

Astérisque

DOMINIQUE CERVEAU

**Travaux de J.-P. Ramis sur les équations
différentielles non linéaires**

Astérisque, tome 296 (2004), p. 21-31

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__296__21_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__296__21_0)

© Société mathématique de France, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE J.-P. RAMIS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES

par

Dominique Cerveau

À Jean et Jean-Pierre

Résumé. — On survole trois articles de J.-P. Ramis traitant de phénomènes non linéaires.

Abstract (Works of J.-P. Ramis on non-linear differential equations). — About three papers of J.-P. Ramis related to non linear phenomena.

Ce texte retrace à peu près mot pour mot ma conférence en l'honneur de Jean-Pierre... les plaisanteries (on ne cherchait pas... Hortense... mais Marta) et l'émotion en moins, car nous pensions tous à Jean, enfin tous ceux qui l'ont connu. J'ai choisi délibérément de ne pas parler de tous les travaux de Jean-Pierre concernant le non-linéaire, mais d'en extraire trois thèmes qui, j'espère ne pas me tromper, lui sont chers... L'exposé est plutôt d'aspect informel, plutôt destiné aux étudiants..., pas toujours très précis, mais on pourra consulter les vrais articles, bien sûr...

C'était la fête de Jean-Pierre, alors j'ai oublié beaucoup de monde de par mes choix... ils m'en excuseront.

1. Systèmes hamiltoniens (Morales-Ramis)

Dans cette partie, il m'arrive de plagier le remarquable Bourbaki de Michèle Audin sur le sujet (Sém. Bourbaki, Exp. n° 884, mars 2001)... elle ne m'en voudra pas non plus.

On se donne une variété complexe M de dimension $2n$ munie d'une forme symplectique disons méromorphe. Le corps $\mathcal{M}(M)$ des fonctions méromorphes sur M se

Classification mathématique par sujets (2000). — Primary 34A34; Secondary 34Mxx.

Mots clefs. — Systèmes hamiltoniens, théorie de Galois différentielle, feuilletages holomorphes, perturbations singulières.

laisse munir du crochet de Poisson $\{, \}$ hérité naturellement du crochet de Lie sur les champs via la correspondance

$$\text{fonction (ou hamiltonien)} \quad H \longleftrightarrow \text{champ hamiltonien } X_H$$

définie par la formule

$$dH = i_{X_H} \omega.$$

L'exemple le plus simple est $M = \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ muni des coordonnées (x, y) avec $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$. Bien sûr, on a

$$X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et l'équation qui détermine le flot de X_H n'est autre que celle de Hamilton.

Le premier exemple cette fois explicite que l'on peut donner est celui correspondant à la description des petits mouvements autour d'une position d'équilibre ; ici

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + \sum \lambda_i x_i^2$$

le premier terme correspondant à l'énergie cinétique (comme toujours $m = 1!$), le second la troncature de l'énergie potentielle en un point critique. On a

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(2\lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n X_{H_i}$$

avec $H_i = y_i^2 + 2\lambda_i x_i^2$; comme les X_{H_i} commutent (les variables sont indépendantes) bien sûr $\{H_i, H_j\} = 0$. On découvre ainsi n -intégrales premières de X_H : $X_H(H_i) = 0$, en involution (c'est la condition de commutation) et indépendantes, aux points génériques, au sens du calcul différentiel. Il se trouve, et c'est un exercice, que n est le maximum d'intégrales premières comme ci-dessus que l'on puisse espérer.

