

Astérisque

Formes automorphes (I) - Actes du semestre du centre Émile Borel, printemps 2000 - Pages préliminaires

Astérisque, tome 298 (2005), p. I-XVIII

http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__298__R1_0

© Société mathématique de France, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ASTÉRISQUE 298

FORMES AUTOMORPHES (I)

ACTES DU SEMESTRE DU CENTRE ÉMILE BOREL,
PRINTEMPS 2000

édité par

Jacques Tilouine

Henri Carayol

Michael Harris

Marie-France Vignéras

Société Mathématique de France 2005

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

J. Tilouine

LAGA, CNRS, UMR 7539, Institut Galilée, Université Paris 13,
93430 Villetaneuse, France.

E-mail : `tilouine@math.univ-paris13.fr`

H. Carayol

IRMA, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex,
France.

E-mail : `carayol@math.u-strasbg.fr`

M. Harris

Université Paris VII, Institut de Mathématiques de Jussieu, 2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05 France.

E-mail : `harris@math.jussieu.fr`

M.-F. Vignéras

Université Paris VII, Institut de Mathématiques de Jussieu, 2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05, France.

E-mail : `vigneras@math.jussieu.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11-04, 11F03, 11F11, 11F30, 11F33, 11F41, 11F60, 11F70, 11F72, 11F75, 11G15, 11G18, 11G40, 11R39, 11S37, 14G15, 14G22, 14G35, 14K15, 14L05, 22E40, 22E45, 22E50, 32S60, 55N33.

Mots clefs. — Algèbre de Hecke, cohomologie d'intersection, compactifications, conjecture de Gouvêa-Mazur, conjecture de Grothendieck, conjecture de Langlands locale, correspondance fonctorielle, correspondance de Jacquet-Langlands, déformations de groupes formels, ensembles μ -admissibles et μ -permis, espaces analytiques rigides, espaces de modules, espace localement symétrique, fonctions L , fonction zêta semi-simple, forme automorphe, forme automorphe p -adique, formes modulaires, formule des traces, formule des traces de Lefschetz, groupes de Barsotti-Tate, groupe p -divisible, méthode de descente, modèle de Whittaker, pentes, polygones de Newton, séries d'Eisenstein, sous-groupes parahoriques, tour d'Igusa, variétés abéliennes, variétés de Deligne-Lusztig affines, variété de Shimura.

FORMES AUTOMORPHES (I)

ACTES DU SEMESTRE DU CENTRE ÉMILE BOREL,
PRINTEMPS 2000

édité par Jacques Tilouine, Henri Carayol, Michael Harris,
Marie-France Vignéras

Résumé. — Ce volume est le premier d'une série de deux consacrés aux formes automorphes sous leurs aspects géométrique et arithmétique et à certains points du programme de Langlands. Les thèmes abordés dans ce volume concernent les formes modulaires p -adiques, la correspondance locale de Langlands pour $GL(n)$, la cohomologie des variétés de Shimura, leur réduction modulo p et leurs stratifications associées aux polygones de Newton.

Abstract (Automorphic forms (I), Proceedings of the Semester of the Émile Borel Center, Spring 2000)

