

Astérisque

FRÉDÉRIC LE ROUX

**Homéomorphismes de surfaces théorèmes de la fleur
de Leau-Fatou et de la variété stable**

Astérisque, tome 292 (2004)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__292__1_0>

© Société mathématique de France, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HOMÉOMORPHISMES DE SURFACES
THÉORÈMES DE LA FLEUR
DE LEAU-FATOU
ET DE LA VARIÉTÉ STABLE

Frédéric Le Roux

F. Le Roux

Université Paris Sud, Laboratoire de mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

E-mail : frederic.le-roux@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 37E30, 37C25.

Mots clefs. — Homéomorphisme, surface, point fixe, Brouwer, Leau-Fatou, variété stable.

HOMÉOMORPHISMES DE SURFACES THÉORÈMES DE LA FLEUR DE LEAU-FATOU ET DE LA VARIÉTÉ STABLE

Frédéric Le Roux

Résumé. — On étudie la dynamique d'un homéomorphisme de surface au voisinage d'un point fixe isolé. Si l'indice du point fixe est strictement plus grand que 1, on construit une famille de pétales autour du point fixe, alternativement attractifs et répulsifs, ce qui généralise un énoncé de dynamique holomorphe. Si l'indice est strictement plus petit que 1, on obtient une famille de branches alternativement stables et instables, ce qui généralise un énoncé de dynamique différentiable hyperbolique.

Abstract (Dynamics of surface homeomorphisms, topological versions of Leau-Fatou flower theorem and stable manifold theorem)

The study of the dynamics of a surface homeomorphism in the neighbourhood of an isolated fixed point leads us to the following results. If the fixed point index is greater than 1, a family of attractive and repulsive petals is constructed, generalizing the Leau-Fatou flower theorem in complex dynamics. If the index is less than 1, we get a family of stable and unstable branches, generalizing the stable manifold theorem in differentiable hyperbolic dynamics.

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction	1
1. Présentation des résultats de dynamique locale	5
1.1. Rappels de quelques résultats classiques	5
1.2. Résultats de dynamique topologique	8
1.3. Antécédents	10
1.4. Limites des résultats, questions	12
1.5. Exemples, définition informelle de l'indice	13
2. Intermède : du local au global	25
2.1. Le théorème d'extension	25
3. Dynamique globale : énoncé et résultats préliminaires	29
3.1. Définitions, énoncé	29
3.2. La théorie de Brouwer	32
3.3. Indices partiels	43
3.4. Décomposition en briques	55
4. Preuve du théorème principal de dynamique globale	73
4.1. Énoncés des lemmes	73
4.2. Preuve du théorème à partir des lemmes	80
4.3. Étude des croissants minimaux (proposition 4.8)	82
4.4. Indice partiel et construction de droites de Brouwer (proposition 4.11)	91
4.5. Une droite de Brouwer à extrémités Nord-Sud (proposition 4.12)	94
4.6. Construction du relevé canonique (proposition 4.17)	96
5. Applications en dynamique locale	103
5.1. Théorème de la fleur topologique	103
5.2. Branches stables et instables locales	104
5.3. Indices des itérés	106
Appendice : Théorème de Schoenflies-Homma et variantes	111
Bibliographie	113
Index	119

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Contexte. — Au tout début de l'apparition des systèmes dynamiques comme branche des mathématiques, Poincaré avait souligné l'importance des orbites périodiques comme l'un des biais par lequel il est possible d'attaquer l'étude d'un système dynamique ; depuis, une bonne partie des problèmes de dynamique consiste d'une part à chercher des orbites périodiques, d'autre part à tenter de comprendre la dynamique au voisinage d'une orbite périodique. Les résultats de dynamique locale sont souvent un préliminaire incontournable à l'étude de la dynamique globale : c'est le cas par exemple en *dynamique hyperbolique* (théorème de Hartman-Grobman, de la variété stable, étude des bifurcations locales) ou en *dynamique holomorphe* à une variable (théorèmes de linéarisation locale, théorème de la fleur de Leau-Fatou).

Problématique. — Dans ce texte, nous nous intéressons à la *dynamique topologique*, en dimension 2. Que peut-on dire de la dynamique locale d'un homéomorphisme de surface au voisinage d'un point fixe isolé ? Cette question a été abordée il y a longtemps par G.D. Birkhoff, et plus récemment par M. Brown, E. Slaminka, S. Pelikan, S. Baldwin, P. Le Calvez, J.-C. Yoccoz, S. Matsumoto ([**Bro90b**, **BS90**, **PS87**, **LC99**, **LCY97**, **LC03**, **Mat01**]). Contrairement aux catégories avec plus de structures, il n'y a aucun espoir de théorème de linéarisation locale, ce qui explique qu'il n'y ait pas eu de réponse définitive.

Un des ingrédients principal est l'indice de Lefschetz du point fixe, il permet de préciser la question initiale : quel lien y a-t-il entre l'indice et la dynamique ?

Le lien le plus simple est conséquence de la théorie des homéomorphismes de Brouwer : si l'indice est différent de 1, alors de nombreuses formes de récurrence (points périodiques, et même points non errants) sont exclues dans un voisinage du point fixe ; autrement dit, le *comportement individuel* de chaque orbite est très simple. Préciser le comportement dynamique consiste alors à essayer de dire quelque chose du *comportement collectif* des orbites.

