

Astérisque

Cohomologie p -adiques et applications arithmétiques (III) - Pages préliminaires

Astérisque, tome 295 (2004), p. I-XIV

http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__295__R1_0

© Société mathématique de France, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ASTÉRISQUE 295

**COHOMOLOGIES p -ADIQUES ET
APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (III)**

édité par

**Pierre Berthelot
Jean-Marc Fontaine
Luc Illusie
Kazuya Kato
Michael Rapoport**

Société Mathématique de France 2004

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

P. Berthelot

IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.

E-mail : Pierre.Berthelot@univ-rennes1.fr

Url : <http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo/>

J.-M. Fontaine

Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.

E-mail : fontaine@math.u-psud.fr

L. Illusie

Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.

E-mail : illusie@math.u-psud.fr

K. Kato

Department of mathematics, faculty of science, Kyoto university, Kyoto, 606-8502, Japon.

E-mail : kazuya@kum.kyoto-u.ac.jp

M. Rapoport

Universität zu Köln, Mathematisches Institut, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Allemagne.

E-mail : rapoport@math.uni-koeln.de

Url : <http://www.mi.uni-koeln.de>

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F11, 11F67, 11F80, 11F85, 11G05, 11G16, 11G40, 11R33, 11R39, 11R56, 11S15, 11S20, 11S25, 11S80, 11S99, 14F30, 14F40, 14F42, 14G10, 14G35, 14G40, 22E50.

Mots clefs. — Corps locaux, périodes p -adiques, représentations galoisiennes, forme modulaire, système d'Euler, groupe de Selmer, loi de réciprocité, fonction zêta p -adique, courbe elliptique, espace symétrique p -adique, transformée intégrale, résidu, représentation p -adique.

**COHOMOLOGIES p -ADIQUES ET
APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (III)**

édité par Pierre Berthelot, Jean-Marc Fontaine, Luc Illusie,
Kazuya Kato, Michael Rapoport

Résumé. — Ce volume est le dernier d'une série de trois consacrés aux méthodes p -adiques en géométrie arithmétique. Il traite de questions de nature arithmétique : représentations galoisiennes, fonctions L p -adiques de formes modulaires, théorie d'Iwasawa des formes modulaires.

Abstract (p -adic cohomologies and arithmetic applications (III))

This volume is the last of three dealing with p -adic methods in arithmetic geometry. The themes appearing in this volume have an arithmetical flavour: Galois representations, p -adic L -functions of modular forms, Iwasawa theory of modular forms.

TABLE DES MATIÈRES

Résumés des articles	ix
Abstracts	xi
Introduction	xiii
J.-M. FONTAINE — <i>Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques</i> ..	1
0. Introduction	2
1. Le corps C et sa cohomologie continue	10
1.1. Cohomologie continue	10
1.2. La cohomologie de C et des $GL_h(C)$	11
1.3. Différentes, groupes de ramification et extensions presque-étales	12
1.4. Calcul de la cohomologie de $\text{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$	18
1.5. Calcul de la cohomologie de $\text{Gal}(K_\infty/K)$	19
2. C -représentations : la théorie de Sen	25
2.1. C , L et K_∞ -représentations	25
2.2. Étude des K_∞ -représentations	28
2.3. Le point de vue de Colmez	32
2.4. Quelques rappels sur les groupe pro-algébriques commutatifs	34
2.5. Le point de vue algébrique	36
2.6. Classification des C -représentations	38
2.7. C -représentations presque de Hodge-Tate	44
3. B_{dR} -représentations	45
3.1. Le corps B_{dR} des périodes p -adiques	45
3.2. La topologie de B_{dR}	48
3.3. Étude des B_{dR}^+ -représentations : réduction aux $K_\infty[[t]]$ -représentations ..	51
3.4. Étude des $K_\infty[[t]]$ -représentations	54

