

Astérisque

GEORGES MALTSINIOTIS

La théorie de l'homotopie de Grothendieck

Astérisque, tome 301 (2005)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__301__R1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__301__R1_0)

© Société mathématique de France, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ASTÉRIQUE 301

LA THÉORIE DE L'HOMOTOPIE
DE GROTHENDIECK

Georges Maltsiniotis

Société Mathématique de France 2005

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

G. Maltsiniotis

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot,
Case Postale 7012, 2, place Jussieu, F-75251 Paris cedex 05, France.

E-mail : `maltsin@math.jussieu.fr`

Url : `http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F20, 14F35, 18B25, 18F20, 18G10, 18G30, 18G50, 18G55, 55P10, 55P15, 55P60, 55Q05, 55U10, 55U35, 55U40.

Mots clefs. — Asphérique, catégorie test, colimite homotopique, ensemble simplicial, équivalence faible, extension de Kan homotopique, foncteur lisse, foncteur propre, homotopie, localisation, modélisateur, préfaisceau.

LA THÉORIE DE L'HOMOTOPIE DE GROTHENDIECK

Georges Maltsiniotis

Résumé. — Le but de ce livre est d'exposer la très belle théorie de l'homotopie développée par Grothendieck dans « À la poursuite des champs ». Il s'agit de caractériser les catégories de préfaisceaux qui permettent de modéliser les types d'homotopie, généralisant ainsi la théorie des ensembles simpliciaux. Les critères dégagés par Grothendieck montrent que de telles catégories, appelées des *modélisateurs élémentaires*, abondent. On expose une construction catégorique des extensions de Kan homotopiques à gauche, généralisant une construction des colimites homotopiques par Thomason. On étudie deux classes remarquables de foncteurs, les foncteurs *propres* et les foncteurs *lisses*, notions duales l'une de l'autre. Ces foncteurs sont caractérisés par des propriétés cohomologiques, inspirées des théorèmes de changement de base propre ou lisse, en géométrie algébrique.

Abstract (Grothendieck's homotopy theory). — The aim of this book is to explain the very beautiful homotopy theory developed by Grothendieck in “Pursuing Stacks”. The question is to characterize categories of presheaves that modelize homotopy types, thus generalizing the theory of simplicial sets. The criteria discovered by Grothendieck show that there are pretty many such categories, called *elementary modelizers*. We describe a categorical construction of left homotopy Kan extensions, generalizing a construction of homotopy colimits by Thomason. We study two remarkable classes of functors, *proper* and *smooth* functors, these two notions being mutually dual. These functors are characterized by cohomological properties inspired by the proper or smooth base change theorem in algebraic geometry.

TABLE DES MATIÈRES

Préface	1
Introduction	3
La catégorie homotopique Hot	3
La définition simpliciale	4
La définition catégorique	5
La définition toposique	6
Les modélisateurs et les catégories test	7
Les foncteurs test	9
Les localisateurs fondamentaux	10
Les extensions de Kan homotopiques	13
La catégorie de modèles conjecturée par Grothendieck	14
Foncteurs propres, foncteurs lisses	15
Le plan du livre	16
Notations	18
1. La théorie des catégories test	19
1.1. Les localisateurs fondamentaux faibles	19
1.2. Les équivalences faibles dans une catégorie de préfaisceaux	29
1.3. Les catégories test faibles	34
1.4. Segments et homotopie dans une catégorie	39
1.5. Les catégories test	46
1.6. Les catégories test strictes	51
1.7. Les foncteurs test	56
2. Les localisateurs fondamentaux	71
2.1. Les propriétés élémentaires des localisateurs fondamentaux	71
2.2. Foncteurs d'intégration et de coïntégration	80
2.3. Images directes et composés transfinis d'équivalences faibles	85
2.4. Catégories filtrantes et asphéricité	96

3. Théorie homotopique élémentaire des catégories	105
3.1. Colimites et extensions de Kan homotopiques	105
3.2. Morphismes propres, lisses	113
Bibliographie	131
Index des notations	133
Index Terminologique	137

PRÉFACE

Le but de ce livre est de rendre accessible la très belle théorie de l'homotopie de Grothendieck, telle qu'elle est développée dans « Pursuing Stacks » (« À la poursuite des champs »). Son origine est une suite d'exposés que j'ai faits au groupe de travail « Algèbre et topologie homotopiques » à l'Institut de Mathématiques de Jussieu. Les idées, notions, propositions, théorèmes, et démonstrations de ce travail sont fortement inspirés par le texte de Grothendieck. Néanmoins, un travail très important de déblayage, et de mise au point a été nécessaire. Dans un prochain volume d'Astérisque, qui peut être considéré comme la suite de cet ouvrage, Denis-Charles Cisinski prouve deux conjectures énoncées par Grothendieck, et poursuit le développement de la théorie. Il utilise pour cela les résultats de Grothendieck exposés dans le présent volume, et les techniques récentes de localisation des catégories de modèles de Quillen. Il s'inspire aussi grandement de la théorie des dérivateurs de Grothendieck, même si ce concept n'est pas explicitement utilisé.

La lecture de ce livre ne remplace évidemment pas celle de « Pursuing Stacks ». Son ambition est de rendre cette dernière plus facile, en donnant une exposition plus systématique (et plus « bourbachique ») des idées de Grothendieck. Tous les sujets traités dans « la poursuite » ne sont pas couverts par ces notes. En particulier, il n'est pas fait mention d'infini-groupoïdes, ni d'abélianisation, ou schématisation des types d'homotopie, et l'aspect toposique n'est considéré que dans l'introduction. En outre, la structure de journal « intime » mathématique, qui fait de « Pursuing Stacks » une lecture passionnante, pleine de surprises, et précieuse pour la compréhension de la genèse des concepts, est perdue.

Je voudrais remercier Alain Bruguières, Albert Burroni, Bruno Kahn, Bernhard Keller et Fabien Morel pour les innombrables discussions que j'ai eues avec eux, ainsi que tous les participants du groupe de travail « du mercredi soir ». Je voudrais plus particulièrement exprimer ma reconnaissance à Denis-Charles Cisinski pour notre longue et fructueuse collaboration autour de la thèse qu'il a préparée sous ma direction. Une

grande partie de ce livre a été écrite sur l'île de Patmos. Je voudrais exprimer ma gratitude à la famille Vamvakos qui m'héberge sur cette île, et m'épargne tout souci matériel.

Patmos, Paris, Port-en-Bessin, 1997-2005

INTRODUCTION

La catégorie homotopique Hot

La catégorie homotopique Hot est définie classiquement comme étant la catégorie dont les objets sont les CW-complexes, et les morphismes les classes d'homotopie d'applications continues entre CW-complexes. On démontre qu'on obtient une catégorie équivalente en localisant la catégorie Top de *tous* les espaces topologiques et applications continues, relativement aux équivalences faibles topologiques.

On rappelle que si M désigne une catégorie et W une partie de la classe $\text{Fl}(M)$ des flèches de M , il existe (quitte à éventuellement agrandir l'univers de base) une catégorie $W^{-1}M$ (localisée de M relativement à W) et un foncteur $\gamma : M \rightarrow W^{-1}M$ (foncteur de localisation) tel que pour tout $w \in W$, $\gamma(w)$ soit un isomorphisme de $W^{-1}M$, et qui sont universels pour cette propriété. Autrement dit, pour tout foncteur $F : M \rightarrow M'$ tel que pour tout $w \in W$, $F(w)$ soit inversible, il existe un unique foncteur $\tilde{F} : W^{-1}M \rightarrow M'$ tel que $F = \tilde{F}\gamma$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\gamma} & W^{-1}M \\ & \searrow F & \downarrow \tilde{F} \\ & & M' \end{array}$$

La catégorie $W^{-1}M$ est construite en inversant formellement les morphismes appartenant à W .

Si l'on note W_∞ la partie de $\text{Fl}(\text{Top})$ formée des *équivalences faibles topologiques*, autrement dit, des applications continues $f : X \rightarrow Y$ telles que

- (a) $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ soit une application bijective,
- (b) pour tout $n \geq 1$, et tout $x \in X$, $\pi_n(f, x) : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ soit un isomorphisme de groupes,

alors la catégorie homotopique Hot est équivalente à la catégorie $W_\infty^{-1}\text{Top}$.

La définition simpliciale

La catégorie homotopique peut être également définie, à équivalence de catégories près, en termes d'ensembles simpliciaux. La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie $\widehat{\Delta}$ des préfaisceaux (foncteurs contravariants à valeurs dans la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles) sur la catégorie Δ des simplexes, catégorie dont les objets sont les ensembles

$$\Delta_m = \{0, 1, \dots, m\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

ordonnés par l'ordre naturel, et les morphismes les applications croissantes. Les simplexes topologiques standard

$$\Delta_m^{Top} = \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=0}^m x_i = 1, x_i \geq 0, 0 \leq i \leq m\}$$

forment un espace topologique cosimplicial Δ^{Top} (foncteur covariant de Δ dans Top), en définissant, pour tout morphisme $\varphi : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ de Δ , une application continue

$$\Delta_\varphi^{Top} : \Delta_m^{Top} \longrightarrow \Delta_n^{Top}$$

par

$$\Delta_\varphi^{Top}(x_0, x_1, \dots, x_m) = (y_0, y_1, \dots, y_n) \quad , \quad \text{où} \quad y_j = \sum_{\varphi(i)=j} x_i \quad , \quad 0 \leq j \leq n \quad .$$

On en déduit un unique (à isomorphisme unique près) couple de foncteurs adjoints

$$|\cdot| : \widehat{\Delta} \longrightarrow Top \quad , \quad S : Top \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

(le foncteur de *réalisation topologique*, et le foncteur *ensemble simplicial singulier*) tel que la restriction de $|\cdot|$ à la catégorie Δ (identifiée à une sous-catégorie pleine de $\widehat{\Delta}$, par le plongement de Yoneda) soit isomorphe au foncteur $\Delta^{Top} : \Delta \rightarrow Top$. Pour tout ensemble simplicial K , l'espace topologique $|K|$ est le quotient

$$|K| = \coprod_m \Delta_m^{Top} \times K_m / \sim \quad ,$$

où l'ensemble K_m est considéré comme espace topologique discret, et \sim est la relation d'équivalence engendrée par les relations élémentaires

$$(x, K_\varphi(y)) \sim (\Delta_\varphi^{Top}(x), y) \quad , \quad \varphi : \Delta_m \rightarrow \Delta_n \in \text{Fl}(\Delta) \quad , \quad x \in \Delta_m^{Top} \quad , \quad y \in K_n \quad .$$

Pour tout espace topologique X , l'ensemble simplicial $S(X)$ est défini par

$$(S(X))_m = \text{Hom}_{Top}(\Delta_m^{Top}, X) \quad , \quad m \geq 0 \quad .$$

Une *équivalence faible simpliciale* est un morphisme d'ensembles simpliciaux dont la réalisation topologique est une équivalence d'homotopie. Si l'on note W_∞ la partie de $\text{Fl}(\widehat{\Delta})$ formée des équivalences faibles, on démontre que la catégorie localisée $W_\infty^{-1}\widehat{\Delta}$ est équivalente à la catégorie homotopique Hot . De façon plus précise, les foncteurs $|\cdot|$ et S sont compatibles aux équivalences faibles, et induisent des équivalences de catégories

$$W_\infty^{-1}\widehat{\Delta} \longrightarrow W_\infty^{-1}Top \quad \text{et} \quad W_\infty^{-1}Top \longrightarrow W_\infty^{-1}\widehat{\Delta}$$

quasi-inverses l'une de l'autre (voir par exemple [9]).

La définition catégorique

La catégorie homotopique **Hot** peut être enfin obtenue, à équivalence de catégories près, comme localisation de la catégorie *Cat* des petites catégories. L'inclusion $\Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$, définie en associant à l'ensemble ordonné Δ_m , $m \geq 0$, la catégorie correspondante, fournit un objet cosimplicial de *Cat*, d'où un couple de foncteurs adjoints

$$c : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \quad N : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\Delta}$$

(le foncteur de *réalisation catégorique*, et le foncteur *nerf*) tel que la restriction de c à Δ soit l'inclusion $\Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$. Pour toute petite catégorie C , l'ensemble simplicial $N(C)$ (nerf de C) est défini par

$$(N(C))_m = \text{Hom}_{\mathcal{C}at}(\Delta_m, C) \quad , \quad m \geq 0 \quad ,$$

l'ensemble ordonné Δ_m étant considéré comme une catégorie. Plus concrètement, $(N(C))_m$ est l'ensemble formé des suites de m flèches composables de C . Une *équivalence faible catégorique* est un foncteur entre petites catégories dont le nerf est une équivalence faible simpliciale. Si l'on note \mathcal{W}_∞ la partie de $\text{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée des équivalences faibles, on démontre que la catégorie localisée $\mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at$ est équivalente à la catégorie homotopique **Hot**. De façon plus précise, le foncteur nerf est compatible aux équivalences faibles et induit une équivalence de catégories

$$\mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{W}_\infty^{-1}\widehat{\Delta}$$

(voir par exemple [13] ou [14]). En revanche, contrairement au foncteur de réalisation topologique, le foncteur de réalisation catégorique n'est pas compatible aux équivalences faibles. Pour construire un quasi-inverse à l'équivalence de catégories définie par le foncteur nerf, on peut procéder comme suit. On définit un foncteur

$$\text{Simpl} : \widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{C}at$$

en associant à un ensemble simplicial K sa *catégorie des simplexes* $\text{Simpl}(K)$, dont l'ensemble des objets est la somme disjointe

$$\text{Ob}(\text{Simpl}(K)) = \coprod_m K_m \quad ,$$

un morphisme de $x \in K_m$ vers $y \in K_n$ étant une application croissante $\varphi : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ telle que $x = K_\varphi(y)$. On montre qu'on a l'égalité

$$\mathcal{W}_\infty = \text{Simpl}^{-1}(\mathcal{W}_\infty) \quad ,$$

et que le foncteur **Simpl** définit une équivalence de catégories

$$\mathcal{W}_\infty^{-1}\widehat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \quad ,$$

quasi-inverse à celle induite par le foncteur nerf (voir par exemple [13] ou [14]).

La définition toposique

Les équivalences faibles catégoriques admettent aussi une caractérisation en termes de cohomologie à coefficients localement constants. Si $u : A \rightarrow B$ est un foncteur entre petites catégories, alors u est une équivalence faible si et seulement si le morphisme de topos $(u^*, u_*) : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$ (où $u^* : \hat{B} \rightarrow \hat{A}$ désigne le foncteur image inverse de préfaisceaux $F \mapsto u^*(F) = Fu$, $F \in \text{Ob}(\hat{B})$, et $u_* : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$ son adjoint à droite) est une équivalence d'Artin-Mazur. Un morphisme de topos $\psi = (\psi^*, \psi_*) : X \rightarrow Y$ est une *équivalence d'Artin-Mazur* [3] si pour tout $m \geq 0$, le morphisme

$$H^m(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^m(X, \psi^*(\mathcal{F})) \quad ,$$

induit par ψ , est un isomorphisme pour tout faisceau localement constant \mathcal{F} sur Y , d'ensembles si $m = 0$, de groupes si $m = 1$, de groupes abéliens si $m \geq 2$.

Une démonstration détaillée de cette caractérisation des équivalences faibles catégoriques est exposée dans [17]. L'idée de la démonstration est de comparer l'espace classifiant $|N(A)|$, réalisation topologique du nerf d'une petite catégorie A , à son topos classifiant \hat{A} . Pour cela, on définit un morphisme de topos, fonctoriel en A ,

$$\mathcal{T}(|N(A)|) \rightarrow \hat{A} \quad ,$$

où pour tout espace topologique X , $\mathcal{T}(X)$ désigne le topos des faisceaux d'ensembles sur X , et on démontre que ce morphisme est une équivalence d'Artin-Mazur. Ensuite, on montre que pour tout espace topologique « gentil » X , par exemple un CW-complexe, la cohomologie du topos $\mathcal{T}(X)$ est canoniquement isomorphe à celle de l'espace topologique X . Enfin, un théorème de Whitehead donne une caractérisation cohomologique des équivalences faibles topologiques, analogue à la définition des équivalences d'Artin-Mazur (les conditions sur le π_0 et le π_1 étant équivalentes aux conditions sur le H^0 et le H^1 non abélien), ce qui permet d'affirmer qu'une application continue $f : X \rightarrow Y$ entre CW-complexes est une équivalence faible topologique si et seulement si le morphisme correspondant de topos $\mathcal{T}(X) \rightarrow \mathcal{T}(Y)$, défini par les foncteurs image inverse et image directe de faisceaux, est une équivalence d'Artin-Mazur. On termine la démonstration, grâce à une propriété du type « deux sur trois » pour les équivalences d'Artin-Mazur, en considérant, pour un morphisme $A \rightarrow B$ de Cat , le carré commutatif de morphismes de topos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(|N(A)|) & \longrightarrow & \hat{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}(|N(B)|) & \longrightarrow & \hat{B} \end{array} \quad ,$$

dont les flèches horizontales sont des équivalences d'Artin-Mazur.

En conclusion, on dispose donc de plusieurs catégories, Top , $\hat{\Delta}$, Cat , dont les objets peuvent servir comme « modèles » pour les types d'homotopie.

Les modélisateurs et les catégories test

Le défi que Grothendieck se pose dans « Pursuing Stacks » [10] est de chercher *toutes* les catégories dont les objets sont des « modèles » pour les types d'homotopie. De façon plus précise, il s'agit de déterminer les couples (M, W) , où M est une catégorie, et W une partie de $\text{Fl}(M)$, tels que la localisation de M par W soit équivalente à la catégorie homotopique Hot . Grothendieck appelle *modélisateur* un tel couple, et *équivalences faibles* les flèches appartenant à W . Il s'intéresse plus particulièrement à la recherche des modélisateurs *canoniques*, autrement dit ceux dont les équivalences faibles sont déterminées canoniquement par la structure même de la catégorie sous-jacente. S'il ne parvient certes pas à donner une réponse complète à une question aussi générale, il obtient, moyennant quelques hypothèses restrictives, une caractérisation des modélisateurs (M, W) dans le cas où M est une catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie. Cela le conduit naturellement à dégager la très belle théorie des catégories test, généralisant celle des ensembles simpliciaux.

Les équivalences d'Artin-Mazur permettent de définir canoniquement une notion d'équivalence faible pour les morphismes d'un topos. Soit X un topos. Pour tout objet x de X , on note X/x le topos des objets de X « au-dessus » de x . On dit qu'un morphisme $\varphi : x \rightarrow x'$ de X est une *équivalence faible* de X si le morphisme de topos $X/x \rightarrow X/x'$, induit par φ , est une équivalence d'Artin-Mazur. En particulier, si A est une petite catégorie, et $X = \widehat{A}$ est le topos des préfaisceaux sur A , un morphisme de préfaisceaux $\varphi : F \rightarrow F'$ est une équivalence faible de \widehat{A} si le morphisme de topos

$$\widehat{A}/F = X/F \rightarrow X/F' = \widehat{A}/F'$$

est une équivalence d'Artin-Mazur. Or, pour tout préfaisceau F sur A , on a un isomorphisme canonique $\widehat{A}/F \simeq \widehat{A/F}$, où A/F désigne la catégorie des objets de A , considérés comme préfaisceaux représentables sur A , au-dessus de F . Ainsi, un morphisme $\varphi : F \rightarrow F'$ de \widehat{A} est une équivalence faible si et seulement si le morphisme de topos $\widehat{A/F} \rightarrow \widehat{A/F'}$ est une équivalence d'Artin-Mazur, autrement dit, si le foncteur $A/F \rightarrow A/F'$, induit par φ , est dans \mathcal{W}_∞ . On obtient ainsi une définition élémentaire des équivalences faibles de \widehat{A} , indépendante de toute considération toposique. On note $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ la partie de $\text{Fl}(\widehat{A})$ formée des équivalences faibles de \widehat{A} . Si l'on note $i_A : \widehat{A} \rightarrow \text{Cat}$ le foncteur associant à un préfaisceau F la catégorie A/F , et à un morphisme de préfaisceaux $\varphi : F \rightarrow F'$ le foncteur $A/F \rightarrow A/F'$, induit par φ , alors $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W}_\infty)$. On remarque que si $A = \Delta$, alors le foncteur i_Δ est canoniquement isomorphe au foncteur Simpl , et par suite que $\mathcal{W}_{\widehat{\Delta}} = \mathcal{W}_\infty$.

La question que Grothendieck se pose est de dégager des conditions nécessaires et suffisantes sur une petite catégorie A pour que le foncteur

$$\bar{i}_A : \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1} \widehat{A} \rightarrow \mathcal{W}_\infty^{-1} \text{Cat} = \text{Hot} \quad ,$$

induit par i_A , soit une équivalence de catégories. Mais il constate qu'il est difficile de trouver des critères pour caractériser les catégories satisfaisant à cette propriété. Il

renforce donc cette dernière en demandant en outre que le foncteur

$$i_A^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad C \mapsto (a \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, C)) \quad ,$$

adjoint à droite de i_A , respecte les équivalences faibles (autrement dit, que l'on ait $i_A^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$). La catégorie A est alors appelée une *catégorie test faible*. Dans ce cas, le foncteur

$$\bar{i}_A^* : \mathbf{Hot} = \mathcal{W}_\infty^{-1} \mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1} \widehat{A} \quad ,$$

induit par i_A^* , est une équivalence de catégories quasi-inverse de \bar{i}_A . De plus, Grothendieck obtient une caractérisation simple des catégories test faibles : pour qu'une petite catégorie A soit une catégorie test faible, il faut et il suffit que pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i_A^*(C)$ soit *asphérique* (on dit qu'un préfaisceau F sur A est asphérique si l'unique foncteur de la catégorie $i_A(F) = A/F$ vers la catégorie ponctuelle est dans \mathcal{W}_∞). Il observe cependant que cette notion n'est pas locale, dans le sens que si A est une catégorie test faible, il n'en est pas nécessairement de même pour A/a , $a \in \mathbf{Ob}(A)$. Ainsi, il appelle *catégorie test locale* une petite catégorie A telle que pour tout objet a de A , A/a soit une catégorie test faible. Enfin, il dit que A est une *catégorie test*, et que \widehat{A} est un *modélisateur élémentaire*, si A est à la fois une catégorie test locale et une catégorie test faible. Ce sont les notions de catégorie test locale et de catégorie test qui s'avèrent être les plus importantes. Ces catégories admettent des caractérisations étonnamment simples. Si on note Δ_1 la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$, alors pour qu'une petite catégorie A soit une catégorie test locale, il faut et il suffit que le préfaisceau $i_A^*(\Delta_1)$ (qui est l'objet de Lawvere du topos \widehat{A} , représentant le foncteur $F \mapsto \{\text{sous-objets de } F\}$) soit *localement asphérique* (on dit qu'un préfaisceau F sur A est localement asphérique si pour tout objet a de A , la restriction de F à A/a est un préfaisceau asphérique sur A/a). De plus, une catégorie test locale est une catégorie test si et seulement si l'unique foncteur de A vers la catégorie ponctuelle est dans \mathcal{W}_∞ (on dit alors que A est *asphérique*). Ces critères permettent facilement de trouver un grand nombre de catégories test et de catégories test locales. On peut par exemple en déduire que le produit d'une catégorie test par une petite catégorie asphérique (resp. arbitraire) est une catégorie test (resp. test locale). En particulier, tout type d'homotopie peut être représenté par une catégorie test locale. La catégorie des simplexes Δ est, comme on s'y attend, un exemple de catégorie test, et celle des ensembles simpliciaux $\widehat{\Delta}$ un exemple de modélisateur élémentaire. Il en est de même pour la catégorie des cubes et celle des ensembles cubiques [7]. Le slogan de Grothendieck est que toute catégorie test est aussi « bonne » que celle des ensembles simpliciaux pour « faire de l'homotopie ».

La dernière (et plus forte) variante de catégorie test, introduite par Grothendieck, est celle de *catégorie test stricte*. Une catégorie test stricte est une catégorie test A telle que le foncteur $i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at$ soit compatible aux produits finis, à équivalence faible près. Cela revient aussi à demander que le foncteur de localisation $\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1} \widehat{A}$ commute aux produits finis. On dit alors que la catégorie \widehat{A} des préfaisceaux sur A

est un *modélisateur élémentaire strict*. Ainsi, dans un modélisateur élémentaire strict, le produit cartésien représente le produit des types d'homotopie. Toute petite sous-catégorie pleine de Cat formée de catégories non vides, stable par produits finis, et ayant un objet qui soit une catégorie comportant au moins deux objets (même éventuellement isomorphes) est une catégorie test stricte. Cela montre que les catégories test strictes abondent. Par exemple, une petite catégorie équivalente à celle des ensembles finis non vides, ou à celle des ensembles ordonnés finis non vides, ou encore à celle des catégories finies non vides est une catégorie test stricte. La catégorie des simplexes Δ est également une catégorie test stricte, et celle des ensembles simpliciaux $\widehat{\Delta}$ un modélisateur élémentaire strict. En revanche, la catégorie des cubes *n'est pas* une catégorie test stricte.

Les foncteurs test

Les foncteurs test généralisent, dans le cadre des catégories test, le foncteur nerf de la théorie simpliciale. Si A est une catégorie test faible, on aimerait appeler foncteur test faible un foncteur $i : A \rightarrow Cat$ tel que si on note i^* le foncteur

$$i^* : Cat \longrightarrow \widehat{A} \quad , \quad C \longmapsto (a \mapsto \text{Hom}_{Cat}(i(a), C)) \quad ,$$

on ait $i^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et le foncteur $\bar{i}^* : \text{Hot} = \mathcal{W}_\infty^{-1}Cat \rightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$, induit par i^* , soit une équivalence de catégories. Par exemple, le foncteur $a \mapsto A/a$ satisfait à ces propriétés, puisque alors i^* est le foncteur i_A^* , déjà considéré, et si A est la catégorie des simplexes Δ , le foncteur d'inclusion $i : \Delta \hookrightarrow Cat$ satisfait aussi à ces conditions, puisque alors i^* est le foncteur nerf N . Néanmoins, il n'y a pas de caractérisation simple des foncteurs satisfaisant à ces propriétés. Or, on remarque que si le foncteur i est pleinement fidèle, alors ces conditions impliquent que pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ est asphérique. Grothendieck ajoute cette dernière condition à la définition d'un foncteur test faible, et il obtient ainsi une notion qui peut être aisément caractérisée.

Plus précisément, il définit un *foncteur test faible* comme étant un foncteur $i : A \rightarrow Cat$, d'une catégorie test faible A vers la catégorie des petites catégories, tel que pour tout objet a de A , $i(a)$ soit une catégorie asphérique, et tel que $i^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Il démontre qu'alors le foncteur $\bar{i}^* : \text{Hot} = \mathcal{W}_\infty^{-1}Cat \rightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$, induit par i^* , est automatiquement une équivalence de catégories, quasi-inverse de \bar{i}_A , et il prouve le critère suivant. Soient A une catégorie test faible, et $i : A \rightarrow Cat$ un foncteur tel que pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ soit asphérique. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) i est un foncteur test faible ;
- (ii) pour toute petite catégorie asphérique C , le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique.

Ensuite, il définit un *foncteur test local* comme étant un foncteur $i : A \rightarrow \mathcal{C}at$, de source une catégorie test locale, tel que pour tout objet a de A , le foncteur $A/a \rightarrow \mathcal{C}at$, induit par i , soit un foncteur test faible, et il obtient la caractérisation suivante. Soient A une petite catégorie arbitraire, et $i : A \rightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ soit asphérique. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est une catégorie test locale, et i un foncteur test local ;
- (ii) pour toute petite catégorie asphérique C , le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique.

Si en outre pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ possède un objet final (ce qui est une condition suffisante d'asphéricité), alors ces deux conditions sont aussi équivalentes à la condition suivante :

- (iii) $i^*(\Delta_1)$ est un préfaisceau localement asphérique.

Cette dernière condition est en général très facile à vérifier, et cette caractérisation est un outil puissant pour trouver des catégories test locales, et des foncteurs test locaux. Enfin, il démontre que si A est une catégorie test, et $i : A \rightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur test local, alors i est aussi un foncteur test faible. On dit alors que i est un *foncteur test*.

Le paradigme de foncteur test est l'inclusion $i : \Delta \hookrightarrow \mathcal{C}at$, qui donne naissance au foncteur nerf $N = i^*$. Les critères ci-dessus montrent facilement que si A est une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ formée de catégories ayant un objet final, stable par produits finis, et telle que la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné Δ_1 soit un objet de A , alors l'inclusion $A \hookrightarrow \mathcal{C}at$ est un foncteur test. De même, si $\tilde{\Delta}$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles, formée des ensembles $\{0, 1, \dots, m\}$, $m \geq 0$, le foncteur associant à un tel ensemble la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné (par inclusion) des ses parties non vides est un foncteur test. En revanche, si Δ' désigne la sous-catégorie (non pleine) de Δ , ayant mêmes objets que Δ , mais dont les morphismes sont les applications strictement croissantes, alors l'inclusion $i' : \Delta' \hookrightarrow \mathcal{C}at$ est un foncteur test faible mais *pas* un foncteur test, et Δ' est une catégorie test faible mais *pas* une catégorie test.

Les localisateurs fondamentaux

Dans son étude des catégories test, Grothendieck observe que ses démonstrations n'utilisent pas la définition même de \mathcal{W}_∞ , mais seulement quelques propriétés formelles de cette classe de flèches, dont la plus importante est le théorème A de Quillen :

Si $u : A \rightarrow B$ est un morphisme de \mathcal{Cat} tel que pour tout objet b de B , $u/b : A/b \rightarrow B/b$ ⁽¹⁾ soit dans \mathcal{W}_∞ , alors u est dans \mathcal{W}_∞ [19].

Grothendieck remarque que dans le contexte toposique, ce résultat est extrêmement naturel. En effet, si $\psi : X \rightarrow Y$ est un morphisme de topos, on dit que ψ est *asphérique* si pour tout objet y de Y , le morphisme de topos $\psi/y : X/y \rightarrow Y/y$, induit par ψ , est une équivalence d'Artin-Mazur. Un argument cohomologique standard montre que pour vérifier l'asphéricité de ψ , on peut se limiter à des y appartenant à une famille génératrice du topos Y . En particulier, si $u : A \rightarrow B$ est un morphisme de \mathcal{Cat} , et si $X = \widehat{A}$, $Y = \widehat{B}$, et $\psi = (u^*, u_*)$, comme les objets de B forment une famille génératrice du topos Y , pour montrer que ψ est asphérique, il suffit de vérifier que pour tout objet b de B ,

$$X/b = \widehat{A}/b \simeq \widehat{A/b} \longrightarrow \widehat{B/b} \simeq \widehat{B}/b = Y/b$$

est une équivalence d'Artin-Mazur, autrement dit, que $A/b \rightarrow B/b$ est dans \mathcal{W}_∞ . Ainsi, cette dernière condition implique l'asphéricité du morphisme de topos $\psi : X \rightarrow Y$, et en particulier, en prenant l'objet final de $Y = \widehat{B}$, on en déduit que $\widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$ est une équivalence d'Artin-Mazur, autrement dit que $u : A \rightarrow B$ est dans \mathcal{W}_∞ , ce qui donne une esquisse de preuve cohomologique du théorème A de Quillen.

Un *localisateur fondamental faible* est une partie \mathcal{W} de $\text{Fl}(\mathcal{Cat})$ satisfaisant aux conditions suivantes :

La (Saturation faible.) Les identités sont dans \mathcal{W} . Si deux des trois flèches d'un triangle commutatif sont dans \mathcal{W} , il en est de même pour la troisième. Si un morphisme i de \mathcal{Cat} admet une rétraction r telle que ir soit dans \mathcal{W} , alors i est dans \mathcal{W} .

Lb (Objet final.) Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors l'unique foncteur de A vers la catégorie ponctuelle est dans \mathcal{W} .

Lc (Théorème A de Quillen.) Si $u : A \rightarrow B$ est un morphisme de \mathcal{Cat} tel que pour tout objet b de B , $u/b : A/b \rightarrow B/b$ soit dans \mathcal{W} , alors u est dans \mathcal{W} .

Grothendieck reprend, dans ce cadre, la théorie des catégories test, en prenant comme équivalences faibles les flèches de \mathcal{Cat} appartenant à \mathcal{W} , et en introduisant la catégorie homotopique relative à \mathcal{W} , $\text{Hot}_\mathcal{W} = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{Cat}$, et les notions de \mathcal{W} -catégorie test, de \mathcal{W} -catégorie test faible ou locale, de \mathcal{W} -foncteur test *etc.* Il vérifie qu'on obtient les mêmes résultats, avec les mêmes démonstrations.

⁽¹⁾Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, et tout objet d de \mathcal{D} , on note \mathcal{C}/d la catégorie des objets de \mathcal{C} au-dessus de d , autrement dit, la catégorie dont les objets sont les couples $(c, s : F(c) \rightarrow d)$, c étant un objet de \mathcal{C} , et s un morphisme de \mathcal{D} , et dont les flèches $(c, s) \rightarrow (c', s')$ sont les morphismes $g : c \rightarrow c'$ de \mathcal{C} tels que $s'F(g) = s$. En particulier, pour toute catégorie \mathcal{D} , et tout objet d , on obtient ainsi la catégorie \mathcal{D}/d des objets de \mathcal{D} au-dessus de d , en considérant le foncteur identique $1_\mathcal{D} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$. Le foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ induit alors un foncteur $F/d : \mathcal{C}/d \rightarrow \mathcal{D}/d$.

L'avantage de cette approche axiomatique est d'une part, sa grande clarté, et d'autre part, le fait qu'elle s'applique à d'autres contextes que celui de la catégorie homotopique classique. Elle s'applique, en particulier, à l'homotopie rationnelle, et plus généralement, à toutes sortes d'équivalences faibles définies par des conditions cohomologiques. Grothendieck propose de considérer les parties \mathcal{W} de $\mathrm{Fl}(\mathcal{Cat})$, définies exactement comme \mathcal{W}_∞ , mais en remplaçant les équivalences d'Artin-Mazur par d'autres classes de morphismes de topos, définies par des conditions cohomologiques. Par exemple, si k désigne un anneau commutatif (on pense plus particulièrement à $k = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$), on peut demander que le morphisme de topos $\psi : X \rightarrow Y$ induise un isomorphisme sur la cohomologie à coefficients dans k , ou à coefficients dans un k -module arbitraire, ou dans les faisceaux localement constants de k -modules. On peut varier en prenant une famille d'anneaux k_i , ou une famille de groupes commutatifs constants, par exemple $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour n premier à un ensemble de nombres premiers, conditions qu'on peut éventuellement combiner avec des conditions sur la 1-cohomologie non-abélienne à coefficients dans des faisceaux localement constants de groupes...

Tous ces localisateurs fondamentaux faibles satisfont à une version relative du théorème A de Quillen exprimant que si une flèche de \mathcal{Cat} est une équivalence faible localement au-dessus d'une base, alors elle est une équivalence faible :

LC (Théorème A de Quillen relatif.) Si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v \quad \swarrow w & \\ & C & \end{array}$$

désigne un triangle commutatif de \mathcal{Cat} , et si pour tout objet c de C , le foncteur $u/c : A/c \rightarrow B/c$, induit par u , est dans \mathcal{W} , alors u est dans \mathcal{W} .

Un *localisateur fondamental* est un localisateur fondamental faible satisfaisant à cette condition (qui implique la condition Lc). Cette hypothèse plus forte sur \mathcal{W} est utile pour certains résultats plus fins que la simple caractérisation des catégories test. Elle sert, par exemple, pour démontrer que l'image directe d'une équivalence faible de préfaisceaux par un monomorphisme est une équivalence faible, ou pour montrer que la classe formée des équivalences faibles de préfaisceaux, qui sont des monomorphismes, est stable par images directes. Elle sert aussi pour prouver que les équivalences faibles (entre catégories ou préfaisceaux) sont stables par limites inductives filtrantes, ou par rétractes. Elle permet également d'établir l'existence des colimites homotopiques, et plus généralement des extensions de Kan homotopiques à gauche, dans \mathcal{Cat} . Enfin, elle fournit le cadre naturel pour étudier deux classes importantes de morphismes de \mathcal{Cat} , les foncteurs propres et les foncteurs lisses, qui sont caractérisés par des propriétés cohomologiques inspirées des théorèmes de changement de base propre ou lisse en géométrie algébrique.

Dans « Pursuing Stacks », Grothendieck conjecture que \mathcal{W}_∞ est le plus petit localisateur fondamental. Cette conjecture, permettant une caractérisation purement axiomatique de \mathcal{W}_∞ , a été démontrée par Cisinski dans sa thèse. Il a depuis amélioré ce résultat, en prouvant que \mathcal{W}_∞ est le plus petit localisateur fondamental *faible* [7].

Les extensions de Kan homotopiques

Le fil conducteur de la théorie de l'homotopie de Grothendieck est le concept d'extension de Kan homotopique, conduisant à la théorie des dérivateurs [11], [12], [15]. Un *localisateur* est un couple (M, W) formé d'une catégorie M , et d'une partie W de $\mathbf{Fl}(M)$ ⁽²⁾. Étant donné un tel localisateur, on associe à toute petite catégorie I , la catégorie $\mathbf{Hot}_{(M, W)}(I)$, localisée de la catégorie des foncteurs de I vers M , relativement à la classe des morphismes de foncteurs qui sont dans W argument par argument. Pour tout foncteur entre petites catégories $u : I \rightarrow J$, on en déduit un foncteur image inverse $u^* : \mathbf{Hot}_{(M, W)}(J) \rightarrow \mathbf{Hot}_{(M, W)}(I)$, induit par la composition par u . Une *extension de Kan homotopique* à gauche ou à droite est un adjoint à gauche ou à droite de u^* . Un cas particulier important, correspondant aux colimites ou limites homotopiques, est celui où la catégorie J est réduite à la catégorie ponctuelle. Un théorème de Cisinski [8] affirme que si le localisateur (M, W) est *Quillenisable*, autrement dit, s'il existe une structure de catégorie de modèles fermée [18] sur M dont les équivalences faibles sont exactement les flèches de M appartenant à W , et si la catégorie M admet des petites limites inductives (resp. projectives), alors les extensions de Kan homotopiques à gauche (resp. à droite) existent. D'autre part, un théorème de Thomason assure que le localisateur $(\mathbf{Cat}, \mathcal{W}_\infty)$ est Quillenisable [22], ce qui prouve l'existence des extensions homotopiques à gauche *et* à droite dans ce cas.

En fait, l'existence des extensions de Kan homotopiques à *gauche* pour ce localisateur est bien plus élémentaire, et se généralise aisément au cas d'un localisateur fondamental arbitraire \mathcal{W} . Pour toute petite catégorie I , notons plus simplement $\mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I)$ la catégorie $\mathbf{Hot}_{(\mathbf{Cat}, \mathcal{W})}(I)$, localisation de la catégorie des foncteurs de I vers la catégorie \mathbf{Cat} des petites catégories par les morphismes de foncteurs qui sont dans \mathcal{W} argument par argument. Pour tout foncteur $F : I \rightarrow \mathbf{Cat}$, on désigne par $\int F \rightarrow I$ la catégorie cofibrée sur I définie par ce foncteur, à l'aide de la « construction de Grothendieck ». Si $u : I \rightarrow J$ désigne un morphisme de \mathbf{Cat} , on en déduit un morphisme composé $\int F \rightarrow J$, d'où un foncteur

$$J \longrightarrow \mathbf{Cat} \quad , \quad j \longmapsto (\int F)/j \quad .$$

On démontre que ce procédé, associant à F le foncteur $j \mapsto (\int F)/j$, induit par localisation un foncteur $u_! : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I) \rightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(J)$, et que ce dernier est un adjoint à

⁽²⁾Quand il n'y a aucune ambiguïté sur la catégorie M , on dit parfois que W est un localisateur.

gauche du foncteur image inverse $u^* : \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(J) \rightarrow \mathbf{Hot}_{\mathcal{W}}(I)$. On généralise ainsi une construction des colimites homotopiques par Thomason [21].

La catégorie de modèles conjecturée par Grothendieck

Le problème de l'existence des extensions de Kan homotopiques à droite, pour un localisateur fondamental arbitraire, est bien plus délicat. Pour essayer de traiter ce problème, Grothendieck conjecture que pour toute \mathcal{W} -catégorie test, il existe une structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des préfaisceaux sur A , dont les équivalences faibles sont les morphismes de \widehat{A} appartenant à $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et dont les cofibrations sont les monomorphismes de \widehat{A} . En fait, cette conjecture n'est vérifiée que moyennant une hypothèse, au demeurant assez anodine, d'*accessibilité* du localisateur fondamental \mathcal{W} .

Soit α un cardinal. On dit qu'un ensemble ordonné I est α -*filtrant* si toute partie de I de cardinalité inférieure ou égale à α admet un majorant dans I . Une limite inductive α -*filtrante* est une limite inductive indexée par un ensemble ordonné α -filtrant. Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des limites inductives α -filtrantes. On dit qu'un objet X de \mathcal{C} est α -*présentable* si le foncteur

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ens} \quad , \quad Y \longmapsto \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

commute aux limites inductives α -filtrantes. Une catégorie α -*accessible* est une catégorie \mathcal{C} admettant des limites inductives α -filtrantes, telle que tout objet soit limite inductive α -filtrante d'objets α -présentables, et telle que la sous-catégorie pleine formée des objets α -présentables soit essentiellement petite (équivalente à une petite catégorie). Une catégorie \mathcal{C} est *accessible* s'il existe un cardinal α tel que \mathcal{C} soit α -accessible. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, entre catégories accessibles, est *accessible* s'il existe un cardinal α tel que le foncteur F commute aux limites inductives α -filtrantes. Une classe d'objets d'une catégorie accessible est *accessible* si la sous-catégorie pleine formée de ces objets est accessible, et si le foncteur d'inclusion est accessible. Une classe de flèches d'une catégorie accessible est *accessible* si la classe correspondante d'objets de la catégorie des flèches est accessible.

La catégorie des préfaisceaux sur une petite catégorie, ainsi que la catégorie des petites catégories, sont accessibles. On dit qu'un localisateur fondamental est *accessible* s'il est accessible comme classe de flèches de \mathbf{Cat} . Si \mathcal{W} est un localisateur fondamental accessible, il résulte aussitôt de la théorie générale de l'accessibilité (voir par exemple [1]) que pour toute petite catégorie A , la classe $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W})$ de flèches de \widehat{A} est accessible. Un théorème de Jeffrey Smith (voir [4]) implique alors facilement que si A est une \mathcal{W} -catégorie test locale (et à plus forte raison si elle est une \mathcal{W} -catégorie test), alors il existe une structure de catégorie de modèles fermée à engendrement cofibrant sur \widehat{A} , dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et dont les

cofibrations sont les monomorphismes de \widehat{A} , ce qui prouve en particulier la conjecture de Grothendieck dans ce cas.

L'inconvénient de cette approche est que l'hypothèse qu'un localisateur fondamental \mathcal{W} soit accessible est à première vue difficile à vérifier. C'est grâce à la belle théorie développée par Cisinski [7] que cette difficulté est surmontée. Il démontre la conjecture de Grothendieck en supposant simplement qu'il existe un *ensemble* de flèches de $\mathcal{C}at$ tel que \mathcal{W} soit le plus petit localisateur fondamental contenant cet ensemble, hypothèse bien plus facile à vérifier. Il appelle un tel localisateur accessible, et il résulte de sa théorie que cette définition est finalement équivalente à la précédente, le théorème difficile étant justement cette équivalence. Il montre aussi une réciproque : si \mathcal{W} est un localisateur fondamental, et s'il existe une catégorie test locale non vide A telle que \widehat{A} admette une structure de catégorie de modèles fermée, à engendrement cofibrant, dont la classe des équivalences faibles est $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et dont les cofibrations sont les monomorphismes, alors \mathcal{W} est accessible.

En fait, l'hypothèse qu'un localisateur fondamental soit accessible n'est pas très restrictive. Il semble en effet qu'on peut montrer, moyennant un axiome de grands cardinaux connu sous le nom de principe de Vopěnka, que *tout* localisateur fondamental est accessible (en utilisant les résultats de [5], ou de [6], ou encore de [20]). On ne s'attend donc pas à trouver un localisateur fondamental non accessible en utilisant uniquement les axiomes de ZFC (Zermelo-Fraenkel plus l'axiome du choix). En revanche, si l'on suppose qu'il n'existe pas de cardinaux mesurables, alors on peut construire un localisateur fondamental non accessible [6]. En particulier, l'axiome de constructibilité de Gödel implique l'existence de tels localisateurs, puisque tout cardinal mesurable est (fortement) inaccessible. Ainsi, l'affirmation « tout localisateur fondamental est accessible » aurait le même statut qu'un axiome de grands cardinaux.

Foncteurs propres, foncteurs lisses

Dans « Pursuing Stacks » [10], Grothendieck a introduit les notions de foncteur propre et de foncteur lisse, en s'inspirant des propriétés cohomologiques des morphismes propres et des morphismes lisses de schémas en géométrie algébrique. Une étude systématique de ces foncteurs a été entreprise par lui dans « Les dérivateurs » [11]. La construction des extensions de Kan homotopiques à gauche à l'aide des catégories cofibrées, exposée précédemment, rend cette théorie élémentaire.

Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. On dit qu'un foncteur entre petites catégories $u : A \rightarrow B$ (resp. $v : B' \rightarrow B$) est \mathcal{W} -*propre* (resp. \mathcal{W} -*lisse*) si pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array} \quad ,$$

le morphisme de changement de base

$$u'_! w^* \longrightarrow v^* u_!$$

(où $u_! : \text{Hot}_{\mathcal{W}}(A) \rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{W}}(B)$ et $u'_! : \text{Hot}_{\mathcal{W}}(A') \rightarrow \text{Hot}_{\mathcal{W}}(B')$ désignent les extensions de Kan homotopiques à gauche relatives à \mathcal{W}) est un isomorphisme, et cette propriété reste vraie après tout changement de base. Grothendieck obtient des caractérisations simples des foncteurs \mathcal{W} -propres et des foncteurs \mathcal{W} -lisses, et il est émerveillé par la découverte du fait qu'un foncteur $u : A \rightarrow B$ est \mathcal{W} -propre si et seulement si le foncteur « dual » $u^\circ : A^\circ \rightarrow B^\circ$, entre les catégories opposées, est \mathcal{W} -lisse, phénomène qui n'a bien entendu aucun analogue en géométrie algébrique. Si le foncteur $u : A \rightarrow B$ fait de A une catégorie cofibrée sur B , alors u est un exemple de foncteur \mathcal{W} -propre. Dualement, si A est une catégorie fibrée sur B , alors u est un foncteur \mathcal{W} -lisse. Néanmoins, pour tout localisateur fondamental \mathcal{W} , il existe des foncteurs \mathcal{W} -propres qui ne sont pas des cofibrations (au sens des catégories cofibrées), et des foncteurs \mathcal{W} -lisses qui ne sont pas des fibrations (au sens des catégories fibrées). La manipulation des changements de base par des foncteurs propres ou lisses s'avère un outil de calcul extrêmement puissant en théorie de l'homotopie, ainsi qu'en algèbre homologique.

La théorie des foncteurs propres et des foncteurs lisses peut, en fait, être développée dans un cadre beaucoup plus général, celui des *structures d'asphéricité*, permettant d'englober aussi la théorie des catégories cofibrées et des catégories fibrées [16].

Le plan du livre

Le premier chapitre est consacré à l'étude des catégories test et des foncteurs test. Dans le premier paragraphe, on introduit le concept de localisateur fondamental faible, ainsi que les notions qui s'y attachent directement : équivalences faibles, catégories asphériques, foncteurs asphériques ou localement asphériques, et on étudie les propriétés élémentaires de ces notions. On démontre qu'un localisateur fondamental faible est stable par le foncteur « passage à la catégorie opposée », ce qui permet d'introduire les notions, « duales » aux précédentes, de foncteur coasphérique et de foncteur colocalement coasphérique. On prouve qu'un adjoint à gauche (resp. à droite) est asphérique (resp. coasphérique), et qu'une cofibration (resp. fibration) à fibres asphériques est un foncteur asphérique (resp. coasphérique). Un lemme « à la Mayer-Vietoris » est établi. Des exemples de localisateurs fondamentaux faibles sont présentés.