Résultats. — Dans ce texte, on obtient des énoncés qui s’inspirent de théorèmes classiques des catégories plus structurées, le *théorème de la variété stable* en dynamique hyperbolique, et le *théorème de la fleur de Leau-Fatou* en dynamique holomorphe.

La version topologique du théorème de la variété stable concerne le cas où l’indice de Lefschetz est strictement plus petit que 1 : on prouve alors l’existence de p *branches stables* et p *branches instables locales*, cycliquement alternées autour du point fixe (où le nombre p est la différence entre 1 et l’indice).

La version topologique du théorème de la fleur de Leau-Fatou concerne le cas dual, où l’indice de Lefschetz est strictement plus grand que 1 : on montre cette fois-ci l’existence de p *pétales attractifs* et p *pétales répulsifs*, ici encore cycliquement alternés autour du point fixe (le nombre p est la différence entre l’indice et 1).

On obtient également une nouvelle preuve d’un résultat de M. Brown : l’indice du point fixe pour toute puissance non nulle de l’homéomorphisme est égal à l’indice pour h .

Stratégie et outils. — La stratégie des preuves est la suivante. Un résultat d’extension (théorème 2.1) permet de se ramener à un cadre de dynamique globale, celui d’un homéomorphisme de la sphère n’ayant que deux points fixes, notés N et S : ainsi, la quasi-totalité du texte portera en réalité sur des questions de dynamique globale. En particulier, les trois résultats de dynamique locale se déduiront rapidement d’un même théorème, que nous expliquons maintenant.

Dans le cadre global, on peut utiliser la théorie de Brouwer. Celle-ci permet la construction, en chaque point (non fixe), d’une *droite de Brouwer*, c’est-à-dire d’un arc dont les extrémités sont les points fixes (ou d’une courbe fermée simple passant par l’un des points fixes), et qui ne rencontre son image qu’aux points fixes. Le principal résultat de dynamique globale (théorème D) annonce l’existence d’une famille finie de droites de Brouwer formant le bord de structures dynamiques baptisées *croissants* et *pétales*, dont le nombre et la disposition sont reliés aux indices des points fixes N et S .

La construction des croissants et des pétales utilise principalement deux outils. D’une part, une notion d’indice entre deux droites de Brouwer disjointes, appelée *indice partiel*. D’autre part, les *décompositions en briques*, élaborées et déjà utilisées par P. Le Calvez et A. Sauzet : il s’agit d’un certain type de triangulation du complémentaire des points fixes, adaptée à la dynamique. Cette triangulation permet notamment d’évacuer une grande partie des problèmes délicats de topologie plane, et d’obtenir des preuves simples des résultats de Brouwer, en construisant par une procédure « automatique » des droites de Brouwer *simpliciales* (qui sont réunion d’arêtes de la triangulation).

La plupart des preuves ont pour décor un autre cadre de dynamique globale, celui des *homéomorphismes de Brouwer* : ce sont des homéomorphismes du plan sans point

fixe. Le passage du cadre « sphère avec deux points fixes » au cadre « plan sans point fixe » s'effectue de la manière suivante : en enlevant les deux points fixes N et S , puis en passant au revêtement universel, on obtient une surface homéomorphe au plan ; on montre alors qu'il existe une seule manière « non triviale » de relever la dynamique en un homéomorphisme du plan (qui est bien sûr sans point fixe). Ceci est l'objet de la proposition 4.17, et nécessite la construction préalable d'une droite de Brouwer reliant les deux points fixes N et S . Celle-ci est obtenue par des arguments portant principalement sur la combinatoire des droites de Brouwer simpliciales.

On prouve notamment une version du théorème principal, concernant l'existence de croissants et de pétales, dans le cadre des homéomorphismes de Brouwer (théorème E). Puis on en déduit la version initiale du théorème.

Plan du texte. — Dans le premier chapitre, on énonce précisément les résultats locaux, et on illustre ces résultats et leurs limites sur des exemples. Le deuxième chapitre, très court, contient le théorème d'extension qui rattache le cadre local au cadre global. Le troisième énonce le résultat principal de dynamique globale, et construit les outils nécessaires à sa démonstration (théorie de Brouwer « classique », indice partiel, décomposition en briques). Le quatrième contient le cœur de la preuve. Enfin, le dernier chapitre applique théorème d'extension et résultat global pour récolter les résultats de dynamique locale.

Les chapitres concernant le cadre global (3 et 4) sont largement indépendants des autres chapitres.

