Astérisque

Cohomologie p-adiques et applications arithmétiques (III) - Pages préliminaires

Astérisque, tome 295 (2004), p. I-XIV
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__295__R1_0>

ASTÉRISQUE 295

COHOMOLOGIES p-ADIQUES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (III)

édité par

Pierre Berthelot

Jean-Marc Fontaine

Luc Illusie

Kazuya Kato

Michael Rapoport

Société Mathématique de France 2004

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

P. Berthelot
IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.
E-mail : `Pierre.Berthelot@univ-rennes1.fr`
Url : `http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo/`

J.-M. Fontaine
Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : `fontaine@math.u-psud.fr`

L. Illusie
Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : `illusie@math.u-psud.fr`

K. Kato
Department of mathematics, faculty of science, Kyoto university, Kyoto, 606-8502, Japon.
E-mail : `kazuya@kusm.kyoto-u.ac.jp`

M. Rapoport
Universität zu Köln, Mathematisches Institut, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Allemagne.
E-mail : `rapoport@math.uni-koeln.de`
Url : `http://www.mi.uni-koeln.de`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F11, 11F67, 11F80, 11F85, 11G05, 11G16, 11G40, 11R33, 11R39, 11R56, 11S15, 11S20, 11S25, 11S80, 11S99, 14F30, 14F40, 14F42, 14G10, 14G35, 14G40, 22E50.

Mots clefs. — Corps locaux, périodes p-adiques, représentations galoisiennes, forme modulaire, système d'Euler, groupe de Selmer, loi de réciprocité, fonction zêta p-adique, courbe elliptique, espace symétrique p-adique, transformée intégrale, résidu, représentation p-adique.

COHOMOLOGIES p-ADIQUES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (III)

édité par Pierre Berthelot, Jean-Marc Fontaine, Luc Illusie, Kazuya Kato, Michael Rapoport

Résumé. — Ce volume est le dernier d'une série de trois consacrés aux méthodes p-adiques en géométrie arithmétique. Il traite de questions de nature arithmétique : représentations galoisiennes, fonctions L p-adiques de formes modulaires, théorie d'Iwasawa des formes modulaires.

***Abstract* (p-adic cohomologies and arithmetic applications (III))**

This volume is the last of three dealing with p-adic methods in arithmetic geometry. The themes appearing in this volume have an arithmetical flavour: Galois representations, p-adic L-functions of modular forms, Iwasawa theory of modular forms.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques

Soient K un corps p-adique, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique, B_{dR} le corps des périodes p-adiques, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On commence par expliquer les calculs de Sen et Tate sur la cohomologie galoisienne continue de C et de $GL_h(C)$. On donne ensuite une classification, essentiellement due à Sen, des *C-représentations de G_K* (c'est-à-dire des C-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire et continue de G_K) puis des *B_{dR}-représentations de G_K*. On applique ceci aux représentations p-adiques de G_K, puis on décrit les principaux faits de la théorie des *représentations p-adiques semi-stables.* On termine en prouvant que les seuls endomorphismes $\mathbb{Q}_p$-linéaires continus G_K-équivariants de C sont les homothéties par des éléments de K, puis que, lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le foncteur d'oubli de la catégorie des C-représentations de G_K dans celle des Banach p-adiques munis d'une action linéaire et continue de G_K est pleinement fidèle.

p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms

Si f est une forme modulaire, nous construisons un système d'Euler attaché à f, ce qui nous permet d'obtenir des bornes pour les groupes de Selmer de f. Une loi de réciprocité explicite permet de relier ce système d'Euler à la fonction zêta p-adique de f, ce qui nous permet d'obtenir un résultat de divisibilité en direction de la conjecture principale pour f ainsi que des minorations pour l'ordre d'annulation de cette fonction zêta p-adique. Dans le cas particulier où f est attachée à une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$, nous prouvons que la fonction zêta p-adique de E a un zéro en $s = 1$ d'ordre supérieur ou égal au rang du groupe des points rationnels de E.

Correction à l'article « p-adic boundary values » paru dans *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques* (I), Astérisque **278** (2002), p. 51–125.

ABSTRACTS

Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques
JEAN-MARC FONTAINE 1

Let K be a p-adic field, $\overline{K}$ an algebraic closure of K, C the p-adic completion of $\overline{K}$, B_{dR} the field of p-adic periods, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. We first explain Sen and Tate's computations of the continuous Galois cohomology of C and $GL_h(C)$. We give a classification (mainly due to Sen) of *C-representations of G_K* (that is of finite dimensional C-vector spaces endowed with a semi-linear and continuous action of G_K). We continue with a *classification of B_{dR}-representations of G_K*. Then we apply these results to p-adic Galois representations and we review the main facts of the theory of semi-stable Galois representations. We finish by proving that
a) the only continous $\mathbb{Q}_p$-linear endomorphisms of C, commuting with the action of G_K, are multiplications by elements of K,
b) the forgetful functor from the category of C-representations of G_K to the category of p-adic Banach spaces equipped with a linear and continuous action of G_K is fully faithful.

p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms
KAZUYA KATO 117

If f is a modular form, we construct an Euler system attached to f from which we deduce bounds for the Selmer groups of f. An explicit reciprocity law links this Euler system to the p-adic zeta function of f which allows us to prove a divisibility statement towards Iwasawa's main conjecture for f and to obtain lower bounds for the order of vanishing of this p-adic zeta function. In particular, if f is associated to an elliptic curve E defined over $\mathbb{Q}$, we prove that the p-adic zeta function of f has a zero at $s = 1$ of order at least the rank of the group of rational points on E.