Dans le deuxième paragraphe, on définit les équivalences faibles et les morphismes asphériques de préfaisceaux, et on introduit les notions de préfaisceau asphérique et localement asphérique. Une caractérisation des foncteurs asphériques en termes de préfaisceaux est démontrée, et une version préfaisceautique du lemme de « Mayer-Vietoris » est établie.

Dans le paragraphe 3, on définit la catégorie homotopique relative à un localisateur fondamental, et on introduit les notions de pseudo-catégorie test et de catégorie test faible. Plusieurs caractérisations des catégories test faibles sont présentées.

Le paragraphe 4 est consacré aux « outils homotopiques ». On introduit les notions de segment, de segment séparant, et on définit la relation d'homotopie relative à un ensemble de segments et les notions associées d'homotopisme et d'objet contractile. On établit le « lemme d'homotopie » qui relie les notions d'homotopie et d'équivalence faible. On présente l'exemple du segment de Lawvere, crucial pour la suite. On termine par l'étude de la relation d'homotopie dans la catégorie des petites catégories.

Dans le paragraphe 5, on introduit les notions importantes de catégorie test locale et de catégorie test, et on en donne plusieurs caractérisations. On établit une condition suffisante pour qu'une petite catégorie, admettant des produits finis, soit une catégorie test, ce qui permet de présenter une multitude d'exemples. On termine en démontrant que la catégorie des simplexes est une catégorie test.

Dans le paragraphe 6, on étudie la variante la plus forte de catégorie test, celle de catégorie test stricte. Dans ce but, on introduit la notion de petite catégorie totalement asphérique, caractérisée par plusieurs conditions équivalentes, une catégorie test stricte étant une catégorie test qui est totalement asphérique. On constate que la plupart des exemples de catégories test du paragraphe précédent sont en fait des catégories test strictes, et on présente des exemples de catégories test qui ne sont pas strictes. On définit le concept de contracteur, cas particulier de catégorie test stricte, et on démontre que la catégorie des simplexes est un contracteur.

Le paragraphe 7 est consacré à l'étude des foncteurs test. On introduit la notion de foncteur asphérique d'une petite catégorie vers la catégorie des petites catégories (notion à ne pas confondre avec celle de foncteur asphérique entre petites catégories), et on en donne plusieurs caractérisations. On en déduit les notions de foncteur test faible, de foncteur test local et de foncteur test, ainsi que des caractérisations de ces foncteurs. On présente plusieurs exemples de foncteurs test, dont l'inclusion de la catégorie des simplexes dans la catégorie des petites catégories, ce qui permet de retrouver la théorie du foncteur nerf. Enfin, on montre que la sous-catégorie de la catégorie des simplexes, ayant les mêmes objets, et comme morphismes les applications *strictement* croissantes, est une catégorie test faible, mais n'est pas une catégorie test.

Le deuxième chapitre est consacré au concept de localisateur fondamental (version renforcée de la notion de localisateur fondamental faible). Dans le premier paragraphe, on introduit ce concept, et on présente plusieurs définitions équivalentes. On démontre que la catégorie homotopique correspondante admet des produits finis, des sommes finies, et que le foncteur de localisation y commute.

Dans le deuxième paragraphe, on rappelle la « construction de Grothendieck », associant à un foncteur, à valeurs dans la catégorie des petites catégories, une catégorie cofibrée, qui est la « 2-limite inductive » de ce foncteur. Dans le paragraphe suivant,

on utilise cette construction pour prouver que pour tout localisateur fondamental, l'image directe d'une équivalence faible de préfaisceaux par un monomorphisme est une équivalence faible, et que la classe formée des équivalences faibles de préfaisceaux, qui sont des monomorphismes, est stable par images directes et composés transfinis. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, on montre que les catégories filtrantes sont asphériques, et que tout localisateur fondamental est stable par limites inductives filtrantes.

Dans le troisième chapitre, on présente certains aspects élémentaires de la théorie de l'homotopie dans la catégorie des petites catégories. Le premier paragraphe est consacré aux extensions de Kan homotopiques à gauche relatives à un localisateur fondamental arbitraire, et leur construction à l'aide des catégories cofibrées. On obtient une caractérisation des équivalences faibles en termes de colimites homotopiques, et un critère d'asphéricité pour les foncteurs, en termes d'extensions de Kan homotopiques à gauche.

Dans le second paragraphe, on introduit la notion de foncteur propre, ainsi que la notion duale de foncteur lisse, en adoptant une définition élémentaire ne faisant pas intervenir des extensions de Kan homotopiques. On démontre des propriétés de stabilité, et on en donne plusieurs caractérisations. En utilisant les propriétés des morphismes propres, on trouve une nouvelle caractérisation des morphismes coasphériques. Enfin, on démontre des théorèmes de changement de base, pour les morphismes propres ou lisses, analogues à ceux de la géométrie algébrique.

Notations

Les notations suivantes seront utilisées librement, sans autre explication. Pour toute catégorie \mathcal{C} , on notera $\text{Ob}(\mathcal{C})$ la classe des objets de \mathcal{C} , $\text{Fl}(\mathcal{C})$ la classe des flèches, ou morphismes, de \mathcal{C} , et \mathcal{C}° la catégorie opposée. Si c, c' sont deux objets de \mathcal{C} , l'ensemble des morphismes de c vers c' sera noté $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$. Si \mathcal{D} désigne une deuxième catégorie, on notera $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} . Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur admettant une limite inductive (resp. projective), $\varinjlim F$ (resp. $\varprojlim F$) désignera un objet de \mathcal{D} représentant cette limite. Pour toute petite catégorie A , on notera \hat{A} la catégorie $\underline{\text{Hom}}(A^\circ, \mathcal{E}ns)$ des préfaisceaux sur A à valeurs dans la catégorie des ensembles $\mathcal{E}ns$. Pour tout ensemble E , le cardinal de E sera noté $\text{card}(E)$.

CHAPITRE 1

LA THÉORIE DES CATÉGORIES TEST

1.1. Les localisateurs fondamentaux faibles

1.1.1. — Soit M une catégorie. On dit qu'une partie W de $\text{Fl}(M)$ est *faiblement saturée* si elle satisfait aux conditions suivantes :

FS1 Les identités sont dans W .

FS2 Si deux des trois flèches d'un triangle commutatif sont dans W , il en est de même de la troisième.

FS3 Si $i : X' \rightarrow X$ et $r : X \rightarrow X'$ sont deux morphismes de M tels que $ri = 1_{X'}$, et si ir est dans W , il en est de même de r (donc aussi de i , en vertu de FS1 et FS2).

Il résulte de FS1 et FS3 que les isomorphismes sont dans W .

On dit qu'un morphisme $u : A \rightarrow B$ de M est *universellement dans W* si :

- (i) u est *quarrable* (autrement dit, pour tout morphisme $B' \rightarrow B$, le produit fibré $B' \times_B A$ est représentable dans M) ;
- (ii) pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

le morphisme u' est dans W .

1.1.2. — Notons Cat la catégorie des petites catégories, et e un objet final de Cat (une catégorie ayant un seul objet, et l'identité de cet objet comme seul morphisme). On appelle *localisateur fondamental faible* une partie \mathcal{W} de $\text{Fl}(Cat)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

La La partie \mathcal{W} de $\text{Fl}(Cat)$ est faiblement saturée.

Lb Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors $A \rightarrow e$ est dans \mathcal{W} .

Lc Si $u : A \rightarrow B$ est un morphisme de Cat tel que pour tout objet b de B , le morphisme $u/b : A/b \rightarrow B/b$ soit dans \mathcal{W} , alors u est dans \mathcal{W} .

On rappelle que A/b désigne la catégorie dont les objets sont les couples $(a, p : u(a) \rightarrow b)$, où a est un objet de A et p un morphisme de B , un morphisme de (a, p) dans un deuxième objet (a', p') de A/b étant une flèche $f : a \rightarrow a'$ de A telle que $p = p'u(f)$. Le morphisme u/b est le foncteur induit par u .

Les éléments de \mathcal{W} sont appelés des \mathcal{W} -équivalences, ou des *équivalences faibles*. On dit qu'un morphisme $u : A \rightarrow B$ de Cat est \mathcal{W} -*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si pour tout objet b de B , $u/b : A/b \rightarrow B/b$ est une équivalence faible. La condition (Lc) ci-dessus peut donc s'énoncer : un morphisme asphérique de Cat est une équivalence faible. On dit qu'une petite catégorie A est \mathcal{W} -*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si le foncteur $A \rightarrow e$ est asphérique, ou de façon équivalente une équivalence faible. La condition (Lb) affirme donc qu'une petite catégorie admettant un objet final est asphérique.

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible \mathcal{W} .

Proposition 1.1.3. — Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de Cat .

(a) Le foncteur u est asphérique si et seulement si, pour tout objet b de B , la catégorie A/b est asphérique.

(b) Si u est universellement dans \mathcal{W} , alors u est asphérique.

Démonstration. — Pour tout objet b de B , la catégorie B/b admet un objet final $(b, 1_b)$. Il résulte donc des conditions (La) et (Lb) que $u/b : A/b \rightarrow B/b$ est une équivalence faible si et seulement si $A/b \rightarrow e$ l'est, ce qui prouve l'assertion (a). L'assertion (b) résulte de l'observation que le carré

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ u/b \downarrow & & \downarrow u \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

où les flèches horizontales désignent les foncteurs canoniques, est cartésien. \square

Proposition 1.1.4. — Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $A \rightarrow e$ est une équivalence faible ;
- (b) $A \rightarrow e$ est asphérique (autrement dit, A est asphérique) ;
- (c) $A \rightarrow e$ est universellement dans \mathcal{W} .

Démonstration. — L'équivalence de (a) et (b) est évidente. L'implication (c) \Rightarrow (b) résulte de la proposition 1.1.3, (b). Montrons que (a) implique (c). Il s'agit de montrer que pour toute petite catégorie B , la deuxième projection $A \times B \rightarrow B$ est une équivalence faible. En vertu de (Lc) et de la proposition 1.1.3, (a), il suffit de montrer que

pour tout objet b de B , la catégorie $(A \times B)/b$ est asphérique. Or, on a un isomorphisme de catégories $(A \times B)/b \simeq A \times (B/b)$, et comme par hypothèse A est asphérique, il suffit, en vertu de (La), de montrer que la première projection $A \times B/b \rightarrow A$ est une équivalence faible. En vertu de (Lc) et de la proposition 1.1.3, (a), il suffit donc de montrer que pour tout objet a de A , la catégorie $(A \times B/b)/a$ est asphérique. Comme on a un isomorphisme $(A \times B/b)/a \simeq A/a \times B/b$, cela résulte de (Lb), puisque la catégorie $A/a \times B/b$ admet un objet final. \square

Corollaire 1.1.5. — *Le produit de deux petites catégories asphériques est une catégorie asphérique.*

Démonstration. — Soient A et B deux petites catégories asphériques. En vertu de la proposition 1.1.4, la deuxième projection $A \times B \rightarrow B$ est une équivalence faible, donc par (La), $A \times B \rightarrow e$ est une équivalence faible, ce qui prouve le corollaire. \square

Corollaire 1.1.6. — *Soient $u : A \rightarrow B$, $u' : A' \rightarrow B'$ deux morphismes asphériques de Cat . Alors le foncteur $u \times u' : A \times A' \rightarrow B \times B'$ est asphérique.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que pour tout objet (b, b') de $B \times B'$, la catégorie $(A \times A')/(b, b')$ est asphérique. Or, $(A \times A')/(b, b')$ est canoniquement isomorphe à $(A/b) \times (A'/b')$, et par hypothèse, A/b et A'/b' sont asphériques. L'assertion résulte donc du corollaire 1.1.5. \square

Lemme 1.1.7. — *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de Cat . Si u est asphérique, pour tout objet c de C , le morphisme $u/c : A/c \rightarrow B/c$ induit par u est asphérique.*

Démonstration. — On vérifie aussitôt que pour tout objet $(b, p : v(b) \rightarrow c)$ de B/c , la catégorie $(A/c)/(b, p)$ est canoniquement isomorphe à A/b , qui est asphérique puisque u est asphérique, ce qui prouve que u/c est asphérique. \square

Proposition 1.1.8. — *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de Cat . Si u est asphérique, v est asphérique si et seulement si v l'est.*

Démonstration. — Pour tout objet c de C , on a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} A/c & \xrightarrow{u/c} & B/c \\ & \searrow \scriptstyle vu/c & \swarrow \scriptstyle v/c \\ & C/c & \end{array}$$

et, en vertu du lemme 1.1.7, u/c est asphérique et en particulier une équivalence faible (Lc). On en déduit (La) que v/c est une équivalence faible si et seulement si vu/c l'est, ce qui prouve que v est asphérique si et seulement si vu l'est. \square

Proposition 1.1.9. — *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de Cat . Si u admet un adjoint à droite, alors u est asphérique.*

Démonstration. — Si $v : B \rightarrow A$ désigne un adjoint à droite de u , la bijection fonctorielle

$$\text{Hom}_B(u(a), b) \simeq \text{Hom}_A(a, v(b)), \quad a \in \text{Ob}(A), \quad b \in \text{Ob}(B),$$

implique que pour tout objet b de B , la catégorie A/b est isomorphe à la catégorie $A/v(b)$ qui admet un objet final. On en déduit que A/b est asphérique, ce qui prouve la proposition. \square

Corollaire 1.1.10. — *Une équivalence de petites catégories est asphérique.*

Corollaire 1.1.11. — *Une petite catégorie A admettant un objet initial est asphérique.*

Démonstration. — Soient $p_A : A \rightarrow e$ l'unique foncteur de A vers l'objet final de Cat , et $s_A : e \rightarrow A$ le foncteur associant à l'unique objet de e un objet initial de A . On vérifie aussitôt que p_A est un adjoint à droite de s_A . On en déduit que s_A est asphérique (1.1.9), donc une équivalence faible (Lc). Comme $p_A s_A = 1_e$, il résulte de (La) que p_A est une équivalence faible, ce qui prouve l'assertion. \square

1.1.12. — On dit qu'un morphisme $u : A \rightarrow B$ de Cat est *localement \mathcal{W} -asphérique*, ou plus simplement *localement asphérique*, si pour tout objet a de A , le morphisme

$$A/a \rightarrow B/b, \quad b = u(a),$$

induit par u est asphérique.

Exemples 1.1.13

- a) Un foncteur asphérique pleinement fidèle est localement asphérique.
- b) Pour toute petite catégorie C , le foncteur $C \rightarrow e$ est localement asphérique.

Proposition 1.1.14

a) *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de Cat . Pour que u soit localement asphérique, il faut et il suffit que pour tout objet b de B , le foncteur $u/b : A/b \rightarrow B/b$, induit par u , le soit.*

b) *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de Cat . Si u et v sont localement asphériques, il en est de même de vu .*

c) *Soient $u : A \rightarrow B$, $u' : A' \rightarrow B'$ deux morphismes localement asphériques de Cat . Alors le foncteur $u \times u' : A \times A' \rightarrow B \times B'$ est localement asphérique.*

Démonstration. — La première assertion est immédiate, la deuxième résulte de la proposition 1.1.8, et la troisième du corollaire 1.1.6. \square

1.1.15. — Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur. On rappelle que la *fibre* de u au-dessus d'un objet b de B est la sous-catégorie (non pleine) A_b de A dont les objets sont les objets a de A tels que $u(a) = b$, et dont les morphismes sont les flèches f de A telles que $u(f) = 1_b$. Soit $c : a \rightarrow a'$ un morphisme de A . On dit que c est *cocartésien* (relativement à u , ou au-dessus de B) si pour tout morphisme $f : a \rightarrow a''$ tel que $u(f) = u(c)$, il existe un unique morphisme $g : a' \rightarrow a''$ tel que $u(g) = 1_{u(a')}$ et $f = gc$.

$$\begin{array}{ccc} & & a'' \\ & \nearrow f & \uparrow g \\ a & \xrightarrow{c} & a' \end{array}$$

On dit que u est une *précofibration* si pour tout morphisme $p : b \rightarrow b'$ de B , et tout objet a de A au-dessus de b ($u(a) = b$), il existe un morphisme cocartésien $c : a \rightarrow a'$ au-dessus de p ($u(c) = p$). On dit que u est une *cofibration* si u est une précofibration, et si le composé de deux morphismes cocartésiens composables de A est un morphisme cocartésien.

Dualement, on dit qu'un morphisme de A est *cartésien* (relativement à u , ou au-dessus de B) si le morphisme correspondant de A° (catégorie opposée de A) est cocartésien (relativement à $u^\circ : A^\circ \rightarrow B^\circ$). On dit que le foncteur u est une *préfibration* (resp. une *fibration*) si le foncteur u° est une précofibration (resp. une cofibration).

Lemme 1.1.16. — Un foncteur $u : A \rightarrow B$ est une précofibration si et seulement si pour tout objet b de B , le foncteur canonique $A_b \rightarrow A/b$, associant à un objet a de la fibre A_b de u au-dessus de b l'objet $(a, 1_b)$ de A/b , admet un adjoint à gauche.

La démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 1.1.17. — Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de Cat , et supposons que u soit une précofibration. Pour que le foncteur u soit asphérique, il faut et il suffit que pour tout objet b de B , la fibre A_b de u au-dessus de b soit asphérique.

Démonstration. — En vertu du lemme précédent, pour tout objet b de B , le foncteur

$$\begin{aligned} i_b : A_b &\longrightarrow A/b \\ a &\longmapsto (a, 1_b) \end{aligned}$$

admet un adjoint à gauche

$$j_b : A/b \longrightarrow A_b \quad .$$

Il résulte alors de la proposition 1.1.9 que le foncteur j_b est asphérique, donc qu'il est une équivalence faible, ce qui prouve la proposition. \square

1.1.18. — Soit A une catégorie. On définit une catégorie $S(A)$ comme suit :

$$\text{Ob}(S(A)) = \text{Fl}(A) \quad ,$$

et si $f : a \rightarrow b$ et $f' : a' \rightarrow b'$ sont deux objets de $S(A)$, l'ensemble $\text{Hom}_{S(A)}(f, f')$ est formé des couples (g, h) , $g : a' \rightarrow a$, $h : b \rightarrow b'$, tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ g \uparrow & & \downarrow h \\ a' & \xrightarrow{f'} & b' \end{array} \quad f' = hfg$$

soit commutatif. L'identité de f est définie par $1_f = (1_a, 1_b)$, et si

$$(g, h) : f \rightarrow f' \quad \text{et} \quad (g', h') : f' \rightarrow f''$$

sont des morphismes de $S(A)$,

$$(g', h') \circ (g, h) = (gg', h'h) \quad .$$

On définit deux foncteurs :

$$A^\circ \xleftarrow{s_A} S(A) \xrightarrow{t_A} A$$

en posant pour tout objet f de $S(A)$,

$$s_A(f) = \text{source de } f \text{ comme morphisme de } A,$$

$$t_A(f) = \text{but de } f \text{ comme morphisme de } A,$$

et pour tout morphisme (g, h) de $S(A)$,

$$s_A(g, h) = g \quad , \quad t_A(g, h) = h \quad .$$

On vérifie aussitôt que

$$I : S(A) \rightarrow S(A^\circ)$$

$$f \mapsto f \quad , \quad f \in \text{Ob}(S(A)) \quad ,$$

$$(g, h) \mapsto (h, g) \quad , \quad (g, h) \in \text{Fl}(S(A)) \quad ,$$

définit un isomorphisme de catégories tel que

$$s_{A^\circ} I = t_A \quad \text{et} \quad t_{A^\circ} I = s_A \quad .$$

Lemme 1.1.19. — *Pour toute catégorie A , les foncteurs $s_A : S(A) \rightarrow A^\circ$ et $t_A : S(A) \rightarrow A$ sont des cofibrations.*

Démonstration. — Montrons que t_A est une cofibration. Soient $h : b \rightarrow b'$ un morphisme de A , et $f : a \rightarrow b$ un objet de $S(A)$ tel que $t_A(f) = b$. Notons $h_*(f)$ l'objet $h_*(f) = hf : a \rightarrow b'$ de $S(A)$, et $c(h, f)$ le morphisme $c(h, f) = (1_a, h) : f \rightarrow h_*(f)$

de $S(A)$.

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xleftarrow{1_a} & a \\
 f \downarrow & & \downarrow hf \\
 b & \xrightarrow{h} & b'
 \end{array}
 \quad c(h, f) : f \longrightarrow h^*(f)$$

$$b \xrightarrow{h} b'$$

On a $t_A(c(h, f)) = h$, et on vérifie aussitôt que le morphisme $c(h, f)$ est cocartésien (relativement à t_A), ce qui prouve que t_A est une précofibration. En remarquant que pour tout morphisme $h' : b' \rightarrow b''$ de A , on a

$$(h'h)_*(f) = h'hf = h'_*(h_*(f))$$

et

$$c(h', h_*(f))c(h, f) = (1_a, h')(1_a, h) = (1_a, h'h) = c(h'h, f) \quad ,$$

on en déduit que t_A est une cofibration.

En appliquant ce qui précède à la catégorie opposée, on en déduit que $s_A = t_A \circ I$ est aussi une cofibration, ce qui prouve le lemme. \square

Lemme 1.1.20. — *Pour toute petite catégorie A , les foncteurs $s_A : S(A) \rightarrow A^\circ$ et $t_A : S(A) \rightarrow A$ sont asphériques.*

Démonstration. — On vérifie aussitôt que les fibres de s_A et t_A admettent un objet initial. L'assertion résulte alors du corollaire 1.1.11, du lemme 1.1.19 et de la proposition 1.1.17. \square

1.1.21. — Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur. On en déduit un foncteur

$$\begin{aligned}
 S(u) : S(A) &\longrightarrow S(B) \\
 f &\longmapsto u(f) \quad , \quad f \in \text{Ob}(S(A)) \quad , \\
 (g, h) &\longmapsto (u(g), u(h)) \quad , \quad (g, h) \in \text{Fl}(S(A)) \quad ,
 \end{aligned}$$

rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A^\circ & \xleftarrow{s_A} & S(A) & \xrightarrow{t_A} & A \\
 u^\circ \downarrow & & \downarrow S(u) & & \downarrow u \\
 B^\circ & \xleftarrow{s_B} & S(B) & \xrightarrow{t_B} & B
 \end{array} \quad .$$

(1.1.21.1)

Proposition 1.1.22. — *Soient $u : A \rightarrow B$ un morphisme de Cat , et $u^\circ : A^\circ \rightarrow B^\circ$ le foncteur opposé. Alors u est une équivalence faible si et seulement si u° l'est.*

Démonstration. — Considérons le diagramme commutatif 1.1.21.1 ci-dessus. En vertu du lemme 1.1.20 et de (Lc), les morphismes t_A , t_B , s_A et s_B sont des équivalences faibles. En utilisant la propriété de saturation (La), on en déduit que u est une équivalence faible si et seulement si $S(u)$ l'est, et $S(u)$ est une équivalence faible si et seulement si u° l'est, ce qui prouve la proposition. \square

Corollaire 1.1.23. — *Soit A une petite catégorie. Alors A est asphérique si et seulement si la catégorie opposée A° l'est.*

Corollaire 1.1.24. — *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de Cat , et supposons que u soit une préfibration et que pour tout objet b de B , la fibre A_b de u au-dessus de b soit asphérique. Alors u est une équivalence faible.*

Démonstration. — Par définition, u étant une préfibration, le foncteur $u^\circ : A^\circ \rightarrow B^\circ$ est une précofibration, et comme pour tout $b \in \text{Ob}(B)$, $(A^\circ)_b = (A_b)^\circ$, l'assertion résulte du corollaire 1.1.23, de la proposition 1.1.17, de (Lc) et de la proposition 1.1.22. \square

Remarque 1.1.25. — La situation paraît dissymétrique. Cela vient du fait qu'on a privilégié les foncteurs asphériques, ce qui correspond à privilégier la cohomologie par rapport à l'homologie. Pour rétablir la symétrie, il suffit d'introduire la notion de foncteur coasphérique. On dit qu'un morphisme $u : A \rightarrow B$ de Cat est *\mathcal{W} -coasphérique*, ou plus simplement *coasphérique*, si le morphisme $u^\circ : A^\circ \rightarrow B^\circ$ est asphérique. Pour tout objet b de B , notons $b \backslash A$ la catégorie dont les objets sont les couples $(a, p : b \rightarrow u(a))$, où a est un objet de A et p un morphisme de B , un morphisme de (a, p) vers un deuxième objet (a', p') de $b \backslash A$ étant un morphisme $f : a \rightarrow a'$ de A tel que le triangle

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ p \swarrow & & \searrow p' \\ u(a) & \xrightarrow{u(f)} & u(a') \end{array}$$

soit commutatif. On a un isomorphisme canonique $A^\circ/b \simeq (b \backslash A)^\circ$, et le foncteur

$$b \backslash u : b \backslash A \rightarrow b \backslash B \quad ,$$

induit par u , s'identifie au foncteur

$$(u^\circ/b)^\circ : (A^\circ/b)^\circ \rightarrow (B^\circ/b)^\circ \quad .$$

Il résulte alors de la proposition 1.1.22 (resp. du corollaire 1.1.23 et de la proposition 1.1.3, (a)) que $u : A \rightarrow B$ est coasphérique si et seulement si, pour tout objet b de B , le foncteur $b \backslash u : b \backslash A \rightarrow b \backslash B$ est une équivalence faible (resp. la catégorie $b \backslash A$ est asphérique). En vertu de (Lc) et de la proposition 1.1.22, un foncteur coasphérique est une équivalence faible. En vertu de la proposition 1.1.9, un foncteur admettant un adjoint à gauche est coasphérique. Enfin, il résulte de la proposition 1.1.17 et du

corollaire 1.1.23 que si u est une préfibration, alors u est coasphérique si et seulement s'il est à fibres asphériques. On dit qu'un morphisme $u : A \rightarrow B$ de \mathcal{Cat} est *colocalement \mathcal{W} -coasphérique*, ou plus simplement *colocalement coasphérique*, si le morphisme $u^\circ : A^\circ \rightarrow B^\circ$ est localement asphérique. Le foncteur u est colocalement coasphérique si et seulement si pour tout objet a de A , le foncteur $a \backslash A \rightarrow u(a) \backslash B$, induit par u , est coasphérique.

1.1.26. — Soit A une catégorie. On rappelle qu'un *crible* de A est une sous-catégorie pleine U de A , telle que pour tout morphisme $a' \rightarrow a$ de A , si a est un objet de U , il en est de même de a' . Un *cocrible* de A est une sous-catégorie pleine F de A telle que F° soit un crible de A° , autrement dit, telle que pour tout morphisme $a \rightarrow a'$ de A , si a est un objet de F , il en est de même de a' . Si Δ_1 désigne la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$, alors pour tout foncteur $u : A \rightarrow \Delta_1$, $u^{-1}(0)$ (resp. $u^{-1}(1)$) est un crible (resp. un cocrible) de A , et l'application :

$$u \longmapsto u^{-1}(0) \quad (\text{resp. } u \longmapsto u^{-1}(1))$$

établit une bijection de la classe des foncteurs de A vers Δ_1 sur celle des cribles (resp. cocribles) de A .

Proposition 1.1.27. — Soient A une petite catégorie, et U_1, U_2 deux cribles de A tels que $A = U_1 \cup U_2$. Alors si U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont asphériques, il en est de même de A .

Démonstration. — Se donner un crible de A équivaut à se donner un foncteur $A \rightarrow \Delta_1$, le crible étant l'image réciproque de 0. La donnée des cribles U_1 et U_2 de A équivaut à la donnée d'un foncteur $A \rightarrow \Delta_1 \times \Delta_1$, et dire que A est la réunion des cribles U_1 et U_2 équivaut à dire que ce foncteur se factorise par la sous-catégorie

$$B = \left\{ \begin{array}{ccc} & & (0, 1) \\ & \nearrow & \\ (0, 0) & & \\ & \searrow & \\ & & (1, 0) \end{array} \right\}$$

de $\Delta_1 \times \Delta_1$, et alors $U_1 \simeq A/(0, 1)$, $U_2 \simeq A/(1, 0)$ et $U_1 \cap U_2 \simeq A/(0, 0)$. L'hypothèse que U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont asphériques implique donc que le foncteur $A \rightarrow B$ est asphérique. Comme B admet un objet initial, il résulte du corollaire 1.1.11 que B est asphérique. Il résulte alors de (Lc) et (La) que A est asphérique, ce qui prouve la proposition. \square

Corollaire 1.1.28. — Soient A une petite catégorie, et F_1, F_2 deux cocribles de A tels que $A = F_1 \cup F_2$. Alors si F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ sont asphériques, il en est de même de A .

Démonstration. — Le corollaire résulte, en vertu de 1.1.23, de la proposition 1.1.27, appliquée à la catégorie opposée A° . \square

Exemple 1.1.29. — La classe $\text{Fl}(\text{Cat})$ de toutes les flèches de Cat est un localisateur fondamental faible appelé *localisateur fondamental trivial*. On dit qu'un localisateur fondamental faible \mathcal{W} est *non trivial* si $\mathcal{W} \neq \text{Fl}(\text{Cat})$.

Proposition 1.1.30. — Si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} n'est pas trivial, alors toute catégorie asphérique est non vide.

Démonstration. — En effet, supposons que la catégorie vide \emptyset soit asphérique. Pour toute petite catégorie C , le carré

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \emptyset \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & e \end{array}$$

étant cartésien, il résulte de la proposition 1.1.4 que $\emptyset \rightarrow C$ est une équivalence faible, ce qui implique que la catégorie C est asphérique. Ainsi, toute petite catégorie est asphérique, et on en déduit, par la condition de saturation (La), que tout morphisme de Cat est une équivalence faible, ce qui contredit la non trivialité de \mathcal{W} . \square

Exemple 1.1.31. — La partie \mathcal{W}_{gr} de $\text{Fl}(\text{Cat})$ formée du foncteur identique de la catégorie vide, et de tous les foncteurs de source (donc aussi de but) une catégorie non vide est un localisateur fondamental faible. On dit qu'un localisateur fondamental faible \mathcal{W} est *grossier* s'il contient \mathcal{W}_{gr} . Il résulte immédiatement de la proposition 1.1.30 que les seuls localisateurs fondamentaux faibles grossiers sont \mathcal{W}_{gr} et le localisateur fondamental trivial $\text{Fl}(\text{Cat})$.

Exemple 1.1.32. — Soit π_0 le foncteur de Cat vers la catégorie des ensembles, associant à une petite catégorie l'ensemble de ses composantes connexes. Pour toute petite catégorie A , l'ensemble $\pi_0(A)$ est le quotient de l'ensemble $\text{Ob}(A)$ par la relation d'équivalence engendrée par la relation

$$a \sim a' \iff \text{Hom}_A(a, a') \neq \emptyset \quad , \quad a, a' \in \text{Ob}(A) \quad .$$

Le foncteur π_0 est adjoint à gauche du foncteur associant à un ensemble E la catégorie discrète correspondante, autrement dit, la catégorie ayant E comme ensemble d'objets et les identités de ces objets comme seuls morphismes. En particulier, le foncteur π_0 commute aux limites inductives. On pose

$$\mathcal{W}_0 = \{u \in \text{Fl}(\text{Cat}) \mid \pi_0(u) \text{ est bijectif} \} \quad .$$

Alors \mathcal{W}_0 est un localisateur fondamental faible. En effet, les conditions (La) et (Lb) sont évidentes, et la condition (Lc) résulte de la commutativité du foncteur π_0 aux limites inductives, et de l'observation que pour toute flèche $u : A \rightarrow B$ de Cat , on a un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{b \in \text{Ob}(B)} A/b \xrightarrow{\sim} A \quad ,$$

où la limite inductive ci-dessus désigne, par abus de notations, la limite inductive du foncteur

$$F_u : B \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \quad b \longmapsto A/b \quad .$$

Exemple 1.1.33. — Il résulte aussitôt du théorème A de Quillen [19] que la partie \mathcal{W}_∞ de $\text{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée des équivalences faibles usuelles de $\mathcal{C}at$, autrement dit, des morphismes de $\mathcal{C}at$ induisant une équivalence d'homotopie des espaces classifiants correspondants, est un localisateur fondamental faible. On démontre que \mathcal{W}_∞ est le plus petit localisateur fondamental faible [7].

Exemple 1.1.34. — Soit n un entier, $n \geq 0$. On dit qu'une flèche de $\mathcal{C}at$ est une n -équivalence si elle appartient à \mathcal{W}_0 , et si pour tout entier m , $1 \leq m \leq n$, elle induit un isomorphisme des m -ièmes groupes d'homotopie des espaces classifiants correspondants, et ceci pour tout choix de point base. Alors si l'on note \mathcal{W}_n la partie de $\text{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée des n -équivalences, \mathcal{W}_n est un localisateur fondamental faible [7].

1.2. Les équivalences faibles dans une catégorie de préfaiseaux

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible \mathcal{W} .

1.2.1. — On se fixe une petite catégorie A . On note \widehat{A} la catégorie des préfaiseaux d'ensembles sur A . Pour tout objet a de A , on note aussi a le préfaiseau $x \mapsto \text{Hom}_A(x, a)$ représenté par a , et on identifie A à une sous-catégorie pleine de \widehat{A} . On définit un couple de foncteurs :

$$\begin{aligned} i_A : \widehat{A} &\longrightarrow \mathcal{C}at \quad , & i_A^* : \mathcal{C}at &\longrightarrow \widehat{A} \\ F &\longmapsto A/F \quad , & C &\longmapsto (a \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, C)) \end{aligned}$$

et des morphismes de foncteurs :

$$\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at} \quad , \quad \eta : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A \quad .$$

Pour toute petite catégorie C , le foncteur :

$$\varepsilon_C : A/i_A^*(C) \longrightarrow C$$

est défini par :

$$(a, A/a \xrightarrow{v} C) \longmapsto v(a, 1_a) \quad ,$$

et pour tout préfaiseau F , et tout objet a de A , l'application :

$$\eta_F(a) : F(a) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, A/F)$$

est définie par :

$$(a \xrightarrow{s} F) \longmapsto (A/a \xrightarrow{s_*} A/F) \quad ,$$

où s_* est défini par :

$$(x, p : x \longrightarrow a) \longmapsto (x, sp : x \longrightarrow F) \quad .$$

Proposition 1.2.2. — *Le couple des foncteurs (i_A, i_A^*) est un couple de foncteurs adjoints (le foncteur i_A est adjoint à gauche du foncteur i_A^*) et les morphismes de foncteurs*

$$(1.2.2.1) \quad \varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{Cat} \quad , \quad \eta : 1_{\hat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A$$

sont les morphismes d'adjonction.

La démonstration est laissée au lecteur.

1.2.3. — On dit qu'un morphisme de préfaisceaux sur A :

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

est une *équivalence faible*, ou une \mathcal{W} -*équivalence*, si le foncteur correspondant :

$$i_A(\varphi) : A/F \longrightarrow A/G$$

est une équivalence faible. On note $\mathcal{W}_{\hat{A}}$ la classe des équivalences faibles de \hat{A} :

$$(1.2.3.1) \quad \mathcal{W}_{\hat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W}) \quad .$$

L'ensemble des équivalences faibles de \hat{A} est une partie faiblement saturée de $\text{Fl}(\hat{A})$. On dit qu'un morphisme de préfaisceaux :

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

est \mathcal{W} -*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si le foncteur correspondant :

$$i_A(\varphi) : A/F \longrightarrow A/G$$

est asphérique. En vertu de (Lc) (1.1.2), un morphisme asphérique de préfaisceaux est une équivalence faible.

Proposition 1.2.4. — *Soit $\varphi : F \longrightarrow G$ un morphisme de préfaisceaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) φ est asphérique ;
- (b) pour tout objet a de A , et tout morphisme $a \longrightarrow G$ de \hat{A} , la catégorie $A/(a \times_G F)$ est asphérique ;
- (c) φ est universellement dans $\mathcal{W}_{\hat{A}}$ (1.1.1).

Démonstration. — Dire que φ est asphérique signifie que le foncteur $A/F \longrightarrow A/G$ est asphérique, autrement dit, que pour tout objet $(a, s : a \longrightarrow G)$ de A/G , la catégorie $(A/F)/(a, s) \simeq A/(a \times_G F)$ est asphérique (1.1.3), ce qui prouve l'équivalence de (a) et (b).

Si φ est universellement dans $\mathcal{W}_{\hat{A}}$, en particulier, pour tout morphisme $a \longrightarrow G$, avec a objet de A , le morphisme $a \times_G F \longrightarrow a$ est dans $\mathcal{W}_{\hat{A}}$, donc le foncteur

$A/(a \times_G F) \rightarrow A/a$ est une équivalence faible, et comme A/a admet un objet final, il en résulte que $A/(a \times_G F)$ est asphérique, ce qui prouve $(c) \Rightarrow (b)$.

Supposons maintenant φ asphérique, et soit $G' \rightarrow G$ un morphisme arbitraire de préfaiseaux. Montrons que $G' \times_G F \rightarrow G'$ est dans $\mathcal{W}_{\hat{A}}$. Il suffit de montrer qu'il est asphérique, autrement dit, en vertu de l'implication $(b) \Rightarrow (a)$, que pour tout morphisme $a \rightarrow G'$ de \hat{A} , $A/(a \times_{G'} G' \times_G F) \simeq A/(a \times_G F)$ est asphérique, ce qui résulte de l'asphéricité de φ et de l'implication $(a) \Rightarrow (b)$. On a donc $(a) \Rightarrow (c)$. \square

1.2.5. — Soit F un objet de \hat{A} . On dit que F est *\mathcal{W} -asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si la catégorie A/F est asphérique, autrement dit si $i_A(F)$ est asphérique. Si F est un préfaiseau représentable, la catégorie A/F admet un objet final, et il en résulte que F est asphérique. En vertu de la proposition 1.2.4, un morphisme $u : F \rightarrow G$ de \hat{A} est asphérique si et seulement si pour tout morphisme $a \rightarrow G$ de \hat{A} , avec a objet de A , le préfaiseau $a \times_G F$ est asphérique.

1.2.6. — Pour toute petite catégorie A , on note $e_{\hat{A}}$ un objet final de \hat{A} . Considérons les propriétés :

- (a) le préfaiseau F est asphérique ;
- (b) le morphisme $F \rightarrow e_{\hat{A}}$ est une équivalence faible ;
- (c) le morphisme $F \rightarrow e_{\hat{A}}$ est asphérique ;
- (d) le morphisme $F \rightarrow e_{\hat{A}}$ est universellement dans $\mathcal{W}_{\hat{A}}$.

En vertu de la proposition 1.2.4, les conditions (c) et (d) sont équivalentes, et en vertu de (Lc) (1.1.2), ces conditions impliquent la condition (b) qui est, en général, strictement plus faible. Si la catégorie A n'est pas asphérique aucune des conditions (b), (c), (d) n'implique la condition (a). Si A est asphérique, ce qui équivaut à affirmer que $e_{\hat{A}}$ est asphérique, alors les conditions (a) et (b) sont équivalentes (et l'équivalence de ces conditions pour tout F équivaut à l'asphéricité de A), mais toujours plus faibles, en général, que les conditions équivalentes (c) et (d). On verra que ces quatre conditions sont équivalentes si et seulement si A est totalement asphérique (1.6.2). On dit que F est *localement \mathcal{W} -asphérique*, ou plus simplement *localement asphérique*, s'il satisfait aux conditions équivalentes (c) et (d).

Cette terminologie est justifiée par l'observation suivante : un préfaiseau F est localement asphérique si et seulement si, pour tout $a \in \text{Ob}(A)$, le préfaiseau $F|(A/a)$, induit par F sur A/a , est asphérique. En effet, on a des isomorphismes canoniques

$$(A/a)/(F|(A/a)) \simeq A/(a \times F) \simeq A/(a \times_{e_{\hat{A}}} F) \quad .$$

Plus généralement, on dit qu'un morphisme $\varphi : F \rightarrow G$ de préfaiseaux sur A est une *\mathcal{W} -équivalence locale*, ou une *équivalence faible locale*, si pour tout objet a de A , le morphisme de préfaiseaux

$$\varphi|(A/a) : F|(A/a) \longrightarrow G|(A/a) \quad ,$$

induit par φ , est une équivalence faible de $\widehat{A/a}$, autrement dit, si pour tout objet a de A , le morphisme

$$1_a \times \varphi : a \times F \longrightarrow a \times G$$

est une équivalence faible de \widehat{A} . On remarque qu'un préfaisceau F sur A est localement asphérique si et seulement si le morphisme $F \rightarrow e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible locale.

Proposition 1.2.7. — *Soient A une petite catégorie, F un préfaisceau sur A , et F_1 et F_2 deux sous-préfaisceaux de F tels que $F = F_1 \cup F_2$. Si les préfaisceaux F_1 , F_2 et $F_1 \cap F_2$ sont asphériques, il en est de même du préfaisceau F .*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que la catégorie A/F est asphérique. Par hypothèse, les catégories A/F_1 , A/F_2 et $A/F_1 \cap F_2$ sont asphériques. Or, A/F_1 et A/F_2 s'identifient à des cribles de A/F , $A/F_1 \cap F_2$ s'identifiant au crible intersection. L'hypothèse $F = F_1 \cup F_2$ implique que A/F est la réunion des cribles A/F_1 et A/F_2 . L'assertion résulte donc de la proposition 1.1.27. \square

1.2.8. — Soit maintenant $u : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathcal{Cat} . On note $u^* : \widehat{B} \rightarrow \widehat{A}$ le foncteur « image réciproque par u », associant à un préfaisceau F de \widehat{B} le préfaisceau $F \circ u$ de \widehat{A} . Pour tout préfaisceau F de \widehat{B} , le foncteur $u : A \rightarrow B$ induit un foncteur

$$u/F : A/F = A/u^*(F) \longrightarrow B/F$$

$$(a, a \xrightarrow{s} u^*(F)) \mapsto (u(a), u(a) \xrightarrow{s} F)$$

(en considérant, par Yoneda, s comme un élément de $u^*(F)(a) = F(u(a))$). On définit ainsi un morphisme de foncteurs

$$\lambda := \lambda_u : i_A u^* \longrightarrow i_B \quad ,$$

en posant $\lambda_F = u/F$, pour F objet de \widehat{B} .

Proposition 1.2.9. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) u est asphérique ;
- (b) pour qu'un préfaisceau F de \widehat{B} soit asphérique, il faut et il suffit que le préfaisceau $u^*(F)$ de \widehat{A} soit asphérique ;
- (b') si F est un préfaisceau asphérique de \widehat{B} , alors $u^*(F)$ est un préfaisceau asphérique de \widehat{A} ;
- (b'') pour tout objet b de B , le préfaisceau $u^*(b)$ de \widehat{A} est asphérique ;
- (c) pour tout préfaisceau F de \widehat{B} , le foncteur $\lambda_F : A/u^*(F) \rightarrow B/F$ est une équivalence faible ;
- (c') pour tout préfaisceau F de \widehat{B} , le foncteur $\lambda_F : A/u^*(F) \rightarrow B/F$ est asphérique ;
- (c'') pour tout objet b de B , le foncteur $\lambda_b : A/u^*(b) \rightarrow B/b$ est une équivalence faible ;

et si ces conditions sont satisfaites, on a :

(d) pour qu'un morphisme φ de \widehat{B} soit une équivalence faible, il faut et il suffit que $u^*(\varphi)$ soit une équivalence faible de \widehat{A} .

De plus, si A et B sont asphériques, les conditions (a) à (d) sont équivalentes, et équivalentes à la condition :

(d') si φ est une équivalence faible de \widehat{B} , alors $u^*(\varphi)$ est une équivalence faible de \widehat{A} .

Démonstration. — L'implication $(b) \Rightarrow (b')$ est évidente, l'implication $(b') \Rightarrow (b'')$ résulte du fait qu'un préfaiseau représentable est asphérique (1.2.5), l'implication $(b'') \Rightarrow (c'')$ de La et Lb, (1.1.2), l'implication $(c'') \Rightarrow (c')$ de l'observation que pour tout préfaiseau F de \widehat{B} , et tout objet $(b, b \xrightarrow{s} F)$ de B/F , on a des isomorphismes canoniques $(B/F)/(b, s) \simeq B/b$ et $(A/u^*(F))/(b, s) \simeq A/b = A/u^*(b)$, l'implication $(c') \Rightarrow (c)$ de Lc (1.1.2), et l'implication $(c) \Rightarrow (b)$ de La (1.1.2). Enfin, on remarque que (c'') est une paraphrase de (a), ce qui prouve l'équivalence des conditions (a) à (c'') .

L'implication $(c) \Rightarrow (d)$ résulte de la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} A/u^*(F) & \xrightarrow{i_A(u^*(\varphi))} & A/u^*(G) \\ \lambda_F \downarrow & & \downarrow \lambda_G \\ B/F & \xrightarrow{i_B(\varphi)} & B/G \end{array} \quad ,$$

pour $\varphi : F \rightarrow G$ morphisme de \widehat{B} , et de la condition de saturation La (1.1.2).

Si A et B sont asphériques, montrons l'implication $(d') \Rightarrow (b')$. Soit donc F un préfaiseau asphérique de \widehat{B} . Comme B est asphérique, le morphisme canonique $\varphi : F \rightarrow e_{\widehat{B}}$ est une équivalence faible de \widehat{B} , et en vertu de (d') , $u^*(\varphi) : u^*(F) \rightarrow u^*(e_{\widehat{B}}) = e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible de \widehat{A} . Comme A est asphérique, on en déduit que $u^*(F)$ est asphérique. L'implication $(d) \Rightarrow (d')$ étant évidente, ceci prouve, sous l'hypothèse de l'asphéricité de A et B , l'équivalence des conditions (a) à (d') , et achève la démonstration de la proposition. \square

Corollaire 1.2.10. — Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme localement asphérique de Cat .

(a) Pour tout préfaiseau localement asphérique F de \widehat{B} , $u^*(F)$ est un préfaiseau localement asphérique de \widehat{A} .

(b) Pour toute équivalence faible locale φ de \widehat{B} , $u^*(\varphi)$ est une équivalence faible locale de \widehat{A} .

Si de plus le foncteur u induit une surjection sur les objets, alors on a les assertions suivantes.

(a') Pour qu'un préfaiseau F de \widehat{B} soit localement asphérique, il faut et il suffit que le préfaiseau $u^*(F)$ de \widehat{A} le soit.

(b') Pour qu'un morphisme φ de \widehat{B} soit une équivalence faible locale, il faut et il suffit que le morphisme $u^*(\varphi)$ de \widehat{A} le soit.

Démonstration. — Le corollaire est conséquence immédiate de la proposition précédente, et du fait que pour tout préfaisceau F sur B , et tout objet a de A , on a un isomorphisme

$$u^*(F)|_{A/a} \simeq (u/a)^*(F|_{B/u(a)})$$

$$\begin{array}{ccc} A/a & \longrightarrow & A \\ u/a \downarrow & & \downarrow u \\ B/u(a) & \longrightarrow & B \end{array}$$

fonctoriel en F . □

1.2.11. — Soient maintenant A et B deux petites catégories. On définit un foncteur

$$\boxtimes : \widehat{A} \times \widehat{B} \longrightarrow \widehat{A \times B}$$

$$(F, G) \longmapsto pr_1^*(F) \times pr_2^*(G) \quad ,$$

où

$$\begin{array}{ccc} & A \times B & \\ pr_1 \swarrow & & \searrow pr_2 \\ A & & B \end{array}$$

désignent les projections. On vérifie aussitôt qu'on a un isomorphisme fonctoriel canonique :

$$i_{A \times B}(F \boxtimes G) = A \times B / F \boxtimes G \xrightarrow{\sim} A/F \times B/G = i_A(F) \times i_B(G) \quad .$$

Proposition 1.2.12. — a) Soient F, G des préfaisceaux sur A, B respectivement. Si F et G sont asphériques (resp. localement asphériques), il en est de même de $F \boxtimes G$.

b) Soient $u : F \rightarrow F', v : G \rightarrow G'$ des morphismes de préfaisceaux sur A, B respectivement. Si les morphismes u et v sont asphériques, il en est de même de $u \boxtimes v$.