Remerciements. — Je tiens à remercier les professeurs du Collège de France, et tout particulièrement Jean-Christophe Yoccoz, de m'avoir invité, en janvier 2001, à faire la série d'exposés qui m'a incité à écrire ce texte. Cette étude a pour origine le premier sujet de thèse que m'avait donné Lucien Guillou, à l'époque sans beaucoup de succès... Le sujet a redémarré après plusieurs discussions avec Patrice Le Calvez, en particulier grâce à sa suggestion d'utiliser les « décompositions en briques », qui jouent ici un rôle central. Je remercie Lucien et Patrice pour leur intérêt constant pour ce travail. Ce texte a également bénéficié des conversations avec François Béguin, Sylvain Crovisier, Vincent Guirardel et Duncan Sands.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DES RÉSULTATS DE DYNAMIQUE LOCALE

Dans ce chapitre, on énonce et on illustre les résultats de dynamique topologique locale de dimension 2. Ceux-ci sont affiliés à deux théorèmes célèbres, l'un en dynamique différentiable, l'autre en dynamique holomorphe ; nous commençons par rappeler ces énoncés. Après avoir présenté les résultats nouveaux et certains de leurs ancêtres, on décrit quelques exemples, de complexité croissante, pour la plupart déjà connus ; les deux derniers exemples sont nouveaux (figures 14 et 16). *Ces exemples ne sont pas utilisés dans la suite du texte* (mais en facilitent sans doute la compréhension).

1.1. Rappels de quelques résultats classiques

On note 0 le point $(0, 0)$ du plan \mathbb{R}^2 . On notera $\text{Int}(E)$, $\text{Adh}(E)$ et ∂E l'intérieur, l'adhérence et la frontière d'un ensemble E .

Rappelons que x est un *point fixe* d'une application f si $f(x) = x$. L'ensemble des points fixes de f sera noté $\text{Fixe}(f)$.

Définition 1.1. — Un *homéomorphisme local* $h : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme h entre deux voisinages connexes U et V de 0 dans \mathbb{R}^2 , préservant l'orientation, dont 0 est un point fixe.

Définition 1.2. — Un *germe d'homéomorphisme* est une classe d'équivalence d'homéomorphismes locaux pour la relation : $(h_1 : U_1 \rightarrow V_1) \sim (h_2 : U_2 \rightarrow V_2)$ si et seulement si il existe un voisinage U' de 0 tel que $h_1|_{U'} = h_2|_{U'}$.

Définition 1.3. — Deux homéomorphismes locaux $h_1 : U_1 \rightarrow V_1$ et $h_2 : U_2 \rightarrow V_2$ sont *topologiquement conjugués* si il existe un homéomorphisme local $g : U_1 \cup V_1 \rightarrow U_2 \cup V_2$, envoyant U_1 sur U_2 et V_1 sur V_2 , tel que, sur U_2 , $g \circ h_1 \circ g^{-1} = h_2$.

Cette définition induit une définition sur les germes. On définit de manière similaire les difféomorphismes et les difféomorphismes holomorphes locaux, ainsi que leurs germes.

À partir de maintenant, tous les homéomorphismes considérés auront 0 comme unique point fixe.

a. Dynamique différentiable. — Soit f un germe de difféomorphisme en 0. On dit que f est *topologiquement linéarisable* s'il est topologiquement conjugué à sa différentielle en 0.

Théorème 1.4 (Hartman-Grobman, 1962). — *Supposons que la différentielle en 0 soit hyperbolique (i.e. les modules des valeurs propres sont différents de 1). Alors f est topologiquement linéarisable.*

On en déduit qu'à conjugaison topologique près, il n'existe que quatre germes de difféomorphismes hyperboliques (préservant l'orientation) : homothétie contractante ou dilatante, point selle avec ou sans rotation (figure 1).

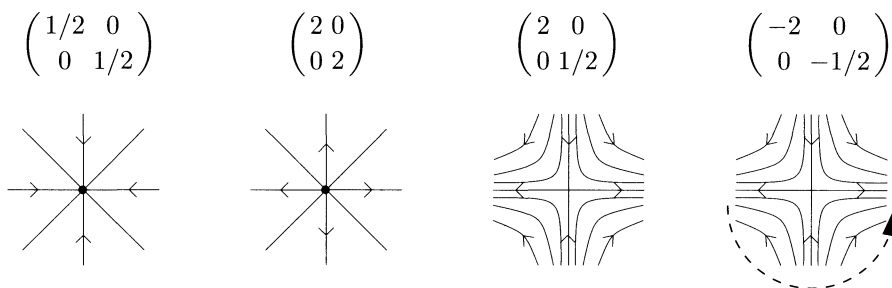


FIGURE 1. Les quatre modèles de difféomorphismes hyperboliques locaux

Soit $f : U \rightarrow V$ un difféomorphisme local hyperbolique de type selle, c'est-à-dire que l'une des valeurs propres a sa valeur absolue plus grande que 1, et l'autre plus petite que 1. Si U' est un voisinage de 0 inclus dans U , on note $W_{\rightarrow 0}^{U'}$ et $W_{0 \rightarrow}^{U'}$ les ensembles stables et instables locaux, i.e. $W_{\rightarrow 0}^{U'} = \{x \in U' \mid \forall n \geq 0, f^n(x) \in U'\}$ et $W_{0 \rightarrow}^{U'} = \{x \in U' \mid \forall n \leq 0, f^n(x) \in U'\}$. Le théorème d'Hartman-Grobman permet bien sûr de décrire le comportement des orbites ; tout se passe comme sur la figure 1 :

Corollaire 1.5. — *Supposons que la différentielle est de type selle. Alors il existe un voisinage U' de 0 arbitrairement petit, tel que :*

- les ensembles $W_{\rightarrow 0}^{U'}$ et $W_{0 \rightarrow}^{U'}$ sont deux arcs d'intersection $\{0\}$, d'extrémités sur la frontière $\partial U'$;
- tous les points de $W_{\rightarrow 0}^{U'} \setminus \{0\}$ ont un itéré négatif hors de U' et leurs itérés positifs qui tendent vers 0.
- tous les points de $W_{0 \rightarrow}^{U'} \setminus \{0\}$ ont un itéré positif hors de U' et leurs itérés négatifs qui tendent vers 0.