This volume is the first of a series of two devoted to Automorphic Forms, in a geometric and arithmetic point of view. They also deal with certain parts of Langlands program. The themes treated in this volume include p -adic modular forms, the local Langlands correspondence for $GL(n)$, the cohomology of Shimura varieties, their reduction modulo p and their stratification by Newton polygons.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|------|
| Résumés des articles | ix |
| Abstracts | xiii |
| Préface | xvii |
| | |
| K. BUZZARD — <i>Questions about slopes of modular forms</i> | 1 |
| Introduction | 1 |
| 1. $\Gamma_0(N)$ -regularity | 5 |
| 2. The conjecture | 7 |
| 3. Remarks on the conjecture | 10 |
| 4. Consequences of the conjecture and related questions | 11 |
| References | 14 |
| | |
| M. HARRIS — <i>The Local Langlands correspondence: Notes of (half) a course at the IHP Spring 2000</i> | 17 |
| Introduction | 18 |
| 1. Galois representations attached to automorphic representations of $GL(n)$. | 24 |
| 2. Shimura varieties as moduli varieties | 35 |
| 3. p -divisible \mathcal{O} -modules and Drinfel'd bases | 46 |
| 4. Stratification and vanishing cycles | 58 |
| 5. Construction of a local correspondence | 74 |
| 6. The second basic identity and Isogeny classes in the special fiber | 92 |
| 7. Comparison of trace formulas | 108 |
| 8. Strata in Shimura varieties of PEL type | 125 |
| Appendices | 137 |
| References | 142 |
| | |
| H. HIDA — <i>p-Adic automorphic forms on reductive groups</i> | 147 |
| 1. Introduction | 148 |
| 2. Elliptic Curves | 155 |
| 3. Vertical Control for Elliptic Modular Forms | 166 |

| | |
|--|-----|
| 4. Hecke Equivariance of the Eichler-Shimura Map | 170 |
| 5. Moduli of Abelian Schemes | 182 |
| 6. Shimura Varieties | 197 |
| 7. Formal Theory of Automorphic Forms | 207 |
| 8. Vertical Control for Projective Shimura Varieties | 219 |
| 9. Hilbert Modular Forms | 230 |
| 10. Igusa Towers | 241 |
| References | 252 |
| | |
| F. OORT — <i>Newton polygons and p-divisible groups: a conjecture by Grothendieck</i> | 255 |
| Introduction | 255 |
| 1. Notations | 256 |
| 2. Results : deformations of p -divisible groups | 259 |
| 3. Results : deformations of polarized p -divisible groups and of abelian varieties | 260 |
| 4. Methods : deformations to $a \leq 1$ | 261 |
| 5. Methods : Cayley-Hamilton | 263 |
| 6. Polarized abelian varieties and quasi-polarized p -divisible groups | 263 |
| 7. Some questions and conjectures | 265 |
| References | 267 |
| | |
| M. RAPOPORT — <i>A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties</i> | 271 |
| 1. Motivation : The elliptic modular curve | 273 |
| Part I. Local theory | |
| 2. Parahoric subgroups | 277 |
| 3. μ -admissible and μ -permissible set | 280 |
| 4. Affine Deligne-Lusztig varieties | 288 |
| 5. The sets $X(\mu, b)_K$ | 291 |
| 6. Relations to local models | 297 |
| Part II. Global theory | |
| 7. Geometry of the reduction of a Shimura variety | 299 |
| 8. Pseudomotivic and quasi-pseudomotivic Galois gerbs | 302 |
| 9. Description of the point set in the reduction | 305 |
| 10. The semi-simple zeta function | 308 |
| References | 311 |
| Notes added June 2003 | 314 |
| Additional references | 318 |
| | |
| L. SAPER — <i>\mathcal{L}-modules and the Conjecture of Rapoport and Goresky-MacPherson</i> | 319 |
| 1. Introduction | 320 |
| 2. Compactifications | 320 |
| 3. The conjecture | 322 |