Démonstration. — La proposition résulte aussitôt de ce qui précède et des corollaires 1.1.5 et 1.1.6. □

1.3. Les catégories test faibles

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible \mathcal{W} .

1.3.1. — Soient M une catégorie, et W une partie de $\text{Fl}(M)$. On rappelle qu'il existe (quitte à agrandir l'univers de base) une catégorie $W^{-1}M$ et un foncteur $\gamma : M \rightarrow W^{-1}M$ tel que, pour tout $w \in W$, $\gamma(w)$ soit un isomorphisme de $W^{-1}M$, et qui soient universels pour cette propriété. Autrement dit, pour tout foncteur

$F : M \rightarrow M'$ tel que, pour tout $w \in W$, $F(w)$ soit inversible, il existe un unique foncteur $\tilde{F} : W^{-1}M \rightarrow M'$ tel que $F = \tilde{F}\gamma$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\gamma} & W^{-1}M \\ & \searrow F & \downarrow \tilde{F} \\ & & M' \end{array}$$

On dit que $W^{-1}M$ est la *catégorie des fractions de M relativement à W* , ou la *localisation de M par W* , et que γ est le *foncteur de localisation*. On dit que la partie W de $\text{Fl}(M)$ est *fortement saturée* si W est formée exactement des flèches qui deviennent inversibles par le foncteur de localisation. On vérifie aussitôt qu'une partie fortement saturée de $\text{Fl}(M)$ est aussi faiblement saturée (cf. 1.1.1). On dit que le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est un *localisateur fondamental faible fortement saturé* si la partie \mathcal{W} de $\text{Fl}(\text{Cat})$ est fortement saturée.

1.3.2. — On appelle *catégorie homotopique relative au localisateur fondamental faible \mathcal{W}* , ou plus simplement *catégorie homotopique*, et on note $\text{Hot}_{\mathcal{W}}$, ou plus simplement Hot , la catégorie $\mathcal{W}^{-1}\text{Cat}$. On appelle *foncteur de localisation canonique* et on note $\gamma_{\mathcal{W}}$, ou plus simplement γ , le foncteur de localisation $\gamma : \text{Cat} \rightarrow \text{Hot}$.

Si \mathcal{W} est le localisateur fondamental trivial (1.1.29), $\mathcal{W} = \text{Fl}(\text{Cat})$, alors la catégorie homotopique $\text{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à l'objet final de Cat . Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{gr}$ (1.1.31), alors la catégorie $\text{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à la catégorie $\Delta_1 = \{0 \rightarrow 1\}$. Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0$ (1.1.32), alors la catégorie $\text{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à la catégorie des ensembles, et le foncteur de localisation canonique s'identifie au foncteur π_0 . Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\infty}$ est formé des équivalences faibles usuelles (1.1.33), alors la catégorie $\text{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à la catégorie homotopique usuelle des CW-complexes. Si n est un entier, $n \geq 0$, et si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_n$ est formé des n -équivalences (1.1.34), alors la catégorie $\text{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à la catégorie des n -types d'homotopie.

1.3.3. — On appelle *\mathcal{W} -modélisateur*, ou plus simplement *modélisateur*, un couple (M, W) , où M est une catégorie et W une partie faiblement saturée de $\text{Fl}(M)$, tel que la catégorie des fractions $W^{-1}M$ soit équivalente à la catégorie homotopique Hot . Si (M, W) et (M', W') sont deux modélisateurs, on dit qu'un foncteur $F : M \rightarrow M'$ est un *morphisme de modélisateurs* si :

- (a) $W = F^{-1}(W')$;
- (b) le foncteur $\bar{F} : W^{-1}M \rightarrow W'^{-1}M'$, induit par F , est une équivalence de catégories.

Le couple $(\text{Cat}, \mathcal{W})$ est un modélisateur, appelé le *modélisateur fondamental*.

1.3.4. — On se fixe une petite catégorie A . On rappelle que

$$i_A : \hat{A} \rightarrow \text{Cat}$$

désigne le foncteur canonique :

$$F \longmapsto A/F$$

(cf. 1.2.1), et que

$$\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W})$$

désigne la classe des équivalences faibles de \widehat{A} (cf. 1.2.3). On note $\text{Hot}_{\mathcal{W},A}$, ou plus simplement Hot_A , la catégorie des fractions $\mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$ et $\gamma_A : \widehat{A} \rightarrow \text{Hot}_A$ le foncteur de localisation. On dit que A est une \mathcal{W} -pseudo-catégorie test, ou plus simplement une pseudo-catégorie test, si :

- (a) A est asphérique;
- (b) le foncteur :

$$\bar{i}_A : \text{Hot}_A = \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\text{Cat} = \text{Hot}$$

induit par i_A est une équivalence de catégories.

Proposition 1.3.5. — *Si \mathcal{W} est un localisateur fondamental faible fortement saturé, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) A est une pseudo-catégorie test;
- (b) $(\widehat{A}, \mathcal{W}_{\widehat{A}})$ est un modélisateur, et le foncteur i_A est un morphisme de modélisateurs vers le modélisateur fondamental $(\text{Cat}, \mathcal{W})$.

Démonstration. — L'implication (a) \Rightarrow (b) est évidente. Pour montrer l'implication (b) \Rightarrow (a), il suffit de montrer que la condition (b) implique que A est asphérique, autrement dit que le foncteur canonique $A \rightarrow e$, où e désigne la catégorie ponctuelle, est une équivalence faible. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A} & \xrightarrow{i_A} & \text{Cat} \\ \gamma_A \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \text{Hot}_A & \xrightarrow{\bar{i}_A} & \text{Hot} \end{array} \quad .$$

Le localisateur fondamental faible \mathcal{W} étant fortement saturé, il suffit de montrer que $\gamma(A) \rightarrow \gamma(e)$ est un isomorphisme. Or, on a $A \simeq A/e_{\widehat{A}} = i_A(e_{\widehat{A}})$, où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de \widehat{A} , et $\gamma(A) \simeq \gamma i_A(e_{\widehat{A}}) = \bar{i}_A \gamma_A(e_{\widehat{A}})$, et comme par hypothèse \bar{i}_A est une équivalence de catégories, l'assertion résulte du fait que l'image d'un objet final par une équivalence de catégories est un objet final, et du lemme suivant. \square

Lemme 1.3.6. — *Soient M une catégorie, W une classe de flèches de M , et $\gamma_M : M \rightarrow W^{-1}M$ le foncteur de localisation. Si e_M est un objet final de M , alors $\gamma_M(e_M)$ est un objet final de $W^{-1}M$.*

La démonstration est laissée au lecteur.

1.3.7. — Dans la définition d'une pseudo-catégorie test, on a privilégié le foncteur i_A par rapport à son adjoint à droite i_A^* (cf. 1.2.2). De façon plus symétrique, on appelle *\mathcal{W} -catégorie test faible*, ou plus simplement *catégorie test faible*, une petite catégorie A telle qu'il existe une partie faiblement saturée W de $\text{Fl}(\hat{A})$ telle que :

- (a) (\hat{A}, W) soit un modélisateur ;
- (b) i_A et i_A^* soient des morphismes de modélisateurs

$$i_A : (\hat{A}, W) \longrightarrow (\text{Cat}, \mathcal{W}) \quad , \quad i_A^* : (\text{Cat}, \mathcal{W}) \longrightarrow (\hat{A}, W) \quad ;$$

(c) pour toute petite catégorie $C \in \text{Ob}(\text{Cat})$, on ait $\varepsilon_C \in \mathcal{W}$, et pour tout préfaiseau $F \in \text{Ob}(\hat{A})$, on ait $\eta_F \in W$, où

$$\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\text{Cat}} \quad , \quad \eta : 1_{\hat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A$$

désignent les morphismes d'adjonction (1.2.2.1).

On remarque que la condition (b) implique en particulier que $W = i_A^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_{\hat{A}}$, et que $\mathcal{W} = i_A^{*-1}(W) = i_A^{*-1}(\mathcal{W}_{\hat{A}})$. En fait, les conditions (a), (b), (c) ci-dessus sont largement redondantes.

Lemme 1.3.8. — Soient $i : M \rightarrow M'$, $j : M' \rightarrow M$ un couple de foncteurs adjoints,

$$\varepsilon : ij \longrightarrow 1_{M'} \quad , \quad \eta : 1_M \longrightarrow ji$$

les morphismes d'adjonction, et W (resp. W') une partie faiblement saturée de $\text{Fl}(M)$ (resp. $\text{Fl}(M')$). Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $W = i^{-1}(W')$, et pour tout $a' \in \text{Ob}(M')$, le morphisme $\varepsilon_{a'} : ij(a') \rightarrow a'$ est dans W' ;
- (a') $W' = j^{-1}(W)$, et pour tout $a \in \text{Ob}(M)$, le morphisme $\eta_a : a \rightarrow ji(a)$ est dans W ;

ces deux conditions impliquant la condition :

- (b) $i(W) \subset W'$, $j(W') \subset W$ et les foncteurs :

$$\bar{i} : W^{-1}M \longrightarrow W'^{-1}M' \quad , \quad \bar{j} : W'^{-1}M' \longrightarrow W^{-1}M \quad ,$$

induits par i et j , sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, les isomorphismes d'adjonction étant déduits de ε et η .

De plus, si les parties W et W' sont fortement saturées, les conditions (a), (a') et (b) sont équivalentes.

Démonstration. — Montrons que (a) \Rightarrow (a'). Pour tout $a \in \text{Ob}(M)$, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i(a)} \circ i(\eta_a) &= 1_{i(a)} \\ i(a) \xrightarrow{i(\eta_a)} iji(a) &\xrightarrow{\varepsilon_{i(a)}} i(a) \quad , \end{aligned}$$

et comme $\varepsilon_{i(a)} \in W'$, on en déduit par saturation faible que $i(\eta_a) \in W'$, d'où $\eta_a \in W$. Montrons que $W' = j^{-1}(W)$. Soit $f' : a' \rightarrow b'$ une flèche de M' . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} ij(a') & \xrightarrow{\varepsilon_{a'}} & a' \\ ij(f') \downarrow & & \downarrow f' \\ ij(b') & \xrightarrow{\varepsilon_{b'}} & b' \end{array} ,$$

et comme $\varepsilon_{a'}, \varepsilon_{b'} \in W'$, la saturation faible implique que $f' \in W'$ si et seulement si $ij(f') \in W'$. Or, par hypothèse, on a $ij(f') \in W'$ si et seulement si $j(f') \in W$, ce qui prouve (a') .

L'implication $(a') \Rightarrow (a)$ résulte de l'implication précédente, appliquée aux catégories opposées.

Les autres assertions sont évidentes. \square

Proposition 1.3.9. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) A est une catégorie test faible ;
- (ii) A satisfait aux conditions suivantes :
 - (a) A est asphérique ;
 - (b) $i_A^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$ (autrement dit $i_A i_A^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$) ;
- (iii) pour toute petite catégorie C , le foncteur $\varepsilon_C : i_A i_A^*(C) \rightarrow C$ est une équivalence faible ;
- (iii') pour toute petite catégorie C , le foncteur $\varepsilon_C : i_A i_A^*(C) \rightarrow C$ est asphérique ;
- (iii'') pour toute petite catégorie C ayant un objet final, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique.
- (iii''') pour toute petite catégorie asphérique C , le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique.

Démonstration. — L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$, (b) est immédiate. Pour démontrer que $(i) \Rightarrow (ii)$, (a), on remarque que la condition (i) implique que le morphisme $\varepsilon_e : i_A i_A^*(e) \rightarrow e$ est une équivalence faible. Or, i_A^* étant un adjoint à droite, il transforme un objet final en objet final. On a donc $i_A^*(e) \simeq e_{\widehat{A}}$ et $i_A i_A^*(e) \simeq i_A(e_{\widehat{A}}) \simeq A$, ce qui montre que A est asphérique, et prouve l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$. Montrons l'implication $(ii) \Rightarrow (iii''')$. Soit C une petite catégorie asphérique. Le morphisme $C \rightarrow e$ est une équivalence faible, et en vertu de (ii), (b), il en est de même de $i_A i_A^*(C) \rightarrow i_A i_A^*(e) \simeq A$. Il résulte donc de (ii), (a) et (La), (1.1.2) que $i_A^*(C)$ est un préfaisceau asphérique. L'implication $(iii''') \Rightarrow (iii'')$ résulte de (Lb), (1.1.2), l'implication $(iii'') \Rightarrow (iii')$ de l'observation que pour toute petite catégorie C et tout $c \in \text{Ob}(C)$, $i_A i_A^*(C)/c \simeq i_A i_A^*(C/c)$, l'implication $(iii') \Rightarrow (iii)$ de (Lc), (1.1.2), et l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ du lemme 1.3.8, ce qui prouve la proposition. \square

Remarque 1.3.10. — Il résulte, en particulier, de la proposition précédente qu'une catégorie test faible est une pseudo-catégorie test.

1.4. Segments et homotopie dans une catégorie

1.4.1. — Soit M une catégorie admettant un objet final e_M . On appelle *segment* de M un triplet $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$, où I est un objet de M , et $\partial_0, \partial_1 : e_M \rightrightarrows I$ des morphismes de M . Si M admet un objet initial \emptyset_M , on dit qu'un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ est *séparant* si le morphisme canonique $\emptyset_M \rightarrow e_M$ est un noyau de la double flèche $(\partial_0, \partial_1) : e_M \rightrightarrows I$. Soient $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ et $\mathbb{I}' = (I', \partial'_0, \partial'_1)$ deux segments de M . On appelle *morphisme de segments* de \mathbb{I} vers \mathbb{I}' un morphisme $\varphi : I \rightarrow I'$ de M tel que $\partial'_0 = \varphi \partial_0$ et $\partial'_1 = \varphi \partial_1$.

1.4.2. — On suppose dans la suite que M admet des produits finis. Soient $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ un segment de M , et $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de M . On dit que f est *\mathbb{I} -homotope de façon élémentaire* à g s'il existe un morphisme $h : I \times X \rightarrow Y$ tel que $f = h(\partial_0 \times 1_X)$ et $g = h(\partial_1 \times 1_X)$

$$\begin{array}{ccc}
 & I \times X & \\
 \partial_0 \times 1_X \nearrow & \downarrow h & \nwarrow \partial_1 \times 1_X \\
 X & & X \\
 f \searrow & & \swarrow g \\
 & Y &
 \end{array} ,$$

et on dit que h est une *\mathbb{I} -homotopie* de f à g (ou par abus de langage une *I -homotopie*). On remarque que 1_I est une \mathbb{I} -homotopie de ∂_0 à ∂_1 (en identifiant $I \times e_M$ à I). Plus généralement, un morphisme de segments $\varphi : \mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1) \rightarrow \mathbb{I}' = (I', \partial'_0, \partial'_1)$ est une \mathbb{I} -homotopie de ∂'_0 à ∂'_1 .

Soit \mathcal{I} un ensemble de segments de M . On appelle relation de *\mathcal{I} -homotopie* la relation d'équivalence engendrée par la relation : « il existe un segment \mathbb{I} appartenant à \mathcal{I} tel que f soit \mathbb{I} -homotope à g de façon élémentaire ». On dit que deux morphismes sont *\mathcal{I} -homotopes* (ou *\mathbb{I} -homotopes* si $\mathcal{I} = \{\mathbb{I}\}$) s'ils sont en relation par la relation de \mathcal{I} -homotopie. Si $\mathcal{I} = \{(I, \partial_0, \partial_1)\}$, on dira parfois, par abus de langage, qu'ils sont *I -homotopes*.

1.4.3. — On vérifie immédiatement que la relation de \mathcal{I} -homotopie est compatible à la composition et au produit de morphismes :

a) Si $f_0, f_1 : X \rightrightarrows Y$, $g_0, g_1 : Y \rightrightarrows Z$ sont des morphismes de M , et si f_0 est \mathcal{I} -homotope à f_1 et g_0 \mathcal{I} -homotope à g_1 , alors $g_0 f_0$ est \mathcal{I} -homotope à $g_1 f_1$.

b) Si $f_0, f_1 : X \rightrightarrows Y$, $f'_0, f'_1 : X' \rightrightarrows Y'$ sont des morphismes de M , et si f_0 est \mathcal{I} -homotope à f_1 et f'_0 \mathcal{I} -homotope à f'_1 , alors $f_0 \times f'_0$ est \mathcal{I} -homotope à $f_1 \times f'_1$.

En vertu de la propriété (a), il existe une catégorie $M_{\mathcal{I}}$ ayant mêmes objets que M , et telle que pour tous objets X et Y , $\text{Hom}_{M_{\mathcal{I}}}(X, Y)$ soit le quotient de l'ensemble $\text{Hom}_M(X, Y)$ par la relation de \mathcal{I} -homotopie, la composition dans $M_{\mathcal{I}}$ étant déduite de celle de M par passage au quotient, ainsi qu'un foncteur $Q_{\mathcal{I}}$ induisant l'identité sur les ensembles des objets, associant à une flèche de M sa classe de \mathcal{I} -homotopie, et jouissant de la propriété universelle suivante. Pour toute catégorie M' , et tout foncteur $F : M \rightarrow M'$ tel que pour tout couple de morphismes \mathcal{I} -homotopes de M , on ait $F(f) = F(g)$, il existe un foncteur unique $\bar{F} : M_{\mathcal{I}} \rightarrow M'$ rendant commutatif le triangle :

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ Q_{\mathcal{I}} \downarrow & \searrow F & \\ M_{\mathcal{I}} & \xrightarrow{\bar{F}} & M' \end{array} \quad .$$

L'assertion (b) implique que $M_{\mathcal{I}}$ admet des produits finis, et que le foncteur $Q_{\mathcal{I}}$ commute à ces produits.

On dit qu'un morphisme f de M est un \mathcal{I} -homotopisme, ou une \mathcal{I} -équivalence d'homotopie (ou un \mathbb{I} -homotopisme, ou une \mathbb{I} -équivalence d'homotopie si $\mathcal{I} = \{\mathbb{I}\}$), si $Q_{\mathcal{I}}(f)$ est un isomorphisme de $M_{\mathcal{I}}$. On dit qu'un objet X de M est \mathcal{I} -contractile (ou \mathbb{I} -contractile si $\mathcal{I} = \{\mathbb{I}\}$) si $Q_{\mathcal{I}}(X)$ est un objet final de $M_{\mathcal{I}}$, ou de façon équivalente, si le morphisme canonique $X \rightarrow e_M$ est un \mathcal{I} -homotopisme. Pour cela, il faut et il suffit que l'identité de X soit \mathcal{I} -homotope à un endomorphisme constant de X (se factorisant par l'objet final e_M de M). Si $\mathcal{I} = \{(I, \partial_0, \partial_1)\}$, on parlera parfois, par abus de langage, de I -homotopisme, de I -équivalence d'homotopie, ou d'objet I -contractile.

1.4.4. — On note $\tilde{\mathcal{I}}$ la classe des segments $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M tels que ∂_0 et ∂_1 soient \mathcal{I} -homotopes. On a $\mathcal{I} \subset \tilde{\mathcal{I}}$ (cf. 1.4.2), et il résulte de l'assertion (a) ci-dessus que la relation de $\tilde{\mathcal{I}}$ -homotopie coïncide avec la relation de \mathcal{I} -homotopie, et $\tilde{\mathcal{I}}$ est la plus grande classe de segments ayant cette propriété. On a $M_{\tilde{\mathcal{I}}} = M_{\mathcal{I}}$, $Q_{\tilde{\mathcal{I}}} = Q_{\mathcal{I}}$, et en particulier, pour qu'un morphisme de M soit un $\tilde{\mathcal{I}}$ -homotopisme, il faut et il suffit qu'il soit un \mathcal{I} -homotopisme, et pour qu'un objet de M soit $\tilde{\mathcal{I}}$ -contractile, il faut et il suffit qu'il soit \mathcal{I} -contractile.

Si M admet des sommes amalgamées (il suffit des sommes amalgamées sous e_M), et si les foncteurs produit par un objet respectent les carrés cocartésiens, alors deux flèches $f, g : X \rightrightarrows Y$ de M sont \mathcal{I} -homotopes si et seulement s'il existe un segment \mathbb{I} appartenant à $\tilde{\mathcal{I}}$ et une \mathbb{I} -homotopie de f à g .

Si \mathcal{I}' est une deuxième classe de segments de M , la relation de \mathcal{I} -homotopie est plus fine que celle de \mathcal{I}' -homotopie si et seulement si pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à \mathcal{I} , ∂_0 et ∂_1 sont \mathcal{I}' -homotopes, autrement dit, si $\mathcal{I} \subset \tilde{\mathcal{I}'}$, et alors un \mathcal{I} -homotopisme est aussi un \mathcal{I}' -homotopisme, et un objet \mathcal{I} -contractile est aussi \mathcal{I}' -contractile.

1.4.5. — Soient M et M' des catégories admettant des objets finaux e_M et $e_{M'}$, respectivement, et $F : M \rightarrow M'$ un foncteur tel que $F(e_M) = e_{M'}$. Pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M , $(F(I), F(\partial_0), F(\partial_1))$ est un segment de M' , noté $F(\mathbb{I})$. Supposons que M et M' admettent des produits finis, et que le foncteur F y commute. Alors si $f, g : X \rightrightarrows Y$ sont deux morphismes de M , et $h : I \times X \rightarrow Y$ une \mathbb{I} -homotopie de f à g ,

$$F(h) : F(I) \times F(X) \simeq F(I \times X) \longrightarrow F(Y)$$

est une $F(\mathbb{I})$ -homotopie de $F(f)$ à $F(g)$. On en déduit que si \mathcal{I} est une classe de segments de M , et \mathcal{I}' la classe des segments de M' formée des segments $F(\mathbb{I})$, pour \mathbb{I} segment appartenant à \mathcal{I} , et si $f, g : X \rightrightarrows Y$ sont deux morphismes \mathcal{I} -homotopes de M , alors $F(f)$ et $F(g)$ sont \mathcal{I}' -homotopes. Ainsi, en vertu de la propriété universelle de la catégorie $M_{\mathcal{I}}$, le foncteur F induit un foncteur $\overline{F} : M_{\mathcal{I}} \rightarrow M'_{\mathcal{I}'}$, rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & M' \\ Q_{\mathcal{I}} \downarrow & & \downarrow Q_{\mathcal{I}'} \\ M_{\mathcal{I}} & \xrightarrow{\overline{F}} & M'_{\mathcal{I}'} \end{array} .$$

En particulier, si f est un \mathcal{I} -homotopisme de M , alors $F(f)$ est un \mathcal{I}' -homotopisme de M' , et si X est un objet \mathcal{I} -contractile de M , $F(X)$ est un objet \mathcal{I}' -contractile de M' .

Lemme 1.4.6 (d'homotopie). — Soient M une catégorie admettant des produits finis, W une partie faiblement saturée de $\text{Fl}(M)$, et \mathcal{I} un ensemble de segments de M , tel que pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à \mathcal{I} , le morphisme canonique $p_I : I \rightarrow e_M$, où e_M désigne l'objet final de M , soit universellement dans W . Si $f, g : X \rightrightarrows Y$ sont deux morphismes \mathcal{I} -homotopes de M , alors :

(a) $\gamma(f) = \gamma(g)$, où $\gamma : M \rightarrow W^{-1}M$ désigne le foncteur canonique de localisation ;

(b) f est dans W si et seulement si g l'est ;

(c) si f est un isomorphisme, et g un morphisme constant (se factorisant par l'objet final e_M), alors le morphisme canonique $X \rightarrow e_M$ (et $Y \rightarrow e_M$) est universellement dans W .

Démonstration. — Pour démontrer (a) et (b), on peut supposer qu'il existe un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à \mathcal{I} , et une \mathbb{I} -homotopie $h : I \times X \rightarrow Y$ de f à g , de

sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & I \times X & \\
 \partial_0 \times 1_X \nearrow & \downarrow h & \nwarrow \partial_1 \times 1_X \\
 X & & X \\
 f \searrow & & \swarrow g \\
 & Y &
 \end{array}$$

soit commutatif. Comme le morphisme canonique $p_I : I \rightarrow e_M$ est universellement dans W , $pr_2 = p_I \times 1_X : I \times X \rightarrow X$ est dans W , et comme

$$(1.4.6.1) \quad pr_2 \circ (\partial_0 \times 1_X) = 1_X = pr_2 \circ (\partial_1 \times 1_X) ,$$

on a

$$\gamma(pr_2)\gamma(\partial_0 \times 1_X) = 1_{\gamma(X)} = \gamma(pr_2)\gamma(\partial_1 \times 1_X) ,$$

d'où

$$\gamma(\partial_0 \times 1_X) = \gamma(\partial_1 \times 1_X) ,$$

ce qui implique que

$$\gamma(f) = \gamma(h)\gamma(\partial_0 \times 1_X) = \gamma(h)\gamma(\partial_1 \times 1_X) = \gamma(g) ,$$

et prouve l'assertion (a).

De même, l'égalité 1.4.6.1 implique, en vertu des conditions FS1 et FS2 de la saturation, que $\partial_0 \times 1_X$ et $\partial_1 \times 1_X$ sont dans W . On en déduit que f (resp. g) est dans W si et seulement si h l'est (condition FS2 de la saturation), ce qui prouve l'assertion (b).

Montrons l'assertion (c). Par hypothèse, $g = sp$, où $p : X \rightarrow e_M$ désigne le morphisme canonique et $s : e_M \rightarrow Y$ un morphisme de M . Il s'agit de montrer que pour tout objet T de M , la deuxième projection $pr_2 = p \times 1_T : X \times T \rightarrow T$ est dans W . Or, en vertu de 1.4.3, (b), $f \times 1_T$ est homotope à $g \times 1_T = (s \times 1_T)(p \times 1_T)$, et comme f est un isomorphisme, il en est de même de $f \times 1_T$ qui est donc dans W (conditions FS1 et FS3 de la saturation). Il résulte donc de (b) que $(s \times 1_T)(p \times 1_T)$ est dans W , et comme $(p \times 1_T)(s \times 1_T) = 1_T$, $p \times 1_T$ est dans W (condition FS3 de la saturation), ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 1.4.7. — Dans la démonstration de 1.4.6, (c), on utilise pour la première fois de façon essentielle la condition FS3 de la saturation. Jusqu'à présent, la seule conséquence utilisée de cette condition (combinée avec la condition FS1) était que les isomorphismes sont dans W .

Proposition 1.4.8. — Soient M une catégorie admettant des produits finis, W une partie faiblement saturée de $\text{Fl}(M)$, et \mathcal{I} un ensemble de segments de M , tel que pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à \mathcal{I} , le morphisme canonique $p_I : I \rightarrow e_M$,

où e_M désigne l'objet final de M , soit universellement dans W . Si X est un objet \mathcal{I} -contractile de M , alors le morphisme canonique $X \rightarrow e_M$ est universellement dans W .

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme 1.4.6 (c). \square

1.4.9. — On appelle *segment multiplicatif* d'une catégorie M admettant des produits finis, un segment $\mathbb{L} = (L, \lambda_0, \lambda_1)$ de M , muni d'une loi de composition

$$\Lambda : L \times L \longrightarrow L$$

admettant λ_0 comme unité à gauche et λ_1 comme zéro à gauche, autrement dit, telle que les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{array}{ccc} e_M \times L & \xrightarrow{\lambda_0 \times 1_L} & L \times L \\ & \searrow 1_L & \downarrow \Lambda \\ & & L \end{array} \quad \begin{array}{ccc} e_M \times L & \xrightarrow{\lambda_1 \times 1_L} & L \times L \\ \downarrow & & \downarrow \Lambda \\ e_M & \xrightarrow{\lambda_1} & L \end{array} .$$

En particulier, Λ est une \mathbb{L} -homotopie de l'identité de L à un endomorphisme constant, et L est un objet \mathbb{L} -contractile de M .

Lemme 1.4.10. — Soient M une catégorie admettant des produits finis, d'objet final e_M , W une partie faiblement saturée de $\text{Fl}(M)$, $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ un segment de M tel que le morphisme canonique $I \rightarrow e_M$ soit universellement dans W , et (\mathbb{L}, Λ) , $\mathbb{L} = (L, \lambda_0, \lambda_1)$, un segment multiplicatif. S'il existe un morphisme de segments $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{L}$, alors le morphisme canonique $p_L : L \rightarrow e_M$ est universellement dans W .

Démonstration. — Posons $h = \Lambda(\varphi \times 1_L) : I \times L \rightarrow L$

$$I \times L \xrightarrow{\varphi \times 1_L} L \times L \xrightarrow{\Lambda} L .$$

On a

$$h(\partial_0 \times 1_L) = \Lambda(\varphi \times 1_L)(\partial_0 \times 1_L) = \Lambda(\lambda_0 \times 1_L) = 1_L$$

et

$$h(\partial_1 \times 1_L) = \Lambda(\varphi \times 1_L)(\partial_1 \times 1_L) = \Lambda(\lambda_1 \times 1_L) = \lambda_1 p_L ,$$

autrement dit, 1_L et $\lambda_1 p_L$ sont \mathbb{L} -homotopes. Il résulte donc du lemme 1.4.6, (c) que $p_L : L \rightarrow e_M$ est universellement dans W . \square

Remarque 1.4.11. — Voici une démonstration plus conceptuelle de ce lemme. Le morphisme de segments φ définit une \mathbb{L} -homotopie de λ_0 à λ_1 (cf. 1.4.2), et le segment \mathbb{L} appartient donc à $\{\mathbb{I}\}$ (cf. 1.4.4). Comme L est \mathbb{L} -contractile (cf. 1.4.9), on en déduit qu'il est aussi \mathbb{I} -contractile (1.4.4), et on conclut par la proposition 1.4.8.

Exemple 1.4.12. — Soit M une catégorie admettant des limites projectives finies, un objet initial *strict* \emptyset_M (on dit qu'un objet initial est strict si tout morphisme de but cet objet est un isomorphisme), et un *objet de Lawvere* L (un objet de M représentant le préfaisceau $X \mapsto \{\text{sous-objets de } X\}$). Comme \emptyset_M est un objet initial strict, pour tout objet X de M , le morphisme canonique $\emptyset_M \rightarrow X$ est un monomorphisme. Si e_M désigne l'objet final de M , les monomorphismes $1_{e_M} : e_M \rightarrow e_M$ et $\emptyset_M \rightarrow e_M$ définissent deux morphismes $\lambda_0 : e_M \rightarrow L$ et $\lambda_1 : e_M \rightarrow L$, d'où un segment $\mathbb{L} = (L, \lambda_0, \lambda_1)$, appelé *segment de Lawvere* de M . On remarque que l'intersection des sous-objets

$$(X' \hookrightarrow X, X'' \hookrightarrow X) \mapsto (X' \times_X X'' \hookrightarrow X)$$

définit une loi de composition sur L

$$\Lambda : L \times L \longrightarrow L \quad .$$

Lemme 1.4.13. — *Le segment \mathbb{L} est séparant, (\mathbb{L}, Λ) est un segment multiplicatif, et pour tout segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M , il existe un morphisme de segments $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{L}$ (non nécessairement unique).*

Démonstration. — Montrons que \mathbb{L} est séparant. En effet, supposons que le carré

$$(1.4.13.1) \quad \begin{array}{ccc} & e_M & \\ \nearrow & & \searrow \lambda_0 \\ X & & L \\ \searrow & & \nearrow \lambda_1 \\ & e_M & \end{array}$$

soit commutatif. Comme les carrés

$$(1.4.13.2) \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & e_M \\ 1_X \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & e_M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \emptyset_M & \longrightarrow & \emptyset_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & e_M \end{array}$$

sont cartésiens (le second parce que \emptyset_M est un objet initial strict), la commutativité de 1.4.13.1 implique que $1_X : X \rightarrow X$ et $\emptyset_M \rightarrow X$ représentent le même sous-objet de X , autrement dit, que $\emptyset_M \rightarrow X$ est un isomorphisme, ce qui prouve l'assertion.

Pour montrer que λ_0 (resp. λ_1) est une unité (resp. un zéro) à gauche pour Λ , comme les carrés 1.4.13.2 sont cartésiens, il suffit de remarquer que pour tout objet X de M , l'intersection du sous-objet « plein » (resp. « vide ») de X avec un sous-objet arbitraire X' de X est le sous-objet X' (resp. vide).

Montrons que pour tout segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$, il existe un morphisme de segments $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{L}$. Il s'agit de montrer qu'il existe un morphisme $\varphi : I \rightarrow L$ de M tel que

$$(1.4.13.3) \quad \lambda_0 = \varphi \partial_0, \quad \lambda_1 = \varphi \partial_1 \quad .$$

Soit $\varphi : I \rightarrow L$ le morphisme correspondant au sous-objet $\partial_0 : e_M \rightarrow I$ de I . Les égalités 1.4.13.3 résultent alors du fait que les carrés suivants sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} e_M & \longrightarrow & e_M \\ \downarrow & & \downarrow \partial_0 \\ e_M & \xrightarrow{\partial_0} & I \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \emptyset_M & \longrightarrow & e_M \\ \downarrow & & \downarrow \partial_0 \\ e_M & \xrightarrow{\partial_1} & I \end{array}$$

(le deuxième puisque \mathbb{I} est séparant). \square

Proposition 1.4.14. — Soit M une catégorie admettant des limites projectives finies, un objet initial strict, et un objet de Lawvere L , et soit W une partie faiblement saturée de $\text{Fl}(M)$. Notons e_M un objet final de M . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Le morphisme canonique $L \rightarrow e_M$ est universellement dans W ;
- (b) il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M tel que le morphisme canonique $I \rightarrow e_M$ soit universellement dans W .

Démonstration. — La proposition résulte aussitôt des lemmes 1.4.13 et 1.4.10. \square

Exemple 1.4.15. — Supposons que $M = \text{Cat}$, notons Δ_1 la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$, et $e_0, e_1 : e \rightrightarrows \Delta_1$ les foncteurs définis par 0 et 1 (correspondant aux cribles « plein » et « vide » de e (cf. 1.1.26)). On vérifie immédiatement que $\Delta_1 := (\Delta_1, e_0, e_1)$ est un segment séparant de Cat , et on remarque que si $u_0, u_1 : A \rightrightarrows B$ sont deux flèches de Cat , les Δ_1 -homotopies de u_0 à u_1 correspondent biunivoquement aux morphismes de foncteurs de u_0 vers u_1 . On en déduit facilement que les segments appartenant à $\{\Delta_1\}$ (cf. 1.4.4) sont exactement les segments $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ tels que les images de ∂_0 et ∂_1 appartiennent à une même composante connexe de I , et que deux flèches $u_0, u_1 : A \rightrightarrows B$ de Cat sont Δ_1 -homotopes si et seulement s'il existe un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de Cat , avec I connexe, et une \mathbb{I} -homotopie $h : I \times A \rightarrow B$ de u_0 à u_1 . On dira plus simplement que u_0 et u_1 sont *homotopes*. De même, on dira qu'une flèche de Cat est un *homotopisme*, pour Δ_1 -homotopisme, et qu'une catégorie est *contractile*, pour Δ_1 -contractile.

Proposition 1.4.16. — Si C est une petite catégorie admettant un objet final (ou initial), alors C est contractile.

Démonstration. — Soient e_C un objet final de C , $s : e \rightarrow C$ le foncteur défini par cet objet, et $p : C \rightarrow e$ le foncteur canonique. On a $ps = 1_e$, et si pour tout objet c de C , $\alpha_c : c \rightarrow e_C$ désigne la flèche canonique, $\alpha : 1_C \rightarrow sp$ est un morphisme de foncteurs qui correspond à une Δ_1 -homotopie de 1_C à sp , ce qui prouve la proposition. \square

1.4.17. — Le segment Δ_1 admet une structure de segment multiplicatif. En effet, Δ_1 représente le préfaisceau

$$C \longmapsto \{\text{cribles de } C\}$$

sur \mathcal{Cat} (1.1.26), et le morphisme de C vers Δ_1 se factorisant par e_0 (resp. e_1) correspond au crible plein (resp. vide) de C . On en déduit que la loi de composition sur Δ_1 représentant l'intersection de deux cribles définit une structure de segment multiplicatif sur Δ_1 . Explicitement, cette loi de composition est définie par

$$\begin{aligned}\Delta_1 \times \Delta_1 &\longrightarrow \Delta_1 \\ (a, b) &\longmapsto a + b - ab, \quad a, b \in \text{Ob}(\Delta_1) = \{0, 1\}.\end{aligned}$$

C'est le morphisme qui correspond au crible $\{(0, 0)\}$ de $\Delta_1 \times \Delta_1$.

Proposition 1.4.18. — *Pour tout localisateur fondamental faible \mathcal{W} , une catégorie contractile est \mathcal{W} -asphérique.*

Démonstration. — En vertu de Lb (1.1.2), et de la proposition 1.1.4, $\Delta_1 \rightarrow e$ est universellement dans \mathcal{W} . Comme en vertu de La (1.1.2), \mathcal{W} est faiblement saturé, la proposition 1.4.18 résulte de la proposition 1.4.8. \square

1.5. Les catégories test

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible \mathcal{W} .

1.5.1. — La propriété d'être une catégorie test faible n'est pas une propriété locale : si A est une catégorie test faible, la catégorie A/a , pour a objet de A , n'est pas nécessairement une catégorie test faible, et si A est une petite catégorie telle que pour tout objet a de A , A/a soit une catégorie test faible, A n'est pas nécessairement une catégorie test faible. On est ainsi conduit à poser la définition suivante.

Définition 1.5.2. — On dit qu'une petite catégorie A est une \mathcal{W} -catégorie test locale, ou plus simplement une *catégorie test locale*, si pour tout objet a de A , A/a est une catégorie test faible. On dit que A est une \mathcal{W} -catégorie test, ou plus simplement une *catégorie test*, si elle est à la fois une \mathcal{W} -catégorie test locale et une \mathcal{W} -catégorie test faible.

Proposition 1.5.3. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *A est une catégorie test locale ;*
- (b) *pour toute petite catégorie C admettant un objet final, $i_A^*(C)$ est un préfaisceau localement asphérique (cf. 1.2.6) ;*
- (c) *pour toute petite catégorie asphérique C , $i_A^*(C)$ est un préfaisceau localement asphérique ;*
- (d) *pour toute équivalence faible u de \mathcal{Cat} , $i_A^*(u)$ est une équivalence faible locale de préfaisceaux sur A (cf. 1.2.6).*

Démonstration. — On remarque que pour toute petite catégorie C , on a un isomorphisme fonctoriel $i_A^*(C)|(A/a) \simeq i_{A/a}^*(C)$. La proposition résulte donc de l'équivalence des conditions (i), (iii''), (iii''') et (ii) de la proposition 1.3.9. \square

Remarque 1.5.4

a) Une petite catégorie A est une catégorie test si et seulement si elle est une catégorie test locale asphérique. En effet, en vertu de la proposition 1.3.9, pour démontrer que sous ces hypothèses A est une catégorie test faible, il suffit de montrer que pour toute petite catégorie C ayant un objet final, $A/i_A^*(C) \rightarrow A$ est asphérique, ce qui résulte de la proposition 1.5.3. Pour caractériser donc les catégories test, il suffit de caractériser les catégories test locales.

b) Si A est une catégorie test locale, alors pour tout préfaisceau F de \widehat{A} , la catégorie A/F est une catégorie test locale. En effet, pour tout objet $(a, p : a \rightarrow F)$ de A/F , on a un isomorphisme canonique $(A/F)/(a, p) \simeq A/a$. Si de plus F est asphérique, il résulte de (a) que A/F est une catégorie test.

1.5.5. — Soit A une petite catégorie. On pose $L_A = i_A^*(\Delta_1)$, où Δ_1 désigne la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$. On remarque que si F désigne un préfaisceau sur A , on a des bijections fonctorielles

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(F, L_A) &= \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(F, i_A^*(\Delta_1)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(i_A(F), \Delta_1) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(A/F, \Delta_1) \simeq \{\text{cribles de } A/F\} \simeq \{\text{sous-objets de } F\}. \end{aligned}$$

On en déduit que L_A représente le foncteur

$$F \longmapsto \{\text{sous-objets de } F\},$$

autrement dit, que L_A est un objet de Lawvere de \widehat{A} .

Théorème 1.5.6. — *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) A est une catégorie test locale ;
- (b) L_A est localement asphérique ;
- (c) il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{A} tel que I soit localement asphérique.

Démonstration. — Comme Δ_1 admet un objet final, l'implication (a) \Rightarrow (b) résulte de la proposition 1.5.3. Pour montrer l'implication (b) \Rightarrow (a), supposons que L_A soit localement asphérique, autrement dit, que le morphisme canonique $L_A \rightarrow e_{\widehat{A}}$, où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de \widehat{A} , soit universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Soit C une petite catégorie admettant un objet final. En vertu de la proposition 1.4.16, la catégorie C est Δ_1 -contractile, où Δ_1 désigne le segment (Δ_1, e_0, e_1) (cf. 1.4.15). Comme le foncteur i_A^* , étant un adjoint à droite, commute aux limites projectives, on en déduit que $\mathbb{L}_A := (L_A, i_A^*(e_0), i_A^*(e_1))$ est un segment de \widehat{A} , et que $i_A^*(C)$ est \mathbb{L}_A -contractile (cf. 1.4.5). Il résulte donc de la proposition 1.4.8 que le morphisme canonique $i_A^*(C) \rightarrow e_{\widehat{A}}$ est

universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, autrement dit que $i_A^*(C)$ est localement asphérique, ce qui prouve, en vertu de la proposition 1.5.3, que A est une catégorie test locale. L'équivalence de (b) et (c) résulte de la proposition 1.4.14. \square

Corollaire 1.5.7. — *Soit A une petite catégorie admettant des produits finis. S'il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{A} tel que I soit représentable, alors A est une catégorie test.*

Démonstration. — Comme A admet des produits finis, elle admet, en particulier, un objet final e_A , et elle est donc asphérique. Comme le préfaisceau I est représentable, pour tout objet a de A , le préfaisceau $a \times I$ est aussi représentable, donc asphérique (1.2.5), ce qui implique que le morphisme $I \rightarrow e_A$ de \widehat{A} est asphérique (1.2.5), autrement dit, que le préfaisceau I est localement asphérique (1.2.6). Il résulte donc du théorème 1.5.6 que A est une catégorie test locale, et comme elle est asphérique, elle est une catégorie test (1.5.4, (a)). \square

Remarque 1.5.8. — Si A est une petite catégorie admettant un objet final e_A , un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{A} , tel que I soit représentable, n'est rien d'autre qu'une double flèche $\partial_0, \partial_1 : e_A \rightrightarrows I$ de A telle qu'il n'y ait aucun diagramme commutatif dans A de la forme

$$\begin{array}{ccc} & e_A & \\ \nearrow & & \searrow \partial_0 \\ X & & I \\ \searrow & & \nearrow \partial_1 \\ & e_A & \end{array} .$$

En particulier, cela exclut l'existence d'un objet initial dans A .

Exemples 1.5.9. — Le corollaire 1.5.7 fournit un grand nombre d'exemples de catégories test :

a) La catégorie dont les objets sont les ensembles

$$\{0, 1, \dots, n\}, \quad n \geq 0,$$

et dont les morphismes sont toutes les applications entre ces ensembles (catégorie équivalente à celle des ensembles finis non vides) est une catégorie test.

b) Une petite catégorie équivalente à la catégorie des ensembles ordonnés (ou pré-ordonnés) finis non vides est une catégorie test.

c) Une petite catégorie équivalente à celle des catégories finies non vides est une catégorie test.

d) Plus généralement, soit A une petite sous-catégorie pleine de \mathcal{Cat} stable par produits finis. On suppose :

- (i) la catégorie vide n'est pas un objet de A ;
- (ii) il existe une catégorie ayant au moins deux objets, et qui est un objet de A .

Alors A est une catégorie test. En effet, soit I un objet de A ayant au moins deux objets distincts e_0, e_1 . Alors les flèches $\partial_0, \partial_1 : e \rightrightarrows I$, définies par e_0, e_1 , définissent en vertu de la remarque 1.5.8, un segment séparant de \widehat{A} , et l'assertion résulte du corollaire 1.5.7. On remarque que les exemples précédents peuvent être considérés comme des cas particuliers.

e) La sous-catégorie (non pleine) de la catégorie des ensembles dont les objets sont les puissances $\{0, 1\}^n$, $n \geq 0$, de l'ensemble $\{0, 1\}$, et les morphismes les applications

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \{0, 1\}^m \longrightarrow \{0, 1\}^n, \quad \varphi_i : \{0, 1\}^m \longrightarrow \{0, 1\},$$

où pour tout i , $0 \leq i \leq n$, φ_i est une projection ou une application constante, est une catégorie test.

Corollaire 1.5.10. — Soient A une catégorie test locale (resp. une catégorie test), et B une petite catégorie arbitraire (resp. asphérique). Alors la catégorie $A \times B$ est une catégorie test locale (resp. une catégorie test).

Démonstration. — Soient A une catégorie test locale, B une catégorie arbitraire, et notons $pr_1 : A \times B \rightarrow A$ la première projection. En vertu du théorème 1.5.6, il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{A} tel que I soit localement asphérique. Comme le foncteur $pr_1^* : \widehat{A} \rightarrow \widehat{A \times B}$ est exact, $(pr_1^*(I), pr_1^*(\partial_0), pr_1^*(\partial_1))$ est un segment séparant de $\widehat{A \times B}$, et il résulte de la proposition 1.2.12 que $pr_1^*(I) = I \boxtimes e_{\widehat{B}}$ (où $e_{\widehat{B}}$ désigne l'objet final de \widehat{B}) est localement asphérique. Le théorème 1.5.6 implique donc que $A \times B$ est une catégorie test locale, ce qui prouve l'assertion relative aux catégories test locales. L'assertion relative aux catégories test en résulte, grâce à la remarque 1.5.4, (a) et au corollaire 1.1.5. \square

Exemple 1.5.11. — Notons Δ la catégorie des simplexes, sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ordonnés dont les objets sont les ensembles

$$\Delta_n = \{0, 1, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ordonnés par l'ordre naturel, de sorte que $\widehat{\Delta}$ soit la catégorie des ensembles simpliciaux.

Lemme 1.5.12. — L'objet Δ_1 de $\widehat{\Delta}$ est localement asphérique.

Démonstration. — Pour montrer que Δ_1 est localement asphérique, autrement dit, que le morphisme $\Delta_1 \rightarrow e_{\widehat{\Delta}} = \Delta_0$ de $\widehat{\Delta}$ est asphérique (1.2.6), il suffit, en vertu de 1.2.5, de montrer que pour tout m , $m \geq 0$, le préfaisceau $\Delta_m \times \Delta_1$ est asphérique.

Notons

$$\varphi_k : \Delta_{m+1} \longrightarrow \Delta_m \times \Delta_1, \quad 0 \leq k \leq m,$$

le morphisme de $\widehat{\Delta}$ défini par les morphismes

$$\varphi'_k : \Delta_{m+1} \longrightarrow \Delta_m, \quad \varphi''_k : \Delta_{m+1} \longrightarrow \Delta_1$$

de Δ , définis par

$$\varphi'_k(l) = \begin{cases} l & , \quad 0 \leq l \leq k , \\ l-1 & , \quad k < l \leq m+1 , \end{cases} \quad \varphi''_k(l) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq l \leq k , \\ 1 & , \quad k < l \leq m+1 . \end{cases}$$

Notons F_k le préfaisceau image de φ_k . Comme le morphisme φ_k est un monomorphisme de $\widehat{\Delta}$, on en déduit que F_k est isomorphe à Δ_{m+1} , et en particulier, F_k est représentable, donc asphérique (1.2.5).