On dit qu'un système hamiltonien (*i.e.* la donnée de H ou de X_H) est intégrable si l'on peut trouver n -intégrales premières indépendantes H_i et en involution ; suivant le contexte les H_i sont holomorphes, ici méromorphes souvent au voisinage d'une trajectoire particulière ; en réel, *i.e.* lorsque M est une variété réelle on demande aux H_i d'être C^∞ ou analytiques réelles. Justement en réel, lorsque M est compacte, si X_H est intégrable les X_{H_i} sont complets et produisent une action de $\mathbb{R}^n$ sur M . Les orbites génériques de cette action sont des tores $\mathbb{T}^n$ sur lesquels le flot X_H est équivalent à un flot linéaire, c'est le théorème d'Arnold-Liouville. Bien sûr, en complexe, on perdra ce caractère de complétude dans le cas où M est non compacte ou bien lorsque les X_{H_i} sont méromorphes, mais on comprend bien l'enjeu.

Expérimentalement, l'intégrabilité est rare et en tout cas difficile à prouver. Les travaux de Morales-Ramis à la suite de ceux de Ziglin produisent des critères effectifs et efficaces de non intégrabilité. Pour comprendre cela il faut rappeler ce qu'est l'équation aux variations le long d'une solution particulière, concept qui remonte au

moins à Poincaré. Soit Γ une trajectoire de X_H paramétrée localement par le flot $t \rightsquigarrow x(t)$, *i.e.*

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)).$$

Si Y est un champ de vecteurs (local) commutant à $X = X_H$, l'écriture explicite de la commutation avec des notations évidentes donne le long de Γ :

$$0 = \sum_1 \left(\sum_k X_k(x(t)) \frac{\partial Y_i}{\partial x_k}(x(t)) - Y_k(x(t)) \frac{\partial X_i}{\partial x_k}(x(t)) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On reconnaît immédiatement que

$$\frac{\partial}{\partial t}(Y_i(x(t))) - \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k}(x(t)) \cdot Y_k(x(t)) = 0.$$

Ainsi les composantes $Y_1, \dots, Y_n$ de Y le long de Γ sont solutions de l'équation linéaire, dite équation variationnelle,

$$(E.V.) \quad \dot{y}(t) = \frac{\partial X}{\partial x}(x(t)) \cdot y(t).$$

Bien sûr, ceci est écrit en coordonnées locales, mais les spécialistes diront que l'on définit ainsi et cette fois globalement une connexion linéaire sur le fibré i^*TM où i est l'inclusion de Γ dans M . Evidemment l'intégrabilité de X_H , qui se traduit en termes de champs commutants, va donner des propriétés spéciales à $(E.V.)$. N'oublions pas que, comme X_H est méromorphe, $(E.V.)$ peut présenter en certains points de Γ des singularités régulières ou non, c'est en fait le piment de l'histoire. Voici un certain nombre de faits, certains élémentaires qui vont de façon naturelle nous emmener au résultat.

Fait 1. Si f est intégrale première de X_H et Γ une trajectoire de X_H (le long de laquelle X_H n'est pas complètement singulier), alors la partie initiale de f le long de Γ :

$$\text{In}_\Gamma f : i^*TM \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui localement s'écrit :

$$Y = (y_1, \dots, y_{2n}) \rightsquigarrow \text{In}_\Gamma f(y_1, \dots, y_{2n})$$

est intégrale première de $(E.V.)$. Si f est holomorphe ; $\text{In}_\Gamma f$ est essentiellement le premier jet non nul de f le long de Γ et si $f = P/Q$ est méromorphe $\text{In}_\Gamma f = \text{In}_\Gamma P / \text{In}_\Gamma Q$.

Fait 2. — Ce fait est dû à Ziglin dans le cas méromorphe et — comme l'a signalé Alain Chenciner — est connu de Poincaré dans le cas holomorphe. Il dit que si $f_1, \dots, f_m$ sont des fonctions méromorphes indépendantes à l'origine de $\mathbb{C}^n$ (*i.e.* si $df_1 \wedge \dots \wedge df_m \neq 0$) alors, il existe des polynômes $P_i \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_i]$ tels que les $F_i = P_i(f_1, \dots, f_i)$ aient leurs parties initiales $\text{In}_0 F_i$ indépendantes.