| | |
|---|-----|
| 4. A generalization | 323 |
| 5. \mathcal{L} -modules | 324 |
| 6. Examples of \mathcal{L} -modules | 326 |
| 7. Micro-support of \mathcal{L} -modules | 326 |
| 8. A vanishing theorem for \mathcal{L} -modules | 328 |
| 9. Micro-purity of intersection cohomology | 329 |
| 10. Functoriality of micro-support and proof of the Main Theorem | 330 |
| 11. Example/application: ordinary cohomology | 331 |
| References | 333 |
| | |
| D. SOUDRY — <i>On Langlands functoriality from classical groups to GL_n</i> | 335 |
| Introduction | 335 |
| 1. The weak lift from SO_{2n+1} to GL_{2n} | 337 |
| 2. L -functions for $G \times \mathrm{GL}_k$, where G is a quasi-split classical group (generic representations) | 347 |
| 3. On the weak lift from a quasi-split classical group to GL_N | 361 |
| 4. Illustrations of Proofs in Low Rank Examples | 368 |
| References | 388 |
| | |
| M. STRAUCH — <i>On the Jacquet-Langlands correspondence in the cohomology of the Lubin-Tate deformation tower</i> | 391 |
| 1. Introduction | 392 |
| 2. Deformation spaces and their cohomology groups | 394 |
| 3. The approach via a Lefschetz trace formula | 400 |
| 4. Fixed points and the period morphism | 404 |
| References | 408 |

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Questions about slopes of modular forms

KEVIN BUZZARD 1

Nous formulons une conjecture prédisant, dans de nombreux cas, les valuations p -adiques exactes des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p agissant sur les espaces de formes modulaires classiques. Cette conjecture a des conséquences très concrètes sur la théorie classique, mais elle suggère aussi de nombreuses symétries inexplicées concernant les courbes de Coleman-Mazur.

The Local Langlands correspondence : Notes of (half) a course at the IHP Spring 2000

MICHAEL HARRIS 17

L'article contient une description assez complète des principaux résultats du livre de l'auteur avec Richard Taylor, qui décrit les représentations galoisiennes réalisées dans la cohomologie de certaines variétés de Shimura associées aux groupes unitaires, et qui obtient la conjecture locale de Langlands pour $GL(n)$ d'un corps p -adique comme conséquence. Les principales étapes de la démonstration de la conjecture locale de Langlands y sont présentées, parfois simplifiées. Le gros de l'article concerne la géométrie de la variété de Shimura aux places de mauvaise réduction, où l'on dispose néanmoins de bons modèles locaux, et la description des points dans la fibre spéciale à la manière de Langlands et Kottwitz. La dernière section de l'article décrit les extensions éventuelles de ces résultats aux variétés de Shimura plus générales, ainsi qu'un compte rendu des travaux de Laurent Fargues sur ces questions.

p -Adic automorphic forms on reductive groups

HARUZO HIDA 147

Nous démontrons le contrôle vertical pour les formes automorphes ordinaires p -adiques et l'irréductibilité de la tour d'Igusa pour les variétés de Shimura symplectique et unitaire.

Newton polygons and p -divisible groups : a conjecture by Grothendieck

FRANS OORT 255

En 1970 Grothendieck a formulé une conjecture concernant les déformations de groupes p -divisibles (groupes de Barsotti-Tate). Nous décrivons une

démonstration de cette conjecture. Cela donne une information sur des strates définies par le polygone de Newton dans les espaces de modules des variétés abéliennes en caractéristique positive.

A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties

MICHAEL RAPOPORT 271

Cet article est un survol de résultats sur la réduction des variétés de Shimura à structure de niveau parahorique.

\mathcal{L} -modules and the Conjecture of Rapoport and Goresky-MacPherson

LESLIE SAPER 319

Considérons les groupes de cohomologie d'intersection (de perversité intermédiaire) de diverses compactifications d'un espace localement hermitien symétrique. Rapoport et, indépendamment, Goresky et MacPherson ont conjecturé que ces groupes coïncident pour la compactification de Borel-Serre réductive et la compactification de Baily-Borel-Satake. Cet article décrit la théorie des \mathcal{L} -modules et la façon dont elle peut s'employer pour résoudre la conjecture. Plus généralement, nous traitons une compactification de Satake pour laquelle toutes les composantes réelles à la frontière sont de « rang égal ». Les détails en seront disponibles ailleurs [26]. Comme application supplémentaire de la théorie des \mathcal{L} -modules, nous prouvons un théorème d'annulation sur le groupe de cohomologie ordinaire d'un espace localement symétrique. Ceci répond à une question soulevée par Tilouine.