On pose

$$G_k = \bigcup_{0 \leq l \leq k} F_l \quad , \quad 0 \leq k \leq m \quad .$$

On va montrer

- (a) $\Delta_m \times \Delta_1 = G_m$;
- (b) $G_k \cap F_{k+1} \simeq \Delta_m$, $0 \leq k < m$.

La condition (b) impliquera, par récurrence, que pour tout k , $0 \leq k \leq m$, G_k est asphérique (car $G_0 = F_0$ est asphérique, et si G_k est asphérique (pour un entier k , $0 \leq k < m$), $G_{k+1} = G_k \cup F_{k+1}$ est asphérique, en vertu de (b) et de la proposition 1.2.7), et la condition (a) impliquera alors que $\Delta_m \times \Delta_1$ est asphérique.

Or, la condition (a) est immédiate. Pour montrer la condition (b), considérons le morphisme

$$\psi_k : \Delta_m \longrightarrow \Delta_m \times \Delta_1 \quad , \quad 0 \leq k < m \quad ,$$

de $\widehat{\Delta}$ défini par les morphismes

$$\psi'_k : \Delta_m \longrightarrow \Delta_m \quad , \quad \psi''_k : \Delta_m \longrightarrow \Delta_1$$

de Δ , définis par

$$\psi'_k = 1_{\Delta_m} \quad , \quad \psi''_k(l) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq l \leq k , \\ 1 & , \quad k < l \leq m . \end{cases}$$

Notons F'_k le préfaisceau image de ψ_k . Comme le morphisme ψ_k est un monomorphisme de $\widehat{\Delta}$, on en déduit que F'_k est isomorphe à Δ_m . D'autre part, on vérifie aussitôt que

$$F'_k = G_k \cap F_{k+1} \quad , \quad 0 \leq k < m \quad ,$$

ce qui prouve la condition (b), et achève la démonstration. □

Proposition 1.5.13. — *La catégorie Δ est une catégorie test.*

Démonstration. — Comme la catégorie Δ admet un objet final Δ_0 , elle est asphérique. Pour montrer donc que Δ est une catégorie test, il suffit, en vertu de 1.5.4, (a), de montrer qu'elle est une catégorie test locale. Notons

$$e_0, e_1 : \Delta_0 \rightrightarrows \Delta_1$$

les morphismes définis par

$$e_0(0) = 0, \quad e_1(0) = 1 \quad .$$

En vertu du théorème 1.5.6, pour montrer que Δ est une catégorie test locale, il suffit de montrer que (Δ_1, e_0, e_1) est un segment séparant de $\hat{\Delta}$, et que Δ_1 est un objet localement asphérique de $\hat{\Delta}$. La première assertion résulte immédiatement de la remarque 1.5.8, et la deuxième du lemme 1.5.12. \square

Exemple 1.5.14. — Si \mathcal{W} est le localisateur fondamental trivial (1.1.29), alors toute petite catégorie est une \mathcal{W} -catégorie test. Si \mathcal{W} est le localisateur fondamental faible grossier non trivial \mathcal{W}_{gr} (1.1.31), pour qu'une petite catégorie soit une \mathcal{W}_{gr} -catégorie test, il faut et il suffit qu'elle soit non vide. En effet, il résulte aussitôt de la proposition 1.1.30 qu'une petite catégorie est \mathcal{W}_{gr} -asphérique si et seulement si elle est non vide, et l'assertion est donc conséquence immédiate de la proposition 1.5.3.

1.6. Les catégories test strictes

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible \mathcal{W} .

Proposition 1.6.1. — Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) pour tous objets a et b de A , le produit $a \times b$ dans \hat{A} est un préfaisceau asphérique ;
- (a') le produit de deux préfaisceaux asphériques de \hat{A} est asphérique ;
- (b) le foncteur $i_A : \hat{A} \rightarrow \text{Cat}$ commute aux produits binaires, à équivalence faible près, autrement dit, pour tous préfaisceaux F et G de \hat{A} , le morphisme canonique

$$A/(F \times G) \longrightarrow A/F \times A/G$$

est une équivalence faible ;

- (b') pour tous préfaisceaux F et G de \hat{A} , le morphisme canonique

$$A/(F \times G) \longrightarrow A/F \times A/G$$

est asphérique ;

- (c) tout préfaisceau représentable de \hat{A} est localement asphérique ;
- (c') tout préfaisceau asphérique de \hat{A} est localement asphérique ;
- (d) le foncteur diagonal $A \rightarrow A \times A$ est asphérique.

De plus, si A est non vide, chacune de ces conditions implique que la catégorie A est asphérique.

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b')$ résulte de l'observation que pour tous objets $(a, p : a \rightarrow F)$ et $(b, q : b \rightarrow G)$ de A/F et A/G respectivement, on a un isomorphisme canonique

$$(A/(F \times G))/((a, p), (b, q)) \simeq A/a \times b \quad .$$

L'implication $(b') \Rightarrow (b)$ est évidente, et l'implication $(b) \Rightarrow (a')$ résulte du corollaire 1.1.5. Dire qu'un préfaisceau F de \hat{A} est localement asphérique, c'est dire que pour tout objet a de A , le préfaisceau $a \times F$ est asphérique, ce qui montre l'implication $(a') \Rightarrow (c')$. Les implications $(c') \Rightarrow (c)$ et $(c) \Rightarrow (a)$ sont immédiates, ce qui prouve l'équivalence des six premières conditions. L'équivalence de (a) et (d) résulte de l'observation que pour tout objet (a, b) de $A \times A$, on a un isomorphisme canonique $A/(a, b) \simeq A/a \times b$.

Montrons que si A est non vide, ces conditions impliquent que A est asphérique. Soit a un objet de A . En vertu de la condition (c) , le morphisme canonique $a \rightarrow e_{\hat{A}}$ de \hat{A} , où $e_{\hat{A}}$ désigne l'objet final de \hat{A} , est asphérique, ce qui implique que le préfaisceau $e_{\hat{A}}$ est asphérique, autrement dit que la catégorie A est asphérique. \square

Définition 1.6.2. — Soit A une petite catégorie. On dit que A est *totalelement \mathcal{W} -asphérique*, ou plus simplement *totalelement asphérique*, si elle est asphérique, et si pour tous objets a et b de A , le préfaisceau $a \times b$ de \hat{A} est asphérique.

Remarque 1.6.3. — Une catégorie totalement asphérique est donc une petite catégorie satisfaisant aux conditions équivalentes de la proposition 1.6.1 et qui est asphérique, et pour cela il suffit qu'elle soit non vide. En vertu de la proposition 1.1.30, si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est non trivial, les catégories totalement asphériques sont exactement les petites catégories non vides satisfaisant aux conditions équivalentes de la proposition 1.6.1. Si A est une catégorie totalement asphérique, il résulte de l'équivalence des conditions (a) et (c') de la proposition 1.6.1 et de l'asphéricité de A qu'un préfaisceau de \hat{A} est asphérique si et seulement si il est localement asphérique.

Exemple 1.6.4. — Une petite catégorie admettant des produits finis est totalement asphérique.

Proposition 1.6.5. — a) *Un produit fini de petites catégories totalement asphériques est une catégorie totalement asphérique.*

b) *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme asphérique de Cat . Si A est totalement asphérique, il en est de même de B .*

Démonstration. — a) Comme la catégorie ponctuelle e est totalement asphérique, il suffit de montrer que le produit de deux catégories totalement asphériques A et B est totalement asphérique. Comme $A \times B$ est asphérique (1.1.5), il suffit, en vertu de la proposition 1.6.1, de montrer que le foncteur diagonal

$$\Delta_{A \times B} : A \times B \longrightarrow A \times B \times A \times B$$

est asphérique. Or, ce foncteur est le composé de $\Delta_A \times \Delta_B$ (où $\Delta_A : A \rightarrow A \times A$ et $\Delta_B : B \rightarrow B \times B$ désignent les foncteurs diagonaux) et de l'isomorphisme

$$A \times A \times B \times B \longrightarrow A \times B \times A \times B$$

permutant les deux facteurs du milieu. Comme A et B sont totalement asphériques, les foncteurs Δ_A et Δ_B sont asphériques (1.6.1), donc aussi $\Delta_A \times \Delta_B$ (1.1.6), ce qui prouve l'assertion.

b) Comme u est une équivalence faible et A asphérique, B est aussi asphérique. Pour montrer qu'elle est totalement asphérique, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \Delta_A \downarrow & & \downarrow \Delta_B \\ A \times A & \xrightarrow{u \times u} & B \times B \end{array} \quad ,$$

où Δ_A et Δ_B désignent les foncteurs diagonaux. Les foncteurs Δ_A et $u \times u$ sont asphériques, en vertu de 1.6.1 et 1.1.6 respectivement. Comme u est aussi asphérique, il en est de même de Δ_B (1.1.8), ce qui achève la démonstration (1.6.1). \square

Proposition 1.6.6. — *Soit A une petite catégorie. On suppose qu'il existe une classe \mathcal{I} de segments de \widehat{A} telle que pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{A} appartenant à \mathcal{I} , le préfaisceau I soit localement asphérique, et telle que tout préfaisceau représentable soit \mathcal{I} -contractile. Alors A satisfait aux conditions équivalentes de la proposition 1.6.1. En particulier, si de plus A est non vide ou asphérique, alors A est totalement asphérique.*

Démonstration. — En vertu de la proposition 1.4.8, pour tout objet a de A , le préfaisceau représenté par a est localement asphérique, autrement dit, A satisfait à la condition (c) de la proposition 1.6.1. En vertu de cette même proposition, si A est de plus non vide, A est asphérique, donc totalement asphérique, ce qui achève la démonstration. \square

Définition 1.6.7. — On appelle \mathcal{W} -catégorie test stricte, ou plus simplement catégorie test stricte, une catégorie test totalement asphérique.

Proposition 1.6.8. — *Soit A une petite catégorie totalement asphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) A est une catégorie test faible ;
- (b) A est une catégorie test locale ;
- (c) A est une catégorie test ;
- (d) A est une catégorie test stricte ;
- (e) il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{A} tel que I soit asphérique ;
- (f) l'objet de Lawvere $L_A = i_A^*(\Delta_1)$ de \widehat{A} est asphérique.

Démonstration. — Comme A est totalement asphérique, l'équivalence $(c) \Leftrightarrow (d)$ est tautologique. L'équivalence des conditions (b) , (e) et (f) résulte du théorème 1.5.6 et de la remarque 1.6.3. La catégorie A étant asphérique, l'équivalence $(b) \Leftrightarrow (c)$ résulte de la remarque 1.5.4, (a) . L'implication $(c) \Rightarrow (a)$ est évidente. Il reste à prouver l'implication $(a) \Rightarrow (b)$. Soit C une petite catégorie admettant un objet final. En vertu de la proposition 1.3.9, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique. Comme A est totalement asphérique, il résulte de la proposition 1.6.1 que $i_A^*(C)$ est localement asphérique. En vertu de la proposition 1.5.3, la catégorie A est donc une catégorie test locale. \square

Corollaire 1.6.9. — *Soit A une petite catégorie totalement asphérique. S'il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{A} tel que I soit représentable, alors A est une catégorie test stricte.*

Ce corollaire, qui est conséquence immédiate de la proposition 1.6.8, généralise et précise le corollaire 1.5.7.

Corollaire 1.6.10

a) *Soient A une catégorie test stricte, et B une catégorie totalement asphérique. Alors la catégorie $A \times B$ est une catégorie test stricte.*

b) *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme asphérique de Cat . Si A est totalement asphérique et B une catégorie test locale, alors A et B sont des catégories test strictes.*

Démonstration. — L'assertion (a) résulte de la proposition 1.6.5, (a) , et du corollaire 1.5.10. Montrons l'assertion (b) . En vertu de la proposition 1.6.5, (b) , B est totalement asphérique. Elle est donc une catégorie test stricte (1.6.8). On en déduit qu'il existe un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{B} tel que I soit un préfaisceau asphérique (1.6.8). Comme u est asphérique, $u^*(I)$ est un préfaisceau asphérique de \widehat{A} (1.2.9), et comme u^* est un foncteur exact, $(u^*(I), u^*(\partial_0), u^*(\partial_1))$ est un segment séparant de \widehat{A} . Donc A est aussi une catégorie test stricte (1.6.8), ce qui prouve le corollaire. \square

Exemple 1.6.11. — Les catégories test des exemples 1.5.9, (a) - (e) sont des catégories test strictes, car elles admettent des produits finis (1.6.4).

Lemme 1.6.12. — *Tout objet Δ_m de Δ est un objet Δ_1 -contractile de $\widehat{\Delta}$, où Δ_1 désigne le segment (Δ_1, e_0, e_1) de $\widehat{\Delta}$ (e_0 et e_1 étant définis par $0 \mapsto 0$ et $0 \mapsto 1$ respectivement).*

Démonstration. — Le morphisme

$$h : \Delta_1 \times \Delta_m \rightarrow \Delta_m$$

correspondant à l'application croissante

$$(i, k) \mapsto \begin{cases} k & i = 0 \\ m & i = 1 \end{cases} \quad 0 \leq k \leq m$$

est une Δ_1 -homotopie de l'identité de Δ_m à l'endomorphisme constant de Δ_m défini par l'application croissante constante

$$k \longmapsto m \quad , \quad 0 \leq k \leq m \quad ,$$

ce qui prouve le lemme. \square

Proposition 1.6.13. — *La catégorie Δ est une catégorie test stricte.*

Démonstration. — Comme Δ est une catégorie test (proposition 1.5.13), il suffit de montrer que Δ est totalement asphérique. Comme le préfaisceau de $\widehat{\Delta}$ représenté par Δ_1 est localement asphérique (lemme 1.5.12), cela résulte de la proposition 1.6.6 et du lemme 1.6.12. \square

Exemple 1.6.14. — La catégorie Δ étant une catégorie test, elle est en particulier une catégorie test locale, autrement dit, pour tout m , $m \in \mathbb{N}$, la catégorie Δ/Δ_m est aussi une catégorie test. Néanmoins, si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est non trivial, et si $m \neq 0$, la catégorie Δ/Δ_m n'est pas une catégorie test stricte. En effet, soit $a_i = (\Delta_0, s_i : \Delta_0 \rightarrow \Delta_m)$ l'objet de Δ/Δ_m défini par $s_i(0) = i$, $0 \leq i \leq m$. Comme $m \geq 1$, le produit $a_0 \times a_m$ dans $\widehat{\Delta/\Delta_m}$ est le préfaisceau vide, objet initial de $\widehat{\Delta/\Delta_m}$, la catégorie $\Delta/a_0 \times a_m$ est donc la catégorie vide, et comme le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est non trivial, cette catégorie n'est pas asphérique (proposition 1.1.30).

Exemple 1.6.15. — Plus généralement, si A est une catégorie test arbitraire, en vertu du théorème 1.5.6, il existe un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{A} tel que I soit localement asphérique, donc asphérique (puisque A est asphérique). On en déduit que A/I est une catégorie test (1.5.4, (b)). Néanmoins, si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} n'est pas trivial, A/I n'est pas une catégorie test stricte. En effet, les objets $(e_{\widehat{A}}, \partial_0)$ et $(e_{\widehat{A}}, \partial_1)$ de $\widehat{A/I} \simeq \widehat{A/I}$ sont des préfaisceaux asphériques de $\widehat{A/I}$, car $(A/I)/(e_{\widehat{A}}, \partial_i) \simeq A/e_{\widehat{A}} \simeq A$, $i = 0, 1$, mais leur produit dans $\widehat{A/I}$ est le préfaisceau vide, qui n'est pas asphérique (proposition 1.1.30), ce qui contredit la condition (a') de la proposition 1.6.1.

Définition 1.6.16. — Soit A une petite catégorie non vide, et notons \mathcal{I}_A l'ensemble des segments

$$\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1) \quad , \quad \partial_0, \partial_1 : e_{\widehat{A}} \rightrightarrows I \quad ,$$

de \widehat{A} , tels que I soit un objet de A . On dit que A est un *précontracteur* si tout préfaisceau représentable de \widehat{A} est \mathcal{I}_A -contractile. On dit que A est un \mathcal{W} -*contracteur*, ou plus simplement un *contracteur*, si A est à la fois un précontracteur et une catégorie totalement asphérique. On remarque que la notion de précontracteur (contrairement à celle de contracteur) est indépendante du choix d'un localisateur fondamental faible.

Exemple 1.6.17. — La catégorie vide est un précontracteur. La catégorie ponctuelle est un contracteur.

Proposition 1.6.18. — Soit A un précontracteur non trivial (non vide, et non équivalent à la catégorie finale). Alors il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{A} , avec I objet de A . Si de plus A est un contracteur, alors A est une catégorie test stricte.

Démonstration. — Notons \mathcal{I}_A l'ensemble des segments $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{A} tels que I soit un objet de A . Soit F un préfaisceau de \widehat{A} . Si F est non vide, il existe une flèche $a \rightarrow F$ de \widehat{A} , avec a objet de A . Comme a est \mathcal{I}_A -contractile, il existe, en particulier, un morphisme $e_{\widehat{A}} \rightarrow a$, d'où un morphisme $e_{\widehat{A}} \rightarrow F$. On en déduit que si $F \hookrightarrow e_{\widehat{A}}$ est un sous-objet de $e_{\widehat{A}}$, alors F est vide ou égal à $e_{\widehat{A}}$. En effet, en vertu de ce qui précède, si F est non vide, il existe une flèche $e_{\widehat{A}} \rightarrow F$, ce qui implique que $F \hookrightarrow e_{\widehat{A}}$ est un isomorphisme. Soit donc $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ un segment appartenant à \mathcal{I}_A . Alors $\text{Ker}(\partial_0, \partial_1)$ est vide ou égal à $e_{\widehat{A}}$, autrement dit, ou bien le segment \mathbb{I} est séparant, ou bien $\partial_0 = \partial_1$. Si aucun segment de \mathcal{I}_A n'était séparant, la relation de \mathcal{I}_A -homotopie serait donc l'égalité, et les \mathcal{I}_A -homotopismes les isomorphismes. Comme les objets de A sont \mathcal{I}_A -contractiles, les objets de A seraient isomorphes à l'objet final, ce qui est contraire à l'hypothèse de non-trivialité de A , et prouve la première assertion. La deuxième en résulte, grâce à la proposition 1.6.8. \square

Exemple 1.6.19. — La catégorie Δ est un contracteur. En effet, en vertu du lemme 1.6.12, la catégorie Δ est un précontracteur, et en vertu de la proposition 1.6.13, elle est totalement asphérique.

Exemple 1.6.20. — Si \mathcal{W} est le localisateur fondamental trivial (1.1.29), alors toute petite catégorie est une \mathcal{W} -catégorie test stricte, et tout précontracteur est un \mathcal{W} -contracteur. Si \mathcal{W} est le localisateur fondamental faible grossier non trivial \mathcal{W}_{gr} (1.1.31), pour qu'une petite catégorie A soit une \mathcal{W}_{gr} -catégorie test stricte, il faut et il suffit qu'elle soit \mathcal{W}_{gr} -totalement asphérique, autrement dit, qu'elle soit non vide, et que pour tous objets a_1 et a_2 de A , il existe un objet a de A , et des flèches $a \rightarrow a_1$ et $a \rightarrow a_2$ de A (exemple 1.5.14, et proposition 1.6.8). Pour qu'un précontracteur soit un \mathcal{W}_{gr} -contracteur, il faut et il suffit qu'il soit non vide. En effet, si A est un précontracteur et a_1, a_2 des objets de A , comme a_1 et a_2 sont \mathcal{I}_A -contractiles, il existe des flèches $e_{\widehat{A}} \rightarrow a_1, e_{\widehat{A}} \rightarrow a_2$ de \widehat{A} , et par suite, pour tout objet a de A , des flèches $a \rightarrow a_1, a \rightarrow a_2$ de A .

1.7. Les foncteurs test

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible \mathcal{W} .

Définition 1.7.1. — Soient A une petite catégorie, $i : A \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur, et

$$i^* : \text{Cat} \rightarrow \widehat{A} \quad C \mapsto (a \mapsto \text{Hom}_{\text{Cat}}(i(a), C))$$

le foncteur correspondant. On dit que i est un *foncteur \mathcal{W} -asphérique*, ou plus simplement un *foncteur asphérique*, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ est asphérique ;
- (b) pour qu'une petite catégorie C soit asphérique, il faut et il suffit que le préfaisceau $i^*(C)$ soit asphérique.

Remarque 1.7.2. — Cette notion de foncteur asphérique, de source une petite catégorie et à valeurs dans \mathcal{Cat} , ne doit pas être confondue avec la notion de morphisme asphérique de \mathcal{Cat} . Le lien entre ces deux notions vient de la proposition 1.2.9 qui affirme (entre autres) qu'un morphisme $u : A \rightarrow B$ de \mathcal{Cat} est asphérique si et seulement si les préfaisceaux asphériques de \widehat{B} sont exactement ceux dont l'image réciproque par u est un préfaisceau asphérique de \widehat{A} .

Exemple 1.7.3. — Soit A une catégorie test faible. Alors le foncteur $i_A : A \rightarrow \mathcal{Cat}$, $a \mapsto A/a$, est un foncteur asphérique. En effet, pour tout objet a de A , $i_A(a) = A/a$ admet un objet final, et est donc une catégorie asphérique. D'autre part, en vertu de la proposition 1.3.9, pour toute petite catégorie C , le morphisme d'adjonction $i_A i_A^*(C) \rightarrow C$ est une équivalence faible. On en déduit que la catégorie C est asphérique si et seulement si le préfaisceau $i_A^*(C)$ l'est, ce qui prouve que le foncteur i_A est asphérique. On remarque que réciproquement, si A est une petite catégorie telle que le foncteur i_A soit asphérique, la proposition 1.3.9 implique que A est une catégorie test faible.

Lemme 1.7.4. — Soient $u : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathcal{Cat} , $j : B \rightarrow \mathcal{Cat}$ un foncteur, et posons $i = ju : A \rightarrow \mathcal{Cat}$. On suppose que pour tout objet b de B , la catégorie $j(b)$ est asphérique.

a) Si u est un morphisme asphérique de \mathcal{Cat} , le foncteur $j : B \rightarrow \mathcal{Cat}$ est asphérique si et seulement si le foncteur $i : A \rightarrow \mathcal{Cat}$ l'est.

b) Si le foncteur j est pleinement fidèle et i asphérique, alors u est un morphisme asphérique de \mathcal{Cat} et j un foncteur asphérique.

Démonstration. — On vérifie immédiatement qu'on a un triangle commutatif

$$(1.7.4.1) \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{Cat} & \\ j^* \swarrow & & \searrow i^* \\ \widehat{B} & \xrightarrow{u^*} & \widehat{A} \end{array}$$

(où « l'étoile en haut » de i et j a un sens légèrement différent de celle de u).

a) Si u est asphérique, il résulte de la proposition 1.2.9 qu'un préfaisceau F de \widehat{B} est asphérique si et seulement si le préfaisceau u^*F de \widehat{A} l'est. L'équivalence de l'asphéricité des foncteurs i et j résulte alors immédiatement de la commutativité du triangle 1.7.4.1.

b) Supposons le foncteur j pleinement fidèle et i asphérique. Pour tout objet b de B , la pleine fidélité de j implique que $j^*j(b)$ est isomorphe à b , d'où $u^*(b) \simeq u^*j^*j(b) = i^*j(b)$. Comme $j(b)$ est une catégorie asphérique et i un foncteur asphérique, $u^*(b) \simeq i^*j(b)$ est un préfaisceau asphérique, ce qui prouve que le morphisme u est asphérique (1.2.9). Il résulte alors de (a) que j est un foncteur asphérique, ce qui achève la démonstration. \square

1.7.5. — Soient A une petite catégorie, $i : A \rightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A , $i(a)$ soit asphérique, A_0 une catégorie test faible, et B une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ contenant $i(A)$ et $i_{A_0}(A_0)$, et formée de catégories asphériques. Les foncteurs i et i_A se factorisent par B , et on obtient ainsi un diagramme commutatif

$$(1.7.5.1) \quad \begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xleftarrow{u_0} & A_0 \\ & \searrow i & \downarrow j & \swarrow i_{A_0} & \\ & & \mathcal{C}at & & \end{array} .$$

Comme A_0 est une catégorie test faible, i_{A_0} est un foncteur asphérique (1.7.3), et il résulte du lemme 1.7.4, (b) que u_0 est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$, et j un foncteur asphérique. En vertu du lemme 1.7.4, (a) et (b), on en déduit que le foncteur i est asphérique si et seulement si u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Le diagramme commutatif 1.7.5.1 permet de former un « 2-diagramme »

$$(1.7.5.2) \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}at & & \\ & \swarrow i^* & \downarrow j^* & \searrow i_{A_0}^* & \\ \widehat{A} & \xleftarrow{u^*} & \widehat{B} & \xrightarrow{u_0^*} & \widehat{A}_0 \\ & \searrow \lambda_u & \downarrow i_B & \swarrow \lambda_{u_0} & \\ & & \mathcal{C}at & & \end{array}$$

dont les deux triangles supérieurs sont commutatifs, et les deux triangles inférieurs indiquent simplement les morphismes de foncteurs

$$\lambda_u : i_A u^* \longrightarrow i_B \quad , \quad \lambda_{u_0} : i_{A_0} u_0^* \longrightarrow i_B \quad ,$$

définis dans 1.2.8. On en déduit une chaîne de morphismes d'endofoncteurs de $\mathcal{C}at$

$$(1.7.5.3) \quad i_A i^* \xrightarrow{\lambda_u j^*} i_B j^* \xleftarrow{\lambda_{u_0} j^*} i_{A_0} i_{A_0}^* \xrightarrow{\varepsilon_{A_0}} 1_{\mathcal{C}at} \quad ,$$

ε_{A_0} étant le morphisme d'adjonction (cf. 1.2.1), et pour toute petite catégorie C , des morphismes de $\mathcal{C}at$

$$(1.7.5.4) \quad i_A i^*(C) \xrightarrow{\lambda_u(j^*(C))} i_B j^*(C) \xleftarrow{\lambda_{u_0}(j^*(C))} i_{A_0} i_{A_0}^*(C) \xrightarrow{\varepsilon_{A_0}(C)} C \quad ,$$

les deux derniers étant des équivalences faibles ($\lambda_{u_0}(j^*(C))$) en vertu de la proposition 1.2.9, puisque le morphisme u_0 est asphérique, et ε_{A_0} en vertu de la proposition 1.3.9, puisque A_0 est une catégorie test faible). Si i est un foncteur asphérique, $\lambda_u(j^*(C))$ est aussi une équivalence faible, car u est alors un morphisme asphérique.

Proposition 1.7.6. — *Soient A une petite catégorie, et $i : A \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur tel que pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ soit asphérique.*

(a) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *i est asphérique ;*
- (ii) *pour toute petite catégorie asphérique C , le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*
- (iii) *A est asphérique, et un morphisme w de Cat est une équivalence faible si et seulement si $i^*(w)$ est une équivalence faible de préfaisceaux ;*
- (iv) *A est asphérique, et pour toute équivalence faible w de Cat , $i^*(w)$ est une équivalence faible de préfaisceaux.*

(b) *Ces conditions équivalentes impliquent la condition :*

(v) *$i^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et le foncteur $\bar{i}^* : \mathcal{W}^{-1}\text{Cat} \rightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$, induit par i^* , est une quasi-inverse à droite du foncteur $\bar{i}_A : \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \rightarrow \mathcal{W}^{-1}\text{Cat}$, induit par i_A ; et cette condition est équivalente aux précédentes si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est fortement saturé (cf. 1.3.1).*

(c) *Si pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ est, non seulement asphérique, mais même contractile, alors les conditions équivalentes (i) - (iv) sont aussi équivalentes à la condition :*

(i') *pour toute petite catégorie contractile C , le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique.*

(d) *Si pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ admet même un objet final e_a , alors les conditions équivalentes (i) - (iv) sont aussi équivalentes à la condition :*

(ii'') *pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*

et si l'on note

$$\alpha : i_A i^* \longrightarrow 1_{\text{Cat}}$$

le morphisme de foncteurs défini par

$$\alpha_C : i_A i^*(C) \longrightarrow C, \quad (a, i(a) \xrightarrow{v} C) \mapsto v(e_a), \quad C \in \text{Ob}(\text{Cat}), \quad a \in \text{Ob}(A),$$

les deux conditions suivantes sont encore équivalentes aux précédentes :

(α) *pour toute petite catégorie C , le foncteur $\alpha_C : i_A i^*(C) \rightarrow C$ est une équivalence faible ;*

(α') *pour toute petite catégorie C , le foncteur $\alpha_C : i_A i^*(C) \rightarrow C$ est asphérique.*

Démonstration. — On choisit une catégorie test faible A_0 (par exemple une des catégories test de l'exemple 1.5.9, ou la catégorie des simplexes Δ (cf. 1.5.13)). On note B la sous-catégorie pleine de Cat dont l'ensemble des objets est la réunion de l'ensemble des images par i des objets de A , et de l'ensemble des images par i_{A_0} des objets de A_0 , et on désigne par $j : B \hookrightarrow Cat$ l'inclusion. On en déduit ainsi un diagramme 1.7.5.1, et on peut appliquer les considérations de 1.7.5, puisque B est formée de catégories asphériques. De plus, on remarque que si pour tout objet a de A , $i(a)$ est une catégorie contractile (resp. admettant un objet final), alors B est formée de catégories contractiles (resp. admettant un objet final), puisque pour tout objet a de A_0 , la catégorie $i_{A_0}(a)$ possède un objet final, et est en particulier contractile (1.4.16).

Les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (ii') \Rightarrow (ii'')$ sont évidentes (1.4.18, 1.4.16). Montrons l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$. En gardant les notations du diagramme 1.7.5.1, comme j est pleinement fidèle, pour tout objet b de B , on a un isomorphisme $u^*(b) \simeq u^*j^*j(b) = i^*(j(b))$. Comme $j(b)$ est une catégorie asphérique, il en est de même, en vertu de l'hypothèse (ii) , de $u^*(b) \simeq i^*(j(b))$. On en déduit que u est un morphisme asphérique de Cat (1.2.9), et par suite, que i est un foncteur asphérique (cf. 1.7.5). En vertu de la remarque précédente, le même argument prouve que si pour tout objet a de A , $i(a)$ est une catégorie contractile (resp. admettant un objet final), alors la condition (ii') (resp. (ii'')) implique la condition (i) .

Montrons l'implication $(i) \Rightarrow (iii)$. Supposons donc que le foncteur i soit asphérique. En vertu de 1.7.5, pour toute flèche $w : C \rightarrow C'$ de Cat , on a un diagramme commutatif

$$(1.7.6.1) \quad \begin{array}{ccccccc} i_A i^*(C) & \xrightarrow{\lambda_u(j^*(C))} & i_B j^*(C) & \xleftarrow{\lambda_{u_0}(j^*(C))} & i_{A_0} i_{A_0}^*(C) & \xrightarrow{\varepsilon_{A_0}(C)} & C \\ \downarrow i_A i^*(w) & & \downarrow i_B j^*(w) & & \downarrow i_{A_0} i_{A_0}^*(w) & & \downarrow w \\ i_A i^*(C') & \xrightarrow{\lambda_u(j^*(C'))} & i_B j^*(C') & \xleftarrow{\lambda_{u_0}(j^*(C'))} & i_{A_0} i_{A_0}^*(C') & \xrightarrow{\varepsilon_{A_0}(C')} & C' \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des équivalences faibles. On en déduit que w est une équivalence faible si et seulement si $i_A i^*(w)$ l'est, autrement dit si $i^*(w)$ est une équivalence faible de préfaisceaux. Il reste à prouver que A est une catégorie asphérique, et cela résulte de l'isomorphisme $A \simeq i_A i^*(e)$.

L'implication $(iii) \Rightarrow (iv)$ est évidente. Montrons l'implication $(iv) \Rightarrow (ii)$. Soit C une catégorie asphérique. Alors le morphisme $C \rightarrow e$ de Cat est une équivalence faible, et par (iv) , $i_A^*(C) \rightarrow i_A^*(e) \simeq e_{\hat{A}}$ est une équivalence faible de préfaisceaux. Comme A est asphérique, $e_{\hat{A}}$ est un préfaisceau asphérique, donc $i_A^*(C)$ aussi. Ceci achève la démonstration des assertions (a) et (c) .

Démontrons que les conditions équivalentes (i) - (iv) impliquent la condition (v) . Supposons donc ces conditions satisfaites. La condition (iv) implique que $i^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\hat{A}}$. Si l'on note $\gamma : Cat \rightarrow \text{Hot} = \mathcal{W}^{-1}Cat$ le foncteur de localisation,

le diagramme commutatif 1.7.6.1, dont les flèches horizontales sont des équivalences faibles, montre que

$$C \longmapsto \gamma(\varepsilon_{A_0}(C))\gamma(\lambda_{u_0}(j^*(C)))^{-1}\gamma(\lambda_u(j^*(C)))$$

définit un isomorphisme du foncteur $\bar{i}_A \bar{i}^*$ et du foncteur identique $1_{\mathbf{Hot}}$. Réciproquement, pour montrer que si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est fortement saturé, la condition (v) implique la condition (iv), il suffit de montrer que la condition (v) implique alors que A est asphérique. Or, $A \simeq i_A i^*(e)$, et par hypothèse, $\gamma(i_A i^*(e)) = \bar{i}_A \bar{i}^*(\gamma(e))$ est isomorphe à $\gamma(e)$, qui est un objet final de \mathbf{Hot} (1.3.6). On en déduit que $\gamma(A)$ est aussi un objet final de \mathbf{Hot} , et que l'image par γ du morphisme canonique $A \rightarrow e$ est un isomorphisme. L'hypothèse que le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est fortement saturé implique alors que $A \rightarrow e$ est une équivalence faible, ce qui achève la démonstration de l'assertion (b).

Il reste à prouver que, sous les hypothèses de (d), les conditions (ii''), (α) et (α') sont équivalentes (puisque l'équivalence, sous ces hypothèses, de (i) et (ii'') a déjà été établie). Les implications (α') \Rightarrow (α) \Rightarrow (ii'') sont évidentes. L'implication (ii'') \Rightarrow (α') résulte de l'observation que pour toute petite catégorie C , et tout objet c de C , on a un isomorphisme canonique $(i_A i^*(C))/c \simeq i_A i^*(C/c)$. Ceci achève la démonstration de la proposition. \square

Corollaire 1.7.7. — *Soient A une petite catégorie, et $i : A \rightarrow \mathbf{Cat}$ un foncteur asphérique tel que pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ admette un objet final. Si M est une sous-catégorie pleine de \mathbf{Cat} telle que le foncteur $i_A i^* : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$ se factorise par M , alors $(M, \mathcal{W} \cap \mathbf{FI}(M))$ est un modélisateur, et l'inclusion de M dans \mathbf{Cat} un morphisme de modélisateurs de $(M, \mathcal{W} \cap \mathbf{FI}(M))$ vers le modélisateur fondamental $(\mathbf{Cat}, \mathcal{W})$.*

Démonstration. — Comme, en vertu de la proposition 1.7.6, (d), il existe un morphisme de foncteurs $\alpha : i_A i^* \rightarrow 1_{\mathbf{Cat}}$ tel que pour toute petite catégorie C , le foncteur $\alpha_C : i_A i^*(C) \rightarrow C$ soit une équivalence faible, le corollaire résulte aussitôt du lemme suivant. \square

Lemme 1.7.8. — *Soient N une catégorie, W une partie faiblement saturée de $\mathbf{FI}(N)$, $f : N \rightarrow N$ un foncteur, $\alpha : f \rightarrow 1_N$ un morphisme de foncteurs tel que pour tout objet a de N , $\alpha_a \in W$, M une sous-catégorie pleine de N , et $i : M \rightarrow N$ le foncteur d'inclusion. On suppose que le foncteur f se factorise par M , de sorte qu'on ait un triangle commutatif*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow g & \nearrow i \\ & M & \end{array} .$$

Alors les foncteurs g et i induisent des équivalences de catégories

$$\bar{g} : W^{-1}N \longrightarrow (W \cap \text{Fl}(M))^{-1}M \quad \text{et} \quad \bar{i} : (W \cap \text{Fl}(M))^{-1}M \longrightarrow W^{-1}N$$

quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — Pour toute flèche $u : a \rightarrow a'$ de N , on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} g(a) = f(a) & \xrightarrow{\alpha_a} & a \\ g(u) = f(u) \downarrow & & \downarrow u \\ g(a') = f(a') & \xrightarrow{\alpha_{a'}} & a' \end{array} \quad .$$

Si $u \in W$, comme $\alpha_a, \alpha_{a'} \in W$, on a par saturation $g(u) \in W \cap \text{Fl}(M)$, et g induit un foncteur $\bar{g} : W^{-1}N \longrightarrow (W \cap \text{Fl}(M))^{-1}M$. De même, comme $i(W \cap \text{Fl}(M)) \subset W$, le foncteur i induit un foncteur $\bar{i} : (W \cap \text{Fl}(M))^{-1}M \longrightarrow W^{-1}N$. Le morphisme de foncteurs α définit un isomorphisme de foncteurs $\bar{\alpha} : \bar{i}\bar{g} \rightarrow 1_{W^{-1}N}$, et la restriction de α à M induit un morphisme de foncteurs $\beta : gi \rightarrow 1_M$, qui définit un isomorphisme de foncteurs $\bar{\beta} : \bar{g}\bar{i} \rightarrow 1_{(W \cap \text{Fl}(M))^{-1}M}$. \square

Corollaire 1.7.9. — Soient A une catégorie test faible, et M la sous-catégorie pleine de Cat dont les objets sont les petites catégories C localement isomorphes à A , autrement dit, telles que pour tout objet c de C , il existe un objet a de A tel que les catégories C/c et A/a soient isomorphes. Alors $(M, W \cap \text{Fl}(M))$ est un modélisateur, et l'inclusion de M dans Cat un morphisme de modélisateurs.

Démonstration. — On applique le corollaire 1.7.7 au foncteur asphérique

$$i = i_A : A \longrightarrow \text{Cat} \quad , \quad a \longmapsto A/a \quad ,$$

(1.7.3), en remarquant que pour tout préfaisceau F de \hat{A} , la catégorie A/F est localement isomorphe à A . \square

Corollaire 1.7.10. — Soient A une pseudo-catégorie test, et $i : A \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur tel que pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ soit asphérique. Alors le foncteur i est asphérique si et seulement si $i^* : \text{Cat} \rightarrow \hat{A}$ est un morphisme de modélisateurs, du modélisateur fondamental $(\text{Cat}, \mathcal{W})$ vers le modélisateur $(\hat{A}, \mathcal{W}_{\hat{A}})$, autrement dit, si

- (a) $\mathcal{W} = i^{*-1}(\mathcal{W}_{\hat{A}})$;
- (b) le foncteur i^* induit une équivalence de catégories :

$$\bar{i}^* : W^{-1}\text{Cat} \longrightarrow \mathcal{W}_{\hat{A}}^{-1}\hat{A} \quad .$$

Démonstration. — Si le foncteur i est asphérique, en vertu de la proposition 1.7.6, (iii), on a $\mathcal{W} = i^{*-1}(\mathcal{W}_{\hat{A}})$, et en vertu de 1.7.6 (v), le foncteur \bar{i}^* , induit par i^* , est un quasi-inverse à droite du foncteur \bar{i}_A , induit par i_A . La catégorie A étant une pseudo-catégorie test, le foncteur \bar{i}_A est une équivalence de catégories, et il en est donc de même de \bar{i}^* . La réciproque résulte du fait que la condition $\mathcal{W} = i^{*-1}(\mathcal{W}_{\hat{A}})$

implique la condition (iii) de la proposition 1.7.6, puisque une pseudo-catégorie test est, par définition, asphérique. \square

Ce corollaire justifie la terminologie suivante.

Définition 1.7.11. — On appelle *\mathcal{W} -pseudo-foncteur test* (resp. *\mathcal{W} -foncteur test faible*), ou plus simplement *pseudo-foncteur test* (resp. *foncteur test faible*), un foncteur asphérique dont la catégorie source est une pseudo-catégorie test (resp. une catégorie test faible). On appelle *\mathcal{W} -foncteur test local*, ou plus simplement *foncteur test local*, un foncteur $i : A \rightarrow \text{Cat}$ tel que pour tout objet a de A , le foncteur $A/a \rightarrow \text{Cat}$, induit par i , soit un foncteur test faible, autrement dit, si A est une catégorie test locale, et pour tout objet a de A , $A/a \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur asphérique. On dit que le foncteur $i : A \rightarrow \text{Cat}$ est un *\mathcal{W} -foncteur test*, ou plus simplement un *foncteur test*, s'il est à la fois un foncteur test local et un foncteur test faible, autrement dit, si A est une catégorie test, et les foncteurs $A \rightarrow \text{Cat}$ et $A/a \rightarrow \text{Cat}$, $a \in \text{Ob}(A)$, asphériques.

Exemple 1.7.12. — Il résulte de l'exemple 1.7.3 que si A est une catégorie test faible (resp. une catégorie test locale, resp. une catégorie test), alors le foncteur $i_A : \hat{A} \rightarrow \text{Cat}$, $a \mapsto A/a$, est un foncteur test faible (resp. un foncteur test local, resp. un foncteur test).

Théorème 1.7.13. — Soient A une petite catégorie, $i : A \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur tel que pour tout objet a de A , $i(a)$ soit une catégorie asphérique, et

$$i^* : \text{Cat} \longrightarrow \hat{A} \quad , \quad C \longmapsto (a \mapsto \text{Hom}_{\text{Cat}}(i(a), C))$$

le foncteur correspondant.

(a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est une catégorie test locale,⁽¹⁾ et i est un foncteur test local ;
- (ii) pour toute petite catégorie asphérique C , le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique ;
- (iii) pour toute équivalence faible w de Cat , $i^*(w)$ est une équivalence faible locale de préfaisceaux (cf. 1.2.6) ;
- (iv) pour tout objet a de A , le foncteur $i|_{A/a} : A/a \rightarrow \text{Cat}$ est asphérique.

De plus, si ces conditions sont satisfaites, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) A est une catégorie test,⁽¹⁾ et i un foncteur test ;
- (2) i est un foncteur asphérique ;
- (3) A est une catégorie asphérique.

(b) Si pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ est, non seulement asphérique, mais même contractile, alors les conditions équivalentes (i)-(iv) sont aussi équivalentes aux conditions équivalentes suivantes :

⁽¹⁾pléonasme volontaire

- (ii') pour toute petite catégorie contractile C , le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique ;
- (ii'') pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique ;
- (ii''') $i^*(\Delta_1)$ est un préfaisceau localement asphérique.

Démonstration. — En vertu de l'équivalence des conditions (i) et (ii) de la proposition 1.7.6, le foncteur $i|A/a : A/a \rightarrow \mathcal{Cat}$, $a \in \mathbf{Ob}(A)$, est asphérique si et seulement si pour toute petite catégorie asphérique C , $i^*(C)|A/a$ est un préfaisceau asphérique, ce qui prouve l'équivalence des conditions (ii) et (iv) du théorème (cf. 1.2.6). Pour montrer l'équivalence des conditions (i) et (ii), il suffit donc de montrer que la condition (ii) implique que A est une catégorie test locale. Pour cela, on peut supposer que le localisateur fondamental faible \mathcal{W} n'est pas trivial, ce qui implique que pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ est non vide (1.1.30). Notons $e_0, e_1 : e \rightrightarrows \Delta_1$ les morphismes définis par 0 et 1 respectivement. On remarque que $\Delta_1 = (\Delta_1, e_0, e_1)$ est un segment séparant de \mathcal{Cat} (cf. 1.4.15). D'autre part, le foncteur i^* commute aux limites projectives, et comme pour tout objet a de A , $i(a)$ est une catégorie non vide, i^* commute aux objets initiaux. On en déduit que $i^*(\Delta_1) = (i^*(\Delta_1), i^*(e_0), i^*(e_1))$ est un segment séparant de \widehat{A} . Comme la condition (ii) implique que le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ est localement asphérique, il résulte du théorème 1.5.6 que A est une catégorie test locale, ce qui démontre l'équivalence des conditions (i) et (ii). L'équivalence des conditions (ii) et (iii) résulte aussitôt de celle des conditions (ii) et (iv) de la proposition 1.7.6.

Supposons que les conditions équivalentes (i)-(iv) de (a) sont satisfaites, et montrons l'équivalence des conditions (1), (2) et (3). La condition (ii) implique en particulier que pour toute petite catégorie asphérique C , $i^*(C) \rightarrow e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible de préfaisceaux. Si A est une catégorie asphérique, cela implique que le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique. En vertu de la proposition 1.7.6, le foncteur i est donc asphérique, ce qui prouve l'implication (3) \Rightarrow (2). Comme le foncteur i est déjà par hypothèse un foncteur test local, et comme une catégorie test locale asphérique est une catégorie test (1.5.4, (a)), on en déduit aussi l'implication (3) \Rightarrow (1). L'implication (1) \Rightarrow (2) étant évidente, et l'implication (2) \Rightarrow (3) résultant de la proposition 1.7.6, cela achève la démonstration de l'assertion (a).

Pour montrer l'assertion (b), on remarque que, sous les hypothèses de (b), l'équivalence de (ii) et (ii') résulte de la proposition 1.7.6 (c), appliquée aux foncteurs $i|A/a : A/a \rightarrow \mathcal{Cat}$, $a \in \mathbf{Ob}(A)$. L'implication (ii') \Rightarrow (ii'') résulte de la proposition 1.4.16, et l'implication (ii'') \Rightarrow (ii''') est évidente. Pour montrer l'implication (ii''') \Rightarrow (ii'), on remarque que si C est une catégorie contractile, elle est par définition Δ_1 -contractile, où Δ_1 désigne le segment (Δ_1, e_0, e_1) . Comme le foncteur i^* commute aux limites projectives, on en déduit que le préfaisceau $i^*(C)$ est $i^*(\Delta_1)$ -contractile, où $i^*(\Delta_1) = (i^*(\Delta_1), i^*(e_0), i^*(e_1))$ (1.4.5). Comme en vertu de la condition (ii'''), le

préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ est localement asphérique, il en est de même de $i^*(C)$ (1.4.8). Ceci achève la démonstration du théorème. \square

Corollaire 1.7.14. — Soient $u : A \rightarrow B$ un morphisme localement asphérique de Cat , $j : B \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur, et $i = ju : A \rightarrow \text{Cat}$ le foncteur composé.

(a) Si j est un foncteur test local, il en est de même de i , et en particulier A est une catégorie test locale.

(b) Si i est un foncteur test local, et si u induit une surjection sur les objets, alors j est un foncteur test local, et en particulier B est une catégorie test locale.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la caractérisation (ii) des foncteurs test locaux du théorème 1.7.13, et du corollaire 1.2.10. \square

Corollaire 1.7.15. — Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme localement asphérique de Cat .

(a) Si B est une catégorie test locale, il en est de même de A .

(b) Si B est une catégorie test, et u une équivalence faible, alors A est une catégorie test.

(c) Si B est une catégorie test stricte, u pleinement fidèle, et A non vide ou asphérique, alors A est une catégorie test stricte.

