}{m^\beta} V_1\left(\frac{m}{Y}\right)$$
$$+ \frac{W(\pi \times \widetilde{\pi})\chi(N(\pi \times \widetilde{\pi}))}{(q^{n^2}N(\pi \times \widetilde{\pi}))^\beta} \sum_{m \geqslant 1} \frac{\lambda_{\pi\times\widetilde{\pi}}(m)}{m^{1-\beta}} \overline{\chi}(m) \left(\frac{G_\chi}{\sqrt{q}}\right)^{n^2} V_2\left(\frac{mY}{q^{n^2}N(\pi \times \widetilde{\pi})}\right),$$

où $Y \geqslant 1$ est un paramètre et $V_1(x)$, $V_2(x)$ sont des fonctions tests lisses vérifiant

$$\begin{aligned} &V_1(x),\ V_2(x) = O_A(x^{-A}) \text{ quand } x \longrightarrow +\infty, \\ &\qquad V_1(x) = 1 + O_A(x^A),\ V_2(x) \ll_\varepsilon 1 + x^{1-\beta_0-\beta-\varepsilon}, \text{ quand } x \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

avec $\beta_0 < 1$ et pour tout $A \geqslant 0$ et tout $\varepsilon > 0$.

On peut maintenant moyenner l'équation fonctionnelle approchée sur l'ensemble des caractères de Dirichlet primitifs pairs et de conducteurs premiers $q \in [Q, 2Q]$. La somme

$$\sum_{Q \leqslant q \leqslant 2Q} \sum_{\chi} L^\infty(\beta, (\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi})$$

se décompose alors en une somme de deux termes : $T_1 + T_2$ correspondant aux deux termes de l'équation fonctionnelle approchée. En utilisant l'orthogonalité des caractères on montre que

$$T_1 = \sum_{Q \leqslant q \leqslant 2Q} \frac{q-1}{2} + O(QY^{1-\beta+\varepsilon}).$$

Le terme T_2 fait quant à lui intervenir les moments suivants des sommes de Gauss :

$$M_{n^2}(m) = \sum_{\chi} \chi(N(\pi \times \widetilde{\pi}))\overline{\chi}(m) \left(\frac{G_\chi}{\sqrt{q}}\right)^{n^2}. \tag{7.2.4}$$

Cette somme est nulle si $q|m$ et sinon égale

$$\frac{q-1}{2}\{\mathrm{Kl}_{n^2}(r;q) + \mathrm{Kl}_{n^2}(-r;q)\} - (-1)^{n^2}$$

où $r \equiv mN(\pi \times \widetilde{\pi}) \pmod q$ et $\mathrm{Kl}_{n^2}(r;q)$ est la somme de Kloosterman généralisée

$$\mathrm{Kl}_{n^2}(r;q) = \sum_{x_1 x_2 \dots x_{n^2} \equiv r \pmod q} e^{\frac{2i\pi(x_1+x_2+\cdots+x_{n^2})}{q}}.$$

Comme conséquence de sa démonstration de la dernière Conjecture de Weil, Deligne [**30**] majore cette dernière somme par $\ll_n q^{\frac{n^2-1}{2}}$. On obtient donc :

$$M_{n^2}(m) \ll_n q^{\frac{n^2+1}{2}}.$$

À l'aide de cette majoration, des inégalités $\beta_0 < 1$, $\beta > 0$ et de la majoration (7.2.3) de V_2, on obtient :

$$T_2 \ll Q^{1+\frac{n^2+1}{2}} Y^{-\beta}.$$

Donc :

$$T_1 + T_2 = \sum_{Q \leqslant q \leqslant 2Q} \frac{q-1}{2} + O(QY^{1-\beta+\varepsilon}) + O(Q^{1+\frac{n^2+1}{2}} Y^{-\beta}),$$

ce qui implique la Proposition 7.2.2 (et donc le Théorème 7.2.1) en prenant $Y = Q^{\frac{n^2+1}{2}}$.

Montrons maintenant que le Théorème 7.2.1 implique le Théorème 7.0.1.

Fixons dorénavant v une place archimédienne de F et prenons $S = \{v\}$. D'après le Théorème 7.2.1, on peut choisir $\chi \in \mathcal{X}$ et tel que $L(s, (\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi})$ soit une fonction entière. Puisque $\chi_v = 1$,

$$L(s, (\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi}) = L(s, \pi_v \times \widetilde{\pi}_v) L^S(s, (\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi}). \tag{7.2.5}$$

Supposons que s_0, $\mathrm{Re}(s_0) > 0$, soit un pôle de $L(s, \pi_v \times \widetilde{\pi}_v)$. Alors s_0 doit être un zéro de $L^S(s, (\pi \otimes \chi) \times \widetilde{\pi})$. Donc la fonction $L(s, \pi_v \times \widetilde{\pi}_v)$ doit être holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1 - \frac{2}{n^2+1}$.

Supposons d'abord que v est une place réelle. On écrit $\pi_v = J(\sigma_{1,v}, \ldots, \sigma_{r,v})$. Fixons un entier $1 \leqslant i \leqslant r$. Puisque π_v est unitaire, on a vu que l'on peut supposer que $\mathrm{Re}(t_{i,v}) < 0$. En utilisant les calculs des facteurs L locaux rappelés à la section précédente, on en déduit que $L(s, \pi_v \times \widetilde{\pi}_v)$ contient comme facteur $\Gamma(s + 2\,\mathrm{Re}(t_{i,v}))$ ou $\Gamma(\frac{s+2\,\mathrm{Re}(t_{i,v})}{2})$ et que les autres facteurs n'ont pas de zéros. On en déduit que $-2\,\mathrm{Re}(t_{i,v}) > 0$ est un pôle de ce facteur L et donc d'après le paragraphe précédent que $|\,\mathrm{Re}(t_{i,v})| = -\mathrm{Re}(t_{i,v}) < \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2+1}$.

Supposons maintenant que v est une place complexe et $\pi_v = J(\sigma_{1,v}, \ldots, \sigma_{n,v})$. Comme dans le cas réel, on peut choisir $t_{i,v}$ de partie réelle strictement négative. Le facteur local de la fonction L de Rankin-Selberg contient le facteur $\Gamma(s + 2\,\mathrm{Re}(t_{i,v}))$. L'argument précédent s'applique de la même manière pour conclure que là aussi $|\,\mathrm{Re}(t_{i,v})| < \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2+1}$. Ce qui achève la démonstration du Théorème 7.0.1.

7.3. Application : le théorème de Selberg

Le Théorème 7.0.1 implique immédiatement le théorème suivant.

***Théorème 7.3.1* (Selberg).** — *Le groupe* $\mathrm{SL}(2)_{|\mathbb{Q}}$ *vérifie la Conjecture* $A^-(0)$.

Démonstration. — Une représentation du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ qui intervient non trivialement dans la formule de Matsushima étendue (Théorème 1.0.2) pour un quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}$, où Γ est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}(2)$, coïncide avec la composante à la place infinie d'une représentation automorphe du groupe $\mathbb{Q}$-algébrique $\mathrm{SL}(2)$.

Les représentations du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sont bien connues et s'étendent en des représentations du groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ (c'est assez facile de le déduire du § 3.1). Il en est de même des représentations automorphes (*cf.* Labesse-Schwermer [**70**]) nous appliquerons donc le Théorème 7.0.1 au groupe $\mathrm{SL}(2)$.

Le spectre du laplacien sur les fonctions d'un quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ est constitué d'une partie continue $[\frac{1}{4}, +\infty[$ et d'une partie discrète qu'il nous faut contrôler. Via la formule de Matsushima étendue la partie discrète du spectre correspond aux représentations automorphes cuspidales. Puisqu'à une représentation tempérée de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, il correspond (toujours via la formule de Matsushima) un espace de fonctions propres du laplacien de valeur propre $\geqslant \frac{1}{4}$, il ne nous reste qu'à considérer les représentations de la série complémentaire

$$\pi_s = \mathrm{ind}_B^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}(|x|^s)$$

où $B = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x & * \\ 0 & x^{-1}\end{smallmatrix}\right)\right\}$ et $s \in [0, \frac{1}{2}[$. Mais d'après le Théorème 7.0.1, si une représentation automorphe de SL(2) a pour composante à l'infini π_s alors $s \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2+1} = \frac{3}{10}$. Autrement dit la représentation π_s est uniformément (par rapport au choix du groupe Γ) isolée de la représentation triviale. Ce qui conclut la démonstration du Théorème 7.3.1.

La démonstration ci-dessus donne l'estimée $\varepsilon(\mathrm{SL}(2), 0) = \frac{4}{25}$ qui est moins bonne que l'estimée originale de Selberg égal à $\frac{3}{16}$. Il y a néanmoins deux grands avantages à la méthode ci-dessus 1) elle est valable sur n'importe quel corps de nombres 2) elle est valable pour tous les groupes $\mathrm{GL}(n)$. Et cette méthode intervient effectivement dans la démonstration récente par Kim et Sarnak de l'estimée $\varepsilon(\mathrm{SL}(2), 0) = \frac{1}{4} - \left(\frac{7}{64}\right)^2$.

Grâce à la correspondance de Jacquet-Langlands [**55**] entre les représentations automorphes du groupe des unités d'une algèbre de quaternions et celles du groupe SL(2), le Théorème 7.3.1 (étendu à un corps de nombre quelconque) permet de vérifier la Conjecture $A^-(0)$ pour tout groupe G comme dans la Conjecture A avec G localement isomorphe au groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Puisqu'un groupe G de partie non compacte $G^{\mathrm{nc}} \approx \mathrm{SO}(n, 1)$ contient un sous-groupe rationnel H de partie non compacte $H^{\mathrm{nc}} \approx \mathrm{SO}(2, 1)$ ou $\mathrm{SO}(3, 1)$ (*cf.* [**20**] et [**26**]), le principe de restriction de Burger et Sarnak (§ 2.3) permet alors de vérifier la Conjecture $A^-(0)$ pour tous les groupes G tels que G^{nc} soit localement isomorphe au groupe $\mathrm{SO}(n, 1)$.

CHAPITRE 8

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

On est maintenant amené à démontrer le Théorème 1 annoncé dans l'Introduction. Rappelons son énoncé :

Théorème 1. — *Soit G un groupe algébrique connexe et presque simple sur $\mathbb{Q}$ tel que G^{nc} soit isomorphe au groupe* $\mathrm{SU}(2,1)$. *Alors, pour tout sous-groupe de congruence* Γ *dans G,*

$$\lambda_1^0(\Gamma\backslash X_G) \geqslant \frac{84}{25} \qquad \textit{et} \qquad \lambda_1^1(\Gamma\backslash X_G) \geqslant \frac{9}{25}.$$

Rappelons avant d'en donner une démonstration complète que ce résultat est essentiellement contenu dans l'article [**50**] de Harris et Li.

8.1. Description du groupe G

Soit G un groupe algébrique connexe et presque simple sur $\mathbb{Q}$ modulo son centre tel que G^{nc} soit isomorphe au groupe $\mathrm{U}(2,1)$. Remarquons que l'on préfère considérer le groupe $\mathrm{U}(2,1)$ plutôt que le groupe $\mathrm{SU}(2,1)$ pour des raisons techniques ; il est néanmoins bien évident que cela ne change pas l'énoncé du Théorème 1 puisque l'espace symétrique associé est le même (pour un argument plus précis voir [**26**]).

Alors, il existe un entier $d \geqslant 1$ tel que

$$G(\mathbb{R}) \cong \mathrm{U}(2,1) \times \mathrm{U}(3)^{d-1}. \tag{8.1.1}$$

Décrivons comment construire un tel groupe G. Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d, et soit K une extension quadratique totalement imaginaire de F. On notera $x \mapsto \overline{x}$ la conjugaison de K par rapport à F. Fixons un plongement réel σ_1 de F et une extension τ_1 de σ_1 en un plongement complexe de K. Soit $V = K^3$ équipé d'une forme hermitienne h ; on suppose h de signature $(2,1)$ en σ_1 (c'est-à-dire relativement au plongement τ_1) et définie positive en tous les autres plongements réels de F. On notera $\Phi \in \mathrm{GL}_3(K)$ la matrice (hermitienne) de h, on a alors ${}^t\overline{\Phi} = \Phi$. Soit $G = U_\Phi$ le groupe des transformations unitaires de V :

$$G = \{g \in \mathrm{GL}_3(K) \mid g\Phi^t\overline{g} = \Phi\}.$$

On considère le groupe G comme un groupe $\mathbb{Q}$-algébrique par restriction des scalaires [**106**] de F à $\mathbb{Q}$. Alors le groupe $G(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie semi-simple connexe et vérifie (8.1.1).

Il existe une autre construction de groupes vérifiant (8.1.1).

Soit D une algèbre semi-simple de dimension 9 sur K. Soit α une involution de D. On dit de la paire (D, α) qu'elle est *de seconde espèce* si l'involution α est de seconde espèce *i.e.*, α est un anti-automorphisme de D dont la restriction à K est σ. Si D est une algèbre simple de centre K, on peut définir le groupe algébrique sur F

$$\mathrm{U}(F) = \{g \in D^* \mid \alpha(g)g = 1\}.$$

Supposons de plus qu'à toutes les places réelles v sauf (exactement) une, le groupe $\mathrm{U}(F)$ est compact isomorphe à $\mathrm{U}(3)$. Alors le groupe $\mathbb{Q}$-algébrique G, obtenu à partir de $\mathrm{U}(F)$ par restriction des scalaires de F à $\mathbb{Q}$ vérifie (8.1.1). Réciproquement, tout groupe G algébrique sur $\mathbb{Q}$, dont les points réels forment un groupe de Lie semi-simple connexe vérifiant $G(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(2,1) \times \mathrm{SU}(3)^{d-1}$ s'obtient par la construction rappelée ci-dessus (en prenant le groupe dérivé), *cf.* [**84**].

Remarquons que si $D = M_3(K)$, alors $\alpha(g) = \Phi^t\overline{g}\Phi^{-1}$ pour une certaine forme hermitienne Φ (voir [**84**]). La construction ci-dessus contient donc comme cas particulier la première construction décrite plus haut. On distinguera d'ailleurs deux cas dans la construction ci-dessus, le cas où $D = M_3(K)$ et le cas où $D \neq M_3(K)$.

8.2. $D = M_3(K)$

Dans cette section nous supposons que G est obtenu par une construction décrite dans la section précédente avec comme algèbre $D = M_3(K)$. Nous conservons les notations de la section précédente. Nous démontrons le Théorème 1 dans ce cas.

Le groupe $G(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{U}(2,1) \times \mathrm{U}(3)^{d-1}$; une représentation qui intervient non trivialement dans la formule de Matsushima étendue (Théorème 1.0.2) pour un quotient $\Gamma \backslash X_G$, où Γ est un sous-groupe de congruence de G, est de la forme

$$\sigma \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1, \tag{8.2.1}$$

où σ est une représentation unitaire du groupe (réel) $\mathrm{U}(2,1)$. De plus elle coïncide avec le produit tensoriel des composantes aux places infinies d'une représentation automorphe du groupe F-algébrique $\mathrm{U}(F)$.

Noter qu'alors, plus simplement, σ apparaît dans $L^2(\Gamma' \backslash \mathrm{U}(2,1))$ où Γ' se déduit de façon évidente de Γ. On dira que Γ' « est un sous-groupe de congruence de $G^{\mathrm{nc}} = \mathrm{U}(2,1)$ ».

Les représentations du groupe $\mathrm{U}(2,1)$ sont complètement décrites au § 4.6. Soit d'abord une représentation tempérée σ de $\mathrm{U}(2,1)$. S'il correspond à la représentation $\sigma \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ un espace de fonctions λ-propres (resp. de 1-formes λ-propres), pour le laplacien de Hodge, via la formule de Matsushima, alors $\lambda \geqslant 4$ (resp. $\lambda \geqslant 1$) (*cf.* Théorème 4.1.1). Il nous suffit donc de considérer les représentations (8.2.1) avec σ non tempérée (et unitaire). Dans la classification du § 4.6 une telle représentation est associée à un paramètre φ correspondant à un triplet (u, v, μ) où $\mu \in \mathbb{Z}$, $u, v \in \mathbb{C}$, $u - v \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Re}(u + v) \geqslant 0$ et si $u + v = 0$ alors $u \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. De plus d'après la description des K-types du § 4.5, la représentation $\sigma \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ intervient non trivialement, via la formule de Matsushima, dans la description du spectre sur les fonctions (resp. sur les 1-formes) seulement si $u - v = 0$ (resp. $u - v = \pm 3$). Finalement puisque seules les représentations unitaires et de dimension infinie sont à considérer, il nous reste à étudier le cas où σ est l'unique quotient irréductible de l'induite unitaire du caractère

$$\chi_\varphi = (u, v, \mu),$$

où le triplet (u, v, μ) est astreint à vérifier l'une des alternatives suivantes (§ 4.6), la valeur propre du Casimir étant calculée par (4.1.9).

(1) $(u, v, \mu) = (2, -1, -1)$, et alors (8.2.1) intervient dans le spectre sur les formes différentielles de bi-degré $(1, 0)$, pour la valeur propre 0 ;

(2) $(u, v, \mu) = (-1, 2, 1)$, et alors (8.2.1) intervient dans le spectre sur les formes différentielles de bi-degré $(0, 1)$, pour la valeur propre 0 ;

(3) $(u, v, \mu) = (\frac{s}{2}, \frac{s}{2}, 0)$ pour un nombre réel $s \in \,]0, 2[$, et alors (8.2.1) intervient dans le spectre sur les fonctions, pour la valeur propre $4 - s^2$;

(4) $(u, v, \mu) = (\frac{s+3}{2}, \frac{s-3}{2}, -1)$ pour un nombre réel $s \in \,]0, 1[$, et alors (8.2.1) intervient dans le spectre sur les formes différentielles de bi-degré $(1, 0)$, pour la valeur propre $1 - s^2$;

(5) $(u, v, \mu) = (\frac{s-3}{2}, \frac{s+3}{2}, 1)$ pour un nombre réel $s \in \,]0, 1[$, et alors (8.2.1) intervient dans le spectre sur les formes différentielles de bi-degré $(0, 1)$, pour la valeur propre $1 - s^2$.

Il nous reste à démontrer que si σ intervient dans la représentation régulière $L^2(\Gamma \backslash G^{\mathrm{nc}})$ pour un certain sous-groupe de congruence Γ de G et si σ est du type (3), (4) ou (5) ci-dessus alors $s \leqslant 4/5$.

Mais si σ intervient dans la représentation régulière $L^2(\Gamma \backslash G^{\mathrm{nc}})$ pour un certain sous-groupe de congruence Γ de G alors il existe une représentation unitaire automorphe cuspidale $\pi = \otimes \pi_v$ de $\mathrm{U}(\mathbb{A}_F)$ telle que

$$\otimes_{v \text{ infinie}} \pi_v = \sigma \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1.$$

Seule la place infinie v où $\pi_v \cong \sigma$ nous intéressera, pour simplifier nous la noterons $v = \infty$. D'après le Théorème 13.3.3 de [**86**] et en tenant compte du fait que π_∞ n'est pas tempérée,

– ou bien il correspond à la représentation π une représentation automorphe cuspidale Π de GL(3) sur le corps K telle que Π_∞ soit obtenue par la fonctorialité décrite au § 4.4 (« changement de base ») ;

– ou bien il existe une représentation automorphe ρ de $\mathrm{U}(1,1) \times \mathrm{U}(1)$ sur le corps K telle que π_∞ soit obtenue à partir de ρ_∞ par la fonctorialité induite par ξ_n pour un certain entier n (*cf.* § 4.6).

Dans le premier cas, la fonctorialité associe à un paramètre $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \rtimes W_{\mathbb{R}}$ un morphisme $\varphi_{|\mathbb{C}^*} \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ admissible pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$. À ce dernier morphisme est associée une représentation admissible de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$. Lorsque le paramètre φ correspond au triplet (u,v,μ), d'après le Théorème 3.2.2, la représentation de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ correspondant au paramètre $\varphi_{|\mathbb{C}^*}$ est $J(\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ où $\chi_1(z) = z^u\overline{z}^v$, $\chi_2(z) = z^\mu\overline{z}^{-\mu}$ et $\chi_3(z) = z^{-v}\overline{z}^{-u}$. Remarquons tout d'abord que si le paramètre φ correspond à la représentation triviale, *i.e.* si $(u,v,\mu) = (1,1,0)$, alors la représentation obtenue par fonctorialité est la représentation triviale. La représentation automorphe cuspidale Π de GL(3) obtenue par fonctorialité à partir de π vérifie le Théorème de Luo, Rudnick et Sarnak. Donc si π_∞ est de la forme (8.2.1), avec σ du type (3), (4) ou (5) ci-dessus, le Théorème 7.0.1 appliqué à χ_1 implique que le nombre réel s doit vérifier $\frac{s}{2} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{10}$, *i.e.* $s \leqslant 4/5$.

Dans le deuxième cas, il existe un entier n et un paramètre

$$\eta : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow (\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})) \rtimes W_{\mathbb{R}}$$

correspondant soit à une représentation automorphe de $\mathrm{U}(1,1) \times \mathrm{U}(1)$ soit à une représentation unitaire de dimension un et tel que le paramètre $\varphi = \xi_n \circ \eta$ corresponde au triplet (u,v,μ). On identifie les paramètres η possibles à l'aide de la Proposition 4.3.3. Un tel paramètre η associe à un élément $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\eta(z) = \left(\begin{pmatrix} z^\alpha\overline{z}^\beta & \\ & z^{-\beta}\overline{z}^{-\alpha} \end{pmatrix}, \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^\mu \right),$$

où α et β sont deux nombres réels tels que $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha + \beta \geqslant 0$ et si $\alpha + \beta = 0$, $\alpha - \beta \in 2\mathbb{Z}$. On a alors

$$(u,v,\mu) = (\alpha + \tfrac{1}{2} + n, \beta - \tfrac{1}{2} - n, \mu).$$

D'abord si la représentation du groupe $\mathrm{U}(1,1) \times \mathrm{U}(1)$ correspondant au paramètre η est unitaire de dimension 1, alors α, $\beta \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ et $\alpha + \beta = 1$, donc $\alpha - \beta$ est paire. Or $u - v = \alpha - \beta + 1 + 2n$, et puisque $u - v = 0$, 3 ou -3, on doit avoir u et v entiers, cas que l'on a exclu.

Puis, si la représentation du groupe $\mathrm{U}(1,1) \times \mathrm{U}(1)$ correspondant au paramètre η est la composante à l'infinie d'une représentation automorphe, le Théorème de Selberg (dans le cas $F = \mathbb{Q}$) et de Gelbart-Jacquet [**42**] (F arbitraire) implique que $s = u + v = \alpha + \beta \leqslant \frac{1}{4}$ [(1)].

[(1)] On a remarqué que le Théorème de Luo, Rudnick et Sarnak implique lui aussi une majoration sur s : $s \leqslant \frac{3}{10}$. Celle-ci nous suffit pour démontrer le Théorème 1.

Dans tous les cas le nombre s est inférieur ou égal à $\frac{4}{5}$. Et le Théorème 1 est démontré.

8.3. $D \neq M_3(K)$

Dans cette section nous supposons que G est obtenu par la construction décrite dans la première section avec une algèbre $D \neq M_3(K)$. Nous conservons les notations de la première section. Nous démontrons le Théorème 1 dans ce cas.

Comme dans la section précédente, le groupe $G(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{U}(2,1) \times \mathrm{U}(3)^{d-1}$, une représentation qui intervient non trivialement dans la formule de Matsushima d'un quotient $\Gamma\backslash X_G$, où Γ est un sous-groupe de congruence de G, est de la forme

$$\sigma \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1, \tag{8.3.1}$$

où σ est une représentation unitaire du groupe (réel) $G^{\mathrm{nc}} = \mathrm{U}(2,1)$. De plus elle coïncide avec le produit tensoriel des représentations aux places infinies d'une représentation automorphe du groupe F-algébrique $\mathrm{U}(F)$.

Nous passons en revue, comme dans le § 8.2, les possibilités (1)–(5).

Il nous reste à démontrer que si σ intervient dans la représentation régulière $L^2(\Gamma\backslash G^{\mathrm{nc}})$ et est du type (3), (4) ou (5) ci-dessus alors $s \leqslant 4/5$.

Mais, comme dans la section précédente, si σ intervient dans $L^2(\Gamma\backslash G^{\mathrm{nc}})$ il existe alors une représentation unitaire automorphe cuspidale $\pi = \otimes\pi_v$ du groupe F-algébrique $\mathrm{U}(F)$ telle que pour une certaine place à l'infini $\pi_\infty = \sigma$. Le groupe $\mathrm{U}(F)$ est, dans cette section, une forme intérieure du groupe unitaire quasi-déployé associé à l'algèbre $M_3(F)$. Le Théorème 14.6.3 et la Proposition 14.6.2 de [**86**] établissent une bijection entre les représentations automorphes (en fait plus exactement les L-paquets ce qui revient au même pour les représentations que l'on considère) de $\mathrm{U}(F)$ et certaines représentations automorphes de sa forme quasi-déployée. On est donc ramené au cas où $D = M_3(F)$, cas que l'on a traité dans la section précédente. Le Théorème 1 est donc démontré.

8.4. Une Conjecture de changement de base

Nous commençons par énoncer un affaiblissement des résultats de Rogawski [**86**] qui synthétise en un seul énoncé les deux cas traités dans les sections précédentes. Pour cela nous conservons les notations de la première section. Pour simplifier les énoncés nous dirons d'une représentation de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ qu'elle est *automorphe (cuspidale)* s'il existe un corps de nombre K, une représentation automorphe (cuspidale) Π de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_K)$ et une place archimédienne complexe v de K telle que $\Pi_v \cong \pi$. Ce qui compte pour nous est qu'une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ doit donc vérifier les conclusions du Théorème de Luo, Rudnick et Sarnak (Ch. 7).

Rappelons que plus généralement la Conjecture de Ramanujan généralisée en les places archimédiennes (complexes) s'énonce de la façon suivante.

Conjecture de Ramanujan généralisée. — *Soit π une représentation automorphe cuspidale de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. *Alors π est une représentation induite*

$$I(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = J(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

où les σ_j sont comme dans le Théorème 3.1.2 et tels que pour tout $j = 1, \ldots, n$, t_j soit imaginaire pur.

Soit G un groupe algébrique simple et connexe sur $\mathbb{Q}$ tel que G^{nc} soit isomorphe au groupe $\mathrm{U}(2,1)$. Remarquons que toute représentation π de $G(\mathbb{R})$ se restreint en une représentation, que l'on notera π_1, du groupe $\mathrm{U}(2,1)$.

Le théorème qui suit est une synthèse des particularisations de résultats de Rogawski, voir les chapitres 13 et 14 de [**86**], que nous avons utilisés dans les deux sections précédentes. Commençons par remarquer que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ agit sur les L-paramètres de $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$ via

- son action naturelle sur le groupe de Weil complexe $W_{\mathbb{C}}$ et,
- son action sur $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C}) = \widehat{\mathrm{U}(n,1)}$, *cf.* la description du groupe dual donnée au chapitre 4.

Un L-paramètre est donc laissé stable par cette action s'il provient d'un L-paramètre (non nécessairement admissible) pour le groupe $\mathrm{U}(n,1)$. On déduit de tout ceci une action sur les représentation admissibles de $\mathrm{GL}(n{+}1, \mathbb{C})$. Une représentation invariante sera dite σ-stable (nous notons généralement σ le générateur du groupe de Galois).

***Théorème 8.4.1* (Rogawski)**. — *Soit π une représentation irréductible de dimension infinie appartenant à $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$. Alors, la représentation* Π *de* $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ *obtenue par changement de base (§ 4.4) à partir de π_1 est une représentation* unitaire *obtenue comme induite*

$$\mathrm{ind}_P^{\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})}(J(\tau_1, b_1) \otimes \cdots \otimes J(\tau_m, b_m)),$$

où

(1) *P est le sous-groupe parabolique de* $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ *associé à la partition* $3 = r_1 + \cdots + r_m$ *;*

(2) *chaque $r_i = a_i b_i$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{N}$;*

(3) *τ_i est une représentation automorphe cuspidale σ-stable de* $\mathrm{GL}(a_i, \mathbb{C})$ *;*

(4) *$J(\tau_i, b_i)$ désigne la représentation de* $\mathrm{GL}(r_i, \mathbb{C})$ *associée, comme au § 3.4.4.*

Démonstration. — Montrons que le Théorème 8.4.1 se déduit des chapitres 13 et 14 de [**86**]. Le Théorème 14.6.3 et la Proposition 14.6.2 de [**86**] permettent, comme dans la section précédente, de ramener la démonstration aux cas où G est obtenue par restriction des scalaires à partir d'un groupe unitaire associé à une algèbre $D = M_3(F)$. Dans ce cas la représentation π_1 est la représentation de $\mathrm{U}(2,1)$ obtenue en la place archimédienne correspondante. Pour les besoins de la démonstration notons π une représentation automorphe du groupe unitaire $\mathrm{U}(\mathbb{A}_F)$ telle que $\pi_\infty = \pi_1$ (où ∞ désigne toujours la place archimédienne en laquelle le groupe unitaire est $\mathrm{U}(2,1)$). On peut de plus supposer que π intervient discrètement dans $L^2(\mathrm{U}(F)\backslash \mathrm{U}(\mathbb{A}_F))$. Puisque π est de dimension infinie, les Théorèmes 13.3.3 et 13.3.5 de [**86**] distinguent trois cas :

(1) La représentation π est stable, et alors il existe une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{A}_K)$ telle que Π_∞, vue comme représentation de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$, soit obtenue à partir de π_∞ par changement de base, comme au § 4.4. Dans ce cas on peut prendre $m = b_1 = 1$, $r_1 = a_1 = 3$ et $\tau_1 = \Pi_\infty$.

(2) La représentation π est endoscopique du premier type, et alors il existe une représentation automorphe cuspidale ρ de $\mathrm{U}(1,1)\times\mathrm{U}(1)$ (vu comme groupe algébrique sur F) telle que π_∞ s'obtienne par fonctorialité à partir de ρ_∞, comme au § 4.6. D'après le changement de base pour $\mathrm{U}(1,1)$ [**86**, Proposition 11.4.1], il correspond à la représentation automorphe ρ une représentation automorphe cuspidale $\widetilde{\rho}$ de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_K)\times\mathrm{GL}(1,\mathbb{A}_K)$ telle que $\widetilde{\rho}_\infty$, vue comme représentation de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$, soit obtenue à partir de ρ_∞ par changement de base. Dans ce cas la représentation π_∞ est associée à un paramètre $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}) \rtimes W_{\mathbb{R}}$ obtenue comme $\xi_n \circ \eta$ pour un certain entier n et un certain paramètre $\eta : W_{\mathbb{R}} \to (\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}))\rtimes W_{\mathbb{R}}$. Autrement dit, la représentation de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ obtenue à partir de π_∞ par changement de base, est associée à un paramètre $\psi : \mathbb{C}^* \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*$ égal à la composée $\xi_n\circ\eta$ (pour un certain entier n) où $\eta : \mathbb{C}^* \to (\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}))\times\mathbb{C}^*$ est un L-paramètre associé à une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$. Il lui correspond alors une représentation automorphe cuspidale τ_1 (resp. τ_2) de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ (resp. $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$). La représentation τ_1 est bien évidemment obtenue par changement de base non standard à partir d'une représentation de $\mathrm{U}(1,1)$ et la représentation τ_2 est obtenue par changement de base (standard) à partir d'une représentation de $\mathrm{U}(1)$. Dans ce cas on peut donc prendre $m=2$, $r_1=a_1=2$, $r_2=1$.

(3) La représentation π est endoscopique du deuxième type, et alors il existe une représentation automorphe de dimension un ρ de $\mathrm{U}(1,1)\times\mathrm{U}(1)$ (vu comme groupe algébrique sur F) telle que π_∞ s'obtienne par fonctorialité à partir de ρ_∞, comme décrit au § 4.6. Mais, dans ce cas, Rogawski montre que ρ_∞ s'obtient, par fonctorialité, à partir d'une représentation de $\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)$. On est dans la configuration $m=3$, $r_1=r_2=r_3=1$.

De manière général on s'attend, voir par exemple [**50**] pour un énoncé légèrement plus faible, à ce que la conjecture suivante soit vérifiée.

Conjecture de changement de base. — *Soit G un groupe algébrique simple et connexe sur $\mathbb{Q}$ tel que G^{nc} soit isomorphe au groupe $\mathrm{U}(p,q)$. Soit π une représentation appartenant à $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$ et π_1 la restriction de π au groupe $\mathrm{U}(p,q)$. Alors, la représentation de $\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$ obtenue par changement de base (§ 4.4) à partir de π_1 a le même* *caractère infinitésimal qu'une représentation* unitaire *obtenue comme induite*

$$\mathrm{ind}_P^{\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})}(J(\tau_1, b_1) \otimes \cdots \otimes J(\tau_m, b_m)),$$

où

(1) *P est le sous-groupe parabolique de* $\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$ *associé à la partition* $p+q = r_1 + \cdots + r_m$ *;*

(2) *chaque* $r_i = a_i b_i$ *avec* $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ *;*

(3) τ_i *est une représentation automorphe cuspidale σ-stable de* $\mathrm{GL}(a_i,\mathbb{C})$ *; et,*

(4) $J(\tau_i, b_i)$ *désigne la représentation de* $\mathrm{GL}(r_i,\mathbb{C})$ *associée, comme au § 3.4.4.*

Comme il a déjà été remarqué par Harris et Li, la Conjecture de changement de base implique la Conjecture A^- pour les groupes du type $\mathrm{U}(n,1)$. Nous montrons plus généralement le théorème suivant.

Théorème 8.4.2. — *Soit G un groupe comme dans la Conjecture de changement de base et vérifiant les conclusions de celle-ci. Il existe alors un réel strictement positif $\varepsilon = \varepsilon(p,q) > 0$ tel que pour tout sous-groupe de congruence Γ dans G et pour tout entier i,*

$$\lambda_1^i(\Gamma \backslash X_G) \geqslant \varepsilon.$$

Démonstration. — D'après le Théorème 1.0.2 il s'agit de montrer que toute représentation cohomologique de $\mathrm{U}(p,q)$ est isolée de l'ensemble des représentations (non-cohomologiques) de $\mathrm{U}(p,q)$ appartenant au dual automorphe. (Rappelons que nous avons vérifié au chapitre 5 que les représentations cohomologiques de degrés suffisamment petit sont isolées dans tout le dual unitaire et donc a fortiori dans le dual automorphe).

Fixons donc π_0 une représentation cohomologique de $\mathrm{U}(p,q)$ dont nous supposerons qu'elle appartient au dual automorphe. D'après la Conjecture de changement de base, il lui correspond alors une représentation unitaire Π_0 de $\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$ obtenue comme induite

$$\mathrm{ind}_P^{\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})}(J(\tau_1, b_1) \otimes \cdots \otimes J(\tau_m, b_m)),$$

telle que chaque τ_i soit une représentation automorphe cuspidale σ-stable de $\mathrm{GL}(a_i,\mathbb{C})$. Rappelons que le caractère infinitésimal d'une représentation de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ est un élément de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Puisque π_0 est cohomologique et les b_i entiers, le calcul du caractère infinitésimal de Π_0 (*cf.* § 3.4.4) implique que le caractère infinitésimal de chaque τ_i est un vecteur *régulier* (p^i, q^i) de $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^{a_i} \times (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^{a_i}$ (*i.e.*, $p_k^i \neq p_l^i$ et $q_k^i \neq q_l^i$ pour $k \neq l$).

Lemme 8.4.3. — *Soient a un entier $\geqslant 1$ et τ une représentation automorphe cuspidale σ-stable de* $\mathrm{GL}(a,\mathbb{C})$. *Supposons que le caractère infinitésimal de τ est un élément régulier (p,q) de $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^a \times (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^a$. Alors, τ est isolée parmi les représentations automorphes cuspidales et σ-stables de* $\mathrm{GL}(a,\mathbb{C})$.

Démonstration. — Puisque le caractère infinitésimal de τ est à coordonnées dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, il découle du Théorème 3.4.3, que la représentation τ est obtenue comme induite de

$$(\mathrm{Sp}(\delta_1, m_1), \ldots, \mathrm{Sp}(\delta_r, m_r)),$$

avec $a = m_1 + \cdots + m_r$ et chaque $\delta_k = z^{p_k}\overline{z}^{q_k}$, $p_k - q_k \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Re}(p_k + q_k) = 0$. Puisque le caractère infinitésimal (p, q) est demi-entier, on a en fait $p_k = -q_k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Comme par ailleurs la représentation τ est cuspidale, on peut lui appliquer le Théorème 7.0.2. On en déduit que $m_1 = \cdots = m_r = 1$ et donc que $r = a$.

La topologie du dual unitaire de $\mathrm{GL}(a, \mathbb{C})$ coïncide avec la topologie évidente sur les paramètres de Langlands, *cf.* [**102**]. Soit τ' une représentation proche de τ, cuspidale, associée aux caractères $\eta_1, \ldots, \eta_a$ de $\mathbb{C}^*$. On a alors, quitte à réordonner les η_k, $\eta_k = \delta_k(z\overline{z}^k)^{s_k}$. Les caractères η_k vérifient $\{\eta_k(z)\} = \{\eta_k(\overline{z})^{-1}\}$ par σ-stabilité. Il y a donc deux possibilités :

- Si $\eta_k(z) = \eta_k(\overline{z})^{-1}$, $s_k = 0$.
- Supposons que $\eta_k(z) = \eta_k(\overline{z})^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} p_k + s_k &= p_l - s_l \\ -p_k + s_k &= -p_l - s_l. \end{aligned}$$

Ce qui est impossible puisque $p_k \neq p_l$.

D'où le Lemme 8.4.3.

Revenons à la démonstration du Théorème et considérons une suite $\{\pi_l\}$ de représentations appartenant au dual automorphe du groupe $\mathrm{U}(p, q)$ et convergeant vers la représentation π_0. Soit $\{\Pi_l\}$ la suite des représentations unitaires de $\mathrm{GL}(p+q, \mathbb{C})$ associées aux π_l par la Conjecture de changement de base. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de types combinatoires (P, b_i) comme dans la Conjecture de changement de base, nous pouvons, quitte à extraire une sous-suite de Π_l, supposer chaque représentation Π_l de la forme

$$\mathrm{ind}_{P'}^{\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})}(J(\tau_1^l, b_1') \otimes \cdots \otimes J(\tau_s^l, b_s')),$$

où chaque τ_i^l est une représentation automorphe cuspidale σ-stable de $\mathrm{GL}(a_i', \mathbb{C})$, avec P' associé à la décomposition $a_1'b_1' + \cdots + a_s'b_s' = p + q$. L'application qui à une représentation unitaire associe son caractère infinitésimal est continue. La suite des caractères infinitésimaux des Π_l converge donc vers le caractère infinitésimal de Π_0 (égal, modulo $\mathfrak{S}_{p+q} \times \mathfrak{S}_{p+q}$, au caractère infinitésimal de la représentation triviale, soit deux fois le vecteur

$$(\frac{p+q-1}{2}, \ldots, \frac{1-p-q}{2}) \in \mathbb{C}^{p+q}).$$

Le calcul du caractère infinitésimal de Π_l implique alors immédiatement que quitte à extraire une sous-suite de la suite des Π_l, nous pouvons supposer que chaque suite $\{\tau_i^l\}$ converge vers une représentation automorphe cuspidale σ-stable de $\mathrm{GL}(a_i', \mathbb{C})$ dont le caractère infinitésimal est un vecteur régulier de $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^{a_i'} \times (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^{a_i'}$. Le Lemme 8.4.3

implique alors que la suite $\{\Pi_l\}$ stationne à partir d'un certain rang. Selon la Conjecture de changement de base, la suite des caractères infinitésimaux des représentations π_l doit donc également stationner à partir d'un certain rang. Puisque par ailleurs la suite des π_l converge vers π_0, la suite $\{\pi_l\}$ est elle-même nécessairement stationnaire à partir d'un certain rang. Ce qui conclut la démonstration du Théorème 8.4.2.

Remarquons que la conclusion du Théorème 8.4.2 pourrait également être déduite des Conjectures d'Arthur telles que décrites dans [**4**].

CHAPITRE 9

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Le but de ce chapitre est la démonstration du Théorème 2. Celle-ci repose sur l'étude de la décroissance à l'infini des fonctions sphériques et sur le Théorème de Burger et Sarnak déjà mentionné au chapitre 2.

Nous commençons ce chapitre par des généralités sur les fonctions sphériques. Puis, et bien que notre méthode fonctionne pour tous les groupes de rang 1, nous nous spécialisons au groupe $\mathrm{U}(n,1)$ dont l'on décrit précisément les fonctions sphériques et leur comportement à l'infini.