Le théorème de la variété stable ajoute que ces arcs sont différentiables et tangents aux directions propres de la différentielle (mais ici seuls les aspects topologiques de la dynamique nous intéressent).

b. Dynamique holomorphe. — On peut trouver des précisions sur les résultats ci-dessous dans [Mil99, CG93]. Soit f un germe de difféomorphisme holomorphe.

Si $|f'(0)| \neq 1$ (point hyperbolique), alors f est linéarisable, *i.e.* la dynamique est localement (holomorphiquement) conjuguée à sa différentielle $z \mapsto f'(0) \times z$. Remarquons qu'il n'y a que deux classes de conjugaison topologique, correspondant aux homothéties contractantes ou dilatantes ;

Si $f'(0) = e^{i2\pi\theta}$, avec θ irrationnel « mal approché » par des rationnels (condition diophantienne), alors f est encore linéarisable, et donc (holomorphiquement) conjugué à une rotation irrationnelle (Siegel, Bryuno).

Si $f'(0) = e^{i2\pi\theta}$, avec θ irrationnel « bien approché » par des rationnels, alors il existe des exemples où f n'est pas linéarisable (Cremer, Yoccoz).

Le dernier cas va nous intéresser plus spécialement :

Si $f'(0) = e^{i2\pi\theta}$, avec θ rationnel (point parabolique), on a encore conjugaison à un modèle simple (pour simplifier, on se place dans le cas où $\theta = 0$) :

Théorème 1.6 (Camacho, [Cam78]). — Si $f(z) = z + \alpha z^{(p+1)} + \dots$ ($p > 0$ et $\alpha \neq 0$), alors f est topologiquement conjugué à $z \mapsto z + z^{(p+1)}$.

On peut alors décrire la dynamique locale à l'aide des définitions suivantes :

Définition 1.7. — On appelle *disque topologique fermé* un ensemble homéomorphe à un disque euclidien fermé du plan.

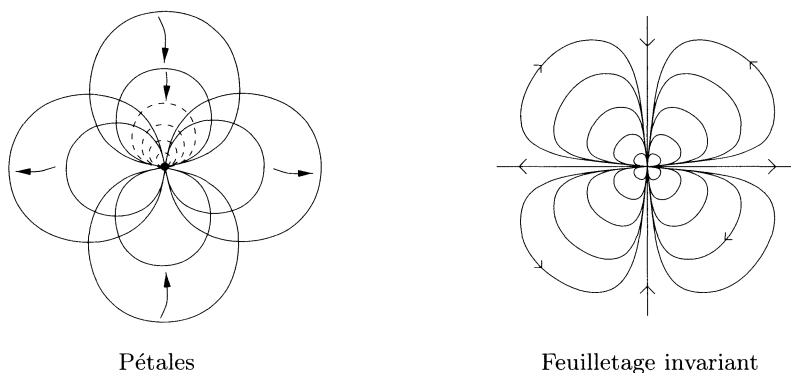


FIGURE 2. Dynamique de $z \mapsto z + z^3$ au voisinage de 0

Définition 1.8 (figure 2). — Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local. Un *pétale attractif* est un disque topologique fermé P inclus dans U , dont le bord contient 0, vérifiant $h(P) \subset \text{Int}(P) \cup \{0\}$. Le pétale P est dit *régulier* si de plus $\bigcap_{n>0} h^n(P) = \{0\}$. Un *pétale répulsif* est un pétale attractif pour h^{-1} .

Corollaire 1.9 (théorème de la fleur de Leau-Fatou, 1897-1917)

Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 1.6. Alors, pour tout homéomorphisme local $h : U \rightarrow V$ de germe f , il existe p pétales attractifs réguliers et p pétales répulsifs réguliers cycliquement alternés autour de 0, dont la réunion forme un voisinage de 0.

Remarquons qu'en pratique, et contrairement à ce que laisse penser la présentation adoptée ici, on déduit le théorème 1.6 du corollaire 1.9.

1.2. Résultats de dynamique topologique

On énonce ici les résultats de dynamique topologique locale. Certain des résultats classiques ci-dessus sont du type :

Hypothèse sur la différentielle \implies conjugaison à un modèle simple.

Si on essaie d'obtenir des résultats analogues en dynamique topologique, on se heurte à deux types de problèmes :

- (1) au niveau des hypothèses, il faut trouver une généralisation topologique d'hypothèses portant sur la différentielle ;
- (2) au niveau des conclusions, il n'y a aucun espoir d'obtenir une conjugaison à un petit nombre de modèles (ceci sera clair sur les exemples décrits ci-dessous, section 1.5).