Démonstration. — L'assertion (a) résulte aussitôt du corollaire 1.7.14, (a), appliqué au foncteur test local i_B . L'assertion (b) est conséquence immédiate de l'assertion (a), et de la remarque 1.5.4, (a). En vertu de (a), et de la proposition 1.6.8, pour prouver (c), il reste à montrer que, sous les hypothèses de (c), la catégorie A est totalement asphérique. Le foncteur u étant pleinement fidèle, il en est de même de l'adjoint à gauche $u_! : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$ de u^* . On en déduit que pour tout objet a de A , on a des isomorphismes

$$a \simeq u^*u_!(a) \simeq u^*u(a) \quad .$$

Comme la catégorie B est totalement asphérique, le préfaisceau représentable $u(a)$ de \hat{B} est localement asphérique (1.6.1), et il résulte du corollaire 1.2.10 que le préfaisceau $u^*u(a) \simeq a$ de \hat{A} est localement asphérique, ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 1.7.16. — Soient A une petite catégorie, $i : A \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur tel que pour tout objet a de A , $i(a)$ soit une catégorie contractile, et

$$i_! : \hat{A} \rightarrow \text{Cat} \quad , \quad i^* : \text{Cat} \rightarrow \hat{A}$$

le couple de foncteurs adjoints correspondant à i , $i_!$ étant l'unique (à isomorphisme unique près) foncteur prolongeant i et commutant aux limites inductives. On suppose que A admet un objet final e_A , que $i(e_A) = \Delta_0 = e$, objet final de Cat , et qu'il existe un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de \hat{A} tel que I soit localement asphérique, et un morphisme de segments de Cat

$$\varphi : i_!(\mathbb{I}) = (i_!(I), i_!(\partial_0), i_!(\partial_1)) \longrightarrow \Delta_1 = (\Delta_1, e_0, e_1)$$

(e_0 et e_1 étant définis par $0 \mapsto 0$ et $0 \mapsto 1$ respectivement). Alors A est une catégorie test,⁽²⁾ et i un foncteur test.

Démonstration. — Comme A admet un objet final, elle est asphérique. En vertu du théorème 1.7.13, (a) et (b), il suffit donc de montrer que le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ est localement asphérique. Le morphisme φ définit par adjonction un morphisme de segments $\psi : \mathbb{I} \rightarrow i^*(\Delta_1) = (i^*(\Delta_1), i^*(e_0), i^*(e_1))$ de \widehat{A} . En vertu du lemme 1.4.10, il suffit donc de montrer que $i^*(\Delta_1)$ admet une structure de segment multiplicatif. Comme le foncteur i^* commute aux limites projectives, cela résulte de 1.4.17. \square

Exemple 1.7.17. — Soient A la catégorie test de l'exemple 1.5.9, (a), sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ayant pour objets les ensembles

$$\{0, 1, \dots, n\} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

et $i : A \rightarrow \mathcal{Cat}$ le foncteur associant à un objet a de A la catégorie associée à l'ensemble ordonné formé des parties non vides de a , ordonnées par inclusion. Pour tout objet a de A , la catégorie $i(a)$ est contractile, puisqu'elle admet un objet final (1.4.16), et le corollaire 1.7.16 montre que i est un foncteur test. Considérons, en effet, le segment $(\{0, 1\}, \partial_0, \partial_1)$ de \widehat{A} , ∂_0 et ∂_1 étant définis par $0 \mapsto 0$ et $0 \mapsto 1$ respectivement. Comme A est une catégorie test stricte (1.6.11), les préfaisceaux représentables, et en particulier celui représenté par $\{0, 1\}$, sont localement asphériques (1.6.1). Pour pouvoir appliquer le corollaire, il suffit donc de définir un foncteur

$$\varphi : i_!(\{0, 1\}) = i(\{0, 1\}) \longrightarrow \Delta_1$$

induisant un morphisme de segments. Or,

$$i(\{0, 1\}) = \begin{array}{ccc} & \{0\} & \\ & \searrow & \\ & & \{0, 1\} \\ & \nearrow & \\ \{1\} & & \end{array} \quad ,$$

et il suffit donc de définir φ par

$$\varphi(\{0\}) = 0 \quad , \quad \varphi(\{1\}) = \varphi(\{0, 1\}) = 1 \quad .$$

Exemple 1.7.18. — Soit $i : \Delta \rightarrow \mathcal{Cat}$ l'inclusion canonique de la catégorie des simplexes (1.5.11) dans la catégorie des petites catégories. Alors $i^* : \mathcal{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$ est le foncteur *nerf*, et i est un foncteur test. En effet, pour tout m , $m \in \mathbb{N}$, $i(\Delta_m) = \Delta_m$ admet un objet final, et est donc contractile (1.4.16), et en particulier asphérique (1.4.18). D'autre part, $i^*(\Delta_1)$ n'est autre que le préfaisceau représenté par Δ_1 , et en vertu du lemme 1.5.12, ce préfaisceau est localement asphérique, et l'assertion résulte du théorème 1.7.13, (a) et (b). De plus, le théorème 1.7.13 implique alors que pour

⁽²⁾pléonasmе volontaire

tout m , $m \in \mathbb{N}$, $i^*(\Delta_m)$, qui n'est autre que le préfaisceau représenté par Δ_m , est localement asphérique, ce qui, en vertu de la proposition 1.6.1, fournit une deuxième démonstration du fait que Δ est une catégorie test stricte (1.6.13).

Exemple 1.7.19. — Soit A une petite sous-catégorie pleine de \mathcal{Cat} formée de catégories contractiles, stable par produits finis, et telle que Δ_1 soit un objet de A . Alors le foncteur d'inclusion $i : A \rightarrow \mathcal{Cat}$ est un foncteur test. En effet, comme une catégorie contractile est non vide, la catégorie vide n'est pas un objet de A . La catégorie A est donc une catégorie test stricte (cf. 1.5.9, (d) et 1.6.11). On en déduit que le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$, qui est représentable (puisque Δ_1 est un objet de A), est localement asphérique (1.6.1), ce qui prouve que i est un foncteur test local (1.7.13, (b)), donc un foncteur test (1.7.13, (a)).

Exemple 1.7.20. — Plus généralement, si A est une petite sous-catégorie pleine de \mathcal{Cat} formée de catégories contractiles, stable par produits finis, et satisfaisant à la condition :

(H) il existe une petite catégorie C appartenant à $\text{Ob}(A)$ et possédant deux objets c_0 et c_1 tels qu'il n'y ait aucune flèche de C de source c_1 et de but c_0 ;

alors le foncteur d'inclusion $i : A \rightarrow \mathcal{Cat}$ est un foncteur test. En effet, A est alors une catégorie test stricte (cf. 1.5.9, (d) et 1.6.11), et le préfaisceau représentable de \hat{A} représenté par C est localement asphérique (1.6.1). Considérons le segment $\mathbb{I} = (C, \partial_0, \partial_1)$ de \hat{A} , où les foncteurs $\partial_0, \partial_1 : e \rightrightarrows C$ sont définis par les objets c_0 et c_1 respectivement. Le crible de C engendré par c_0 (sous-catégorie pleine de C formée des objets c tels qu'il existe une flèche $c \rightarrow c_0$ de C) définit un foncteur $i_!(C) = C \rightarrow \Delta_1$ (1.1.26), qui en vertu de l'hypothèse (H), est un morphisme de segments

$$i_!(\mathbb{I}) = (C, \partial_0, \partial_1) \longrightarrow \Delta_1 = (\Delta_1, e_0, e_1)$$

(e_0 et e_1 étant définis respectivement par les objets 0 et 1 de Δ_1). L'assertion résulte alors du corollaire 1.7.16.

Exemple 1.7.21. — Dans l'exemple précédent, l'hypothèse (H) est essentielle. En effet, soit par exemple A la sous-catégorie pleine de \mathcal{Cat} dont les objets sont les catégories I^m , $m \geq 0$, où $I = \{0 \rightrightarrows 1\}$ désigne la catégorie ayant comme objets 0 et 1 et équivalente à la catégorie e , objet final de \mathcal{Cat} (autrement dit, les seuls morphismes non identiques de I sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre $0 \rightarrow 1$ et $1 \rightarrow 0$). On vérifie facilement que cette catégorie est formée de catégories contractiles. D'autre part, elle satisfait aux conditions de 1.5.9, (d) et est donc une catégorie test stricte (1.6.11). Montrons que si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} n'est pas grossier (1.1.31), le foncteur d'inclusion $i : A \hookrightarrow \mathcal{Cat}$ n'est pas un foncteur test (ni même un foncteur test faible). Pour cela, il suffit de montrer que le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ n'est pas asphérique. Or, $i^*(\Delta_1)$ est le préfaisceau

$$I^m \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{Cat}}(I^m, \Delta_1) \simeq \{\text{cribles de } I^m\}$$

(1.1.26), et on a donc $i^*(\Delta_1) \simeq e_{\widehat{A}} \amalg e_{\widehat{A}}$ (où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de \widehat{A}), car les seuls cribles de I^m sont le crible plein et le crible vide. On en déduit que $i_A i^*(\Delta_1) \simeq A \amalg A$, et il résulte du lemme suivant que $i^*(\Delta_1)$ n'est pas asphérique.

Lemme 1.7.22. — *Si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} n'est pas grossier, alors toute catégorie asphérique est 0-connexe (connexe non vide).*

Démonstration. — Soit C une catégorie asphérique. Le localisateur fondamental faible \mathcal{W} n'étant pas grossier, il est *a fortiori* non trivial, et il résulte de la proposition 1.1.30 que la catégorie C est non vide. Montrons qu'elle est connexe. Supposons que $C = C_0 \amalg C_1$, avec $C_0, C_1 \neq \emptyset$, choisissons des objets c_0 et c_1 de C_0 et C_1 respectivement, et notons $\partial_0 : e \rightarrow C$ et $\partial_1 : e \rightarrow C$ les morphismes définis par c_0 et c_1 respectivement, où e désigne l'objet final de $\mathcal{C}at$. On définit ainsi un segment $\mathbb{I} = (C, \partial_0, \partial_1)$. Soit A une catégorie non vide, $p : A \rightarrow e$ le foncteur canonique, a un objet de A , $s : e \rightarrow A$ le morphisme défini par l'objet a , et $c = sp$ l'endomorphisme constant correspondant de A . Notons

$$p_0 : C_0 \times A \longrightarrow A \quad \text{et} \quad p_1 : C_1 \times A \longrightarrow A$$

les premières projections. On définit un foncteur

$$h : C \times A = (C_0 \times A) \amalg (C_1 \times A) \longrightarrow A$$

par

$$h \mid C_0 \times A = p_0 \quad \text{et} \quad h \mid C_1 \times A = cp_1 \quad .$$

On constate immédiatement que h est une \mathbb{I} -homotopie de 1_A vers c , autrement dit, la catégorie A est \mathbb{I} -contractile. Comme la catégorie C est asphérique, il résulte des propositions 1.1.4 et 1.4.8 que A est asphérique. Ainsi, on a montré que toute catégorie non vide est asphérique, ce qui implique que tout foncteur entre catégories non vides est une équivalence faible, et contredit l'hypothèse que le localisateur fondamental faible \mathcal{W} n'est pas grossier. \square

Exemple 1.7.23. — Notons Δ' la sous-catégorie (non pleine) de Δ ayant mêmes objets que Δ , et dont les morphismes sont les applications strictement croissantes.

Lemme 1.7.24. — *La catégorie Δ' est asphérique.*

Démonstration. — On définit un foncteur $D : \Delta' \rightarrow \Delta'$, en posant pour tout m , $m \in \mathbb{N}$,

$$D\Delta_m = \Delta_{m+1} \quad ,$$

et en définissant, pour toute application strictement croissante $\varphi : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$, $D(\varphi)$ par

$$D(\varphi)(k) = \begin{cases} \varphi(k) , & 0 \leq k \leq m , \\ n + 1 , & k = m + 1 . \end{cases}$$

L'inclusion $\Delta_m \hookrightarrow \Delta_{m+1}$ définit un morphisme fonctoriel $1_{\Delta'} \rightarrow D$, et l'application

$$\Delta_0 \longrightarrow \Delta_{m+1} \quad , \quad 0 \longmapsto m+1 \quad ,$$

un morphisme fonctoriel de l'endofoncteur constant de Δ' , de valeur Δ_0 , vers D . La catégorie Δ' est donc contractile, et le lemme résulte de la proposition 1.4.18. \square

Proposition 1.7.25. — *La catégorie Δ' est une catégorie test faible, et le foncteur d'inclusion $i' : \Delta' \hookrightarrow \mathcal{Cat}$ est un foncteur test faible.*

Démonstration. — Considérons les foncteurs

$$\Delta' \xrightarrow{u} \Delta \xrightarrow{v} \tilde{\Delta} \xrightarrow{i} \mathcal{Cat} \quad ,$$

où $\tilde{\Delta}$ désigne la catégorie test de l'exemple 1.5.9, (a), sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles, ayant mêmes objets que Δ (mais comme morphismes toutes les applications, au lieu de seulement les applications croissantes), et où u et v désignent les foncteurs d'inclusion et i le foncteur test de l'exemple 1.7.17, associant à un objet E de $\tilde{\Delta}$ l'ensemble ordonné formé des parties non vides de E . On remarque que le foncteur

$$i_{\Delta'} : \Delta' \longrightarrow \mathcal{Cat}$$

$$\Delta_m \longmapsto \Delta' / \Delta_m$$

est canoniquement isomorphe à ivu . Pour montrer que Δ' est une catégorie test faible, il suffit de montrer que le foncteur $i_{\Delta'}$ est asphérique (cf. 1.7.3). Le foncteur i étant un foncteur test, et en particulier un foncteur asphérique, il suffit donc de montrer que v et u sont des morphismes asphériques de \mathcal{Cat} (1.7.4, (a)). Comme l'inclusion $i' : \Delta' \hookrightarrow \mathcal{Cat}$ est le composé du foncteur u suivi de l'inclusion $\Delta \hookrightarrow \mathcal{Cat}$, qui est un foncteur test (1.7.18), donc un foncteur asphérique, cela prouvera aussi que i' est un foncteur test faible (1.7.4, (a)).

a) *Le morphisme v de \mathcal{Cat} est asphérique.* En vertu de la proposition 1.2.9, il suffit de montrer que pour tout objet E de $\tilde{\Delta}$, le préfaisceau

$$F = v^*(E) \quad , \quad \Delta_m \longmapsto \mathrm{Hom}_{\tilde{\Delta}}(\Delta_m, E) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}ns}(\Delta_m, E) \quad ,$$

de $\hat{\Delta}$ est asphérique. Comme E est non vide, on choisit $a \in E$, et on définit un morphisme de préfaisceaux

$$h : \Delta_1 \times F \longrightarrow F$$

comme suit. Pour tout m -simplexe $\varphi : \Delta_m \rightarrow \Delta_1$ de Δ_1 , et tout m -simplexe $\psi : \Delta_m \rightarrow E$ de F , le m -simplexe $h(\varphi, \psi) : \Delta_m \rightarrow E$ de F est défini par

$$h(\varphi, \psi)(k) = \begin{cases} \psi(k) & \text{si } \varphi(k) = 0 \\ a & \text{si } \varphi(k) = 1 \end{cases} \quad 0 \leq k \leq m .$$

Notons \mathbb{I} le segment (Δ_1, e_0, e_1) de $\hat{\Delta}$ (e_0 et e_1 étant définis par $0 \mapsto 0$ et $0 \mapsto 1$ respectivement). On remarque que h est une \mathbb{I} -homotopie de l'identité de F vers un

endomorphisme constant de F , ce qui implique que F est \mathbb{I} -contractile. Comme Δ_1 est localement asphérique (1.5.12), il résulte de la proposition 1.4.8 que F est un préfaisceau localement asphérique, donc asphérique, de $\widehat{\Delta}$, ce qui prouve l'assertion.

b) *Le morphisme u de Cat est asphérique.* Il s'agit de montrer que pour tout m , $m \in \mathbb{N}$, $\Delta'/u^*(\Delta_m)$ est une catégorie asphérique. Notons $\overline{\Delta}'$ la catégorie obtenue en adjoignant un objet initial \emptyset à Δ' . Ainsi Δ' s'identifie au cocrible $\overline{\Delta}' - \{\emptyset\}$ de $\overline{\Delta}'$. Notons

$$\emptyset_n = \underbrace{(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset)}_{n \text{ fois}}$$

l'objet initial de $\overline{\Delta}'^n$, $n \geq 1$. On définit un isomorphisme de catégories

$$\Delta'/u^*(\Delta_m) \longrightarrow \overline{\Delta}'^{m+1} - \{\emptyset_{m+1}\}$$

de $\Delta'/u^*(\Delta_m)$ sur le cocrible $\overline{\Delta}'^{m+1} - \{\emptyset_{m+1}\}$ de $\overline{\Delta}'^{m+1}$, en associant à tout objet $(\Delta_n, \varphi : \Delta_n \rightarrow \Delta_m)$ de $\Delta'/u^*(\Delta_m)$, l'objet (a_0, a_1, \dots, a_m) de $\overline{\Delta}'^{m+1} - \{\emptyset_{m+1}\}$, où

$$a_i = \begin{cases} \Delta_{\text{card}(\varphi^{-1}\{i\})-1} & \text{si } \varphi^{-1}\{i\} \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \quad 0 \leq i \leq m.$$

Il suffit donc de prouver que la catégorie $\overline{\Delta}'^{m+1} - \{\emptyset_{m+1}\}$ est asphérique. On raisonne par récurrence sur m . Pour $m = 0$, $\overline{\Delta}' - \{\emptyset\}$ s'identifie à Δ' qui est asphérique (lemme 1.7.24). Supposons donc que $\overline{\Delta}'^m - \{\emptyset_m\}$ soit asphérique, et montrons que $\overline{\Delta}'^{m+1} - \{\emptyset_{m+1}\}$ l'est aussi. La catégorie $\overline{\Delta}'^{m+1} - \{\emptyset_{m+1}\}$ est réunion des cocribles $\overline{\Delta}'^m \times (\overline{\Delta}' - \{\emptyset\})$ et $(\overline{\Delta}'^m - \{\emptyset_m\}) \times \overline{\Delta}'$, et l'intersection de ces deux cocribles est $(\overline{\Delta}'^m - \{\emptyset_m\}) \times (\overline{\Delta}' - \{\emptyset\})$. Ces trois cocribles sont asphériques, en vertu de l'hypothèse de récurrence, du lemme 1.7.24, et des corollaires 1.1.5 et 1.1.11. Il résulte alors du corollaire 1.1.28 que $\overline{\Delta}'^{m+1} - \{\emptyset_{m+1}\}$ est asphérique, ce qui prouve l'assertion, et achève la démonstration. \square

Remarque 1.7.26. — Si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} n'est pas grossier, alors Δ' n'est pas une catégorie test. En effet, si Δ' était une catégorie test, il en serait de même de $\Delta'/\Delta_0 \simeq e$. Or, pour toute petite catégorie C , $i_e i_e^*(C)$ est la catégorie discrète ayant même ensemble d'objets que C . Si e était une catégorie test, et en particulier une catégorie test faible, la catégorie discrète $\{0, 1\} = i_e i_e^*(\Delta_1)$ serait asphérique (1.3.9), et le localisateur fondamental faible \mathcal{W} serait grossier (1.7.22).

Exemple 1.7.27. — Pour tout entier n , $n \geq 0$, on note $\Delta_{\leq n}$ la sous-catégorie pleine de Δ formée des Δ_m , pour $0 \leq m \leq n$, et $i_n : \Delta_{\leq n} \rightarrow \Delta$ le foncteur d'inclusion. On démontre que si $n \geq 1$, et si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{n-1}$, alors le foncteur i_n est \mathcal{W}_{n-1} -asphérique [7]. Comme le foncteur i_n est pleinement fidèle, on en déduit qu'il est localement \mathcal{W}_{n-1} -asphérique (cf. exemple 1.1.13, (a)), et il résulte de la proposition 1.6.13 et du corollaire 1.7.15, (c) que $\Delta_{\leq n}$ est une \mathcal{W}_{n-1} -catégorie test stricte.

CHAPITRE 2

LES LOCALISATEURS FONDAMENTAUX

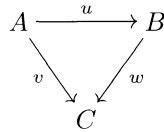
2.1. Les propriétés élémentaires des localisateurs fondamentaux

2.1.1. — On appelle *localisateur fondamental* une partie \mathcal{W} de $\text{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

LA La partie \mathcal{W} de $\text{Fl}(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

LB Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors $A \rightarrow e$, où e désigne l'objet final de $\mathcal{C}at$, est dans \mathcal{W} .

LC Si



désigne un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, et si pour tout objet c de C , le foncteur $u/c : A/c \rightarrow B/c$ induit par u est dans \mathcal{W} , alors u est dans \mathcal{W} .

On remarque qu'un localisateur fondamental est en particulier un localisateur fondamental faible. En effet, les conditions La (1.1.2) et Lb (1.1.2) coïncident aux conditions LA et LB respectivement, et la condition Lc (1.1.2) est le cas particulier de la condition LC correspondant à $B = C$ et $w = 1_B$ (et $v = u$).

Ainsi, on dispose, en particulier, des notions d'équivalence faible, de foncteur asphérique et de catégorie asphérique, introduites en 1.1.2. Si C est une petite catégorie, $v : A \rightarrow C$, $w : B \rightarrow C$ deux objets de $\mathcal{C}at/C$ et $u : A \rightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at/C$, de sorte que $v = wu$, on dit que u est une \mathcal{W} -équivalence (ou une *équivalence faible*) *localement sur* C si pour tout objet c de C , le foncteur $u/c : A/c \rightarrow B/c$, induit par u , est une équivalence faible. La condition LC affirme donc que pour toute petite catégorie C , un foncteur qui est une équivalence faible localement sur C est une équivalence faible. Duale, on dit que le foncteur u est une \mathcal{W} -équivalence (ou une *équivalence faible*) *colocalement sur* C si u° est une \mathcal{W} -équivalence localement sur C° (A° et B° étant considérées comme catégories au-dessus de C° par v° et w°).

respectivement). Il résulte de la proposition 1.1.22 et de LC qu'un foncteur qui est une équivalence faible colocalement sur C est une équivalence faible. Le foncteur u est une équivalence faible colocalement sur C si et seulement si pour tout objet c de C , le foncteur $c \backslash u : c \backslash A \rightarrow c \backslash B$, induit par u , est une équivalence faible (cf. 1.1.25).

On remarque qu'un foncteur entre petites catégories $u : A \rightarrow B$ est asphérique (resp. coasphérique) si et seulement s'il est une équivalence faible localement (resp. colocalement) sur B (A et B étant considérées comme catégories au-dessus de B par u et 1_B respectivement).

Soient C une petite catégorie, et $A \rightarrow C$ un objet de Cat/C . On dit qu'un morphisme $\varphi : F \rightarrow G$ de préfaisceaux sur A est une \mathcal{W} -équivalence (ou une *équivalence faible*) localement sur C si le morphisme

$$\begin{array}{ccc} A/F & \xrightarrow{i_A(\varphi)} & A/G \\ & \searrow & \swarrow \\ & C & \end{array}$$

de Cat/C est une \mathcal{W} -équivalence localement sur C . Il résulte de la condition LC que si le morphisme φ est une équivalence faible localement sur C , alors il est une équivalence faible. On remarque que φ est une \mathcal{W} -équivalence locale (cf. 1.2.6) si et seulement si φ est une \mathcal{W} -équivalence localement sur A , autrement dit, si le morphisme

$$\begin{array}{ccc} A/F & \xrightarrow{i_A(\varphi)} & A/G \\ & \searrow & \swarrow \\ & A & \end{array}$$

de Cat/A est une \mathcal{W} -équivalence localement sur A . Ainsi, la condition LC implique qu'une \mathcal{W} -équivalence locale de préfaisceaux est une \mathcal{W} -équivalence.

Exemple 2.1.2. — On vérifie immédiatement que les localisateurs fondamentaux faibles des exemples 1.1.29, 1.1.31 et 1.1.32 sont des localisateurs fondamentaux, et il résulte d'une version relative du théorème A de Quillen [7] qu'il en est de même de \mathcal{W}_∞ (exemple 1.1.33). Pour tout entier n , $n \geq 0$, on démontre que \mathcal{W}_n (exemple 1.1.34) est aussi un localisateur fondamental [7].

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental.

Proposition 2.1.3. — *Un produit fini d'équivalences faibles de Cat est une équivalence faible.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que le produit de deux équivalences faibles $u_1 : A_1 \rightarrow B_1$, $u_2 : A_2 \rightarrow B_2$ de Cat est une équivalence faible. Comme

$$u_1 \times u_2 = (1_{B_1} \times u_2)(u_1 \times 1_{A_2}) \quad ,$$

il suffit de montrer que pour toute équivalence faible $u : A \rightarrow B$ de \mathcal{Cat} , et toute petite catégorie C , le morphisme $u \times 1_C$ est une équivalence faible. On a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \times C & \xrightarrow{u \times 1_C} & B \times C \\ & \searrow p \quad \swarrow q & \\ & C & \end{array},$$

où p et q désignent les deuxièmes projections. En vertu de LC, il suffit donc de montrer que pour tout objet c de C , le morphisme

$$(A \times C)/c \simeq A \times C/c \xrightarrow{(u \times 1_C)/c = u \times 1_{C/c}} B \times C/c \simeq (B \times C)/c$$

est une équivalence faible. Or, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \times C/c & \xrightarrow{u \times 1_{C/c}} & B \times C/c \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array},$$

où les flèches verticales désignent les premières projections qui sont des équivalences faibles, en vertu de LB et de 1.1.4. Comme u est une équivalence faible, on en déduit qu'il en est de même de $u \times 1_{C/c}$, ce qui achève la démonstration. \square

Proposition 2.1.4. — *Une somme arbitraire d'équivalences faibles de \mathcal{Cat} est une équivalence faible.*

Démonstration. — Soit $u_i : A_i \rightarrow B_i$, $i \in I$, une famille d'équivalences faibles de \mathcal{Cat} . Notons aussi I la catégorie discrète correspondant à l'ensemble I . On a un triangle commutatif évident

$$\begin{array}{ccc} A = \coprod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{u = \coprod_{i \in I} u_i} & \coprod_{i \in I} B_i = B \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & I & \end{array},$$

et on remarque que pour tout objet i de I , le morphisme $u/i : A/i \rightarrow B/i$ s'identifie à $u_i : A_i \rightarrow B_i$. En vertu de LC, u est donc une équivalence faible, ce qui démontre la proposition. \square

2.1.5. — Soient M une catégorie, W une partie de $\mathbf{Fl}(M)$, et $\gamma : M \rightarrow W^{-1}M$ le foncteur de localisation (cf. 1.3.1). On rappelle que la propriété universelle du foncteur de localisation γ (cf. 1.3.1) se précise par la propriété « 2-universelle » suivante : Pour toute catégorie N , le foncteur

$$\underline{\mathbf{Hom}}(W^{-1}M, N) \xrightarrow{\gamma^*} \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$$

de la catégorie des foncteurs de $W^{-1}M$ vers N dans celle des foncteurs de M vers N , associant à un foncteur F le foncteur $F\gamma$, et à un morphisme de foncteurs α le morphisme de foncteurs $\alpha \star \gamma$, établit un *isomorphisme* de la catégorie $\underline{\text{Hom}}(W^{-1}M, N)$ sur la sous-catégorie pleine $\underline{\text{Hom}}_W(M, N)$ de $\underline{\text{Hom}}(M, N)$ formée des foncteurs $G : M \rightarrow N$ tels que, pour tout $w \in W$, $G(w)$ soit un isomorphisme de N . On pose $\text{Hom}_W(M, N) = \text{Ob}(\underline{\text{Hom}}_W(M, N))$.

Lemme 2.1.6. — Soient (i, j) un couple de foncteurs adjoints, $i : M \rightarrow M'$, $j : M' \rightarrow M$,

$$\varepsilon : ij \rightarrow 1_{M'} \quad , \quad \eta : 1_M \rightarrow ji$$

les morphismes d'adjonction, et W, W' des parties de $\text{Fl}(M)$ et $\text{Fl}(M')$ respectivement telles que

$$i(W) \subset W' \quad \text{et} \quad j(W') \subset W \quad .$$

Notons $\gamma : M \rightarrow W^{-1}M$ et $\gamma' : M' \rightarrow W'^{-1}M'$ les foncteurs de localisation, et $\bar{i} : W^{-1}M \rightarrow W'^{-1}M'$ et $\bar{j} : W'^{-1}M' \rightarrow W^{-1}M$ les foncteurs induits par i et j respectivement, de sorte qu'on ait des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & M' \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma' \\ W^{-1}M & \xrightarrow{\bar{i}} & W'^{-1}M' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{j} & M \\ \gamma' \downarrow & & \downarrow \gamma \\ W'^{-1}M' & \xrightarrow{\bar{j}} & W^{-1}M \end{array} \quad .$$

Alors (\bar{i}, \bar{j}) est un couple de foncteurs adjoints, les morphismes d'adjonction étant déduits de ε et η .

Démonstration. — Le lemme est une conséquence formelle de la « 2-fonctorialité » de la localisation, elle même conséquence de la propriété « 2-universelle ». Les détails sont laissés au lecteur. \square

Lemme 2.1.7. — Soient I un ensemble fini, $(M_i)_{i \in I}$ une famille de catégories, et pour tout i , $i \in I$, W_i une partie de $\text{Fl}(M_i)$ contenant les identités. Alors le foncteur canonique

$$\left(\prod_{i \in I} W_i \right)^{-1} \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow \prod_{i \in I} (W_i^{-1} M_i)$$

est un isomorphisme de catégories.

Démonstration. — Le lemme étant évident pour un ensemble I vide, ou ayant un seul élément, il suffit, par récurrence, de l'établir pour $I = \{1, 2\}$. Or, pour toute catégorie N , on a des bijections fonctorielles :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(W_1^{-1}M_1 \times W_2^{-1}M_2, N) &\simeq \text{Hom}(W_1^{-1}M_1, \underline{\text{Hom}}(W_2^{-1}M_2, N)) \\ &\simeq \text{Hom}(W_1^{-1}M_1, \underline{\text{Hom}}_{W_2}(M_2, N)) \simeq \text{Hom}_{W_1}(M_1, \underline{\text{Hom}}_{W_2}(M_2, N)) \\ &\simeq \text{Hom}_{W_1 \times W_2}(M_1 \times M_2, N) \simeq \text{Hom}((W_1 \times W_2)^{-1}(M_1 \times M_2), N) \quad , \end{aligned}$$

l'avant dernière résultant de l'hypothèse que W_1 et W_2 contiennent les identités, ce qui prouve le lemme. \square

Proposition 2.1.8. — *Soient M une catégorie admettant des produits (resp. des sommes) binaires, et W une partie de $\text{Fl}(M)$ contenant les identités et stable par produit (resp. somme) de deux flèches. Alors $W^{-1}M$ admet des produits (resp. des sommes) binaires, et le foncteur de localisation $\gamma : M \rightarrow W^{-1}M$ commute à ces produits (resp. sommes).*

Démonstration. — Si la catégorie M admet des produits binaires, le foncteur diagonal $\Delta : M \rightarrow M \times M$ admet un adjoint à droite $\Pi : M \times M \rightarrow M$ (foncteur produit). On a $\Delta(W) \subset W \times W$, et comme W est stable par produit de deux flèches, $\Pi(W \times W) \subset W$. En vertu du lemme 2.1.6, les foncteurs

$$\bar{\Delta} : W^{-1}M \rightarrow (W \times W)^{-1}(M \times M), \quad \bar{\Pi} : (W \times W)^{-1}(M \times M) \rightarrow W^{-1}M,$$

induits par Δ et Π respectivement, forment un couple de foncteurs adjoints. Or, en vertu du lemme 2.1.7, la catégorie $(W \times W)^{-1}(M \times M)$ est canoniquement isomorphe au produit $W^{-1}M \times W^{-1}M$, et on vérifie facilement que $\bar{\Delta}$ s'identifie par cet isomorphisme au foncteur diagonal. On en déduit que $W^{-1}M$ admet des produits binaires, $\bar{\Pi}$ étant un foncteur produit, ce qui achève la démonstration, la partie concernant les sommes se déduisant par passage aux catégories opposées. \square

Proposition 2.1.9. — *La catégorie $\text{Hot} = \text{Hot}_W = W^{-1}\text{Cat}$ admet des produits finis et des sommes finies, et le foncteur de localisation canonique $\gamma : \text{Cat} \rightarrow \text{Hot}$ y commute.*

Démonstration. — La proposition résulte des propositions 2.1.8, 2.1.3, 2.1.4, du lemme 1.3.6, et de son dual. \square

Proposition 2.1.10. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & C & \end{array}$$

un triangle commutatif de Cat . On suppose que pour tout objet c de C , le morphisme $u_c : A_c \rightarrow B_c$, induit par u dans les fibres, est une équivalence faible.

(a) *Si v et w sont des précofibrations, alors le foncteur u est une équivalence faible localement sur C .*

(b) *Si v et w sont des préfibrations, alors le foncteur u est une équivalence faible colocalement sur C .*

En particulier, dans les deux cas (a) ou (b), le foncteur u est une équivalence faible.

Démonstration. — Pour tout objet c de C , on a un carré commutatif dans \mathcal{Cat}

$$\begin{array}{ccc} A_c & \xrightarrow{u_c} & B_c \\ i_c \downarrow & & \downarrow j_c \\ A/c & \xrightarrow{u/c} & B/c \end{array} ,$$

où i_c et j_c désignent les foncteurs canoniques. Si v et w sont des précofibrations, en vertu du lemme 1.1.16, les foncteurs i_c et j_c admettent des adjoints à gauche, et sont donc coasphériques, et en particulier des équivalences faibles (1.1.25). Comme par hypothèse u_c est une équivalence faible, il en est de même de u/c , ce qui prouve l'assertion (a). L'assertion (b) en résulte par passage aux catégories opposées, en vertu de la proposition 1.1.22. \square

Théorème 2.1.11. — *Soit \mathcal{W} une partie de $\mathbf{Fl}(\mathcal{Cat})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) \mathcal{W} est un localisateur fondamental.
- (b) \mathcal{W} satisfait aux conditions suivantes :
 - LA $^\circ$ La partie \mathcal{W} de $\mathbf{Fl}(\mathcal{Cat})$ est faiblement saturée.
 - LB $^\circ$ Si A est une petite catégorie admettant un objet initial, alors $A \rightarrow e$ est dans \mathcal{W} .
 - LC $^\circ$ Si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & C & \end{array}$$

est un triangle commutatif de \mathcal{Cat} , et si pour tout objet c de C , le foncteur $c \backslash u : c \backslash A \rightarrow c \backslash B$, induit par u , est dans \mathcal{W} , alors u est dans \mathcal{W} .

- (c) \mathcal{W} satisfait aux conditions suivantes :
 - L α La partie \mathcal{W} de $\mathbf{Fl}(\mathcal{Cat})$ est faiblement saturée.
 - L β Le morphisme canonique $\Delta_1 \rightarrow e$ est dans \mathcal{W} .
 - L γ Si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & C & \end{array}$$

est un triangle commutatif de \mathcal{Cat} , p et q des cofibrations, u un foncteur cocartésien (transformant morphismes cocartésiens en morphismes cocartésiens), et si pour tout objet c de C , le foncteur $u_c : A_c \rightarrow B_c$, induit par u dans les fibres, est dans \mathcal{W} , alors u est dans \mathcal{W} .

- (d) \mathcal{W} satisfait aux conditions suivantes :

$L\alpha^\circ$ La partie \mathcal{W} de $\mathbf{Fl}(\mathcal{Cat})$ est faiblement saturée.

$L\beta^\circ$ Le morphisme canonique $\Delta_1 \rightarrow e$ est dans \mathcal{W} .

$L\gamma^\circ$ Si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & C & \end{array}$$

est un triangle commutatif de \mathcal{Cat} , p et q des fibrations, u un foncteur cartésien (transformant morphismes cartésiens en morphismes cartésiens), et si pour tout objet c de C , le foncteur $u_c : A_c \rightarrow B_c$, induit par u dans les fibres, est dans \mathcal{W} , alors u est dans \mathcal{W} .

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (c)$ résulte de la proposition 2.1.10. Pour montrer l'implication $(c) \Rightarrow (b)$, soit \mathcal{W} une partie de $\mathbf{Fl}(\mathcal{Cat})$ satisfaisant aux conditions $L\alpha$, $L\beta$, $L\gamma$. La condition LA° coïncide avec la condition $L\alpha$, et est donc satisfaite. Pour montrer les conditions LB° et LC° , on procède par plusieurs étapes.

i) Montrons que le morphisme canonique $\Delta_1 \rightarrow e$ est universellement dans \mathcal{W} , autrement dit, que pour toute petite catégorie A , la première projection $pr_1 : A \times \Delta_1 \rightarrow A$ est dans \mathcal{W} . On a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \times \Delta_1 & \xrightarrow{pr_1} & A \\ & \searrow pr_1 & \swarrow 1_A \\ & A & \end{array} ,$$

les flèches obliques étant des cofibrations, et la flèche horizontale un foncteur cocartésien, induisant dans les fibres au-dessus d'un objet a de A un foncteur s'identifiant au foncteur canonique $\Delta_1 \rightarrow e$, qui est dans \mathcal{W} en vertu de $L\beta$. Il résulte donc de $L\gamma$ que pr_1 est dans \mathcal{W} .

ii) Montrons que \mathcal{W} satisfait à la condition LB° , autrement dit, que pour toute petite catégorie A admettant un objet initial, le morphisme canonique $A \rightarrow e$ est dans \mathcal{W} . En effet, en vertu de la proposition 1.4.16, la catégorie A est contractile, et comme \mathcal{W} est faiblement saturé, l'assertion résulte de (i) et de la proposition 1.4.8.

iii) Introduisons une version relative de la catégorie $S(A)$ introduite dans 1.1.18. Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathcal{Cat} . On définit une catégorie $S(u)$ comme suit :

$$\mathrm{Ob}(S(u)) = \{(a, b, f) \mid a \in \mathrm{Ob}(A), b \in \mathrm{Ob}(B), f : b \rightarrow u(a) \in \mathbf{Fl}(B)\} ,$$

et si (a, b, f) et (a', b', f') sont deux objets de $S(u)$, l'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}_{S(u)}((a, b, f), (a', b', f'))$ est formé des couples (g, h) , $g : a \rightarrow a' \in \mathbf{Fl}(A)$,

$h : b' \rightarrow b \in \text{Fl}(B)$ tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{f} & u(a) \\ h \uparrow & & \downarrow u(g) \\ b' & \xrightarrow{f'} & u(a') \end{array} \quad f' = u(g)fh$$

soit commutatif. L'identité de (a, b, f) est définie par $1_{(a,b,f)} = (1_a, 1_b)$, et si

$$(g, h) : (a, b, f) \rightarrow (a', b', f') \quad \text{et} \quad (g', h') : (a', b', f') \rightarrow (a'', b'', f'')$$

sont des morphismes de $S(u)$,

$$(g', h') \circ (g, h) = (g'g, hh') \quad .$$

On définit deux foncteurs :

$$B^\circ \xleftarrow{s_u} S(u) \xrightarrow{t_u} A$$

en posant pour tout objet (a, b, f) de $S(u)$,

$$s_u(a, b, f) = b \quad , \quad t_u(a, b, f) = a \quad ,$$

et pour tout morphisme (g, h) de $S(u)$,

$$s_u(g, h) = h \quad , \quad t_u(g, h) = g \quad .$$

(On remarque que la catégorie $S(A)$ et les foncteurs s_A et t_A introduits dans 1.1.18 s'identifient à $S(u)$, s_u et t_u respectivement, pour $A = B$ et $u = 1_A$.) On vérifie facilement que les foncteurs s_u et t_u sont des cofibrations, en remarquant qu'un morphisme (g, h) de $S(u)$ est cocartésien relativement à s_u (resp. t_u) si et seulement si g (resp. h) est un isomorphisme, et que si $h : b' \rightarrow b$ (resp. $g : a \rightarrow a'$) est un morphisme de B (resp. A) et (a, b, f) un objet de $S(u)$ au-dessus de b (resp. a), alors

$$(1_a, h) : (a, b, f) \rightarrow (a, b', fh)$$

$$(\text{resp.} \quad (g, 1_b) : (a, b, f) \rightarrow (a', b, u(g)f))$$

est un morphisme cocartésien relativement à s_u (resp. t_u) au-dessus de h (resp. g). On remarque que la fibre $S(u)_b$ (resp. $S(u)_a$) de s_u (resp. t_u), au-dessus d'un objet b (resp. a) de B° (resp. A), est la catégorie $b \backslash A$ (resp. $(B/u(a))^\circ \simeq u(a) \backslash B^\circ$). En particulier, les fibres de t_u possèdent un objet initial, ce qui implique, en vertu de (ii) et de $L\gamma$, que t_u est dans \mathcal{W} .

Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ v \downarrow & & \downarrow w \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' \end{array}$$

un carré commutatif de \mathcal{Cat} . On définit un foncteur $S(v, w) : S(u) \rightarrow S(u')$ comme suit :

$$\begin{aligned} S(v, w)(a, b, f) &= (v(a), w(b), w(f)) \quad , \quad (a, b, f) \in \text{Ob}(S(u)) \quad , \\ f : b &\longrightarrow u(a) \quad , \quad w(f) : w(b) \longrightarrow wu(a) = u'v(a) \quad , \\ S(v, w)(g, h) &= (v(g), w(h)) \quad , \quad (g, h) \in \text{Fl}(S(u)) \quad . \end{aligned}$$

On vérifie aussitôt qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} B^\circ & \xleftarrow{s_u} & S(u) & \xrightarrow{t_u} & A \\ \downarrow w^\circ & & \downarrow S(v, w) & & \downarrow v \\ B'^\circ & \xleftarrow{s_{u'}} & S(u') & \xrightarrow{t_{u'}} & A' \end{array} \quad .$$

iv) Montrons que \mathcal{W} satisfait à la condition LC° . Soit donc

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & C & \end{array}$$

un triangle commutatif de \mathcal{Cat} , et supposons que pour tout objet c de C , le foncteur $c \backslash u : c \backslash A \rightarrow c \backslash B$, induit par u , est dans \mathcal{W} . En vertu de ce qui précède, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} C^\circ & \xleftarrow{s_v} & S(v) & \xrightarrow{t_v} & A \\ \downarrow 1_{C^\circ} & & \downarrow S(u, 1_C) & & \downarrow u \\ C^\circ & \xleftarrow{s_w} & S(w) & \xrightarrow{t_w} & B \end{array} \quad .$$

En particulier, on a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} S(v) & \xrightarrow{S(u, 1_C)} & S(w) \\ & \searrow s_v & \swarrow s_w \\ & C^\circ & \end{array} \quad ,$$

où s_v et s_w sont des cofibrations, et on vérifie immédiatement que $S(u, 1_C)$ est un foncteur cocartésien. Comme pour tout objet c de C , $S(u, 1_C)$ induit un foncteur dans les fibres au-dessus de c s'identifiant à $c \backslash u : c \backslash A \rightarrow c \backslash B$ qui est par hypothèse dans \mathcal{W} , il résulte de la condition $\text{L}\gamma$ que $S(u, 1_C)$ est dans \mathcal{W} . Comme t_v et t_w sont dans \mathcal{W} , il en est de même de u . Ceci achève la démonstration de l'implication $(c) \Rightarrow (b)$.

Montrons l'implication $(b) \Rightarrow (a)$. Soit donc \mathcal{W} une partie de $\text{Fl}(\text{Cat})$ satisfaisant aux conditions LA° , LB° et LC° . Notons \mathcal{W}° la partie de $\text{Fl}(\text{Cat})$ définie par

$$\mathcal{W}^\circ := \{u \in \text{Fl}(\text{Cat}) \mid u^\circ \in \mathcal{W}\} \quad .$$

Il est immédiat que \mathcal{W}° est un localisateur fondamental. En vertu de 1.1.11, une petite catégorie admettant un objet initial est \mathcal{W}° -asphérique, ce qui implique la condition LB pour \mathcal{W} . De même, pour toute petite catégorie C , un morphisme de Cat/C qui est une \mathcal{W}° -équivalence colocalement sur C est dans \mathcal{W}° (cf. 2.1.1), ce qui implique la condition LC pour \mathcal{W} , et achève la démonstration de l'équivalence des conditions (a) , (b) et (c) .

En appliquant cette équivalence à \mathcal{W}° , pour une partie \mathcal{W} de $\text{Fl}(\text{Cat})$, on déduit l'équivalence des conditions (a) , (b) et (d) pour \mathcal{W} , ce qui achève la démonstration du théorème. \square

2.2. Foncteurs d'intégration et de coïntégration

2.2.1. — Soient I une petite catégorie, et $F : I \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur. On rappelle une construction de Grothendieck d'une catégorie $\int F$ et d'une cofibration $\theta_F : \int F \rightarrow I$ associées au foncteur F . Les objets de $C = \int F$ sont les couples (i, a) , où i est un objet de I et a un objet de $F(i)$. Un morphisme de (i, a) vers (i', a') est un couple (k, f) , où $k : i \rightarrow i'$ est un morphisme de I et $f : F(k)(a) \rightarrow a'$ un morphisme de $F(i')$. Le composé d'un morphisme $(k, f) : (i, a) \rightarrow (i', a')$ et d'un morphisme $(k', f') : (i', a') \rightarrow (i'', a'')$ est défini par

$$(k', f') \circ (k, f) = (k'k, f' \circ F(k')(f))$$

$$F(k'k)(a) = F(k')F(k)(a) \xrightarrow{F(k')(f)} F(k')(a') \xrightarrow{f'} a'' \quad .$$

Le foncteur θ_F est défini par

$$\theta_F(i, a) = i, \quad (i, a) \in \text{Ob}(C), \quad \theta_F(k, f) = k, \quad (k, f) \in \text{Fl}(C) \quad .$$

On vérifie facilement que les morphismes cocartésiens de C relativement à θ_F sont les flèches (k, f) de C telles que f soit un isomorphisme, et que $\theta_F : C \rightarrow I$ est une cofibration dont les fibres C_i s'identifient aux catégories $F(i)$. Quand le foncteur F est donné par une formule explicite, la catégorie $\int F$ est parfois notée $\int_I F$, ou encore $\int_{i \in \text{Ob}(I)} F(i)$, pour indiquer le domaine de définition du foncteur F .

Exemple 2.2.2. — Soient A une petite catégorie et H_A le foncteur

$$H_A : A^\circ \times A \longrightarrow \text{Cat} \quad , \quad (b, a) \longmapsto \text{Hom}_A(b, a) \quad ,$$

où l'ensemble $\text{Hom}_A(b, a)$ est considéré comme une catégorie discrète. Alors $\int H_A$ s'identifie à la catégorie $S(A)$ introduite dans 1.1.18, et la cofibration $\theta_{H_A} : \int H_A \rightarrow A^\circ \times A$ au foncteur $(s_A, t_A) : S(A) \rightarrow A^\circ \times A$ (cf. 1.1.18). Cela explique et redémontre le lemme 1.1.19, affirmant que s_A et t_A sont des cofibrations

(puisque les projections sont des cofibrations, et les cofibrations sont stables par composition). Plus généralement, si $u : A \rightarrow B$ est un morphisme de \mathcal{Cat} , et H_u le foncteur

$$H_u : B^\circ \times A \rightarrow \mathcal{Cat} \quad , \quad (b, a) \mapsto \text{Hom}_B(b, u(a)) \quad ,$$

alors $\int H_u$ s'identifie à la catégorie $S(u)$ considérée dans la démonstration du théorème 2.1.11.