Fait 3. — Il relie le linéaire au non-linéaire, mais, on l'avait deviné dès le discours sur $(E.V.)$, le groupe de Galois $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$ de l'équation linéaire $(E.V.)$ laisse invariantes les parties initiales $\text{In}_\Gamma F$ des intégrales premières F de X_H (définies au voisinage de Γ).

Fait 4. — qui provient naturellement de la nature symplectique du problème : le groupe $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$ s'identifie à un sous-groupe du groupe symplectique $\text{Sp}(T_{x_0}M)$, $x_0 \in \Gamma$ point de base générique.

Fait 5. — Si $g_1, \dots, g_n$ sont des fonctions indépendantes (locales sur $\mathbb{C}^{2n}$) et en involution (relativement au crochet de Poisson standard) et si de plus les g_i sont annulées par les éléments d'une sous-algèbre de Lie $\mathcal{L} \subset \mathfrak{sp}(n)$, alors $\mathcal{L}$ est abélienne (on voit ici les éléments de $\mathcal{L}$ comme des dérivations).

Ces cinq faits donnent grosso modo l'idée du théorème de Ramis-Morales (de l'un des...).

Théorème 1. — *Soit $H \in \mathcal{M}(M)$; si X_H est intégrable le long de Γ , courbe intégrale non stationnaire, alors $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$ est virtuellement abélien (i.e. la composante neutre du groupe algébrique $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$ est abélienne).*

C'est évidemment le fait 5 qui se passe au niveau des algèbres qui introduit le virtuellement.

Dans le cas où $(E.V.)$ est de type Fuchs (penser à Γ comme une courbe rationnelle) le groupe de $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$ est l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie de $(E.V.)$; on retrouve donc dans ce cas un résultat de Ziglin. Mais le critère est beaucoup plus fort ; on peut avoir par exemple $\Gamma \cong \mathbb{CP}(1)$ et $(E.V.)$ avec un seul point singulier, irrégulier. Alors la monodromie est bien sûr triviale, alors que $\text{Gal}_\Gamma(E.V.)$ peut être énorme du fait de la complexité de l'irrégularité : intervention des phénomènes de Stokes, du tore exponentiel (cf. l'exposé de Daniel Bertrand). D'autre part, ce critère se prête bien au calcul effectif, ce qui n'est pas pour déplaire à Jean-Pierre. J'oubliais de mentionner que de nombreux exemples explicites sont maintenant traités (cf. Bourbaki de M. Audin pour une bibliographie et les articles originaux), à la fois par Morales et Ramis et d'autres auteurs.

2. Perturbations singulières

Dans cette partie je m'appuie sur l'un des travaux en collaboration avec R. Schäfke de Strasbourg. Il y a beaucoup d'autres articles concernant ce thème... mais comme non spécialiste j'ai choisi de présenter celui qui m'a posé... le moins de difficultés, en espérant, et je pense ne pas trop me tromper, qu'il s'agit bien là de l'un des articles importants.

Poincaré voit les sources de divergence dans les problèmes d'équations différentielles tantôt venant de la présence de « petits diviseurs » (intégration) tantôt de celle de

« grands multiplicateurs » (différentiation). C'est sans doute dans cette seconde philosophie qu'il faut rattacher les travaux de Jean-Pierre. D'ailleurs, l'une des philosophies de Jean-Pierre dans les problèmes de « normalisations » et de « perturbations » est sans doute ce lien diffus que je vais tenter d'expliquer entre « les phénomènes de divergence avec estimations Gevrey » et ce que l'on a coutume d'appeler les « corrections exponentiellement petites ».