On Langlands functoriality from classical groups to GL_n

DAVID SOUDRY 335

Cet article est une exposition de la méthode de descente de Ginzburg, Rallis et Soudry. Cette méthode construit, pour une représentation irréductible, automorphe et cuspidale τ telle que $\tau = \tau^*$, une représentation irréductible, automorphe, cuspidale et générique $\sigma(\tau)$ d'un groupe classique quasi-déployé G (qui dépend de GL_n et τ), telle que τ corresponde à $\sigma(\tau)$ par la correspondance fonctorielle faible (« weak lifting »). Cette construction est valable aussi pour toutes les représentations de $GL_n(\mathbb{A})$ qui appartiennent à la partie dite « tempérée » de l'image de la correspondance fonctorielle de Langlands de G à GL_n .

On the Jacquet-Langlands correspondence in the cohomology of the Lubin-Tate deformation tower

MATTHIAS STRAUCH 391

Soient F un corps local non-archimédien et \mathbb{X} un \mathfrak{o}_F -module formel de hauteur n sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Les schémas de déformations de \mathbb{X} munies de structures de niveau de Drinfeld fournissent un système projectif d'espaces analytiques rigides $(M_K)_K$, où K parcourt l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts de $G = GL_n(F)$. La limite inductive H_c^* des espaces $H_c^*(M_K \otimes \overline{F}^\wedge, \mathbb{Q}_\ell)$ ($\ell \neq p$)

constitue une représentation virtuelle lisse du groupe $G \times B^\times$, B étant une algèbre à division sur F d'invariant $1/n$. Si π est une représentation supercuspidale de G , les travaux de Boyer et Harris-Taylor impliquent que dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de B^\times on a la relation $\text{Hom}_G(H_c^*, \pi) = n \cdot (-1)^{n-1} \mathcal{JL}(\pi)$, \mathcal{JL} désignant la correspondance de Jacquet-Langlands. Dans cet article nous proposons une approche de ce résultat fondé sur une formule des traces à la Lefschetz conjecturale, et nous calculons la contribution venant des points fixes.

ABSTRACTS

Questions about slopes of modular forms

KEVIN BUZZARD 1

We formulate a conjecture which predicts, in many cases, the precise p -adic valuations of the eigenvalues of the Hecke operator T_p acting on spaces of classical modular forms. The conjecture has very concrete consequences in the classical theory, but can also be thought of as saying that there is a lot of unexplained symmetry in many of the Coleman-Mazur eigencurves.

The Local Langlands correspondence : Notes of (half) a course at the IHP Spring 2000

MICHAEL HARRIS 17

The article provides a reasonably self-contained account of the main results of the author's book with Richard Taylor, containing a description of the Galois representations obtained in the cohomology of certain Shimura varieties attached to unitary groups, and obtaining the local Langlands conjecture for $GL(n)$ of p -adic fields as a consequence. The main steps in the proof of the local Langlands conjecture are presented, and in some cases simplified. The bulk of the paper concerns the geometry of the Shimura variety at places of bad reduction, where good local models are nevertheless available, and the description of points in the special fiber in the manner of Langlands and Kottwitz. The article concludes with a section describing possible extensions of these results to other Shimura varieties, and an account of some of the work of Laurent Fargues along those lines.

p -Adic automorphic forms on reductive groups

HARUZO HIDA 147

In these lecture notes, we will prove vertical control theorems for ordinary p -adic automorphic forms and irreducibility of the Igusa tower over unitary and symplectic Shimura varieties.

| | |
|---|-----|
| <i>Newton polygons and p-divisible groups : a conjecture by Grothendieck</i> | |
| FRANS OORT | 255 |