3.5. Étude des B_{dR} -représentations : Première approche	58
3.6. Étude des B_{dR} -représentations : deuxième approche	61
3.7. Classification des B_{dR} -représentations	67
3.8. Connexions régulières et représentations de $\mathbb{D}\mathbb{R}$	69
4. Généralités sur les représentations p -adiques	73
4.1. Poids et types d'une représentation	73
4.2. Graduations, ν -graduations, filtrations et ν -filtrations	74
4.3. Applications aux représentations presque de Hodge-Tate	76
4.4. Représentations presque de Hodge-Tate de dimension 1	77
5. Représentations semi-stables et (φ, N) -modules filtrés	79
5.1. Les (φ, N) -modules filtrés	79
5.2. Les anneaux B_{cris} et B_{st}	82
5.3. Représentations semi-stables et (φ, N) -modules filtrés admissibles	83
5.4. L'anneau $BW_{\text{cris}}(R)$	90
5.5. Les anneaux $B^0, B_{\text{st}}^h, B_{\text{st}}^\infty, \dots$	92
5.6. Quelques indications sur la preuve de « faiblement admissible \Rightarrow admissible (th. 5.9) »	100
6. L'action de C perdue et retrouvée	107
6.1. Le résultat	107
6.2. Preuve de la proposition 6.2	108
6.3. Preuve du théorème 6.1	111
Références	113
K. KATO — <i>p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms</i>	117
Introduction	118
Chapter I. Euler systems in K_2 of modular curves and Euler systems in the spaces of modular forms	120
1. Siegel units	121
2. Euler systems in K_2 of modular curves	125
3. Eisenstein series	134
4. Euler systems in the space of modular forms	142
5. Euler systems on $X_1(N) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_m)$	152
6. Projections to eigen cusp forms	160
7. The proofs of the zeta value formulas	163
Chapter II. p -adic Euler systems	179
8. Definitions of p -adic Euler systems	180
9. Relation with Euler systems in the spaces of modular forms	186
10. Generalized explicit reciprocity laws	189
11. Modular forms and B_{dR}	202
Chapter III. Iwasawa theory of modular forms (without p -adic zeta functions)	218
12. The main conjecture, I	219
13. The method of Euler systems	224
14. Finiteness of Selmer groups and Tamagawa number conjectures	234
15. The case of complex multiplication	250

Chapter IV. Iwasawa theory for modular forms (with p -adic zeta functions) .	267
16. The p -adic zeta function	268
17. The main conjecture, II	272
18. p -adic Birch Swinnerton-Dyer conjectures	280
Table of special Notation	284
References	286
 P. SCHNEIDER & J. TEITELBAUM — <i>Correction to “p-adic boundary values”</i> ..	291

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Arithmétique des représentations galoisiennes p -adiques
 JEAN-MARC FONTAINE 1

Soient K un corps p -adique, \overline{K} une clôture algébrique de K , C le complété de \overline{K} pour la topologie p -adique, B_{dR} le corps des périodes p -adiques, $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$. On commence par expliquer les calculs de Sen et Tate sur la cohomologie galoisienne continue de C et de $GL_h(C)$. On donne ensuite une classification, essentiellement due à Sen, des C -représentations de G_K (c'est-à-dire des C -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire et continue de G_K) puis des B_{dR} -représentations de G_K . On applique ceci aux représentations p -adiques de G_K , puis on décrit les principaux faits de la théorie des représentations p -adiques semi-stables. On termine en prouvant que les seuls endomorphismes \mathbb{Q}_p -linéaires continus G_K -équivariants de C sont les homothéties par des éléments de K , puis que, lorsque K est une extension finie de \mathbb{Q}_p , le foncteur d'oubli de la catégorie des C -représentations de G_K dans celle des Banach p -adiques munis d'une action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.

p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms
 KAZUYA KATO 117

Si f est une forme modulaire, nous construisons un système d'Euler attaché à f , ce qui nous permet d'obtenir des bornes pour les groupes de Selmer de f . Une loi de réciprocité explicite permet de relier ce système d'Euler à la fonction zêta p -adique de f , ce qui nous permet d'obtenir un résultat de divisibilité en direction de la conjecture principale pour f ainsi que des minorations pour l'ordre d'annulation de cette fonction zêta p -adique. Dans le cas particulier où f est attachée à une courbe elliptique E définie sur \mathbb{Q} , nous prouvons que la fonction zêta p -adique de E a un zéro en $s = 1$ d'ordre supérieur ou égal au rang du groupe des points rationnels de E .

Correction to “ p -adic boundary values”

PETER SCHNEIDER & JEREMY TEITELBAUM 291

Correction à l'article « p -adic boundary values » paru dans *Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques (I)*, Astérisque **278** (2002), p. 51–125.

ABSTRACTS

Arithmétique des représentations galoisiennes p -adiques
JEAN-MARC FONTAINE 1

Let K be a p -adic field, \overline{K} an algebraic closure of K , C the p -adic completion of \overline{K} , B_{dR} the field of p -adic periods, $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$. We first explain Sen and Tate's computations of the continuous Galois cohomology of C and $GL_h(C)$. We give a classification (mainly due to Sen) of C -representations of G_K (that is of finite dimensional C -vector spaces endowed with a semi-linear and continuous action of G_K). We continue with a classification of B_{dR} -representations of G_K . Then we apply these results to p -adic Galois representations and we review the main facts of the theory of semi-stable Galois representations. We finish by proving that

- a) the only continuous \mathbb{Q}_p -linear endomorphisms of C , commuting with the action of G_K , are multiplications by elements of K ,
- b) the forgetful functor from the category of C -representations of G_K to the category of p -adic Banach spaces equipped with a linear and continuous action of G_K is fully faithful.

p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms
KAZUYA KATO 117

If f is a modular form, we construct an Euler system attached to f from which we deduce bounds for the Selmer groups of f . An explicit reciprocity law links this Euler system to the p -adic zeta function of f which allows us to prove a divisibility statement towards Iwasawa's main conjecture for f and to obtain lower bounds for the order of vanishing of this p -adic zeta function. In particular, if f is associated to an elliptic curve E defined over \mathbb{Q} , we prove that the p -adic zeta function of f has a zero at $s = 1$ of order at least the rank of the group of rational points on E .