Nous allons nous placer dans le cadre des systèmes lents-rapides. De quoi s'agit-il ? On considère une équation différentielle, finalement ordinaire,

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = \varepsilon g(u, x, \varepsilon) \\ \dot{u} = f(u, x, \varepsilon) \end{cases}$$

où ε est un petit paramètre (que l'on pourrait appeler $\hbar$ dans d'autres contextes), mais qui a un rôle particulier. On s'autorise des changements de variables, mais surtout on ne touche pas à ε ... Sans trop être précis disons que f et g sont analytiques réelles et que u et v sont des variables vectorielles. On devine que x s'appelle variable lente et u variable rapide, il suffit de contempler l'équation. Dans cet article les auteurs présentent un cas spécial, et je vais faire comme eux, très lié à la mécanique : précisément,

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = \varepsilon F(u, \varphi, \varepsilon) \\ \dot{\varphi} = \omega(x) + \varepsilon G(x, \varphi, \varepsilon) \end{cases}$$

La notation φ indique qu'il s'agit d'une variable angulaire, $\varphi \in \mathbb{R}^m / 2\pi\mathbb{Z}^m$, les F et G sont analytiques et périodiques en φ . Il s'agit donc d'une petite perturbation du système $\dot{\varphi} = \omega(x)$.

Ce que l'on voudrait faire c'est en quelque sorte découpler le système, *i.e.* par un changement de variable ad-hoc, enlever l'intervention de la variable rapide dans l'équation du mouvement perturbé. On veut trouver une « transformation », contentons-nous pour l'instant de l'appeler « raisonnable » qui conjugue le système perturbé à un nouveau système... lui-même raisonnable

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{y} = \varepsilon \tilde{F}(y, \varepsilon) \\ \dot{\psi} = \omega(y) + \varepsilon \tilde{G}(y, \varepsilon) \end{cases}$$

que je présente donc dans le cas spécial, sans trop préciser pour l'instant qui sont les $\tilde{F}$, $\tilde{G}$.

Il se trouve que l'on peut fabriquer un changement de coordonnées formel en ε , noté $\tilde{T}$ qui transforme le système perturbé en (3) avec $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ formels en ε . Plus précisément, $\tilde{T}$ est du type suivant :

$$\begin{aligned} x &= y + \varepsilon U_1(y, \psi) + \varepsilon^2 U_2(y, \psi) + \dots \\ \varphi &= \psi + \varepsilon V_1(y, \psi) + \varepsilon^2 V_2(y, \psi) + \dots \end{aligned}$$

où les U_i, V_i sont analytiques sur un domaine commun et périodiques en la variable angulaire. Ce changement de coordonnées n'est pas unique mais il le devient si l'on convient de normaliser les U_i, V_i par $U_n(y, 0) = V_n(y, 0)$; modulo cette convention on obtient le très joli

Théorème 2. — $\tilde{T}$ et les $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ correspondants sont 1-Gevrey en la variable ε .

On voit donc apparaître les phénomènes de divergence avec estimations Gevrey. Pour les relier aux « corrections exponentiellement petites » mentionnons un résultat essentiel de Neishtadt, que les auteurs redémontrent en substituant à la technique de « sommation au plus petit terme » une technique de transformation de « Laplace incomplète » ajoutée à des estimations de type Gevrey. L'énoncé dit que si dans l'équation (2) on a une minoration $|\omega(x)| > c > 0$ alors le système se réduit à

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{y} = \varepsilon \bar{F}(y, \varepsilon) + \alpha(y, \varphi, \varepsilon) \\ \dot{\varphi} = \omega(x) + \varepsilon \bar{G}(y, \varepsilon) + \beta(y, \varphi, \varepsilon) \end{cases}$$

où les α et β satisfont à

$$|\alpha| + |\beta| < C e^{-\rho/|\varepsilon|}.$$

Si on néglige α et β on a la normalisation souhaitée. Il se trouve que la transformation T qui réduit le système (2) à (4) ainsi que les $\bar{F}$ et $\bar{G}$ sont des « réalisations » analytiques des transformations formelles initiales $\tilde{T}, \tilde{F}$ et $\tilde{G}$ précédentes (on pense à une incarnation sur des secteurs complexes contenant les axes réels).