On peut alors démontrer le Théorème 2 dans le cas du groupe $\mathrm{U}(n,1)$, laissant au lecteur le soin de vérifier que la démonstration est identique dans le cas du groupe $\mathrm{O}(n,1)$.

Fixons pour l'instant un groupe G algébrique simple et connexe sur $\mathbb{Q}$; pour simplifier nous notons également $G = G^{\mathrm{nc}}$ la partie non compacte (semi-simple) des points réels de G. Notons alors K un sous-groupe compact maximal de G et $X = G/K$ l'espace symétrique associé.

9.1. Fonctions radiales, coefficients matriciels et fonctions sphériques

Soit (τ, V_τ) une représentation irréductible de K. On appelle *fonction τ-radiale* toute fonction

$$F : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\tau)$$

vérifiant la condition de double K-équivariance suivante :

$$F(k_1 g k_2) = \tau(k_1) F(g) \tau(k_2) \tag{9.1.1}$$

pour tous $g \in G$ et $k_1, k_2 \in K$.

Soit π une représentation continue de G dans un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle ., . \rangle)$. On appelle *coefficient matriciel* de π toute fonction $G \to \mathbb{C}$ de la forme

$$c_{v,v'} : g \longmapsto \langle \pi(g)v, v' \rangle,$$

où $v, v' \in \mathcal{H}$. Le lemme suivant est facile à vérifier.

Lemme 9.1.1. — *Soit $v' \in \mathcal{H}$.*

(1) *L'application $v \mapsto c_{v,v'}$ est équivariante par rapport à la π-action de G sur $\mathcal{H}$ et à l'action régulière à droite R de G sur les fonctions de G dans $\mathbb{C}$.*

(2) *Si v est dans le sous-espace $\mathcal{H}^\infty$ des vecteurs C^∞, alors $c_{v,v'} \in C^\infty(G)$.*

(3) *L'application $v \mapsto c_{v,v'}$ de $\mathcal{H}^\infty \to C^\infty(G)$ est équivariante par rapport aux actions de $U(\mathfrak{g})$, l'algèbre enveloppante universelle sur $\mathbb{C}$ de l'algèbre de Lie de G, induites par π et R.*

Si la représentation π a un caractère infinitésimal, alors il découle du Lemme ci-dessus que tout coefficient matriciel $c_{v,v'}$, avec v vecteur lisse, est une fonction dans $C^\infty(G)$ fonction propre pour l'opérateur $R(C)$ (où l'on note toujours C le casimir de G).

Dorénavant soit π une représentation admissible de G. Si v et v' sont deux vecteurs K-finis de l'espace de la représentation π, le coefficient matriciel $c_{v,v'}$ est analytique (réel) et se transforme finiment sous les actions à droite et à gauche de K.

On associe à π, l'idéal I_π du centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante, défini par

$$I_\pi = \{Z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \mid \pi(Z) = 0\}.$$

Il découle alors du Lemme 9.1.1 que

$$R(Z)c_{v,v'} = 0 \quad (Z \in I). \tag{9.1.2}$$

Rappelons, *cf.* [**66**] par exemple, le résultat classique que chaque idéal I_π comme ci-dessus est cofini dans l'algèbre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Enfin remarquons que si π a un caractère infinitésimal, l'idéal I_π est de codimension 1. Dans ce cas, (9.1.2) est un système d'équations propres.

Supposons que τ est un K-type de la représentation π. Soient l'inclusion

$$i_\tau : V_\tau \hookrightarrow \mathcal{H}$$

et la projection

$$p_\tau : \mathcal{H} \longrightarrow V_\tau.$$

Alors, la fonction $F : G \to \operatorname{End}(V_\tau)$ définie par

$$F(g) = p_\tau \circ \pi(g) \circ i_\tau \tag{9.1.3}$$

est τ-radiale. De plus, si v et v' sont deux vecteurs dans V_τ, le coefficient $c_{v,v'}$ de π s'écrit :

$$c_{v,v'}(g) = \langle F(g)v, v'\rangle.$$

On dira d'une fonction Φ τ-radiale et de classe C^∞, qu'elle est *τ-sphérique sur G* si

(1) $\Phi(e) = \mathrm{Id}$, et si

(2) Φ vérifie le système d'équations propres

$$R(Z)\Phi = 0,$$

où Z décrit un idéal I de codimension 1 dans $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Remarquons que toute fonction τ-sphérique est en fait analytique (réelle). On notera $\mathcal{A}(G,\tau)$ l'espace des fonctions τ-sphériques, et $\mathcal{A}(G,\tau,I)$ le sous-ensemble de celle vérifiant le 2. pour un idéal I spécifié.

Si τ est un K-type d'une représentation admissible π de G admettant un caractère infinitésimal, la fonction radiale F du (9.1.3) est en fait τ-sphérique et appartient plus précisément à $\mathcal{A}(G,\tau,I_\pi)$.

Les fonctions sphériques vérifient un système d'équations différentielles d'après le deuxième point de la définition ci-dessus. Ce système d'équation différentielles a été étudié et résolu par Harish-Chandra, *cf.* [**21**], [**66**].

Nous nous intéressons en fait à l'asymptotique des fonctions sphériques $\Phi \in \mathcal{A}(G,\tau)$. D'après la décomposition de Cartan

$$G = K\overline{A^+}K \tag{9.1.4}$$

il suffit de comprendre $\Phi(a)$ lorsque a tend vers l'infini dans $\overline{A^+}$. Ici $\overline{A^+}$ désigne la clôture de $A^+ = \exp(\mathfrak{a}_0^+)$, où $\mathfrak{a}_0^+$ est une chambre de Weyl positive (ouverte) dans $\mathfrak{a}_0$.

Remarquons que la restriction d'une fonction τ-sphérique à A^+ prend ses valeurs dans

$$E^M := \{L \in \mathrm{End}(V_\tau) \mid L = \tau(m)L\tau(m)^{-1} \text{ pour tout } m \in M\};$$

où M désigne le centralisateur de A dans K.

9.2. Fonctions sphériques du groupe $\mathrm{U}(n,1)$

Puisque la démonstration du Théorème 2 est similaire (en fait plus simple) dans le cas hyperbolique réel nous nous contentons de traiter le cas hyperbolique complexe. Dorénavant nous supposons donc que $G = \mathrm{U}(n,1)$ et $K = \mathrm{U}(n+1)\cap G = \mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(1)$.

Dans ce cas, la paire (G,K) est une paire de Gelfand et l'algèbre $C_c(G,K,\tau,\tau)$ des fonctions continues τ-radiales de support compact sur G pour le produit de convolution :

$$(F * G)(x) = \int_G F(g^{-1}x)H(g)dg = \int_G F(g)H(xg^{-1})$$

est une algèbre commutative. Cette propriété va nous permettre de caractériser plus facilement les fonctions sphériques et de les classifier. Mais d'abord commençons par décrire les différents K-types possibles.

Puisque tout élément de K peut s'écrire comme :

$$k = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad U \in \mathrm{U}(n),\ v \in \mathrm{U}(1),$$

K agit sur $\mathfrak{p}_0 \cong \mathbb{C}^n$ par $\mathrm{Ad}(k)X = v^{-1}UX$ et cette action préserve la structure complexe J. On a donc la décomposition en K-modules suivante :

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_- \text{ et } \mathfrak{p}_\pm^* \cong \overline{\mathfrak{p}_\pm} \cong \mathfrak{p}_\mp.$$

Comme au chapitre 4, nous notons :

$$\tau_{p,q} := \Lambda^p \operatorname{Ad}_+^* \otimes \Lambda^q \operatorname{Ad}_-^* \cong \Lambda^p \overline{\operatorname{Ad}} \otimes \Lambda^q \operatorname{Ad}. \tag{9.2.1}$$

C'est une représentation de K réductible qui se décompose en irréductibles de la façon suivante :

$$\tau_{p,q} = \bigoplus_{k=0}^{\min(p,q)} \tau'_{p-k,q-k}. \tag{9.2.2}$$

Remarquons que via la formule de Matsushima, la représentation $\tau_{p,q}$ correspond aux formes de type (p,q) et la représentation $\tau'_{p,q}$ correspond aux formes *primitives* de type (p,q), *i.e.* les formes de type (p,q) qui ne peuvent s'écrire comme un produit avec la forme de Kaehler.

Dorénavant soit τ une représentation de K appartenant à l'ensemble des $\tau'_{p,q}$. Soit (π, H) une représentation irréductible de G telle que

(1) $\pi \subset L^2(\Gamma\backslash G)$;
(2) $\tau \subset \pi_{|K}$ et
(3) $\pi(C) = -\lambda$.

Il découle de la formule de réciprocité de Frobenius le fait suivant.

Fait. — La multiplicité de τ dans $\pi_{|K}$ est égale à 1.

Notons $V(\tau)$ le sous-espace de la représentation τ dans $V_{|K}$. On a $V(\tau) \cong \mathbb{C}^n$ et on introduit

$$E_\tau = \operatorname{End}(V(\tau)).$$

Une fonction Φ τ-radiale de classe C^∞ est τ-sphérique sur G si et seulement si

(1) $\Phi(e) = \mathrm{Id}$, et

(2) Φ est une fonction propre pour la convolution par $C_c(G,K,\tau,\tau)$, *i.e.* il existe un (unique) caractère λ_Φ de $C_c(G,K,\tau,\tau)$ tel que, pour toute $F \in C_c(G,K,\tau,\tau)$, $F * \Phi = \Phi * F = \lambda_\Phi(F)\Phi$.

Nous noterons $\Sigma(G,K,\tau,\tau)$ l'ensemble des fonctions τ-sphériques sur G.

À l'aide de la décomposition $G = KAN$ on définit la fonction h sur G par :

$$h(ka_t n) = t$$

et par $\underline{k}$ le projecteur sur K. Alors la représentation $\pi_{\sigma,s}$ agit sur $(\mathcal{H}_{\sigma,s})_{|K} \cong L^2(K,M,\sigma)$ par

$$\pi_{\sigma,s}(x)f(k) = e^{-(s+\rho)h(x^{-1}k)} f(\underline{k}(x^{-1}k))$$

pour tout $x \in G$ et $k \in K$.

Soit σ une représentation irréductible de M apparaissant dans $\tau_{|K}$ ce que nous notons : $\sigma \in \widehat{M}(\tau)$. Désignons par P_σ^τ le générateur de l'espace de dimension 1

$$\operatorname{Hom}_K(\mathcal{H}_{\sigma,s}, V_\tau)$$

($\cong \mathrm{Hom}_K(L^2(K, M, \sigma), V_\tau$ pour tout $s \in \mathbb{C}$) défini par :

$$P_\sigma^\tau(f) := \sqrt{\frac{\dim \tau}{\dim \sigma}} \int_K \tau(k) f(k) dk.$$

Posons $J_\sigma^\tau = (P_\sigma^\tau)^*$, *i.e.* J_σ^τ est le générateur de l'espace de dimension 1

$$\mathrm{Hom}_K(V_\tau, \mathcal{H}_{\sigma,s})(\cong \mathrm{Hom}_K(V_\tau, L^2(K, M, \sigma)))$$

défini par

$$J_\sigma^\tau \xi = \sqrt{\frac{\dim \tau}{\dim \sigma}} P_\sigma \circ \{\tau(.)^{-1}\xi\},$$

où P_σ désigne la projection orthogonale de V_τ sur le sous-espace de σ dans V_τ. Pour $\sigma \in \widehat{M}(\tau)$ et $s \in \mathbb{C}$, on a vu que l'application

$$\Phi_{\sigma,s}^\tau : g \longmapsto P_\sigma^\tau \circ \pi_{\sigma,s}(g) \circ J_\sigma^\tau$$

définit une fonction τ-radiale sur G.

Proposition 9.2.1 **(Classification des fonctions sphériques).** — *Soit $\tau = \tau'_{p,q}$. Pour tout $\sigma \in \widehat{M}(\tau)$ et $s \in \mathbb{C}$, la fonction $\Phi_{\sigma,s}^\tau$ est τ-sphérique. Elle admet la représentation suivante :*

$$\Phi_{\sigma,s}^\tau(x) = \frac{\dim \tau}{\dim \sigma} \int_K e^{-(s+\rho)h(x^{-1}k)} \tau(k) \circ P_\sigma \circ \tau(\underline{k}(x^{-1}k)^{-1}).$$

En particulier, $\Phi_{\sigma,s}^\tau$ est holomorphe en la variable s. Enfin,

$$\Sigma(G, K, \tau, \tau) = \{\Phi_{\sigma,s}^\tau \mid \sigma \in \widehat{M}(\tau),\ \lambda \in \mathbb{C}/\{\pm 1\}\}.$$

(*Cf.* Wallach [**104**], pour une démonstration.)

D'après la décomposition de Cartan $G = KA^+K$ et l'équation (9.1.1), une application τ-radiale F est complètement déterminée par sa restriction à A^+. De plus $F_{|A^+}$ a son image contenue dans

$$E_\tau^M := \{T \in E_\tau \mid T = \tau(m) T \tau(m)^{-1} \text{ pour tout } m \in M\};$$

où M désigne toujours le centralisateur de A dans K. Dans la suite, nous étudions les fonctions sphériques le long de A. Rappelons donc la décomposition en irréductibles de la restriction de $\tau = \tau'_{p,q}$ à M :

$$(\tau'_{p,q})_{|M} = \sigma_{p,q} \oplus \sigma_{p-1,q} \oplus \sigma_{p,q-1} \oplus \sigma_{p-1,q-1} \tag{9.2.3}$$

(avec les conventions du § 4.1.1 : certains facteurs disparaissent dans les cas « non génériques »).

9.3. L'équation différentielle radiale

Soit $\sigma = \sigma_{p,q}$ avec $0 \leqslant p+q \leqslant n-1$. Soit $\tau \in \widehat{K}$ telle que $\sigma \in \widehat{M}(\tau)$ (génériquement τ est l'une des $\tau'_{p,q}$, $\tau'_{p+1,q}$, $\tau'_{p,q+1}$, $\tau'_{p+1,q+1}$). Posons

$$F(g) = \frac{\dim \tau}{\dim \sigma} \int_K e^{-(\overline{s}+n)h(gk)} \tau(\underline{k}(gk)) \circ P_\sigma \circ \tau(k^{-1}) dk,$$

l'adjoint de $\Phi^\tau_{\sigma,s}(g^{-1})$ pour le produit scalaire de V_τ. Dans cette section nous calculons la restriction de $R(C)F$ (où C désigne toujours le casimir) à A^+ en fonction de $F_{|A^+}$. Nous allons suivre [**104**, pp. 279-282] (c'est pour cette raison que nous sommes passés à l'adjoint).

Posons d'abord :

$$f_k(g) = e^{-(\overline{s}+n)h(gk)} \tau(\underline{k}(gk)) \circ P_\sigma \circ \tau(k)^{-1}.$$

Alors

$$F(g) = \frac{\dim \tau}{\dim \sigma} \int_K f_k(g) dk \quad \text{et} \quad R(C)F(g) = \frac{\dim \tau}{\dim \sigma} \int_K (R(C) f_k)(g).$$

D'un autre côté, $f_k(g) = f_e(gk)\tau(k)^{-1}$. Puisque $(R(C)f_e)(gk) = (R(\mathrm{Ad}(k)C)f_k(g))\tau(k)$, on obtient que $R(C)f_k(g) = (R(C)f_e)(gk)\tau(k)^{-1}$. Il suffit donc de calculer $R(C)f_e$. Soit $f = f_e$.

Notons θ l'involution de Cartan correspondant à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, *cf.* (4.0.1). Soit $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha}$ la décomposition en espaces de racines. La dimension de $\mathfrak{g}_\alpha$ est $2n-2$ et celle de $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ est 1. Soit donc $X_1, \ldots, X_{2n-2}, X_{2n-1}$ une base de $\mathfrak{n}$ telle que $X_1, \ldots, X_{2n-2}$ soient dans $\mathfrak{g}_\alpha$, X_{2n-1} soit dans $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ et $B(X_i, \theta X_j) = -\delta_{ij}$. Alors $[X_i, \theta X_i] = -H_0$ pour $i = 1, \ldots, 2n-2$ et $[X_{2n-1}, \theta X_{2n-1}] = -2H_0$. Rappelons que $B(H_0, H_0) = 1$. Enfin soit $U_1, \ldots, U_r$ une base de $\mathfrak{p}$ telle que $B(U_i, U_j) = -\delta_{ij}$. Alors :

$$C = -\sum X_i \theta X_i - \sum \theta X_i X_i - \sum U_i^2 + H_0^2.$$

Soit $C_0 = \sum U_i^2$. Remarquons que si m est dans M, alors $\mathrm{Ad}(m)C_0 = C_0$. Par définition de f, $f(gn) = f(g)$ pour n dans N. Puisque $X_i \theta X_i = -H_0 + \theta X_i X_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2n-2$ et $X_{2n-1}\theta X_{2n-1} = -2H_0 + \theta X_{2n-1} X_{2n-1}$, on obtient que

$$R(C)f = 2nR(H_0)f - R(C_0)f + R(H_0^2)f.$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}(R(C_0)f)(g) &= \sum_{i=1}^m \frac{d^2}{dt^2} f(ge^{tU_i})_{|t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m e^{-(\overline{s}+n)h(g)} \tau(\underline{k}(g)) \tau(U_i)^2 P_\sigma \\ &= e^{-(\overline{s}+n)h(g)} \tau(\underline{k}(g)) \tau(C_0) P_\sigma.\end{aligned}$$

Mais $\tau(C_0)$ agit par multiplication par un scalaire sur chaque sous-espace M-irréductible de V_τ. Donc $\tau(C_0)P_\sigma = \lambda_\sigma P_\sigma$.

Puis,

$$\begin{aligned} R(H_0)f(g) &= \frac{d}{dt} f(ge^{tH_0})_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(e^{-(\overline{s}+n)(h(g)+t)})_{|t=0}\tau(\underline{k}(g))P_\sigma \\ &= -(\overline{s}+n)f(g). \end{aligned}$$

Et donc : $R(H_0^2)f(g) = (\overline{s}+n)^2 f(g)$. On obtient finalement la formule :

$$R(C)f = -2n(\overline{s}+n)f + (\overline{s}+n)^2 f - \lambda_\sigma f.$$

Et donc :

$$R(C)F(g) = (\overline{s}^2 - n^2 - \lambda_\sigma)F(g). \tag{9.3.1}$$

Si $\varphi : G \to \operatorname{End}(V_\tau)$ est une fonction τ-radiale de classe C^∞, on peut montrer, [**104**, formule (4) p. 282], que :

$$\begin{aligned} (R(C)\varphi)(a_t) = \frac{d^2\varphi(a_t)}{dt^2} &+ (2\coth(2t) + 2(n-1)\coth(t))\frac{d\varphi(a_t)}{dt} \\ &+ Q_1(t)\varphi(a_t) - \varphi(a_t)\tau(C_0), \end{aligned} \tag{9.3.2}$$

où de l'expression de Q_1 donnée dans [**104**] nous ne retiendrons que la décroissance exponentielle (pour $t \to +\infty$) vers 0.

***Proposition 9.3.1* (Équation différentielle radiale).** — *Pour simplifier notons $F(t) = F(a_t)$. Alors pour $t > 0$,*

$$F''(t) + (2\coth(2t) + 2(n-1)\coth(t))F'(t) + Q_1(t)F(t) = (\overline{s}^2 - n^2)F(t). \tag{9.3.3}$$

Démonstration. — La Proposition découle des équations (9.3.1) et (9.3.2) en remarquant que

$$F(a_t)\tau(C_0) = \lambda_\sigma F(a_t).$$

9.4. Comportement asymptotique

Nous conservons les notations de la section précédente. Notamment nous notons toujours $F(t)$ la fonction de la Proposition 9.3.1. Puisque la fonction $Q_1(t)$ tend exponentiellement vite vers 0 lorsque t tend vers l'infini, l'équation différentielle (9.3.3) est exponentiellement asymptote (lorsque t tend vers 0) à l'équation différentielle :

$$F''(t) + 2nF'(t) + (n^2 - \overline{s}^2)F(t) = 0. \tag{9.4.1}$$

Un théorème classique nous assure alors que les solutions des équations différentielles (9.3.3) et (9.4.1) sont asymptotes lorsque t tend vers l'infini.

Plus précisément on obtient la proposition suivante [1] :

***Proposition 9.4.1* (Asymptotique des fonctions sphériques).** — *Soit $F(t)$ l'adjoint de $\Phi^{\tau}_{\sigma,s}(a_t^{-1})$ agissant sur l'espace de Hilbert V_τ. Si s est dans $\mathbb{C}$ avec $n > \mathrm{Re}(s) \geqslant \varepsilon > 0$, alors il existe un réel $\delta > 0$ indépendant de s et de ε et une constante C_ε ne dépendant que de ε tels que :*

$$\|e^{nt}F(t) - e^{\overline{s}t}P_\sigma B_\tau(\overline{s}) - e^{-\overline{s}t}\tau(k^*)B_\tau(-\overline{s})^* P_\sigma \tau(k^*)^{-1}\| \leqslant C_\varepsilon e^{-\delta t},$$

où k^* est un élément de K centralisant A et tel que $k^* a_t (k^*)^{-1} = a_{-t}$ et

$$B_\tau(z) = \int_{\overline{N}} e^{-(n+z)h(\overline{n})}\tau(\underline{k}(\overline{n}))^{-1} d\overline{n}.$$

(Ici $\overline{N}$ est le radical unipotent du parabolique opposé à P.)

Démonstration. — Soit $\Delta(t) = (\sinh t)^{2(n-1)}(\sinh 2t)$. Posons $G(t) = \Delta(t)^{1/2}F(t)$ pour $t > 0$. L'équation (9.3.3) se réécrit :

$$-G''(t) + Q(t)G(t) = -\overline{s}^2 G(t), \tag{9.4.2}$$

où $Q(t)$ est une fonction qui décroît exponentiellement vite vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Plus précisément (*cf.* [**104**]) si T est un réel strictement positif, il existe une constante C_1 ne dépendant que de T telle que $\|Q(t)\| \leqslant C_1 e^{-t}$ $(t \geqslant T)$. Donc, étant donné un réel δ strictement compris entre 0 et 1, il existe une constante C_2 telle que pour tout $u > T$:

$$\int_u^{+\infty} \|Q(t)\|(1+t)dt < C_2 e^{-\delta u}. \tag{9.4.3}$$

Les Lemmes A.8.2.12 et A.8.2.17 de l'appendice de [**104**] impliquent alors que si $\mathrm{Re}(s) \geqslant \varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε ne dépendant que de ε et deux endomorphismes A_1 et A_2 de V_τ tels que :

$$\|G(t) - e^{\overline{s}t}A_1 - e^{-\overline{s}t}A_2\| < C_\varepsilon e^{-\delta t}. \tag{9.4.4}$$

Puisque $\Delta(t)^{1/2}$ est exponentiellement asymptotique à e^{nt}, pour conclure la démonstration il reste à déterminer A_1 et A_2. Encore une fois nous suivons [**104**, pp. 283-285] pour cela. Puisque $\mathrm{Re}(s) > 0$, d'après (9.4.4), on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{nt}F(t) - e^{\overline{s}t}A_1\| = 0.$$

Or,

$$F(t) = \frac{\dim \tau}{\dim \sigma}\int_K e^{-(\overline{s}+n)h(a_t k)}\tau(\underline{k}(a_t k)) \circ P_\sigma \circ \tau(k^{-1})dk.$$

Les calculs de [**104**, p. 284] (et en particulier l'expression (14)), montrent alors que si $n > \mathrm{Re}(s) > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} e^{(n-\overline{s})t}F(t) = P_\sigma B_\tau(\overline{s}).$$

[1] Ici comme dans d'autres formules, on espère que le lecteur saura distinguer n $(\in \mathbb{N})$ et n (élément unipotent).

Le calcul de A_2 se fait de même (*cf.* [**104**]) et achève la démonstration de la Proposition.

Remarque. — Les fonctions B_τ ont été étudiées par Schiffmann [**89**] (*cf.* aussi [**104**]). Elles sont explicites. Les seules propriétés dont nous aurons besoin sont :

(1) pour $n > \mathrm{Re}(s) > 0$, $B_\tau(s) \neq 0$ et,

(2) les fonctions B_τ sont continues (en fait analytiques).

La Proposition 9.4.1 n'est en fait qu'un cas particulier d'un résultat plus général de Langlands, *cf.* [**72, 21**].

Corollaire 9.4.2. — *Soient $\tau = \tau'_{p,q}$ et v un vecteur dans V_τ. Soit ε un réel strictement positif. Il existe une constante C_ε ne dépendant que de ε et de τ et un réel $\delta > 0$ indépendant de ε tels que : pour tout $\sigma \in \widehat{M}(\tau)$,*

(1) *si s est un réel dans $[\varepsilon, n]$,*

$$\langle \Phi^\tau_{\sigma,s}(e^{-tH})v, v\rangle_{V_\tau} = B_\tau(s)\|P_\sigma(v)\|^2_{V_\tau} e^{(-n+s)t} + o_\varepsilon(\|v\|^2_{V_\tau} e^{(-n-\min(\varepsilon,\delta))t});$$

(2) *si s est un réel dans $]0, \varepsilon]$,*

$$\langle \Phi^\tau_{\sigma,s}(e^{-tH})v, v\rangle_{V_\tau} \leqslant C_\varepsilon \|v\|^2_{V_\tau} e^{(-n+\varepsilon)t}.$$

Où la notation o_ε signifie que les constantes dans le o ne dépendent que de ε.

Démonstration. — Cela découle de la Proposition ci-dessus pour le point 1 et de la démonstration de la Proposition ci-dessus pour le point 2, en remarquant que $F(t) = F(a_t)$ est égal à l'adjoint de $\Phi^\tau_{\sigma,s}(e^{-tH})$ pour le produit scalaire de V_τ.

Rappelons que si $\tau = \tau'_{p,q}$, l'ensemble $\widehat{M}(\tau)$ contient, génériquement, quatre représentations. Si $\sigma = \sigma_{a,b}$ est l'une de ces représentations et s un nombre complexe, on a :

$$\pi_{\sigma,s}(C) = -((n-(a+b))^2 - s^2)\,\mathrm{Id}\,. \tag{9.4.5}$$

Soit $\mathbb{D}(G,K,\tau)$ l'*algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur l'espace* $C^\infty(G,K,\tau)$ des fonctions C^∞ $f : G \to V_\tau$ telles que

$$f(xk) = f(x)\tau(k).$$

Alors l'algèbre $\mathbb{D}(G,K,\tau)$ est engendrée par les opérateurs $\partial\partial^*$, $\partial^*\partial$, $\overline{\partial\partial}^*$ et $\overline{\partial}^*\overline{\partial}$ *cf.* [**83**]. Elle contient notamment le laplacien de Hodge-de Rham : $\Delta = (\partial+\overline{\partial})(\partial^*+\overline{\partial}^*) + (\partial^*+\overline{\partial}^*)(\partial+\overline{\partial})$.

Et l'identité (9.4.5) implique que la fonction sphérique $\Phi^\tau_{\sigma,s}$ associée au K-type τ de $\pi_{\sigma,s}$ vérifie :

$$\Delta\Phi^\tau_{\sigma,s} = ((n-(a+b))^2 - s^2)\Phi^\tau_{\sigma,s}.$$

Notons

$$\Phi^{p,q}_{a,b}(s,x) = \Phi^{\tau'_{p,q}}_{\sigma_{a,b},s}(x),$$

pour $\sigma_{a,b} \in \widehat{M}(\tau'_{p,q})$. On peut vérifier la caractérisation suivante des fonctions sphériques.

Théorème 9.4.3. — *Soit Φ une fonction $\tau'_{p,q}$-radiale normalisée, i.e. $\Phi(e) = \mathrm{Id}$.*

(1) $\Phi = \Phi^{p,q}_{p,q}(s,.)$ *si et seulement si* $\Delta\Phi = \{(n-(p+q))^2 - s^2\}\Phi$, $\partial^*\Phi = 0$ *et* $\overline{\partial}^*\Phi = 0$;

(2) $\Phi = \Phi^{p,q}_{p-1,q}(s,.)$ *si et seulement si* $\Delta\Phi = \{(n-(p+q-1))^2 - s^2\}\Phi$, $\partial\Phi = 0$ *et* $\overline{\partial}^*\Phi = 0$;

(3) $\Phi = \Phi^{p,q}_{p,q-1}(s,.)$ *si et seulement si* $\Delta\Phi = \{(n-(p+q-1))^2 - s^2\}\Phi$, $\partial^*\Phi = 0$ *et* $\overline{\partial}\Phi = 0$;

(4) $\Phi = \Phi^{p,q}_{p-1,q-1}(s,.)$ *si et seulement si* $\Delta\Phi = \{(n-(p+q-2))^2 - s^2\}\Phi$, $\partial\Phi = 0$ *et* $\overline{\partial}\Phi = 0$.

9.5. Démonstration du Théorème 2

Soit G un groupe algébrique simple et connexe sur $\mathbb{Q}$ tel que G^{nc} soit isomorphe au groupe $\mathrm{SU}(n,1)$. Soit H un $\mathbb{Q}$-sous-groupe de G tel que H^{nc} soit isomorphe au groupe $\mathrm{SU}(n',1)$ ($n' \leqslant n$). Nous supposerons que le groupe (réel) H est stable par une involution de Cartan de G (*plongement standard*). Quitte à conjuguer H dans G, on peut donc supposer que $K_H \subset K_G$ et $A_H = A = A_G$.

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 2. Mais commençons par introduire les définitions suivantes.

Soient ε un réel positif et (p,q) un couple d'entiers. Notons $H_\varepsilon^{(p,q)}$ l'hypothèse sur le groupe G suivante :

$$H_\varepsilon^{(p,q)} : \begin{cases} \text{si } \lambda \text{ est dans le } (p,q)\text{-spectre automorphe de } G, \text{ alors soit} \\ (1)\ \lambda = (n-(p+q)+k)^2 - (n-(p+q)+k-i)^2 \\ \ \text{avec } k = 0,\dots,p+q \text{ et } i = 0,\dots,n-(p+q)+k, \\ (2)\ \lambda \geqslant (n-(p+q))^2 - \varepsilon^2. \end{cases}$$

Les Conjectures d'Arthur prévoient (*cf.* Ch. 6) que l'hypothèse $H_0^{(p,q)}$ est vraie pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $p+q \leqslant n-1$ (le Corollaire 6.2.7 est plus précis). Les hypothèses $H_\varepsilon^{(p,q)}$ sont donc des approximations aux Conjectures d'Arthur pour les groupes unitaires.

Le but de cette section est la démonstration du théorème suivant :

***Théorème 9.5.1* (Relèvement des Conjectures d'Arthur)**. — *Soient n et n' deux entiers tels que $n \geqslant n' \geqslant 1$. Soient $H \subset G$ deux groupes algébriques définis sur $\mathbb{Q}$ tels que : $H^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(n',1)$ et $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(n,1)$, avec $H^{\mathrm{nc}} \subset G^{\mathrm{nc}}$ plongement standard. Supposons les hypothèses $H_\varepsilon^{(p,q)}$ vérifiées pour le groupe H et pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $p+q \leqslant k \leqslant n'-1$. Alors, les hypothèses $H^{(p,q)}_{n-n'+\varepsilon}$ sont vraies pour G et pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $p+q \leqslant k$.*

Le Théorème 2 est un corollaire immédiat du Théorème 9.5.1. La démonstration de ce dernier va essentiellement reposer sur un théorème de Burger et Sarnak [**20**] dont nous proposons la démonstration suivante (empruntée à [**27**]).

Variation sur un thème de Burger et Sarnak. — Si $\delta \in G(\mathbb{Q})$, la double classe $\Gamma\delta\Gamma = T_\delta$ opère de la façon suivante sur $L^2(\Gamma\backslash G)$. Si

$$\Gamma\delta\Gamma = \coprod_i \Gamma\delta_i, \tag{9.5.1}$$

alors

$$(T_\delta)(g) = \sum_i f(\delta_i g) \quad (g \in G). \tag{9.5.2}$$

Soit $\deg(T_\delta)$ le degré de T_δ, égal au cardinal de $\Gamma\backslash\Gamma\delta\Gamma$. Nous appellerons *opérateur de Hecke* une combinaison linéaire finie à coefficients entiers $\geqslant 0$ de T_δ ; son degré est alors défini par additivité. Il n'est pas difficile de montrer (*cf.* [**20**], [**27**]) que T_δ est un opérateur borné dans $L^2(\Gamma\backslash G)$, de norme

$$\|T_\delta\| = \deg(T_\delta).$$

Si T est un opérateur de Hecke, soit $\widetilde{T} = \deg(T)^{-1}T$ l'opérateur *normalisé* associé.

Notons $L^2(\Gamma\backslash G)^\perp$ l'orthogonal de l'espace des fonctions constantes. Le théorème suivant qui renforce une proposition de Burger et Sarnak est dû à Clozel et Ullmo [**27**].

Théorème 9.5.2. — *Il existe un opérateur de Hecke autoadjoint T tel que $\widetilde{T}f = f$ pour f constante sur $\Gamma\backslash G$ et $\|\widetilde{T}_{|L^2(\Gamma\backslash G)^\perp}\| < 1$.*

La norme est la norme forte d'opérateur :

$$\|\widetilde{T}f\| \leqslant \|\widetilde{T}_{|L^2(\Gamma\backslash G)^\perp}\| \cdot \|f\|, \quad f \in L^2(\Gamma\backslash G)^\perp. \tag{9.5.3}$$

La démonstration s'esquisse comme suit. Fixons une place q telle que G soit déployé sur $\mathbb{Q}_q$, que G soit défini sur $\mathbb{Z}_q$, et que l'intersection du sous-groupe compact-ouvert K_f, de $G(\mathbb{A}_f)$ définissant le sous-groupe de congruence Γ, avec $G(\mathbb{Q}_q)$ soit réduite au sous-groupe hyperspécial $G(\mathbb{Z}_q)$.

À l'exception du cas spécial (sans intérêt pour nous) où G est obtenu par restriction des scalaires (pour une extension finie F de $\mathbb{Q}$) de $\mathrm{SL}(2)/F$, le groupe $G(\mathbb{Q}_q)$ est de rang $\geqslant 2$ et a donc la propriété (T) de Kazhdan. La représentation triviale est donc isolée dans le dual unitaire de $G(\mathbb{Q}_q)$. Clozel et Ullmo en déduisent [**27**] le lemme suivant.

Lemme 9.5.3. — *Il existe une fonction φ sur $G(\mathbb{Q}_q)$, bi-$G(\mathbb{Z}_q)$-invariante, positive, à coefficients entiers et auto-adjointe ($\varphi(g) = \varphi(g^{-1})$) et une constante $C < 1$ tels que*

$$\|\pi(\varphi)\| \leqslant C \deg(\varphi) \tag{9.5.4}$$

si $\pi \in \widehat{G(\mathbb{Q}_q)}$ est différente de la représentation triviale.

Remarquons que si G est obtenu par restriction des scalaires (pour une extension finie F de $\mathbb{Q}$) de $\mathrm{SL}(2)/F$, le Lemme 9.5.3 reste vrai si l'on considère la composante q-adique d'une représentation automorphe de G, puisque l'on dispose d'une approximation de la Conjecture de Ramanujan.

Complétons alors la démonstration du Théorème 9.5.2. Écrivons

$$L^2(\Gamma\backslash G) = \mathbb{C} \oplus L^2(\Gamma\backslash G)^{\perp} \tag{9.5.5}$$

où $\mathbb{C}$ désigne l'espace des constantes; $L^2(\Gamma\backslash G)$ est une représentation de G. Le groupe G est obtenu par restriction des scalaires (pour une extension finie F de $\mathbb{Q}$) d'un groupe absolument quasi-simple G^0/F. Sous nos hypothèses, la place q est décomposée dans F et

$$G(\mathbb{Q}_q) = \prod_{v|q} G^0(F_v),$$

chaque facteur étant isomorphe à $G^d(\mathbb{Q}_q)$ où G^d est le groupe déployé simplement connexe de même système de racines que G^0. Soit v une place fixée au-dessus de q. Écrivons $K_f = K_v K^v$ ($K_v \subset G^0(F_v)$) et soit $\Gamma_v = G(\mathbb{Q}) \cap K^v$. Alors,

$$\mathcal{L}_v = L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G^0(\mathbb{A}_F^v)/K^v) \tag{9.5.6}$$

(notations évidentes) est une représentation de $G \times G^0(F_v)$, et $L^2(\Gamma\backslash G)$ est l'espace des K_v-invariants dans $\mathcal{L}_v$ (noter que le Théorème d'approximation forte [**84**] s'applique). Par approximation forte, $L^2(\Gamma\backslash G)^{\perp} = (\mathcal{L}_v^{\perp})^{K_v}$ où $\mathcal{L}_v^{\perp}$ est l'orthogonal de l'espace des constantes.

La théorie des séries d'Eisenstein donne une décomposition

$$\mathcal{L}_v = \mathbb{C} \oplus \int_{\widehat{G^0(F_v)}} m(\pi_v)\pi_v d\mu(\pi_v) \tag{9.5.7}$$

que nous n'expliciterons pas, mais où l'intégrale porte sur l'espace des représentations automorphes non triviales dans $\widehat{G^0(F_v)}$. L'opérateur T associé à la fonction φ déduite du Lemme 9.5.3 opère alors sur $\mathcal{L}_v^{K_v}$ décomposé selon (9.5.7) par

$$T = \deg(T) \oplus \int_{\widehat{G^0(F_v)}_{nr}} m(\pi_v)\pi_v(\varphi) d\mu(\pi_v); \tag{9.5.8}$$

où $\pi_v(\varphi)$ est un scalaire de norme $\leqslant C\deg(T)$. D'où le Théorème 9.5.2.

***Lemme 9.5.4* (Burger-Sarnak [20]).** — *Soit $f \in C_0(\Gamma\backslash G)$. Alors (à une constante strictement positive de normalisation près) :*

$$\int_{\Gamma\backslash G} f(g)\overline{f(gh)}dg = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{d^m} \sum_{i=1}^{\lambda^{(m)}} \int_{\Lambda_i^{(m)}\backslash H} f(\eta_i^{(m)} h_1)\overline{f(\eta_i^{(m)} h_1 h)} dh_1, \tag{9.5.9}$$

où les $\Lambda_i^{(m)}$ sont des sous-groupes de congruences de H, $d = \deg(T)$, $\eta_i^{(m)} \in G(\mathbb{Q})$, et la limite est uniforme sur les compacts de H.

Idée de la démonstration. — Soit $f \in C_0(\Gamma\backslash G)$, et $f^0(x) = \int_{\Gamma\backslash G} f(g)dg$ ($\forall\, x$) (mesure normalisée) le « terme constant » de f. Le Théorème 9.5.2 implique que $\widetilde{T}^n f \to f^0$ dans L^2. Il n'est alors pas difficile de montrer ([**20**]) que $\widetilde{T}^n f(x) \to f^0(x)\ \forall\, x \in \Gamma\backslash G$, la convergence étant uniforme sur les compacts. Par dualité on a donc :

$$\int_{\Gamma\backslash G} f(g)\overline{f(gh)}dg = \lim_{m\to\infty} \langle \widetilde{T}^m(\mu), R\rangle$$

où

$$R(g) = f(g)\overline{f(gh)}$$

et μ est la mesure positive (normalisée) sur $\Gamma\backslash G$ définie par

$$\langle \mu, F\rangle = \int_{(\Gamma\cap H)\backslash H} F(h)dh.$$

On écrit

$$T^m F(g) = \sum_{j=1}^{d^m} F(\delta_j^{(m)} g).$$

L'ensemble des $\delta_j^{(m)}$ se décompose en une réunion disjointe de $(\Gamma \cap H)$-orbites :

$$\{\delta_j^{(m)}\}_{j=1,\dots,d^m} = \bigsqcup_{i=1}^{\lambda^{(m)}} \Gamma\eta_i^{(m)}(\Gamma\cap H)$$

où chaque $\eta_i^{(m)} \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$. Soit

$$\Lambda_i^{(m)} = \{h \in \Gamma\cap H \mid \Gamma\eta_i^{(m)} h = \Gamma\eta_i^{(m)}\}.$$

Le groupe $\Lambda_i^{(m)}$ est un sous-groupe de congruence de H. Et,

$$\langle \widetilde{T}^m(\mu), F\rangle = \frac{1}{d^m}\sum_{i=1}^{\lambda^{(m)}} \int_{\Lambda_i^{(m)}\backslash H} F(h_i^{(m)} h)dh.$$

Le Lemme s'en déduit en prenant $F = R$.