2.2.3. — Soient I une petite catégorie, $F : I \rightarrow \mathcal{Cat}$ un foncteur, et $C = \int F$. Pour tout objet i de I , on définit un foncteur

$$l_i : F(i) \rightarrow C$$

par

$$l_i(a) = (i, a) \quad , \quad a \in \text{Ob}(F(i)) \quad ,$$

$$l_i(f) = (1_i, f) \quad , \quad f \in \text{Fl}(F(i)) \quad ,$$

qui identifie $F(i)$ à la fibre C_i de θ_F au-dessus de i . De plus, pour tout morphisme $k : i \rightarrow i'$ de I , on définit un morphisme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{F(k)} & F(i') \\ & \searrow l_i \quad \nearrow \beta_k \quad \swarrow l_{i'} & \\ & C & \end{array} \quad \beta_k : l_i \longrightarrow l_{i'} F(k)$$

par

$$\beta_{k,a} = (k, 1_{F(k)(a)}) : (i, a) \longrightarrow (i', F(k)(a)) \quad , \quad a \in \text{Ob}(F(i)) \quad .$$

On remarque que si $k : i \rightarrow i'$, $k' : i' \rightarrow i''$ sont deux morphismes composables de I , on a la condition de cocycle :

$$(2.2.3.1) \quad \beta_{k'k} = (\beta_{k'} \star F(k))\beta_k \quad , \quad \beta_{1_i} = 1_{l_i} \quad .$$

$$\begin{array}{ccccc} F(i) & \xrightarrow{F(k)} & F(i') & \xrightarrow{F(k')} & F(i'') \\ & \searrow l_i \quad \xRightarrow{\beta_k} \downarrow l_{i'} \quad \xRightarrow{\beta_{k'}} \swarrow l_{i''} & & & \\ & & C & & \end{array}$$

Ces données satisfont à la propriété universelle suivante, analogue à celle des limites inductives. Pour toute catégorie D , toute famille de foncteurs $m_i : F(i) \rightarrow D$, $i \in \text{Ob}(I)$, et toute famille de morphismes de foncteurs $\gamma_k : m_i \rightarrow m_{i'} F(k)$, $k : i \rightarrow i'$, $k \in \text{Fl}(I)$, satisfaisant à la condition de cocycle

$$\gamma_{k'k} = (\gamma_{k'} \star F(k))\gamma_k \quad , \quad \gamma_{1_i} = 1_{m_i} \quad ,$$

pour $k : i \rightarrow i'$, $k' : i' \rightarrow i''$ morphismes composables de I , il existe un foncteur unique $H : C \rightarrow D$ tel que

$$(2.2.3.2) \quad m_i = Hl_i, \quad i \in \text{Ob}(I), \quad \text{et} \quad \gamma_k = H \star \beta_k, \quad k \in \text{Fl}(I).$$

Explicitement, on a

$$(2.2.3.3) \quad \begin{aligned} H(i, a) &= m_i(a), & (i, a) &\in \text{Ob}(C), \\ H(k, f) &= m_{i'}(f)\gamma_{k,a}, & (k, f) : (i, a) &\rightarrow (i', a') \in \text{Fl}(C). \end{aligned}$$

En particulier, il existe un foncteur unique

$$K_F : \int F \longrightarrow \varinjlim F$$

tel que si $\varepsilon_i : F(i) \rightarrow \varinjlim F$, $i \in \text{Ob}(I)$, désigne le morphisme canonique,

$$(2.2.3.4) \quad \varepsilon_i = K_F \circ l_i, \quad i \in \text{Ob}(I), \quad \text{et} \quad K_F \star \beta_k = 1_{\varepsilon_i}, \quad k : i \rightarrow i' \in \text{Fl}(I).$$

Explicitement :

$$(2.2.3.5) \quad \begin{aligned} K_F(i, a) &= \varepsilon_i(a), & (i, a) &\in \text{Ob}(C), \\ K_F(k, f) &= \varepsilon_{i'}(f), & (k, f) : (i, a) &\rightarrow (i', a') \in \text{Fl}(C). \end{aligned}$$

2.2.4. — La propriété universelle décrite dans 2.2.3 se précise par une propriété « 2-universelle » faisant de $C = \int F$ une « 2-limite inductive » : Pour tout couple de foncteurs $H, H' : C \rightrightarrows C'$ définissant

$$\begin{aligned} m_i &= Hl_i, \quad i \in \text{Ob}(I), & \gamma_k &= H \star \beta_k, \quad k \in \text{Fl}(I), \\ m'_i &= H'l_i, \quad i \in \text{Ob}(I), & \gamma'_k &= H' \star \beta_k, \quad k \in \text{Fl}(I), \end{aligned}$$

et toute famille de morphismes de foncteurs

$$\alpha_i : m_i \longrightarrow m'_i, \quad i \in \text{Ob}(I),$$

satisfaisant aux relations

$$(2.2.4.1) \quad \gamma'_k \alpha_i = (\alpha_{i'} \star F(k)) \gamma_k, \quad k : i \rightarrow i' \in \text{Fl}(I),$$

$$\begin{array}{ccc} m_i & \xrightarrow{\gamma_k} & m_{i'} F(k) \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \alpha_{i'} \star F(k) \\ m'_i & \xrightarrow{\gamma'_k} & m'_{i'} F(k) \end{array}$$

il existe un unique morphisme de foncteurs $\alpha' : H \rightarrow H'$ tel que

$$(2.2.4.2) \quad \alpha_i = \alpha' \star l_i, \quad i \in \text{Ob}(I).$$

2.2.5. — Soient maintenant $F' : I \rightarrow \text{Cat}$ un deuxième foncteur,

$$\theta_{F'} : C' = \int F' \rightarrow I$$

la cofibration correspondante, et $\alpha : F \rightarrow F'$ un morphisme de foncteurs, de sorte que pour tout objet i de I , $\alpha_i : F(i) \rightarrow F'(i)$ soit un foncteur. On définit un foncteur $u = \int \alpha : C \rightarrow C'$ en posant

$$\begin{aligned} u(i, a) &= (i, \alpha_i(a)) \quad , \quad (i, a) \in \text{Ob}(C) \quad , \\ u(k, f) &= (k, \alpha_{i'}(f)) \quad , \quad (k, f) \in \text{Hom}_C((i, a), (i', a')) \quad . \end{aligned}$$

(Comme (k, f) est un morphisme de C de (i, a) vers (i', a') , $f : F(k)(a) \rightarrow a'$ est un morphisme de $F(i')$ et $\alpha_{i'}(f) : \alpha_{i'} F(k)(a) \rightarrow \alpha_{i'}(a')$ un morphisme de $F'(i')$. Comme α est un morphisme de foncteurs, $\alpha_{i'} F(k)(a) = F'(k) \alpha_i(a)$, donc $(k, \alpha_{i'}(f))$ est bien un morphisme de C' , de $(i, \alpha_i(a))$ vers $(i', \alpha_{i'}(a'))$.) On a un triangle commutatif de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} C = \int F & \xrightarrow{u = \int \alpha} & \int F' = C' \\ & \searrow \theta_F \quad \swarrow \theta_{F'} & \\ & I & \end{array} \quad ,$$

et on vérifie facilement que u est un foncteur cocartésien (transformant morphismes cocartésiens en morphismes cocartésiens).

Le foncteur $u = \int \alpha$ peut être aussi défini par la propriété universelle de C . Notons

$$\begin{aligned} l'_i : F'(i) &\rightarrow C' \quad , \quad i \in \text{Ob}(I) \quad , \\ \beta'_k : l'_i &\rightarrow l'_{i'} F'(k) \quad , \quad k : i \rightarrow i' \in \text{Fl}(I) \quad , \end{aligned}$$

les foncteurs et morphismes de foncteurs canoniques correspondant au foncteur F' , et définissons

$$m_i = l'_i \alpha_i \quad , \quad i \in \text{Ob}(I) \quad , \quad \gamma_k = \beta'_k \star \alpha_i \quad , \quad k : i \rightarrow i' \in \text{Fl}(I) \quad ,$$

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{\alpha_i} & F'(i) \\ & \searrow m_i \quad \downarrow l'_i & \\ & C' & \end{array} \quad m_i = l'_i \alpha_i \xrightarrow{\gamma_k = \beta'_k \star \alpha_i} l'_{i'} F'(k) \alpha_i = l'_{i'} \alpha_{i'} F(k) = m_{i'} F(k) \quad .$$

Soient $k : i \rightarrow i'$ et $k' : i' \rightarrow i''$ deux morphismes composables de I . On a

$$\begin{aligned} \gamma_{k'k} &= \beta'_{k'k} \star \alpha_i = ((\beta'_{k'} \star F'(k)) \beta'_k) \star \alpha_i = (\beta'_{k'} \star (F'(k) \alpha_i)) (\beta'_k \star \alpha_i) \\ &= (\beta'_{k'} \star (\alpha_{i'} F(k))) (\beta'_k \star \alpha_i) = ((\beta'_{k'} \star \alpha_{i'}) \star F(k)) (\beta'_k \star \alpha_i) = (m_{k'} \star F(k)) m_k \end{aligned}$$

et

$$\gamma_{1_i} = \beta'_{1_i} \star \alpha_i = 1_{i'} \star \alpha_i = 1_{l'_i \alpha_i} = 1_{m_i} \quad .$$

La propriété universelle de C implique par conséquent l'existence d'un unique foncteur $u : C \rightarrow C'$ tel que

$$l'_i \alpha_i = u l_i, \quad i \in \text{Ob}(I), \quad \text{et} \quad \beta'_k \star \alpha_i = u \star \beta_k, \quad k : i \rightarrow i' \in \text{Fl}(I),$$

et on vérifie facilement que ce foncteur coïncide au foncteur $\int \alpha$ défini précédemment. On a ainsi défini un *foncteur d'intégration*

$$\int_I = \int : \underline{\text{Hom}}(I, \text{Cat}) \rightarrow \text{Cat}/I$$

de source la catégorie des foncteurs de I vers Cat et de but celle des petites catégories au-dessus de I , se factorisant par la sous-catégorie des catégories cofibrées sur I et des foncteurs cocartésiens.

2.2.6. — Dualement, pour toute petite catégorie I , on définit un *foncteur de coïntégration*

$$\nabla_I = \nabla : \underline{\text{Hom}}(I^\circ, \text{Cat}) \rightarrow \text{Cat}/I$$

associant à un foncteur contravariant $F : I^\circ \rightarrow \text{Cat}$ de I vers Cat la catégorie *fibrée* $\zeta_F : \nabla F \rightarrow I$ définie comme suit. Les objets de ∇F sont les couples (i, a) , où i est un objet de I et a un objet de $F(i)$. Un morphisme de (i, a) vers (i', a') est un couple (k, f) , où $k : i \rightarrow i'$ est un morphisme de I et $f : a \rightarrow F(k)(a')$ un morphisme de $F(i)$. Le composé d'un morphisme $(k, f) : (i, a) \rightarrow (i', a')$ et d'un morphisme $(k', f') : (i', a') \rightarrow (i'', a'')$ est défini par

$$(k', f') \circ (k, f) = (k'k, F(k)(f') \circ f)$$

$$a \xrightarrow{f} F(k)(a') \xrightarrow{F(k)(f')} F(k)F(k')(a'') = F(k'k)(a'') \quad .$$

Le foncteur ζ_F est défini par

$$\zeta_F(i, a) = i, \quad (i, a) \in \text{Ob}(\nabla F), \quad \zeta_F(k, f) = k, \quad (k, f) \in \text{Fl}(\nabla F).$$

Si $F' : I^\circ \rightarrow \text{Cat}$ est un deuxième foncteur, et $\alpha : F \rightarrow F'$ un morphisme de foncteurs, on définit un foncteur $\nabla \alpha$

$$\begin{array}{ccc} \nabla F & \xrightarrow{\nabla \alpha} & \nabla F' \\ & \searrow \zeta_F & \swarrow \zeta_{F'} \\ & I & \end{array}$$

cartésien au-dessus de I (transformant morphismes cartésiens en morphismes cartésiens) par

$$\begin{aligned} \nabla \alpha(i, a) &= (i, \alpha_i(a)) \quad , \quad (i, a) \in \text{Ob}(\nabla F) \quad , \\ \nabla \alpha(k, f) &= (k, \alpha_i(f)) \quad , \quad (k, f) \in \text{Hom}_{\nabla F}((i, a), (i', a')) \quad . \end{aligned}$$

On vérifie facilement que pour tout foncteur $F : I^\circ \rightarrow \text{Cat}$, on a

$$\nabla_I F = (\int_{I^\circ} F^\circ)^\circ \quad \text{et} \quad \zeta_F = (\theta_{F^\circ})^\circ \quad ,$$

où par abus de notations, F° ne désigne pas le foncteur opposé à F , mais le foncteur composé de $F : I^\circ \rightarrow \text{Cat}$ et de l'automorphisme $?^\circ : \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$ associant à une petite catégorie la catégorie opposée. En revanche, $(\theta_{F^\circ})^\circ$ désigne bien le foncteur opposé au foncteur $\theta_{F^\circ} : \int_{I^\circ} F^\circ \rightarrow I^\circ$. De façon plus précise, on a un diagramme commutatif de foncteurs

$$(2.2.6.1) \quad \begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(I^\circ, \text{Cat}) & \xrightarrow{\nabla_I} & \text{Cat}/I \\ \underline{\text{Hom}}(1_{I^\circ}, ?^\circ) \downarrow & & \uparrow ?^\circ/I \\ \underline{\text{Hom}}(I^\circ, \text{Cat}) & \xrightarrow{\int_{I^\circ}} & \text{Cat}/I^\circ \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes de catégories induits par l'involution $?^\circ$. On laisse le soin au lecteur d'énoncer et vérifier la propriété universelle satisfaite par la coïntégration.

2.3. Images directes et composés transfinis d'équivalences faibles

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental \mathcal{W} .

Proposition 2.3.1. — Soient I une petite catégorie, $F, F' : I \rightrightarrows \text{Cat}$ deux foncteurs, et $\alpha : F \rightarrow F'$ un morphisme de foncteurs. Si α est une équivalence faible argument par argument, autrement dit, si pour tout objet i de I , le foncteur $\alpha_i : F(i) \rightarrow F'(i)$ est une équivalence faible, alors $\int \alpha : \int F \rightarrow \int F'$ est une équivalence faible localement sur I , et en particulier, une équivalence faible.

Démonstration. — La proposition est une conséquence immédiate de 2.2.5, et de la proposition 2.1.10. \square

2.3.2. — Dans la suite, on va s'intéresser au cas où la catégorie I est la catégorie engendrée par le graphe

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 2 \\ \downarrow & & \\ 1 & & \end{array},$$

de sorte que la donnée d'un foncteur $I \rightarrow \text{Cat}$ équivaut à la donnée d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ u_1 \downarrow & & \\ C_1 & & \end{array}$$

de Cat . Si on pose

$$C = \int_{C_1}^{C_0 \xrightarrow{u_2} C_2} \quad ,$$

on a

$$\text{Ob}(C) = \{(i, a) \mid i = 0, 1, 2, a \in \text{Ob}(C_i)\} ,$$

$$\text{Hom}_C((i, a), (i, a')) \simeq \text{Hom}_{C_i}(a, a') , \quad i = 0, 1, 2, \quad a, a' \in \text{Ob}(C_i) ,$$

$$\text{Hom}_C((0, a), (i, b)) \simeq \text{Hom}_{C_i}(u_i(a), b) , \quad i = 1, 2, \quad a \in \text{Ob}(C_0) , \quad b \in \text{Ob}(C_i) ,$$

$$\text{Hom}_C((i, a), (j, b)) = \emptyset \quad \text{sinon.}$$

En vertu des considérations du numéro 2.2.3, on a un « 2-diagramme »

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ \downarrow u_1 & \searrow \beta_2 & \downarrow l_2 \\ & \xleftarrow{\beta_1} & \\ C_1 & \xrightarrow{l_1} & C \end{array} ,$$

β_2 and β_1 are isomorphisms, and l_0 is a 2-morphism from $u_2 \circ u_1$ to $l_1 \circ l_2$.

et dans ce cas particulier, la propriété universelle affirme que pour tout « 2-diagramme »

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ \downarrow u_1 & \searrow \gamma_2 & \downarrow m_2 \\ & \xleftarrow{\gamma_1} & \\ C_1 & \xrightarrow{m_1} & D \end{array} ,$$

γ_2 and γ_1 are isomorphisms, and m_0 is a 2-morphism from $u_2 \circ u_1$ to $m_1 \circ m_2$.

il existe un foncteur unique $g : C \rightarrow D$ tel que

$$m_i = g l_i , \quad i = 0, 1, 2, \quad \gamma_i = g \star \beta_i , \quad i = 1, 2 .$$

La propriété « 2-universelle » (cf. 2.2.4) affirme que si on a un deuxième « 2-diagramme »

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ \downarrow u_1 & \searrow \gamma'_2 & \downarrow m'_2 \\ & \xleftarrow{\gamma'_1} & \\ C_1 & \xrightarrow{m'_1} & D \end{array} ,$$

γ'_2 and γ'_1 are isomorphisms, and m'_0 is a 2-morphism from $u_2 \circ u_1$ to $m'_1 \circ m'_2$.

définissant un foncteur $g' : C \rightarrow D$ tel que

$$(2.3.2.1) \quad m'_i = g' l_i , \quad i = 0, 1, 2, \quad \gamma'_i = g' \star \beta_i , \quad i = 1, 2 ,$$

alors pour tout triplet de morphismes de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} C_0 \\ \left(\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \Rightarrow \end{array} \right) \\ m_0 \downarrow \quad m'_0 \downarrow \\ D \end{array} & \begin{array}{c} C_1 \\ \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \Rightarrow \end{array} \right) \\ m_1 \downarrow \quad m'_1 \downarrow \\ D \end{array} & \begin{array}{c} C_2 \\ \left(\begin{array}{c} \alpha_2 \\ \Rightarrow \end{array} \right) \\ m_2 \downarrow \quad m'_2 \downarrow \\ D \end{array} \end{array}$$

tels que

$$(2.3.2.2) \quad \gamma'_i \alpha_0 = (\alpha_i \star u_i) \gamma_i \quad , \quad i = 1, 2 \quad ,$$

il existe un morphisme de foncteurs unique $\alpha' : g \rightarrow g'$ tel que

$$(2.3.2.3) \quad \alpha_i = \alpha' \star l_i \quad , \quad i = 0, 1, 2 \quad .$$

Proposition 2.3.3. — *En gardant les notations ci-dessus, si u_1 est une équivalence faible, il en est de même de l_2 .*

Démonstration. — Le foncteur l_2 est le composé

$$C_2 \xrightarrow{l'_2} \int_{\substack{C_0 \\ \downarrow \\ C_0}} C_0 \xrightarrow{u_2} C_2 \xrightarrow{\int \alpha} \int_{\substack{C_1 \\ \downarrow \\ C_1}} C_0 \xrightarrow{u_2} C_2 \quad ,$$

où l'_2 est le morphisme canonique, et α est le morphisme de foncteurs

$$\begin{array}{ccccc} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 & & \\ \downarrow 1_{C_0} & \searrow 1_{C_0} & \searrow 1_{C_2} & & \\ C_0 & & C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ & \searrow u_1 & \downarrow u_1 & & \\ & & C_1 & & \end{array} .$$

Comme u_1 , 1_{C_0} et 1_{C_2} sont des équivalences faibles, il résulte de la proposition 2.3.1 que $\int \alpha$ est une équivalence faible.

Il suffit donc de montrer que l'_2 est une équivalence faible. Or, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ \downarrow 1_{C_0} & \searrow u_2 & \downarrow 1_{C_2} \\ C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{array}$$

définit en vertu de la propriété universelle (cf. 2.3.2), un foncteur

$$\int_{\substack{C_0 \\ \downarrow \\ C_0}} C_0 \xrightarrow{u_2} C_2 \xrightarrow{r} C_2$$

tel que si

$$\begin{array}{ccc}
 C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\
 \downarrow 1_{C_0} & \searrow l'_0 & \downarrow l'_2 \\
 & \xRightarrow{\beta'_2} & \\
 & \xleftarrow{\beta'_1} & \\
 C_0 & \xrightarrow{l'_1} & C'
 \end{array}$$

désigne le « 2-diagramme » canonique associé à

$$C' = \int_{C_0}^{1_{C_0} \downarrow} C_0 \xrightarrow{u_2} C_2, \quad ,$$

on ait

$$rl'_0 = u_2 = rl'_1, \quad rl'_2 = 1_{C_2}, \quad r \star \beta'_1 = 1_{u_2} = r \star \beta'_2.$$

En particulier, r est une rétraction de l'_2 . On va montrer que $l'_2 r$ est \mathbb{I} -homotope à $1_{C'}$, où $\mathbb{I} = (I, \partial_1, \partial_2)$, les foncteurs $\partial_1, \partial_2 : e \rightrightarrows I$ étant définis par les objets 1 et 2 de I . Pour définir une \mathbb{I} -homotopie

$$\begin{array}{ccc}
 0 \rightarrow 2 \\
 \downarrow \\
 1
 \end{array}
 \times
 \int_{C_0}^{1_{C_0} \downarrow} C_0 \xrightarrow{u_2} C_2
 \xrightarrow{h}
 \int_{C_0}^{1_{C_0} \downarrow} C_0 \xrightarrow{u_2} C_2, \quad ,$$

il suffit, en vertu de l'identification

$$\mathrm{Hom}(I \times C', C') \simeq \mathrm{Hom}(I, \underline{\mathrm{Hom}}(C', C')) \quad ,$$

de définir des foncteurs

$$h_i : C' \longrightarrow C' \quad , \quad i = 0, 1, 2 \quad ,$$

et des morphismes de foncteurs

$$\alpha_j : h_0 \longrightarrow h_j \quad , \quad j = 1, 2 \quad .$$

En vertu de la propriété universelle (cf. 2.3.2), $h_1 = 1_{C'}$ est défini par le « 2-diagramme »

$$\begin{array}{ccc}
 C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\
 \downarrow 1_{C_0} & \searrow l'_0 & \downarrow l'_2 \\
 & \xRightarrow{\beta'_2} & \\
 & \xleftarrow{\beta'_1} & \\
 C_0 & \xrightarrow{l'_1} & C'
 \end{array} \quad ,$$

$h_2 = l'_2 r$ est défini par le « 2-diagramme »

$$\begin{array}{ccc}
 C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\
 \downarrow 1_{C_0} & \searrow l'_2 u_2 & \downarrow l'_2 \\
 C_0 & \xrightarrow{l'_2 u_2} & C'
 \end{array}
 ,$$

et on définit h_0 par le « 2-diagramme »

$$\begin{array}{ccc}
 C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\
 \downarrow 1_{C_0} & \searrow l'_0 & \downarrow l'_2 \\
 C_0 & \xrightarrow{l'_0} & C'
 \end{array}
 .$$

Les trois morphismes de foncteurs

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} C_0 \\ \downarrow \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \\ C' \end{array} & \begin{array}{c} C_0 \\ \downarrow \begin{array}{c} \beta'_1 \\ \Rightarrow \end{array} \\ C' \end{array} & \begin{array}{c} C_2 \\ \downarrow \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \\ C' \end{array}
 \end{array}$$

vérifient les relations 2.3.2.2 de la propriété « 2-universelle », et définissent ainsi un morphisme de foncteurs $\alpha_1 : h_0 \rightarrow h_1$. De même, les trois morphismes de foncteurs

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} C_0 \\ \downarrow \begin{array}{c} \beta'_2 \\ \Rightarrow \end{array} \\ C' \end{array} & \begin{array}{c} C_0 \\ \downarrow \begin{array}{c} \beta'_2 \\ \Rightarrow \end{array} \\ C' \end{array} & \begin{array}{c} C_2 \\ \downarrow \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \\ C' \end{array}
 \end{array}$$

permettent de définir un morphisme de foncteurs $\alpha_2 : h_0 \rightarrow h_2$, par la propriété « 2-universelle ». On a donc prouvé que $1_{C'}$ est \mathbb{I} -homotope à $l'_2 r$. Or, I admet un objet initial, et est donc asphérique (1.1.11). On en déduit que $I \rightarrow e$ est universellement dans \mathcal{W} (proposition 1.1.4), et il résulte donc du lemme d'homotopie 1.4.6, (b) que $l'_2 r$ est une équivalence faible. Comme $rl'_2 = 1_{C_2}$, cela prouve, en vertu de la propriété de saturation faible FS3, que l'_2 est une équivalence faible, et achève la démonstration. \square

Remarque 2.3.4. — Au cours de la démonstration précédente, on a montré en particulier que si u_1 est un isomorphisme, alors l_2 est un homotopisme (cf. 1.4.15).

2.3.5. — Revenons au cas où I est une petite catégorie arbitraire. Soient A une petite catégorie, et $F : I \rightarrow \widehat{A}$ un foncteur noté indiciellement :

$$F_i := F(i) \ , \quad i \in \text{Ob}(I) \ , \quad F_k := F(k) \ , \quad k \in \text{Fl}(I) \ .$$

On se propose d'étudier le foncteur canonique (cf. 2.2.3)

$$K = K_{i_A F} : C = \int i_A F \longrightarrow \varinjlim i_A F \simeq i_A(F') = A/F' \ ,$$

où F' désigne la limite inductive $\varinjlim F$. Explicitons le foncteur K . Pour tout i , $i \in \text{Ob}(I)$, notons $\varepsilon_i : F_i \rightarrow F'$ le morphisme canonique, de sorte que pour tout morphisme $k : i \rightarrow i'$ de I , le triangle

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{F_k} & F_{i'} \\ & \searrow \varepsilon_i & \swarrow \varepsilon_{i'} \\ & F' & \end{array}$$

soit commutatif. Un objet de C est un triplet $(i, a, x : a \rightarrow F_i)$, où $i \in \text{Ob}(I)$, $a \in \text{Ob}(A)$, $x \in \text{Fl}(\widehat{A})$. On a

$$K(i, a, x : a \rightarrow F_i) = (a, \varepsilon_i x : a \rightarrow F')$$

$$a \xrightarrow{x} F_i \xrightarrow{\varepsilon_i} F' \ .$$

Un morphisme

$$(i, a, x : a \rightarrow F_i) \xrightarrow{(k, f)} (i', a', x' : a' \rightarrow F_{i'})$$

de C est un couple (k, f) , où $k : i \rightarrow i'$ est une flèche de I , et $f : a \rightarrow a'$ une flèche de A , rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & a' \\ x \downarrow & & \downarrow x' \\ F_i & \xrightarrow{F_k} & F_{i'} \end{array} \ .$$

On a

$$K(k, f) = f \ , \quad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & a' \\ \varepsilon_i x \searrow & & \swarrow \varepsilon_{i'} x' \\ & F' & \end{array} \quad \varepsilon_{i'} x' f = \varepsilon_{i'} F_k x = \varepsilon_i x \ .$$

Proposition 2.3.6. — *Le foncteur $K : \int i_A F \rightarrow \varinjlim i_A F$ est une fibration.*

Démonstration. — On vérifie facilement qu'un morphisme (k, f) de $C = \int i_A F$ est cartésien relativement à K si et seulement si k est un isomorphisme. En particulier, la

partie de $\text{Fl}(C)$ formée des morphismes cartésiens est stable par composition. Soient maintenant $(i, a, x : a \rightarrow F_i)$ un objet de C et

$$\begin{array}{ccc} a' & \xrightarrow{f} & a \\ & \searrow & \swarrow \varepsilon_i x \\ & F' & \end{array}$$

un morphisme de A/F' , $F' = \varinjlim F$, de but l'image de cet objet par K . Alors

$$(i, a', xf : a' \rightarrow F_i) \xrightarrow{(1_i, f)} (i, a, x : a \rightarrow F_i)$$

est un morphisme cartésien de C dont le but est l'objet donné de C , et dont l'image par K est le morphisme donné de A/F' , ce qui démontre la proposition. \square

2.3.7. — Soit $(a, s : a \rightarrow F')$ un objet de A/F' . On se propose d'étudier la fibre

$$C_s = (\int i_A F)_s$$

du foncteur K au-dessus de cet objet. Les objets de C_s sont les objets $(i, a, x : a \rightarrow F_i)$ de C tels que $\varepsilon_i x = s$, et les morphismes entre tels objets, les morphismes

$$(i, a, x : a \rightarrow F_i) \xrightarrow{(k, 1_a)} (i', a, x' : a \rightarrow F_{i'})$$

de C (de sorte que le triangle

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ x \swarrow & & \searrow x' \\ F_i & \xrightarrow{F_k} & F_{i'} \end{array}$$

soit commutatif). Pour tout objet i de I , considérons la fibre $(A/F_i)_s$ du morphisme $i_A(\varepsilon_i) : A/F_i \rightarrow A/F'$ au-dessus de $(a, s : a \rightarrow F')$. Les objets de $(A/F_i)_s$ sont les couples $(a, x : a \rightarrow F_i)$ tels que $\varepsilon_i x = s$, et les seuls morphismes sont les identités. Pour tout morphisme $k : i \rightarrow i'$ de I , on en déduit un foncteur

$$(A/F_i)_s \xrightarrow{(i_A(F_k))_s} (A/F_{i'})_s ,$$

associant à un objet $(a, x : a \rightarrow F_i)$ de $(A/F_i)_s$ l'objet $(a, F_k x : a \rightarrow F_{i'})$ de $(A/F_{i'})_s$. On définit ainsi un foncteur $(i_A F)_s : I \rightarrow \text{Cat}$, et par suite, on peut former la catégorie

$$\int (i_A F)_s ,$$

dont les objets sont les triplets $(i, a, x : a \rightarrow F_i)$, $i \in \text{Ob}(I)$, tels que $(a, x : a \rightarrow F_i)$ soit un objet de $(A/F_i)_s$, autrement dit tels que $\varepsilon_i x = s$, et les morphismes les couples

$$(i, a, x : a \rightarrow F_i) \xrightarrow{(k, 1_a)} (i', a, x' : a \rightarrow F_{i'}) , \quad k : i \rightarrow i' \in \text{Fl}(I) ,$$

(puisque les seuls morphismes de $(A/F_{i'})_s$ sont les identités) tels que le triangle

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ x \swarrow & & \searrow x' \\ F_i & \xrightarrow{F_k} & F_{i'} \end{array}$$

soit commutatif. On a donc démontré :

Lemme 2.3.8. — *Soit $(a, s : a \rightarrow F')$ un objet de A/F' . Alors on a un isomorphisme canonique*

$$(\int i_A F)_s \simeq \int (i_A F)_s \quad .$$

2.3.9. — Supposons maintenant que la catégorie I soit la catégorie engendrée par le graphe

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 2 \\ \downarrow & & \\ 1 & & \end{array} ,$$

de sorte que la donnée du foncteur $F : I \rightarrow \hat{A}$ soit équivalente à la donnée d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\varphi_2} & F_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \\ F_1 & & \end{array}$$

de \hat{A} , la limite inductive F' du foncteur F étant la somme amalgamée, de sorte qu'on ait un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\varphi_2} & F_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_2 \\ F_1 & \xrightarrow{\varepsilon_1} & F' \end{array} \quad .$$

Proposition 2.3.10. — *En gardant les notations ci-dessus, si φ_1 est un monomorphisme, alors le foncteur canonique*

$$K : C = \int \begin{array}{ccc} A/F_0 & \rightarrow & A/F_2 \\ \downarrow & & \\ A/F_1 & & \end{array} \longrightarrow A/F'$$

est une fibration à fibres contractiles.

Démonstration. — Comme en vertu de la proposition 2.3.6, le foncteur K est une fibration, il suffit de montrer que pour tout objet $(a, s : A \rightarrow F')$ de A/F' , la fibre C_s de K au-dessus de cet objet est contractile. En vertu du lemme 2.3.8, on a

$$C_s = \int \begin{array}{ccc} (A/F_0)_s & \rightarrow & (A/F_2)_s \\ \downarrow & & \\ (A/F_1)_s & & \end{array} \quad .$$

En considérant s comme un élément de $F'(a) = F_1(a) \amalg_{F_0(a)} F_2(a)$, on distingue deux cas.

a) L'élément s de $F'(a)$ n'appartient pas à l'image de $F_0(a)$ dans $F'(a)$. Alors on vérifie immédiatement que

$$C_s = \int \begin{array}{c} \emptyset \rightarrow \emptyset \\ \downarrow \\ e \end{array} \quad \text{ou} \quad C_s = \int \begin{array}{c} \emptyset \rightarrow e \\ \downarrow \\ \emptyset \end{array},$$

et C_s est réduite à la catégorie ayant un seul objet, et l'identité de cet objet comme seul morphisme.

b) L'élément s de $F'(a)$ appartient à l'image de $F_0(a)$ dans $F'(a)$. Alors on vérifie facilement que $(A/F_0)_s \rightarrow (A/F_1)_s$ est un isomorphisme (on utilise que $\varphi_1 : F_0 \rightarrow F_1$ est un monomorphisme). En vertu de la remarque 2.3.4, le morphisme canonique

$$(A/F_2)_s \longrightarrow \int \begin{array}{c} (A/F_0)_s \rightarrow (A/F_2)_s \\ \downarrow \\ (A/F_1)_s \end{array} \simeq C_s$$

est donc un homotopisme. Or, le morphisme $\varepsilon_2 : F_2 \rightarrow F'$ est un monomorphisme (car φ_1 est un monomorphisme), et par suite $(A/F_2)_s$ est la catégorie ponctuelle. On en déduit que la catégorie C_s est contractile, ce qui prouve la proposition. \square

Remarque 2.3.11. — En vertu de la proposition 1.4.18, si φ_1 est un monomorphisme, le foncteur K ci-dessus est donc coasphérique (cf. 1.1.25), et en particulier une équivalence faible.

Corollaire 2.3.12. — Soient A une petite catégorie,

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\varphi_2} & F_2 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_2 \\ F_1 & \xrightarrow[\varepsilon_1]{} & F' \end{array}$$

un carré cocartésien de \widehat{A} , et supposons que φ_1 soit un monomorphisme. Alors si φ_1 (resp. φ_2) est une équivalence faible, il en est de même de ε_2 (resp. ε_1).

Démonstration. — Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A/F_0 & \xrightarrow{u_2 = i_A(\varphi_2)} & A/F_2 & & \\ \downarrow u_1 = i_A(\varphi_1) & & \downarrow l_2 & & \\ A/F_1 & \xrightarrow{l_1} & \int \begin{array}{c} A/F_0 \rightarrow A/F_2 \\ \downarrow \\ A/F_1 \end{array} & \xrightarrow{i_A(\varepsilon_2)} & A/F' \\ & & \searrow K & & \\ & & & & \downarrow i_A(\varepsilon_1) \\ & & & & A/F' \end{array},$$

où l_1 , l_2 et K désignent les foncteurs canoniques (cf. 2.3.2 et 2.3.5), et dont les deux triangles sont commutatifs (mais pas le carré). Si φ_1 (resp. φ_2) est une équivalence faible, alors u_1 (resp. u_2) est une équivalence faible, et en vertu de la proposition 2.3.3, il en est de même de l_2 (resp. l_1). Or, comme φ_1 est un monomorphisme, en vertu de la remarque précédente, K est une équivalence faible. On en déduit que $i_A(\varepsilon_2)$ (resp. $i_A(\varepsilon_1)$) est une équivalence faible de \mathcal{Cat} , autrement dit, que ε_2 (resp. ε_1) est une équivalence faible de \hat{A} , ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 2.3.13. — *Soient A une petite catégorie, et*

$$\begin{array}{ccccc}
 F_0 & \xrightarrow{\varphi_2} & F_2 & & \\
 \downarrow \chi_0 & \searrow \varphi_1 & \downarrow \varepsilon_1 & \searrow \varepsilon_2 & \\
 & F_1 & \xrightarrow{\quad} & F' & \\
 & \downarrow \chi_1 & \downarrow \chi_2 & \downarrow \chi' & \\
 G_0 & \xrightarrow{\quad} & G_2 & & \\
 & \searrow \psi_1 & \searrow \eta_2 & & \\
 & G_1 & \xrightarrow{\eta_1} & G' &
 \end{array}$$

un cube commutatif de \hat{A} dont les faces horizontales sont cocartésiennes, et tel que φ_1 , ψ_1 soient des monomorphismes, et χ_0 , χ_1 , χ_2 des équivalences faibles. Alors χ' est une équivalence faible.

Démonstration. — On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \int \begin{array}{c} A/F_0 \rightarrow A/F_2 \\ \downarrow \\ A/F_1 \end{array} & \xrightarrow{K} & A/F' \\
 \downarrow \int i_A * \chi & & \downarrow i_A(\chi') \\
 \int \begin{array}{c} A/G_0 \rightarrow A/G_2 \\ \downarrow \\ A/G_1 \end{array} & \xrightarrow{K'} & A/G'
 \end{array},$$

où χ désigne le morphisme de foncteurs défini par χ_0 , χ_1 , χ_2 , et K et K' les foncteurs canoniques (cf. 2.3.5). En vertu de la proposition 2.3.1 et de la remarque 2.3.11, les foncteurs $\int i_A * \chi$, K et K' sont des équivalences faibles, et il en est donc de même de $i_A(\chi')$, ce qui prouve le corollaire. \square

Proposition 2.3.14. — *Soient I un ensemble bien ordonné, A une petite catégorie, et $F : I \rightarrow \hat{A}$ un foncteur (où I désigne aussi la catégorie associée à l'ensemble ordonné I) tel que pour tout $i \leq j$, le morphisme $F_i \rightarrow F_j$ soit un monomorphisme. Alors le foncteur canonique*

$$K : C = \int i_A F \longrightarrow A/F',$$

où $F' = \varinjlim F$, est une fibration à fibres contractiles.

Démonstration. — Soit $(a, s : a \rightarrow F')$ un objet de A/F' , et considérons s comme élément de $F'(a)$. Comme les morphismes de transition $F_i \rightarrow F_j$ sont des monomorphismes, $F'(a)$ s'identifie à la réunion croissante des $F_i(a)$. Comme I est bien ordonné, il existe un plus petit élément i_s de I tel que $s \in F_{i_s}(a)$. Alors on vérifie facilement que la fibre C_s de K au-dessus de l'objet $(a, s : a \rightarrow F')$ s'identifie à la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné formé des $i \in I$ tels que $i_s \leq i$. Cette catégorie ayant un objet initial, elle est contractile (1.4.16). Comme en vertu de la proposition 2.3.6, K est une fibration, cela achève la démonstration. \square

Remarque 2.3.15. — En vertu de la proposition 1.4.18, le foncteur K ci-dessus est donc coasphérique (cf. 1.1.25), et en particulier une équivalence faible.

Corollaire 2.3.16. — Soient I une catégorie correspondant à un ensemble bien ordonné, A une petite catégorie, $F, G : I \rightrightarrows \hat{A}$ deux foncteurs, et $\varphi : F \rightarrow G$ un morphisme de foncteurs. On suppose :

(a) pour tout i et j dans I , si $i \leq j$, les morphismes $F_i \rightarrow F_j$ et $G_i \rightarrow G_j$ sont des monomorphismes ;

(b) pour tout i dans I , le morphisme $\varphi_i : F_i \rightarrow G_i$ est une équivalence faible.

Alors $\varinjlim \varphi : \varinjlim F \rightarrow \varinjlim G$ est une équivalence faible.

Démonstration. — En effet, on a un carré commutatif de \mathcal{Cat}

$$\begin{array}{ccc} \int i_A F & \longrightarrow & A / \varinjlim F \\ \downarrow \int i_A \star \varphi & & \downarrow i_A(\varinjlim \varphi) \\ \int i_A G & \longrightarrow & A / \varinjlim G \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont, en vertu de la remarque précédente, des équivalences faibles. Comme $\int i_A \star \varphi$ est une équivalence faible (proposition 2.3.1), il en est de même de $i_A(\varinjlim \varphi)$, ce qui démontre le corollaire. \square

Corollaire 2.3.17. — Pour toute petite catégorie A , la partie de $\mathbf{Fl}(\hat{A})$ formée des flèches qui sont à la fois des équivalences faibles et des monomorphismes est stable par composition transfinie. Autrement dit, pour tout ensemble bien ordonné I , et tout foncteur $F : I \rightarrow \hat{A}$ tel que les morphismes $F_i \rightarrow F_j$, $i \leq j$, $i, j \in I$, soient des monomorphismes et des équivalences faibles, le morphisme canonique $F_0 \rightarrow \varinjlim F$, où 0 désigne le plus petit élément de I , est une équivalence faible (et un monomorphisme).

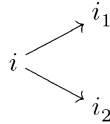
Démonstration. — Le corollaire est une conséquence immédiate du corollaire précédent, appliqué au morphisme du foncteur constant de valeur F_0 vers le foncteur F défini par les flèches $F_0 \rightarrow F_i$, $i \in I$. \square

Les corollaires 2.3.16 et 2.3.17 seront généralisés au paragraphe suivant.

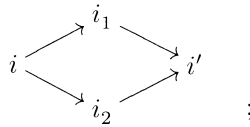
2.4. Catégories filtrantes et asphéricité

2.4.1. — On rappelle qu'une catégorie *pseudo-filtrante* est une catégorie I satisfaisant aux deux conditions suivantes :

PS1 tout diagramme de I de la forme :



peut être inséré dans un diagramme commutatif :



PS2 pour toute double flèche $k_1, k_2 : i \rightrightarrows j$ de I , il existe une flèche $l : j \rightarrow j'$ de I telle que $lk_1 = lk_2$.

Une catégorie I est dite *filtrante* si elle est pseudo-filtrante, non vide, et connexe. On vérifie facilement qu'en présence de PS2, cela signifie que I est non vide, et que pour tout couple d'objets i_1, i_2 de I , il existe un objet i de I , et des flèches $i_1 \rightarrow i$ et $i_2 \rightarrow i$ de I . Un ensemble ordonné est dit *filtrant* si la catégorie correspondante l'est. Si I est un ensemble ordonné non vide, il est filtrant si et seulement si pour tout couple d'éléments i_1, i_2 de I , il existe un élément i de I tel que $i_1 \leq i$ et $i_2 \leq i$. Tout ensemble totalement ordonné non vide est filtrant. Un ensemble ordonné fini est filtrant si et seulement si il admet un plus grand élément.

2.4.2. — On rappelle qu'un foncteur *cofinal* est un foncteur $u : I \rightarrow J$ tel que pour tout objet j de J , la catégorie $j \backslash I$ soit connexe non vide. En d'autres termes, un foncteur cofinal est un foncteur \mathcal{W}_0 -coasphérique, où \mathcal{W}_0 est le localisateur fondamental des exemples 1.1.32 et 2.1.2.

Lemme 2.4.3. — Soit $u : I \rightarrow J$ un foncteur.

(a) Si la catégorie I est pseudo-filtrante, alors pour tout objet j de J , la catégorie $j \backslash I$ l'est aussi.

(b) Si la catégorie I est pseudo-filtrante, et si le foncteur u est cofinal, alors pour tout objet j de J , la catégorie $j \backslash I$ est filtrante.

Démonstration. — Une vérification immédiate prouve l'assertion (a), et l'assertion (b) en résulte aussitôt. \square

Lemme 2.4.4. — Soit J un ensemble ordonné filtrant infini. Alors il existe un ensemble bien ordonné I , et une famille croissante $(J_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles ordonnés filtrants

de J telle que

$$J = \bigcup_{i \in I} J_i \quad , \quad \text{card}(J_i) < \text{card}(J) \quad , \quad i \in I \quad .$$

Démonstration. — On procède en plusieurs étapes.

a) Il existe une application

$$\text{Filt} : \mathcal{P}(J) \longrightarrow \mathcal{P}(J) \quad ,$$

où $\mathcal{P}(J)$ désigne l'ensemble des parties de J , telle que pour toute partie E de J , $\text{Filt}(E)$ soit un sous-ensemble ordonné filtrant de J , contenant E , tel que

$$\text{card}(\text{Filt}(E)) = \begin{cases} \text{fini si } E \text{ est fini} \\ \text{card}(E) \text{ sinon} \end{cases} \quad .$$

En effet, si l'ensemble E est fini, on pose $\text{Filt}(E) = E \cup \{j\}$, où j est un majorant de E dans J (qui existe puisque J est filtrant et E fini). Si E est infini, on définit par récurrence une suite croissante $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de J , par $E_0 = E$, E_{n+1} étant obtenue de E_n par adjonction, pour chaque couple j, j' d'éléments de E_n , d'un majorant de j et j' dans J . On pose

$$\text{Filt}(E) = \bigcup_{n \geq 0} E_n \quad ,$$

et il est immédiat que $\text{Filt}(E)$ est un sous-ensemble ordonné filtrant de J , et que $\text{card}(\text{Filt}(E)) = \text{card}(E)$.

b) Il existe un ensemble bien ordonné I tel que $\text{card}(I) = \text{card}(J)$, et tel que pour tout $i, i' \in I$,

$$\text{card}\{i' \in I \mid i' < i\} < \text{card}(J) \quad .$$

En effet, en vertu du théorème de Zermelo, il existe une relation de bon ordre \leq sur l'ensemble sous-jacent à J . Si l'ensemble des éléments j de J tels que

$$\text{card}\{j' \in J \mid j' < j\} = \text{card}(J)$$

est vide, on peut prendre $I = J$ muni de ce bon ordre. Si cet ensemble est non vide, il admet un plus petit élément j_0 . On peut alors prendre $I = \{j \in J \mid j < j_0\}$, muni du bon ordre induit, et remarquer que $\text{card}(I) = \text{card}(J)$.

c) On va définir, par récurrence transfinie, une famille croissante $(J_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles ordonnés filtrants de J telle que $J = \bigcup_{i \in I} J_i$, et

$$(*) \quad \text{card}(J_i) = \begin{cases} \text{fini si } \text{card}\{i' \in I \mid i' < i\} \text{ est fini} \\ \text{card}\{i' \in I \mid i' < i\} \text{ sinon} \end{cases} \quad ,$$

ce qui prouvera le lemme. Pour cela, choisissons une bijection $j : I \longrightarrow J$, $i \mapsto j_i$. Soit i un élément de I , et supposons qu'on a défini $J_{i'}$ pour $i' < i$. On pose

$$J_i = \text{Filt}\left(\left(\bigcup_{i' < i} J_{i'}\right) \cup \{j_i\}\right) \quad .$$

La condition $(*)$ se vérifie aussitôt par récurrence transfinie, ce qui achève la démonstration. \square

Lemme 2.4.5. — *Soit I une petite catégorie filtrante. Alors il existe un ensemble ordonné filtrant J , et un foncteur cofinal $J \rightarrow I$, l'ensemble ordonné J étant identifié à la catégorie correspondante (Deligne, SGA4, I, Exposé 1, 8.1.6 [2]).*

Démonstration. — On suppose d'abord que l'ensemble préordonné $\text{Ob}(I)$ n'a pas de plus grand élément, autrement dit (puisque la catégorie I est filtrante) que pour tout objet i de I , il existe une flèche $i \rightarrow i'$ de I telle qu'il n'y ait aucun morphisme de i' vers i .

Un *sous-graphe* de I est un couple $G = (S, F)$, où S est une partie de $\text{Ob}(I)$ et F une partie de $\text{Fl}(I)$ telles que la source et le but de toute flèche de I appartenant à F soient dans S . Un *sommet* de G est un objet de I appartenant à S , et une *arête* de G est une flèche de I appartenant à F . On ne suppose pas que le composé dans I des deux arêtes composables de G soit une arête de G , ni que l'identité dans I d'un sommet de G soit une arête de G . Si $G = (S, F)$ est un sous-graphe de I , on dit qu'un sommet e de G est un *sommet final* de G si

- (a) pour tout sommet s de G , il existe une arête unique $f_s : s \rightarrow e$ de G ;
- (b) pour toute arête $f : s \rightarrow t$ de G , on a $f_s = f_t f$;
- (c) $f_e = 1_e$.

On remarque que si $G_1 = (S_1, F_1)$ et $G_2 = (S_2, F_2)$ sont deux sous-graphes de I , alors $G_1 \cup G_2 = (S_1 \cup S_2, F_1 \cup F_2)$ est un sous-graphe de I .

Soit J l'ensemble des sous-graphes *finis* G de I ayant un *unique* sommet final e_G , ordonné par inclusion

$$(S, F) \subset (S', F') \iff S \subset S' \text{ et } F \subset F' .$$

Si $G = (S, F)$ est un sous-graphe fini de I , il existe $G' \in J$ tel que $G \subset G'$. En effet, comme la catégorie I est filtrante, et comme S est fini, il existe un objet e_0 de I et une famille $g_s : s \rightarrow e_0$, $s \in S$, de morphismes de I . Comme F est fini, il existe un morphisme $g : e_0 \rightarrow e_1$ de I tel que pour toute arête $f : s \rightarrow t$ de G , on ait $gg_s = gg_t f$. Comme l'ensemble préordonné $\text{Ob}(I)$ n'a pas de plus grand élément, il existe un morphisme $h : e_1 \rightarrow e$ de I tel que $e \notin S$. Il suffit alors de prendre

$$G' = (S \cup \{e\}, F \cup \{f_s \mid s \in S\} \cup \{1_e\}) , \quad \text{où } f_s = hgg_s , \quad s \in S .$$

On en déduit que l'ensemble ordonné J est filtrant : si $G_1, G_2 \in J$, en vertu de ce qui précède, il existe $G \in J$ tel que $G_1 \cup G_2 \subset G$.