Ce travail en connexion avec les résultats de D. Sauzin, P. Lochack, etc. a de nombreuses applications : systèmes hamiltoniens, invariants adiabatiques, etc. Il a été généralisé et précisé par Jean-Pierre et d'autres collaborateurs.

3. Feuilletages holomorphes

Il s'agit de présenter en particulier deux travaux remarquables de Jean-Pierre et Jean Martinet sur les singularités résonnantes et les « nœuds-cols ». C'est là où je suis censé être le plus compétent; c'est là où j'ai le plus de mal. Comme je l'ai dit, tout le monde dans la salle pense à Jean, ceux qui l'ont connu en tout cas et puis c'est techniquement difficile.

Commençons par un état des lieux dans les années 75. Bien qu'une spécialité de l'école française au XIX^e et au début du XX^e les équations différentielles holomorphes sont un peu délaissées, sans doute du fait de l'activité intense sur les feuilletages ordinaires réels. Bien sûr, on connaît les théorèmes de Poincaré (que j'énonce en dimension 2); si

$$\omega = adx_1 + bdx_2 = \lambda_1 x_1 dx_2 + \lambda_2 x_2 dx_1 + \text{h.o.t}$$

est une 1-forme holomorphe et si le quotient λ_1/λ_2 n'est pas dans l'ensemble $\mathbb{R}_{>0} \cup \{-2, -3, \dots\} \cup \{-1/2, -1/3, \dots\}$ alors le feuilletage associé $\mathcal{F}_\omega$ est linéarisable

holomorphiquement, en fait ω elle-même l'est... Ainsi que le théorème de Poincaré-Dulac. Bien sûr aussi, il y a le magnifique théorème de Siegel complété par Brjuno : lorsque λ_1/λ_2 est irrationnel « loin » de $\mathbb{Q}$ alors ω est linéarisable. Via le théorème de Kupka-Reeb ces énoncés passent en dimension quelconque pour les feuilletages de codimension un, je n'en dirai pas plus. Mille neuf cent soixante quinze c'est à peu près l'époque où Bernard Malgrange publie ses deux Frobenius singuliers : grosso modo petitesse du lieu singulier implique présence d'intégrales premières. À l'IMPA on commence à étudier la topologie des singularités. Jean et Jean-Pierre vont s'intéresser au chaînon manquant, *i.e.* la classification des germes de feuilletages de $\mathbb{C}^2$ en 0 résonnants ($\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q} > 0$) et des nœuds cols $\lambda_1 \neq 0$ (disons égal à 1) et $\lambda_2 = 0$. Ils vont établir une correspondance de type Riemann-Hilbert :

$$\text{Feuilletages} \longleftrightarrow \text{Difféomorphismes}$$

que je vais esquisser très grossièrement.

Il faut avant tout rappeler le théorème de Briot et Bouquet qui produit des courbes lisses invariantes : plus précisément, dans le cas résonnant il y a deux courbes lisses transverses et invariantes, nous les prendrons comme axes de coordonnées x_1, x_2 , et dans le cas nœud col il y a toujours deux courbes comme ci-dessus mais l'une formelle et l'autre convergente : ce sera l'axe des x_1 .

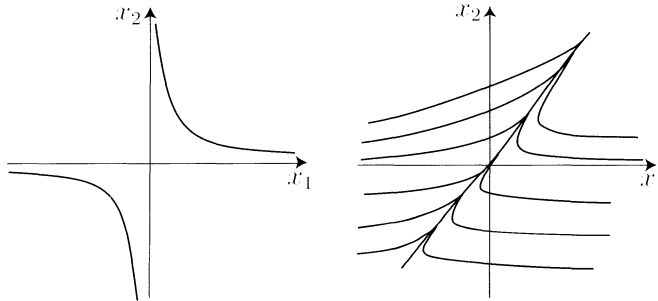


FIGURE 1

Introduisons le concept d'holonomie d'une singularité ayant une courbe lisse invariante (figure 2).