La deuxième objection indique simplement qu'on ne pourra pas obtenir de théorèmes de « linéarisation » (comme les théorèmes de Camacho ou d'Hartman-Grobman), et qu'il faudra se contenter de théorèmes de description partielle de la dynamique (comme les corollaires 1.5 ou 1.9). La première objection est plus sérieuse, mais par miracle il existe une notion qui va permettre d'y remédier : l'indice d'un point fixe. La définition est expliquée plus bas (section 1.5 b) ; pour l'instant, remarquons simplement deux choses :

- si $f(z) = z + \alpha z^{(1+p)} + \dots$, l'indice du point fixe est $1 + p$ (en particulier, il est strictement plus grand que 1) ;
- pour un point selle sans rotation, l'indice est -1 .

Si h est un homéomorphisme local fixant uniquement 0, on notera $\text{Indice}(h, 0)$ l'indice du point fixe (qui ne dépend que du germe de h).

a. En indice > 1 , pétales attractifs et répulsifs

Définition 1.10. — Soient U un voisinage de 0 dans le plan, F et F' deux familles finies de parties compactes et connexes de U contenant 0, et supposons que les éléments de $F \cup F'$ sont deux à deux d'intersection égale à $\{0\}$. On dira que F et F' sont *cycliquement alternées autour de 0* s'il existe une courbe fermée simple γ incluse dans U , entourant 0, rencontrant chaque élément de $F \cup F'$ en un unique point, telle qu'en parcourant γ on rencontre alternativement les éléments de F et ceux de F' .

Remarquons qu'on pourrait être plus précis en définissant l'ordre cyclique autour de 0 de n'importe quelle famille finie de parties connexes de U deux à deux d'intersection égale à $\{0\}$.

Théorème A (version topologique du « théorème de la fleur »). — Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local fixant uniquement 0, d'indice strictement supérieur à 1 ; on écrit $\text{Indice}(h, 0) = 1 + p$ avec $p > 0$.

Alors il existe p pétales attractifs et p pétales répulsifs dans U , deux à deux d'intersection égale à $\{0\}$, les pétales attractifs et répulsifs étant cycliquement alternés autour de 0.

Ce théorème est illustré par la figure 3.

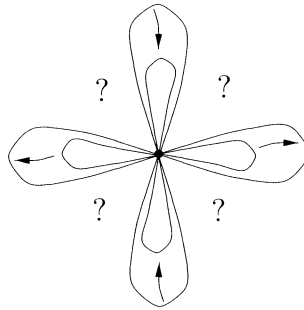


FIGURE 3. Dynamique autour d'un point fixe d'indice plus grand que 1 (ici d'indice 3)

b. En indice < 1 , branches stables et instables locales. — Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local, et U' un disque topologique fermé inclus dans $\text{Int}(U \cap V)$.

Définition 1.11. — Un ensemble $E \subset U'$ est *plein* si $U \setminus E$ est connexe.⁽¹⁾

Définition 1.12. — Un ensemble $E \subset U'$ est *positivement invariant* si $h(E) \subset E$.

Définition 1.13. — Une *branche stable U' -locale* est un ensemble k vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) k est inclus dans U' , il contient 0 et rencontre la frontière de U' ;
- (2) k est compact, connexe, plein ;
- (3) k est positivement invariant, et la suite des itérés positifs de tout point de k tend vers 0 ;
- (4) il existe un ensemble W_k , voisinage de $k \setminus \{0\}$ dans U' , tel que tout point de W_k a un itéré négatif hors de U' .

Une *branche instable U' -locale* est une branche stable U' -locale pour h^{-1} .

⁽¹⁾Ceci revient à dire que toute composante connexe de $U' \setminus E$ rencontre $\partial U'$.

Théorème B (Version topologique du théorème de la variété stable)

Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local fixant uniquement 0, d'indice strictement inférieur à 1 ; on écrit $\text{Indice}(h, 0) = 1 - p$ avec $p > 0$.

Alors il existe un disque topologique fermé U' , voisinage de 0 inclus dans $\text{Int}(U \cap V)$, p branches U' -locales stables et p branches U' -locales instables, deux à deux d'intersection égale à $\{0\}$, les branches stables et instables étant cycliquement alternées autour de 0.

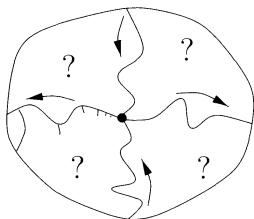


FIGURE 4. Dynamique autour d'un point fixe d'indice plus petit que 1 (ici d'indice -1)

Ce théorème est illustré par la figure 4. Remarquons que les pétales du théorème A et le voisinage U' du théorème B peuvent être choisis arbitrairement petits (en appliquant chaque théorème à une restriction de h à un voisinage arbitrairement petit de 0).

c. Indices des itérés d'un homéomorphisme local. — On obtiendra également une nouvelle preuve d'un théorème de M. Brown ([Bro90b]).

Théorème C (M. Brown). — Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local fixant uniquement 0, dont le point fixe est d'indice différent de 1. Soit n un entier non nul. Alors :

(1) le point 0 est un point fixe isolé de h^n ; autrement dit, il existe un voisinage connexe U' de 0, sur lequel h^n est bien défini, et tel que 0 est le seul point fixe de l'homéomorphisme local $h^n : U' \mapsto h^n(U')$; en particulier, le nombre $\text{Indice}(h^n, 0)$ est bien défini ;

(2) $\text{Indice}(h^n, 0) = \text{Indice}(h, 0)$.