On définit un foncteur $u : J \rightarrow I$ par

$$G \mapsto e_G , \quad (G \subset G') \mapsto (e_G \rightarrow e_{G'}) ,$$

où e_G (resp. $e_{G'}$) désigne l'unique sommet final de G (resp. G'), et $e_G \rightarrow e_{G'}$ l'unique (en vertu de (a)) arête de G' de e_G vers $e_{G'}$. Il résulte alors facilement des conditions (b) et (c) qu'on définit ainsi un foncteur. Ce foncteur est cofinal :

i) Si i est un objet de I , et si l'on pose $G = (\{i\}, \{1_i\})$, alors $G \in J$, et 1_i est un morphisme de i vers $u(G) = i$, ce qui prouve que la catégorie $i \setminus J$ est non vide.

ii) Si i est un objet de I , et $(G_1, g_1 : i \rightarrow u(G_1))$, $(G_2, g_2 : i \rightarrow u(G_2))$ deux objets de $i \setminus J$, en vertu de ce qui a été démontré précédemment, il existe $G \in J$ contenant le sous-graphe fini de I

$$\{i \rightarrow u(G_1)\} \cup \{i \rightarrow u(G_2)\} \cup G_1 \cup G_2 \quad ,$$

où $\{i \rightarrow u(G_1)\}$ et $\{i \rightarrow u(G_2)\}$ désignent par abus de notations les sous-graphes $(\{i, u(G_1)\}, \{g_1\})$ et $(\{i, u(G_2)\}, \{g_2\})$ de I . Les inclusions $G_1 \subset G$ et $G_2 \subset G$ définissent alors, par application du foncteur u , des morphismes $u(G_1) \rightarrow u(G)$ et $u(G_2) \rightarrow u(G)$ qui, en vertu de la condition (b), rendent commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} & u(G_1) & \\ g_1 \nearrow & & \searrow \\ i & & u(G) \\ g_2 \searrow & & \nearrow \\ & u(G_2) & \end{array} \quad ,$$

ce qui prouve la connexité de la catégorie $i \setminus J$.

Cas général. La catégorie $I \times \mathbb{N}$ (où \mathbb{N} désigne la catégorie associée à l'ensemble ordonné des entiers naturels) est filtrante, et l'ensemble préordonné de ses objets n'a pas de plus grand élément. En vertu de ce qui précède, il existe donc un ensemble ordonné filtrant J , et un foncteur cofinal $J \rightarrow I \times \mathbb{N}$. Pour conclure, il suffit de considérer le composé de ce foncteur avec la première projection $I \times \mathbb{N} \rightarrow I$, qui est un foncteur cofinal, et de remarquer que le composé de deux foncteurs cofinaux est cofinal. \square

Lemme 2.4.6. — Soient I une petite catégorie filtrante, et $F : I \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur. Alors les fibres du foncteur canonique (2.2.3)

$$K_F : \int F \longrightarrow \varinjlim F$$

sont des catégories filtrantes.

Démonstration. — Pour tout objet i de I , on note $\varepsilon_i : F(i) \rightarrow \varinjlim F$ le foncteur canonique. On rappelle que pour tout objet (i, a) de $\int F$, $i \in \text{Ob}(I)$, $a \in \text{Ob}(F(i))$, on a $K_F(i, a) = \varepsilon_i(a)$, et pour toute flèche $(k, f) : (i, a) \rightarrow (i', a')$ de $\int F$, où $k : i \rightarrow i'$ est une flèche de I , et $f : F(k)(a) \rightarrow a'$ une flèche de $F(i')$, on a $K_F(k, f) = \varepsilon_{i'}(f)$. Soit b un objet de la catégorie $\varinjlim F$.

a) La fibre $(\int F)_b$ est non vide : il existe un objet i de I , et un objet a de $F(i)$ tels que $b = \varepsilon_i(a)$, ce qui implique que (i, a) est un objet de $(\int F)_b$.

b) Soient (i_1, a_1) et (i_2, a_2) deux objets de $(\int F)_b$, de sorte que $\varepsilon_{i_1}(a_1) = b = \varepsilon_{i_2}(a_2)$. Comme $\text{Ob}(\varinjlim F) = \varinjlim \text{Ob}(F)$, et comme la catégorie I est filtrante, il existe un objet i de I , et des morphismes $k_1 : i_1 \rightarrow i$, $k_2 : i_2 \rightarrow i$ tels que $F(k_1)(a_1) = F(k_2)(a_2)$. Alors (i, a) , où $a = F(k_1)(a_1) = F(k_2)(a_2)$ est un objet de $(\int F)_b$, et $(k_1, 1_a) : (i_1, a_1) \rightarrow (i, a)$, $(k_2, 1_a) : (i_2, a_2) \rightarrow (i, a)$ des morphismes de $(\int F)_b$.

c) Soit une double flèche de $(\int F)_b$

$$(i, a) \xrightleftharpoons[(k_2, f_2)]{(k_1, f_1)} (i', a') \quad ,$$

de sorte que $\varepsilon_i(a) = b = \varepsilon_{i'}(a')$ et $\varepsilon_{i'}(f_1) = 1_b = \varepsilon_{i'}(f_2)$. Comme la catégorie I est filtrante, il existe une flèche $k' : i' \rightarrow i''$ de I telle que $k'k_1 = k'k_2$, et on a

$$\varepsilon_{i''}(F(k')(f_1)) = \varepsilon_{i'}(f_1) = 1_b = \varepsilon_{i'}(f_2) = \varepsilon_{i''}(F(k')(f_2)) \quad .$$

Comme $\text{Fl}(\varinjlim F) = \varinjlim \text{Fl}(F)$ (puisque I est une catégorie filtrante), il existe donc une flèche $k'' : i'' \rightarrow i'''$ de I telle que

$$F(k'')F(k')(f_1) = F(k'')F(k')(f_2) \quad .$$

Posons $k = k''k'$. Alors

$$(i', a') \xrightarrow{(k, 1_{F(k)(a')})} (i''', F(k)(a'))$$

est une flèche de $(\int F)_b$, et

$$(k, 1_{F(k)(a')})(k_1, f_1) = (k, 1_{F(k)(a')})(k_2, f_2) \quad ,$$

ce qui achève la démonstration. \square

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible \mathcal{W} .

Lemme 2.4.7. — Soient I un ensemble bien ordonné non vide, et $F : I \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur tel que pour tout couple i, j , $i < j$, d'éléments de I , le morphisme $F(i) \rightarrow F(j)$ induise un isomorphisme de la catégorie $F(i)$ sur un crible de la catégorie $F(j)$. Si pour tout i , $i \in I$, la catégorie $F(i)$ est asphérique, il en est de même de la catégorie limite inductive $\varinjlim F$.

Démonstration. — Considérons le diagramme de foncteurs canoniques

$$\begin{array}{ccc} & \int F & \\ \theta_F \swarrow & & \searrow K_F \\ I & & \varinjlim F \end{array} \quad .$$

Par hypothèse, θ_F est une cofibration à fibres asphériques, et par suite, en vertu de la proposition 1.1.17, θ_F est un foncteur asphérique, et en particulier une équivalence faible. D'autre part, on vérifie facilement que l'hypothèse faite sur le foncteur F implique que si l'on pose $A = \varinjlim F$, alors pour tout i , $i \in I$, la catégorie $F(i)$ s'identifie

à un crible de la catégorie A . Grâce à la bijection naturelle entre les cribles de A et les sous-préfaïceaux de l'objet final de \widehat{A} , on vérifie aussitôt que la proposition 2.3.14 implique que K_F est une fibration à fibres contractiles, donc asphériques (1.4.18). On en déduit que K_F est un foncteur coasphérique, et en particulier une équivalence faible (1.1.25). Comme I est un ensemble bien ordonné non vide, la catégorie correspondante admet un objet initial, et elle est donc asphérique (1.1.11). Les morphismes θ_F et K_F étant des équivalences faibles, cela prouve que la catégorie $\varinjlim F$ est asphérique, et achève la démonstration. \square

Lemme 2.4.8. — *Soit J un ensemble ordonné filtrant. Alors J , considéré comme petite catégorie, est une catégorie asphérique.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence transfinie sur le cardinal de J . Si J est fini, J étant filtrant, il admet un plus grand élément, et la catégorie associée à J admet un objet final et est donc asphérique. Supposons donc que J soit infini, et que l'assertion soit établie pour tout ensemble ordonné filtrant de cardinal strictement plus petit que celui de J . En vertu du lemme 2.4.4, il existe un ensemble bien ordonné I , et une famille croissante $(J_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles ordonnés filtrants de J , telle que

$$J = \bigcup_{i \in I} J_i \quad , \quad \text{card}(J_i) < \text{card}(J) \quad , \quad i \in I \quad .$$

Par hypothèse de récurrence, pour tout $i, i' \in I$, la catégorie J_i est asphérique. Soit J'_i le crible de J engendré par J_i

$$J'_i = \{j' \in J \mid \text{il existe } j \in J_i \text{ tel que } j' \leq j\} \quad .$$

Le foncteur d'inclusion $J_i \hookrightarrow J'_i$ est coasphérique. En effet, pour tout objet j de J'_i , la catégorie $j \backslash J_i$ est un cocrible de J_i , qui est non vide, puisque J'_i est le crible engendré par J_i , et qui s'identifie donc à un sous-ensemble ordonné filtrant de J_i . L'hypothèse de récurrence implique donc que $j \backslash J_i$ est asphérique. On en déduit que J'_i est asphérique. Or, pour tout couple $i, i' \in I$, $i < i'$, J'_i est un crible de $J'_{i'}$, et $J = \varinjlim_{i \in I} J'_i$. L'assertion résulte donc du lemme 2.4.7. \square

Proposition 2.4.9. — *Toute petite catégorie filtrante est asphérique.*

Démonstration. — Soit I une petite catégorie filtrante. En vertu du lemme 2.4.5, il existe un ensemble ordonné filtrant J et un foncteur cofinal $u : J \rightarrow I$. Pour tout objet i de I , la catégorie $i \backslash J$ est un ensemble ordonné filtrant. En effet, cette catégorie est filtrante d'après le lemme 2.4.3, (b), et il est évident qu'elle est un ensemble ordonné. Il résulte donc du lemme précédent que le foncteur u est coasphérique. Une nouvelle application de ce lemme implique alors que I est asphérique. \square

2.4.10. — On rappelle qu'un objet de *présentation finie* d'une catégorie M est un objet X de M tel que le foncteur

$$M \longrightarrow \mathcal{E}ns \quad , \quad Y \longmapsto \text{Hom}_M(X, Y)$$

commute aux limites inductives filtrantes. On vérifie facilement que si $M = \mathcal{Cat}$ est la catégorie des petites catégories, alors toute catégorie finie est un objet de présentation finie de \mathcal{Cat} (la réciproque étant fausse).

Lemme 2.4.11. — *Il existe une catégorie test A , et un foncteur test $i : A \rightarrow \mathcal{Cat}$ tel que le foncteur*

$$i^* : \mathcal{Cat} \longrightarrow \widehat{A}, \quad C \longmapsto (a \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{Cat}}(i(a), C))$$

commute aux limites inductives filtrantes.

Démonstration. — Il suffit de choisir une catégorie test A , et un foncteur test $i : A \rightarrow \mathcal{Cat}$ tel que pour tout objet a de A , $i(a)$ soit une catégorie de présentation finie, de sorte que le foncteur i^* commute aux limites inductives filtrantes. On peut prendre par exemple $A = \Delta$ et $i : \Delta \hookrightarrow \mathcal{Cat}$ l'inclusion, i^* étant alors le foncteur nerf (1.7.18), ou prendre pour A une petite sous-catégorie pleine de \mathcal{Cat} formée de catégories finies contractiles, stable par produits finis, et telle que Δ_1 soit un objet de A , et $i : A \hookrightarrow \mathcal{Cat}$ l'inclusion (1.7.19). \square

Proposition 2.4.12

a) *Une petite limite inductive filtrante de petites catégories asphériques est asphérique.*

b) *Si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est un localisateur fondamental, alors il est stable par petites limites inductives filtrantes, et en particulier, par composition transfinie.*

Démonstration. — En vertu du lemme précédent, on peut choisir une catégorie test A , et un foncteur test $i : A \rightarrow \mathcal{Cat}$ tel que le foncteur i^* commute aux limites inductives filtrantes. En vertu de la proposition 2.3.6, pour toute petite catégorie I , et tout foncteur $F : I \rightarrow \mathcal{Cat}$, le foncteur canonique

$$K_{i_A i^* F} : \int i_A i^* F \longrightarrow \varinjlim i_A i^* F$$

est une fibration. Si en outre la catégorie I est filtrante, il résulte du lemme 2.4.6 que les fibres de ce foncteur sont des catégories filtrantes, et par suite qu'elles sont asphériques (proposition 2.4.9). On en déduit que le foncteur $K_{i_A i^* F}$ est alors coasphérique, et en particulier une équivalence faible (1.1.25).

a) Soient I une petite catégorie filtrante, et $F : I \rightarrow \mathcal{Cat}$ un foncteur à valeurs des catégories asphériques. Pour montrer que $\varinjlim F$ est une catégorie asphérique, il suffit de montrer que

$$i_A i^* (\varinjlim F) \simeq i_A (\varinjlim i^* F) \simeq \varinjlim i_A i^* F$$

l'est. Or, dans le diagramme de foncteurs canoniques

$$\begin{array}{ccc} & \int i_A i^* F & \\ \theta_{i_A i^* F} \swarrow & & \searrow K_{i_A i^* F} \\ I & & \varinjlim i_A i^* F \end{array} ,$$

on a vu que $K_{i_A i^* F}$ est une équivalence faible, et par hypothèse $\theta_{i_A i^* F}$ est une cofibration à fibres asphériques, donc aussi une équivalence faible (1.1.17). L'assertion résulte donc de la proposition 2.4.9.

b) Supposons que le localisateur fondamental faible \mathcal{W} soit un localisateur fondamental, et soient I une petite catégorie filtrante, $F, G : I \rightarrow \text{Cat}$ deux foncteurs, et $\alpha : F \rightarrow G$ un morphisme de foncteurs qui soit une équivalence faible argument par argument. Pour montrer que

$$\varinjlim \alpha : \varinjlim F \longrightarrow \varinjlim G$$

est une équivalence faible, il suffit, en vertu de la proposition 1.7.6, (a), de montrer que

$$i_A i^* (\varinjlim \alpha) \simeq i_A \varinjlim (i^* \star \alpha) \simeq \varinjlim (i_A i^* \star \alpha)$$

l'est. Or, on a un carré commutatif dont les lignes sont des équivalences faibles

$$\begin{array}{ccc} \int i_A i^* F & \xrightarrow{K_{i_A i^* F}} & \varinjlim i_A i^* F \\ \int i_A i^* \star \alpha \downarrow & & \downarrow \varinjlim i_A i^* \star \alpha \\ \int i_A i^* G & \xrightarrow{K_{i_A i^* G}} & \varinjlim i_A i^* G \end{array} ,$$

et il résulte des propositions 1.7.6 et 2.3.1 qu'il en est de même de la flèche verticale de gauche, ce qui prouve l'assertion. \square

Remarque 2.4.13. — On rappelle qu'un *rétracte* d'un objet X d'une catégorie M est un objet X' de M tel qu'il existe des morphismes $i : X' \rightarrow X$ et $r : X \rightarrow X'$ de M tels que $ri = 1_{X'}$. L'endomorphisme ir de X est alors un *projecteur* : $(ir)^2 = ir$. Si I désigne la catégorie ayant un seul objet, et un seul morphisme non identique p , tel que $p^2 = p$, et $F : I \rightarrow M$ le foncteur qui envoie l'unique objet de I sur X et la flèche p sur l'endomorphisme ir de X , alors la catégorie I est filtrante, et on a un isomorphisme $\varinjlim F \simeq X'$. On dit qu'une classe d'objets d'une catégorie est *stable par rétractes* si tout rétracte d'un objet de cette classe appartient aussi à ladite classe. On dit qu'une classe de flèches est *stable par rétractes* si elle l'est comme classe d'objets de la catégorie des flèches. En vertu de ce qui précède, une classe d'objets ou de flèches qui est stable par limites inductives filtrantes l'est également par rétractes. Il résulte directement de l'axiome de saturation faible d'un localisateur fondamental

faible que la classe des catégories asphériques est stable par rétractes. L'assertion (b) de la proposition précédente implique le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.14. — *Si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est un localisateur fondamental, alors il est stable par rétractes.*

CHAPITRE 3

THÉORIE HOMOTOPIQUE ÉLÉMENTAIRE DES CATÉGORIES

3.1. Colimites et extensions de Kan homotopiques

3.1.1. — Pour tout objet I de Cat , on note Cat/I la catégorie des petites catégories au-dessus de I , dont les objets sont les couples formés d'un objet A de Cat et d'un foncteur $A \rightarrow I$, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ & \searrow & \swarrow \\ & I & \end{array} .$$

Pour toute flèche $w : J \rightarrow I$ de Cat , on note

$$Cat/w : Cat/J \rightarrow Cat/I$$

le foncteur défini par

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} A \\ \downarrow v \\ J \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} A \\ \downarrow wv \\ I \end{array} . \end{array}$$

Pour toute petite catégorie I , on définit des foncteurs (cf. 2.2.5)

$$\begin{aligned} Cat/I &\xrightarrow{\Theta_I} \underline{\text{Hom}}(I, Cat) \quad , \quad \underline{\text{Hom}}(I, Cat) \xrightarrow{\Theta'_I} Cat/I \\ (A, A \rightarrow I) &\longmapsto (i \longmapsto A/i) \quad , \quad F \longmapsto (\int F, \int F \rightarrow I) . \end{aligned}$$

Proposition 3.1.2. — Soit $w : J \rightarrow I$ un foncteur entre petites catégories. Alors

$$Cat/J \xrightarrow{\Theta_I \circ Cat/w} \underline{\text{Hom}}(I, Cat) \quad , \quad \underline{\text{Hom}}(I, Cat) \xrightarrow{\Theta'_J \circ \underline{\text{Hom}}(w, 1_{Cat})} Cat/J$$

est un couple de foncteurs adjoints. En particulier, pour $J = I$ et $w = 1_I$, on obtient que (Θ_I, Θ'_I) est un couple de foncteurs adjoints.

Démonstration. — On va définir des morphismes d'adjonction

$$\varepsilon : \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \circ \Theta'_J \circ \underline{\mathbf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at}) \longrightarrow 1_{\underline{\mathbf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)} \quad ,$$

$$\eta : 1_{\mathcal{C}at/J} \longrightarrow \Theta'_J \circ \underline{\mathbf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at}) \circ \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \quad ,$$

et on va laisser le soin au lecteur de vérifier les relations d'adjonction.

a) *Définition de ε .* Soit $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur. Définissons un morphisme fonctoriel ε_F , autrement dit, pour tout objet i de I , un foncteur

$$\varepsilon_{F,i} : (\int Fw) / i \longrightarrow F(i) \quad ,$$

fonctoriel en i . Les objets de la catégorie $(\int Fw)/i$ sont les triplets $(j, a, p : w(j) \longrightarrow i)$, où j est un objet de J , a un objet de $Fw(j)$, et p une flèche de I . Un morphisme de $(\int Fw)/i$, de source $(j, a, p : w(j) \longrightarrow i)$ et de but $(j', a', p' : w(j') \longrightarrow i)$, est un couple (l, f) , où $l : j \longrightarrow j'$ est une flèche de J , $f : Fw(l)(a) \longrightarrow a'$ une flèche de $Fw(j')$, telles que

$$\begin{array}{ccc} w(j) & \xrightarrow{w(l)} & w(j') \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & i & \end{array} \quad p = p'w(l) \quad .$$

On définit le foncteur $\varepsilon_{F,i}$ par

$$\varepsilon_{F,i}(j, a, p : w(j) \longrightarrow i) = F(p)(a) \quad ,$$

$$\varepsilon_{F,i}(l, f) = F(p')(f) : F(p')Fw(l)(a) = F(p)(a) \longrightarrow F(p')(a') \quad .$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier la compatibilité à la composition et aux identités, ainsi que la fonctorialité en i et en F .

b) *Définition de η .* Soit $(A, v : A \longrightarrow J)$ un objet de $\mathcal{C}at/J$. Définissons un foncteur, au-dessus de J ,

$$\eta_{A,v} : A \longrightarrow \int G \quad ,$$

où

$$G : J \longrightarrow \mathcal{C}at$$

désigne le foncteur

$$j \longmapsto A/w(j) \quad .$$

Les objets de $\int G$ sont les triplets $(j, a, p : wv(a) \longrightarrow w(j))$, où j est un objet de J , a un objet de A , et p une flèche de I . Un morphisme de $(j, a, p : wv(a) \longrightarrow w(j))$ vers $(j', a', p' : wv(a') \longrightarrow w(j'))$ est un couple (l, f) , où $l : j \longrightarrow j'$ est une flèche de J , $f : a \longrightarrow a'$ une flèche de A , telles que le carré

$$\begin{array}{ccc} wv(a) & \xrightarrow{wv(f)} & wv(a') \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ w(j) & \xrightarrow{w(l)} & w(j') \end{array}$$

soit commutatif. Pour tout objet a de A , on définit

$$\eta_{A,v}(a) = (v(a), a, 1_{wv(a)} : wv(a) \rightarrow wv(a)) \quad ,$$

et pour toute flèche $f : a \rightarrow a'$ de A ,

$$\eta_{A,v}(f) = (v(f), f) : (v(a), a, 1_{wv(a)}) \longrightarrow (v(a'), a', 1_{wv(a')}).$$

On vérifie facilement la compatibilité à la composition et aux identités, ainsi que la fonctorialité en (A, v) . \square

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible \mathcal{W} .

3.1.3. — Soit I une petite catégorie. On note \mathcal{W}_I la partie de $\text{Fl}(\underline{\text{Hom}}(I, \text{Cat}))$ formée des équivalences faibles argument par argument, autrement dit, des morphismes de foncteurs $\alpha : F \rightarrow F'$

$$F \begin{pmatrix} I \\ \alpha \\ \Rightarrow \\ F' \\ \text{Cat} \end{pmatrix}$$

tels que pour tout $i, i \in \text{Ob}(I)$, α_i soit dans \mathcal{W} . On note \mathcal{W}'_I la partie de $\text{Fl}(\text{Cat}/I)$ formée des foncteurs qui sont des équivalences faibles localement sur I , autrement dit, des morphismes

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & A' \\ & \searrow v & \swarrow v' \\ & I & \end{array} \quad v = v'u$$

de Cat/I tels que pour tout $i, i \in \text{Ob}(I)$, le foncteur $u/i : A/i \rightarrow A'/i$, induit par u , soit une équivalence faible.

Théorème 3.1.4. — Pour toute petite catégorie I , on a

$$\mathcal{W}'_I = \Theta_I^{-1}(\mathcal{W}_I) \quad , \quad \mathcal{W}_I = \Theta'_I{}^{-1}(\mathcal{W}'_I)$$

et les foncteurs

$$\overline{\Theta}_I : \mathcal{W}'_I{}^{-1} \text{Cat}/I \longrightarrow \mathcal{W}_I{}^{-1} \underline{\text{Hom}}(I, \text{Cat})$$

et

$$\overline{\Theta}'_I : \mathcal{W}_I{}^{-1} \underline{\text{Hom}}(I, \text{Cat}) \longrightarrow \mathcal{W}'_I{}^{-1} \text{Cat}/I \quad ,$$

induits par Θ_I et Θ'_I respectivement, sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — L'égalité $\mathcal{W}'_I = \Theta_I^{-1}(\mathcal{W}_I)$ est évidente. Comme (Θ_I, Θ'_I) est un couple de foncteurs adjoints (3.1.2), il suffit en vertu du lemme 1.3.8, de montrer que pour tout foncteur $F : I \rightarrow \text{Cat}$, le morphisme d'adjonction

$$\varepsilon_F : \Theta_I \Theta'_I(F) \longrightarrow F$$

est une équivalence faible argument par argument. Or, on a vu au cours de la démonstration de la proposition 3.1.2 que pour tout objet i de I , le morphisme $\varepsilon_{F,i}$ est le foncteur

$$(\int F) / i \longrightarrow F(i)$$

défini par

$$\varepsilon_{F,i}(i', a, p : i' \longrightarrow i) = F(p)(a) \quad ,$$

$$\varepsilon_{F,i}((i', a, p : i' \longrightarrow i) \xrightarrow{(k,f)} (i'', a', p' : i'' \longrightarrow i)) = F(p')(f) \quad .$$

On définit un foncteur

$$\alpha_{F,i} : F(i) \longrightarrow (\int F)/i$$

par

$$\alpha_{F,i}(a) = (i, a, 1_i : i \longrightarrow i) \quad , \quad a \in \mathbf{Ob}(F(i)) \quad ,$$

$$\alpha_{F,i}(f) = (1_i, f) \quad , \quad f \in \mathbf{Fl}(F(i)) \quad .$$

On vérifie facilement que $(\varepsilon_{F,i}, \alpha_{F,i})$ forme un couple de foncteurs adjoints. On en déduit que $\varepsilon_{F,i}$ est asphérique (1.1.9), et en particulier une équivalence faible, ce qui achève la démonstration du théorème. \square

Dans la suite, on suppose que le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est un localisateur fondamental.

Lemme 3.1.5. — *Soit $w : J \longrightarrow I$ un morphisme de \mathbf{Cat} . Alors*

$$\underline{\mathbf{Hom}}(w, 1_{\mathbf{Cat}})(\mathcal{W}_I) \subset \mathcal{W}_J \quad \text{et} \quad (\mathbf{Cat}/w)(\mathcal{W}'_J) \subset \mathcal{W}'_I \quad .$$

Démonstration. — La première inclusion est évidente. Pour montrer la deuxième, considérons un morphisme u

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & A' \\ & \searrow v & \swarrow v' \\ & J & \\ & \downarrow w & \\ & I & \end{array}$$

de \mathbf{Cat}/J qui est une équivalence faible localement sur J . Il s'agit de montrer qu'il est une équivalence faible localement sur I , autrement dit, que pour tout objet i de I , le foncteur $u/i : A/i \longrightarrow A'/i$ est une équivalence faible. On a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} A/i & \xrightarrow{u/i} & A'/i \\ & \searrow v/i & \swarrow v'/i \\ & J/i & \end{array} \quad ,$$

et pour tout objet $(j, k : w(j) \rightarrow i)$ de J/i , on a des isomorphismes canoniques

$$(A/i)/(j, k) \simeq A/j \quad , \quad (A'/i)/(j, k) \simeq A'/j \quad ,$$

et $(u/i)/(j, k)$ s'identifie à u/j qui est par hypothèse une équivalence faible. Le foncteur u/i est donc une équivalence faible localement sur J/i , ce qui prouve qu'il est une équivalence faible. \square

3.1.6. — En vertu du lemme précédent, pour toute flèche $w : J \rightarrow I$ de \mathcal{Cat} , le foncteur

$$\underline{\text{Hom}}(w, 1_{\mathcal{Cat}}) : \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{Cat}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(J, \mathcal{Cat})$$

induit un foncteur

$$w^* : \mathcal{W}_I^{-1} \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{Cat}) \longrightarrow \mathcal{W}_J^{-1} \underline{\text{Hom}}(J, \mathcal{Cat}) \quad ,$$

et le foncteur

$$\mathcal{Cat}/w : \mathcal{Cat}/J \longrightarrow \mathcal{Cat}/I$$

un foncteur

$$\overline{\mathcal{Cat}/w} : \mathcal{W}_J'^{-1} \mathcal{Cat}/J \longrightarrow \mathcal{W}_I'^{-1} \mathcal{Cat}/I \quad .$$

Pour toute petite catégorie I , on pose

$$\text{Hot}(I) = \text{Hot}_{\mathcal{W}}(I) = \mathcal{W}_I^{-1} \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{Cat})$$

(de sorte que si $I = e$, $\text{Hot}(e) = \mathcal{W}_e^{-1} \underline{\text{Hom}}(e, \mathcal{Cat}) \simeq \mathcal{W}^{-1} \mathcal{Cat} = \text{Hot}$ (cf. 1.3.2)). Pour tout morphisme $w : J \rightarrow I$ de \mathcal{Cat} , on a donc défini un foncteur

$$w^* : \text{Hot}(I) \longrightarrow \text{Hot}(J) \quad .$$

On définit un foncteur

$$w_! : \text{Hot}(J) \longrightarrow \text{Hot}(I)$$

en posant

$$w_! = \overline{\Theta}_I \circ \overline{\mathcal{Cat}/w} \circ \overline{\Theta}_J' \quad .$$

Théorème 3.1.7. — Pour tout morphisme $w : J \rightarrow I$ de \mathcal{Cat} , les foncteurs

$$w_! : \text{Hot}(J) \longrightarrow \text{Hot}(I) \quad , \quad w^* : \text{Hot}(I) \longrightarrow \text{Hot}(J)$$

forment un couple de foncteurs adjoints.

Démonstration. — Il résulte de la proposition 3.1.2, du théorème 3.1.4, et des lemmes 3.1.5 et 2.1.6 que le couple de foncteurs $(\overline{\Theta}_I \circ \overline{\mathcal{Cat}/w}, \overline{\Theta}_J' \circ w^*)$

$$\mathcal{W}_J'^{-1} \mathcal{Cat}/J \xrightarrow{\overline{\mathcal{Cat}/w}} \mathcal{W}_I'^{-1} \mathcal{Cat}/I \xrightarrow{\overline{\Theta}_I} \mathcal{W}_I^{-1} \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{Cat}) = \text{Hot}(I)$$

$$\mathcal{W}_I^{-1} \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{Cat}) = \text{Hot}(I) \xrightarrow{w^*} \text{Hot}(J) = \mathcal{W}_J^{-1} \underline{\text{Hom}}(J, \mathcal{Cat}) \xrightarrow{\overline{\Theta}_J'} \mathcal{W}_J'^{-1} \mathcal{Cat}/J$$

est un couple de foncteurs adjoints. Comme en vertu du théorème 3.1.4, $\overline{\Theta}_J$ et $\overline{\Theta}'_J$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, $w^* \simeq \overline{\Theta}_J \circ (\overline{\Theta}'_J \circ w^*)$ est un adjoint à droite de $(\overline{\Theta}_I \circ \overline{\text{Cat}}/w) \circ \overline{\Theta}'_J = w_!$, ce qui prouve le théorème. \square

Corollaire 3.1.8. — Soit $J \xrightarrow{w} J' \xrightarrow{w'} J''$ dans Cat . Alors on a un isomorphisme de foncteurs $(w'w)_! \simeq w'_!w_!$.

Démonstration. — Le corollaire résulte immédiatement du théorème 3.1.7 et de l'isomorphisme évident $(w'w)^* \simeq w^*w'^*$. \square

Exemple 3.1.9. — Soit J une petite catégorie. On note

$$\gamma_J : \underline{\text{Hom}}(J, \text{Cat}) \longrightarrow \mathcal{W}_J^{-1} \underline{\text{Hom}}(J, \text{Cat}) = \text{Hot}(J)$$

le foncteur de localisation (de sorte que si $J = e$,

$$\gamma_e : \text{Cat} \simeq \underline{\text{Hom}}(e, \text{Cat}) \longrightarrow \mathcal{W}_e^{-1} \underline{\text{Hom}}(e, \text{Cat}) \simeq \mathcal{W}^{-1} \text{Cat} = \text{Hot}$$

s'identifie au foncteur de localisation canonique $\gamma : \text{Cat} \longrightarrow \text{Hot}$ (cf. 1.3.2)). On note $p_J : J \longrightarrow e$ l'unique foncteur de J vers la catégorie ponctuelle. On vérifie immédiatement que pour tout foncteur $F : J \longrightarrow \text{Cat}$, on a

$$(p_J)_! \gamma_J(F) \simeq \gamma(\int F) \quad .$$

En particulier, si A est une petite catégorie, et F le foncteur constant de valeur A

$$F : j \longmapsto A \quad , \quad j \in \text{Ob}(J) \quad ,$$

alors

$$(p_J)_! \gamma_J(F) \simeq \gamma(J \times A) \quad ,$$

autrement dit,

$$(p_J)_! p_J^* \gamma(A) \simeq \gamma(J \times A) \quad .$$

Ainsi, en vertu de la proposition 2.1.9, le foncteur

$$(p_J)_! p_J^* : \text{Hot} \longrightarrow \text{Hot}$$

s'identifie au foncteur $\gamma(J) \times ?$, produit par $\gamma(J)$ dans Hot .

On suppose, dans la suite, que le localisateur fondamental \mathcal{W} est fortement saturé.⁽¹⁾

Proposition 3.1.10. — Soit $w : J \longrightarrow I$ un morphisme de Cat .

(a) Pour que w soit une équivalence faible, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs

$$(p_J)_! p_J^* \simeq (p_I)_! w_! w^* p_I^* \longrightarrow (p_I)_! p_I^* \quad ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

⁽¹⁾En fait, on démontre que, conformément à une conjecture de Grothendieck [10], tout localisateur fondamental est fortement saturé [7].

(b) Pour que w soit asphérique, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs

$$w_! p_J^* \simeq w_! w^* p_I^* \longrightarrow p_I^* ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

Démonstration. — a) Pour toute petite catégorie A , le morphisme

$$\gamma(J \times A) \simeq (p_J)_!(p_J)^* \gamma(A) \longrightarrow (p_I)_!(p_I)^* \gamma(A) \simeq \gamma(I \times A)$$

n'est autre que $\gamma(w \times 1_A)$, qui est un isomorphisme si et seulement si $w \times 1_A$ est une équivalence faible (puisque \mathcal{W} est fortement saturé). L'assertion (a) résulte donc de 2.1.3.

b) Pour toute petite catégorie A , $w_! p_J^* \gamma(A)$ (resp. $p_I^* \gamma(A)$) est l'image par γ_I du foncteur $i \mapsto (J \times A)/i \simeq J/i \times A$ (resp. du foncteur constant $i \mapsto A$), $i \in \text{Ob}(I)$, et le morphisme $w_! p_J^* \gamma(A) \longrightarrow p_I^* \gamma(A)$ est l'image par γ_I du morphisme de foncteurs défini par la deuxième projection $J/i \times A \longrightarrow A$. L'assertion (b) résulte donc de 1.1.4. \square

Remarque 3.1.11. — Les assertions (a) et (b) de la proposition 3.1.10 admettent la généralisation commune suivante : Soit

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{u} & J' \\ & \searrow w & \swarrow w' \\ & I & \end{array} \quad w = w' u$$

un triangle commutatif de Cat . Pour que le morphisme u soit une équivalence faible localement sur I , il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs

$$w_! p_J^* \simeq w'_! u_! u^* p_{J'}^* \longrightarrow w'_! p_{J'}^* ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

En effet, pour toute petite catégorie A , le morphisme $w_! p_J^* \gamma(A) \longrightarrow w'_! p_{J'}^* \gamma(A)$ de $\text{Hot}(I)$ s'identifie à l'image par γ_I du morphisme de foncteurs

$$i \mapsto u/i \times 1_A : J/i \times A \longrightarrow J'/i \times A , \quad i \in \text{Ob}(I) ,$$

et l'assertion résulte de 2.1.3.

Exemple 3.1.12. — Si \mathcal{W} est le localisateur fondamental \mathcal{W}_0 des exemples 1.1.32 et 2.1.2, on vérifie facilement que le foncteur π_0 induit une identification de la catégorie $\text{Hot}(I) = \text{Hot}_{\mathcal{W}_0}(I)$ à la catégorie $\underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{E}ns)$ des foncteurs de I vers la catégorie des ensembles. Pour toute flèche $u : I \longrightarrow J$ de Cat , le foncteur $u^* : \text{Hot}(J) \longrightarrow \text{Hot}(I)$ s'identifie au foncteur

$$\underline{\text{Hom}}(J, \mathcal{E}ns) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(I, \mathcal{E}ns) , \quad F \longmapsto Fu ,$$

et le foncteur $u_! : \text{Hot}(I) \longrightarrow \text{Hot}(J)$ à l'adjoint à gauche du précédent (l'extension de Kan à gauche classique). En particulier, pour toute petite catégorie I , et tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{E}ns$, l'image de F par $(p_I)_!$ s'identifie à la limite inductive $\varinjlim_I F$ de F .

Remarque 3.1.13. — Soit I une petite catégorie, et considérons les foncteurs

$$\begin{aligned} \text{Cat}/I &\xrightarrow{\Xi_I} \underline{\text{Hom}}(I^\circ, \text{Cat}) \quad , \quad \underline{\text{Hom}}(I^\circ, \text{Cat}) \xrightarrow{\Xi'_I} \text{Cat}/I \\ (A, A \longrightarrow I) &\longmapsto (i \longmapsto i \setminus A) \quad , \quad F \longmapsto (\nabla F, \nabla F \longrightarrow I) \end{aligned}$$

(voir 2.2.6). Il résulte aussitôt de la proposition 3.1.2, et de la commutativité du diagramme 2.2.6.1 que (Ξ_I, Ξ'_I) est un couple de foncteurs adjoints. On note \mathcal{W}_I'' la partie de $\text{Fl}(\text{Cat}/I)$ formée des foncteurs qui sont des équivalences faibles colocalement sur I , autrement dit, des morphismes

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & A' \\ & \searrow v & \swarrow v' \\ & I & \end{array} \quad v = v'u$$

de Cat/I tels que pour tout $i, i \in \text{Ob}(I)$, le foncteur $i \setminus u : i \setminus A \longrightarrow i \setminus A'$, induit par u , soit une équivalence faible. Il résulte alors du théorème 3.1.4, de la proposition 1.1.22, et de la commutativité du diagramme 2.2.6.1 qu'on a

$$\mathcal{W}_I'' = \Xi_I^{-1}(\mathcal{W}_{I^\circ}) \quad , \quad \mathcal{W}_{I^\circ} = \Xi'_I{}^{-1}(\mathcal{W}_I'') \quad ,$$

et que les foncteurs

$$\overline{\Xi}_I : \mathcal{W}_I''^{-1} \text{Cat}/I \longrightarrow \mathcal{W}_{I^\circ}^{-1} \underline{\text{Hom}}(I^\circ, \text{Cat}) = \text{Hot}(I^\circ)$$

et

$$\overline{\Xi}'_I : \text{Hot}(I^\circ) = \mathcal{W}_{I^\circ}^{-1} \underline{\text{Hom}}(I^\circ, \text{Cat}) \longrightarrow \mathcal{W}_I''^{-1} \text{Cat}/I \quad ,$$

induits par Ξ_I et Ξ'_I respectivement, sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre. De même, le lemme 3.1.5 implique que pour tout morphisme $w : J \longrightarrow I$ de Cat , on a l'inclusion $(\text{Cat}/w)(\mathcal{W}_J'') \subset \mathcal{W}_I''$, et par suite, que le foncteur Cat/w induit un foncteur

$$\overline{\text{Cat}/w} : \mathcal{W}_J''^{-1} \text{Cat}/J \longrightarrow \mathcal{W}_I''^{-1} \text{Cat}/I \quad .$$

Enfin, il résulte facilement des considérations des numéros 1.1.18 à 1.1.21, et de la commutativité du diagramme 2.2.6.1 que pour tout morphisme $w : J \longrightarrow I$ de Cat , le foncteur composé $\overline{\Xi}_{I^\circ} \circ \overline{\text{Cat}/w}^\circ \circ \overline{\Xi}'_{J^\circ}$

$$\text{Hot}(J) \xrightarrow{\overline{\Xi}'_{J^\circ}} \mathcal{W}_{J^\circ}''^{-1} \text{Cat}/J^\circ \xrightarrow{\overline{\text{Cat}/w}^\circ} \mathcal{W}_{I^\circ}''^{-1} \text{Cat}/I^\circ \xrightarrow{\overline{\Xi}_{I^\circ}} \text{Hot}(I)$$

est canoniquement isomorphe au foncteur $w_!$.

3.2. Morphismes propres, lisses

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental faible \mathcal{W} .

Définition 3.2.1. — On dit qu'un morphisme $u : A \rightarrow B$ de $\mathcal{C}at$ est \mathcal{W} -propre, ou plus simplement propre, si pour tout objet b de B , le morphisme canonique

$$i_b : A_b \rightarrow A/b, \quad a \mapsto (a, 1_b : u(a) \rightarrow b), \quad a \in \text{Ob}(A_b),$$

est coasphérique. On dit que u est \mathcal{W} -lisse, ou plus simplement lisse, si le morphisme $u^\circ : A^\circ \rightarrow B^\circ$ est propre, autrement dit, si pour tout objet b de B , le morphisme canonique

$$j_b : A_b \rightarrow b \backslash A, \quad a \mapsto (a, 1_b : b \rightarrow u(a)), \quad a \in \text{Ob}(A_b),$$

est asphérique.

Exemple 3.2.2. — Il résulte de 1.1.16 et 1.1.25 qu'une précofibration est un morphisme propre. Dualelement, une préfibration est un morphisme lisse. En particulier, une *immersion ouverte* (morphisme de $\mathcal{C}at$ isomorphe à l'inclusion d'un crible) est un morphisme lisse, et une *immersion fermée* (morphisme isomorphe à l'inclusion d'un co-crible) est un morphisme propre.

Proposition 3.2.3. — Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) u est propre ;
- (b) pour tout objet a de A , les fibres du morphisme

$$a \backslash A \rightarrow b \backslash B, \quad b = u(a),$$

induit par u , sont asphériques ;

- (c) pour tout morphisme $B' = \Delta_1 \rightarrow B$ de $\mathcal{C}at$, si l'on forme le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A' = A \times_B B' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & B \end{array},$$

l'inclusion $A'_1 \hookrightarrow A'$, de la fibre de A' au-dessus de l'objet 1 de $B' = \Delta_1$, est un morphisme coasphérique ;

- (d) pour toute flèche $f_0 : b_0 \rightarrow b_1$ de B , et tout objet a_0 de A_{b_0} , la catégorie $A(a_0, f_0)$ dont les objets sont les flèches $f : a_0 \rightarrow a$ de source a_0 qui relèvent f_0 ($u(f) = f_0$), et dont les morphismes sont les triangles commutatifs

$$\begin{array}{ccc} & a_0 & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ a & \xrightarrow{g} & a' \end{array},$$

avec g morphisme de A_{b_1} ($u(g) = 1_{b_1}$), est asphérique.

Démonstration. — L'équivalence de (a), (b) et (d) est un simple exercice de traduction laissé au lecteur. Montrons l'équivalence de (c) et (d). La donnée d'une flèche $f_0 : b_0 \rightarrow b_1$ de B équivaut à celle d'un foncteur $\Delta_1 \rightarrow B$ comme dans (c), et affirmer, avec les notations de (c), que $A'_1 \hookrightarrow A'$ est coasphérique, c'est affirmer que pour tout objet a' de A' , la catégorie $a' \backslash A'_1$ est asphérique. Si $a' \in \text{Ob}(A'_1)$, cela est vrai sans hypothèse sur u (puisque alors $a' \backslash A'_1$ admet un objet initial, et par suite est asphérique (1.1.11)). Il suffit donc de le vérifier pour a' dans $A' - A'_1 = A'_0 \simeq A_{b_0}$. Mais alors a' s'identifie à un objet a_0 de A_{b_0} , et on vérifie que $a' \backslash A'_1$ est isomorphe à la catégorie $A(a_0, f_0)$ de (d). Cela achève la démonstration. \square

Corollaire 3.2.4. — *Les morphismes propres sont stables par changement de base, autrement dit, pour tout carré cartésien dans Cat*

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

si u est propre, il en est de même de u' .

Démonstration. — Le corollaire résulte de la proposition 3.2.3, puisque la condition (c) est stable par changement de base. \square

Remarque 3.2.5. — Il résulte de la condition (d) de la proposition 3.2.3 et de la proposition 1.1.30 que si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} n'est pas trivial, alors un morphisme propre $u : A \rightarrow B$ est un morphisme *fermé*, autrement dit, l'image par u de tout fermé de $\text{Ob}(A)$ (ensemble d'objets d'un cocrible de A) est un fermé de $\text{Ob}(B)$. En particulier, on se gardera de croire qu'une équivalence de catégories soit toujours un morphisme propre. On vérifie facilement qu'elle est propre si et seulement si elle induit une surjection sur les objets (si \mathcal{W} est non trivial).

Proposition 3.2.6. — *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme propre de Cat . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) u est à fibres asphériques ;
- (b) u est asphérique ;
- (c) u est universellement asphérique, autrement dit, il est asphérique et le reste après tout changement de base ;
- (d) u est universellement dans \mathcal{W} .

Démonstration. — Le morphisme u étant propre, pour tout objet b de B , le morphisme canonique $A_b \rightarrow A/b$ est coasphérique, et en particulier une équivalence faible, ce qui montre l'équivalence des conditions (a) et (b). Comme être propre à fibres asphériques est, en vertu du corollaire 3.2.4, une propriété stable par changement

de base, ceci prouve aussi l'équivalence de (a) et (c). Les implications (c) \Rightarrow (d) et (d) \Rightarrow (a) étant évidentes, cela achève la démonstration. \square

Lemme 3.2.7. — Soient $u : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathcal{Cat} , a un objet de A , et $b = u(a)$. Si le morphisme u est propre, il en est de même du morphisme $a \backslash A \rightarrow b \backslash B$, induit par u .

Démonstration. — En vertu de la condition (b) de la proposition 3.2.3, il suffit de montrer que pour tout objet $(a', f : a \rightarrow a')$ de $a \backslash A$, le morphisme $(a', f) \backslash (a \backslash A) \rightarrow (b', g) \backslash (b \backslash B)$, où $(b', g) = (u(a'), u(f))$, est à fibres asphériques. Or ce morphisme s'identifie au morphisme $a' \backslash A \rightarrow b' \backslash B$, induit par u , qui est à fibres asphériques, en vertu de la condition (b) de la proposition 3.2.3, puisque le morphisme u est propre. \square

Proposition 3.2.8. — Soient $u : A \rightarrow B$ un morphisme propre de \mathcal{Cat} , a un objet de A , et $b = u(a)$. Alors le morphisme $a \backslash A \rightarrow b \backslash B$, induit par u , est universellement dans \mathcal{W} .

Démonstration. — Il résulte de la condition (b) de la proposition 3.2.3 que le morphisme $a \backslash A \rightarrow b \backslash B$ est à fibres asphériques, et du lemme précédent qu'il est propre. L'assertion résulte donc de la proposition 3.2.6. \square

Proposition 3.2.9. — Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathcal{Cat} . Si u est propre, alors u est colocalement coasphérique (cf. 1.1.25).

Démonstration. — Cela résulte aussitôt de la proposition 3.2.8, puisqu'un morphisme de \mathcal{Cat} universellement dans \mathcal{W} est en particulier coasphérique. \square

Proposition 3.2.10. — Les morphismes propres sont stables par composition.

Démonstration. — Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ dans \mathcal{Cat} , avec u, v propres. Formons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & a \backslash A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \longrightarrow & b \backslash B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow v \\ \{(c', f)\} & \hookrightarrow & c \backslash C & \longrightarrow & C \end{array},$$

où a est un objet de A , $b = u(a)$, $c = v(b) = vu(a)$, $(c', f : c \rightarrow c')$ un objet de $c \backslash C$, les deux carrés de gauche étant cartésiens. Comme v est propre, il résulte de la condition (b) de la proposition 3.2.3 que B' est asphérique. Comme u est propre, il résulte de la proposition 3.2.8 que le morphisme $a \backslash A \rightarrow b \backslash B$ est universellement dans \mathcal{W} . On en déduit que le morphisme $A' \rightarrow B'$ est une équivalence faible, et par

suite que A' est asphérique. Cela prouve que vu est propre en vertu de la condition (b) de la proposition 3.2.3. \square

Lemme 3.2.11. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

un carré cartésien de \mathbf{Cat} . Alors pour tout objet a de A , $b = u(a)$, le carré induit

$$\begin{array}{ccc} a \backslash A' & \longrightarrow & a \backslash A \\ \downarrow & & \downarrow \\ b \backslash B' & \longrightarrow & b \backslash B \end{array}$$

est cartésien.