La courbe lisse invariante est ici l'axe des x_1 ; près d'un point m de cet axe et loin de la singularité la feuille $\mathcal{L}_m$ par m est quasi horizontale en m ; si bien que la restriction à $\mathcal{L}_m$ de la projection $p : (x_1, x_2) \rightsquigarrow x_1$ est un revêtement tout du moins près de l'axe des x_1 . On peut donc relever les chemins tracés dans $(x_2 = 0)$ et situés un peu loin de la singularité dans les feuilles $\mathcal{L}_m$ proches de $x_2 = 0$. Plus précisément, supposons notre feuilletage défini dans le polydisque $|x_i| < 2$ et considérons la droite $(1, x_2)$ alors le lacet $\gamma : [0, 1] \ni \theta \rightsquigarrow (e^{2i\pi\theta}, 0)$ se relève en un chemin $\tilde{\gamma}(\theta)$ avec $\tilde{\gamma}(0) = (1, x_2)$, $\tilde{\gamma}(1) = (1, h(x_2))$.

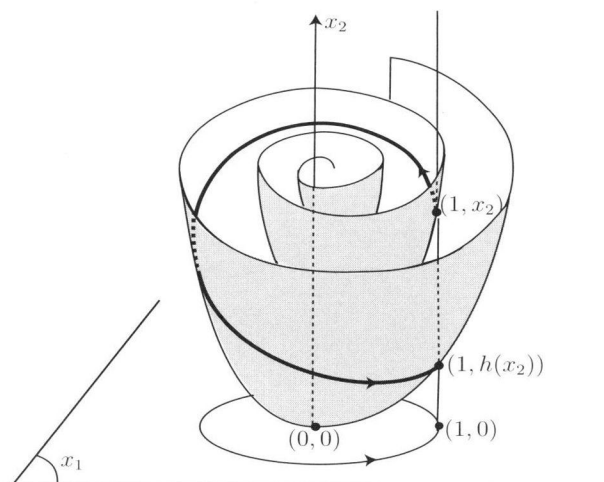


FIGURE 2

L'application $x_2 \rightsquigarrow h(x_2)$ est holomorphe; c'est l'holonomie du lacet γ ou simplement l'holonomie. J.-F. Mattei et R. Moussu ont démontré que deux feuilletages résonnants sont conjugués si et seulement si leurs holonomies le sont. Pour parler de la classification il faut d'abord parler de la classification formelle. Présentons-la lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, c'est plus facile, *i.e.* $\omega = d(x_1 x_2) + \dots$. Bien sûr, on suppose notre feuilletage non linéarisable, ce qui est équivalent à dire qu'il n'a pas d'intégrale première holomorphe. Il y a un difféomorphisme formel $\hat{\phi}$ tel que, à unité multiplicative près, on ait

$$\hat{\phi}^* \omega = \Omega_{k,\lambda} = (x_2 dx_1 + x_1 dx_2) + (x_1 x_2)^k \{(\lambda - 1)x_2 dx_1 + \lambda x_1 dx_2\}.$$

L'entier k et le nombre complexe λ sont les deux invariants formels de notre feuilletage. On remarque que la forme

$$\frac{\Omega_{k,\lambda}}{(x_1 x_2)^k} = -\frac{1}{k} d\left(\frac{1}{(x_1 x_2)^k}\right) + (\lambda - 1) \frac{dx_1}{x_1} + \lambda \frac{dx_2}{x_2}$$

est fermée et l'on constate que la fonction multivaluée $x_1 (x_1 x_2)^{-\lambda} \exp 1/k x_1 x_2$ est intégrale première de $\Omega_{k,\lambda}$. Via cette intégrale première on calcule facilement l'holonomie du modèle formel : $x_2 \rightsquigarrow \tilde{h}(x_2)$ avec

$$\tilde{h} = \exp X_{k,\lambda}$$

où $X_{k,\lambda}$ est le champ de vecteur

$$X_{k,\lambda} = 2i\pi \frac{x_2^{k+1}}{1 + \lambda x_2^k} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

On démontre que l'holonomie h du feuilletage initial est formellement conjuguée à $\tilde{h}$. Lorsque $k = 1$ et $\lambda = 0$ on a

$$\tilde{h} : z \rightsquigarrow \frac{z}{1 + 2i\pi z}$$

qui, dans ce cas, est un automorphisme global de $\mathbb{CP}(1)$. Il laisse invariant la famille des cercles passant par 0 et tangents à l'axe imaginaire (figure 3).