Le Lemme 9.5.4 implique immédiatement le principe de restriction de Burger et Sarnak [**20**] que nous avons rappelé au § 2.3 (Théorème 2.3.1).

Démonstration du Théorème 9.5.1. — Nous supposons les hypothèses $H_\varepsilon^{(p,q)}$ vérifiées pour H et pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $p+q \leqslant k$. Fixons un couple d'entiers (p,q) tel que $p+q \leqslant k$. Nous allons montrer que l'hypothèse $H_{n-n'+\varepsilon}^{(p,q)}$ est vérifiée pour le groupe G. Supposons d'abord G anisotrope.

Soit donc $\lambda \in\,]0, (n-(p+q))^2[$ dans le (p,q)-spectre automorphe de G. Soit $\tau = \tau'_{p,q}$. D'après la formule de Matsushima, il existe une représentation $\sigma = \sigma_{a,b} \in \widehat{M}(\tau)$ et un nombre réel strictement positif s telle que :

(1) le quotient de Langlands $J_{\sigma,s}$ de la représentation $\pi_{\sigma,s}$ appartient à $\widehat{G}_{\mathrm{Aut}}$;
(2) $\lambda = (n-(a+b))^2 - s^2$.

Nous noterons dorénavant $\pi = J_{\sigma,s}$ (remarquons que les coefficients de π sont des coefficients de $\pi_{\sigma,s}$).

La restriction de la représentation π à H se décompose en somme directe :

$$\pi_{|H} = \int_{\widehat{H}}^{\oplus} M_\sigma \widehat{\otimes} \mathcal{H}_\sigma d\mu(\sigma), \tag{9.5.10}$$

où μ est une mesure positive sur le dual unitaire $\widehat{H}$ de H et M_σ la représentation triviale de dimension $m(\sigma)$ où $\sigma \mapsto m(\sigma) \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$ est une fonction borélienne.

Remarquons tout d'abord que le principe de restriction de Burger et Sarnak (Théorème 2.3.1) implique que :

$$\text{support } \mu \subset \widehat{H}_{\mathrm{Aut}}. \tag{9.5.11}$$

Rappelons maintenant que $V_\tau \subset \mathcal{H}_\pi$. Soit τ' un K_H-type apparaissant dans $\tau_{|H}$. Fixons $v \in V_{\tau'}$. La décomposition (9.5.10) implique la décomposition suivante :

$$\langle \pi(a)v, v\rangle = \int_{\widehat{H}} \langle \sigma(a)v_\sigma, v_\sigma\rangle d\mu(\sigma), \tag{9.5.12}$$

où $v_\sigma \in \mathcal{H}_\sigma^{\oplus m(\sigma)}$ et a est un élément de A_H. Remarquons que dans la décomposition (9.5.12) la mesure μ ne charge que les représentations $\sigma \in \widehat{H}_{\mathrm{Aut}}$ contenant le K_H-type τ'.

Nous allons appliquer le Corollaire 9.4.2 à H. Le Corollaire 9.4.2 donne pour chaque $\sigma \in \widehat{H}_{\mathrm{Aut}}$ contenant le K_H-type τ' et pour tout vecteur $v_\sigma \in V_{\tau'}$,

$$\langle \sigma(e^{-tH})v_\sigma, v_\sigma\rangle_{V_{\tau'}} \begin{cases} = B_{\tau'}(n'-j)\|v_\sigma\|^2_{V_{\tau'}} e^{-jt} + o_\varepsilon(e^{-(n'+\delta)t}) \\ \leqslant C_\varepsilon \|v_\sigma\|^2_{V_{\tau'}} e^{-(n'-\varepsilon)t} \end{cases} \tag{9.5.13}$$

pour $t \in [0, +\infty[$, la constante implicite dans le o_ε, ainsi que C_ε, étant uniformes.

La première ligne de (9.5.13) correspond aux représentations irréductibles de H (indexés par $j = 0, 1, \ldots, k$) vérifiant la condition 1. de $H_\varepsilon^{(a,b)}$ $(a + b \leqslant k \leqslant n' - 1)$; la seconde ligne correspond aux autres, vérifiant 2.

Considérons alors l'expression de $\langle \pi(e^{-tH})v, v\rangle_{V_{\tau'}}$ donnée par (9.5.12). Commençons par remarquer que

$$\|v\|^2_{V_{\tau'}} = \int_{\widehat{H}} \|v_\sigma\|^2_{V_{\tau'}} d\mu(\sigma). \tag{9.5.14}$$

Selon le type de la représentation de H dans le support de μ, chaque coefficient (dans l'intégrale) s'exprime selon (9.5.13) ; d'après l'uniformité de C_ε et des termes o_ε et (9.5.14), on a l'expression :

$$\langle \pi(e^{-tH})v, v\rangle = \sum_{j=0}^{k} C_j \cdot e^{-jt} + O_\varepsilon(e^{-(n'-\varepsilon)t}) \quad (t \in [0, +\infty[)$$

avec les mêmes propriétés des constantes implicites dans O_ε ; mais toujours d'après le Corollaire 9.4.2 (cette fois appliqué au groupe G) ceci est en fait de la forme

$$C \cdot e^{-(n-s)t} + o(e^{-(n-s)t}) \quad (t \in [0, +\infty[),$$

où C est une constante non nulle.

Nous nous retrouvons alors avec deux possibilités :

(1) soit il existe un entier j dans $[0, k]$ tel que $s = n - j$,

(2) soit $s \leqslant n - n' + \varepsilon$.

En remplaçant la valeur de s dans l'expression de λ, on obtient le Théorème *i.e.* que la propriété $H^{(p,q)}_{n-n'+\varepsilon}$ est vérifiée.

Si G n'est pas anisotrope, il faut aussi tenir compte du spectre continu, mais alors G est de rang 1 sur $\mathbb{Q}$ ($G(\mathbb{R}) = \mathrm{SU}(n,1)$ est de rang 1) et la théorie de Langlands donne une décomposition

$$L^2(\Gamma\backslash G) = L^2_{\mathrm{disc}}(\Gamma\backslash G) \oplus L^2_{\mathrm{ind}}(\Gamma\backslash G),$$

où toutes les représentations de $L^2_{\mathrm{ind}}(\Gamma\backslash G)$ sont unitairement induites à partir du parabolique minimal donc *tempérées* [**79**]. Sur une représentation (irréductible) tempérée, la valeur propre $\lambda(C)$ vérifie $H_0^{(p,q)}$ donc $H_\varepsilon^{(p,q)}$. Enfin, on vérifie aussitôt que le spectre (continu) de C dans $L^2_{\mathrm{ind}}(\Gamma\backslash G)$ est l'adhérence de cet ensemble de valeurs propres (d'ailleurs fermé comme on le déduit aisément de la décomposition spectrale).

Remarque. — Sous l'hypothèse $H_{n-n'+\varepsilon}$ ($\varepsilon < 1$), une valeur propre du laplacien λ apparaissant dans le (p,q)-spectre avec $p+q \leqslant n'-1$ est entière ou vérifie l'inégalité :

$$\lambda \geqslant (n - n' + 1)^2 - (n - n' + \varepsilon)^2 > 0.$$

La Conjecture $A^-(k)$ est en particulier vérifiée pour tout $k < n'$.

CHAPITRE 10

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

Dans ce chapitre G est un groupe anisotrope sur $\mathbb{Q}$ obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe spécial unitaire G_F sur un corps totalement réel F. Alors $G(\mathbb{R})$ est un produit de groupes $\mathrm{SU}(p,q)$, le produit portant sur les plongements réels de F. Nous supposerons que

$$G(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(n,1) \times \mathrm{SU}(n+1)^{d-1}.$$

Notre but est de démontrer les Conjectures $\mathrm{A}^-(0)$ et $\mathrm{A}^-(1)$ dans ce cas. Rappelons (§ 8.1) qu'en général un groupe unitaire provient d'une involution sur une algèbre simple centrale. Si celle-ci est une algèbre de matrices, on obtient simplement les groupes unitaires « usuels » des formes hermitiennes. Ce cas est traité dans le § 10.1.

Quand G est un groupe « exotique » (associé à une algèbre simple centrale qui n'est pas une algèbre de matrices), des principes généraux impliquent que le spectre des 0-formes et des 1-formes devrait être *plus restreint* que dans le cas précédent, impliquant *a fortiori* les résultats cherchés. Mais ceci – qui repose sur des exemples de la fonctorialité de Langlands – n'est pas si facile à démontrer. Nous obtenons le résultat cherché (Théorème 3 de l'introduction, avec parfois de meilleures constantes spectrales) sous l'hypothèse que le rang absolu de G (c'est $(n+1)$ dans la description précédente) n'est pas une puissance de 2. Pour ceci nous sommes amenés à reprendre et à préciser les démonstrations de [**26**] qui démontraient la Conjecture τ pour de tels groupes.

Nous pensons que l'hypothèse sur le rang peut être évitée, mais cela impose de renforcer significativement les résultats de [**26**].

10.1. Vrais groupes unitaires

Soient F un corps totalement réel de degré d, E/F une extension quadratique totalement imaginaire et h une forme hermitienne sur E^{n+1}.

Pour toute place archimédienne v de F, E/F définit une extension quadratique $E \otimes F_v/F_v$ isomorphe à $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ et h définit donc une forme hermitienne h_v sur $\mathbb{C}^{n+1}$. On suppose que les signatures sont $(n,1)$ en v_1 et n en $v_2, \dots v_d$.

Le groupe G_F est le groupe spécial unitaire, défini sur F, $\mathrm{SU}(E^{n+1},h)$ et G est le groupe G_F « vu comme $\mathbb{Q}$-groupe ».

Dans ce cas le Théorème 3 résulte des chapitres 8 et 9. On a en fait :

Théorème 10.1.1. — *Soit G un vrai groupe unitaire, tel que $G^{\mathrm{nc}} \cong \mathrm{SU}(n,1)$, $n \geqslant 2$.*

(1) *La plus petite valeur propre positive du laplacien sur les fonctions vérifie :*

$$\lambda_1^0 \geqslant 2n-1$$

(2) *La plus petite valeur propre sur les 1-formes vérifie :*

$$\lambda_1^1 \geqslant \frac{2}{5}n - \frac{11}{25}.$$

Démonstration. — Considérons d'abord les fonctions. On applique le Théorème 9.5.1 avec $n' = 2$. D'après le Théorème 1 (Ch. 8) on a alors (notations (9.5.1)) $\varepsilon = \frac{4}{5}$. Alors le Théorème 9.5.1 donne

$$\lambda = n^2 - (n-i)^2, \ i = 0, \dots n-1$$

ou $\lambda \geqslant n^2 - (n-2+\varepsilon)^2 = \frac{12}{5}n - \frac{36}{25}$.

On vérifie aisément que (pour $\lambda \neq 0$) la borne inférieure obtenue est donnée par $i = 1$, $\lambda = 2n-1$.

Si on considère les 1-formes, on obtient de même, avec toujours $\varepsilon = \frac{4}{5}$ (Ch. 8) :

$$\lambda = (n-1+k)^2 - (n-1+k-i)^2 \quad k = 0, 1, \ i = 0, \dots, n-1$$

ou $\lambda \geqslant (n-1)^2 - (n-\frac{6}{5})^2 = \frac{2}{5}n - \frac{11}{25}$.

Dans ce cas la borne inférieure est donnée par la seconde estimée.

10.2. Groupes exotiques : réductions

En général, un groupe algébrique G sur $\mathbb{Q}$ tel que $G(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(n,1) \times \mathrm{SU}(n)^{d-1}$ est obtenu de la façon suivante (*cf.* [**84**]).

On fixe comme auparavant un corps totalement réel F, une extension quadratique totalement imaginaire E de F.

Soit σ le générateur de $\mathrm{Gal}(E/F)$.

Soit B une algèbre simple sur E, dont le centre est E, et de rang réduit $(n+1)$: donc $B \otimes_E \overline{\mathbb{Q}} \cong M_{n+1}(\overline{\mathbb{Q}})$. On suppose donnée sur B une involution de seconde espèce α (*cf.* § 8.1). Alors (notations du § précédent)

$$G(\mathbb{Q}) = G_F(F) = \{g \in B^\times : g\alpha(g) = 1\}.$$

Comme on l'a dit dans l'introduction, nous utiliserons librement dans ce paragraphe les notions relatives aux formes automorphes sur les groupes adéliques, ainsi que les résultats de [**26**].

Commençons par reformuler la définition générale des groupes unitaires. Une algèbre simple centrale B sur E s'écrit $B = M_r(D)$ où D est une *algèbre à division* de rang réduit d sur E. Le rang absolu du groupe unitaire associé ($n+1$ avec nos notations usuelles) est rd. Notons $*$ une involution de seconde espèce *sur* D. Il y a alors une notion naturelle de modules de rang r sur D (isomorphes à D^r) ; pour V

un tel module $\mathrm{End}_D(V) \cong M_r(D)$. On peut définir des formes hermitiennes h sur V (à valeurs dans D) relatives à l'involution $*$ [**84**]. Alors le groupe G peut être défini de façon naturelle par

$$G(\mathbb{Q}) = G_F(F) = \mathrm{SU}(V, h).$$

Comme on l'a vu dans l'introduction, nous supposons pour les groupes exotiques (*i.e.*, si $d > 1$, ce que l'on supposera désormais) que le rang rd n'est pas une puissance de 2. On a tout d'abord si $r > 1$:

Proposition 10.2.1. — *Supposons $r \geqslant 3$ (par exemple r impair). Alors les estimées du Théorème 10.1.1 restent vraies pour G.*

Ceci résulte des arguments de [**26**, § 1.3]. On peut supposer donnée une base orthonormale de D^r pour h. Celle-ci s'écrit alors

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{r} x_i^* f_i x_i$$

où $x = (x_1, \dots x_r)$ et $y = (y_1, \dots y_r) \in D^r$, $f_i \in D$ et $f_i = f_i^*$. La Proposition 1.3 de [**26**] montre que, sans changer G (à isomorphisme près) on peut supposer que les f_i commutent. Ils sont contenus alors dans un sous-corps totalement réel maximal $L_0 \subset D$, stable par l'involution (L_0 est de degré d sur F). Le corps $EL_0 = L \subset D$ est alors totalement imaginaire, quadratique sur L_0. L'argument donné dans [**26**, p. 303-304] montre alors que G contient un sous-groupe H sur $\mathbb{Q}$ tel que avec $H(\mathbb{Q}) = H_{L_0}(L_0)$; ici H_{L_0} est un groupe unitaire *ordinaire* sur L_0, de rang r, dont la forme hermitienne est de matrice $(f_1, \dots f_r)$.

Soient v une place archimédienne de F et $w_1, \dots w_d$ les places (réelles) de L_0 étendant v. Si on note (p, q) les signatures associées, on vérifie aisément que

$$p_v = \sum_i p_{w_i}, \ q_v = \sum_i q_{w_i}.$$

On en déduit que $H_{L_0}(L_0 \otimes \mathbb{R}) = H(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{SU}(1, r-1) \times \mathrm{SU}(r)^{N-1}$ où $N = d[F : \mathbb{Q}]$. Puisque c'est un groupe unitaire standard (et $r \geqslant 3$) il contient un groupe analogue de type $\mathrm{SU}(2, 1) \times \mathrm{SU}(3)^{N-1}$. Enfin, la construction précédente montre que le plongement $H \hookrightarrow G$, après « complexification » (extension des scalaires à E) provient d'un plongement $\mathrm{GL}(r, L)(\subset \mathrm{GL}(r, D)$ déduit du plongement de L dans D comme sous-corps maximal. On en déduit aisément que le sous-groupe $\mathrm{SU}(1, r-1) \subset \mathrm{SU}(n, 1)$ est donné par le plongement usuel. Il en est de même pour $\mathrm{SU}(2, 1)$, et les arguments du chapitre 9 s'appliquent.

Nous sommes maintenant réduits à considérer le cas où $r = 1$ ou 2 et d n'est pas une puissance de 2. L'existence d'une base orthogonale montre alors que G contient un sous-groupe de la forme

$$H = \mathrm{SU}(D, *) = \{x \in D : xx^* = 1\}.$$

L'argument déjà utilisé, relatif aux signatures, montre que l'on peut trouver H de type $(d-1,1)$ en une place de F. Soit ℓ un diviseur premier impair de d. On a alors démontré dans [**26**] le fait suivant (§ 1.3). Il existe une extension L_0 de F, totalement réelle, de degré d/ℓ, une algèbre à division A sur $L = L_0 \otimes E$ de degré ℓ, munie d'une involution de seconde espèce (relativement à L/L_0) toujours notée $*$, et telle que le groupe $\mathrm{SU}(A,*)$ – un groupe sur L_0 – se plonge dans $H = \mathrm{SU}(D,*)$. Comme précédemment, on vérifie aisément que

$$H_1(\mathbb{R}) = \mathrm{SU}(\ell-1,1) \times \mathrm{SU}(\ell)^{N-1}$$

où $N = (d/\ell)[F:\mathbb{Q}]$ se plonge dans $G(\mathbb{R})$ comme sous-groupe unitaire standard. (On a noté H_1 le $\mathbb{Q}$-groupe déduit de $\mathrm{SU}(A,*)$). D'après le chapitre 9, on est ramené au cas où $r=1$ et d est premier impair.

10.3. Contrôle du spectre pour les groupes exotiques de rang premier

Nous supposons maintenant que G provient d'une algèbre *à division*, de degré premier impair ℓ, sur E où E/F est quadratique et totalement imaginaire. Comme on l'a annoncé dans l'introduction à ce chapitre, on va obtenir dans ce cas des estimées particulièrement fortes. (Ce phénomène est bien connu ; pour un analogue cohomologique voir [**25**]). Comme on va le voir, on se trouve dans la situation optimiste du § 8.4 où le changement de base est connu. De plus les représentations de $\mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C})$ obtenus par changement de base sont plus sévèrement restreintes que dans le cas du § 8.4.

Supposons que $G(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}(n,1) \times \mathrm{SU}(n+1)^{d-1}$. Rappelons (Ch. 4, § 5) [(1)] que les représentations de $\mathrm{U}(n,1)$ sont tempérées ou de la forme $J(\tau,\chi)$ = quotient de

$$J(\tau,\chi) = \mathrm{ind}_{\mathrm{U}(n-1)\times\mathbb{C}^\times\times N}^{\mathrm{U}(n,1)} \tau \otimes \chi$$

où $\chi(z) = z^\alpha(\overline{z})^\beta$ $(z \in \mathbb{C}^\times)$. On veut borner les séries complémentaires, pour lesquelles $\alpha+\beta \in \mathbb{R}$.

Théorème 10.3.1. — *Si $J(\tau,\chi)$ apparaît dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ pour un sous-groupe de congruence, et si $\alpha+\beta\in\mathbb{R}$,*

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\ell^2+1}.$$

Pour démontrer ceci nous utilisons les méthodes de [**26**]. Comme dans cet article, nous désignons maintenant par G le groupe de *similitudes* unitaires défini par $(D,*)$:

$$G_1(F) = G(\mathbb{Q}) = \{d \in D : dd^* \in F^\times\},$$

où G_1 est un F-groupe.

(1) τ est noté σ au Ch. 4. Dans ce chapitre σ désigne la conjugaison complexe...

On a alors [**26**, § 2.1] $G_1(E) = \mathbb{G}_E(\mathbb{Q}) \cong D^\times \times E^\times$. Le groupe $G_1(E)$ est donc déduit de $D^\times \times E^\times$ par restriction des scalaires [(2)].

Soient $A_G = \mathbb{R}_+^\times \subset G = G(\mathbb{R})$ (inclusion centrale). On a de même $A_{G_E} = \mathbb{R}_+^\times \subset G_E(\mathbb{R})$.

Si $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ et $\varphi \in C_c^\infty(G_E(\mathbb{A}))$ on considère la trace de f dans la représentation r sur $L^2(A_G G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})) = \mathcal{A}_G$. De même on considère la trace de φ dans la représentation R sur $L^2(A_{G_E} G_E(\mathbb{Q})\backslash G_E(\mathbb{A})) = \mathcal{A}_{G_E}$.

Supposons f et φ *associées*, *i.e.*, leurs intégrales orbitales (locales) se correspondent en toutes les places, *cf.* [**26**, Déf. 2.7]. Soit I_σ l'opérateur d'entrelacement de R associé à la conjugaison galoisienne de $G_1(E)$ par rapport à $G_1(F)$. Alors [**26**, (2.17)] :

$$\mathrm{trace}(r(f)) = \mathrm{trace}(R(\varphi)I_\sigma).$$

Si π décrit les représentations de $G(\mathbb{A})$ – avec leurs multiplicités – dans $\mathcal{A}_{G_E}$, ceci s'écrit

$$\sum_\pi \mathrm{trace}\ \pi(f) = \sum_\Pi \mathrm{trace}(\Pi(\varphi)I_\sigma). \tag{10.3.1}$$

D'après un résultat de [**5**] et [**100**] (démontré par Harris et Taylor dans [**51**, Ch. VI]) il n'y a pas de multiplicités dans la somme de droite ; celle ci ne porte que sur les représentations Π telles que $\Pi \cong \Pi \circ \sigma$. Les deux sommes convergent absolument pour des fonctions lisses.

Afin de poursuivre nous devons avoir un meilleur contrôle sur les représentations Π de (10.3.1) ainsi que sur les fonctions associées f et φ (aux places archimédiennes).

Pour toute place v de F, $G_1(E\otimes F_v) \cong \mathbb{C}^\times \times \mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C})$. Noter qu'en une place réelle on a

$$G_1(F_v) \cong \mathrm{GU}(\ell-1,1)(\mathbb{R}) \cong \big(\mathbb{R}^\times \times \mathrm{U}(\ell-1,1)(\mathbb{R})\big) \,/\, \pm 1.$$

On peut essentiellement négliger la composante centrale dans les arguments locaux qui suivent (elle n'était introduite que pour simplifier la démonstration de (10.3.1), *cf.* [**26**]). Considérons alors $\mathrm{U}(\ell-1,1) \subset \mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C})$, ou $\mathrm{U}(\ell) \subset \mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C})$, aux places réelles, et remplaçons G_E par $D^\times$. (Notation provisoire : $G \subset G_\mathbb{C}$ désigne $\mathrm{U}(\ell-1,1) \subset \mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C})$. On néglige les arguments, plus faciles, portant sur les autres places réelles.)

Lemme 10.3.2. — *Soit v est une place réelle de F, w la place complexe de E associée. Si Π intervient dans (10.3.1) Π_w est générique ou est un caractère abélien.*

Il résulte en effet de [**51**, Thm. VI.1.1] que Π_w coïncide avec la composante locale d'une représentation Π' apparaissant dans le spectre discret de $\mathrm{GL}(\ell,\mathbb{A}_E)$. Puisque ℓ est premier, il y a d'après Mœglin-Waldspurger deux possibilités [**78**] : Π' appartient aux formes cuspidales, et donc $\Pi'_w = \Pi_w$ est générique. Ou bien Π' est un caractère abélien de $\mathrm{GL}(\ell,\mathbb{A}_E)$. Rappelons qu'une représentation (unitaire) générique de

(2) Le lecteur ne perdra rien à supposer que $F = \mathbb{Q}$.

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ n'est autre qu'une représentations unitairement induite (*i.e.*, égale à l'induite *totale*) à partir de caractères (non nécessairement unitaires) du sous-groupe de Borel : c'est une série principale *irréductible.*

Considérons une représentation π apparaissant dans (10.3.1). D'après le classification de Langlands (Ch. 4) il y a deux cas possibles, Dans le premier cas, π est de la forme $J(\tau,\chi)$ (ou π est une composante d'une représentation $I(\tau,\chi)$ avec χ *unitaire* si celle-ci est réductible). La représentation $I(\tau,\chi)$ est elle-même déduite d'un paramètre de Langlands

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{\times} &\longrightarrow \mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto ((z/\overline{z})^{p_1},\dots (z/\overline{z})^{p_{\ell-2}},\ z^{\alpha}\overline{z}^{\beta},\ z^{-\beta}(\overline{z})^{-\alpha}) \end{aligned}$$

avec $p_i\in\mathbb{Z}$, p_i distincts.

Cette donnée définit à son tour une représentation de la série principale pour $\mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C})$ (Ch. 3). En général (si $\alpha+\beta\notin i\mathbb{R}$) cette représentation n'est pas irréductible.

Notons $I_{\mathbb{C}}(\tau,\chi)$ la représentations de $\mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C})$ ainsi définie (série principale, peut-être réductible). Si σ est la conjugaison complexe de $\mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C})$ par rapport à $\mathrm{U}(\ell-1,1)$, on vérifie que $I_{\mathbb{C}}$ est σ-invariante : $I_{\mathbb{C}}\cong I_{\mathbb{C}}\circ\sigma$ [(3)]. Mieux, d'après [**23**] il existe un opérateur d'entrelacement $A_\sigma : I_{\mathbb{C}}\to I_{\mathbb{C}}$ entrelaçant $I_{\mathbb{C}}$ et $I_{\mathbb{C}}\circ\sigma$, et uniquement défini au signe près si $A_\sigma^2=1$ (on le définit d'abord pour χ unitaire, puis par prolongement analytique pour tout χ.)

Dans le second cas π est une représentation de la série discrète de G, associée (§ 4.3) à

$$z\longmapsto((z/\overline{z})^{p_1},\dots,(z/\overline{z})^{p_\ell}) \tag{10.3.2}$$

où $p_i\in\mathbb{Z}$, p_i distincts. Alors (10.3.2) définit de même un paramètre de Langlands pour $\mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C})$, donc une représentation $\pi_{\mathbb{C}}$ qui appartient à la série principale *unitaire.* Elle est σ-invariante, d'où A_σ comme ci-dessous.

Rappelons (§ 4.4) que l'on associe au paramètre (10.3.2) ℓ représentations de G de la série discrète, qui forment un *L-paquet.* On le notera Π ; $\pi_{\mathbb{C}}$ est donc déduite du L-paquet. On pose

$$\operatorname{trace}\Pi(f)=\sum_{\pi'\in\Pi}\operatorname{trace}\pi'(f).$$

Théorème 10.3.3. — *Soit $f\in C_c^\infty(G)$ une fonction K-finie. Il existe alors une fonction K finie $\varphi\in C_c^\infty(G_{\mathbb{C}})$ telle que :*

(i) *Si π est une représentation de la série principale de G, ou si $\pi=\Pi$ est un L-paquet de représentations de la série discrète, et $\pi_{\mathbb{C}}$ est la représentation σ-stable de $G_{\mathbb{C}}$ associée,*

$$\operatorname{trace}\pi(f)=\operatorname{trace}(\pi_{\mathbb{C}}(\varphi)A_\sigma). \tag{10.3.3}$$

(3) Dans un groupe de Grothendieck convenable si $I_{\mathbb{C}}$ est réductible...

(ii) *Si $\pi_{\mathbb{C}}$ est une représentation de la série principale de $G_{\mathbb{C}}$ qui ne provient pas de G (i.e. de π discrète ou de $I(\tau,\chi)$),*

$$\operatorname{trace}(\pi_{\mathbb{C}}(\varphi)A_\sigma) = 0$$

si $\pi_{\mathbb{C}}$ est σ-stable.

De plus, f et φ sont associées au sens de [**26**].

Ceci résulte du travail de Delorme [**31**] et de l'argument de [**5**, Ch. 1, § 7].

Noter que dans les identités précédentes, A_σ doit être choisi convenablement ; par ailleurs les identités sont vraies pour les séries principales (unitaires) complètes – sans les réduire – et alors par prolongement analytique pour toutes les séries principales (généralisées) complètes quels que soient leurs paramètres.

Corollaire 10.3.4. — *Si $\pi_{\mathbb{C}}$ est une série principale σ-stable pour $G_{\mathbb{C}}$,* $\operatorname{trace}(\pi_{\mathbb{C}}(\varphi)A_\sigma)$ *est nul ou de la forme* $\sum_i \operatorname{trace}(\pi_i(f))$*, les π_i étant des représentations (peut-être non unitaires) de G en nombre fini.*

Ceci résulte du Théorème, (i).

On aura besoin d'étendre ces identités au cas des caractères abéliens de $G_{\mathbb{C}}$, supposés σ-stables. Soit ε un tel caractère ; on l'écrit par abus de langage $\varepsilon(g) = \varepsilon(\det g)$ où ε est un caractère de $\mathbb{C}^\times$. Il est σ-stable si $\varepsilon = z^p\overline{z}^q$ avec $p = -q \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Si $p \in \mathbb{Z}$, ε « provient de G » (ou de ε_0), *i.e.* est associé naturellement au caractère $\varepsilon_0 : g \mapsto \det(g)^p$ de G. Sinon, on dira que ε ne provient pas de G.

Lemme 10.3.5. — *Soit f, φ comme dans le Théorème 10.3.3. Alors*

(i) *Si ε provient de ε_0,*

$$\langle \operatorname{trace} \varepsilon_0, f\rangle = \eta\langle \operatorname{trace} \varepsilon, \varphi\rangle, \eta = \pm 1.$$

(ii) *Si ε ne provient de G,*

$$\langle \operatorname{trace} \varepsilon, \varphi\rangle = 0.$$

Nous esquissons seulement l'argument. Pour (ii) noter que si π et $\pi_{\mathbb{C}}$ sont associées il résulte aisément de (10.3.3) que $\theta_\pi \circ N = \theta_{\pi_{\mathbb{C}}}$, θ_π et $\theta_{\pi_{\mathbb{C}}}$ (sur $\mathrm{U}(1)$ et $\mathbb{C}^\times$) étant les caractères centraux et $N : Z(G_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^\times \to Z(G) = \mathrm{U}(1)$ étant donnée par $z \mapsto z/\overline{z}$.

En particulier si $\pi_{\mathbb{C}}$ est une série principale généralisée provenant de G, $\theta_{\pi_{\mathbb{C}}}(z)$ est de la forme $(z/\overline{z})^p$ pour *p entier.*

Si ε ne provient pas de G, son caractère central, égal à ε^ℓ, n'a pas cette propriété puisque ℓ est *impair.* Or d'après un théorème bien connu, ε peut s'écrire comme somme alternée

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^r n_i \operatorname{ind}_{B_{\mathbb{C}}}^{\mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C})} \chi_i = \sum_{i=1}^r n_i I_i$$

où les χ_i sont des caractères du groupe de Borel, que l'on peut supposer en situation *positive* au sens de Langlands (Ch. 3), et les n_i sont des entiers relatifs. Une telle décomposition est alors unique. Les induites et ε ont le même caractère central.

On peut choisir la conjugaison complexe σ, modulo conjugaison dans $G(\mathbb{C})$, telle qu'elle laisse $B_{\mathbb{C}}$ invariant (Ch. 4). Noter que ε est σ-stable et que (en prenant $A_\sigma = 1$ dans l'espace de ε) $\langle \text{trace } \varepsilon, \varphi\rangle = \langle \text{trace } \varepsilon, \varphi \times A_\sigma\rangle$. Il résulte de l'unicité de la décomposition que σ fixe les I_i ou les échange deux à deux sans point fixe. Alors

$$\langle \text{trace } \varepsilon, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{r'} n_i \eta_i \langle \text{trace } I_i, \varphi \times A_\sigma^i\rangle$$

où les η_i sont des signes, et la somme ne porte que sur les I_i qui sont σ-stables. Si le caractère central ne provient pas de G, la somme de droite est nulle, q.e.d. La partie (i) est démontrée dans [**23**, Ch. 3].

Revenons alors à l'égalité (10.3.1) ; v désigne toujours la place archimédienne distinguée de F. Notons simplement $\mathfrak{g}_v$ l'algèbre de lie du groupe réel $G_1(F_v)$ et soit $\mathfrak{Z}$ le centre de son algèbre enveloppante (complexe). Soit $\mathfrak{Z}_{\mathbb{C}}$ l'objet analogue pour $G_1(E \otimes F_v)$. Donc $\mathfrak{Z}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{Z} \otimes \mathfrak{Z}$ et il y a une application norme naturelle $N : \mathfrak{Z}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{Z} \otimes \mathfrak{Z}$ [**26**, § 4.2]. Si ω est un caractère infinitésimal, $\omega : \mathfrak{Z} \to \mathbb{C}$ pour $G_1(F_v)$ on en déduit un caractère $\Omega = \omega \circ N$ pour $\mathfrak{Z}_{\mathbb{C}}$. On dira que ω et Ω sont associés.

D'après un résultat fondamental d'Arthur (*cf.* [**26**, p. 320]) on peut séparer dans (10.3.1) les contributions des caractères infinitésimaux : l'égalité reste vraie, ω étant fixé, quand π décrit les représentations telles que $\omega(\pi_v) = \omega$ et Π celles vérifiant $\omega(\Pi_v) = \Omega$. Si les fonctions f^v et φ^v sont fixées en les places différentes de v (K-finies aux places archimédiennes), les sommes portent alors sur un nombre *fini* de représentations.

Choisissons alors une représentation π_v de $G_1(F_v)$ apparaissant dans (10.1) et séparons l'identité selon les représentations de $G_1(F_v)$ et $G_1(E \otimes F_v)$:

$$\text{(10.3.4)} \quad \text{trace } \pi_v(f_v) \sum_{\pi} \text{trace } \pi^v(f^v) + \sum_{\rho_v \not\cong \pi_v} \text{trace } \rho_v(h) \sum_{\rho} \text{trace } \rho^v(f^v) = \sum_{\Pi_w} \text{trace}(\Pi_w(\varphi_w) A_\sigma) \sum_{\pi} \text{trace}(\Pi^w(\varphi^w) I_\sigma^w).$$

Dans le membre de gauche, $\sum_\pi$ porte sur les représentations telles que π_v soit la représentation fixée ;ρ_v parcourt toutes les autres représentations de $G_1(F_v)$; pour chacune, $\sum_\rho$ est défini de même. A droite, Π_w décrit les représentations de $G_1(E \otimes F_v)$, et l'on a décomposé I_σ (dans l'espace de Π) en un produit tensoriel A_σ et I_σ^w.

Fixons π^o telle que $(\pi^o)_v = \pi_v$. Alors π^o a des vecteurs fixes par un sous-groupe compact $K_f \subset G_1(\mathbb{A}_{F,f}) = G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$; pour K_f assez petit, la fonction caractéristique f_f de K_f admet une fonction φ_f associée (*cf.* [**26**, § 2.5]). (On peut choisir les fonctions $f_{v'}$ aux places archimédiennes $\neq v$ égales à des caractères des représentations $\pi_{v'}^o$). Alors $f^v = \bigotimes_{u \neq v} f_u$ admet une fonction associée φ^v, et la partie de (10.3.4) relative à π_v est de la forme c trace $\pi_v(f_v)$ où c est une constante > 0.

D'après le Lemme 10.3.2, le Corollaire 10.3.4 et le Lemme 10.3.5, le membre de droite s'écrit

$$\sum_{\sigma_v} c(\sigma_v)\mathrm{trace}\ \sigma_v(f_v) \tag{10.3.5}$$

où σ_v parcourt un ensemble fini de représentations irréductibles de $G_1(F_v)$. L'égalité :

$$c\ \mathrm{trace}\ \pi_v(f_v) + \sum_{\rho_v \not\cong \pi_v} c(\rho_v)\mathrm{trace}\ \pi^v(f^v) = \sum_{\sigma_v} c(\sigma_v)\ \mathrm{trace}\ \sigma_v(f_v), \tag{10.3.6}$$

qui porte sur un ensemble fini de représentations, montre alors qu'il existe σ_v égale à π_v.

Dans le membre de droite, σ_v était associée à une représentation Π_w par le Corollaire 10.3.4 ou le Lemme 10.3.5. Dans le second cas $\sigma_v = \varepsilon_0$ est un caractère abélien. Dans le premier, σ_v est l'une des composantes d'une série principale, ou appartient à la série discrète (Thm. 10.3.3).

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 10.3.1. Supposons que $\pi_v = J(\tau,\chi)$ comme représentation de $\mathrm{U}(\ell-1,1)$. Donc π_v est associée par le Cor. 10.3.4 à une représentation *générique* Π_w qui apparaît dans les formes automorphes sur $D^\times(\mathbb{A}_E)$; d'après le théorème d'Harris et Taylor déjà cité, Π_w est la composante locale d'une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}(\ell,\mathbb{A}_E)$. Puisque la trace tordue de Π_w évaluée sur une fonction φ_w provenant de G_v est non-nulle, $\Pi_w = \pi_{\mathbb{C}}$ doit être l'une des représentations décrites dans le Théorème 10.3.3.

Le cas des représentations $\pi_{\mathbb{C}}$ « provenant des séries discrètes » est exclu car l'identité de caractères impliquerait que π_v serait une série discrète. Donc Π_w provient d'une représentation $I(\sigma,\chi)$. Ecrivons

$$\Pi_w = \mathrm{ind}_{B_{\mathbb{C}}}^{\mathrm{GL}(\ell,\mathbb{C})}((z/\overline{z})^{p_1},\dots(z/\overline{z})^{p_{n-1}}, z^\alpha\overline{z}^\beta, z^{-\beta}(\overline{z})^{-\alpha}).$$

(Les données p, α, β ne sont pas nécessairement, pour l'instant, celles de π_v). Le Théorème 7.0.1 implique alors :

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\ell^2+1} < \frac{1}{2}.$$

De plus Π_w est irréductible, et

$$\mathrm{trace}\ \Pi_w(\varphi_w A_\sigma) = \sum_i \mathrm{trace}\ \pi_i(f_v)$$

où la somme porte sur les composantes éventuelles de la représentation $I(\tau',\chi')$ associée à Π_w.

Il en résulte que $J(\tau,\chi)$ est l'une de ces composantes. Mais la condition $|\alpha+\beta| < \frac{1}{2}$ implique que $I(\tau',\chi')$ est irréductible, sauf peut-être si $\alpha+\beta=0$. (Voir les résultats de Knapp cités dans le § 6.2. Pour $\alpha+\beta=0$, on peut avoir réductibilité des séries principales unitaires, *cf.* § 4.4).

Si $\alpha+\beta \neq 0$, on voit donc que $I(\tau',\chi')$ est irréductible et égale à $J(\tau,\chi)$, d'où le Théorème.

Remarque. — On a donc démontré que toute représentation non-tempérée et non-abélienne de $G(\mathbb{R})$ qui apparaît dans les formes automorphes est une série principale. En particulier les modules de Vogan-Zuckerman de degré primitif $\neq 0$, $d = \ell - 1$ n'apparaissent pas. Si Γ est un sous-groupe de congruences de G, on voit donc :

Théorème 10.3.6. — *Si $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de congruences et $X = \Gamma \backslash \mathrm{SU}(\ell-1,1)/K_\infty$, X n'a pas de cohomologie primitive en degrés $0 < i < \ell - 1$.*

Ce résultat était démontré de façon assez différente dans [**25**].

10.4. Démonstration du Théorème 3

Si G n'est pas un vrai groupe unitaire, on suppose $n+1 \neq 2^e$. On utilise les réductions du § 2 ; en particulier on peut supposer que G contient un sous-groupe H de rang premier impair ℓ du type considéré dans le § 3. (On a $n+1 = d$ ou $2d$, et ℓ est un diviseur premier de d). On utilise le Théorème 9.5.1 avec $n' = \ell - 1$.

Considérons d'abord le cas des fonctions. Pour le « petit groupe » H, la minoration $H_\varepsilon^{(0,0)}$ est ici, avec les notations du § 3, *cf.* aussi Prop. 4.5.1 :

$$\lambda = n'^2 - (\alpha+\beta)^2 \geqslant (\ell-1)^2 - 1, \text{ soit } \varepsilon = 1$$

puisque $|\alpha+\beta| < 1$ (Thm. 10.3.1).

(La *seule* autre valeur propre possible est nulle). D'après 9.5.1 on a donc pour G l'hypothèse $H^{(0,0)}_{n-n'+1}$. Ceci correspond dans la définition de $H_\varepsilon^{(0,0)}$ aux valeurs propres entières ou à

$$\lambda \geqslant n^2 - (n-n'+1)^2 = 2n(\ell-2) - (\ell-2)^2.$$

Si $\ell = 3$ c'est l'inégalité cherchée $\lambda \geqslant 2n - 1$.

En général on a, en posant $r = \ell - 2$,

$$2nr - r^2 \geqslant 2n - 1$$

si $n \geqslant \frac{r+1}{2}$. Or $n + 1 \geqslant \ell = r + 2$, donc $n \geqslant r + 1$.