Correction to "p-adic boundary values"

Correction to the article "p-adic boundary values" published in *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques* (I), Astérisque **278** (2002), p. 51–125.

INTRODUCTION

Un semestre spécial, consacré aux cohomologies p-adiques et à leurs applications arithmétiques, a eu lieu, du 17 février au 11 juillet 1997, dans le cadre du centre Émile Borel, situé à Paris dans les locaux de l'institut Henri Poincaré.

Les principaux thèmes abordés ont été :

- les théorèmes de comparaison entre différentes cohomologies p-adiques des variétés algébriques sur les corps locaux, les représentations p-adiques du groupe de Galois absolu d'un tel corps,
- les groupes p-divisibles et la théorie de Dieudonné cristalline, la cohomologie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, les équations différentielles p-adiques,
- l'uniformisation p-adique, l'étude des espaces symétriques p-adiques, des courbes hyperboliques p-adiques, de la cohomologie des variétés de Shimura,
- la géométrie et la cohomologie logarithmiques,
- les fonctions L p-adiques, leurs relations avec les systèmes d'Euler, en particulier dans le cas des formes modulaires.

Les activités structurées ont consisté en

a) Douze cours :

- P. Berthelot (Rennes) : *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques*,
- C. Breuil (CNRS, Orsay) : *Cohomologie log cristalline et cohomologie étale de torsion* (Cours Peccot du Collège de France),
- G. Christol (Paris VI) : *Equations différentielles p-adiques*,
- G. Faltings (MPI, Bonn) : *Almost étale extensions*,
- J.-M. Fontaine (Orsay) : *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques*,
- L. Illusie (Orsay) et A. Ogus (Berkeley) : *Géométrie logarithmique*,
- K. Kato (Tokyo) : *Euler systems and p-adic L-functions*,
- W. Messing (Minneapolis) : *Topologie et cohomologie syntomiques et log syntomiques*,

- S. Mochizuki (RIMS, Kyoto) : *The Ordinary and Generalized Ordinary Moduli of Hyperbolic Curves*,
- M. Rapoport (Cologne) : *Aspects p-adiques des variétés de Shimura*,
- P. Schneider (Münster) : *Analysis on p-adic symmetric spaces*,
- T. Zink (Bielefeld) : *Cartier theory and its connection to crystalline Dieudonné theory.*

b) Un séminaire avec un ou deux exposés chaque semaine.

c) Deux colloques :

- *Problèmes de coefficients en cohomologie cristalline et en cohomologie rigide*, du 28 au 30 avril,
- *Arithmétique des fonctions L et méthodes p-adiques*, du 30 juin au 4 juillet.

d) Un groupe de travail sur *le théorème de comparaison de Tsuji*, du 20 au 29 mai.

Les organisateurs ont demandé à tous ceux qui avaient fait un cours de le rédiger ou de nous faire parvenir un texte sur un sujet voisin. Nous avons également invité Takeshi Tsuji à écrire un résumé de sa démonstration, maintenant publiée(1), de la *conjecture* C_{st}.

Nous tenons à remercier les auteurs non seulement pour leur contribution mais aussi pour leur patience ; nous espérons qu'ils voudront bien nous excuser du retard avec lequel ces volumes paraissent.

Les articles ont été examinés par des rapporteurs que nous remercions pour leur aide aussi désintéressée qu'utile.

Enfin, nous pensons que tous ceux qui ont participé à ce semestre seront d'accord avec nous pour saluer l'atmosphère agréable dans laquelle il s'est déroulé. Nous remercions chaleureusement Joseph Oesterlé, alors directeur du Centre Émile Borel, son équipe et tout le personnel de l'Institut Henri Poincaré pour leur gentillesse, leur compétence, leur efficacité et leur dévouement. Ils se joindront sûrement à nous pour accorder une mention spéciale à Madame Nocton, notre bibliothécaire — tous les mathématiciens qui ont travaillé à Paris la connaissent et savent combien son rôle a été précieux ; et une autre à notre secrétaire — Florence Damay — qui a quitté le Centre Émile Borel juste à la fin de notre semestre ; elle en fut la cheville ouvrière mais aussi le sourire, avec une formidable aptitude à comprendre et résoudre les problèmes extra-mathématiques rencontrés par les très nombreux participants.

Les éditeurs

(1) *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **137** (1999), 233–411