In my talk in 2000 I discussed a conjecture in 1970 by Grothendieck concerning deformations of p -divisible groups; a proof of this conjecture give access to finding properties of Newton polygon strata in the moduli spaces of polarized abelian varieties in positive characteristic.

| | |
|--|-----|
| <i>A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties</i> | |
| MICHAEL RAPOPORT | 271 |

This is a survey of recent work on the reduction of Shimura varieties with parahoric level structures.

| | |
|---|-----|
| <i>\mathcal{L}-modules and the Conjecture of Rapoport and Goresky-MacPherson</i> | |
| LESLIE SAPER | 319 |

Consider the middle perversity intersection cohomology groups of various compactifications of a Hermitian locally symmetric space. Rapoport and independently Goresky and MacPherson have conjectured that these groups coincide for the reductive Borel-Serre compactification and the Baily-Borel-Satake compactification. This paper describes the theory of \mathcal{L} -modules and how it is used to solve the conjecture. More generally we consider a Satake compactification for which all real boundary components are equal-rank. Details will be given elsewhere [26]. As another application of \mathcal{L} -modules, we prove a vanishing theorem for the ordinary cohomology of a locally symmetric space. This answers a question raised by Tilouine.

| | |
|--|-----|
| <i>On Langlands functoriality from classical groups to GL_n</i> | |
| DAVID SOUDRY | 335 |

This article is a survey of the descent method of Ginzburg, Rallis and Soudry. This method constructs, for an irreducible, automorphic, cuspidal, self-conjugate representation τ on $GL_n(\mathbb{A})$, an irreducible, automorphic, cuspidal, generic representation $\sigma(\tau)$, on a corresponding quasi-split classical group G , which lifts weakly to τ . This construction works well also for all representations of $GL_n(\mathbb{A})$, which are in the so called “tempered” part of the expected image of Langlands functorial lift from G to GL_n .

| | |
|--|-----|
| <i>On the Jacquet-Langlands correspondence in the cohomology of the Lubin-Tate deformation tower</i> | |
| MATTHIAS STRAUCH | 391 |

Let F be a local non-archimedean field, and let \mathbb{X} be a one-dimensional formal \mathfrak{o}_F -module over $\overline{\mathbb{F}}_p$ of height n . The formal deformation schemes of \mathbb{X} with Drinfeld level structures give rise to a projective system of rigid-analytic spaces $(M_K)_K$, where K runs through the compact-open subgroups of $G = GL_n(F)$. On the inductive limit H_c^* of the spaces $H_c^*(M_K \otimes \overline{F}^\wedge, \mathbb{Q}_\ell)$ ($\ell \neq p$)

there is a smooth action of $G \times B^\times$, B being a central division algebra over F with invariant $1/n$. For a supercuspidal representation π of G it follows from the work of Boyer resp. Harris-Taylor that in the Grothendieck group of admissible representations of B^\times one has $\text{Hom}_G(H_c^*, \pi) = n \cdot (-1)^{n-1} \mathcal{JL}(\pi)$, \mathcal{JL} denoting the Jacquet-Langlands correspondence. In this paper we propose an approach that is based on a conjectural Lefschetz trace formula for rigid-analytic spaces, and we calculate the contribution coming from the fixed points.

PRÉFACE

Un semestre spécial consacré aux formes automorphes sous leurs différents aspects (analyse harmonique, théorie des représentations, géométrie algébrique et arithmétique) s'est déroulé du 17 février au 11 juillet 2000, dans le cadre du centre Émile Borel à Paris dans les locaux de l'Institut Henri Poincaré.

Les principaux thèmes abordés ont été :

- la décomposition spectrale de l'espace des formes automorphes, la formule des traces globale, la fonctorialité de Langlands
- la réalisation géométrique des correspondances de Langlands locales et globales pour $GL(n)$ y compris pour des représentations galoisiennes modulo ℓ , l'étude de la cohomologie de certaines variétés de Shimura et de leurs modèles locaux,
 - les congruences entre formes modulaires, les familles p -adiques de telles formes, leurs représentations galoisiennes et leurs fonctions L p -adiques,
 - les fonctions L automorphes, la théorie réciproque de Hecke et ses applications à la fonctorialité de Langlands,
 - l'analyse harmonique et la théorie des représentations des groupes p -adiques.