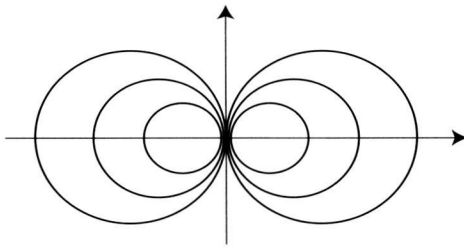


FIGURE 3

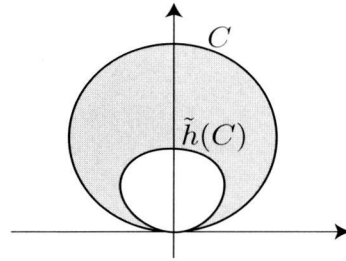


FIGURE 4

Pour décrire l'espace des orbites de cet $\tilde{h}$ on choisit un domaine fondamental compris entre un cercle C tangent à l'axe réel et son image $\tilde{h}(C)$ (figure 4).

Outre l'orbite $\{0\}$ qui est spéciale, toutes les autres passent dans le domaine fondamental; on obtient l'espace des orbites en identifiant C et $\tilde{h}(C)$ par $\tilde{h}$. On obtient une sphère S^2 où l'on identifie pôle nord et pôle sud (figure 5).

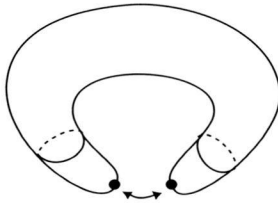


FIGURE 5

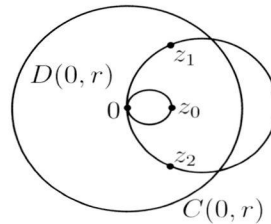


FIGURE 6

Il y a une difficulté à expliquer ce qu'est l'espace des orbites pour un germe. Reprenons l'exemple précédent et dessinons un disque $D(0, r)$ centré en l'origine de bord $C(0, r)$. Disons que l'orbite de z_0 par h dans $D(0, r)$ est cette fois l'ensemble des $\tilde{h}^n(z_0)$ tels que les $\tilde{h}(z_0), \tilde{h}^2(z_0), \dots, \tilde{h}^n(z_0)$ soient dans $D(0, r)$ auxquels on ajoute les $\tilde{h}^{-m}(z_0)$, tels que $\tilde{h}^{-(m-1)}(z_0), \dots, \tilde{h}^{-1}(z_0)$ soient encore dans $D(0, r)$ (figure 6).

On voit que l'orbite relative à $D(0, r)$ du point z_0 est la même que dans le cas global, et que celle des points z_1 et z_2 (situés dans une même orbite globale) diffèrent. Pour repérer les orbites il faut « deux domaines fondamentaux », l'un dessus et l'autre

dessus (figure 7), et une identification (figure 8) qui va dire que certaines orbites passent dans ces deux domaines...