Considérons le cas des 1-formes. D'après la Prop. 4.5.1 et le Théorème 10.3.1, les valeurs propres du laplacien sur H vérifiant l'estimée tempérée $H_0^{(p,q)}$ ou l'une des inégalités

$$\lambda = (l-2)^2 - (\alpha+\beta)^2 \geqslant (l-2)^2 - 1$$
$$\lambda = (l-1)^2 - (\alpha+\beta)^2 \geqslant (l-1)^2 - 1.$$

La première minoration est donc toujours vérifiée ; puisque $n' = l - 1$, H vérifie $H_1^{(1,0) \text{ ou } (0,1)}$ ($\varepsilon = 1$). Le Théorème 9.5.1 donne alors pour G l'« hypothèse » $H_{n-n'+1}^{(1,0) \text{ ou } (0,1)}$ soit, pour les valeurs propres exceptionnelles (les autres ont déjà été minorées dans le § 10.2),

$$\lambda \geqslant (n-1)^2 - (n-n'+1)^2 = (n-1)^2 - (n-r)^2$$

soit

$$\lambda \geqslant 2(r-1)n - r^2 + 1 \tag{10.4.1}$$

avec $r = \ell - 2$.

On veut montrer que $\lambda \geqslant \frac{2}{5}n - \frac{11}{25}$. Ceci ne résulte pas de (10.4.1) si $\ell = 3$, mais dans ce cas on peut appliquer l'argument du § 10.1 (H est un groupe $\mathrm{U}(2,1)$...). Si $\ell \geqslant 5$, l'inégalité cherchée résulte de (10.4.1) si

$$2(r - \frac{6}{5})n \geqslant r^2 - \frac{36}{25} = (r - \frac{6}{5})(r + \frac{6}{5}).$$

Or $n + 1 \geqslant r + 2$, donc $2n \geqslant r + 2 > r + \frac{6}{5}$.

PARTIE II

HOMOLOGIE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

CHAPITRE 11

L'ESPACE HYPERBOLIQUE COMPLEXE

Ce court chapitre est une brève introduction à l'espace hyperbolique complexe, on peut l'omettre il n'est pas essentiel pour la suite. Il peut néanmoins être utile à la compréhension des géométries plus compliquées que nous étudions dans les chapitres suivants. (Pour plus de détails sur l'espace hyperbolique complexe, se reporter au livre de Goldman [**46**] ou à l'article [**40**].)

11.1. Modèle de l'hyperboloïde et modèle projectif

Soit $\mathbb{C}^{n,1}$ l'espace vectoriel complexe de dimension $n+1$ (sur $\mathbb{C}$) constitué des $(n+1)$-uplets $Z = (Z_1, \ldots, Z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et équipé de la forme hermitienne :

$$\langle Z, W \rangle = Z_1 \overline{W}_1 + \cdots + Z_n \overline{W}_n - Z_{n+1} \overline{W}_{n+1}.$$

Soit $\mathrm{U}(n,1)$ le groupe des automorphismes (unitaires) de $\mathbb{C}^{n,1}$. L'équation $\langle Z, Z \rangle = -1$ définit une hypersurface réelle H dans $\mathbb{C}^{n,1}$. Le groupe $\mathrm{U}(n,1)$ agit transitivement sur H. D'un autre coté, le groupe $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta}\}$ agit librement sur H par $Z \mapsto e^{i\theta} Z$; on appelle *espace hyperbolique complexe de dimension* n la base $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ du fibré principal H avec pour groupe $\mathbb{S}^1$. Notons π l'application canonique de H dans $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Dans la suite on désignera par P_0 le point de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ au-dessous de $(0, \ldots, 0, 1) \in H$ *i.e.*

$$P_0 = \pi(0, \ldots, 0, 1).$$

L'action de $G := \mathrm{SU}(n,1) = \{A \in \mathrm{U}(n,1) \mid \det A = 1\}$ sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est transitive; le groupe d'isotropie du point P_0 est $K := S(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1))$. On a alors l'identification suivante :

$$\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} = G/K.$$

Un vecteur $Z \in \mathbb{C}^{n,1}$ est dit *négatif* (resp. *nul*, *positif*) si le produit hermitien $\langle Z, Z \rangle$ est négatif (resp. nul, positif). L'espace hyperbolique complexe $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ s'identifie au sous-espace de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n,1})$ constitué des droites négatives dans $\mathbb{C}^{n,1}$. L'image $\mathrm{PU}(n,1)$ de $\mathrm{U}(n,1)$ dans $\mathrm{PGL}(\mathbb{C}^{n,1})$ est le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

11.2. Modèle de la boule

Soit $\mathbb{C}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel complexe de dimension n munit du produit hermitien standard

$$\langle\langle z, w\rangle\rangle = {}^t\overline{w}z = z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_n\overline{w}_n$$

et soit $\mathrm{U}(n)$ son groupe (compact) d'automorphismes unitaires. On peut identifier $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ avec la boule unité

$$\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \langle\langle z, z\rangle\rangle = {}^t\overline{z}z < 1\}$$

par le plongement biholomophe suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n,1}) \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Plongement qui envoie l'origine de $\mathbb{C}^n$ sur le point P_0. Dans la suite nous travaillerons dans chacun de ces modèles ; les z minuscules indiqueront que l'on se place dans le modèle de la boule et les Z majuscules que l'on se place dans le modèle projectif.

Soit $g \in G$, nous notons

$$g = \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, $b, {}^tc \in \mathbb{C}^n$ et $d \in \mathbb{C}$. L'action de g sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est donnée par :

$$gz = (Az + b)(cz + d)^{-1},$$

pour tout $z \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

11.3. Structure kaehlérienne

Dans cette section, nous équipons l'espace $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ d'une structure kaehlérienne. Rappelons qu'une structure kaehlérienne sur une variété est équivalente à une structure complexe J et une structure symplectique ω compatible dans le sens que ω est une $(1,1)$-forme positive par rapport à J.

La structure complexe sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est induite, de manière équivalente, par celle de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n,1})$ ou par celle de $\mathbb{C}^n$.

Soit Z un élément non nul de $\mathbb{C}^{n,1}$. L'espace tangent à $\pi(Z) \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ peut être identifié à

$$Z^\perp = \{W \mid \langle Z, W\rangle = 0\}.$$

Cet espace est identifié avec l'espace $(\lambda Z)^\perp$ par multiplication par $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Plus généralement, il est souvent commode d'autoriser un vecteur quelconque $W \in \mathbb{C}^{n,1}$ à représenter un vecteur tangent à Z, en le projetant sur $Z^{\perp}$. En tenant compte du fait que Z n'est déterminé qu'à un multiple scalaire près, on définit

$$\begin{aligned} g_Z(W,W) &= \frac{\langle W - \frac{\langle W,Z\rangle Z}{\langle Z,Z\rangle}, W - \frac{\langle W,Z\rangle Z}{\langle Z,Z\rangle}\rangle}{-\langle Z,Z\rangle} \\ &= \frac{\langle Z,Z\rangle\langle W,W\rangle - \langle Z,W\rangle\langle W,Z\rangle}{-\langle Z,Z\rangle^2}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une métrique g sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ qui est hermitienne par rapport à J. Dans le modèle de la boule, en appliquant les formules ci-dessus à $Z = ({}^t z, 1)$ et $W = (d^t z, 0)$, on trouve que la métrique sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \operatorname{tr}[(I - z^t\overline{z})^{-1} dz (1 - {}^t\overline{z}z)^{-1} d^t\overline{z}] \\ &= \frac{(1 - \sum_i z_i\overline{z}_i)(\sum_i dz_i d\overline{z}_i) + (\sum_i \overline{z}_i dz_i)(\sum_i z_i d\overline{z}_i)}{(1 - \sum_i z_i\overline{z}_i)^2}. \end{aligned}$$

On peut maintenant montrer que $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est une variété kaehlérienne. Ce qui revient à montrer que si l'on définit une 2-forme ω sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ par la formule

$$\omega(X,Y) = g(X, JY),$$

on obtient une 2-forme fermée. On rappelle que J désigne la structure complexe, elle peut se voir comme l'application de l'espace tangent en un point donné dans lui-même par multiplication par $\sqrt{-1}$. Pour montrer que ω est fermée on introduit

(11.3.1) $$D_n = 1 - {}^t\overline{z}z$$

(11.3.2) $$\Phi_n = \partial\overline{\partial}\log D_n.$$

Un calcul simple montre que

$$\omega = \sqrt{-1}\,\Phi_n.$$

En particulier la forme ω est fermée et $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est une variété kählérienne.

11.4. Courbure

Muni de sa métrique kählérienne, l'espace $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est un espace symétrique. Soient $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{k}_0$ les algèbres de Lie de G et K. Soit $\mathfrak{p}_0$ le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{k}_0$ dans $\mathfrak{g}_0$ par rapport à la forme de Killing. Étant donné $z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, nous notons

$$\xi(z) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ {}^t\overline{z} & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathfrak{p}_0 = \{\xi(z) \mid z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\}$. Nous identifions $\mathfrak{p}_0$ avec l'espace tangent $T_0(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}})$ à $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ en 0.

Pour $z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, soit τ_t la courbe $\tau_t = (\exp t\xi(z))0$. L'image de $\xi(z)$ dans $T_0(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}})$ est le vecteur tangent $\dot{\tau}_0$ à τ_t en $t = 0$. Sous cette identification, la métrique riemannienne est décrite par :

$$g_0(\xi(z), \xi(w)) = \operatorname{Re}({}^t\overline{w}z).$$

De plus d'après [**67**, Théorème 3.2 chapitre XI], pour $X, Y, U \in \mathfrak{p}$ on a :

$$R(X,Y)U = -[[X,Y],U], \tag{11.4.1}$$

où $R(.,.)$ est le tenseur de courbure de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

Enfin, concluons cette section en remarquant que si $X, Y \in \mathbb{C}^{n,1}$ sont deux éléments non nuls, la distance d entre les points qu'ils représentent dans $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ est donnée par :

$$(\cosh d)^2 = \frac{\langle X,Y\rangle\langle Y,X\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle}.$$

En particulier dans le modèle de la boule la distance d d'un point $z \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ à 0 est donnée par :

$$(\cosh d)^2 = \frac{1}{D_n} = \frac{1}{1 - {}^t\overline{z}z}. \tag{11.4.2}$$

11.5. Volume des boules

Déterminons enfin comment varie le volume d'une boule géodésique de rayon ρ en fonction de ρ. Au point ${}^t(0,\ldots,0,r) \in \mathbb{B}^n$ la forme de Kaehler

$$\omega = \sqrt{-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{1-r^2} dz_j \wedge d\overline{z}_j + \frac{1}{(1-r^2)^2} dz_n \wedge d\overline{z}_n\right).$$

La forme volume vaut donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\omega^n &= (\sqrt{-1}\,)^n \frac{1}{(1-r^2)^{n+1}} dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n \\
&= \frac{2^n}{(1-r^2)^{n+1}} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n \\
&= \frac{2^n}{(1-r^2)^{n+1}} dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n \\
&= \frac{2^n r^{2n-1}}{(1-r^2)^{n+1}} dr d\sigma
\end{aligned}$$

où $d\sigma$ désigne la forme volume sur la sphère unité $r = 1$.

Puisque la distance euclidienne r est reliée à la distance hyperbolique ρ par

$$r = \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right),$$

le volume d'une boule de rayon ρ est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(B(\rho)) &= \int_{\tanh^{-1}(r)\leqslant\rho} \frac{2^n r^{2n-1}}{(1-r^2)^{n+1}} dr d\sigma \\
&= 2^n \sigma_{2n-1} \int_0^\rho (\sinh R)^{2n-1}(\cosh R) dR \\
&= \frac{2^n\sigma_{2n-1}}{2n}(\sinh\rho)^{2n} \sim \frac{2^n\sigma_{2n-1}}{2n} e^{2n\rho}
\end{aligned}$$

(où $\sigma_{2n-1} = 2\pi^n/n!$ est le volume euclidien de la sphère unité $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$).

Dans le chapitre suivant nous nous intéressons plus généralement aux espaces symétriques associés au groupe $\mathrm{SU}(p, q)$ et à leurs sous-espaces totalement géodésiques. Notons que le cas de l'espace hyperbolique complexe est particulièrement important pour nous, et peut servir de guide pour la compréhension de ce qui suit.

CHAPITRE 12

ESPACES SYMÉTRIQUES ASSOCIÉS AUX GROUPES UNITAIRES

12.1. Préliminaires

Soient $p \geqslant q$ deux entiers strictement positifs. Dans ce chapitre nous notons $G = \mathrm{SU}(p,q)$, $K = G \cap \mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q) = S(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$ et $\mathcal{D}_{p,q} = G/K$, l'espace symétrique associé. Remarquons que $\mathcal{D}_{n,1}$ s'identifie à l'espace hyperbolique complexe. Nous réalisons plus généralement $\mathcal{D}_{p,q}$ comme un domaine complexe borné

$$\mathcal{D}_{p,q} = \{Z \in M_{p,q}(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{Z}Z < I_q\}.$$

Nous noterons généralement $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{p,q}$, à moins que le contexte ne soit pas clair. Étant donné $g \in G$, on écrit

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A \in M_{p,p}(\mathbb{C})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$, $C \in M_{q,p}(\mathbb{C})$ et $D \in M_{q,q}(\mathbb{C})$. L'action de g sur $\mathcal{D}$ est donnée par

$$gZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad Z \in \mathcal{D},\ g \in G.$$

Le groupe G agit transitivement sur $\mathcal{D}$ et le groupe d'isotropie de 0 est K. Sur $\mathcal{D}$, on a une métrique kaehlérienne définie par

$$\mathrm{tr}((I_p - Z{}^t\overline{Z})^{-1} dZ (I_q - {}^t\overline{Z}Z)^{-1} d{}^t\overline{Z}).$$

L'espace $\mathcal{D}$ équipé de la métrique riemannienne correspondante est un espace symétrique hermitien.

Soit $\mathfrak{g}_0$ (resp. $\mathfrak{k}_0$) l'algèbre de Lie de G (resp. K). Soit $\mathfrak{p}_0$ le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{k}_0$ dans $\mathfrak{g}_0$ par rapport à la forme de Killing. Les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{k}_0$ ainsi que la forme de Killing ont été décrites au chapitre 4 dans le cas $q = 1$. Rappelons que si, pour $Z \in M_{p,q}(\mathbb{C})$, nous notons

$$\xi(Z) = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ {}^t\overline{Z} & 0 \end{pmatrix},$$

alors $\mathfrak{p}_0 = \{\xi(Z) \mid Z \in M_{p,q}(\mathbb{C})\}$. La forme de Killing induit sur $\mathfrak{p}_0$ le produit scalaire $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(Z^t\overline{W}))$, où Re désigne la partie réelle d'un nombre complexe.

Nous identifions $\mathfrak{p}_0$ avec l'espace tangent $T_0(\mathcal{D})$ à $\mathcal{D}$ en 0. Pour $Z \in M_{p,q}(\mathbb{C})$, soit τ_t la courbe $\tau_t = (\exp t\xi(Z))0$. L'image de $\xi(Z)$ dans $T_0(\mathcal{D})$ est le vecteur tangent $\dot{\tau}_0$ à la courbe τ_t en $t = 0$. Sous cette identification, la métrique riemannienne g de $\mathcal{D}$ est induite par la forme de Killing :

$$g_0(\xi(Z), \xi(W)) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(Z^t\overline{W})).$$

12.2. Sous-espaces totalement géodésiques

Si $v \in \mathbb{C}^n$, où $n = p + q$, nous décomposons v en

$$v = \begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix}, \ v_+ \in \mathbb{C}^p, \ v_- \in \mathbb{C}^q.$$

Soit $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$ et $Z \in \mathcal{D}$, on introduit les facteurs d'automorphie :

$$\begin{aligned} J(g,Z) &= \begin{pmatrix} l(g,Z) & 0 \\ 0 & j(g,Z) \end{pmatrix}, \\ j(g,Z) &= CZ + D, \\ l(g,Z) &= A - (gZ)C. \end{aligned} \tag{12.2.1}$$

L'action de g sur $\mathcal{D}$ peut alors prendre la forme suivante :

$$g\begin{pmatrix} Z \\ I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gZ \\ I_q \end{pmatrix} j(g,Z), \ Z \in \mathcal{D}.$$

Dans la suite, $n = p+q$ et Q est la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ de matrice (elle aussi notée Q) : $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$.

Soit V un sous-espace complexe de $\mathbb{C}^n$ positif par rapport à Q. On associe à un tel espace un sous-groupe G_V de G et une sous-variété $\mathcal{D}_V$ de $\mathcal{D}$ définis par :

$$G_V = \{g \in G \mid g \text{ laisse invariant le sous-espace } V\},$$

$$\mathcal{D}_V = \{Z \in \mathcal{D} \mid {}^t\overline{Z}v_+ = v_- \text{ pour tout } v \in V\}.$$

Lemme 12.2.1. — *La sous-variété $\mathcal{D}_V$ et le sous-groupe G_V ont les propriétés suivantes.*

(1) *Pour tout $g \in G$, $g\mathcal{D}_V = \mathcal{D}_{gV}$.*

(2) *Le groupe G_V agit transitivement sur $\mathcal{D}_V$.*

(3) *La sous-variété $\mathcal{D}_V$ est un sous-espace symétrique totalement géodésique de dimension complexe $(p-r)q$, où $r = \dim_{\mathbb{C}} V$. En tant qu'espace symétrique $\mathcal{D}_V$ est isomorphe à $\mathcal{D}_{p-r,q}$.*

Démonstration. — Il découle facilement des définitions que

$$\mathcal{D}_V = \left\{ Z \in \mathcal{D} \mid {}^t\overline{v}Q \begin{pmatrix} Z \\ I_q \end{pmatrix} = 0, \text{ pour tout } v \in V \right\}.$$

Alors si $g \in G$, $Z \in \mathcal{D}_V$ et $v \in V$, on vérifie facilement que

$$0 = {}^t\overline{v}Q \begin{pmatrix} Z \\ I_q \end{pmatrix} = {}^t\overline{v}{}^t\overline{g}Qg \begin{pmatrix} Z \\ I_q \end{pmatrix} = {}^t\overline{gv}Q \begin{pmatrix} gZ \\ I_q \end{pmatrix} j(g, Z).$$

Donc ${}^t\overline{v}{}^t\overline{g}Qg \begin{pmatrix} Z \\ I_q \end{pmatrix} = {}^t\overline{gv}Q \begin{pmatrix} gZ \\ I_q \end{pmatrix} = 0$ et le premier point est démontré.

Puis, il découle du Théorème de Witt et du premier point que l'on peut supposer $V = \mathbb{C}^r$. Dans ce cas,

$$\mathcal{D}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ W \end{pmatrix} \mid W \in M_{p-r,q}(\mathbb{C}),\ {}^t\overline{W}W < I_q \right\}$$

et

$$G_V = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \in G \mid h \in \mathrm{U}(p-r, q),\ u \in \mathrm{U}(r) \right\}.$$

Et les points 2. et 3. du Lemme 12.2.1 s'en déduisent facilement.

Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base standard de $\mathbb{C}^n$. Fixons un entier $1 \leqslant r < p$ et soit V le sous-espace engendré par $e_{p-r+1}, \ldots, e_p$. Nous étudions maintenant la fonction distance $d(Z, \mathcal{D}_V)$ d'un élément $Z \in \mathcal{D}$ à $\mathcal{D}_V$. Étant donné $Z \in \mathcal{D}$, nous décomposons Z en

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

où $Z_1 \in M_{p-r,q}(\mathbb{C})$ et $Z_2 \in M_{r,q}(\mathbb{C})$. Le sous-espace $\mathcal{D}_V$ est alors donné par

$$\mathcal{D}_V = \{Z \in \mathcal{D} \mid Z_2 = 0\}.$$

Un élément $g \in G_V$ s'écrit comme matrice par blocs

$$g = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & u & 0 \\ C_1 & 0 & D_1 \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathcal{D}_1$ l'espace

$$\mathcal{D}_1 = \{W \in M_{p-r,q}(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{W}W < I_q\}.$$

Le groupe G_V agit transitivement sur $\mathcal{D}_1$ par :

$$gW = (A_1W + B_1)(C_1W + D_1)^{-1},\ g \in G_V,\ W \in \mathcal{D}_1.$$

L'action de G_V sur $\mathcal{D}$ s'écrit :

$$gZ = \begin{pmatrix} gZ_1 \\ uZ_2 j(g, Z)^{-1} \end{pmatrix},\ g \in G_V,\ Z \in \mathcal{D}. \tag{12.2.2}$$

D'après (12.2.2), il existe un élément $g \in G_V$ tel que $gZ = Z'$ avec $Z'_1 = 0$. La métrique riemannienne de $\mathcal{D}$ étant G-invariante, $d(Z, \mathcal{D}_V) = d(Z', \mathcal{D}_V) = d(0, Z')$. Il nous suffit donc d'étudier la fonction distance $d(0, Z)$ de 0 à Z.

Lemme 12.2.2. — *Soit $Z \in \mathcal{D}$, $d = d(0, Z)$ et m le rang de $Z{}^t\overline{Z}$. Alors,*

(1) *si $m = 1$, $\cosh^2 d = (\det(I_p - Z{}^t\overline{Z}))^{-1}$,*

(2) *et en général,*

$$\frac{1}{2^m} e^d \leqslant (\det(I_p - Z{}^t\overline{Z}))^{-1} \leqslant e^{\sqrt{m}d}.$$

Démonstration. — Il existe un unique $Y \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\exp(\xi(Y))0 = Z. \tag{12.2.3}$$

La courbe $\exp(t\xi(Y))0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, est une géodésique joignant 0 à Z. On a donc

$$d^2 = \operatorname{tr}(Y{}^t\overline{Y}).$$

Soit A (resp. B) une matrice hermitienne positive vérifiant

$$A^2 = Y{}^t\overline{Y} \text{ (resp. } B^2 = {}^t\overline{Y}Y).$$

Il découle des définitions que

$$\exp(\xi(Y)) = \begin{pmatrix} \cosh A & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k+1)!} Y \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^{2k}}{(2k+1)!} {}^t\overline{Y} & \cosh B \end{pmatrix}.$$

Puisque $A^{2k}Y = YB^{2k}$, on déduit de l'expression ci-dessus et de (12.2.3) que $Z{}^t\overline{Z} = \tanh^2(A)$ et donc que :

$$e^A = \frac{I_p + \sqrt{Z{}^t\overline{Z}}}{(I_p - Z{}^t\overline{Z})^{1/2}}. \tag{12.2.4}$$

Il découle facilement du fait que A est de rang m que

$$d \leqslant \operatorname{tr}(A) \leqslant \sqrt{m}d.$$

Puisque $Z{}^t\overline{Z} < I_p$, le calcul du déterminant (12.2.4) implique le point (2) du Lemme. Si $m = 1$, $d = \operatorname{tr}(A)$ et le point (1) découle encore de (12.2.4).

Lemme 12.2.3. — *Soient $h_Z = (I_q - {}^tZ_1\overline{Z}_1)^{-1}$ et $\widetilde{h}_Z = (I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1}$. Alors,*

$$\widetilde{h}_{gZ} = \overline{j(g, Z)}\widetilde{h}_Z{}^tj(g, Z), \text{ pour tout } g \in G,$$
$$h_{gZ} = \overline{j(g, Z)}h_Z{}^tj(g, Z), \text{ pour tout } g \in G_V.$$

Démonstration. — Soit $l_Z = (I_q - {}^t Z\overline{Z})$. On a :

$$l_Z = -({}^tZ\ I_q)Q\begin{pmatrix}\overline{Z}\\ I_p\end{pmatrix} = -({}^tZ\ I_q){}^tgQ\overline{g}\begin{pmatrix}\overline{Z}\\ I_q\end{pmatrix} = {}^tj(g,Z)l_{gZ}\overline{j(g,Z)}.$$

Puisque $\widetilde{h}_Z = l_Z^{-1}$, on obtient la première propriété annoncée. Mais $h_Z = \widetilde{h}_{\left(\begin{smallmatrix} Z_1\\ 0\end{smallmatrix}\right)}$ et pour tout $g \in G_V$, $j(g,Z) = j\left(g, \left(\begin{smallmatrix} Z_1\\ 0\end{smallmatrix}\right)\right)$, d'où la seconde propriété annoncée.

Pour $Z \in \mathcal{D}$, on introduit les fonctions A et B sur $\mathcal{D}$ définies par

$$\begin{aligned} A &= \det(I_q - {}^tZ\overline{Z})\\ B &= \det(I_q - {}^tZ_1\overline{Z}_1). \end{aligned} \tag{12.2.5}$$

La fonction B est obtenue en restreignant la fonction A à $\mathcal{D}_V$, puis en l'étendant à $\mathcal{D}$ tout entier de façon constante dans la direction de Z_2.

Lemme 12.2.4. — *La fonction B/A est G_V-invariante.*

Démonstration. — Cela découle immédiatement du Lemme 12.2.3.

Nous pouvons maintenant estimer la fonction $d(Z, \mathcal{D}_V)$.

Proposition 12.2.5. — *Soient $Z \in \mathcal{D}$ et m le rang de la matrice $Z_2{}^t\overline{Z}_2$.*

(1) *Si $m = 1$, $(\cosh d(Z, \mathcal{D}_V))^2 = B/A$.*
(2) *En général, on a :*

$$4^m\left(\frac{B}{A}\right) \geqslant e^{2d(Z,\mathcal{D}_V)}, \qquad \textit{et} \qquad e^{2\sqrt{m}d(Z,\mathcal{D}_V)} \geqslant \frac{B}{A}.$$

Démonstration. — Les fonctions B/A et $d(., \mathcal{D}_V)$ sont toutes deux G_V-invariantes. On a vu, *cf.* (12.2.2), que l'on pouvait se ramener à ce que $Z_1 = 0$ et donc $d(Z, \mathcal{D}_V) = d(0, Z_2)$. Mais alors, $B/A = (\det(I_q - Z_2{}^t\overline{Z}_2))^{-1}$. Et la Proposition découle du Lemme 12.2.2.

Nous aurons également besoin dans la suite des expressions suivantes.

Lemme 12.2.6. — *On a l'égalité*

$$\frac{B}{A} = \det\{I_r + \overline{Z}_2(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1}{}^tZ_2\}$$

et l'inégalité

$$1 + r^{-1}\operatorname{tr}\left(\overline{Z}_2(I_q - {}^tZ\overline{Z}^{-1}{}^tZ_2\right) \geqslant \left(\frac{B}{A}\right)^{1/r}.$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}I_q - {}^tZ_1\overline{Z}_1 &= I_q - {}^tZ\overline{Z} + {}^tZ_2\overline{Z}_2\\ &= (I_q - {}^tZ\overline{Z})^{1/2}\left\{I_q + (I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1/2}{}^tZ_2\overline{Z}_2(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1/2}\right\}(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{1/2}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{B}{A} &= \det\left\{I_q + (I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1/2}{}^tZ_2\overline{Z}_2(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1/2}\right\}\\ &= \det\left\{I_r + \overline{Z}_2(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1}{}^tZ_2\right\}.\end{aligned}$$

Ce qui démontre la première partie du Lemme. Remarquons maintenant que la matrice $Z_2(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1}{}^tZ_2$ est positive. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres (réelles positives). Alors,

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{r}\operatorname{tr}\left(\overline{Z}_2(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1}{}^tZ_2\right) &= \frac{(1+\lambda_1) + \cdots + (1+\lambda_r)}{r}\\ &\geqslant \{(1+\lambda_1)\ldots(1+\lambda_r)\}^{1/r}\\ &= \det\left\{I_r + \overline{Z}_2(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1}{}^tZ_2\right\}^{1/r}\\ &= \left(\frac{B}{A}\right)^{1/r}.\end{aligned}$$

Remarquons qu'à l'aide de la théorie générale des espaces symétriques (*cf.* [**52**], [**67**]), on peut montrer que les seuls sous-espaces totalement géodésiques de l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}_{n,1}$ sont soit des sous-espaces $\mathcal{D}_V$ comme ci-dessus, soit des sous-variétés totalement géodésiques totalement réelles. On ne s'occupera ici que des premiers. En ce qui concerne les espaces symétriques $\mathcal{D}_{p,q}$, il existe en général d'autres sous-espaces totalement géodésiques holomorphes que ceux considérés ci-dessus.

12.3. Croissance du volume

Examinons maintenant les champs de Jacobi émanant de $\mathcal{D}_V$.(Une référence générale pour les champs de Jacobi est [**87**].)

Lemme 12.3.1. — *Soient $Z \in \mathcal{D}_V$, $T_Z(\mathcal{D}_V)$ l'espace tangent à $\mathcal{D}_V$ en Z et $T_Z(\mathcal{D}_V)^\perp$ le supplémentaire orthogonal de $T_Z(\mathcal{D}_V)$ dans $T_Z(\mathcal{D})$. Soit Y un vecteur dans $T_Z(\mathcal{D}_V)^\perp$ avec $g_Z(Y,Y) = 1$. Alors,*

(1) *les espaces $T_Z(\mathcal{D}_V)$ et $T_Z(\mathcal{D}_V)^\perp$ sont invariants sous l'application $R(.,Y)Y$,*
(2) *il existe $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_l \geqslant 0$, $l = \max\{r,q\}$ tels que*
 – $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_l^2 = 1$,
 – $\lambda_i = 0$, *si $i > \min\{r,q\}$*,

– *l'opérateur* $R(.,Y)Y_{|T_Z(\mathcal{D}_V)}$ *a pour valeurs propres*

$$\underbrace{-\lambda_1^2,\dots,-\lambda_1^2}_{2(p-r)},\underbrace{-\lambda_2^2,\dots,-\lambda_2^2}_{2(p-r)},\dots,\underbrace{-\lambda_q^2,\dots,-\lambda_q^2}_{2(p-r)},$$

– *l'opérateur* $R(.,Y)Y_{|T_Z(\mathcal{D}_V)^\perp}$ *a pour valeurs propres*

$$-(\lambda_i-\lambda_j)^2,\ -(\lambda_i+\lambda_j)^2,\ 1\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant q.$$

Démonstration. — D'après (12.2.2), on peut supposer que $Z=0$ et $Y=\xi\left(\begin{smallmatrix}0\\M\end{smallmatrix}\right)$. D'après [**67**, Theorem 3.2, Chap. XI], étant donné $X\in T_0(\mathcal{D})$, le tenseur de courbure est donné par :

$$R(X,Y)Y=-[[X,Y],Y]. \tag{12.3.1}$$

Si $X=\xi\left(\begin{smallmatrix}N\\0\end{smallmatrix}\right)\in T_0(\mathcal{D}_V)$, un calcul simple donne alors

$$R(X,Y)Y=\xi\begin{pmatrix}-N^t\overline{M}M\\0\end{pmatrix}. \tag{12.3.2}$$

Si maintenant $X=\xi\left(\begin{smallmatrix}0\\L\end{smallmatrix}\right)\in T_0(\mathcal{D}_V)^\perp$, un autre calcul simple à l'aide de (12.3.1) donne

$$R(X,Y)Y=\xi\begin{pmatrix}0\\-L^t\overline{M}M+2M^t\overline{L}M-M^t\overline{M}L\end{pmatrix}. \tag{12.3.3}$$

Il découle de (12.3.2) et (12.3.3) que les espaces $T_0(\mathcal{D}_V)$ et $T_0(\mathcal{D}_V)^\perp$ sont invariants sous l'application $R(.,Y)Y$. Remarquons que l'on peut toujours supposer que M est de la forme

$$M=\begin{cases}\begin{pmatrix}\lambda_1&\dots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\dots&\lambda_q\\&0&\end{pmatrix} & \text{si } r>q,\\[2ex] \begin{pmatrix}\lambda_1&\dots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\dots&\lambda_q\end{pmatrix} & \text{si } r=q,\\[2ex] \begin{pmatrix}\lambda_1&\dots&0&\\\vdots&\ddots&\vdots&0\\0&\dots&\lambda_r&\end{pmatrix} & \text{si } r<q,\end{cases}$$

avec $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l\geqslant 0$, $l=\max\{r,q\}$ et $\lambda_i=0$ si $i>\min\{r,q\}$. Puisque $\lambda_1^2+\cdots+\lambda_l^2=\operatorname{tr}(M^t\overline{M})=g_0(Y,Y)=1$, le deuxième point du Lemme 12.3.1 découle alors des formules (12.3.2) et (12.3.3).

Soit τ une géodésique perpendiculaire à $\mathcal{D}_V$. Nous pouvons maintenant étudier les champs de Jacobi le long de τ. Soit $\tau=\tau_t$, où t est la longueur d'arc de $\mathcal{D}_V$ à τ_t et

$Y = \dot{\tau}_0$. Dans la suite nous décrivons les champs de Jacobi $X = X(t)$ le long de τ vérifiant

$$X(0) \in T_{\tau_0}(\mathcal{D}_V) \text{ et } \nabla_Y X \in T_{\tau_0}(\mathcal{D}_V)^{\perp}. \tag{12.3.4}$$

L'équation de Jacobi est donnée par

$$\nabla^2_{\tau_t} X + R(X, \dot{\tau}_t)\dot{\tau}_t = 0.$$

D'après le Lemme 12.3.1, les valeurs propres de $R(., Y)Y$ sont négatives. Soit $X_0 \in T_{\tau_0}(\mathcal{D}_V)$ un vecteur propre de $R(., Y)Y$ pour la valeur propre $-\lambda^2$ ($\lambda \geqslant 0$). Soit X_t le transport parallèle de X_0 le long de τ. On peut vérifier que

$$X(t) = (\cosh \lambda t) X_t \tag{12.3.5}$$

est un champ de Jacobi le long de τ vérifiant (12.3.4). Soit $L_0 \in T_{\tau_0}(\mathcal{D}_V)^{\perp}$ un vecteur propre de $R(., Y)Y$ pour la valeur propre $-\lambda^2$ ($\lambda \geqslant 0$). Soit L_t le transport parallèle de L_0 le long de τ. On peut vérifier que

$$L(t) = \begin{cases} (\sinh \lambda t) L_t & \text{si } \lambda \neq 0, \\ t L_t & \text{sinon} \end{cases} \tag{12.3.6}$$

est un champ de Jacobi le long de τ vérifiant (12.3.4). L'espace des champs de Jacobi vérifiant (12.3.4) a pour dimension $2pq$. Cet espace est engendré par les champs de Jacobi construits ci-dessus.

L'espace $\mathcal{D} - \mathcal{D}_V$ se décompose en un produit :

$$\mathcal{F} \times]0, +\infty[$$

où $\mathcal{F}$ est l'hypersurface de $\mathcal{D}$ constituée des points à distance 1 de $\mathcal{D}_V$ et où nous identifions un point $(W, t) \in \mathcal{F} \times]0, +\infty[$ avec le point $Z \in \mathcal{D}$ à distance t de $\mathcal{D}_V$ et tel que la géodésique passant par Z et W soit perpendiculaire à $\mathcal{D}_V$.

Si S est un sous-ensemble mesurable de $\mathcal{F}$, nous noterons $\omega(t, S)$ le volume de $\{Z \in \mathcal{F} \times \{t\} \mid Z_1 \in S\}$. D'après (12.2.2), $\omega(t, S) = \omega(t, gS)$ pour tout $g \in G_V$. On peut donc voir $\omega(t, S)$, pour chaque t, comme une mesure invariante sur $\mathcal{D}_V$. Il existe alors une fonction $f(t)$ telle que $\omega(t, S) = f(t) \operatorname{vol}(S)$.

Lemme 12.3.2. — *Il existe une constante c telle que :*

(1) *si $r = 1$,*

$$\omega(t, S) = c \operatorname{vol}(S)(\sinh 2t)(\sinh t)^{2(q-1)}(\cosh t)^{2(p-1)},$$

(2) *en général,*

$$\omega(t, S) \leqslant c \operatorname{vol}(S)(1 + t^{pq}) e^{2(p+q-1)\sqrt{m}t)},$$

où $m = \min\{r, q\}$.

Démonstration. — Si l'on écrit $\omega(t,S) = f(t)\,\mathrm{vol}(S)$, il nous faut estimer $f(t)$, par exemple en la comparant à la constante $f(1)$. Soit x_s une courbe dans $\mathcal{F}$. On note x_s^t le point (x_s,t), $x_{(s)}^t$ la courbe à s fixé et $x_s^{(t)}$ la courbe à t fixé. Les courbes $x_{(s)}^t$ sont des géodésiques et $\dot{x}_s^{(t)}$ est un champ de Jacobi le long de cette géodésique qui vérifie (12.3.4). Mais d'après le Lemme 12.3.1 et (12.3.5), (12.3.6), l'espace $T_{x_s}(\mathcal{F})$ admet un base orthonormée réelle

$$X_1,\dots,X_{2(p-r)},X_{2(p-r)+1},\dots,X_{4(p-r)},\dots\dots,X_{2(p-r)q},$$
$$Y_1,\dots,Y_{2rq-1}$$

et il existe des réels

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_l \geqslant 0,\ l=\max\{r,q\}$$

vérifiant :

(1) $\lambda_1^2+\cdots+\lambda_l^2=1$,
(2) $\lambda_i=0$ pour tout $i>\min\{r,q\}$,
(3) au point (x_s,t),

$$\begin{aligned}\|X_1\|=\cdots=\|X_{2(p-r)}\| &= \frac{\cosh\lambda_1 t}{\cosh\lambda_1},\\ &\ \vdots\\ \|X_{2(p-r)(q-1)+1}\|=\cdots=\|X_{2(p-r)q}\| &= \frac{\cosh\lambda_q t}{\cosh\lambda_q},\end{aligned}$$

(4) au point (x_s,t), l'ensemble des $\|Y_j\|$ pour $1\leqslant j\leqslant 2rq-1$ (comptées avec multiplicités) coïncide, à une permutation près, avec l'ensemble des a_{ij} pour $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant q$ et des b_{ij} pour $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant q$ et $(i,j)\neq(1,1)$ tels que

$$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\sinh(\lambda_i+\lambda_j)t}{\sinh(\lambda_i+\lambda_j)}, & \text{si } \lambda_i+\lambda_j\neq 0,\\ t, & \text{si } \lambda_i+\lambda_j=0,\end{cases}\quad \text{et}\quad b_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\sinh|\lambda_i-\lambda_j|t}{\sinh|\lambda_i-\lambda_j|}, & \text{si } \lambda_i\neq\lambda_j,\\ t, & \text{si } \lambda_i=\lambda_j.\end{cases}$$

On en déduit alors facilement que

$$f(t)=f(1)\frac{\sinh 2t\sinh^{2(q-1)}t\cosh^{2(p-1)}t}{\sinh 2\sinh^{2(q-1)}1\cosh^{2(p-1)}1}\quad \text{si } r=1$$

et en général qu'il existe une constante c telle que

$$f(t)\leqslant c(1+t^{2pq})e^{2(p+q-1)\sqrt{m}t},$$

où $m=\min\{r,q\}$.

Remarquons que la fonction B/A est plus naturelle que la fonction distance $d(.,\mathcal{D}_V)$. Dans la suite nous reprenons l'étude du volume à l'aide de la fonction B/A.

Notons d'abord que si $g\in G$ et $Z\in\mathcal{D}$,

$$d(gZ)=l(g,Z)dZj(g,Z)^{-1}.$$

On sait que

$$\det(l(g,Z))=\det(j(g,Z))^{-1}.$$

Donc si l'on pose

$$\{dZ\} = \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{q} dZ_{ij}d\overline{Z}_{ij}$$

et si $g \in G$,

$$\{dgZ\} = |\det(j(g,Z))|^{-2(p+q)}\{dZ\}.$$

Puis d'après le Lemme 12.2.3,

$$A(gZ) = |\det(j(g,Z))|^{-2}A(Z).$$

La forme volume invariante $dv_{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$ s'écrit donc

(12.3.7) $$dv_{\mathcal{D}} = (\sqrt{-1}\,)^{pq}A^{-(p+q)}\{dZ\}.$$

Si $\left(\begin{smallmatrix} Z_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{D}_V$, soit F_{Z_1} la fibre au-dessus de ce point dans le fibré $\mathcal{D} \to \mathcal{D}_V$. On a donc :

$$F_{Z_1} = \{Z \in \mathcal{D} \mid Z_1 \text{ fixé}\}.$$

Soit $g \in G_V$ l'élément

$$g = \begin{pmatrix} (I_{p-r} - Z_1{}^t\overline{Z}_1)^{-1/2} & 0 & -(I_{p-r} - Z_1{}^t\overline{Z}_1)^{-1/2}Z_1 \\ 0 & I_r & 0 \\ -(I_q - {}^t\overline{Z}_1Z_1)^{-1/2}\,{}^t\overline{Z}_1 & 0 & (I_q - {}^t\overline{Z}_1Z_1)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Alors g envoie F_{Z_1} isométriquement sur F_0, et

$$g\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Z_2(I_q - {}^t\overline{Z}_1Z_1)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Sur F_0, l'élément de volume est $(\sqrt{-1}\,)^{rq}\det(I_q - {}^tZ_2\overline{Z}_2)^{-(r+q)}\{dZ_2\}$, l'élément de volume sur F_{Z_1} est donc

$$dv_F = (\sqrt{-1}\,)^{rq}A^{-r}\left(\frac{B}{A}\right)^q\{dZ_2\}.$$

D'où il découle que

(12.3.8) $$dv_{\mathcal{D}} = \left(\frac{B}{A}\right)^{p-r} dv_{\mathcal{D}_V}dv_F,$$

où $dv_{\mathcal{D}_V} = (\sqrt{-1}\,)^{(p-r)q}B^{-(p+q-r)}\{dZ_1\}$ est la forme volume invariante sur $\mathcal{D}_V$.