Les activités ont été organisées autour de douze cours, d'un séminaire hebdomadaire comptant un ou deux exposés, et de trois mini-colloques.

a) Les titres des cours étaient les suivants :

- L. Clozel (Paris 11) : Lemme fondamental et comptage des points sur les variétés de Shimura,
- M. Harris (Paris 7), G. Henniart (Paris 11) : Correspondance de Langlands locale,
- H. Hida (UCLA) : Formes modulaires p -adiques,
- J.-P. Labesse (Paris 7), C. Mœglin (Paris 7) : Spectre des formes automorphes et formule des traces,
- L. Lafforgue (CNRS et IHES) : Correspondance de Langlands globale pour $GL(n)$ sur les corps de fonctions,
- M. Rapoport (Bonn U.) : Sur la réduction modulo p des variétés de Shimura,
- J. Rogawski (UCLA) : Formule des traces relatives,

- D. Soudry (Tel Aviv) : On Langlands functoriality from classical groups to $GL(n)$,
 - G. Stevens (Boston U.) : p -adic families of modular forms with positive slopes,
 - R. Taylor (Harvard U.) : On Artin conjecture for odd icosahedral degree two Artin representations,
 - J. Tilouine (Paris 13), E. Urban (Paris 13 et Columbia) : Représentations galoisiennes et familles de Hida pour les groupes symplectiques,
 - M.-F. Vignéras (Paris 7) : Correspondance de Langlands modulo ℓ .
- b) Les titres des mini-colloques étaient :
- *Variétés de Shimura et arithmétique des formes automorphes* du 25 au 29 avril.
 - *Aspects géométriques des formes automorphes*, (Journées Solstice d'Été) du 19 au 24 juin,

celui du mini-colloque était :

- *Analyse harmonique et représentations des groupes p -adiques*, le 16 juin.

Les organisateurs ont demandé aux orateurs de rédiger des textes portant sur leur cours, exposé ou sur des sujets voisins et tiennent à remercier les auteurs qui ont accepté de le faire, pour leur contribution d'abord, mais aussi pour leur patience ; nous espérons qu'ils voudront bien nous excuser du retard avec lequel ces volumes paraissent.

Les articles ont été examinés par des rapporteurs que nous remercions pour leur aide aussi désintéressée qu'utile. Nous tenons à exprimer la reconnaissance des organisateurs et, nous l'espérons, des participants, pour l'atmosphère cordiale dans laquelle s'est déroulé le semestre. Y ont contribué par leur énergie et leur compétence :

- les directeurs successifs de l'Institut Henri Poincaré et leur équipe : Joseph Oesterlé qui nous a conseillé et aidé pendant la phase préparatoire, et Michel Broué, nouveau directeur au moment de la conférence proprement dite qui a toujours réagi avec célérité et efficacité aux divers problèmes que nous lui posions.

- tout le personnel de l'Institut Henri Poincaré, en particulier Mme Nocton, bibliothécaire, qui a accepté d'accroître les heures d'ouverture de la bibliothèque pour faciliter le travail des mathématiciens visitant l'Institut pendant la durée du semestre.

Enfin, deux mentions spéciales reviennent à Monique Douchez, secrétaire de l'équipe Formes Automorphes de l'Université de Paris 7, pour un travail d'organisation considérable effectué avec bonne humeur et diligence, et à la secrétaire du Centre E. Borel, Annie Touchant, qui a assuré avec une gentillesse et une amabilité indéfectibles la gestion quotidienne des problèmes administratifs et matériels qui se posaient aux très nombreux participants.

Les organisateurs