Démonstration. — Considérons le cube commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{\quad} & A & & \\ & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \\ & a \backslash A' & \xrightarrow{\quad} & a \backslash A & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ B' & \xrightarrow{\quad} & B & & \\ & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \\ & b \backslash B' & \xrightarrow{\quad} & b \backslash B & \end{array} \quad .$$

La face arrière est cartésienne par hypothèse, et les faces horizontales sont cartésiennes par définition de $a \backslash A'$ et $b \backslash B'$. On en déduit que la face avant est cartésienne, ce qui prouve le lemme. \square

Proposition 3.2.12. — *Soient C une petite catégorie,*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow & \swarrow \\ & C & \end{array}$$

un morphisme de \mathbf{Cat}/C , $C' \rightarrow C$ un morphisme propre, et formons le diagramme de changement de base dont les trois carrés sont cartésiens

$$(3.2.12.1) \quad \begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{\quad} & A & & \\ & \searrow u' & \downarrow & \searrow u & \\ & B' & \xrightarrow{\quad} & B & \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \\ C' & \xrightarrow{\quad} & C & & \end{array} \quad .$$

Si u est une équivalence faible colocalement sur C , alors u' est une équivalence faible colocalement sur C' .

Démonstration. — Soient c' un objet de C' , c son image dans C , et considérons le diagramme induit par le diagramme 3.2.12.1

$$\begin{array}{ccc}
 c' \backslash A' & \xrightarrow{\quad} & c \backslash A \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 & c' \backslash B' & \xrightarrow{\quad} c \backslash B \\
 \swarrow & & \swarrow \\
 c' \backslash C' & \xrightarrow{\quad} & c \backslash C
 \end{array}$$

En vertu du lemme 3.2.11, les deux carrés contenant $c' \backslash C' \rightarrow c \backslash C$ sont cartésiens (le troisième carré l'est donc aussi). Comme $C' \rightarrow C$ est propre, il résulte de la proposition 3.2.8 que $c' \backslash C' \rightarrow c \backslash C$ est universellement dans \mathcal{W} , donc $c' \backslash A' \rightarrow c \backslash A$ et $c' \backslash B' \rightarrow c \backslash B$ sont des équivalences faibles. Si u est une équivalence faible colocalement sur C , $c \backslash A \rightarrow c \backslash B$ est une équivalence faible, donc $c' \backslash A' \rightarrow c' \backslash B'$ aussi, ce qui prouve que u' est une équivalence faible colocalement sur C' . \square

Corollaire 3.2.13. — *L'image inverse d'un morphisme coasphérique par un morphisme propre est coasphérique.*

Démonstration. — Le corollaire est un cas particulier de la proposition 3.2.12. \square

Corollaire 3.2.14. — *L'image inverse d'un morphisme colocalement coasphérique par un morphisme propre est colocalement coasphérique.*

Démonstration. — Soit

$$\begin{array}{ccc}
 A' & \xrightarrow{w} & A \\
 u' \downarrow & & \downarrow u \\
 B' & \xrightarrow{v} & B
 \end{array}$$

un carré cartésien de \mathcal{Cat} , u étant un morphisme colocalement coasphérique et v un morphisme propre. On vérifie facilement que pour tout objet a' de A' , le carré induit

$$\begin{array}{ccc}
 a' \backslash A' & \longrightarrow & a \backslash A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 b' \backslash B' & \longrightarrow & b \backslash B
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 a = w(a') \\
 b' = u'(a') \\
 b = u(a) = v(b')
 \end{array}$$

est cartésien. L'assertion résulte donc du lemme 3.2.7 et du corollaire précédent. \square

Théorème 3.2.15. — *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathcal{Cat} . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) u est propre ;
 (b) pour tout diagramme de carrés cartésiens dans \mathcal{Cat}

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{w} & A' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ B'' & \xrightarrow{v} & B' & \longrightarrow & B \end{array} ,$$

si v est coasphérique, il en est de même de w .

Démonstration. — L'implication (a) \Rightarrow (b) résulte des corollaires 3.2.4 et 3.2.13. Montrons que (b) implique (a). Pour tout objet b de B , on a un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} A_b & \longrightarrow & A/b & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ \{b\} & \longrightarrow & B/b & \longrightarrow & B \end{array} ,$$

où l'image de $\{b\} \rightarrow B/b$ est l'objet final de B/b . Le morphisme $\{b\} \rightarrow B/b$ admet donc un adjoint à gauche, et par suite est coasphérique (1.1.25). L'hypothèse (b) implique alors que $A_b \rightarrow A/b$ est coasphérique, ce qui prouve que u est propre. \square

Proposition 3.2.16. — Soient C une petite catégorie,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & C & \end{array}$$

un morphisme de \mathcal{Cat}/C , avec v et w propres. Si u induit des équivalences faibles dans les fibres au-dessus de C , alors u est une équivalence faible localement sur C , et en particulier, si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est un localisateur fondamental, u est une équivalence faible.

Démonstration. — Pour tout objet c de C , on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_c & \xrightarrow{u_c} & B_c \\ i_A \downarrow & & \downarrow i_B \\ A/c & \xrightarrow{u/c} & B/c \end{array} ,$$

où i_A et i_B désignent les morphismes canoniques. Comme v et w sont propres, i_A et i_B sont coasphériques, et en particulier des équivalences faibles. Par hypothèse, u_c est une équivalence faible ; on en déduit donc que u/c est une équivalence faible, ce qui prouve la proposition. \square

Remarque 3.2.17. — La proposition 3.2.16 généralise la partie (a) de la proposition 2.1.10.

Remarque 3.2.18. — Toutes les assertions concernant les morphismes propres admettent une version duale relative aux morphismes lisses. En particulier, les morphismes lisses sont stables par changement de base et composition. Un morphisme lisse à fibres asphériques est universellement dans \mathcal{W} . Pour qu'un morphisme u de \mathcal{Cat} soit lisse, il faut et il suffit que l'image inverse par u d'un morphisme asphérique soit asphérique, et que u conserve cette propriété après tout changement de base. On laisse le soin au lecteur de formuler les versions duales des autres assertions.

3.2.19. — Soient $w : J \rightarrow I$ un morphisme de \mathcal{Cat} , $F : I \rightarrow \mathcal{Cat}$ un foncteur, et posons $G = Fw : J \rightarrow \mathcal{Cat}$. Le morphisme w induit un foncteur

$$\tilde{w} : \int G = \int Fw \longrightarrow \int F \quad ,$$

défini par

$$\begin{aligned} \tilde{w}(j, a) &= (w(j), a) \quad , \quad (j, a) \in \text{Ob}(\int G) \quad , \\ \tilde{w}(q, f) &= (w(q), f) \quad , \quad (q, f) : (j, a) \rightarrow (j', a') \in \text{Fl}(\int G) \quad . \end{aligned}$$

Le foncteur $\tilde{w} : \int G \rightarrow \int F$ peut être aussi défini par la propriété universelle de $\int G$. Notons

$$\begin{aligned} l_i : F(i) \longrightarrow \int F \quad , \quad i \in \text{Ob}(I) \quad , \\ \beta_k : l_i \longrightarrow l_{i'} F(k) \quad , \quad k : i \rightarrow i' \in \text{Fl}(I) \quad , \end{aligned}$$

les foncteurs et morphismes de foncteurs canoniques correspondant au foncteur F (cf. 2.2.3), et définissons

$$\begin{aligned} l'_j &= l_{w(j)} : G(j) = F(w(j)) \longrightarrow \int F \quad , \quad j \in \text{Ob}(J) \quad , \\ \beta'_q &= \beta_{w(q)} : l'_j = l_{w(j)} \longrightarrow l_{w(j')} F(w(q)) = l'_{j'} G(q) \quad , \quad q : j \rightarrow j' \in \text{Fl}(J) \quad . \end{aligned}$$

On vérifie aussitôt qu'on a la relation de cocycle

$$\beta'_{q'q} = (\beta'_{q'} \star G(q)) \beta'_q \quad , \quad \beta'_{1_j} = 1_{l'_j} \quad ,$$

pour $j \xrightarrow{q} j' \xrightarrow{q'} j''$ morphismes composables de J , et que $\tilde{w} : \int G \rightarrow \int F$ est le foncteur défini, grâce à la propriété universelle de $\int G$, par la famille des foncteurs l'_j , $j \in \text{Ob}(J)$, et des morphismes de foncteurs β'_q , $q \in \text{Fl}(J)$, (cf. 2.2.3).

Lemme 3.2.20. — Soient $w : J \rightarrow I$ un morphisme de \mathcal{Cat} , $F : I \rightarrow \mathcal{Cat}$ un foncteur, et posons $G = Fw : J \rightarrow \mathcal{Cat}$. Alors on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \int G & \xrightarrow{\tilde{w}} & \int F \\ \theta_G \downarrow & & \downarrow \theta_F \\ J & \xrightarrow{w} & I \end{array} \quad ,$$

où θ_G, θ_F désignent les cofibrations associées aux foncteurs G et F respectivement (cf. 2.2.1), et \tilde{w} le foncteur induit par w (cf. 3.2.19).

Démonstration. — Le lemme résulte d'une simple vérification, laissée au lecteur. \square

Lemme 3.2.21. — Soient $u : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathcal{Cat} , et $F : A \rightarrow \mathcal{Cat}$ un foncteur. Pour tout $b, b \in \text{Ob}(B)$, on a un isomorphisme canonique

$$(\int F)/b \simeq \int F \mid A/b \quad ,$$

où $F \mid A/b$ désigne le composé de F avec le foncteur canonique $A/b \rightarrow A$.

Démonstration. — En vertu du lemme 3.2.20, on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \int F \mid A/b & \longrightarrow & \int F \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/b & \longrightarrow & A \end{array} \quad ,$$

et comme le carré

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array}$$

est aussi cartésien, il en est de même du carré composé

$$\begin{array}{ccc} \int F \mid A/b & \longrightarrow & \int F \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array} \quad .$$

Le carré

$$\begin{array}{ccc} (\int F)/b & \longrightarrow & \int F \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array}$$

étant aussi cartésien, le lemme en résulte. \square

Proposition 3.2.22. — Soit $w : J \rightarrow I$ un morphisme de \mathcal{Cat} . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) le morphisme w est coasphérique ;
- (b) pour tout foncteur $F : I \rightarrow \mathcal{Cat}$, le morphisme

$$\int Fw \longrightarrow \int F \quad ,$$

induit par w , est coasphérique ;

(c) pour tout foncteur $F : I \rightarrow \text{Cat}$, le morphisme

$$\int Fw \longrightarrow \int F \quad ,$$

induit par w , est une équivalence faible.

Démonstration. — En vertu du lemme 3.2.20, on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \int Fw & \longrightarrow & \int F \\ \downarrow & & \downarrow \theta_F \\ J & \xrightarrow{w} & I \end{array} \quad ,$$

et θ_F est une cofibration, et en particulier un morphisme propre (3.2.2). L'implication (a) \Rightarrow (b) résulte donc du corollaire 3.2.13. L'implication (b) \Rightarrow (c) résulte de 1.1.25. Montrons l'implication (c) \Rightarrow (a). Soit i un objet de I , et considérons le foncteur $F : I \rightarrow \text{Cat}$ associant à un objet i' de I la catégorie discrète correspondant à l'ensemble $\text{Hom}_I(i, i')$. Alors, en vertu de (c), $\int Fw \rightarrow \int F$ est une équivalence faible, et on vérifie facilement que $\int F \simeq i \backslash I$, que $\int Fw \simeq i \backslash J$, et que la flèche $\int Fw \rightarrow \int F$ s'identifie au morphisme $i \backslash w : i \backslash J \rightarrow i \backslash I$, induit par w , ce qui prouve que w est coasphérique, et achève la démonstration. \square

Le corollaire suivant complète la proposition 3.1.10.

Corollaire 3.2.23. — *Supposons que le localisateur fondamental faible \mathcal{W} soit un localisateur fondamental, et qu'il soit fortement saturé.⁽²⁾ Soit $w : J \rightarrow I$ un morphisme de Cat . Pour que w soit coasphérique, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs*

$$(p_J)_! w^* \simeq (p_I)_! w_! w^* \longrightarrow (p_I)_! \quad ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

Démonstration. — Pour tout foncteur $F : I \rightarrow \text{Cat}$, le morphisme

$$\gamma(\int Fw) \simeq (p_J)_! w^* \gamma_I(F) \longrightarrow (p_I)_! \gamma_I(F) \simeq \gamma(\int F)$$

de $\text{Hot}(e) \simeq \text{Hot}$ (cf. 3.1.9) s'identifie à $\gamma(\tilde{w})$, où $\tilde{w} : \int Fw \rightarrow \int F$ désigne le morphisme induit par w . Le corollaire résulte donc de la proposition 3.2.22, et de la forte saturation de \mathcal{W} . \square

Remarque 3.2.24. — La proposition 3.2.22 et le corollaire 3.2.23 admettent une version relative analogue à celle de la proposition 3.1.10 (remarque 3.1.11). Soit

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{u} & J' \\ \swarrow w & & \searrow w' \\ & I & \end{array} \quad w = w'u$$

⁽²⁾Voir note de bas de page précédant la proposition 3.1.10.

un triangle commutatif dans Cat . Pour tout foncteur $F : I \rightarrow Cat$, le triangle

$$\begin{array}{ccc} \int Fw & \xrightarrow{\tilde{u}} & \int Fw' \\ & \searrow \tilde{w} & \swarrow \tilde{w}' \\ & \int F & \end{array},$$

où \tilde{u} , \tilde{w} , \tilde{w}' désignent les foncteurs induits par u , w et w' respectivement, est commutatif. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \int Fw & \xrightarrow{\theta_{Fw}} & J & & \\ \downarrow \tilde{w} & \searrow \tilde{u} & \downarrow w & \searrow u & \\ & \int Fw' & \xrightarrow{\theta_{Fw'}} & J' & \\ & \swarrow \tilde{w}' & \downarrow w' & \swarrow w' & \\ \int F & \xrightarrow{\theta_F} & I & & \end{array}$$

dont les faces carrées sont cartésiennes, en vertu du lemme 3.2.20. Il résulte donc de la proposition 3.2.12 que si le morphisme u est une équivalence faible colocalement sur I , alors \tilde{u} est une équivalence faible colocalement sur $\int F$. Réciproquement, si pour tout foncteur $F : I \rightarrow Cat$, le morphisme $\tilde{u} : \int Fw \rightarrow \int Fw'$ est une équivalence faible colocalement sur $\int F$, alors u est une équivalence faible colocalement sur I . En effet, soit i un objet de I , et considérons le foncteur $F : I \rightarrow Cat$ associant à un objet i' de I la catégorie discrète correspondant à l'ensemble $\text{Hom}_I(i, i')$. Alors le foncteur $\tilde{u} : \int Fw \rightarrow \int Fw'$ s'identifie au foncteur $i \setminus u : i \setminus J \rightarrow i \setminus J'$, induit par u , et la catégorie $\int F$ à la catégorie $i \setminus I$. Il résulte donc de l'hypothèse que le morphisme $i \setminus u$ est une équivalence faible colocalement sur $i \setminus I$. En particulier, le morphisme

$$i \setminus u : i \setminus J \simeq (i, 1_i) \setminus (i \setminus J) \longrightarrow (i, 1_i) \setminus (i \setminus J') \simeq i \setminus J' \quad ,$$

où $(i, 1_i)$ désigne l'objet initial de $i \setminus I$, est une équivalence faible, ce qui prouve que le morphisme u est une équivalence faible colocalement sur I . Si le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est un localisateur fondamental, le raisonnement précédent montre aussi que le morphisme u est une équivalence faible colocalement sur I si et seulement si pour tout foncteur $F : I \rightarrow Cat$, le morphisme $\tilde{u} : \int Fw \rightarrow \int Fw'$ est une équivalence faible. Si de plus \mathcal{W} est fortement saturé, ⁽³⁾ cette dernière condition équivaut à affirmer que le morphisme de foncteurs

$$(p_J)_! w^* \simeq (p_J)_! u_! u^* w'^* \longrightarrow (p_{J'})_! w'^* \quad ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, est un isomorphisme (ce qui généralise le corollaire 3.2.23). En effet, on vérifie aussitôt que pour tout foncteur $F : I \rightarrow Cat$, le

⁽³⁾Voir note de bas de page précédant la proposition 3.1.10.

morphisme

$$\gamma(\int Fw) \simeq (p_J)_! w^* \gamma_I(F) \longrightarrow (p_{J'})_! w'^* \gamma_I(F) \simeq \gamma(\int Fw)$$

de $\text{Hot}(e) \simeq \text{Hot}$ s'identifie au morphisme $\gamma(\tilde{u})$.

Remarque 3.2.25. — Si \mathcal{W} est le localisateur fondamental \mathcal{W}_0 des exemples 1.1.32 et 2.1.2, conformément aux considérations de l'exemple 3.1.12, on retrouve comme cas particulier du corollaire 3.2.23 le résultat classique suivant :

Pour qu'un foncteur entre petites catégories $w : J \rightarrow I$ soit cofinal, autrement dit, \mathcal{W}_0 -coasphérique (cf. 2.4.2), il faut et il suffit que pour tout foncteur $F : I \rightarrow \mathcal{E}ns$, de I vers la catégorie des ensembles, l'application canonique $\varinjlim_J Fw \rightarrow \varinjlim_I F$, induite par w , soit bijective.

La remarque 3.2.24 fournit le raffinement suivant, sans doute bien connu :

Pour tout triangle commutatif de foncteurs entre petites catégories

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{u} & J' \\ & \searrow w & \swarrow w' \\ & I & \end{array} \quad w = w'u \quad ,$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) pour tout objet i de I , le foncteur $i \backslash J \rightarrow i \backslash J'$, induit par u , définit une bijection $\pi_0(i \backslash J) \rightarrow \pi_0(i \backslash J')$;
- (b) pour tout foncteur $F : I \rightarrow \mathcal{E}ns$, de I vers la catégorie des ensembles, l'application canonique $\varinjlim_J Fw \rightarrow \varinjlim_{J'} Fw'$, induite par u , est bijective.

3.2.26. — Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Dans la suite de ce paragraphe, on désigne aussi, par abus de notation, par $u_!$, u^* les foncteurs

$$\begin{aligned} \underline{\text{Hom}}(A, \text{Cat}) &\xrightarrow{u_!} \underline{\text{Hom}}(B, \text{Cat}) \quad , & \underline{\text{Hom}}(B, \text{Cat}) &\xrightarrow{u^*} \underline{\text{Hom}}(A, \text{Cat}) \quad , \\ F &\longmapsto (b \mapsto (\int F)/b) & G &\longmapsto Gu \end{aligned}$$

$u_! = \Theta_B \circ \text{Cat}/u \circ \Theta'_A$ (cf. 3.1.1), $u^* = \underline{\text{Hom}}(u, 1_{\text{Cat}})$, de sorte qu'on ait des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(A, \text{Cat}) & \xrightarrow{u_!} & \underline{\text{Hom}}(B, \text{Cat}) \\ \gamma_A \downarrow & & \downarrow \gamma_B \\ \text{Hot}(A) & \xrightarrow{u_!} & \text{Hot}(B) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \underline{\text{Hom}}(B, \text{Cat}) & \xrightarrow{u^*} & \underline{\text{Hom}}(A, \text{Cat}) \\ \gamma_B \downarrow & & \downarrow \gamma_A \\ \text{Hot}(B) & \xrightarrow{u^*} & \text{Hot}(A) \end{array}$$

(cf. 3.1.6, 3.1.9) (le premier uniquement dans le cas où le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est un localisateur fondamental).

3.2.27. — Soit

$$\mathcal{D} = \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

un carré cartésien de \mathcal{Cat} . Pour tout foncteur $F : A \rightarrow \mathcal{Cat}$, on déduit un carré cartésien composé

$$\begin{array}{ccc} \int Fw & \xrightarrow{\tilde{w}} & \int F \\ \theta_{Fw} \downarrow & & \downarrow \theta_F \\ A' & \xrightarrow{w} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

(cf. 3.2.20). Pour tout objet b' de B' , le foncteur \tilde{w} induit un foncteur

$$(\int Fw)/b' \longrightarrow (\int F)/v(b') \quad ,$$

et on remarque que

$$(\int Fw)/b' = (u'_! w^*(F))(b') \quad \text{et} \quad (\int F)/v(b') = (v^* u_!(F))(b') \quad .$$

On en déduit un morphisme

$$\kappa_{\mathcal{D}} : u'_! w^* \longrightarrow v^* u_!$$

de $\underline{\mathbf{Hom}}(\underline{\mathbf{Hom}}(A, \mathcal{Cat}), \underline{\mathbf{Hom}}(B', \mathcal{Cat}))$, appelé *morphisme de changement de base associé au carré \mathcal{D}* .

Proposition 3.2.28. — Soit

$$\mathcal{D} = \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

un carré cartésien de \mathcal{Cat} , avec u morphisme propre (resp. v morphisme lisse). Alors le morphisme de changement de base $\kappa_{\mathcal{D}} : u'_! w^* \rightarrow v^* u_!$ est coasphérique (resp. universellement dans \mathcal{W}) argument par argument, autrement dit, pour tout foncteur $F : A \rightarrow \mathcal{Cat}$, et tout objet b' de B' ,

$$\kappa_{\mathcal{D}, F}(b') : (u'_! w^*(F))(b') \longrightarrow (v^* u_!(F))(b')$$

est coasphérique (resp. universellement dans \mathcal{W}), et en particulier, une équivalence faible.

Démonstration

Cas u propre. — En vertu du corollaire 3.2.4, le morphisme u' est propre aussi, et pour tout objet b' de B' , on a donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A'_{b'} & \xrightarrow{\sim} & A_{v(b')} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'/b' & \longrightarrow & A/v(b') \end{array}$$

dont les flèches verticales sont coasphériques, et la flèche horizontale du haut un isomorphisme, puisque le carré \mathcal{D} est cartésien. Pour tout foncteur $F : A \rightarrow \mathcal{C}at$, on en déduit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \int Fw|A'_{b'} & \xrightarrow{\sim} & \int F|A_{v(b')} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int Fw|A'/b' & \longrightarrow & \int F|A/v(b') \\ \parallel & & \parallel \\ (\int Fw)/b' & & (\int F)/v(b') \\ \parallel & & \parallel \\ (u'_!w^*(F))(b') & & (v^*u_!(F))(b') \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des morphismes coasphériques (proposition 3.2.22), et la flèche horizontale du haut un isomorphisme. Il résulte alors de la proposition 1.1.8 (forme duale) que la flèche horizontale du bas est coasphérique, ce qui prouve l'assertion, en vertu du lemme 3.2.21.

Cas v lisse. — Soit $F : A \rightarrow \mathcal{C}at$ un foncteur, et considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \int Fw & \xrightarrow{\tilde{w}} & \int F \\ u'\theta_{Fw} \downarrow & & \downarrow u\theta_F \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

(cf. 3.2.27). En vertu du dual du lemme 3.2.11, pour tout objet b' de B' , on en déduit un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} (\int Fw)/b' & \xrightarrow{\kappa_{\mathcal{D},F}(b')} & (\int F)/v(b') \\ \downarrow & & \downarrow \\ B'/b' & \longrightarrow & B/v(b') \end{array} .$$

Comme v est lisse, il résulte de la proposition 3.2.8 (forme duale) que le morphisme $B/b' \rightarrow B/v(b')$, induit par v , est universellement dans \mathcal{W} . Il en est donc de même de $\kappa_{\mathcal{D},F}(b')$, ce qui achève la démonstration. \square

3.2.29. — Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathcal{Cat} . Par abus de notation, on désigne par $\int_B A/b$ la catégorie $\int F_u$, où F_u est le foncteur $F_u : B \rightarrow \mathcal{Cat}$ défini par $b \mapsto A/b$. La catégorie $\int_B A/b$ est la catégorie dont les objets sont les triplets $(b, a, f : u(a) \rightarrow b)$, $a \in \text{Ob}(A)$, $b \in \text{Ob}(B)$, $f \in \text{Fl}(B)$, un morphisme de (b, a, f) vers (b', a', f') étant un couple $(h : b \rightarrow b', g : a \rightarrow a')$, $g \in \text{Fl}(A)$, $h \in \text{Fl}(B)$, tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} u(a) & \xrightarrow{u(g)} & u(a') \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ b & \xrightarrow{h} & b' \end{array}$$

soit commutatif. On définit des foncteurs

$$\begin{aligned} i_u : A &\longrightarrow \int_B A/b & , & & r_u : \int_B A/b &\longrightarrow A & , \\ a &\longmapsto (u(a), a, 1_{u(a)}) & & & (b, a, f) &\longmapsto a \end{aligned}$$

et un morphisme de foncteurs

$$\alpha = \alpha_u : i_u r_u \longrightarrow 1_{\int_B A/b} \quad , \quad \alpha_{(b,a,f)} = (f, 1_a) : (u(a), a, 1_{u(a)}) \longrightarrow (b, a, f) \quad ,$$

et on vérifie aussitôt que $r_u i_u = 1_A$. On en déduit que i_u et r_u sont des équivalences faibles. On remarque qu'on a $u = \theta_{F_u} i_u$, où θ_{F_u} est le morphisme canonique

$$\theta_{F_u} : \int_B A/b = \int F_u \longrightarrow B \quad .$$

Le morphisme u se décompose donc en une équivalence faible suivie d'une cofibration.

De plus, pour tout carré commutatif de \mathcal{Cat}

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array} \quad ,$$

on a des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{w} & A & & \int_{B'} A'/b' \xrightarrow{s} \int_B A/b & & \int_{B'} A'/b' \xrightarrow{s} \int_B A/b \\ i_{u'} \downarrow & & \downarrow i_u & & r_{u'} \downarrow & & \downarrow r_u & & \theta_{F_{u'}} \downarrow & & \downarrow \theta_{F_u} \\ \int_{B'} A'/b' & \xrightarrow{s} & \int_B A/b & & A' & \xrightarrow{w} & A & & B' & \xrightarrow{v} & B \end{array} \quad ,$$

où $s : \int_{B'} A'/b' \rightarrow \int_B A/b$ est le foncteur défini par $(b', a', f') \mapsto (v(b'), w(a'), v(f'))$, ainsi que l'égalité

$$s \star \alpha_{u'} = \alpha_u \star s \quad .$$

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que le localisateur fondamental faible \mathcal{W} est un localisateur fondamental.

Théorème 3.2.30. — Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) u est propre ;
- (b) pour tout diagramme de carrés cartésiens dans $\mathcal{C}at$

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ B'' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B \end{array} ,$$

le morphisme de changement de base associé au carré de gauche est une équivalence faible argument par argument.

Démonstration. — L'implication (a) \Rightarrow (b) résulte du corollaire 3.2.4 et de la proposition 3.2.28. Montrons l'implication (b) \Rightarrow (a). En vertu du théorème 3.2.15, il suffit de montrer que si

$$\mathcal{D} = \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

est un carré cartésien dont le morphisme de changement de base $\kappa_{\mathcal{D}}$ est une équivalence faible argument par argument, et si v est coasphérique, alors w est coasphérique. Par hypothèse, pour tout foncteur $F : A \rightarrow \mathcal{C}at$, et tout objet b' de B' ,

$$\kappa_{\mathcal{D},F}(b') : (u'_! w^*(F))(b') \longrightarrow (v^* u_!(F))(b')$$

est une équivalence faible, et il résulte de la proposition 2.3.1 que

$$\int \kappa_{\mathcal{D},F} : \int u'_! w^*(F) \longrightarrow \int v^* u_!(F)$$

est une équivalence faible. D'autre part, comme v est coasphérique, il résulte de la proposition 3.2.22 que le morphisme

$$\tilde{v} : \int v^* u_!(F) = \int u_!(F) v \longrightarrow \int u_!(F) \quad ,$$

induit par v , est une équivalence faible, et par suite aussi le composé

$$\tilde{v} \int \kappa_{\mathcal{D},F} : \int u'_! w^*(F) \longrightarrow \int u_!(F) \quad .$$

Or, en reprenant l'abus de notation de 3.2.29,

$$\int u'_! w^*(F) = \int_{B'} (\int F w) / b' \quad , \quad \int u_!(F) = \int_B (\int F) / b \quad ,$$

et on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \int Fw & \xrightarrow{\tilde{w}} & \int F \\ u'\theta_{Fw} \downarrow & & \downarrow u\theta_F \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

(cf. 3.2.27), d'où un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \int Fw & \xrightarrow{\tilde{w}} & \int F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int_{B'} (\int Fw)/b' & \xrightarrow{s} & \int_B (\int F)/b \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des équivalences faibles (cf. 3.2.29). On vérifie facilement que $s = \tilde{v} \int \kappa_{\mathcal{D}, F}$, ce qui implique que \tilde{w} est une équivalence faible, et prouve, en vertu de la proposition 3.2.22, que le foncteur w est coasphérique, ce qui achève la démonstration. \square

Lemme 3.2.31. — *Soit*

$$\mathcal{D} = \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

un carré cartésien de Cat . On suppose que A est la catégorie ponctuelle e , que B admet un objet initial \emptyset_B , et que le morphisme u est le foncteur $e \rightarrow B$ défini par cet objet. Alors le morphisme de changement de base $\kappa_{\mathcal{D}} : u'_! w^* \rightarrow v^* u_!$ est une équivalence faible argument par argument si et seulement si le foncteur u' est asphérique.

Démonstration. — Pour toute petite catégorie C , vue comme foncteur de e vers Cat , et tout objet b' de B' , on a des isomorphismes

$$(u'_! w^*(C))(b') \simeq (A' \times C)/b' \simeq A'/b' \times C, \quad (v^* u_!(C))(b') \simeq \text{Hom}_B(\emptyset, v(b')) \times C \simeq C,$$

et le morphisme de changement de base

$$\kappa_{\mathcal{D}, C}(b') : (u'_! w^*(C))(b') \longrightarrow (v^* u_!(C))(b')$$

s'identifie à la projection $A'/b' \times C \rightarrow C$, ce qui prouve le lemme, en vertu des propositions 1.1.3 et 1.1.4. \square

Théorème 3.2.32. — *Soit $u : A \rightarrow B$ un morphisme de Cat . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *u est lisse ;*

(b) pour tout diagramme de carrés cartésiens dans \mathcal{Cat}

$$\begin{array}{ccc} A'' & \longrightarrow & B'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array} \quad ,$$

le morphisme de changement de base associé au carré du haut est une équivalence faible argument par argument.

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 3.2.28 et de la stabilité des morphismes lisses par changement de base (cf. remarque 3.2.18). Pour montrer l'implication $(b) \Rightarrow (a)$, soit b un objet de B , et considérons le diagramme de carrés cartésiens de \mathcal{Cat}

$$\begin{array}{ccc} A_b & \longrightarrow & e \\ j_b \downarrow & & \downarrow \\ b \backslash A & \longrightarrow & b \backslash B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array} \quad ,$$

où $e \rightarrow b \backslash B$ est le foncteur défini par l'objet $(b, 1_b)$ de $b \backslash B$. La condition (b) implique que le morphisme de changement de base associé au carré du haut est une équivalence faible argument par argument, et il résulte donc du lemme précédent que le foncteur j_b est asphérique, ce qui prouve l'assertion. \square

Remarque 3.2.33. — Il résulte aussitôt du lemme 3.2.21 et de la remarque 3.2.24 que si

$$\mathcal{D} = \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

désigne un carré cartésien de \mathcal{Cat} , alors le morphisme de changement de base $\kappa_{\mathcal{D}}$ est une équivalence faible argument par argument si et seulement si pour tout objet b' de B' , le foncteur $A'/b' \rightarrow A/v(b')$, induit par w , est une équivalence faible colocalement sur A .

3.2.34. — En reprenant les notations de 3.1.6, soit

$$\mathcal{D} = \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

un carré cartésien de \mathcal{Cat} . On en déduit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hot}(A') & \xleftarrow{w^*} & \mathrm{Hot}(A) \\ u'^* \uparrow & & \uparrow u^* \\ \mathrm{Hot}(B') & \xleftarrow{v^*} & \mathrm{Hot}(B) \end{array} \quad ,$$

les foncteurs u^* et u'^* admettant des adjoints à gauche

$$u_! : \mathrm{Hot}(A) \rightarrow \mathrm{Hot}(B) \quad \text{et} \quad u'_! : \mathrm{Hot}(A') \rightarrow \mathrm{Hot}(B')$$

respectivement (cf. 3.1.7). On appelle aussi *morphisme de changement de base associé au carré cartésien \mathcal{D}* et on note $c_{\mathcal{D}} : u'_! w^* \rightarrow v^* u_!$ le morphisme de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Hot}(A), \mathrm{Hot}(B'))$, composé des flèches

$$u'_! w^* \longrightarrow u'_! w^* u^* u_! = u'_! u'^* v^* u_! \longrightarrow v^* u_! \quad ,$$

définies par les morphismes d'adjonction $1_{\mathrm{Hot}(A)} \rightarrow u^* u_!$ et $u'_! u'^* \rightarrow 1_{\mathrm{Hot}(B')}$. On vérifie facilement que le morphisme $c_{\mathcal{D}}$ est induit, par localisation, par le morphisme $\kappa_{\mathcal{D}}$ (cf. 3.2.27), autrement dit, en gardant les notations de 3.1.9, pour tout foncteur $F : A \rightarrow \mathcal{Cat}$, on a

$$c_{\mathcal{D}, \gamma_A(F)} = \gamma_{B'}(\kappa_{\mathcal{D}, F}) \quad .$$

Ainsi, en vertu de la proposition 3.2.28, si u est propre ou v lisse, alors le morphisme $c_{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme. Il résulte du théorème 3.2.30 (resp. 3.2.32) que cette propriété caractérise les morphismes propres (resp. lisses) si l'on demande qu'elle reste vraie après tout changement de base (pourvu que le localisateur fondamental \mathcal{W} soit fortement saturé ⁽⁴⁾).

⁽⁴⁾ Voir note de bas de page précédant la proposition 3.1.10.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ADÁMEK & J. ROSICKÝ – *Locally Presentable and Accessible Categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 189, Cambridge University Press, 1994.
- [2] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK & J.-L. VERDIER – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA4), Lect. Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-73.
- [3] M. ARTIN & B. MAZUR – *Étale Homotopy*, Lect. Notes in Math., vol. 100, Springer-Verlag, 1969.
- [4] T. BEKE – « Sheafifiable homotopy model categories », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **129** (2000), p. 447–475.
- [5] C. CASACUBERTA & B. CHORNY – « The orthogonal subcategory problem in homotopy theory », Prépublication, à paraître dans *Proceedings of the Arolla conference on Algebraic Topology* 2004.
- [6] C. CASACUBERTA, D. SCEVENELS & J.H. SMITH – « Implications of large-cardinal principles in homotopical localization », Prépublication, à paraître dans *Adv. Math.*
- [7] D.-C. CISINSKI – « Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie », Thèse, Université Paris 7, 2002, www-math.univ-paris13.fr/~cisinski/, à paraître dans *Astérisque*.
- [8] ———, « Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles », *Ann. Math. Blaise Pascal* **10** (2003), p. 195–244.
- [9] P. GABRIEL & M. ZISMAN – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik, vol. 35, Springer-Verlag, 1967.
- [10] A. GROTHENDIECK – *Pursuing stacks*, 1983, Manuscrit, à paraître dans *Documents Mathématiques*.

- [11] ———, *Les dérivateurs*, 1990, Manuscrit, www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html.
- [12] A. HELLER – *Homotopy theories*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 71, no. 383, American Mathematical Society, 1988.
- [13] L. ILLUSIE – *Complexe cotangent et déformations I, II*, Lect. Notes in Math., vol. 239 & 283, Springer-Verlag, 1971-72.
- [14] D.M. LATCH – « The uniqueness of homology for the category of small categories », *J. Pure Appl. Algebra* **9** (1977), p. 221–237.
- [15] G. MALTSINIOTIS – « Introduction à la théorie des dérivateurs (d'après Grothendieck) », Prépublication, www.math.jussieu.fr/~maltsin/, 2001.
- [16] ———, « Structures d'asphéricité, foncteurs lisses, et fibrations », *Ann. Math. Blaise Pascal* **12** (2005), p. 1–39.
- [17] I. MOERDIJK – *Classifying spaces and classifying topoi*, Lect. Notes in Math., vol. 1616, Springer-Verlag, 1995.
- [18] D. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lect. Notes in Math., vol. 43, Springer-Verlag, 1967.
- [19] ———, « Higher algebraic K-theory : I », in *Algebraic K-theory I* (H. Bass, éd.), Lect. Notes in Math., vol. 341, Springer-Verlag, 1973, p. 85–147.
- [20] J. ROSICKÝ & W. THOLEN – « Left-determined model categories and universal homotopy theories », *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), p. 3611–3623.
- [21] R.W. THOMASON – « Homotopy colimits in the category of small categories », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **85** (1979), p. 91–109.
- [22] ———, « Cat as a closed model category », *Cahiers de topologie et géométrie différentielle* **XXI** (1980), no. 3, p. 305–324.

INDEX DES NOTATIONS

Cat	1.1.2
e	1.1.2
\mathcal{W}	1.1.2
A/b	1.1.2
u/b	1.1.2
A_b	1.1.15
A°	1.1.15
u°	1.1.15
$S(A)$	1.1.18
s_A, t_A	1.1.18
I	1.1.18
$S(u)$	1.1.21
$b \backslash A$	1.1.25
$b \backslash u$	1.1.25
Δ_1	1.1.26
\mathcal{W}_{gr}	1.1.31
π_0	1.1.32
\mathcal{W}_0	1.1.32
\mathcal{W}_∞	1.1.33
\mathcal{W}_n	1.1.34
\widehat{A}	1.2.1
i_A, i_A^*	1.2.1
ε, η	1.2.1
$\mathcal{W}_{\widehat{A}}$	1.2.3
$e_{\widehat{A}}$	1.2.6
u^*	1.2.8

$\lambda_u, \lambda, \lambda_F$	1.2.8
\boxtimes	1.2.11
$W^{-1}M$	1.3.1
$\text{Hot}_{\mathcal{W}}, \text{Hot}$	1.3.2
$\gamma_{\mathcal{W}}, \gamma$	1.3.2
$\text{Hot}_{\mathcal{W}, A}, \text{Hot}_A, \gamma_A$	1.3.4
$\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$	1.4.1
$M_{\mathcal{I}}, Q_{\mathcal{I}}$	1.4.3
$\tilde{\mathcal{I}}$	1.4.4
$F(\mathbb{I})$	1.4.5
$\Delta_1 = (\Delta_1, e_0, e_1)$	1.4.15
L_A	1.5.5
\mathbb{L}_A	1.5.6
Δ	1.5.11
Δ_n	1.5.11
\mathcal{I}_A	1.6.16
i^*	1.7.1
i_{\dagger}	1.7.16
Δ'	1.7.23
$\tilde{\Delta}$	1.7.25
$\Delta_{\leq n}$	1.7.27
$\underline{\text{Hom}}_W(M, N), \text{Hom}_W(M, N)$	2.1.5
$S(u), s_u, t_u, S(v, w)$	2.1.11
$\int F, \theta_F$	2.2.1
$\int_I F, \int_{i \in \text{Ob}(I)} F(i)$	2.2.1
H_A, H_u	2.2.2
l_i, β_k	2.2.3
K_F	2.2.3
$\int \alpha$	2.2.5
\int_I	2.2.5
$\nabla_I, \nabla F, \zeta_F, \nabla \alpha$	2.2.6
$(i_A F)_s$	2.3.7
$\text{Cat}/I, \text{Cat}/w$	3.1.1
Θ_I, Θ'_I	3.1.1
$\mathcal{W}_I, \mathcal{W}'_I$	3.1.3
$\text{Hot}(I), \text{Hot}_{\mathcal{W}}(I)$	3.1.6
w^*, w_{\dagger}	3.1.6
γ_J	3.1.9

p_J	3.1.9
$\mathcal{E}ns$	3.1.12
\tilde{w}	3.2.19
$u^*, u_{\mathfrak{l}}$	3.2.26
$\kappa_{\mathcal{D}}$	3.2.27
$\int_B A/b$	3.2.29
F_u, i_u, r_u, α_u	3.2.29
$c_{\mathcal{D}}$	3.2.34

INDEX TERMINOLOGIQUE

asphérique (catégorie)	1.1.2
asphérique (foncteur d'une petite catégorie vers Cat)	1.7.1
asphérique (morphisme de Cat)	1.1.2
asphérique (morphisme de préfaisceaux)	1.2.3
asphérique (préfaisceau)	1.2.5
cartésien (morphisme)	1.1.15
catégorie contractile	1.4.15
catégorie des ensembles simpliciaux	1.5.11
catégorie des fractions relativement à une classe de flèches	1.3.1
catégorie des simplexes	1.5.11
catégorie filtrante	2.4.1
catégorie homotopique relative à un localisateur fondamental faible	1.3.2
catégorie pseudo-filtrante	2.4.1
catégorie test	1.5.2
catégorie test faible	1.3.7
catégorie test locale	1.5.2
catégorie test stricte	1.6.7
catégorie totalement \mathcal{W} -asphérique	1.6.2
catégorie \mathcal{W} -asphérique	1.1.2
classe de flèches faiblement saturée	1.1.1
classe de flèches fortement saturée	1.3.1
classe de flèches stable par composition transfinie	2.3.17
classe de flèches stable par rétractes	2.4.13
classe d'objets stable par rétractes	2.4.13
coasphérique	1.1.25
cocartésien (morphisme)	1.1.15
cocrible	1.1.26
cofibration (au sens des catégories cofibrées)	1.1.15
cofinal (foncteur)	2.4.2
colocalement coasphérique	1.1.25
colocalement \mathcal{W} -coasphérique	1.1.25
contracteur	1.6.16
contractile (catégorie)	1.4.15

crible	1.1.26
ensemble ordonné filtrant	2.4.1
ensemble simplicial	1.5.11
équivalence faible (dans Cat) colocalement sur une petite catégorie.....	2.1.1
équivalence faible (dans Cat) localement sur une petite catégorie.....	2.1.1
équivalence faible (dans Cat , relativement à un localisateur fondamental faible)	1.1.2
équivalence faible (de préfaisceaux) localement sur une petite catégorie	2.1.1
équivalence faible (de préfaisceaux, relativement à un localisateur fondamental faible)	1.2.3
équivalence faible argument par argument	2.3.1
équivalence faible locale (de préfaisceaux)	1.2.6
fibration (au sens des catégories fibrées)	1.1.15
fibre (d'un foncteur)	1.1.15
filtrante (catégorie)	2.4.1
filtrant (ensemble ordonné)	2.4.1
foncteur cartésien	2.1.11
foncteur cocartésien	2.1.11
foncteur cofinal	2.4.2
foncteur colocalement \mathcal{W} -coasphérique	1.1.25
foncteur de coïntégration	2.2.6
foncteur de localisation	1.3.1
foncteur de localisation canonique	1.3.2
foncteur d'intégration	2.2.5
foncteur localement \mathcal{W} -asphérique	1.1.12
foncteur nerf	1.7.18
foncteur test	1.7.11
foncteur test faible	1.7.11
foncteur test local	1.7.11
foncteur \mathcal{W} -asphérique	1.1.2
foncteur \mathcal{W} -coasphérique	1.1.25
foncteur \mathcal{W} -lisse	3.2.1
foncteur \mathcal{W} -propre	3.2.1
foncteurs homotopes	1.4.15
homotopisme (dans Cat)	1.4.15
\mathbb{I} -contractile (\mathbb{I} segment)	1.4.3
\mathcal{I} -contractile (\mathcal{I} classe de segments)	1.4.3
\mathbb{I} -équivalence d'homotopie (\mathbb{I} segment)	1.4.3
\mathcal{I} -équivalence d'homotopie (\mathcal{I} classe de segments)	1.4.3
\mathbb{I} -homotope de façon élémentaire (\mathbb{I} segment)	1.4.2
\mathbb{I} -homotope (\mathbb{I} segment)	1.4.2
\mathcal{I} -homotope (\mathcal{I} classe de segments)	1.4.2
\mathbb{I} -homotopie (\mathbb{I} segment)	1.4.2
\mathcal{I} -homotopie (\mathcal{I} classe de segments)	1.4.2
\mathbb{I} -homotopisme (\mathbb{I} segment)	1.4.3
\mathcal{I} -homotopisme (\mathcal{I} classe de segments)	1.4.3
immersion fermée	3.2.2
immersion ouverte	3.2.2
lisse (morphisme de Cat)	3.2.1
localement asphérique (morphisme de Cat)	1.1.12
localement asphérique (préfaisceau)	1.2.6

localement \mathcal{W} -asphérique (morphisme de \mathcal{Cat})	1.1.12
localement \mathcal{W} -asphérique (préfaisceau)	1.2.6
localisateur fondamental	2.1.1
localisateur fondamental faible	1.1.2
localisateur fondamental faible fortement saturé	1.3.1
localisateur fondamental grossier	1.1.31
localisateur fondamental trivial	1.1.29
localisation d'une catégorie par une classe de flèches	1.3.1
modélisateur	1.3.3
modélisateur fondamental	1.3.3
morphisme de changement de base associé à un carré cartésien	3.2.27 et 3.2.34
morphisme de modélisateurs	1.3.3
morphisme de préfaisceaux \mathcal{W} -asphérique	1.2.3
morphisme de segments	1.4.1
morphisme fermé	3.2.5
morphisme quarrable	1.1.1
n -équivalence	1.1.34
nerf	1.7.18
objet de Lawvere	1.4.12
objet de présentation finie	2.4.10
précofibration	1.1.15
précontracteur	1.6.16
préfaisceau localement \mathcal{W} -asphérique	1.2.6
préfaisceau \mathcal{W} -asphérique	1.2.5
préfibration	1.1.15
propre (morphisme de \mathcal{Cat})	3.2.1
pseudo-catégorie test	1.3.4
pseudo-filtrante (catégorie)	2.4.1
pseudo-foncteur test	1.7.11
quarrable	1.1.1
rétracte	2.4.13
segment	1.4.1
segment de Lawvere	1.4.12
segment multiplicatif	1.4.9
segment séparant	1.4.1
totalement asphérique (catégorie)	1.6.2
totalement \mathcal{W} -asphérique (catégorie)	1.6.2
universellement dans une classe de flèches	1.1.1
\mathcal{W} -asphérique (catégorie)	1.1.2
\mathcal{W} -asphérique (foncteur d'une petite catégorie vers \mathcal{Cat})	1.7.1
\mathcal{W} -asphérique (morphisme de \mathcal{Cat})	1.1.2
\mathcal{W} -asphérique (morphisme de préfaisceaux)	1.2.3
\mathcal{W} -asphérique (préfaisceau)	1.2.5
\mathcal{W} -catégorie test	1.5.2
\mathcal{W} -catégorie test faible	1.3.7
\mathcal{W} -catégorie test locale	1.5.2
\mathcal{W} -catégorie test stricte	1.6.7
\mathcal{W} -coasphérique	1.1.25
\mathcal{W} -contracteur	1.6.16

\mathcal{W} -équivalence (dans \mathcal{Cat})	1.1.2
\mathcal{W} -équivalence (dans \mathcal{Cat}) colocalement sur une petite catégorie	2.1.1
\mathcal{W} -équivalence (dans \mathcal{Cat}) localement sur une petite catégorie	2.1.1
\mathcal{W} -équivalence de préfaisceaux	1.2.3
\mathcal{W} -équivalence de préfaisceaux localement sur une petite catégorie	2.1.1
\mathcal{W} -équivalence locale de préfaisceaux	1.2.6
\mathcal{W} -foncteur test	1.7.11
\mathcal{W} -foncteur test faible	1.7.11
\mathcal{W} -foncteur test local	1.7.11
\mathcal{W} -lisse (morphisme de \mathcal{Cat})	3.2.1
\mathcal{W} -modélisateur	1.3.3
\mathcal{W} -propre (morphisme de \mathcal{Cat})	3.2.1
\mathcal{W} -pseudo-catégorie test	1.3.4
\mathcal{W} -pseudo-foncteur test	1.7.11