Lemme 12.3.3. — *On a les formules d'intégration :*

(1) $$\int_{\mathcal{D}} A^s\{dZ\} = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\right)^{pq}\prod_{i=1}^{p}\frac{\Gamma(s+i)}{\Gamma(s+q+i)},$$

dès que $\mathrm{Re}(s) > -1$ *; et*

(2) $$\int_{\Gamma_V\backslash\mathcal{D}}\left(\frac{A}{B}\right)^s dv_{\mathcal{D}} = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\right)^{rq}\prod_{i=1}^{r}\frac{\Gamma(s-p-q+i)}{\Gamma(s-p+i)}\,\mathrm{vol}(\Gamma_V\backslash\mathcal{D}_V),$$

dès que $\mathrm{Re}(s) > p+q-1$.

Démonstration. — On introduit tout d'abord $f(s,p,q) = \int_{\mathcal{D}} A^s\{dZ\}$. On déduit de (12.3.8), avec $r = 1$, la relation de récurrence

$$f(s,p,q) = f(s+1,p-1,q)f(s,1,q).$$

Mais,

$$\begin{aligned}
f(s,1,q) &= \int_{\sum_i |z_i|^2 \leqslant 1} (1 - (|z_1|^2 + \cdots + |z_q|^2))^s dz_1 d\overline{z}_1 \cdots dz_q d\overline{z}_q \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{-1}}\right)^q \int_{\sum_i (|x_i|^2 + |y_i|^2) \leqslant 1} (1 - (|x_1|^2 + |y_1|^2 + \cdots + |x_q|^2 + |y_q|^2))^s \\
&\qquad\qquad \cdot dx_1 dy_1 \cdots dx_q dy_q \\
&= \frac{(2\pi)^q}{(\sqrt{-1}\,)^q \Gamma(q)} \int_0^1 (1-t)^s t^{q-1} dt \\
&= \frac{(2\pi)^q \Gamma(s+1)}{(\sqrt{-1}\,)^q \Gamma(s+q+1)} \quad \text{dès que } \mathrm{Re}(s) > -1.
\end{aligned}$$

Alors le premier point du Lemme 12.3.3 découle d'une simple récurrence.

Concernant le deuxième point, il découle de (12.3.8) que l'intégrale vaut

$$\int_{\Gamma_V \backslash \mathcal{D}} \left(\frac{A}{B}\right)^{s+r-p} dv_F dv_{\mathcal{D}_V}.$$

Puisque A/B et dv_F sont G_V-invariant, l'intégrale

$$\int_{F_{Z_1}} \left(\frac{A}{B}\right)^{s+r-p} dv_F$$

est indépendante de Z_1. En $Z_1 = 0$, sa valeur est

$$\int_{\mathcal{D}_2} \det(I_q - {}^t Z_2 \overline{Z}_2)^{s-p-q}\{dZ_2\},$$

où $\mathcal{D}_2 = \{Z_2 \mid {}^t\overline{Z}_2 Z_2 < I_q\}$. Le deuxième point du Lemme 12.3.3 découle donc directement du premier point.

12.4. Fonction distance à l'hypersurface

Soit F la fonction distance géodésique à la sous-variété $\mathcal{D}_V$. La fonction $Z \mapsto F(Z)$ est bien évidemment lisse pour $Z \in \mathcal{D} - \mathcal{D}_V$. Nous notons $\nabla^2 F$ le hessien de F. Rappelons que le *hessien* d'une fonction C^2 F de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ est la seconde dérivée covariante $\nabla^2 F$ de F, *i.e.*

$$\nabla^2 F(X,Y) = X(YF) - (\nabla_X Y)F,$$

pour n'importe quels champs de vecteurs X, Y sur $\mathcal{D}$ et où ∇ est la connexion de Levi-Cività induite par la structure riemannienne de $\mathcal{D}$. Le hessien $\nabla^2 F$ définit donc un tenseur symétrique de type $(0,2)$. Nous appelons *valeurs propres du hessien* les fonctions qui à chaque point de $\mathcal{D}$ associent les valeurs propres de la matrice associée dans n'importe quelle base orthonormée de l'espace tangent à $\mathcal{D}$ au point x.

Proposition 12.4.1. — *Notons $\{\gamma_i(Z)\}_{1\leqslant i\leqslant 2pq}$ les valeurs propres du hessien $\nabla^2 F$. Si $Z\in\mathcal{D}$, $m=\min\{r,q\}$ et $l=\max\{r,q\}$, il existe alors $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l\geqslant 0$ tels que*

- $\lambda_1^2+\cdots+\lambda_l^2=1$,
- $\lambda_i=0$, *pour tout* $i>m$,
- *quitte à réordonner les* $\gamma_i(Z)$,

$$\begin{aligned}&\gamma_1(Z)=\lambda_1\tanh(\lambda_1F(Z)),\dots,\gamma_{2(p-r)}(Z)=\lambda_1\tanh(\lambda_1F(Z)),\\&\dots\dots,\\&\gamma_{2(p-r)(q-1)+1}(Z)=\lambda_q\tanh(\lambda_qF(Z)),\dots,\gamma_{2(p-r)q}(Z)=\lambda_q\tanh(\lambda_qF(Z)),\end{aligned}$$

et les $\gamma_k(Z)$ pour $2(p-r)q+1\leqslant k\leqslant 2pq$, sont (à permutations près) les nombres $n_{i,j}$ et $m_{i,j}$, pour $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant q$, tels que

$$n_{i,j}=\begin{cases}(\lambda_i+\lambda_j)\coth((\lambda_i+\lambda_j)F(Z)) & si\ \lambda_i+\lambda_j\neq 0\\ 1/F(Z)\quad si\ \lambda_i+\lambda_j=0\end{cases}$$

et

$$m_{i,j}=\begin{cases}|\lambda_i-\lambda_j|\coth(|\lambda_i-\lambda_j|F(Z)) & si\ \lambda_i\neq\lambda_j\\ 1/F(Z)\quad si\ \lambda_i=\lambda_j\ et\ (i,j)\neq(1,1),\\ 0\quad si\ (i,j)=(1,1).\end{cases}$$

Démonstration. — Soit toujours τ une géodésique perpendiculaire à $\mathcal{D}_V$ avec $\tau=\tau_t$ où t est la longueur d'arc de $\mathcal{D}_V$ à τ_t. Soit $Y=\dot\tau$. D'après le Lemme 12.3.1, il existe donc

– l réels $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l\geqslant 0$ tels que $\lambda_1^2+\cdots+\lambda_l^2=1$ et $\lambda_i=0$, pour tout $i>m$;

– un champ de bases orthonormées le long de τ :

$$\{e_\alpha,f_{i,j},f'_{i,j}\mid 1\leqslant\alpha\leqslant 2(p-r)q \text{ et } 1\leqslant i,j\leqslant 2rq\}$$

tel que pour tout entier $1\leqslant\beta\leqslant q$ et pour tout entier $2(\beta-1)(p-r)+1\leqslant\alpha\leqslant 2\beta(p-r)$ le vecteur $e_\alpha(0)\in T_{\tau_0}(\mathcal{D})$ et soit un vecteur $(-\lambda_\beta^2)$-propre de $R(.,Y)Y$ et que pour toute paire d'entiers $1\leqslant i,j\leqslant 2rq$ le vecteur $f_{i,j}(0)$ (resp. $f'_{i,j}(0)$) $\in T_{\tau_0}(\mathcal{D})^\perp$ et soit un vecteur $(-(\lambda_i+\lambda_j)^2)$-propre (resp. $(-(\lambda_i-\lambda_j)^2)$-propre de $R(.,Y)Y$.

Nous supposerons de plus (ce que l'on peut bien évidemment faire) que le vecteur Y est égal au vecteur $f'_{1,1}(0)$.

Alors d'après (12.3.5) et pour tout couple d'entiers (β,α) vérifiant $1\leqslant\beta\leqslant q$ et $2(\beta-1)(p-r)+1\leqslant\alpha\leqslant 2\beta(p-r)$, les champs de vecteurs :

$$v_\alpha(t)=\cosh(\lambda_\beta t)e_\alpha(t)\tag{12.4.1}$$

sont des champs de Jacobi le long de τ vérifiant (12.3.4). Puis, d'après (12.3.6) et pour tout couple d'entiers (i,j) vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant j \leqslant q$, les champs de vecteurs :

$$w_{i,j}(t) = \begin{cases} \sinh((\lambda_i + \lambda_j)t) f_{i,j}(t), & \text{si } \lambda_i + \lambda_j \neq 0 \\ t f_{i,j}(t), & \text{si } \lambda_i + \lambda_j = 0, \end{cases} \tag{12.4.2}$$

et

$$w'_{i,j}(t) = \begin{cases} \sinh(|\lambda_i - \lambda_j| t) f'_{i,j}(t), & \text{si } \lambda_i \neq \lambda_j \\ t f'_{i,j}(t), & \text{si } \lambda_i = \lambda_j, \end{cases} \tag{12.4.3}$$

sont des champs de Jacobi le long de τ vérifiant (12.3.4). De plus, nous avons vu que les champs de vecteurs (12.4.1), (12.4.2) et (12.4.3) forment une base orthogonale de l'espace des champs de Jacobi le long de τ vérifiant (12.3.4). La formule de la variation seconde [**87**] nous dit alors que le Hessien $\nabla^2 t (= \nabla^2 F)$ se diagonalise dans la base $\{e_\alpha\}_{1 \leqslant \alpha \leqslant 2q(p-r)} \cup \{f_{i,j}, f_{i,j}\}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$. Et plus précisément permet de calculer par exemple

$$\nabla^2 t(y)(e_\alpha, e_\alpha) = \frac{d^2}{ds^2}_{|s=0} L(\tau^s),$$

où si τ va de $x := \tau_0 \in \mathcal{D}_V$ à $y := \tau_{t(y)}$, τ^s désigne la géodésique minimisante joignant $\mathcal{D}_V$ au point $\exp_y(s e_\alpha)$ et $L(\tau^s)$ sa longueur. Or, si α est un entier compris entre $2(\beta - 1)(p - r) + 1$ et $2\beta(p - r)$ pour un certain entier $1 \leqslant \beta \leqslant q$, le champ de vecteur $\widehat{v}_\alpha = v_\alpha / \sinh(\lambda_\beta t(y))$ est un champ de Jacobi le long de τ, perpendiculaire à $\dot{\tau}$ et vérifiant : $\widehat{v}_\alpha(t(y)) = e_\alpha(t(y))$ et (12.3.4). La formule de la variation seconde implique alors :

$$\begin{aligned} \nabla^2 t(y)(e_\alpha, e_\alpha) &= \langle \nabla \widehat{v}_\alpha(t(y)), \widehat{v}_\alpha(t(y)) \rangle, \\ &= \lambda_\beta \frac{\sinh(\lambda_\beta t(y))}{\cosh(\lambda_\beta t(y))}. \end{aligned}$$

De la même manière, si (i,j) est un couple d'entiers vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant j \leqslant q$, on obtient :

$$\nabla^2 t(y)(f_{i,j}, f_{i,j}) = \begin{cases} (\lambda_i + \lambda_j) \dfrac{\cosh((\lambda_i + \lambda_j)t(y))}{\sinh((\lambda_i + \lambda_j)t(y))}, & \text{si } \lambda_i + \lambda_j \neq 0 \\ 1/t(y), & \text{si } \lambda_i = \lambda_j, \end{cases}$$

et

$$\nabla^2 t(y)(f'_{i,j}, f'_{i,j}) = \begin{cases} |\lambda_i - \lambda_j| \dfrac{\cosh(|\lambda_i - \lambda_j| t(y))}{\sinh(|\lambda_i - \lambda_j| t(y))}, & \text{si } \lambda_i \neq \lambda_j \\ 1/t(y), & \text{si } \lambda_i = \lambda_j \text{ et } (i,j) \neq (1,1), \\ 0, & \text{si } (i,j) = (1,1). \end{cases}$$

Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 12.4.1.

La variété $\mathcal{D}$ est, en plus de sa structure riemannienne, naturellement équipée d'une structure complexe $J : T^*\mathcal{D} \to T^*\mathcal{D}$ induite par la multiplication par $\sqrt{-1}$ sur $\mathfrak{p}$. Nous avons équipé $\mathcal{D}$ d'une métrique hermitienne kaehlérienne. On associe naturellement à cette dernière la 2-forme réelle (*i.e.* qui est de bidegré $(1,1)$ et a des coefficients réels dans des coordonnés réelles)

$$-\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\det(I_q - {}^t\overline{Z}Z).$$

On peut voir cette dernière comme l'opposée de la partie imaginaire de la métrique hermitienne de $\mathcal{D}$. Remarquons que ce jonglage entre métrique et 2-forme différentielle est tout d'abord réversible et, de manière générale applicable à tout 2-tenseur covariant hermitien, *i.e.* tout tenseur localement de la forme $\sum_{\alpha,\beta} H_{\alpha\beta}dz^\alpha d\overline{z}^\beta$ où $H_{\alpha\beta} = \overline{H}_{\beta\alpha}$. Comme d'habitude on confond la métrique avec la forme différentielle dans les énoncés. Ainsi par exemple, si f est une fonction à valeurs réelles, l'assertion « $\partial\overline{\partial}f$ est définie positive » signifie réellement que « le tenseur hermitien $\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}dz^\alpha d\overline{z}^\beta$ associé à $\frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\overline{\partial}f$ est définie positif ».

Soit f une fonction réelle sur la variété complexe $\mathcal{D}$; on définit sa *forme de Levi* Lf par :

$$Lf = 2\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}dz^\alpha d\overline{z}^\beta,$$

qui est juste le tenseur hermitien associé à $\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}f$. Nous appelons *valeurs propres de la forme de Levi* Lf les valeurs propres de la matrice hermitienne associée au tenseur Lf dans une base orthonormée.

Rappelons le lien bien connu entre la forme de Levi de f et son hessien sur une variété kaehlérienne.

Lemme 12.4.2. — *Soit f une fonction réelle sur une variété kaehlérienne et soit $X_0 = \frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}\,JX)$ un vecteur de bidegré $(1,0)$. Alors,*

$$Lf(X_0, X_0) = \frac{1}{2}\left(\nabla^2 f(X,X) + \nabla^2 f(JX,JX)\right).$$

Revenons maintenant à notre fonction « distance à $\mathcal{D}_V$ », la fonction F. Il est facile de vérifier que lorsque r ou q est égale à 1 (*i.e.* $m = 1$) le hessien de F se diagonalise dans une base J-invariante. On déduit alors du Lemme 12.4.2 que les valeurs propres de la forme de Levi de F sont

– si $r = 1$, les valeurs propres : $\coth(2F(Z))$ avec multiplicité 1, $\tanh F(Z)$ avec multiplicité $p-1$, $\coth F(Z)$ avec multiplicité $q-1$ et 0 avec multiplicité $(p-1)(q-1)$;
– si $q = 1$, les valeurs propres : $\coth(2F(Z))$ avec multiplicité 1, $\tanh F(Z)$ avec multiplicité $p-r$, $\coth F(Z)$ avec multiplicité $r-1$.

Les valeurs propres de la forme de Levi de F sont, lorsque $F(Z)$ tend vers l'infini, plus proches les unes des autres que celles du hessien de F. Ceci sera important pour nous dans la suite, l'importance de cette propriété pour l'étude du spectre et de la cohomologie L^2 a été mise en évidence pour la première fois dans [**37**] et les mêmes raisons fondent son importance pour nous.

Lorsque $m > 1$, on l'a vu la « bonne » fonction tenant compte de la structure complexe de $\mathcal{D}_V$ n'est plus la fonction F mais la fonction B/A (ou plutôt $\log(B/A)$). Dans la suite nous aurons besoin de connaître les valeurs propres de sa forme de Levi.

Proposition 12.4.3. — *Les valeurs propres de la forme de Levi de* $\log(B/A)$ *au point* $Z \in \mathcal{D}$ *sont la valeur propre* 1 *avec multiplicité* qr *et chacune des valeurs propres de* $(I_q - {}^t\overline{Z}_1 Z_1)^{-1/2}\,{}^t\overline{Z}_2 Z_2 (I_q - (\overline{Z}_1)^t Z_1)^{-1/2}$ *avec multiplicité* $p-r$. *En particulier, la valeur propre nulle intervient avec multiplicité* $(p-r)(q-m)$ *où* $m \leqslant \min\{q,r\}$ *est le rang de la matrice* Z_2.

Démonstration. — Nous ordonnons les coordonnées de $Z \in \mathcal{D}$ par $Z_{11},\dots,Z_{1q}$, $Z_{21},\dots,Z_{2q},\dots\dots,Z_{p1},\dots,Z_{pq}$. Alors, au point Z, la matrice des coefficients de la métrique kaehlérienne est la matrice

$$(12.4.4)\qquad \begin{pmatrix} (I_q - {}^t\overline{Z}Z)^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & (I_q - {}^t\overline{Z}Z)^{-1} \end{pmatrix} (\widetilde{I_p - \overline{Z}{}^tZ})^{-1},$$

et son inverse est

$$(12.4.5)\qquad \begin{pmatrix} (I_q - {}^t\overline{Z}Z) & & \\ & \ddots & \\ & & (I_q - {}^t\overline{Z}Z) \end{pmatrix} (\widetilde{I_p - \overline{Z}{}^tZ}),$$

où étant donné $X = (x_{ij}) \in M_p(\mathbb{C})$, nous notons $\widetilde{X}$ la matrice $(x_{ij}I_q) \in M_{pq}(\mathbb{C})$.

Calculons maintenant la matrice de $\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log(B/A)$. Remarquons tout d'abord que

$$\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\left(\frac{B}{A}\right) = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log B - \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log A.$$

La fonction $\frac{B}{A}$ est G_V-invariante, d'après (12.2.2) il nous suffit donc de déterminer la matrice de $\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\left(\frac{B}{A}\right)$ aux points Z tels que $Z_1 = 0$. Il est bien connu [**67**] que $-\log A$ (resp. $-\log B$) est un potentiel pour la métrique kaehlérienne de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}_V$). Autrement dit $-\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log A$ s'identifie à la métrique de Kaehler de $\mathcal{D}$ et sa matrice est donc (12.4.4) ; et $-\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log B$ s'identifie à la métrique de Kaehler de $\mathcal{D}_V$ et sa matrice en $Z_1 = 0$ est donc $I_{(p-r)q}$. La matrice

$$(12.4.6)\qquad \begin{pmatrix} (I_q - {}^t\overline{Z}Z)^{1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & (I_q - {}^t\overline{Z}Z)^{1/2} \end{pmatrix} (\widetilde{I_p - \overline{Z}{}^tZ})^{1/2},$$

est hermitienne et de carré la matrice (12.4.5), elle réalise donc un changement de base de la base donnée par les coordonnées canonique vers une base orthonormée pour la métrique. La matrice de $\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log(B/A)$ dans cette nouvelle base et en $Z_1 = 0$ est donc

$$\begin{pmatrix} {}^t\overline{Z}_2 Z_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & {}^t\overline{Z}_2 Z_2 & \\ & & & I_{qr} \end{pmatrix}.$$

Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 12.4.3.

Concluons cette section par un corollaire dont nous aurons besoin dans la suite du texte.

Corollaire 12.4.4. — *Les valeurs propres de la forme de Levi de* $\log(B/A)$ *au point* $Z \in \mathcal{D}$ *sont toutes positives, inférieures (ou égales) à* 1, *et parmi celles-ci au moins* $p + qr - r$ *tendent vers* 1 *lorsque* $\frac{B}{A}(Z)$ *tend vers l'infini.*

Démonstration. — On peut encore se ramener au cas $Z_1 = 0$. Le Corollaire 12.4.4 découle alors facilement de la Proposition 12.4.3, puisque lorsque $\frac{B}{A}(Z)$ tend vers l'infini, $\det(I_q - {}^tZ_2\overline{Z}_2)$ tend vers 0 et donc la plus grande valeur propre de ${}^t\overline{Z}_2 Z_2$ tend vers 1.

12.5. Séries de Poincaré

Soit ϕ une forme différentielle de degré l sur $\mathcal{D}$. Nous notons $\|\phi\|$ (resp. $\|\phi\|_0$) la norme ponctuelle induite par la métrique g (resp. la métrique euclidienne).

Lemme 12.5.1. — *On a les inégalités suivantes :*

$$\|\phi\|_0 \geqslant \|\phi\| \geqslant A^l \|\phi\|_0,$$

où $A = \det(I_q - {}^t\overline{Z}Z)$.

Démonstration. — La forme de Kaehler de $\mathcal{D}$, s'écrit

$$\kappa = \mathrm{tr}((I_p - Z{}^t\overline{Z})^{-1} dZ (I_q - {}^t\overline{Z}Z)^{-1} d{}^t\overline{Z}).$$

Il est donc immédiat que

$$\mathrm{tr}(dZ d{}^t\overline{Z}) \leqslant \kappa \leqslant A^{-2}\,\mathrm{tr}(dZ d{}^t\overline{Z}).$$

Le Lemme 12.5.1 découle trivialement de ces dernières inégalités.

Corollaire 12.5.2. — *Soit* ϕ *une forme différentielle* G_V*-invariante de degré* l. *Supposons que chaque coefficient de* $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_l$, *avec*

$$\theta_1, \ldots, \theta_l \in \{dZ_{ij}, d\overline{Z}_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant p\ 1 \leqslant j \leqslant q\},$$

soit borné en $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ Z_2 \end{smallmatrix}\right)$. *Il existe alors deux constantes* C_1, $C_2 > 0$ *telles que*

$$C_1 \geqslant \|\phi\| \geqslant C_2 \left(\frac{A}{B}\right)^l.$$

Démonstration. — D'après (12.2.2), il suffit de le vérifier en $\left(\begin{smallmatrix}0\\ Z_2\end{smallmatrix}\right)$. Mais en $\left(\begin{smallmatrix}0\\ Z_2\end{smallmatrix}\right)$, $B = 1$ et le Corollaire 12.5.2 découle alors du Lemme 12.5.1.

Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret sans torsion de type fini. Alors $M = \Gamma\backslash\mathcal{D}$ est une variété complexe hermitienne complète orientée de dimension (complexe) pq. Une telle variété sera appelée *G-variété* et, lorsque $q = 1$, *variété hyperbolique complexe.* Soit $\Gamma_V = \Gamma \cap G_V$, et soit $C_V = \Gamma_V\backslash\mathcal{D}_V$. On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_V & \hookrightarrow & \mathcal{D} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_V = \Gamma_V\backslash\mathcal{D}_V & \xrightarrow{i} & \Gamma\backslash\mathcal{D} = M \end{array}$$

où l'application i est induite par l'inclusion de $\mathcal{D}_V$ dans $\mathcal{D}$. En général, le groupe Γ_V est réduit à l'identité. Dans la suite nous supposons que C_V est de volume fini (plus loin nous supposerons même que C_V est compacte). Soit $M_V = \Gamma_V\backslash\mathcal{D}$. Remarquons que la fibration naturelle

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_V \\ Z \longmapsto \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

induit une fibration, nous notons également $\pi : M_V = \Gamma_V\backslash\mathcal{D} \to \Gamma_V\backslash\mathcal{D}_V = C_V$.

La Proposition 3 de [**76**] (ou le Lemme principal de [**7**]) implique(nt) le lemme suivant.

Lemme 12.5.3. — *Il existe une suite $\{\Gamma_m\}$ de sous-groupes d'indices finis dans Γ, décroissante pour l'inclusion, telle que*

$$\Gamma_V = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Gamma_m \text{ et } \Gamma_0 = \Gamma.$$

Si de plus Γ est un sous-groupe de congruence, on peut choisir les Γ_m de congruence.

Le Lemme 12.5.3 implique que lorsque Γ est de type fini, la variété M admet une suite croissante $\{M_m\}$ de revêtements finis telle que la suite $\{M_m\}$ converge uniformément sur tout compact vers la variété M_V (il suffit de poser $M_m = \Gamma_m\backslash\mathcal{D}$). Nous appelons une telle suite de revêtements finis, une *tour d'effeuillage autour de C_V*. Dans la suite, nous supposons que M possède une telle tour et notons Γ_m le groupe fondamental de M_m.

Nous allons travailler tout au long de cette partie avec des formes différentielles sur $\mathcal{D}$, M_V ou M_m. Il sera plus commode de considérer toutes ces formes différentielles comme définies sur $\mathcal{D}$ et invariantes sous l'action des groupes $\{e\}$, Γ_V ou Γ_m. Étant donné un entier m_0, un élément $\gamma \in \Gamma_{m_0}$ et une forme différentielle ω sur M_m (avec $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \geqslant m_0$), nous pourrons notamment parler de la forme différentielle $\gamma^*\omega$.

Concluons ce chapitre par l'étude promise des séries de Poincaré.

Soient $Z_1, Z_2 \in \mathcal{D}$, $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$. On introduit :

$$\nu(Z_1, Z_2, t) := |\{\gamma \in \Gamma \mid d(Z_1, \gamma Z_2) \leqslant t\}|, \tag{12.5.1}$$

et

$$N(Z, t) := |\{\gamma \in \Gamma_V \backslash \Gamma \mid d(\gamma Z, \mathcal{D}_V) \leqslant t\}|. \tag{12.5.2}$$

Lemme 12.5.4. — *Il existe une constante $c_1(Z) > 0$ (qui dépend de Γ) telle que pour tout $t > 0$ on ait :*

$$N(Z, t) \leqslant c_1(Z) \int_0^{t+1} (1 + t^{2pq}) e^{2(p+q-1)\sqrt{m}t} dt.$$

De plus on peut choisir $c_1(Z)$ de manière à ce qu'elle soit bornée sur les compacts de $\mathcal{D}$.

Démonstration. — Soit ε un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et suffisamment petit pour que

$$B(Z, \varepsilon) \cap B(\gamma Z, \varepsilon) \neq \varnothing \Longrightarrow \gamma = e,$$

où $B(Z, \varepsilon)$ désigne la boule de rayon ε autour du point Z et e désigne l'élément neutre du groupe Γ. Dans la suite étant donnée une sous-variété $\mathcal{V}$ de $\mathcal{D}$, nous noterons $B(\mathcal{V}, r)$ l'ensemble des points de $\mathcal{D}$ à distance plus petite que r de $\mathcal{V}$. On a alors :

$$N(Z, t) \leqslant |\{[\gamma] \in \Gamma_V \backslash \Gamma \mid \gamma(B(Z, \varepsilon)) \subset B(\mathcal{D}_V, t + \varepsilon)\}|.$$

Mais, d'après (12.2.2), si $\gamma \in \Gamma$ vérifie que $\gamma(B(Z, \varepsilon)) \subset B(\mathcal{D}_V, \varepsilon)$ quitte à translater γ par un élément de Γ_V, on peut supposer que $\gamma(B(Z, \varepsilon)) \subset B(S, \varepsilon)$, où S est un domaine fondamental mesurable pour l'action de Γ_V sur $\mathcal{D}_V$. On déduit alors du Lemme 12.3.2 :

$$\begin{aligned} N(Z, t) &\leqslant \frac{\mathrm{vol}(B(S, t + \varepsilon))}{\mathrm{vol}(B(Z, \varepsilon))} \\ &\leqslant \frac{c}{\mathrm{vol}(B(P, \varepsilon))} \int_0^{t+\varepsilon} (1 + t^{2pq}) e^{2(p+q-1)\sqrt{m}t} dt. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du Lemme 12.5.4.

Remarquons que pour $r = p$, la démonstration du Lemme 12.5.4 permet d'estimer $\nu(Z_1, Z_2, t)$ uniformément par rapport à Z_2. On obtient, en effet, que pour tout $Z_2 \in \mathcal{D}$ et pour $t > 0$,

$$\nu(Z_1, Z_2, t) \leqslant c_1(Z_1) \int_0^{t+1} (1 + t^{2pq}) e^{2(p+q-1)\sqrt{q}t} dt. \tag{12.5.3}$$

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 12.5.5. — *Soit K un compact de $\mathcal{D}$. Il existe une constante $c_2(K)$ (qui dépend de Γ) telle que pour tout point $Z_1 \in K$, tout point $Z_2 \in \mathcal{D}$ et $t \geqslant 0$, on ait :*

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ d(Z_1,\gamma Z_2)\leqslant t}} e^{-(2(p+q-1+s)d(Z_1,Z_2)} \leqslant c_2(K)\left(1+\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^{2pq}}\right)\right),$$

pour tout $s > 0$.

Démonstration. — D'après (12.5.3), il existe une constante $c_1(K)$ telle que

$$d\nu(Z_1,Z_2,t) \leqslant c_1(K)(1+(t+1)^{2pq})e^{2(p+q-1)\sqrt{q}t}dt,$$

pour tout $Z_1 \in K$, $Z_2 \in \mathcal{D}$ et $t > 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ d(Z_1,\gamma Z_2)\leqslant t}} e^{-(2(p+q-1)\sqrt{q}+s)d(Z_1,Z_2)} &= \int_0^t e^{-(2(p+q-1)\sqrt{q}+2s-2)t}d\nu(Z_1,Z_2,t) \\ &= c_1(K)\int_0^t (1+(t+1)^{2pq})e^{-st}dt.\end{aligned}$$

Et la Proposition 12.5.5 découle d'un calcul simple et d'approximations grossières.

De manière analogue on démontre la proposition suivante.

Proposition 12.5.6. — *Soit ϕ une forme différentielle Γ_V-invariante de degré l sur $\mathcal{D}$. Si $\|\phi\| \leqslant c\,(A/B)^{(p+q-1)\sqrt{m}+\varepsilon}$, $m = \min\{r,q\}$ pour un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, alors la série*

$$\sum_{\Gamma_V\backslash\Gamma} \gamma^*\phi$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathcal{D}$.

Démonstration. — Commençons par remarquer que la norme $\|\gamma^*\phi\|$ au point Z est égale à la norme $\|\phi\|$ au point γZ. D'après l'hypothèse faite sur la norme de ϕ,

$$\begin{aligned}\sum_{\Gamma_V\backslash\Gamma}\|\gamma^*\phi\| &\leqslant c\sum_{\Gamma_V\backslash\Gamma}\left(\frac{A}{B}(\gamma Z)\right)^{(p+q-1)\sqrt{m}+\varepsilon} \\ &\leqslant \frac{c}{4^m}\sum_{\Gamma_V\backslash\Gamma} e^{-2((p+q-1)\sqrt{m}+\varepsilon)d(\gamma Z,\mathcal{D}_V)},\end{aligned}$$

d'après la Proposition 12.2.5. On conclut alors facilement comme pour la Proposition 12.5.5.

CHAPITRE 13

CONSTRUCTION DE LA FORME DUALE

13.1. Formes singulières de Bott et Chern

Soit X une variété complexe de dimension complexe m et $E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe de rang q. Supposons fixée une section holomorphe $v : X \to E$ telle que

(1) l'ensemble $X_v = \{x \in X \mid v(x) = 0\}$ des zéros de v soit non singulier de codimension q, et

(2) la section nulle de X dans E lui soit transverse.

Soit $C_q(E)$ la forme de Chern maximale associée à une structure hermitienne fixée sur E. Dans [**16**], Bott et Chern montrent :

Proposition 13.1.1. — *Il existe une forme différentielle τ de type $(q-1, q-1)$ sur $X - X_v$ et à valeurs réelles telle que*

$$\overline{\partial}\partial\tau = C_q(E).$$

La construction de τ que l'on va rappeler ci-dessous est explicite, remarquons que τ doit nécessairement avoir des singularités le long de X_v. Il est bien connu [**67**] que lorsque X est compacte $C_q(E)$ représente la classe de cohomologie duale à la classe d'homologie $[X_v]$. Nous verrons que dans le cas non compact (celui qui nous intéresse dans la suite) cette dualité subsiste en un sens plus faible.

Rappelons le formalisme de Bott et Chern. En un point $x \in X$, soient E_x et T_x^* respectivement la fibre de E au-dessus de x et la fibre de l'espace cotangent holomorphe T^* au-dessus de x. On a alors les fibrés $\Lambda_{rs}^{pq} \to X$, où

$$\Lambda_{rs}^{pq} = \Lambda^{pq}(E_x \oplus \overline{E}_x) \otimes \Lambda^{rs}(T_x^* \oplus \overline{T}_x^*).$$

Notons $\widetilde{\Lambda}_{rs}^{pq}$ l'espace des sections C^∞ de Λ_{rs}^{pq}. Une connexion affine sur E est définie par la donnée de deux opérateurs

$$\partial : \widetilde{\Lambda}_{00}^{10} \longrightarrow \widetilde{\Lambda}_{10}^{10}, \quad \overline{\partial} : \widetilde{\Lambda}_{00}^{10} \longrightarrow \widetilde{\Lambda}_{01}^{10}$$
$$d = \partial + \overline{\partial}$$

vérifiant

$$d(a+b) = da + db,\ a, b \in \widetilde{\Lambda}^{10}_{00}$$
$$d(fa) = df \otimes a + f da,\ f \in \widetilde{\Lambda}^{00}_{00}.$$

Une connexion affine d est dite de type $(1,0)$ si $\overline{\partial}(a) = 0$ pour toute section holomorphe a. Toute connexion affine définit bien évidemment de manière unique des opérateurs

$$\partial : \widetilde{\Lambda}^{pq}_{rs} \longrightarrow \widetilde{\Lambda}^{pq}_{(r+1)s}, \quad \overline{\partial} : \widetilde{\Lambda}^{pq}_{rs} \longrightarrow \widetilde{\Lambda}^{pq}_{r(s+1)}$$
$$d = \partial + \overline{\partial}$$

vérifiant les propriétés usuelles.

Soit $e = (e_1, \ldots, e_q)$ un champ de base local. Alors,

$$de = e\omega = (e_1, \ldots, e_q)(\omega_{ij}) d^2 e = e\Omega = (e_1, \ldots, e_q)(\Omega_{ij}), \tag{13.1.1}$$

où ω, Ω sont respectivement les matrices de connexion et de courbure.

Il découle de (13.1.1) que

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega. \tag{13.1.2}$$

Remarquons que les éléments de chaque fibre sont vus comme des vecteurs colonnes. La q-ième forme de Chern de la connexion affine est la forme différentielle $\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^q \det \Omega$.

Fixons maintenant une structure hermitienne sur E, *i.e.* un produit scalaire hermitien $\langle .,. \rangle_x$ sur chaque fibre E_x ($x \in X$) qui soit C^∞ en x. Étant donné un champ de base local $e = (e_1, \ldots, e_q)$, notons

$$H = (h_{ij}),\ h_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle. \tag{13.1.3}$$

La structure hermitienne définit une unique connexion de type $(1,0)$ pour laquelle on a

$$\omega = H^{-1}\partial H \ \text{ et } \ \Omega = \overline{\partial}(H^{-1}\partial H).$$

Afin de construire τ on se fixe une section holomorphe v du fibré E. Soient alors

$$\alpha = dv d\overline{v} = \overline{\alpha} \in \widetilde{\Lambda}^{11}_{11}$$
$$K = -e\Omega H^{-1\,t}\overline{e} = -(e_1 \ldots e_q)\Omega H^{-1} \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \vdots \\ \overline{e}_q \end{pmatrix} = \overline{K} \in \widetilde{\Lambda}^{11}_{11}$$
$$y_k = -\overline{y}_k = v\overline{v}\alpha^{k-1}K^{q-k} \in \widetilde{\Lambda}^{qq}_{q-1,q-1},\ 1 \leqslant k \leqslant q,$$
$$s_k = (\overline{v}dv)\alpha^{k-1}K^{q-k} \in \widetilde{\Lambda}^{qq}_{q,q-1},\ 1 \leqslant k \leqslant q,$$
$$w_k = \alpha^k K^{q-k} \in \widetilde{\Lambda}^{qq}_{qq},\ 0 \leqslant k \leqslant q,$$

et
$$\begin{aligned}
s'_k &= |v|^{-2k}s_k,\ y'_k = |v|^{-2k}y_k,\ w'_k = |v|^{-2k}w_k\\
s''_k &= s'_k + ky'_k\partial\log|v|^2,\ 1\leqslant k\leqslant q,\\
u_k &= w'_k + ks'_k\overline{\partial}\log|v|^2,\ 0\leqslant k\leqslant q,\\
\chi &= (\det H)^{-1/2}e_1\dots e_q,
\end{aligned}$$
où $|v|$ est la norme de v.

Lemme 13.1.2. — *On a les formules de récurrence :*
$$\partial y'_k = -s''_k - \frac{k-1}{q-k+1}s''_{k-1}, \tag{13.1.4}$$
$$\overline{\partial}s'_k = u_k + \frac{k}{q-k+1}u_{k-1}. \tag{13.1.5}$$

Démonstration. — Décomposons tout d'abord dv et d^2v dans la direction de v et de son supplémentaire orthogonal :
$$\begin{aligned}
dv &= \theta v + \beta, \quad \theta\in\widetilde{\Lambda}^{00}_{10},\ \beta\in\widetilde{\Lambda}^{10}_{10},\\
d^2v &= |v|^2(\phi v+\gamma), \quad \phi\in\widetilde{\Lambda}^{00}_{11},\ \gamma\in\widetilde{\Lambda}^{10}_{11},\\
\theta &= \partial\log|v|^2, \quad \phi+\overline{\phi}=0.
\end{aligned}$$
Par récurrence, on obtient
$$\begin{aligned}
\alpha^{k-1} &= \alpha_1^{k-1} + (k-1)\alpha_1^{k-2}(v\theta\overline{\beta}+\overline{v}\overline{\theta}\beta) + (k-1)^2\alpha_1^{k-2}v\overline{v}\theta\overline{\theta},\\
K^{q-k} &= K_1^{q-k} + (q-k)(v\overline{\gamma}+\overline{v}\gamma)K_1^{q-k-1}\\
&\qquad + (q-k)v\overline{v}K_1^{q-k-2}\left\{-K_1\phi + (q-k-1)\gamma\overline{\gamma}\right\},\\
\alpha_1 &= \beta\overline{\beta}.
\end{aligned}$$
D'où l'on déduit que
$$\begin{aligned}
s_k &= -k\theta y_k + (q-k)v\overline{v}\beta\overline{\gamma}\alpha_1^{k-1}K_1^{q-k-1},\\
\frac{1}{q-k}w_k &= v\overline{v}\alpha_1^kK_1^{q-k-2}\left\{-K_1\phi+(q-k-1)\gamma\overline{\gamma}\right\}\\
&\qquad + kv\overline{v}(-\theta\overline{\beta}\gamma + \overline{\theta}\beta\overline{\gamma})\alpha_1^{k-1}K_1^{q-k-1} + \frac{k^2}{q-k}v\overline{v}\theta\overline{\theta}\alpha_1^{k-1}K_1^{q-k}.
\end{aligned}$$
Puisque $dK=0$ et $d^2v\in\widetilde{\Lambda}^{10}_{11}$,
$$\partial y_k = -s_k - \frac{k-1}{q-k+1}|v|^2s_{k-1} - \frac{(k-1)^2}{q-k+1}|v|^2y_{k-1}\partial\log|v|^2.$$
D'où il découle l'égalité (13.1.4). De même, on a
$$\frac{1}{|v|^2}(\overline{\partial}s_k - w_k) = \frac{k}{q-k+1}w_{k-1} + \frac{k(k-1)}{q-k+1}s_{k-1}\overline{\partial}\log|v|^2.$$
Ce qui implique (13.1.5) et conclut la démonstration du Lemme 13.1.2.