<i>Correction to “p-adic boundary values”</i>	
PETER SCHNEIDER & JEREMY TEITELBAUM	291
Correction to the article “ p -adic boundary values” published in <i>Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (I)</i> , Astérisque 278 (2002), p. 51–125.	

INTRODUCTION

Un semestre spécial, consacré aux cohomologies p -adiques et à leurs applications arithmétiques, a eu lieu, du 17 février au 11 juillet 1997, dans le cadre du centre Émile Borel, situé à Paris dans les locaux de l'institut Henri Poincaré.

Les principaux thèmes abordés ont été :

- les théorèmes de comparaison entre différentes cohomologies p -adiques des variétés algébriques sur les corps locaux, les représentations p -adiques du groupe de Galois absolu d'un tel corps,
- les groupes p -divisibles et la théorie de Dieudonné cristalline, la cohomologie des \mathcal{D} -modules arithmétiques, les équations différentielles p -adiques,
- l'uniformisation p -adique, l'étude des espaces symétriques p -adiques, des courbes hyperboliques p -adiques, de la cohomologie des variétés de Shimura,
- la géométrie et la cohomologie logarithmiques,
- les fonctions L p -adiques, leurs relations avec les systèmes d'Euler, en particulier dans le cas des formes modulaires.

Les activités structurées ont consisté en

a) *Douze cours* :

- P. Berthelot (Rennes) : *\mathcal{D} -modules arithmétiques*,
- C. Breuil (CNRS, Orsay) : *Cohomologie log cristalline et cohomologie étale de torsion* (Cours Peccot du Collège de France),
- G. Christol (Paris VI) : *Equations différentielles p -adiques*,
- G. Faltings (MPI, Bonn) : *Almost étale extensions*,
- J.-M. Fontaine (Orsay) : *Arithmétique des représentations galoisiennes p -adiques*,
- L. Illusie (Orsay) et A. Ogus (Berkeley) : *Géométrie logarithmique*,
- K. Kato (Tokyo) : *Euler systems and p -adic L -functions*,
- W. Messing (Minneapolis) : *Topologie et cohomologie syntomiques et log syntomiques*,

- S. Mochizuki (RIMS, Kyoto) : *The Ordinary and Generalized Ordinary Moduli of Hyperbolic Curves*,
- M. Rapoport (Cologne) : *Aspects p -adiques des variétés de Shimura*,
- P. Schneider (Münster) : *Analysis on p -adic symmetric spaces*,
- T. Zink (Bielefeld) : *Cartier theory and its connection to crystalline Dieudonné theory*.

b) *Un séminaire* avec un ou deux exposés chaque semaine.

c) *Deux colloques* :

- *Problèmes de coefficients en cohomologie cristalline et en cohomologie rigide*, du 28 au 30 avril,
- *Arithmétique des fonctions L et méthodes p -adiques*, du 30 juin au 4 juillet.

d) *Un groupe de travail sur le théorème de comparaison de Tsuji*, du 20 au 29 mai.

Les organisateurs ont demandé à tous ceux qui avaient fait un cours de le rédiger ou de nous faire parvenir un texte sur un sujet voisin. Nous avons également invité Takeshi Tsuji à écrire un résumé de sa démonstration, maintenant publiée⁽¹⁾, de la conjecture C_{st} .

Nous tenons à remercier les auteurs non seulement pour leur contribution mais aussi pour leur patience ; nous espérons qu'ils voudront bien nous excuser du retard avec lequel ces volumes paraissent.

Les articles ont été examinés par des rapporteurs que nous remercions pour leur aide aussi désintéressée qu'utile.

Enfin, nous pensons que tous ceux qui ont participé à ce semestre seront d'accord avec nous pour saluer l'atmosphère agréable dans laquelle il s'est déroulé. Nous remercions chaleureusement Joseph Oesterlé, alors directeur du Centre Émile Borel, son équipe et tout le personnel de l'Institut Henri Poincaré pour leur gentillesse, leur compétence, leur efficacité et leur dévouement. Ils se joindront sûrement à nous pour accorder une mention spéciale à Madame Nocton, notre bibliothécaire — tous les mathématiciens qui ont travaillé à Paris la connaissent et savent combien son rôle a été précieux ; et une autre à notre secrétaire — Florence Damay — qui a quitté le Centre Émile Borel juste à la fin de notre semestre ; elle en fut la cheville ouvrière mais aussi le sourire, avec une formidable aptitude à comprendre et résoudre les problèmes extra-mathématiques rencontrés par les très nombreux participants.

Les éditeurs

⁽¹⁾ *p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **137** (1999), 233–411