Le fait que h^n soit bien défini sur U' signifie que les ensembles $U', h(U'), \dots, h^{n-1}(U')$ sont inclus dans U .

1.3. Antécédents

a. La théorie de Brouwer. — La théorie des homéomorphismes de Brouwer explique notamment qu'il ne peut pas y avoir de récurrence au voisinage d'un point fixe

d'indice différent de 1. Plus précisément, il existe un voisinage U de 0 tel que la suite des itérés d'un point de U n'a que deux possibilités : tendre vers le point fixe ou sortir de U . Ce résultat est un préliminaire essentiel pour l'étude des dynamiques locales. La théorie de Brouwer est détaillée dans la section 3.2.

b. Ancêtres du théorème de la fleur. — En étudiant les points fixes d'indice strictement plus grand que 1, C. P. Simon et N. A. Nikitin ont d'abord montré que les points fixes des difféomorphismes préservant l'aire avaient un indice inférieur ou égal à 1 ([Sim74], [Nik74]). S. Pelikan et E. E. Slaminka ([PS87]) ont ensuite étendu ce résultat aux homéomorphismes. P. Le Calvez a été le premier à obtenir une propriété de dynamique topologique qui interdit de préserver l'aire : en indice strictement supérieur à 1, tout voisinage du point fixe contient tous les itérés positifs d'un ouvert errant (*i.e.* disjoint de tous ses itérés, voir [LC99, LC03]). Le théorème de la fleur topologique renforce ces résultats, en décrivant une propriété dynamique liée à la valeur exacte de l'indice. Mais ce théorème ne contient pas encore toutes les propriétés impliquées par la condition d'indice : par exemple, une autre propriété dit que tout voisinage du point fixe contient une orbite entière (différente du point fixe). Ceci est une conséquence du théorème d'indice de P. Le Calvez et J.-C. Yoccoz ([LCY97]) ; auparavant, S. A. Andréa l'avait prouvé, en indice 2, dans un contexte global ([And70]).

c. Ancêtres du théorème de la « variété » stable. — Ce théorème est extrêmement proche d'un énoncé de S. Baldwin et E. E. Slaminka ([BS90]) ; celui-ci comporte une hypothèse supplémentaire (l'aire est préservée) et une propriété en moins dans la conclusion (les orbites négatives des points des branches stables ne sortent pas nécessairement du voisinage). D'autre part, la preuve semble utiliser implicitement une hypothèse additionnelle assez forte : l'existence d'un voisinage qui ne contient aucune orbite entière. ⁽²⁾ L'un des buts de ce travail était d'obtenir une preuve complète de cet énoncé, en évitant la théorie de la « mise en position canonique » utilisée par S. Baldwin et E. E. Slaminka. Cette théorie est due aux efforts successifs de B. S. Schmidt ([Sch75]), E. E. Slaminka ([Sla93, Sla88a]), et M. Bonino ([Bon97, Bon01, Bon99]) ; bien que ne faisant appel qu'à des notions élémentaires, les preuves sont assez délicates. La mise en position canonique peut aussi être utilisée pour étendre les germes en évitant l'apparition de points fixes, et pour calculer les indices des itérés h^n ([Bro90b]). On donne également des preuves alternatives de ces deux résultats (théorème C ci-dessus, et théorème d'extension 2.1 ci-dessous). K. Hiraide et J. Lewowicz ont également prouvé et utilisé un résultat de « variété »

⁽²⁾ Voir [BS90], page 827, ligne 7 : « Since $x \in S_0 - p$, there exists an $N > 0$ such that $\hat{h}^{-N}(x) \notin D$. » Or sans l'hypothèse additionnelle donnée ci-dessus, il n'est pas clair que l'ensemble S_0 ait cette propriété. D'autre part, la construction est d'abord effectuée pour un homéomorphisme \hat{h} qui est une perturbation de h , et la manière d'obtenir les branches stables de h à partir de celles de \hat{h} , qui n'est pas détaillée, semble également poser problème.

stable topologique, dans un contexte différent, celui des homéomorphismes expansifs de surfaces (voir [Hir90], [Lew89]). Pour ce qui est des ancêtres plus lointain, rappelons que dans son étude des homéomorphismes de l'anneau déviant la verticale, G. D. Birkhoff montrait et utilisait une propriété de l'ensemble stable local : sous une hypothèse très générale (n'être ni puits ni source, ce qui est le cas si l'aire est préservée ou si l'indice est différent de 1), la composante connexe du point fixe est non triviale (la preuve est très courte, voir par exemple [LR00], lemme 5).

d. Autres résultats de dynamique topologique locale. — P. Le Calvez et J.-C. Yoccoz, puis P. Le Calvez ont relié la suite des indices des itérés (h^n) d'un homéomorphisme local aux propriétés dynamiques de h ([LCY97, LC03]). Notamment, P. Le Calvez retrouve le théorème de M. Brown énoncé ci-dessus. En dynamique globale, un corollaire important de cette étude est la preuve de la non-existence d'homéomorphismes minimaux de l'anneau ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$; P. Le Calvez obtient également des théorèmes d'existence d'orbites périodiques.