Remarquons qu'il découle de la démonstration du Lemme 13.1.2 que

$$s''_q = 0 \text{ et } u_q = 0. \tag{13.1.6}$$

On peut maintenant définir la forme singulière τ par :

$$\begin{aligned} c\tau\chi\overline{\chi} = -q\sum_{k=1}^{q-1}(-1)^k \binom{q-1}{k-1}\left(\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{q-1}\right) y'_k \\ - q\sum_{k=1}^{q-1}(-1)^k \binom{q-1}{k-1} y'_k \log|v|^2, \end{aligned} \tag{13.1.7}$$

où $c = (-1)^{q^2/2-1}q!(2\pi)^q$. On introduit également les formes singulières ψ_k, $1 \leqslant k \leqslant q$, et ψ définies par :

$$c\psi_k\chi\overline{\chi} = s'_k, \ 1 \leqslant k \leqslant q \tag{13.1.8}$$

et

$$\psi = \sum_{k=1}^{q}(-1)^k \binom{q}{k} \psi_k. \tag{13.1.9}$$

Proposition 13.1.3. — *Sur $X - X_v$, les formes τ et ψ sont lisses (non singulières) et vérifient $\partial\tau = \psi$ et $\overline{\partial}\psi = C_q(E)$.*

Démonstration. — On sait que

$$\partial(\chi\overline{\chi}) = \overline{\partial}(\chi\overline{\chi}) = 0.$$

L'identité $\partial\tau = \psi$ sur $X - X_v$ découle donc de (13.1.4), (13.1.6) et (13.1.9).

L'équation (13.1.5) implique alors

$$\overline{\partial}\sum_{k=1}^{q}(-1)^k \binom{q}{k} s'_k = -K^q.$$

Puisque $C_q(E) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^q \det(\Omega_{ij})$,

$$K^q = (-1)^{q^2/2}q!(2\pi)^q C_q(E)\chi\overline{\chi}.$$

Et l'identité $\overline{\partial}\psi = C_q(E)$ sur $X - X_v$ s'en déduit.

La signification géométrique de la forme différentielle ψ est contenue dans la proposition suivante.

Proposition 13.1.4. — *Soient $T_\varepsilon \subset X$ un voisinage tubulaire de rayon ε autour de X_v et η une $(m-q, m-q)$-forme sur X. Alors,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial T_\varepsilon} \psi\wedge\eta = -\int_{X_v}\eta.$$

Démonstration. — Ce résultat est local, on peut donc supposer que $X = \mathbb{C}^m$, $E = \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^q \to X$ est le fibré produit et que $v(Z_1, \ldots, Z_m) = (Z_1, \ldots, Z_q)$. Supposons maintenant que dans ces coordonnées la structure hermitienne soit donnée par la matrice $H = (h_{ij})$. Choisissons un champ local de bases orthonormées $(e_1, \ldots, e_q)$. D'après la construction ci-dessus, la forme différentielle ψ a un pôle d'ordre $2q-1$ le long de X_v qui apparaît dans le terme ψ_q. Exprimons la section v dans notre champ de base locale :

$$v = \sum_{\lambda=1}^{q} f_\lambda e_\lambda$$

$$dv = \sum_{\lambda=1}^{q} (df_\lambda) e_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} (\omega_{\lambda j} f_j) e_\lambda$$

et il découle de (13.1.8) que la forme ψ_q est égale à

$$(-1)^{-q^2/2+1+q} \frac{(q-1)!}{(2\pi)^q (f)^{2q}} (df_1 \wedge \cdots \wedge df_q) \Big(\sum_\lambda (-1)^{\lambda-1} \overline{f}_\lambda d\overline{f}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\overline{f}_\lambda} \wedge \cdots \wedge d\overline{f}_q \Big)$$

plus des termes d'ordres inférieurs. Il s'ensuit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_q \wedge \eta = (-1)^{1+q} \int_{X_v} \eta$$

et donc que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial T_\varepsilon} \psi \wedge \eta = (-1)^q \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial T_\varepsilon} \psi_q \wedge \eta = - \int_{X_v} \eta.$$

13.2. Construction de la forme duale

On revient aux notations du chapitre précédent, soit $e_1, \ldots, e_n$ la base standard de $\mathbb{C}^n$, $n = p + q$. Étant donné un entier $1 \leqslant r < p$, soit V un sous-espace positif de dimension r pour la forme hermitienne Q et $\mathcal{D}_V$ et G_V comme au chapitre précédent. Soit encore Γ un sous-groupe discret et sans torsion de G et $\Gamma_V = \Gamma \cap G_V$. On suppose de plus :

(1) $\Gamma \backslash \mathcal{D}$ compacte, et
(2) $\Gamma_V \backslash \mathcal{D}_V$ compacte.

Comme au chapitre précédent, il sera plus commode dans la suite de supposer que le sous-espace V est le sous-espace engendré par $e_{p-r+1}, \ldots, e_p$. Le groupe G_V agit sur $\mathcal{D} \times M_{qr}(\mathbb{C})$ par :

$$g(z, M) = (gz, {}^t j(g, z)^{-1} M {}^t u).$$

En quotientant par le groupe Γ_V, on obtient un fibré vectoriel $E_V = \mathcal{D} \times_{\Gamma_V} M_{qr}(\mathbb{C})$ au-dessus de $\Gamma_V \backslash \mathcal{D}$. Ce fibré est naturellement muni de deux métriques hermitiennes, à savoir :

$$\langle M_1, M_2 \rangle_Z = \operatorname{tr}({}^t \overline{M}_1 h_Z M_2)$$

et

$$\langle M_1, M_2 \rangle_{\widetilde{Z}} = \operatorname{tr}({}^t \overline{M}_1 \widetilde{h}_Z M_2),$$

où h_Z et $\widetilde{h}_Z$ sont les matrices du Lemme 12.2.3. D'après ce dernier, la métrique $\langle .,. \rangle_Z^{\sim}$ est G-invariante et la métrique $\langle .,. \rangle_Z$ est G_V-invariante. Dans cette section nous ne nous servirons que de la métrique $\langle .,. \rangle^{\sim}$. Enfin, le fibré E_V nous arrive équipé d'une section holomorphe canonique $v : \Gamma_V \backslash \mathcal{D} \to E_V$

$$v(Z) = (Z, {}^tZ_2).$$

Il est clair que $\Gamma_V \backslash \mathcal{D}_V = \{Z \in \Gamma \backslash \mathcal{D} \mid v(Z) = 0\}$. On peut donc appliquer les résultats de la section précédente.

On verra $M_{qr}(\mathbb{C})$ comme $M_r(M_q(\mathbb{C}))$. Étant donné une matrice carrée $A \in M_q(\mathbb{C})$, nous notons $A^{[r]}$ la matrice carrée diagonale par bloc constituée de r fois le bloc A. Alors la métrique hermitienne $\langle .,. \rangle_Z^{\sim}$, de la fibre au-dessus de Z, est donnée par la matrice hermitienne définie positive $H = \widetilde{h}_Z^{[r]}$ par rapport au repère mobile standard $e = (e_1, \dots, e_r)$, où chaque e_i est un vecteur $(e_{1i}, e_{2i}, \dots, e_{qi})$. Un calcul facile montre :

$$d\widetilde{h}_Z = \widetilde{h}_Z \omega_1 + {}^t\overline{\omega}_1 \widetilde{h}_Z, \; \omega_1 = d{}^tZ\overline{Z}(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1}.$$

Soit $\omega = \omega_1^{[r]}$. On choisit maintenant une connexion métrique telle que $de = e\omega$. La forme de courbure est alors donnée par

$$\Omega = \Omega_1^{[r]}, \; \Omega_1 = -d{}^tZ(I_p - \overline{Z}{}^tZ)^{-1} d\overline{Z}(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1}.$$

Lemme 13.2.1. — *Si g est un élément de G, on a :*

$$g^*\omega_1 = {}^tj(g,Z)^{-1}\omega_1 {}^tj(g,Z) + {}^tj(g,Z)^{-1} d{}^tj(g,Z)$$

et

$$g^*\Omega_1 = {}^tj(g,Z)^{-1}\Omega_1 {}^tj(g,Z).$$

Démonstration. — Rappelons que

$$I_q - {}^tZ\overline{Z} = {}^tj(g,Z)(I_q - {}^t(gZ)\overline{gZ})\overline{j(g,Z)}.$$

En différentiant cette égalité, on obtient :

$$-d{}^tZ\overline{Z} = d{}^tj(g,Z)(I_q - {}^t(gZ)\overline{gZ})\overline{j(g,Z)} - j(g,Z)^t d(gZ)^t \overline{gZ}\overline{j(g,Z)},$$

puis

$$d^t(gZ)\overline{gZ} = {}^tj(g,Z)^{-1} d{}^tZ\overline{Z}\,\overline{j(g,Z)}^{-1} + {}^tj(g,Z)^{-1} d{}^tj(g,Z)(I_q - {}^t(gZ)\overline{gZ}),$$

et donc

$$d^t(gZ)\overline{gZ}(I_q - {}^t(gZ)\overline{gZ})^{-1} = {}^tj(g,Z)^{-1} d{}^tZ\overline{Z}(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1}\,{}^tj(g,Z) + {}^tj(g,Z)^{-1} d{}^tj(g,Z).$$

Ce qui démontre la première identité annoncée par le Lemme 13.2.1. La deuxième identité s'obtient alors en différenciant la première et en utilisant que $\Omega_1 = d\omega_1 + \omega_1 \wedge \omega_1$.

Dans la suite, pour simplifier les notations, notons

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{q1} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{1r} & \dots & e_{qr} \end{pmatrix}.$$

Dans le repère mobile standard, on a :

$$\begin{aligned} v &= \operatorname{tr}\left(E^t Z_2\right), \\ dv &= \operatorname{tr}\left(Ed^tZ\overline{Z}(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1t}Z_2 + Ed^tZ_2\right), \\ K &= \operatorname{tr}\left(Ed^tZ(I_p - \overline{Z}^tZ)^{-1}d\overline{Z}^t\overline{E}\right), \\ |v|^2 &= \operatorname{tr}\left(Z_2(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1t}\overline{Z}_2\right). \end{aligned}$$

Les formes τ, ψ_k et ψ de la section précédente sont bien définies par les formules (13.1.7), (13.1.8) et (13.3.4). Pour se rappeler dans la suite que ces formes sont obtenues en considérant le produit hermitien $\langle .,. \rangle^\sim$ dans la fibre, nous préférons les noter $\widetilde{\tau}$, $\widetilde{\psi}_k$ et $\widetilde{\psi}$.

Proposition 13.2.2. — *Les formes $\widetilde{\psi}_k$ et $\widetilde{\psi}$ sont G_V-invariantes.*

Démonstration. — Notons $v(E,Z)$, $dv(E,Z)$, $K(E,Z)$ et $\chi(E,Z)$ les fonctions v, dv, K et χ dont on pointe la dépendance en les variables E et Z. D'après (12.2.2) et le Lemme 12.2.3, il est clair que, si $g \in G_V$,

$$v(E, gZ) = v({}^tuE^tj(g,Z)^{-1}, Z)$$

et

$$\chi(E, gZ) = |\det j(g,Z)|^{-r}\chi(E,Z).$$

Puis il découle du Lemme 13.2.1 que

$$dv(E, gZ) = dv({}^tuE^tj(g,Z)^{-1}, Z)$$

et

$$K(E, gZ) = K({}^tuE^tj(g,Z)^{-1}, Z).$$

Puisque $|v|$ est G_V-invariant, d'après la formule pour s'_k donnée dans la section précédente et les identités ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} s'_k(E, gZ) &= s'_k({}^tuE^tj(g,Z)^{-1}, Z) \\ &= |\det u|^{2q} |\det j(g,Z)|^{-2r} s'_k(E,Z) \\ &= |\det j(g,Z)|^{-2r} s'_k(E,Z); \end{aligned}$$

et donc

$$g^*\widetilde{\psi}_k = \widetilde{\psi}_k$$

pour tout $g \in G_V$. Puisque par définition, $\widetilde{\psi}$ est une combinaison linéaire de $\widetilde{\psi}_k$, la Proposition 13.2.2 est démontrée.

Rappelons maintenant que, d'après le Lemme 12.2.6,

$$\frac{B}{A} = \det\{I_r + Z_2(I_q - {}^t Z\overline{Z})^{-1 t}Z_2\}.$$

La matrice $Z_2(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1t}Z_2$ est positive (au sens large), notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres (réelles et positives). Remarquons que $|v|^2 = \operatorname{tr}(Z_2(I_q - {}^tZ\overline{Z})^{-1t}Z_2) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$. On en déduit que

$$\frac{A}{B} = \prod_{i=1}^{r}(1+\lambda_i)^{-1} \geqslant \prod_{i=1}^{r}(1-\lambda_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{r}\lambda_i = 1 - |v|^2,$$

autrement dit

$$\frac{C}{B} \leqslant |v|^2, \quad C = B - A. \tag{13.2.1}$$

De plus, la fonction $(C/B)/|v|^2$ tend vers 1 lorsque v tend vers 0.

D'après la Proposition 13.2.2, pour calculer les normes de $\widetilde{\psi}_k$ et $\widetilde{\psi}$ on peut supposer que $Z_1 = 0$. Il découle alors du Lemme 12.5.1 et de (13.2.1) que

$$\|\widetilde{\psi}_k\| \prec \left(\frac{B}{C}\right)^{k-1/2}\left(\frac{B}{A}\right)^{r+rq+k-1}$$

ce qui implique que

$$\|\widetilde{\psi}\| \prec \left(\frac{B}{C}\right)^{rq-1/2}\left(\frac{B}{A}\right)^{r+2rq-1}, \tag{13.2.2}$$

où dans les deux dernières expressions, le signe $\prec$ signifie que l'on a une inégalité $\leqslant$ à une constante positive près.

Étant donné un nombre complexe s, soit $h_s(t)$ la fonction définie par

$$h_s(t) = -\int_t^{\infty} x^{-s}(x-r)^{qr-1}dx \quad (\mathrm{Re}(s) > qr).$$

On vérifie facilement les identités suivantes :

(1) $h_s'(t) = t^{-s}(t-r)^{qr-1}$, et
(2) $h_s(r) = -r^{qr-s}\Gamma(s-qr)\Gamma(qr)/\Gamma(s)$.

On peut maintenant définir la forme différentielle ω_s par

$$\omega_s = \frac{-1}{h_s(r)} d\left(h_s(r+|v|^2)\widetilde{\psi}\right). \tag{13.2.3}$$

D'après l'expression de h_s',

$$\omega_s = \frac{-1}{h_s(r)}\left\{2(r+|v|^2)^{-s}|v|^{2rq-1}d|v| \wedge \widetilde{\psi} + h_s(r+|v|^2)d\widetilde{\psi}\right\}.$$

Il est clair que les formes $|v|^{2rq-1}\widetilde{\psi}_k \wedge d|v|$ $(k \leqslant rq-1)$ sont lisses (non singulières) et d'après (13.1.6), la forme $|v|^{2rq-1}d|v| \wedge \widetilde{\psi}_{rq}$ est, elle aussi, lisse. Par construction $d\widetilde{\psi}$

est lisse aussi. On en déduit donc que la forme ω_s est bien lisse (non singulière). De plus, il découle du Lemme 12.2.6 et de (13.2.2) que

$$\|\omega_s\| \prec \left(\frac{B}{A}\right)^{r+q+2rq+1-r^{-1}\operatorname{Re}(s)}. \tag{13.2.4}$$

D'après la Proposition 13.2.2, la forme ω_s est G_V-invariante. On peut montrer que la forme ω_s, pour $\operatorname{Re}(s) \gg 0$, peut se voir comme la forme duale à $\Gamma_V\backslash\mathcal{D}_V$ dans $\Gamma_V\backslash\mathcal{D}$. Nous allons préciser un peu ce résultat.

Soit d'abord μ une k-forme *harmonique* sur $C_V := \Gamma_V\backslash\mathcal{D}_V$. On note $*_0$ l'opérateur $*$ de Hodge de la variété C_V relativement à sa métrique riemannienne. La forme $\pi^*(*_0\mu)$ est alors une $(2(p-r)q-k)$-forme fermée sur $\mathcal{D}$. On va en fait construire la forme duale (dans un sens L^2) à la forme $\pi^*(*_0\mu)$.

Afin de décrire ce que cela signifie, considérons une forme lisse quelconque ϕ sur $\Gamma_V\backslash\mathcal{D}$ de degré k. Supposons que

$$\|\phi\| \prec \left(\frac{A}{B}\right)^{N} \tag{13.2.5}$$

pour un certain entier N. Remarquons que la condition (13.2.5) est vérifiée par tout forme bornée pour $N=0$. D'après (13.2.4) et le Lemme 12.3.3, l'intégrale

$$\int_{\Gamma_V\backslash\mathcal{D}} (\omega_s \wedge \pi^*(*_0\mu)) \wedge \phi$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re}(s) \gg 0$, la constante ne dépendant que de N.

Théorème 13.2.3. — *Soit ϕ une forme fermée, lisse, de degré k sur $\Gamma_V\backslash\mathcal{D}$ et vérifiant la condition (13.2.5). Alors,*

$$\int_{\Gamma_V\backslash\mathcal{D}} (\omega_s \wedge \pi^*(*_0\mu)) \wedge \phi = \int_{C_V} (*_0\mu) \wedge \phi \quad (\operatorname{Re}(s) \gg 0).$$

Démonstration. — La variété C_V est une variété riemannienne complète. Soit x_0 un point fixe de C_V. Pout $t>0$, soit B_t la boule fermée de centre x_0 et de rayon t. Soit ∂B_t son bord et $\operatorname{vol}(\partial B_t)$ son volume par rapport à la métrique induite. Il est clair que

$$\int_0^\infty \operatorname{vol}(\partial B_t)dt = \operatorname{vol}(C_V) < \infty.$$

D'où il découle que

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{vol}(\partial B_t) = 0. \tag{13.2.6}$$

Étant donné deux réels strictement positifs $t, \varepsilon > 0$ et un réel $l \gg 0$, soit $N(t,\varepsilon,l)$ le sous-ensemble de $\Gamma_V\backslash\mathcal{D}$ constitué des projetés des points $Z = \left(\begin{smallmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{smallmatrix}\right)$ tels que

(1) $\left(\begin{smallmatrix} Z_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in B_t$,
(2) $|v(Z)| \geqslant \varepsilon$,
(3) la distance, $d(Z,\mathcal{D}_V)$ de Z à $\mathcal{D}_V$ est inférieure ou égale à l.

La condition (13.2.5) assure la convergence absolue de l'intégrale et donc que

$$\int_{\Gamma_V\backslash\mathcal{D}} (\omega_s \wedge \pi^*(*_0\mu)) \wedge \phi = \lim_{t\to\infty} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ l\to\infty}} \int_{N(t,\varepsilon,l)} (\omega_s \wedge \pi^*(*_0\mu)) \wedge \phi. \tag{13.2.7}$$

Il est clair que

$$\partial N(t,\varepsilon,l) = \mathcal{F}_\varepsilon \cup \mathcal{F}_l \cup \mathcal{F}_\partial,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon &= \{Z \in N(t,\varepsilon,l) \mid |v(Z)| = \varepsilon\}, \\ \mathcal{F}_l &= \{Z \in N(t,\varepsilon,l) \mid d(Z,\mathcal{D}_V) = l\}, \\ \mathcal{F}_\partial &= \{Z \in N(t,\varepsilon,l) \mid \left(\begin{smallmatrix} Z_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \partial B_t\}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$(\omega_s \wedge \pi^*(*_0\mu)) \wedge \phi = d\left(\frac{-h_s(r+|v|^2)}{h_s(r)} (\widetilde{\psi} \wedge \pi^*(*_0\mu)) \wedge \phi\right).$$

Le Théorème de Stokes implique donc :

$$\begin{aligned} \int_{N(t,\varepsilon,l)} (\omega_s \wedge \pi^*(*_0\mu)) \wedge \phi = &- \int_{\mathcal{F}_l} \frac{h_s(r+|v|^2)}{h_s(r)} \widetilde{\psi} \wedge \pi^*(*_0\mu) \wedge \phi \\ &- \int_{\mathcal{F}_\varepsilon} \frac{h_s(r+|v|^2)}{h_s(r)} \widetilde{\psi} \wedge \pi^*(*_0\mu) \wedge \phi \\ &- \int_{\mathcal{F}_\partial} \frac{h_s(r+|v|^2)}{h_s(r)} \widetilde{\psi} \wedge \pi^*(*_0\mu) \wedge \phi. \end{aligned}$$

Notons I_l, I_ε et I_∂ les trois intégrales du membre de droite de l'égalité ci-dessus. D'après (13.2.2), on peut supposer que

$$\|h_s(r+|v|^2)\widetilde{\psi} \wedge \pi^*(*_0\mu) \wedge \phi\| \prec \left(\frac{B}{C}\right)^{rq-1/2} \left(\frac{A}{B}\right)^a$$

avec $a \gg 0$. Puis, d'après le Lemme 12.3.2, il existe une constante $b > 0$ telle que $\mathrm{vol}(\mathcal{F}_l) \prec e^{bl}\mathrm{vol}(B_t)$. Enfin, il découle de la Proposition 12.2.5 que $A/B \prec e^{-2d(Z,\mathcal{D}_V)}$. On obtient donc que

$$I_l \prec \mathrm{vol}(B_t) e^{(b-2a)l}.$$

Puisque $a \gg 0$, il en découle que

$$\lim_{l\to\infty} I_l = 0. \tag{13.2.8}$$

La démonstration de la Proposition 13.1.4 implique

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = -\int_{B_t} (*_0\mu) \wedge \phi. \tag{13.2.9}$$

Afin d'estimer $|I_\partial|$, nous commençons par intégrer le long de la fibre. Soit η la forme volume de ∂B_t. D'après (12.3.8), $\|\eta \wedge dv_F\| \succ (A/B)^c$ pour une certaine constante c.

Puisque $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, il découle de (13.2.2) et de la démonstration du Lemme 12.3.3 que

$$|I_\partial| \prec \mathrm{vol}(\partial B_t). \tag{13.2.10}$$

Finalement, il découle facilement de (13.2.6)-(13.2.10) que

$$\int_{\Gamma_V\backslash\mathcal{D}} (\omega_s \wedge \pi^*(*_0\mu)) \wedge \phi = \lim_{t\to\infty} \int_{B_t} (*_0\mu)\wedge\phi = \int_{C_V} (*_0\mu)\wedge\phi.$$

Nous notons :

$$\Omega(s) = \omega_s \wedge \pi^*(*_0\mu), \tag{13.2.11}$$

que l'on appellera *forme « duale »* associée à μ dans M_V.

Dans le cas de l'espace hyperbolique complexe nous aurons besoin de nous assurer que la forme $\Omega(s)$ peut-être choisie ∂ et $\overline{\partial}$ fermée. C'est l'objet de la section suivante.

13.3. Précisions dans le cas hyperbolique complexe

Dans la section précédente, on a construit un fibré vectoriel E_V au-dessus de $M_V = \Gamma_V\backslash\mathcal{D}$. On a de plus équipé ce fibré de deux métriques hermitiennes $\langle.,.\rangle$ et $\langle.,.\rangle^\sim$.

La classe de Chern du fibré E_V est un élément $\boldsymbol{c} \in H^{2r}(M_V)$ dual au cycle C_V dans M_V (au sens de la première section). Étant donné un repère mobile holomorphe local $e = (e_1, \ldots, e_r)$, soient

$$H = (h_{ij}),\ h_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle \qquad \text{et} \qquad \widetilde{H} = (\widetilde{h}_{ij}),\ \widetilde{h}_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle^\sim.$$

Chaque structure hermitienne détermine de manière unique une connexion de type $(1,0)$, dont les formes de connexion et de courbure sont, d'après la première section, données par :

$$\omega = H^{-1}\partial H \quad \text{et} \quad \Omega = \overline{\partial}(H^{-1}\partial H),$$
$$\widetilde{\omega} = \widetilde{H}^{-1}\partial\widetilde{H} \quad \text{et} \quad \widetilde{\Omega} = \overline{\partial}(\widetilde{H}^{-1}\partial\widetilde{H}).$$

Nous supposons dorénavant $q = 1$ (autrement dit que $\mathcal{D}$ est l'espace hyperbolique complexe de dimension p). Les formes de connexions et de courbures pour ces deux métriques évaluées au point $\left(\begin{smallmatrix}0\\ Z_2\end{smallmatrix}\right)$ sont donc :

$$\begin{cases}\omega = (0)I_r \\ \Omega = (\partial\overline{\partial}\log B)I_r\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\widetilde{\omega} = \{-(B/A)\,\partial\,(B/A)\}\,I_r \\ \widetilde{\Omega} = (\partial\overline{\partial}\log A)I_r.\end{cases}$$

Il est connu (*cf.* [**47**]) que les $2r$-formes

$$\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^r \det\Omega \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^r \det\widetilde{\Omega}$$

représentent toutes deux la classe de Chern $\boldsymbol{c} \in H^{2r}(M_V)$.

En suivant la méthode de Bott et Chern rappelée dans la première section, Tong et Wang [**98**] construisent deux formes ψ et $\widetilde{\psi}$ sur $M_V - C_V$ telles que

(1) on a :

$$\overline{\partial}\psi = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^r \det\Omega \quad \text{et} \quad \overline{\partial}\widetilde{\psi} = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^r \det\widetilde{\Omega},$$

(2) et en cohomologie :

$$\overline{\partial}[\psi] = \boldsymbol{c} - [F] \quad \text{et} \quad \overline{\partial}[\widetilde{\psi}] = \boldsymbol{c} - [F].$$

En suivant Tong et Wang, on remarque que si

$$a_r = 1 - \left(1 - \frac{B}{A}\right)^r \text{ et } C_r = \sqrt{-1}\,(2\pi)^r$$

alors

$$\begin{aligned}(13.3.1)\quad \pi^*(*_0\mu)\wedge\psi - a_r\pi^*(*_0\mu)\wedge\widetilde{\psi} = -\frac{1}{C_r}\sum_{t=0}^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{r-1-t}(-1)^{r+t+\lambda+1}\\ \cdot\binom{r}{t+\lambda}\left(\frac{A}{B}\right)^{t+\lambda-1-r}\pi^*(*_0\mu)\wedge\partial\left(\frac{A}{B}\right)(\partial\overline{\partial}\log A)^{t-1}(\partial\overline{\partial}\log B)^{r-t}\end{aligned}$$

est une forme non singulière.

Pour pouvoir former la série thêta de cette forme nous voulons obtenir une forme ∂-fermée cohomologue à cette dernière multipliée par un poids $(A/B)^s$. Comme dans [**98**] on introduit la forme suivante :

$$\begin{aligned}(13.3.2)\quad \phi(s) = \frac{(A/B)^s}{s}\pi^*(*_0\mu)\wedge\psi + \Big[\sum_{\lambda=1}^{r}\frac{(A/B)^{s-\lambda}}{s-\lambda}(-1)^\lambda\binom{r}{t+\lambda}\Big]\pi^*(*_0\mu)\wedge\widetilde{\psi}\\ +\frac{(-1)^{r-1}}{C_r}\sum_{t=1}^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{r-1-t}(-1)^{t+\lambda}\binom{r}{t+\lambda}\frac{(A/B)^{s+t+\lambda-1-r}}{s+t+\lambda-1-r}\\ \pi^*(*_0\mu)\wedge\partial\,(A/B)\,(\partial\overline{\partial}\log A)^{t-1}(\partial\overline{\partial}\log B)^{r-t}.\end{aligned}$$

La forme $\phi(s)$ est ∂-fermée et sa $\overline{\partial}$-dérivée dans $M_V - C_V$ s'étend de manière lisse à M_V. On a :

$$\begin{aligned}(13.3.3)\quad \overline{\partial}\phi(s) = \frac{1}{C_r}\Big\{\frac{(A/B)^s}{s}\pi^*(*_0\mu)\wedge(\partial\overline{\partial}\log A)^r\\ +\Big[\sum_{\lambda=1}^{r}(-1)^\lambda\binom{r}{t+\lambda}\frac{(A/B)^{s-\lambda}}{s-\lambda}\Big]\pi^*(*_0\mu)\wedge(\partial\overline{\partial}\log B)^r\\ +(-1)^r\sum_{t=1}^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{r-1-t}(-1)^{t+\lambda}\binom{r}{t+\lambda}\frac{(A/B)^{s+t+\lambda-1-r}}{s+t+\lambda-1-r}\\ \pi^*(*_0\mu)\wedge\partial\overline{\partial}\,(A/B)\,(\partial\overline{\partial}\log A)^{t-1}(\partial\overline{\partial}\log B)^{r-t}\Big\}.\end{aligned}$$

La démonstration de la Proposition 12.4.3 implique le lemme suivant.

Lemme 13.3.1. — *La norme $\|\partial\overline{\partial}\log A\|$ est constante et $\|\partial\overline{\partial}\log B\|$ est bornée par une constante. En particulier, on a :*

$$\|\overline{\partial}\phi(s)\|,\ \|\phi(s)\| \prec \left(\frac{A}{B}\right)^{\mathrm{Re}(s)-r+\frac{2p-2r-k}{2}}.$$

Proposition 13.3.2. — *Soit η une k-forme fermée et bornée sur M_V. Alors pour $\mathrm{Re}(s) > 2r + \frac{k}{2}$, la forme $\eta \wedge \overline{\partial}\phi(s)$ est intégrable sur M_V, et*

$$\int_{M_V} \eta \wedge \overline{\partial}\phi(s) = \kappa(s) \int_{C_V} \eta \wedge *_0\mu$$

avec

$$\kappa(s) = \frac{(-1)^r r!}{s(s-1)\cdots(s-r)}.$$

Démonstration. — On note toujours $\mathcal{F}_t$ l'image de $\mathcal{F}_t$ dans M_V. Sur $M_V - C_V$, $\eta \wedge \overline{\partial}\phi(s) = \overline{\partial}\{\eta \wedge \phi(s)\}$. La formule de Stokes implique donc :

$$\int_{M_V} \eta \wedge \overline{\partial}\phi(s) = \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \left\{\int_{\mathcal{F}(R)} \eta \wedge \phi(s) - \int_{\mathcal{F}(r)} \eta \wedge \phi(s)\right\}.$$

Or sur C_V, $\left(\frac{A}{B}\right) \equiv 1$ donc l'égalité (13.3.2) et la propriété 2 de ψ et $\widetilde{\psi}$ impliquent :

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\int_{\mathcal{F}(r)} \eta \wedge \phi(s) &= -\left\{\frac{1}{s} + \sum_{\lambda=1}^{r}(-1)^{\lambda}\frac{\binom{r}{t+\lambda}}{s-\lambda}\right\}\int_F \eta \wedge *_0\mu \\ &= -\frac{(-1)^r r!}{s(s-1)\cdots(s-r)}\int_F \eta \wedge *_0\mu.\end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que $\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathcal{F}(R)} \eta \wedge \phi(s) = 0$. Mais pour $\mathrm{Re}(s) \geqslant 2r + \frac{k}{2} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) d'après la Proposition 12.2.5 et le Lemme 13.3.1, en un point de $\mathcal{F}(R)$ on a :

$$\|\eta \wedge \phi(s)\| \prec e^{-2(p+\varepsilon)R}.$$

On conclut alors grâce au Lemme 12.5.4.

On définit donc :

$$\Psi(s) = \frac{(-1)^r s(s-1)\cdots(s-r)}{r!}\overline{\partial}\phi(s). \tag{13.3.4}$$

On peut montrer (*cf.* [**98**]) qu'à un cobord près dans la formule de $C_r\overline{\partial}\phi(s)$ donnée par (13.3.3), on peut remplacer la double somme par

$$(-1)^r\sum_{t=1}^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{r-1-t}(-1)^{t+\lambda+1}\binom{r}{t+\lambda}\frac{(A/B)^{s+t+\lambda-r}}{s+t+\lambda-r}\pi^*(*_0\mu)\wedge(\partial\overline{\partial}\log A)^{t-r}(\partial\overline{\partial}\log B)^{r-t+1}$$
$$+(-1)^r\sum_{t=1}^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{r-1-t}(-1)^{t+\lambda}\binom{r}{t+\lambda}\frac{(A/B)^{s+t+\lambda-r}}{s+t+\lambda-r}\pi^*(*_0\mu)\wedge(\partial\overline{\partial}\log A)^{t}(\partial\overline{\partial}\log B)^{r-t}.$$

On obtient ainsi une forme cohomologue à $\Psi(s)$:

$$(13.3.5)\quad \Omega(s)=\frac{(-1)^r s(s-1)\cdots(s-r)}{C_r r!}\sum_{\lambda=0}^{r}(-1)^\lambda\binom{r}{t+\lambda}\frac{(A/B)^{s-\lambda}}{s-\lambda}$$
$$\pi^*(*_0\mu)\wedge(\partial\overline{\partial}\log A)^{r-\lambda}(\partial\overline{\partial}\log B)^{\lambda},$$

qui reste ∂ et $\overline{\partial}$ fermée. Dans la suite nous appellerons $\Omega(s)$ la *forme « duale »* associée à μ dans M_V.

Concluons cette section en remarquant qu'il est également possible de construire une famille de formes duales ∂ et $\overline{\partial}$ fermées dans le cas général des espaces symétriques associés au groupe $\mathrm{SU}(p,q)$. Esquissons cette construction. Revenons aux notations de la section précédente. Notons ψ_k, $\psi, \ldots$ (resp. $\widetilde{\psi}$, $\widetilde{\psi}, \ldots$) les formes construites en suivant la première section et pour la métrique hermitienne $\langle.,.\rangle$ (resp. $\langle.,.\rangle^\sim$). Il est facile de vérifier que :

$$(13.3.6)\qquad \widetilde{\psi}=\psi-\sum_{k=1}^{q}\binom{q}{k}\left(\frac{C}{A}\right)^k\psi_k.$$

En développant la formule (13.3.6), on obtient :

$$(13.3.7)\quad \widetilde{\psi}=\left[\sum_{j=1}^{q}\binom{q}{j}(-1)^j(B/A)^j\right]\psi$$
$$-\sum_{k=1}^{q-1}\left(\binom{q}{k}\sum_{l=1}^{q-k}\binom{q-k}{l}(-1)^l(B/A)^{l+k}\right)\left((C/B)^k\psi_k\right).$$

Ce qui nous conduit à définir la forme dépendant d'un paramètre $s\in\mathbb{C}$:

$$(13.3.8)\quad \Phi(s)=\frac{(A/B)^{s+q}}{s+q}\widetilde{C}(E)-\left[\sum_{j=1}^{q}\binom{q}{j}(-1)^j\frac{(A/B)^{s+q-j}}{s+q-j}\right]C(E)$$
$$+\sum_{k=1}^{q-1}\left(\binom{q}{k}\sum_{l=1}^{q-k}\binom{q-k}{l}(-1)^l\frac{(A/B)^{s+q-l-k}}{s+q-l-k}\right)\overline{\partial}\left((C/B)^k\psi_k\right).$$

Pour $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$, la forme $\Phi(s)$ est lisse sur $\mathcal{D}$ et ∂ et $\overline{\partial}$ fermée. Nous montrons finalement :

Proposition 13.3.3. — *Soit η une $(q(p-1),q(p-1))$-forme ∂ et $\overline{\partial}$ fermée sur $\Gamma_V\backslash\mathcal{D}$ de norme bornée. Alors, pour* $\mathrm{Re}(s)\gg 1$,

$$\int_{\Gamma_V\backslash\mathcal{D}}\Phi(s)\wedge\eta=\kappa(s)\int_{\Gamma_V\backslash\mathcal{D}_V}\eta,$$

où $\kappa(s)=\frac{1}{s+q}-\sum_{j=1}^{q}\binom{q}{j}\frac{(-1)^j}{s+q-j}$.

Démonstration. — Soit

$$\begin{aligned}\psi(s)=\frac{(A/B)^{s+q}}{s+q}\widetilde{\psi}-\left[\sum_{j=1}^{q}\binom{q}{j}(-1)^j\frac{(A/B)^{s+q-j}}{s+q-j}\right]\psi\\+\sum_{k=1}^{q-1}\left(\binom{q}{k}\sum_{l=1}^{q-k}\binom{q-k}{l}(-1)^l\frac{(A/B)^{s+q-l-k}}{s+q-l-k}\right)\left((C/B)^k\,\psi_k\right).\end{aligned}$$

D'après (13.3.7) on a $\overline{\partial}\psi(s)=\Phi(s)$ sur $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_V$. Soit $T(r)$ le voisinage tubulaire de rayon r de $\mathcal{D}_V$ dans $\mathcal{D}$. On a :

$$\int_{\Gamma_V\backslash\mathcal{D}}\Phi(s)\wedge\eta=\lim_{\substack{r\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{\partial T(r)}\psi(s)\wedge\eta-\int_{\partial T(\varepsilon)}\psi(s)\wedge\eta\right].$$

Mais $\|\psi(s)\wedge\eta\|\prec(A/B)^{\mathrm{Re}(s)}$ et, d'après la Proposition 12.2.5, pour $\mathrm{Re}(s)\gg 1$,

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\partial T(r)}\psi(s)\wedge\eta=0.$$

Enfin, d'après la démonstration de la Proposition 13.3.2,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial T(\varepsilon)}\psi(s)\wedge\eta=-\kappa(s)\int_{\Gamma_V\backslash\mathcal{D}_V}\eta.$$

Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 13.3.3.

On pourrait là encore former une série de Poincaré et obtenir une famille de formes duales $\Omega(s)$ ∂ et $\overline{\partial}$ fermées même dans le cas de l'espace symétrique associé au groupe $\mathrm{SU}(p,q)$.

13.4. Tours de revêtements finis

Nous conservons les notations des sections précédentes. Nous supposons de plus la variété M compacte. D'après la Proposition 12.5.6 et le Lemme 13.3.1, pour $\mathrm{Re}(s)\gg 1$ la série

$$\omega_s^m=\sum_{\gamma\in\Gamma_V\backslash\Gamma_m}\gamma^*\Omega(s)\tag{13.4.1}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{D}$ et définit une $(2pq-k)$-forme fermée sur M_m. Le statut de « forme duale » de $\Omega(s)$ implique que pour toute k-forme fermée η sur M_m on a :

$$\int_{M_m} \omega_s^m \wedge \eta = \int_{M_V} \Omega(s) \wedge \eta = \int_{C_V} *_0\mu \wedge \eta.$$

On obtient donc le théorème suivant.

Théorème 13.4.1. — *Soit c un cycle de dimension k dans C_V. Soit μ la k-forme harmonique sur C_V dont l'étoile de Hodge est duale à c. Alors pour* $\mathrm{Re}(s) \gg 1$, *les formes ω_s^m sur M_m forment une famille de formes fermées duales au cycle c dans M_m.*

Soit $\Delta = \delta d + d\delta$, où δ est l'adjoint de d, l'opérateur laplacien que l'on étend en un opérateur, toujours noté Δ, agissant sur l'espace $L^2\Omega^{2pq-k}(\mathcal{D})$ des $(2pq-k)$-formes de carré intégrable sur $\mathcal{D}$ de façon essentiellement auto-adjointe. Alors le Théorème spectral s'applique et il existe une famille spectrale $\{P_\lambda \mid \lambda \in [0,+\infty[\}$ associée à Δ.

Notons $P_\lambda(x,y)$ le noyau de Schwartz de P_λ. On a $\Delta = \int_0^{+\infty} \lambda dP_\lambda$. À toute fonction $f \in C_0([0,+\infty[)$, on associe l'opérateur

$$f(\Delta) = \int_0^{+\infty} f(\lambda) dP_\lambda.$$

Le laplacien est un opérateur elliptique. Soit $\omega \in L^2\Omega^{2n-p}(\mathcal{D})$. On a :

$$\Delta(f(\Delta)\omega) = F(\Delta)\omega$$

où F est la fonction qui à x associe $xf(x)$. D'après le Théorème de régularité sur les opérateurs elliptiques, la forme $f(\Delta)\omega$ est lisse. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}$, il existe une constante $C(x,f,\mathcal{D})$ telle que :

$$|f(\Delta)\omega|(x) \leqslant C(x,f,\mathcal{D})\|\omega\|_{L^2(\mathcal{D})}.$$

En particulier, l'application

$$\begin{cases} L^2\Omega^{2pq-k}(\mathcal{D}) & \longrightarrow & L^2\Omega_x^{2pq-k}(\mathcal{D}) \\ \omega & \longmapsto & f(\Delta)\omega(x) \end{cases}$$

est continue. D'après le Théorème de Riesz, il existe donc $f(\Delta)(x,.) \in L^2\Omega^{2pq-k}(\mathcal{D})$ tel que

$$f(\Delta)\omega(x) = \int_{\mathcal{D}} f(\Delta)(x,y)\omega(y)dy.$$

De plus, pour tout compact K de $\mathcal{D}$, $\int_{K\times\mathcal{D}} \|f(\Delta)(x,y)\|^2 dxdy \leqslant \int_K C(x,f,\mathcal{D})^2 dx$. Donc $f(\Delta)(.,.) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}\times\mathcal{D})$. Or

$$(\Delta_x + \Delta_y) f(\Delta)(x,y) = 2F(\Delta)(x,y)$$

et l'opérateur $\Delta_x + \Delta_y$ est elliptique. Le Théorème de régularité elliptique implique donc que $f(\Delta)(x,y)$ est une fonction C^∞ en x et y.