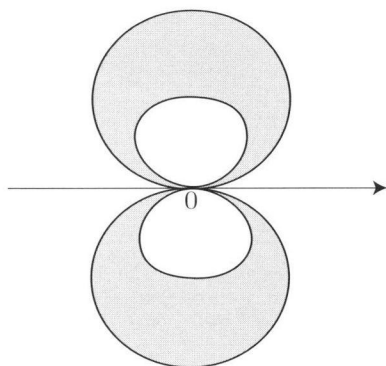


FIGURE 7

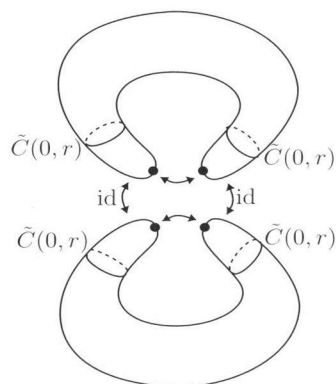


FIGURE 8

où $\tilde{C}(0, r)$ est l'image de $C(0, r)$ après identification... Puis ensuite, il faut faire tendre r vers 0... Etudier les espaces d'orbites des difféomorphismes holomorphes h conjugués formellement à $\tilde{h}$ revient grosso modo à perturber les identifications id précédentes. Ceci se fait via l'analyse Gevrey et la théorie de la sommation. On commence par dessiner, toujours sur notre exemple, un secteur S^+ qui voit le domaine fondamental du haut

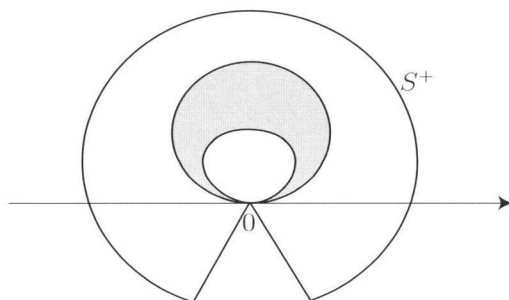


FIGURE 9

et un secteur S^- qui voit le domaine fondamental du bas. Il y a des conjugaisons sectorielles holomorphes φ^+ et φ^- asymptotes à la conjugaison formelle entre h et $\tilde{h}$ qui produisent deux cocycles sur les intersections des secteurs. Essentiellement ces cocycles correspondent aux deux identifications précédentes. En parallèle de cette analyse sur les orbites des difféomorphismes, Martinet et Ramis mènent une analyse similaire pour les espaces de feuilles des feuilletages résonnants. Cette analyse parallèle

leur permet, outre la classification explicite dont je ne parle même pas, le très joli résultat que je donne toujours dans le cas spécial :

Théorème 3. — *L'espace des feuilletages résonnants formellement conjugués à $\Omega_{1,0}$ modulo conjugaison holomorphe s'identifie à l'espace des difféomorphismes formellement conjugués à $x \rightsquigarrow x/(1 + 2i\pi x)$, modulo conjugaison holomorphe.*

Ceci montre que la correspondance d'holonomie dans cette situation est bijective. Ce résultat a été par la suite généralisé au cas hyperbolique, de façon directe par J.-C. Yoccoz et R. Perez Marco.

Le cas des nœuds col est plus subtil ; outre la classification des feuilletages Martinet et Ramis montrent que les holonomies classifient, mais que tous les difféomorphismes (susceptibles de l'être) ne sont pas des holonomies de nœud-col ; ici la correspondance d'holonomie est seulement injective...

Remerciements. — Ils s'adressent à M.-F. Chériaux, M.-A. Paulmier, F. Loray et surtout à M. Loday qui a bien voulu faire les figures.

Références

- [1] J. MARTINET & J.-P. RAMIS — « Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **55** (1982), p. 63–164.
- [2] ———, « Classification analytique des équations différentielles non linéaires du premier ordre », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série* **16** (1983), p. 571–621.
- [3] J. MORALES RUIZ & J.-P. RAMIS — « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems I & II », *Methods Appl. Anal.* **8** (2001), no. 1, p. 33–95 & 97–111.
- [4] J.-P. RAMIS & R. SCHÄFKE — « Gevrey separation of fast and slow variable », *Nonlinearity* **9** (1996), no. 2, p. 353–384.

D. CERVEAU, Université de Rennes, UFR de mathématiques, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes (France) • E-mail : dominique.cerveau@univ-rennes1.fr