1.4. Limites des résultats, questions

a. En indice < 1 . — Par définition, l'ensemble stable d'un point fixe est l'ensemble des points dont la demi-orbite positive tend vers le point fixe. Contrairement au cadre différentiable hyperbolique, pour un homéomorphisme, l'ensemble stable n'est pas nécessairement connexe (voir l'exemple de la proposition 1.19 ci-dessous ; cette remarque répond à la question posée par S. Baldwin et E. E. Slaminka à la fin de [BS90]). Le théorème topologique de la « variété » stable ne peut donc pas prendre en compte l'intégralité des ensembles stables et instables. D'autre part, il ne dit rien sur la dynamique entre les branches stables et instables ; dans quelle mesure ressemble-t-elle à celle des difféomorphismes selles ? Sur la figure 4, cette absence d'information est symbolisée par les points d'interrogation dans les secteurs entre les branches.

b. En indice > 1 . — Par rapport au cadre holomorphe du théorème de Leau-Fatou, on a deux restrictions essentielles : d'une part les pétales ne sont pas nécessairement réguliers, c'est-à-dire qu'on doit autoriser les pétales à contenir entièrement l'orbite de certains points (voir l'exemple du corollaire 1.18 ci-dessous, qui ne possède aucun pétale régulier) ; et d'autre part on ne peut pas espérer que la réunion des pétales forme un voisinage du point fixe (voir par exemple le deuxième dessin de la figure 6) : il resterait donc ici aussi à décrire la dynamique entre les pétales.

c. Les constructions ne sont pas canoniques. — Les constructions effectuées font apparaître beaucoup de choix arbitraires (en particulier dans la construction d'une « décomposition en briques »), ce qui empêche d'obtenir des objets canoniques. En essayant de remédier à cet inconvénient, on tombe notamment sur les questions suivantes :

Question 1.14. — *En indice < 1 , peut-on trouver un exemple avec une infinité de branches stables « maximales » disjointes ?*

Question 1.15. — *En indice $1 + p > 1$, disons que deux pétales attractifs P_1 et P_2 sont équivalents si l'union des itérés négatifs de P_1 coïncide avec l'union des itérés négatifs de P_2 . Peut-on montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini (supérieur à p) de classes d'équivalence maximales de pétales attractifs ?*

Une des difficultés est qu'en général, dans un même homéomorphisme, on trouve simultanément des « zones hyperboliques » (contribuant à de l'indice négatif) et des « zones elliptiques » (contribuant à de l'indice positif) : ceci est clair sur les exemples de la section 1.5 a, figures 5 et 6. En particulier, le théorème de la fleur dit juste que si l'indice est $1 + p > 1$, on aura forcément au moins $2p$ zones elliptiques ; mais il peut aussi y avoir des zones hyperboliques, et dans ce cas, il devra y avoir plus de $2p$ zones elliptiques.

Question 1.16. — *Peut-on donner un sens précis aux termes « secteurs hyperboliques » et « secteurs elliptiques » ?*

Une approche de cette question sera proposée par l'auteur dans [LR], en partant de l'idée suivante : même sans savoir les définir précisément, on peut compter les secteurs hyperboliques et elliptiques !

1.5. Exemples, définition informelle de l'indice

On décrit ici un certain nombre d'exemples utiles à la compréhension du texte ; en particulier, le corollaire 1.18 et la proposition 1.19 montrent chacun une limite des théorèmes A et B. *Sur le plan logique, la suite du texte ne fait pas appel à cette section.*

a. Flots simples. — Un flot (différentiable) est une famille de difféomorphismes obtenue en intégrant un champ de vecteurs. On peut définir un *flot topologique* en ne gardant que la condition de composition : c'est une famille $(h_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'homéomorphismes vérifiant $h_t \circ h_s = h_{t+s}$ (et h_0 est l'identité). On montre, comme dans le cas différentiable, que les orbites $\{h_t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ forment un feuilletage du plan ([Whi33]). Les exemples les plus faciles de germes d'homéomorphismes se construisent en prenant le *temps un*, h_1 , d'un flot $(h_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Les flots les plus simples se construisent à l'aide de six modèles de secteurs angulaires (cf. figure 5)⁽³⁾ :

⁽³⁾On a représenté le feuilletage en orbites : pour x fixé, quand t varie, $h_t(x)$ parcourt la feuille passant par x ; en particulier, l'homéomorphisme h_1 préserve chaque feuille du feuilletage et pousse les points dans le sens des flèches.

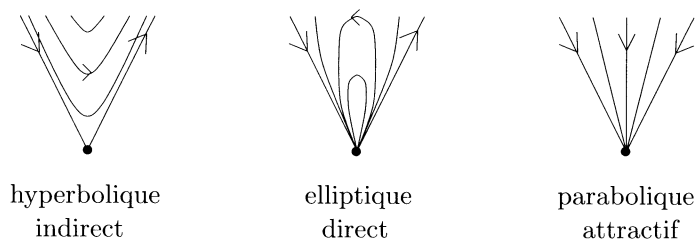


FIGURE 5. Modèles de secteurs des flots « simples »

- *secteurs hyperboliques* direct et indirect avec lesquels on fabrique les points hyperboliques selles ;
- *secteurs elliptiques* direct et indirect avec lesquels on fabrique les points paraboliques (!) de la dynamique holomorphe ;
- *secteurs paraboliques* attractif et répulsif.