Sur les variétés M_m et M_V, nous notons le laplacien respectivement Δ_m et Δ_∞ ; de même nous notons respectivement P_λ^m et P_λ^∞ les familles spectrales associées. Si l'on désigne, de manière cohérente avec les notations précédentes, le noyau de la chaleur sur les $(2pq-k)$-formes de $\mathcal{D}$ par $e^{-t\Delta}(x,y)$, il est connu [**36**] que pour tout $T>0$, il existe une constante $\alpha>0$ et une constante C_T (dépendante de T) telles que :

$$|e^{-t\Delta}(x,y)| \leqslant C_T e^{-\alpha d(x,y)^2/t}, \tag{13.4.2}$$

pour tout $t\in\,]0,T]$.

Lemme 13.4.2. — *Pour $t>0$ fixé, la série*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |e^{-t\Delta}(x,\gamma y)|$$

converge uniformément pour $x\in\mathcal{D}$ et y dans un compact vers une fonction bornée.

Démonstration. — Soit K un compact de $\mathcal{D}$ et soit t un réel strictement positif. D'après le Lemme 12.5.4, il existe une constante $c_1(K)$ telle que

$$\nu(x,y,R) := |\{\gamma\in\Gamma \mid d(x,\gamma y)\leqslant R\}| \leqslant c_1(K)\int_0^{R+1} (1+u^{2pq})e^{2(p+q-1)\sqrt{q}u}du$$

pour tout $x\in\mathcal{D}$ et $y\in K$.

Soient $C=C_t$ et $\beta=\alpha/t$. Alors, d'après l'inégalité (13.4.2), pour $x\in\mathcal{D}$ et $y\in K$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ d(x,\gamma y)\leqslant R}} |e^{-t\Delta}(x,\gamma y)| &\leqslant C \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ d(x,\gamma y)\leqslant R}} e^{-\beta d(x,\gamma y)^2}\\
&\leqslant C\Big(\int_0^R e^{-\beta r^2} d\nu(x,y,r)\Big)\\
&\leqslant C\Big([e^{-\beta r^2}\nu(x,y,r)]_0^R + 2\beta\int_0^R re^{-\beta r^2}\nu(x,y,r)dr\Big)\\
&\leqslant Cc_2(K)\Big(e^{-\beta R^2}\int_0^{R+1}(1+u^{2pq})e^{2(p+q-1)\sqrt{q}u}du\\
&\qquad + 2\beta\int_0^R re^{-\beta r^2}\int_0^{r+1}(1+u^{2pq})e^{2(p+q-1)\sqrt{q}u}dudr\Big).
\end{aligned}$$

Le Lemme découle de ces inégalités en faisant tendre R vers l'infini et du fait que la variété M est compacte.

On obtient alors que pour tout $t>0$,

$$\begin{aligned}
e^{-t\Delta_m}(x,y) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_m} (\gamma_y)^* e^{-t\Delta}(x,y)\\
e^{-t\Delta_\infty}(x,y) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_V} (\gamma_y)^* e^{-t\Delta}(x,y).
\end{aligned}$$

Et la convergence est absolue et uniforme pour x, y dans un compact. En particulier, le noyau de la chaleur $e^{-t\Delta_m}(x,y)$ est Γ_m-invariant. De plus, puisque d'après le Lemme 12.5.3, $\cap_m \Gamma_m = \Gamma_V$ et $\Gamma_{m+1} \subset \Gamma_m$, on en déduit que si $t > 0$ est fixé,

$$e^{-t\Delta_\infty}(x,y) = \lim_{m \to +\infty} e^{-t\Delta_m}(x,y)$$

uniformément pour x et y dans un compact de $\mathcal{D}$.

Le lemme suivant est une conséquence du Théorème d'approximation de Weierstrass.

Lemme 13.4.3 (cf. [35]). — *Soit $f \in C_0([0,+\infty[)$. Alors f peut-être uniformément approchée sur $[0,+\infty[$ par une combinaison linéaire finie d'exponentielles e^{-tx}, $t > 0$.*

Démonstration. — On se restreint d'abord à l'intervalle $]0,+\infty[$ et on effectue le changement de variable $y = e^{-x}$. Soit $g(y) = f(x)$. Alors $g \in C_0(]0,1[)$.

Soit $\varepsilon > 0$, le Théorème d'approximation de Weierstrass donne un polynôme proche de g :

$$|g(y) - \sum_{j=0}^{n} a_j y^j| < \varepsilon/2.$$

Puisque $g(0) = 0$, on a $|a_0| < \varepsilon/2$. Ainsi $|g(y) - \sum_{j=1}^{n} a_j y^j| < \varepsilon$. Le changement de variable inverse de y à x implique que $|f(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-jx}| < \varepsilon$.

Comme Donnelly dans [**36**], montrons que ce lemme implique que :

$$f(\Delta_\infty)(x,y) = \lim_{m \to +\infty} f(\Delta_m)(x,y),$$

pour tout $f \in C_0([0,+\infty[)$ et uniformément pour x, y dans un compact.

Soit $f \in C_0([0,+\infty[)$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $g(x) = f(x)e^x$ pour $x \in [0,+\infty[$. Bien sûr $g \in C_0([0,+\infty[)$. D'après le Lemme 13.4.3, il existe une suite $g_l(x)$ de polynômes en e^{-x} qui approche uniformément $g(x)$. Alors pour x, $y \in \mathcal{D}$ et $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$|f(\Delta_\infty)(x,y) - f(\Delta_m)(x,y)| \leqslant A_1 + A_2 + A_3$$

où

$$A_1 = |f(\Delta_\infty)(x,y) - (g_l(\Delta_\infty)e^{-\Delta_\infty})(x,y)|,$$
$$A_2 = |(g_l(\Delta_\infty)e^{-\Delta_\infty})(x,y) - (g_l(\Delta_m)e^{-\Delta_m})(x,y)|$$

et
$$A_3 = |(g_l(\Delta_m)e^{-\Delta_m})(x,y) - f(\Delta_m)(x,y)|.$$

Le Théorème spectral pour Δ_∞ implique que $g_l(\Delta_\infty)$ converge fortement vers $g(\Delta_\infty)$ (*i.e.* $g_l(\Delta_\infty)\omega \to g(\Delta_\infty)\omega$ pour tout $\omega \in L^2\Omega^{2pq-k}(M_V)$). Les noyaux de Schwartz $g_l(\Delta_\infty)e^{-\Delta_\infty}(x,y)$ convergent donc dans L^2_{loc} vers $g(\Delta_\infty)e^{-\Delta_\infty}(x,y) = f(\Delta_\infty)(x,y)$. Et le Théorème de régularité elliptique implique que l'on peut choisir l suffisamment grand pour que $A_1 \leqslant \varepsilon/3$.

Notons maintenant $\{f_i^m\}_{i\geqslant 0}$ une base orthonormée de $L^2\Omega^{2pq-k}(M_m)$ constituée de formes propres pour Δ_m et $\{\lambda_i^m\}_{i\geqslant 0}$ la suite des valeurs propres (comptées avec multiplicité) associées. Alors :

$$h(\Delta_m) = \sum_i h(\lambda_i^m) f_i^m(x) \otimes f_i^m(y),$$

pour toute fonction continue h à support compact dans $\mathbb{R}_+$. Donc :

$$\begin{aligned}
A_3 &\leqslant (\sup_{\lambda\in\mathbb{R}_+} |g(\lambda) - g_l(\lambda)|) \times \sum_i e^{-\lambda_i^m} |f_i^m(x)||f_i^m(y)| \\
&\leqslant (\sup_\lambda |g(\lambda) - g_l(\lambda)|) \times \sqrt{\operatorname{tr}(e^{-\Delta_m}(x,x))}\sqrt{\operatorname{tr}(e^{-\Delta_m}(y,y))} \\
&\quad \text{(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant K_0(\sup_\lambda |g(\lambda) - g_l(\lambda)|)
\end{aligned}$$

où K_0 est une constante indépendante de m que l'on obtient grâce à l'estimée (13.4.2) comme dans la preuve du Lemme 13.4.2 (on renvoie à [**35**] pour plus de détails). Ainsi, on peut choisir l suffisamment grand de manière à ce que $A_3 \leqslant \varepsilon/3$ pour tout m.

Fixons maintenant l de manière à ce que $A_1 + A_3 \leqslant \varepsilon/3$. D'après le Lemme 12.5.3 et le Lemme 13.4.2, on a $A_2 \leqslant \varepsilon/3$ pour m suffisamment grand.

En conclusion, comme Donnelly dans [**36**], on a montré que :

$$f(\Delta_\infty)(x,y) = \lim_{m\to+\infty} f(\Delta_m)(x,y),$$

pour tout $f \in C_0([0,+\infty[)$ et uniformément pour x, y dans un compact.

Lemme 13.4.4. — *Pour tout $f \in C_0([0,+\infty[)$, la suite $f(\Delta_m)(x,y)$ converge vers $f(\Delta_\infty)(x,y)$ uniformément pour x et y dans un compact. Et l'expression*

$$|f(\Delta_m)(x,y)) - f(\Delta_\infty)(x,y)|$$

est uniformément bornée (indépendamment de m) pour $x \in \mathcal{D}$ et y dans un compact.

Démonstration. — En effet, pour tout x, $y \in \mathcal{D}$ et $t > 0$, on a :

$$|e^{-t\Delta_\infty}(x,y) - e^{-t\Delta_m}(x,y)| \leqslant \sum_{\gamma\in\Gamma_m-\Gamma_V} |e^{-t\Delta}(x,\gamma y)|.$$

Puisque $\cap_m\Gamma_m = \Gamma_V$, le Lemme 13.4.4 pour la fonction $f(.) = e^{-t.}$ découle du Lemme 13.4.2. On conclut la preuve (comme ci-dessus ou dans [**36**]) à l'aide du Lemme 13.4.3.

Remarquons que, puisque $e^{-t\Delta_m}(.,.)$ est Γ_m-bi-invariant, il en est de même pour $f(\Delta_m)(.,.)$.

Proposition 13.4.5. — *Soient $f \in C_0([0,+\infty[)$ et $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) \gg 1$. Alors, la suite $f(\Delta_m)\omega_s^m$ converge vers $f(\Delta_\infty)\Omega(s)$ uniformément sur les compacts.*

Démonstration. — Soit $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) \gg 1$. Si $\mathcal{F}_m$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ_m sur $\mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(\Delta_m)\omega_s^m(.) &= \int_{M_m} \omega_s^m(x) \wedge *f(\Delta_m)(x,.)dx \\
&= \int_{M_m} \Big(\sum_{\gamma \in \Gamma_V \backslash \Gamma_m} \gamma^*\Omega(s)(x) \Big) \wedge *f(\Delta_m)(x,.)dx \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_V \backslash \Gamma_m} \int_{\mathcal{F}_m} \gamma^*\Omega(s)(x) \wedge *f(\Delta_m)(x,.)dx \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_V \backslash \Gamma_m} \int_{\gamma\mathcal{F}_m} \Omega(s)(x) \wedge *f(\Delta_m)(x,.)dx \\
&\quad (\text{car } f(\Delta_m)(.,.) \text{ est } \Gamma_m\text{-bi-invariant}) \\
&= \int_{M_V} \Omega(s)(x) \wedge *f(\Delta_m)(x,.)dx.
\end{aligned}$$

On obtient donc sur $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
f(\Delta_m)\omega_s^m(.) - f(\Delta_\infty)\Omega(s)(.) &= \int_{M_V} \Omega(s)(x) \wedge *f(\Delta_m)(x,.)dx \\
&\quad - \int_{M_V} \Omega(s)(x) \wedge *f(\Delta_\infty)(x,.)dx \\
&= \int_{M_V} \Omega(s)(x) \wedge *(f(\Delta_m)(x,.) - f(\Delta_\infty)(x,.))dx.
\end{aligned}$$

De plus d'après le Lemme 13.4.4, l'expression

$$|f(\Delta_m)(x,y) - f(\Delta_\infty)(x,y)|$$

est uniformément bornée (indépendamment de m) pour $x \in M_V$ et y dans un compact. Puisque la forme $\Omega(s)$ est dans L^1, le Théorème de convergence dominée et le Lemme 13.4.4 impliquent que pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout compact K, il existe un entier m_0 tel que pour tout $m \geqslant m_0$, les applications $f(\Delta_m)\omega_s^m$ et $f(\Delta_\infty)\Omega(s)$ sont ε-proches sur K. Ce qui achève la démonstration de la Proposition 13.4.5.

CHAPITRE 14

COHOMOLOGIE L^2 RÉDUITE

Nous conservons dans ce chapitre les notations des chapitres précédents. Soient donc toujours $G = \mathrm{SU}(p,q)$ $(p \geqslant q)$, $\mathcal{D}$ l'espace symétrique associé, $\mathcal{D}_V$ le sous-espace totalement géodésique de $\mathcal{D}$ associé à un sous-espace vectoriel de dimension (complexe) r de $\mathbb{C}^{p+q}$, G_V le sous-groupe de G préservant $\mathcal{D}_V$ et Γ_V un sous-groupe discret sans torsion et cocompact dans G_V. Nous notons $C_V = \Gamma_V \backslash \mathcal{D}_V$ et $M_V = \Gamma_V \backslash \mathcal{D}$. Dans la suite, $H_c^k(M_V)$, $H_2^k(M_V)$ et $\mathcal{H}_2^k(M_V)$ désignent respectivement le groupe de cohomologie à support compact de degré k de M_V, le groupe de cohomologie L^2 réduite de degré k de M_V et l'espace des k-formes harmoniques L^2 de M_V. Le but de ce chapitre est la démonstration du théorème suivant.

Théorème 14.0.6. — *Pour tout entier, $k < p + qr - r$, on a les isomorphismes naturels suivants :*

$$H^{k-2qr}(C_V) \cong H_c^k(M_V) \xrightarrow{\simeq} H_2^k(M_V) \cong \mathcal{H}_2^k(M_V).$$

Si de plus, $q = 1$, l'espace $H_2^p(M_V) \cong \mathcal{H}_2^p(M_V)$ est de dimension infinie et l'application naturelle $(H^{p-r}(C_V) \cong) H_c^p(M_V) \to H_2^k(M_V)$ est injective.

La démonstration pour $q = 1$ annoncée dans [**10**] reposait sur une proposition de Donnelly et Fefferman. La démonstration de cette dernière telle qu'esquissée dans [**37**] est fausse comme nous l'ont signalés Gilles Carron et Nader Yeganefar à qui nous devons également la référence [**82**] qui nous permet dans ce chapitre de démontrer complètement le Théorème 14.0.6. Remarquons néanmoins que le résultat principal de [**82**] repose encore sur un énoncé (complètement démontré cette fois) tiré de [**37**]. Remarquons enfin que le cas $q = 1$ peut maintenant être déduit d'un résultat de Yeganefar [**105**].

Commençons par des rappels sur la cohomologie L^2.

14.1. Rappels sur la cohomologie L^2

Soit M une variété complexe hermitienne complète. Nous notons $C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$ (resp. $L^2(\Lambda^k T^*M)$, etc.) l'ensemble des k-formes lisses à support compact (resp. de carré intégrable, etc.) dans M. De même nous notons $C_0^\infty(\Lambda^{a,b}T^*M)$ (resp. $L^2(\Lambda^{a,b}T^*M)$, etc.) l'ensemble des formes lisse de bidegré (a,b) à support compact (resp. de carré intégrable, etc.) dans M.

Commençons par oublier la structure complexe de M et par ne voir M que comme une variété riemannienne complète. Le k-ième espace de cohomologie L^2 (réduite) de M est défini par

$$H_2^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) \mid d\alpha = 0\}/\overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}^{L^2}.$$

Un autre espace très proche souvent considéré est l'espace de cohomologie L^2 non réduite, qui, en degré k, est le quotient de $\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) \mid d\alpha = 0\}$ par $\{d\alpha \mid \alpha \in L^2(\Lambda^{k-1}T^*M),\ d\alpha \in L^2\}$, sans prendre d'adhérence. En général, cohomologies L^2 réduite et non réduite sont différentes. Il y a néanmoins égalité en degré k lorsque 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien Δ sur les formes différentielles de degré k. Dans la suite, « cohomologie L^2 » voudra dire « cohomologie L^2 réduite ».

Il y a une interprétation de la cohomologie L^2 en termes de formes harmoniques. En effet, notons $\mathcal{H}_2^k$ l'espace des k-formes harmoniques L^2 de M :

$$\mathcal{H}_2^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) \mid d\alpha = \delta\alpha = 0\}$$

où δ est l'opérateur défini initialement sur les formes lisses à support compact comme l'adjoint de d. Comme M est complète, $\mathcal{H}_2^*(M)$ est aussi le noyau L^2 du laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$. Un fait important est la décomposition de Hodge-de Rham-Kodaira [**47**] :

$$L^2(\Lambda^k T^*M) = \mathcal{H}_2^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)} \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)},$$

et de plus,

$$\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) \mid d\alpha = 0\} = \mathcal{H}_2^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}.$$

On en déduit que

$$H_2^k(M) \cong \mathcal{H}_2^k(M).$$

Les résultats précédents admettent bien entendu des analogues complexes. Rappelons qu'une variété complexe hermitienne est dite *complète* si la variété riemannienne sous-jacente est complète. En remplaçant le complexe de de Rham (K^*, d) défini par

$$K^k = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) \mid d\alpha \in L^2\}$$

par le complexe de Dolbeault $(A^*, \overline{\partial})$ défini par $A^* = \oplus A^{a,b}$ où

$$A^{a,b} = \{\alpha \in L^2(\Lambda^{a,b}T^*M) \mid \overline{\partial}\alpha \in L^2\},$$

on définit les groupes de cohomologie L^2 de bidegré (a,b). Autrement dit,

$$H_2^{a,b}(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^{a,b}T^*M) \mid \overline{\partial}\alpha = 0\}/\overline{\overline{\partial}C_0^\infty(\Lambda^{a,b-1}T^*M)}^{L^2}.$$

Il y a là encore une interprétation de la cohomologie L^2 en termes de formes harmoniques. Mais cette fois on utilise le laplacien complexe $\square$. Notons $\mathcal{H}_2^{a,b}$ l'espace des formes harmoniques L^2 de bidegré (a,b) de M :

$$\mathcal{H}_2^{a,b}(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^{a,b}T^*M) \mid \overline{\partial}\alpha = \overline{\partial}^*\alpha = 0\},$$

où $\overline{\partial}^*$ est l'opérateur défini initialement sur les formes lisses à support compact comme l'adjoint de $\overline{\partial}$. Comme M est complète, $\mathcal{H}_2^*$ est aussi le noyau L^2 du laplacien complexe $\square = \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$. Là encore :

$$L^2(\Lambda^{a,b}T^*M) = \mathcal{H}_2^{a,b}(M) \oplus \overline{\overline{\partial}C_0^\infty(\Lambda^{a,b-1}T^*M)} \oplus \overline{\overline{\partial}^*C_0^\infty(\Lambda^{a,b+1}T^*M)},$$

et de plus,

$$\{\alpha \in L^2(\Lambda^{a,b}T^*M) \mid d\alpha = 0\} = \mathcal{H}_2^{a,b}(M) \oplus \overline{\overline{\partial}C_0^\infty(\Lambda^{a,b-1}T^*M)}.$$

On en déduit que

$$H_2^{a,b}(M) \cong \mathcal{H}_2^{a,b}(M).$$

Rappelons [**47**] que lorsque M est une variété kaehlérienne, le laplacien de Hodge-de Rham Δ est égal à deux fois le laplacien complexe $\square$. On déduit donc des rappels ci-dessus la proposition suivante.

Proposition 14.1.1. — *Soit M une variété kaehlérienne.*

(1) *Sans autre hypothèse, on a pour tout k une décomposition orthogonale*

$$\mathcal{H}_2^k(M) = \bigoplus_{a+b=k} \mathcal{H}_2^{a,b}(M), \ \overline{\mathcal{H}_2^{a,b}(M)} = \mathcal{H}_2^{b,a}(M).$$

(2) *Si de plus M est complète, il y a des isomorphismes canoniques*

$$H_2^k(M) \cong \bigoplus_{a+b=k} H_2^{a,b}(M), \ \overline{H_2^{a,b}(M)} = H_2^{b,a}(M).$$

14.2. Théorie de Hodge des variétés kaehlériennes faiblement pseudoconvexes

Les variétés kaehlériennes complètes que nous considérerons seront faiblement pseudoconvexes. Rappelons qu'une variété complexe X est dite *faiblement pseudoconvexe* s'il existe une fonction d'exhaustion psh ψ de classe C^∞ sur X [(1)].

[(1)]Rappelons qu'une fonction ψ est dite psh (pluri-sous-harmonique) si sa forme de Levi est semipositive et est dite exhaustive si $\psi(z)$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers l'infini suivant le filtre des complémentaires de parties compactes de X.

En particulier la fonction $\psi(Z) = \log \frac{B}{A}(Z)$ ($Z \in \mathcal{D}$) qui descend sur M_V fait de M_V une variété kaehlérienne faiblement convexe. Le Corollaire 12.4.4 montre de plus que cette dernière variété a un certain nombre de directions strictement pseudoconvexes.

Nous allons dans cette section décrire un théorème de décomposition de Hodge pour des variétés kaehlériennes faiblement pseudoconvexes ayant justement « suffisamment de directions strictement pseudoconvexes ». Suivant [**2**], une variété complexe X sera dite *absolument l-convexe* si X possède une fonction d'exhaustion psh ψ qui est fortement l-convexe sur le complémentaire $X \smallsetminus K$ d'une partie compacte, *i.e.* telle que la forme de Levi de ψ a au moins $n - l + 1$ valeurs propres positives en tout point de $X \smallsetminus K$, où $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.

Remarquons immédiatement que d'après le Corollaire 12.4.4, la variété M_V est en fait absolument $((p - r)(q - 1) + 1)$-convexe.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de décomposition de Hodge pour les variétés absolument l-convexe. Ce résultat est dû à Ohsawa ; dans [**33**] Demailly en donne une démonstration simplifiée.

Théorème 14.2.1. — *Soit X une variété kaehlérienne et $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. On suppose que X est absolument l-convexe. Alors, en des degrés convenables, il y a décomposition et symétrie de Hodge :*

$$H^k(X) \cong \bigoplus_{a+b=k} H^{a,b}(X), \ \overline{H^{a,b}(X)} \cong H^{b,a}(X), \ k \geqslant n + l,$$

$$H^k_c(X) \cong \bigoplus_{a+b=k} H^{a,b}_c(X), \ \overline{H^{a,b}_c(X)} \cong H^{b,a}_c(X), \ k \leqslant n - l,$$

tous ces groupes étant de dimension finie. ($H^k_c(X)$ et $H^{a,b}_c(X)$ désignent ici les groupes de cohomologie à support compact.) De plus, on a un isomorphisme de Lefschetz (induit par la multiplication par une puissance convenable de la forme de Kaehler)

$$H^{a,b}_c(X) \xrightarrow{\sim} H^{n-b,n-a}(X), \ a + b \leqslant n - l.$$

Grâce au Théorème 14.2.1 (et à la Proposition 14.1.1) la démonstration du Théorème 14.0.6 se réduit à l'étude des groupes $H^{a,b}_c(M_V)$ et $H^{a,b}_2(M_V)$. C'est ce que permet un théorème d'Ohsawa et Takegoshi que nous décrivons dans la section suivante. Cette référence nous a été fourni par Nader Yeganefar, nous l'en remercions.

14.3. Un théorème d'Ohsawa et Takegoshi

Dans [**82**, Theorem 4.1], Ohsawa et Takegoshi démontrent le théorème suivant.

Théorème 14.3.1. — *Soit X une variété kaehlérienne complète, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ et l un entier naturel. Supposons qu'il existe une fonction d'exhaustion C^∞ $\psi : X \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes.*

(1) *Soient* $\gamma_1 \geqslant \cdots \geqslant \gamma_n$ *les valeurs propres de la forme de Levi de* ψ. *Alors,*

$$\lim_{c \to +\infty} \sup_{X \smallsetminus X_c} \gamma_1 = 1 \quad et \quad \lim_{c \to +\infty} \inf_{X \smallsetminus X_c} \gamma_{n-l+1} = 1.$$

(2) *La limite lorsque c tend vers l'infini, de l'infimum de la plus petite valeur propre de* $\partial\overline{\partial}\psi - 8\partial\psi\overline{\partial}\psi$ *sur* $X \smallsetminus X_c$ *est supérieure ou égale à* $-\frac{1}{100n}$.

Dans les condition ci-dessus $X_c = \{x \in X \mid \psi(x) < c\}$.

Alors, $\dim H_2^{a,b}(X) < \infty$ *et*

$$H^{a,b}(X) \cong H_2^{a,b}(X), \quad pour\ a + b \geqslant n + l.$$

Remarquons que beaucoup de constantes dans l'énoncé ci-dessus sont arbitraires. Quitte à remplacer la fonction ψ par $x \mapsto \lambda^{-2}\psi(\lambda x)$, on peut par exemple changer le 8 de la condition (2) par n'importe constante positive. La condition (2) sera donc (en particulier) garantie dès que les valeurs propres de la forme de Levi de ψ seront toutes positives ou nulles (autrement dit ψ psh) et que la norme de $d\psi$ sera uniformément majorée.

L'hypothèse importante dans l'énoncé du Théorème 14.3.1 est bien évidemment la condition (1). À l'aide de celle-ci, la démonstration du Théorème 14.3.1 repose de manière essentielle sur une proposition de Donnelly et Fefferman que nous décrivons maintenant.

Soit M une variété complexe hermitienne complète de dimension complexe n. Notons $J : T^*M \otimes \mathbb{C} \to T^*M \otimes \mathbb{C}$ la structure presque complexe de M. Comme d'habitude l'action de J s'étend en une action sur les formes différentielles sur M et $J\phi = i^{a-b}\phi$, pour ϕ de type (a, b).

Supposons que F soit une fonction réelle de classe C^2 sur M. Comme dans les autres chapitres nous notons dF et $\nabla^2 F$ respectivement la différentielle extérieure de F et le hessien de F. Le hessien définit une transformation linéaire symétrique $\nabla^2 F : T^*M \to T^*M$.

Soit $S : T^*M \to T^*M$ une transformation linéaire symétrique de valeurs propres réelles $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. On dit que S est compatible avec J si, pour chaque vecteur propre v_i, de valeur propre γ_i, de S, il existe un indice i^* tel que $v_{i^*} = Jv_i$ soit aussi un vecteur propre, de valeur propre associée γ_{i^*}. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les nombres obtenus en moyennant γ_i et γ_{i^*} pour $i = 1, \ldots, 2n$. Autrement dit, $\mu_1 = (\gamma_1 + \gamma_{1^*})/2$, et si $v_{1^*} \neq v_2$, alors $\mu_2 = (\gamma_2 + \gamma_{2^*})/2$, et ainsi de suite...

Si ϕ est une forme différentielle sur M, nous notons $|\phi|$ la norme ponctuelle de ϕ et $\|\phi\|_{L^2}^2 = \int_M |\phi|^2$ la norme L^2 globale.

Proposition 14.3.2. — *Soit* ϕ *une forme différentielle dans* $C_0^\infty(\Lambda^{a,b}T^*X)$. *Soit* F *une fonction réelle* C^2 *sur le support de* ϕ *et telle que la transformation linéaire* ∇F

soit symétrique et compatible avec J avec pour valeurs propres réelles $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$. Si $|dF| \leqslant 1$, alors :

$$[\|d\phi\|_{L^2} + \|\delta\phi\|_{L^2}]\|\phi\|_{L^2} \geqslant \int_M \Big[\sum \mu_i - (a+b)\max_i(\mu_i)\Big] |\phi|^2,$$

où $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sont les nombres obtenus en moyennant γ_i et γ_{i^*}, pour $i = 1, \dots, 2n$.

Remarquons que Donnelly et Fefferman énoncent une version à bord de cette proposition pour une forme différentielle ϕ générale de degré k (et non de bidegré (a,b)). Nous ne savons pas si cette généralisation est vraie, si c'était le cas un argument classique de suite exacte à la Cheeger permettrait de donner une démonstration directe du Théorème 14.0.6. Néanmoins comme nous l'ont signalé Gilles Carron et Nader Yeganefar la démonstration suggérée par Donnelly et Fefferman utilise que la composante de type (a,b) d'une forme différentielle de degré $k = a+b$ vérifiant la condition absolue au bord vérifie elle aussi cette condition, ce qui est faux en général.

La vertu essentielle de la Proposition 14.3.2 est de contrôler le spectre essentiel de M_V.

Soit ψ la fonction réelle sur $\mathcal{D}$ définie par

$$\psi(Z) = \log\left(\frac{B}{A}\right)$$

(nous pourrions également considérer $\psi(Z) = d(Z, \mathcal{D}_V)$ si $\min\{r,q\} = 1$). D'après le Lemme 12.4.2 et le Corollaire 12.4.4, le hessien $\nabla^2\psi$ de ψ est compatible avec J et les valeurs propres moyennées $\mu_1(Z), \dots, \mu_n(Z)$ vérifient qu'il existe une constante $c_0 > 0$ telle que pour tout Z tel que $\psi(Z) > c_0$,

$$\sum_i \mu_i(Z) - (a+b)\max_i(\mu_i(Z)) \geqslant 1/10, \tag{14.3.1}$$

pour $a+b < p+qr-r$.

Remarquons que la fonction ψ est G_V-invariante et descend donc en une fonction sur $M_V = \Gamma_V \backslash \mathcal{D}$. Dans la suite, $X = M_V$ et $X_c = \{Z \in X \mid \psi(Z) < c\}$ pour tout réel $c > 0$.

Lemme 14.3.3. — *Pour tout bidegré (a,b) tel que $a+b < p+qr-r$, le spectre essentiel du laplacien sur les formes de bidegré (a,b) est isolé de 0.*

Démonstration. — Il est bien connu que le spectre essentiel du laplacien ne dépend que de la géométrie à l'infini. Or, la Proposition 14.3.2 et l'inégalité (14.3.1) impliquent que si ω est une forme différentielle de bidegré (a,b), $a+b < p+qr-r$, à support dans X_{c_0} alors :

$$\begin{aligned}[\|d\omega\|_2 + \|\delta\omega\|_2]\|\omega\|_2 &\geqslant \int_X \Big[\sum \mu_i - k\max_i(\mu_i)\Big] |\omega|^2 \\ &\geqslant \frac{1}{10}\|\omega\|_2^2.\end{aligned}$$

Le spectre du laplacien à l'infini (et donc le spectre essentiel) est donc isolé de 0. Le Lemme 14.3.3 est démontré.

Le Lemme 14.3.3 est l'étape essentielle dans la démonstration du Théorème 14.3.1. Il est naturel de se demander si dans l'énoncé du Théorème 14.0.6 ou du Lemme 14.3.3 le nombre $p+qr-r$ est optimal. En général on ne sait pas répondre à cette question. Peut-être la formule de Plancherel pour les espaces symétriques pseuso-riemannien G/H peut-elle apporter une réponse. Remarquons néanmoins le lemme suivant.

Lemme 14.3.4. — *Si $q=1$, le spectre essentiel du laplacien sur les formes de bidegré (a,b) avec $a+b=p$ est encore isolé de* 0.

Démonstration. — C'est évident puisque, le laplacien complexe commutant aux opérateurs $\overline{\partial}$ et $\overline{\partial}^*$, son spectre sur les formes de bidegré (a,b) est contenu dans la réunion du spectre du laplacien sur les formes de bidegré $(a,b-1)$, du spectre du laplacien sur les formes de bidegré $(a,b+1)$ et (éventuellement) de la valeur propre 0. Mais par dualité de Hodge le spectre du laplacien sur les formes de bidegré $(a,b+1)$ coïncide avec le spectre du laplacien sur les formes de bidegré $(b,a-1)$. Le Lemme 14.3.4 découle donc du Lemme 14.3.3.

14.4. Démonstration du Théorème 14.0.6

Commençons par appliquer le Théorème 14.3.1 à la variété M_V en utilisant la fonction d'exhaustion $\psi(Z) = \log \frac{B}{A}(Z)$. D'après le Corollaire 12.4.4 la condition (1) du Théorème 14.3.1 est vérifiée pour $l=(p-r)(q-1)+1$, par ailleurs les valeurs propres de la forme de Levi de ψ sont toutes positives (ou nulles) et la norme de la différentielle de ψ est uniformément bornée, d'après la remarque suivant le Théorème 14.3.1 celui-ci s'applique donc à M_V. On en déduit que pour tout bidegré (a,b) tel que $a+b \geqslant pq+(p-r)(q-1)+1$, le groupe $H_2^{a,b}(M_V)$ est de dimension finie et

$$H_2^{a,b}(M_V) \cong H^{a,b}(M_V).$$

On déduit alors du Théorème 14.2.1 et de la Proposition 14.1.1 que

$$H_2^k(M_V) \cong H^k(M_V)$$

pour tout $k \geqslant pq+(p-r)(q-1)+1$. Puis par dualité, il découle que l'application naturelle

$$H_c^k(M_V) \longrightarrow H_2^k(M_V)$$

est un isomorphisme pour tout entier $k \leqslant p+qr-r-1$.

On sait par ailleurs que $H_2^k(M_V)$ est (en tout degré k) isomorphe à $\mathcal{H}_2^k(M_V)$ et puisque M_V est homéomorphe au produit $C_V \times \mathbb{R}^{qr}$, la formule de Künneth implique que

$$H^{k-2qr}(C_V) \cong H_c^k(M_V),$$

pour tout degré k. La première partie du Théorème 14.0.6 est donc démontrée.

Supposons maintenant $q = 1$. On a toujours l'isomorphisme $H_2^p(M_V) \cong \mathcal{H}_2^p(M_V)$. Le groupe $\mathcal{H}_2^p(M_V)$ (p est ici la dimension réelle moitié de M_V) ne dépend que de la structure conforme de M_V. Il est donc facile de vérifier que l'espace $\mathcal{H}_2^p(M_V)$ est de dimension infinie et que l'application naturelle $H_c^p(M_V) \to H_2^p(M_V)$ est injective.

CHAPITRE 15

DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES 4, 5 ET 8

Comme l'indique le titre, le but de ce chapitre est la démonstration des Théorèmes 4, 5 et 8. Néanmoins nous ne parlerons pas de l'espace hyperbolique réel *i.e.* du cas où G est un groupe algébrique du type $\mathrm{SO}(n,1)$. Dans ce cas le Théorème 4 est en effet plus facile à démontrer et est de toute façon complètement traité dans [**8**].

15.1. Démonstration du Théorème 4

Nous conservons les notations des chapitres précédents. Le but de cette section est la démonstration du théorème suivant qui à l'aide du Lemme 12.5.3 implique immédiatement le Théorème 4.

Théorème 15.1.1. — *Soit $M = \Gamma\backslash\mathcal{D}$ une variété compacte localement symétrique modelée sur l'espace symétrique $\mathcal{D}$ associé au groupe semi-simple $G = \mathrm{SU}(p,q)$. Supposons que l'espace $\mathcal{D}$ contienne un sous-espace $\mathcal{D}_V$ tel que la variété $C_V = \Gamma_V\backslash\mathcal{D}_V$, avec $\Gamma_V = \Gamma \cap G_V$, soit compacte. Soit k un entier $> 2pq - p - qr + r$, ou égal à p si $q = 1$. Supposons l'hypothèse suivante vérifiée :*

(H) *M admet une tour d'effeuillage autour de C_V dont la première valeur propre non nulle du laplacien sur les $(2pq-k)$-formes fermées est uniformément minorée.*

Alors, il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M tel que

(1) *l'immersion de C_V dans M se relève en un plongement de C_V dans $\widehat{M}$,*

(2) *l'application induite :*

$$H_k(C_V) \longrightarrow H_k(\widehat{M})$$

est injective.

De plus pour tout entier N et tout cycle c dans $H_k(C_V)$, il existe un revêtement fini M_N de M contenant N préimages de $i(c)$ linéairement indépendantes dans $H_k(M_N)$.

Notons $\{M_m\}$ la tour d'effeuillage fournie par l'hypothèse (H).

Remarquons immédiatement que le point (1) du Théorème 15.1.1 se démontre de la même manière que le Théorème 1 de [**7**].

Fixons maintenant un cycle c non nul dans $H_k(C_V)$. Soit μ la forme harmonique sur C_V telle que $*_0\mu$ soit duale à c dans C_V. Dans la suite nous conservons les notations des chapitres précédents.

Fait 1. — Soit $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) \gg 1$. Alors, la suite $P_0^m \omega_s^m$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{D}$ vers $P_0^\infty \Omega(s)$.

En effet, soit λ un réel strictement positif tel que la première valeur propre non nulle du laplacien sur les $(2pq-k)$-formes fermées de M_m (resp. M_∞) soit strictement supérieure à λ (un tel λ existe d'après l'hypothèse (H)). On introduit la fonction $h_\lambda \in C_0([0,+\infty[)$ qui vaut 1 sur l'intervalle $[0, \frac{\lambda}{2}]$, 0 sur l'intervalle $[\lambda, +\infty[$ et qui décroît linéairement sur $[\frac{\lambda}{2}, \lambda]$. Puisque :

(1) la seule valeur propre du laplacien sur les $(2pq-k)$-formes fermées de M_m (resp. M_∞) est strictement inférieure à λ est 0,

(2) l'espace des formes fermées est fermé, et

(3) les formes ω_s^m et $\Omega(s)$ sont fermées,

on a :

$$h(\Delta_m)\omega_s^m = P_0^m \omega_s^m \text{ et } h(\Delta_\infty)\Omega(s) = P_0^\infty \Omega(s).$$

Or, d'après la Proposition 13.5.5 et pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) \gg 1$, la suite $h_\lambda \omega_s^m$ converge vers $h_\lambda \Omega(s)$ uniformément sur les compacts. Ce qui conclut la démonstration du Fait 1.

Fait 2. — Soit $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) \gg 1$. Alors, la forme harmonique $P_0^\infty \Omega(s)$ est non nulle (et ne dépend pas de s).

En effet, la forme $\Omega(s)$ représente une classe de cohomologie dans $H_c^{2pq-k}(M_V)$ (avec les notations du chapitre précédent). Plus précisément, d'après le Théorème 13.2.3, cette classe est indépendante de s et correspond, via la dualité de Poincaré $H_c^{2pq-k}(M_V) \cong H_k(V) \cong H_k(C_V)$, au cycle c dans C_V. Elle est donc non nulle. D'après le Théorème 14.0.6 et puisque $k > 2pq - p - qr + r$, on a les isomorphismes naturels $H_c^{2pq-k}(M_V) \cong H_2^{2pq-k}(M_V) \cong \mathcal{H}_2^{2pq-k}(M_V)$, le projeté harmonique L^2, $P_0^\infty \Omega(s)$, dans $\mathcal{H}_2^{2pq-k}$ est donc non nul (et ne dépend pas de s). Remarquons que lorsque $q = 1$ et $k = p$, l'application naturelle $H_c^p(M_V) \to H_2^p(M_V) \cong \mathcal{H}_2^p(M_V)$ est encore injective et donc, là encore, $P_0^\infty \Omega(s) \neq 0$.

On peut maintenant démontrer la première partie du Théorème 15.1.1.

Par la dualité de Poincaré et le Théorème de Hodge-de Rham, l'application $H_k(C_V) \to H_k(M_m)$ correspond à l'application $\mu \mapsto P_0^m \omega_s^m$ allant des k-formes harmoniques sur C_V vers les $(2pq-k)$-formes harmoniques sur M_m. Mais, d'après le Fait 1, cette dernière converge simplement vers l'application, injective d'après le Fait 2, des k-formes harmoniques sur C_V vers $\mathcal{H}_2^{2pq-k}(M_V)$ qui à μ associe $P_0^\infty \Omega(s)$. Or $H_k(C_V)$ est de dimension finie donc la convergence est uniforme et pour m grand, l'application $H_k(C_V) \to H_k(M_m)$ est injective. Comme M_m est un revêtement fini de M, la première partie du Théorème 15.1.1 est démontrée.

Pour montrer la deuxième partie du Théorème 15.1.1, nous allons d'abord déduire des faits précédents un autre corollaire.

Proposition 15.1.2. — *On se place sous l'hypothèse (H). Soit $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) \gg 1$. Supposons $k > 2pq - p - qr + r$ (ou $k = p$ si $q = 1$). Si $P_0^0 \omega_s^0 \neq 0$, il existe un entier $m \geqslant 0$ et un élément $\gamma \in \Gamma$ tels que les formes harmoniques $P_0^m \omega_s^m$ et $\gamma^* P_0^m \omega_s^m$ soient linéairement indépendantes.*

Démonstration. — Nous montrons d'abord par l'absurde qu'il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que la forme $P_0^m \omega_s^m$ ne soit pas invariante sous l'action de Γ. Soit m un entier $\geqslant 0$. Supposons que la forme $P_0^m \omega_s^m$ soit invariante sous l'action de Γ. Alors,

$$P_0^0 \omega_s^0 = [\Gamma : \Gamma_m] P_0^m \omega_s^m.$$

Or $[\Gamma : \Gamma_m]$ tend vers l'infini avec m, donc $P_0^m \omega_s^m$ tend vers 0 avec m ce qui contredit les Faits 1 et 2. Il existe donc un entier $m \geqslant 0$ et un élément $\gamma \in \Gamma$ tels que les formes $P_0^m \omega_s^m$ et $\gamma^* P_0^m \omega_s^m$ soient distinctes. Puisque

$$\sum_{g \in \Gamma_m \backslash \Gamma} g^* P_0^m \omega_s^m = \sum_{g \in \Gamma_m \backslash \Gamma} g^* (\gamma^* P_0^m \omega_s^m) = P_0^0 \omega_s^0 \neq 0,$$

les formes $P_0^m \omega_s^m$ et $\gamma^* P_0^m \omega_s^m$ sont en fait nécessairement linéairement indépendantes. Ce qui achève la démonstration de la Proposition 15.1.2.

À l'aide de la Proposition 15.1.2, nous pouvons maintenant conclure la démonstration du Théorème 15.1.1.

Soit $k > 2pq - p - qr + r$ (ou $k = p$ si $q = 1$). Soit μ une k-forme harmonique sur C_V. Nous allons montrer par récurrence sur $N \geqslant 1$ qu'il existe un revêtement fini M_N de M et N formes harmoniques de degré $2pq - k$ sur M_N linéairement indépendantes. Le Théorème 15.1.1 en découle immédiatement.

Supposons qu'il existe un tel revêtement M_N pour un certain $N \geqslant 1$. Notons $\omega_1, \dots, \omega_N$ les N formes harmoniques indépendantes. On peut supposer que la forme ω_1 est la forme harmonique associée à μ (qui est une forme harmonique sur une préimage de C_V dans M_N). La Proposition 15.1.2 implique qu'il existe un revêtement fini M_{N+1} de M_N, une forme harmonique $\widehat{\omega}_1$ sur M_{N+1} et un élément $\gamma \in \pi_1 M_N$ tels que les formes harmoniques $\widehat{\omega}_1$ et $\gamma^* \widehat{\omega}_1$ soient linéairement indépendantes. Supposons qu'il existe $N + 1$ réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ tels que

$$\alpha_0 \widehat{\omega}_1 + \alpha_1 \gamma^* \widehat{\omega}_1 + \alpha_2 \omega_2 + \cdots + \alpha_N \omega_N = 0.$$

Alors en moyennant par $\pi_1 M_{N+1} \backslash \pi_1 M_N$, on obtient :

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\omega_1 + [\pi_1 M_N : \pi_1 M_{N+1}]\{\alpha_2 \omega_2 + \cdots + \alpha_N \omega_N\} = 0.$$

L'hypothèse de récurrence implique donc :

$$\alpha_0 + \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_N = 0.$$

Et puisque les formes harmoniques $\widehat{\omega}_1$ et $\gamma^* \widehat{\omega}_1$ sont linéairement indépendantes, on obtient finalement que :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0.$$

Enfin puisque le revêtement de M_{N+1} sur M est fini, on peut le supposer galoisien, la forme $\gamma^* \widehat{\omega}_1$ est alors définie sur M_{N+1}. Ce qui achève la récurrence et la démonstration du Théorème 15.1.1.

Remarquons que d'après la section 13.3 et la démonstration du Théorème 15.1.1, lorsque $q = 1$, on peut remplacer l'hypothèse (H) par l'hypothèse suivante plus faible :

(H') M admet une tour d'effeuillage autour de C_V dont la première valeur propre non nulle du laplacien sur les $(2pq - k)$-formes ∂ et $\overline{\partial}$ fermées est uniformément minorée.

C'est cette hypothèse que nous nous attacherons à vérifier dans la démonstration du Théorème 5. Mais avant de passer à la démonstration de celui-ci, on fait un petit aparté concernant les variétés arithmétiques.

15.2. Variétés arithmétiques

En général, la classe des variétés arithmétiques est plus large que celle des variétés de congruences auxquelles les résultats de la première partie s'appliquent.

Un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SU}(p, q)$ est dit *arithmétique* s'il existe un groupe $\mathbb{Q}$-algébrique $G \subset \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ pour un certain entier naturel N et un homomorphisme continue et surjectif $\rho : G \to \mathrm{SU}(p, q)$ tels que :

(1) le noyau de ρ soit un sous-groupe *compact* de G ;

(2) l'image par ρ de $G \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ soit *commensurable* avec Γ, *i.e.* l'intersection $\Gamma \cap \rho(G \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}))$ est d'indice fini dans Γ et dans $\rho(G \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}))$.

Étant donné un sous-groupe arithmétique de Γ de $\mathrm{SU}(p, q)$, on appelle *sous-groupe principal de congruence* de Γ tout sous-groupe de la forme :

$$\Gamma(m) = \Gamma \cap \rho(G \cap \ker(\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))),$$

pour un certain entier naturel m. Plus généralement, on appelle *sous-groupe de congruence* de Γ [(1)] tout sous-groupe de Γ contenant un sous-groupe principal de congruence. Remarquons qu'un sous-groupe de congruence d'un groupe arithmétique donné Γ n'est en général pas un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SU}(p, q)$. Ceci n'est vrai que lorsque Γ est déjà un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SU}(p, q)$.

---

(1) La terminologie est dangereuse, voir la remarque qui suit.

Enfin, on appelle *variété arithmétique* tout quotient de l'espace $\mathcal{D}$ par un sous-groupe arithmétique sans torsion Γ de $\mathrm{SU}(p,q)$. Remarquons qu'une telle variété est de volume fini. Les revêtements fini d'une variété arithmétique obtenues à l'aide de sous-groupes de congruence (au sens ci-dessus) seront appelés *revêtements de congruence*.

Il existe des variétés hyperboliques complexes de volume fini non arithmétiques pour $n = 1, 2$ et 3, construites par Mostow (*cf.* [**80**]). La question de l'existence de variétés hyperboliques complexes non arithmétiques pour $n \geqslant 4$ reste ouverte. Pour $q > 1$, toute variété localement symétrique de volume fini modelée sur $\mathcal{D}$ est arithmétique d'après le célèbre Théorème d'arithméticité de Margulis. En revanche, la question de savoir si tous les sous-groupes arithmétiques sont de congruence est encore ouverte. (La question est, maintenant, essentiellement réduite au cas des groupes « exotiques » du chapitre 10. Pour une discussion détaillée voir Prasad [**85**].)

Rappelons maintenant qu'il existe effectivement des variétés arithmétiques quotients de l'espace $\mathcal{D}$ associé au groupe $\mathrm{SU}(p,q)$. Soit K un corps de nombre totalement réel de degré m sur $\mathbb{Q}$, soit $\mathcal{O}$ son anneau des entiers et soit $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ l'ensemble des plongements de K dans $\mathbb{R}$. Soit $K' = K(\sqrt{-1}\,)$. On étend chaque $\sigma \in \Sigma$ en un plongement de K' dans $\mathbb{C}$ laissant $\sqrt{-1}$ fixe. Soit

$$h(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = a_1|z_1|^2 + \cdots + a_p|z_p|^2 - a_{p+1}|z_{p+1}|^2 - \cdots - a_{p+q}|z_{p+q}|^2$$

une forme hermitienne diagonale avec $a_i \in K$. Supposons que ${}^{\sigma_1}h$ a pour signature (p,q) et que ${}^{\sigma_i}h$ est définie positive pour $i = 2, 3, \dots, m$. Le sous-groupe $\Gamma(h)$ de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathcal{O}(\sqrt{-1}\,))$ préservant h s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{SU}(p,q)$. Si $\Gamma < \mathrm{SU}(p,q)$ est un sous-groupe commensurable à $\Gamma(h)$, alors Γ est un groupe arithmétique (on obtient le morphisme ρ et le groupe G à l'aide d'une restriction des scalaires de K à $\mathbb{Q}$ appliquée à la structure K-algébrique de $\mathrm{SU}(p,q)$ donnée par la forme hermitienne h). On appelle un tel groupe : *groupe arithmétique standard* (bien que cette appellation ne le soit pas elle même). Quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini et grâce à un lemme classique de Selberg, on peut supposer Γ sans torsion, il agit alors librement sur $\mathcal{D}$ et l'espace quotient est une *variété arithmétique standard*. Les variétés arithmétiques sont toutes compactes sauf celles qui sont standard et telles que $K = \mathbb{Q}$ et h représente zéro sur $\mathbb{Q}$; dans ce cas elles sont de volume fini.

Remarquons que notre Théorème 5 est non vide en vertu du théorème suivant.

***Théorème 15.2.1* (Kazhdan [62], Shimura [96] et Borel-Wallach [15])**
Soit M une variété hyperbolique complexe (donc associée au groupe $\mathrm{SU}(n,1)$*) arithmétique standard et soit N un entier naturel quelconque. Alors, M admet un revêtement (fini) de congruence avec un premier nombre de Betti $\geqslant N$.*

Autrement dit, si F est une variété hyperbolique complexe arithmétique standard compacte de dimension (réelle) d, quitte à passer à un revêtement fini, on peut supposer que $H_{d-1}(F)$ est non nul (et même de rang arbitrairement grand).

Montrons par ailleurs :

Proposition 15.2.2. — *Soit $M = \Gamma\backslash\mathcal{D}$ une variété arithmétique (resp. de congruence). Supposons que $\mathcal{D}$ contienne un sous-espace $\mathcal{D}_V$ tel que la variété $C_V = \Gamma_V\backslash\mathcal{D}_V$, avec $\Gamma_V = \Gamma \cap G_V$, soit compacte. Alors, la variété C_V est arithmétique (resp. de congruence).*

Démonstration. — Le groupe Γ est arithmétique, notons ρ et G comme dans la définition d'un groupe arithmétique. Soit H la composante connexe de l'élément neutre du groupe :

$$\rho^{-1}(G_V) \subset G \subset \mathrm{GL}_N(\mathbb{R}).$$

Le groupe H est réductif et connexe, il est donc égal à la composante connexe de l'élément neutre de sa clôture de Zariski. De plus, le sous-groupe $H \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ est un réseau cocompact dans H car :

(1) $\rho(H \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})) = \rho(G \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})) \cap G_V$,
(2) le groupe $\rho(G \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}))$ est commensurable avec Γ,
(3) le groupe $\Gamma_V = \Gamma \cap G_V$ est cocompact dans G_V, et
(4) le noyau de ρ est compact.

Notons H' l'adhérence de Zariski de $H \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$. La composante connexe de l'élément neutre $(H')_0$ de H' est contenue dans H et, d'après le Théorème de densité de Borel, elle se surjecte sur H/K où K désigne un compact distingué maximal de H.

Fait. — Le groupe H' est $\mathbb{Q}$-algébrique.

En effet, soit I_d l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant d$ s'annulant sur H'. Puisque $H \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ est Zariski-dense dans H', un polynôme P de degré $\leqslant d$ est dans I_d si et seulement si $P(h) = 0$ pour tout $h \in H \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$. On voit maintenant ces équations comme un système d'équations homogènes linéaires, une équation pour chaque $h \in H \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$, où les inconnues sont les r coefficients de P et les coefficients de l'équation linéaire sont dans $\mathbb{Z}$. Puisqu'il y a r inconnus, on peut trouver r équations telles que les équations représentent le système. Mais le noyau d'une matrice $r \times r$ à coefficients dans $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, vue comme transformation linéaire de $\mathbb{R}^r$, a une base constituée de vecteurs dans $\mathbb{Q}^r$. Donc I_d a une base constituée d'éléments à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et, puisque c'est vrai pour tout d, on obtient bien que H' est défini sur $\mathbb{Q}$.

Finalement, la variété F est commensurable au quotient $K'\backslash H'/(H' \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}))$, c'est donc une variété arithmétique. Enfin si $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$ pour un certain sous-groupe compact-ouvert $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$, $\Gamma_V = H'(\mathbb{Q}) \cap K_f$, la variété F est donc de congruence lorsque Γ est un sous-groupe de congruence. Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 15.2.2.

Remarquons que la démonstration ci-dessus montre en fait que toute sous-variété localement symétrique d'une variété localement symétrique arithmétique est arithmétique. Ce fait est sans doute bien connu mais nous n'avons pas trouvé de référence dans la littérature.

Rappelons que les variétés arithmétiques forment en général une classe plus grande de variétés que les variétés de congruence. Ainsi, il existe des surfaces hyperboliques arithmétiques dont la première valeur propre non nulle du laplacien sur les fonctions est arbitrairement petite. De tels exemples peuvent par exemple être obtenus en considérant un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ se surjectant sur $\mathbb{Z}$ et l'ensemble des ses sous-groupes de quotient fini. Néanmoins, une fois une variété arithmétique fixé on s'attend à ce que l'ensemble de ses revêtements de congruence soit soumis aux mêmes genres de phénomènes que l'ensemble des variétés de congruence. Illustrons par exemple ce principe vague par la conséquence suivante de la démonstration de la « Conjecture τ » (*cf.* § 2.1).

Théorème 15.2.3. — *Soit M une variété arithmétique. Alors, la première valeur propre non nulle du laplacien sur les fonctions, reste uniformément minorée dans les revêtements de congruence de M.*

Démonstration. — Lorsque M est de congruence c'est le Théorème 2.1.1. Pour passer au cas arithmétique général, on utilise un résultat de Brooks [**17**] qui montre que la propriété d'avoir une tour de revêtements fini $\{M_m\}$ de M ayant la propriété d'avoir une première valeur propre non nulle sur le spectre du laplacien sur les fonctions uniformément minorée est une propriété combinatoire dans le sens qu'elle ne dépend que de la suite des graphes de Schreier des quotients $\pi_1 M_m/\pi_1 M$ pour un système de générateur fini et fixé de $\pi_1 M$. Mais $\pi_1 M$ est commensurable au groupe fondamental d'une variété de congruence, et la combinatoire de la tour $\{M_m\}$ se comporte donc de la même manière que la combinatoire d'une tour de variétés de congruence. D'où l'on déduit le Théorème 15.2.3.

Remarquons que si dans le cas des variétés de congruence les Conjectures d'Arthur prévoient des valeurs explicites pour la minoration du spectre, on ne peut en espérer autant dans le cas des variétés arithmétiques puisque, comme on l'a rappelé au-dessus, il se peut que la variété arithmétique M avec laquelle on démarre ait déjà une première valeur propre non nulle du laplacien sur les fonctions arbitrairement petite. Le Théorème 15.2.3 n'est donc pas un corollaire immédiat du Théorème 2.1.1. On ne sait d'ailleurs pas si le Théorème 3 qui traite des 1-formes différentielles peut s'étendre (sans minoration explicite) au cas des variétés arithmétiques. Cette question nous paraît intéressante. Reformulons-la de la manière suivante :

Question. — La Conjecture A^- implique-t-elle que pour toute variété hyperbolique réelle ou complexe arithmétique M de dimension (réelle d) et pour tout entier naturel

$i \leqslant \frac{d}{2} - 1$, il existe une constante strictement positive $\varepsilon(M,i)$ telle que pour tout revêtement de congruence M' de M,

$$\lambda_1^i(M') \geqslant \varepsilon(M,i) \ ?$$

Nous allons maintenant pouvoir passer à la démonstration du Théorème 5. Celle-ci repose sur la vérification de l'hypothèse (H') qui nécessite quelques rappels sur les variétés kaehlériennes que nous détaillons dans la section suivante.

15.3. Rappels sur les variétés kaehlériennes

Dans cette section M est une variété kaehlérienne compacte. Nous avons déjà rappelé que le laplacien usuel et le laplacien complexe coïncident (à une constante multiplicative près). Dans cette section nous allons utiliser le laplacien complexe :

$$\square = -\sqrt{-1}\,\{\overline{\partial}\partial\Lambda - \overline{\partial}\Lambda\partial + \partial\Lambda\overline{\partial} - \Lambda\partial\overline{\partial}\},$$

où Λ est l'opérateur adjoint à l'opérateur L de multiplication par la forme de Kaehler. Plus précisément sur une variété complexe de dimension n, munie d'une métrique hermitienne

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} dz^\alpha d\overline{z}^\beta,$$

où l'on note $(g^{\alpha,\beta})$ l'inverse $(g_{\alpha,\beta})^{-1}$ de la matrice $(g_{\alpha,\beta})$. Soit

$$\varphi = \frac{1}{p!q!}\sum \varphi_{\alpha_1\dots\alpha_p\beta_1\dots\beta_q} dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}^{\beta_q}.$$

Alors

$$\Lambda\varphi = \frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\sum \sqrt{-1}\, g^{\beta\alpha}\varphi_{\alpha\beta\alpha_2\dots\alpha_p\beta_2\dots\beta_q} dz^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}^{\beta_q}, \tag{15.3.1}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}(\Lambda\varphi)_{\alpha_2\dots\alpha_p\beta_2\dots\beta_q} &= \sum_{\alpha,\beta}\sqrt{-1}\, g^{\beta\alpha}\varphi_{\alpha\beta\alpha_2\dots\alpha_p\beta_2\dots\beta_q}\\ &= (-1)^{p-1}\sum_{\alpha,\beta}\sqrt{-1}\, g^{\beta\alpha}\varphi_{\alpha\alpha_2\dots\alpha_p\beta\beta_2\dots\beta_q}.\end{aligned}$$

En particulier si φ est une forme de degré j,

$$-L\Lambda\varphi + \Lambda L\varphi = (n-j)\varphi. \tag{15.3.2}$$

Un calcul simple montre alors que le laplacien $\square$ commute à L. Enfin, remarquons que si ω est une forme ∂ et $\overline{\partial}$ fermée, on a :

$$\square\omega = \partial\overline{\partial}\sqrt{-1}\,\Lambda\omega. \tag{15.3.3}$$

Proposition 15.3.1. — *Soit M une variété kaehlerienne compacte de dimension complexe n. Notons λ la première valeur propre non nulle du laplacien sur les 1-formes de M. Alors, la première valeur propre non nulle du laplacien sur les 3-formes ∂ et $\overline{\partial}$ fermées de M est $\geqslant \lambda$.*

Démonstration. — Soit λ la première valeur propre non nulle du laplacien sur les 1-formes de M. Soit β une 3-forme μ-propre, ∂ et $\overline{\partial}$ fermée de M. On peut décomposer l'espace des 3-formes sur M comme somme orthogonale de

$$\overline{\{L\alpha \mid \alpha \text{ est une 1-forme sur } M\}}$$

et de son supplémentaire orthogonal. Quitte à prendre des suites, on peut donc écrire :

$$\beta = L\alpha \oplus^{\perp} \gamma.$$

Si $L\alpha = 0$, la forme γ est orthogonale à l'image de L restreinte aux 1-formes et donc par dualité, on obtient que $\Lambda\beta = 0$. Et donc $\mu = 0$ puisque β est ∂ et $\overline{\partial}$ fermée. Enfin, si $\mu \neq 0$, puisque le laplacien préserve la décomposition orthogonale ci-dessus, on obtient que μ est une valeur propre du laplacien sur les 1-formes, avec comme forme propre : α. Donc si $\mu \neq 0$, on a nécessairement $\mu \geqslant \lambda$. Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 15.3.1.

À l'aide du Théorème 3, la Proposition 15.3.1 va nous permettre de vérifier l'hypothèse (H') dans certains cas intéressants et de démontrer le Théorème 5.

Concluons cette section de rappels sur les variétés kaehlériennes par un cas particulier élémentaire de la décomposition de Lefschetz.

Proposition 15.3.2. — *Soit M une variété kählerienne de dimension complexe n. Alors, l'application L^k pour $1 \leqslant k < n$ est injective des 1-formes sur les $(2k+1)$-formes et envoie les formes harmoniques sur des formes harmoniques.*

Démonstration. — La première partie est bien connue [**47**]. De plus, le laplacien $\square$ commute à L et la Proposition 15.3.2 est démontrée.

Soit

$$vb_i(M) = \sup\{b_i(\widehat{M}) : \widehat{M} \text{ est un revêtement fini de } M\},$$

où i est un entier naturel inférieur à la dimension de la variété M et $b_i(M)$ désigne le i-ème nombre de Betti de M. On appelle $vb_i(M)$ le *i-ème nombre de Betti virtuel de M*. On déduit de la Proposition 15.3.2 et du Théorème 15.2.1 le corollaire suivant.

Corollaire 15.3.3. — *Les variétés hyperboliques complexes standard ont tous leurs nombres de Betti virtuels infinis.*

Le Théorème 5 permet de décrire comment certaines classes non triviales en homologie apparaissent géométriquement. Il est maintenant temps de passer à la démonstration proprement dite du Théorème 5.

15.4. Démonstration du Théorème 5

Soient M une variété hyperbolique complexe compacte de congruence de dimension $d+2$ et F une sous-variété complexe compacte connexe totalement géodésique de dimension d et immergée dans M. On peut supposer, en concervant les notations des chapitres précédents, que $M = \Gamma\backslash\mathcal{D}$, $F = \Gamma_V\backslash\mathcal{D}_V$ où $\Gamma_V = \Gamma \cap G_V$.

D'après le Théorème 15.1.1 pour conclure il nous faut construire une tour d'effeuillage autour de F vérifiant l'hypothèse (H') pour $k = d-1$. La variété M est de congruence, donc d'après la Proposition 15.2.2, la variété F aussi. Et il existe deux groupes $\mathbb{Q}$-algébriques H et G, avec H un $\mathbb{Q}$-sous-groupe de G, $G(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ (pour un certain entier N) et un morphisme continue à noyau compact $\rho : G \to \mathrm{SU}(n,1)$ tels que : l'image par ρ de $G \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ (resp. $H \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$) soit Γ (resp. Γ_V). On introduit par récurrence, la suite de sous-groupes d'indices finis dans Γ :

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

et pour tout $m \geqslant 1$,

$$\Gamma_m = \rho(p_m^{-1}(p_m(H \cap \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})))) \cap \Gamma_{m-1},$$

où p_m est la projection de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ sur $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Notons $M_m = \Gamma_m\backslash\mathcal{D}$. La suite de revêtements finis $\{M_m\}$ de M est une tour d'effeuillage autour de F dans M ; cette tour est, de plus, constituée de revêtements de congruences. Mais, d'après le Théorème 3 et la Proposition 15.3.1, la première valeur propre non nulle du laplacien sur les 3-formes ∂ et $\overline{\partial}$ fermées sur M_m est uniformément (par rapport à m) minorée. En particulier, l'hypothèse (H') est vérifiée pour cette tour d'effeuillage et pour $k = d-1$. Le Théorème 15.1.1 permet donc de conclure la démonstration du Théorème 5.

Le Théorème 5 permet la construction de 3-classes d'homologie non triviales à partir du Théorème 15.2.1 de la manière suivante. Si M est une variété hyperbolique complexe arithmétique standard et de congruence définie par une forme hermitienne h à n variables (comme au § 15.2), on obtient une sous-variété (immergée) F holomorphe totalement géodésique de codimension (complexe) 1 (qui est donc de congruence) en restreignant la forme h à un $(n-1)$-plan. Quitte à passer à un revêtement de congruence de M (et donc de F), on peut supposer que $H_{2n-3}(F)$ est non trivial, d'après le Théorème 15.2.1. Alors, le Théorème 5 permet de relever cette classe d'homologie dans F en une classe d'homologie non triviale dans un revêtement fini de M.

Bien sûr, par définition des groupes $H_*(\mathrm{Sh}^0 G)$, le Corollaire 1 découle immédiatement du Théorème 5. Enfin, en remplaçant le Théorème 3 par le Corollaire 5.4.2, la démonstration du Théorème 5 s'étend au groupe $\mathrm{SU}(p,q)$. On en déduit le théorème suivant qui implique immédiatement le Théorème 8.

Théorème 15.4.1. — *Soit $M = \Gamma\backslash\mathcal{D}$ une variété compacte localement symétrique de congruence modelée sur l'espace symétrique $\mathcal{D}$ associé au groupe semi-simple*

$G = \mathrm{SU}(p,q)$, avec $p \geqslant q \geqslant 2$. Supposons que l'espace $\mathcal{D}$ contienne un sous-espace $\mathcal{D}_V$ tel que la variété $C_V = \Gamma_V \backslash \mathcal{D}_V$, avec $\Gamma_V = \Gamma \cap G_V$, soit compacte. Soit k un entier $> 2pq - p - q + 1$. Alors, il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M tel que

(1) *l'immersion de C_V dans M se relève en un plongement de C_V dans $\widehat{M}$,*

(2) *l'application induite :*

$$H_k(C_V) \longrightarrow H_k(\widehat{M})$$

est injective.

De plus, pour tout entier N et tout cycle c dans $H_k(C_V)$, il existe un revêtement fini M_N de M contenant N préimages de $i(c)$ linéairement indépendantes dans $H_k(M_N)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Adams, D. Barbasch & D. A. Vogan, Jr. – *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Progress in Mathematics, vol. 104, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

[2] A. Andreotti & H. Grauert – « Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 193–259.

[3] J. Arthur – « Unipotent automorphic representations : conjectures », *Astérisque* (1989), no. 171-172, p. 13–71, Orbites unipotentes et représentations, II.

[4] ———, « An introduction to the trace formula », preprint, 263 pages, 2005.

[5] J. Arthur & L. Clozel – *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Mathematics Studies, vol. 120, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[6] M. W. Baldoni Silva – « The unitary dual of $\mathrm{Sp}(n, 1)$, $n \geqslant 2$ », *Duke Math. J.* **48** (1981), no. 3, p. 549–583.

[7] N. Bergeron – « Premier nombre de Betti et spectre du laplacien de certaines variétés hyperboliques », *Enseign. Math. (2)* **46** (2000), no. 1-2, p. 109–137.

[8] ———, « Asymptotique de la norme L^2 d'un cycle géodésique dans les revêtements de congruence d'une variété hyperbolique arithmétique », *Math. Z.* **241** (2002), no. 1, p. 101–125.

[9] ———, « Lefschetz properties for arithmetic real and complex hyperbolic manifolds », *Int. Math. Res. Not.* (2003), no. 20, p. 1089–1122.

[10] N. Bergeron & L. Clozel – « Spectre et homologie des variétés hyperboliques complexes de congruence », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **334** (2002), no. 11, p. 995–998.

[11] P. Bernat & J. Dixmier – « Sur le dual d'un groupe de Lie », *C. R. Acad. Sci. Paris* **250** (1960), p. 1778–1779.

[12] I. N. Bernstein & A. V. Zelevinsky – « Induced representations of reductive p-adic groups. I », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **10** (1977), no. 4, p. 441–472.

[13] A. Borel – « Automorphic L-functions », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 27–61.

[14] A. Borel & Harish-Chandra – « Arithmetic subgroups of algebraic groups », *Ann. of Math. (2)* **75** (1962), p. 485–535.

[15] A. Borel & N. R. Wallach – *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 94, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[16] R. Bott & S. S. Chern – « Some formulas related to complex transgression », in *Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)*, Springer, New York, 1970, p. 48–57.

[17] R. Brooks – « The spectral geometry of a tower of coverings », *J. Differential Geom.* **23** (1986), no. 1, p. 97–107.

[18] D. Bump – *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 55, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[19] M. Burger, J.-S. Li & P. Sarnak – « Ramanujan duals and automorphic spectrum », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **26** (1992), no. 2, p. 253–257.

[20] M. Burger & P. Sarnak – « Ramanujan duals. II », *Invent. Math.* **106** (1991), no. 1, p. 1–11.

[21] W. Casselman & D. Miličić – « Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representations », *Duke Math. J.* **49** (1982), no. 4, p. 869–930.

[22] L. Clozel – « Spectral theory of automorphic forms », à paraître (Conférence du Park City Math. Institute, AMS/IAS, 2002).

[23] ______, « Changement de base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **15** (1982), no. 1, p. 45–115.

[24] ______, « Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité », in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988)*, Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, p. 77–159.

[25] ______, « On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties », *Duke Math. J.* **72** (1993), no. 3, p. 757–795.

[26] ———, « Démonstration de la conjecture τ », *Invent. Math.* **151** (2003), no. 2, p. 297–328.

[27] L. Clozel & E. Ullmo – « Équidistribution des points de Hecke », in *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, p. 193–254.

[28] J. Cogdell, J.-S. Li, I. Piatetski-Shapiro & P. Sarnak – « Poincaré series for $\mathrm{SO}(n, 1)$ », *Acta Math.* **167** (1991), no. 3-4, p. 229–285.

[29] J. W. Cogdell & I. I. Piatetski-Shapiro – « Remarks on Rankin-Selberg convolutions », in *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, p. 255–278.

[30] P. Deligne – *Cohomologie étale*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569.

[31] P. Delorme – « Théorème de Paley-Wiener invariant tordu pour le changement de base $\mathbf{C}/\mathbf{R}$ », *Compositio Math.* **80** (1991), no. 2, p. 197–228.

[32] P. Delorme – « Formules limites et formules asymptotiques pour les multiplicités dans $L^2(G/\Gamma)$ », *Duke Math. J.* **53** (1986), no. 3, p. 691–731.

[33] J.-P. Demailly – « Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation », in *Introduction à la théorie de Hodge*, Panor. Synthèses, vol. 3, Soc. Math. France, Paris, 1996, p. 3–111.

[34] J. Dixmier – *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars, Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996, réimpression de la 2e édition (1969).

[35] H. Donnelly – « On the spectrum of towers », *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), no. 2, p. 322–329.

[36] ———, « Elliptic operators and covers of Riemannian manifolds », *Math. Z.* **223** (1996), no. 2, p. 303–308.

[37] H. Donnelly & C. Fefferman – « L^2-cohomology and index theorem for the Bergman metric », *Ann. of Math. (2)* **118** (1983), no. 3, p. 593–618.

[38] W. Duke, J. B. Friedlander & H. Iwaniec – « The subconvexity problem for Artin L-functions », *Invent. Math.* **149** (2002), no. 3, p. 489–577.

[39] J. Elstrodt, F. Grunewald & J. Mennicke – « Kloosterman sums for Clifford algebras and a lower bound for the positive eigenvalues of the Laplacian for congruence subgroups acting on hyperbolic spaces », *Invent. Math.* **101** (1990), no. 3, p. 641–685.

[40] D. B. A. Epstein – « Complex hyperbolic geometry », in *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space (Coventry/Durham, 1984)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 111, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, p. 93–111.

[41] D. Flath – « Decomposition of representations into tensor products », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 179–183.

[42] S. Gelbart & H. Jacquet – « A relation between automorphic representations of GL(2) and GL(3) », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **11** (1978), no. 4, p. 471–542.

[43] I. M. Gel′fand & S. V. Fomin – « Unitary representations of Lie groups and geodesic flows on surfaces of constant negative curvature », *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **76** (1951), p. 771–774.

[44] I. M. Gel′fand, M. I. Graev & I. I. Pyatetskii-Shapiro – *Representation theory and automorphic functions*, Generalized Functions, vol. 6, Academic Press Inc., Boston, MA, 1990, Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Reprint of the 1969 edition.

[45] R. Godement & H. Jacquet – *Zeta functions of simple algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260.

[46] W. M. Goldman – *Complex hyperbolic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999, Oxford Science Publications.

[47] P. Griffiths & J. Harris – *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994, Reprint of the 1978 original.

[48] G. Harcos – « Uniform approximate functional equation for principal L-functions », *Int. Math. Res. Not.* (2002), no. 18, p. 923–932.

[49] Harish-Chandra – « Representations of a semisimple Lie group on a Banach space. I », *Trans. Amer. Math. Soc.* **75** (1953), p. 185–243.

[50] M. Harris & J.-S. Li – « A Lefschetz property for subvarieties of Shimura varieties », *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), no. 1, p. 77–122.

[51] M. Harris & R. Taylor – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[52] S. Helgason – *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Corrected reprint of the 1978 original.

[53] R. E. Howe & C. C. Moore – « Asymptotic properties of unitary representations », *J. Funct. Anal.* **32** (1979), no. 1, p. 72–96.

[54] H. Iwaniec – *Spectral methods of automorphic forms*, second éd., Graduate Studies in Mathematics, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[55] H. Jacquet & R. P. Langlands – *Automorphic forms on* GL(2), Springer-Verlag, Berlin, 1970, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114.

[56] H. Jacquet, I. I. Piatetskii-Shapiro & J. A. Shalika – « Rankin-Selberg convolutions », *Amer. J. Math.* **105** (1983), no. 2, p. 367–464.

[57] H. Jacquet & J. A. Shalika – « On Euler products and the classification of automorphic forms. II », *Amer. J. Math.* **103** (1981), no. 4, p. 777–815.

[58] ______, « On Euler products and the classification of automorphic representations. I », *Amer. J. Math.* **103** (1981), no. 3, p. 499–558.

[59] H. Jacquet – « Principal L-functions of the linear group », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 63–86.

[60] H. Jacquet & J. Shalika – « The Whittaker models of induced representations », *Pacific J. Math.* **109** (1983), no. 1, p. 107–120.

[61] ______, « Rankin-Selberg convolutions : Archimedean theory », in *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989)*, Israel Math. Conf. Proc., vol. 2, Weizmann, Jerusalem, 1990, p. 125–207.

[62] D. Kazhdan – « Some applications of the Weil representation », *J. Analyse Mat.* **32** (1977), p. 235–248.

[63] H. H. Kim – « Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2 », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 1, p. 139–183 (electronic), With appendix 1 by Dinakar Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and Peter Sarnak.

[64] A. W. Knapp & B. Speh – « Status of classification of irreducible unitary representations », in *Harmonic analysis (Minneapolis, Minn., 1981)*, Lecture Notes in Math., vol. 908, Springer, Berlin, 1982, p. 1–38.

[65] A. W. Knapp & G. J. Zuckerman – « Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups », *Ann. of Math. (2)* **116** (1982), no. 2, p. 389–455, erratum : *Ann. of Math. (2)*, **119** (1984), no. 3, p. 639.

[66] A. W. Knapp – *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.

[67] S. Kobayashi & K. Nomizu – *Foundations of differential geometry. Vol. II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996, Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.

[68] H. Kraljević – « Representations of the universal convering group of the group $SU(n, 1)$ », *Glasnik Mat. Ser. III* **8(28)** (1973), p. 23–72.

[69] S. S. Kudla – « The local Langlands correspondence : the non-Archimedean case », in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 365–391.

[70] J.-P. Labesse & J. Schwermer – « On liftings and cusp cohomology of arithmetic groups », *Invent. Math.* **83** (1986), no. 2, p. 383–401.

[71] S. Lang – $SL_2(\mathbf{R})$, Graduate Texts in Mathematics, vol. 105, Springer-Verlag, New York, 1985, Reprint of the 1975 edition.

[72] R. P. Langlands – « On the classification of irreducible representations of real algebraic groups », in *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, Math. Surveys Monogr., vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, p. 101–170.

[73] N. Lohoue & S. Mehdi – « The Novikov-Shubin invariants for locally symmetric spaces », *J. Math. Pures Appl. (9)* **79** (2000), no. 2, p. 111–140.

[74] W. Lück – « Approximating L^2-invariants by their finite-dimensional analogues », *Geom. Funct. Anal.* **4** (1994), no. 4, p. 455–481.

[75] W. Luo, Z. Rudnick & P. Sarnak – « On the generalized Ramanujan conjecture for $GL(n)$ », in *Automorphic forms, automorphic representations, and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 66, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 301–310.

[76] G. A. Margulis & G. A. Soĭfer – « Maximal subgroups of infinite index in finitely generated linear groups », *J. Algebra* **69** (1981), no. 1, p. 1–23.

[77] Y. Matsushima – « A formula for the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds », *J. Differential Geometry* **1** (1967), p. 99–109.

[78] C. Mœglin & J.-L. Waldspurger – « Le spectre résiduel de $GL(n)$ », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **22** (1989), no. 4, p. 605–674.

[79] ______, *Spectral decomposition and Eisenstein series*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 113, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Une paraphrase de l'Écriture.

[80] G. D. Mostow – « On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space », *Pacific J. Math.* **86** (1980), no. 1, p. 171–276.

[81] T. Oda – « A note on the Albanese variety of an arithmetic quotient of the complex hyperball », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **28** (1981), no. 3, p. 481–486 (1982).

[82] T. Ohsawa & K. Takegoshi – « Hodge spectral sequence on pseudoconvex domains », *Math. Z.* **197** (1988), no. 1, p. 1–12.

[83] E. Pedon – « Harmonic analysis for differential forms on complex hyperbolic spaces », *J. Geom. Phys.* **32** (1999), no. 2, p. 102–130.

[84] V. Platonov & A. Rapinchuk – *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139, Academic Press Inc., Boston, MA, 1994, Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

[85] G. Prasad – « Semi-simple groups and arithmetic subgroups », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)* (Tokyo), Math. Soc. Japan, 1991, p. 821–832.

[86] J. D. Rogawski – *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Mathematics Studies, vol. 123, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[87] T. Sakai – *Riemannian geometry*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 149, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, Translated from the 1992 Japanese original by the author.

[88] P. Sarnak – « The arithmetic and geometry of some hyperbolic three-manifolds », *Acta Math.* **151** (1983), no. 3-4, p. 253–295.

[89] G. Schiffmann – « Intégrales d'entrelacement et fonctions de Whittaker », *Bull. Soc. Math. France* **99** (1971), p. 3–72.

[90] H. Schlichtkrull – « The Langlands parameters of Flensted-Jensen's discrete series for semisimple symmetric spaces », *J. Funct. Anal.* **50** (1983), no. 2, p. 133–150.

[91] A. Selberg – « On the estimation of Fourier coefficients of modular forms », in *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965, p. 1–15.

[92] F. Shahidi – « Local coefficients and normalization of intertwining operators for GL(n) », *Compositio Math.* **48** (1983), no. 3, p. 271–295.

[93] ———, « Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for GL(n) », *Amer. J. Math.* **106** (1984), no. 1, p. 67–111.

[94] ———, « Local coefficients as Artin factors for real groups », *Duke Math. J.* **52** (1985), no. 4, p. 973–1007.

[95] J. A. Shalika – « The multiplicity one theorem for GL_n », *Ann. of Math. (2)* **100** (1974), p. 171–193.

[96] G. SHIMURA – « Automorphic forms and the periods of abelian varieties », *J. Math. Soc. Japan* **31** (1979), no. 3, p. 561–592.

[97] B. SPEH – « Unitary representations of $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ with nontrivial $(\mathfrak{g}, K)$-cohomology », *Invent. Math.* **71** (1983), no. 3, p. 443–465.

[98] Y. L. TONG & S. P. WANG – « Harmonic forms dual to geodesic cycles in quotients of $\mathrm{SU}(p, 1)$ », *Math. Ann.* **258** (1981/82), no. 3, p. 289–318.

[99] T. N. VENKATARAMANA – « Cohomology of compact locally symmetric spaces », *Compositio Math.* **125** (2001), no. 2, p. 221–253.

[100] M.-F. VIGNÉRAS – « On the global correspondence between $GL(n)$ and division algebras », notes de l'Institute for Advanced Study, Princeton, 1984.

[101] D. A. VOGAN – « Isolated unitary representations », to appear in the 2002 Park City summer school volume.

[102] D. A. VOGAN, JR. – « The unitary dual of $\mathrm{GL}(n)$ over an Archimedean field », *Invent. Math.* **83** (1986), no. 3, p. 449–505.

[103] D. A. VOGAN, JR. & G. J. ZUCKERMAN – « Unitary representations with nonzero cohomology », *Compositio Math.* **53** (1984), no. 1, p. 51–90.

[104] N. R. WALLACH – *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Marcel Dekker Inc., New York, 1973, Pure and Applied Mathematics, No. 19.

[105] N. YEGANEFAR – « Formes harmoniques L^2 sur les variétés asymptotiquement hyperboliques complexes », in *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 21. Année 2002–2003*, Sémin. Théor. Spectr. Géom., vol. 21, Univ. Grenoble I, Saint, 2003, p. 55–59.

[106] R. J. ZIMMER – *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Mathematics, vol. 81, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

INDEX DES NOTATIONS

INDEX TERMINOLOGIQUE