On passe du modèle direct au modèle indirect et d'attractif à répulsif en changeant le sens du temps (des flèches). La figure 6 montre deux exemples.

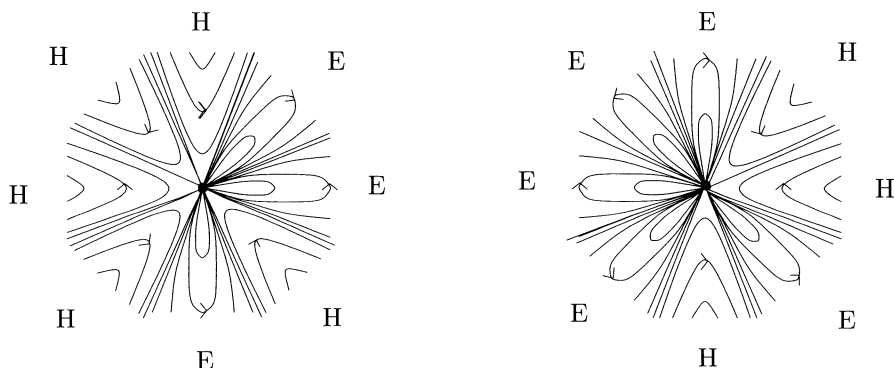


FIGURE 6. Deux exemples complets, duaux, de germes de flots « simples »

F. Dumortier a montré que tout germe de champ de vecteurs C^∞ du plan au voisinage d'une singularité vérifiant une certaine condition (portant sur l'expansion de Taylor et l'existence d'une séparatrice) est de cette forme ([Dum78, Dum77]).

b. L'indice. — La définition sera précisée à la section 3.2 a.

Définition informelle. — Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local fixant uniquement 0. Pour obtenir l'indice de h en 0, on prend un disque D , inclus dans U , qui contient le point fixe dans son intérieur (figure 7). En tout point x de ∂D , on trace le vecteur $\overrightarrow{xh(x)}$, qui n'est pas nul puisque ∂D ne contient pas de point fixe ; puis on calcule l'indice du champ de vecteurs ainsi défini le long de ∂D : autrement dit,

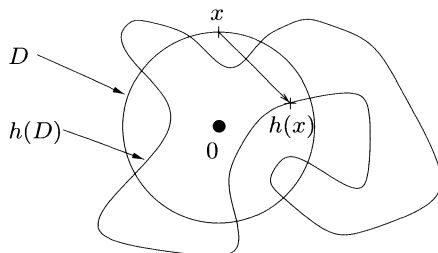


FIGURE 7. Définition de l'indice

le nombre (algébrique) de tours faits par $\overrightarrow{xh(x)}$ quand on parcourt une fois ∂D . On montre que cette définition ne dépend pas du disque D choisi ; elle ne dépend donc que du germe de h .

Par exemple, pour $f(z) = z + z^{p+1}$, on a $f(z) - z = z^{p+1}$ qui fait $p + 1$ tours quand z parcourt le cercle unité : le point fixe 0 est d'indice $p + 1$.

Formule pour les flots simples. — Pour un flot composé des quatre types de secteurs décrits précédemment, l'indice est donné par la formule :

$$\text{Indice}(h, 0) = \frac{\# \text{secteurs elliptiques} - \# \text{secteurs hyperboliques}}{2} + 1.$$

En effet, dans un secteur elliptique, le vecteur $\overrightarrow{xh(x)}$ fait un demi-tour dans le sens de parcours de ∂D , plus un « chouïa » ; dans un secteur hyperbolique, il fait un demi-tour dans le sens contraire, moins un « chouïa » ; dans les secteurs paraboliques il ne tourne presque pas (juste un « chouïa »). Les « chouïas » sont en fait exactement les angles des secteurs, et ils s'additionnent pour donner le « 1 » de la formule. Le premier exemple de la figure 6 est donc d'indice 0, le deuxième est d'indice 2.

L'intérêt principal de l'indice réside dans la *formule de Lefschetz*, qui fait le lien entre le local et le global : pour un homéomorphisme défini sur une surface compacte S , isotope à l'identité et n'ayant qu'un nombre fini de points fixes, la somme des indices de ces points fixes est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface (par exemple, les deux dessins de la figure 6 se recollent en un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 , et on a bien $0 + 2 = 2$). Cette formule permet de détecter des points fixes ou périodiques : par exemple, une conséquence du théorème de S. Pelikan et E. E. Slaminka (tout germe préservant l'aire est d'indice strictement plus petit que 1) est que tout homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 (de caractéristique 2), préservant l'aire, isotope à l'identité, a au moins deux points fixes⁽⁴⁾. Elle est également l'une des clés de la preuve du théorème de P. Le Calvez et J.-C. Yoccoz sur la non-existence d'homéomorphismes minimaux de l'anneau.

⁽⁴⁾Ceci peut aussi se voir comme conséquence de la théorie de Brouwer.

Illustration des théorèmes. — Pour ces flots simples, on peut facilement montrer les théorèmes B et A :

– « *variété* » *stable* : soit h un germe d'indice $1 - p$ strictement plus petit que 1, construit à l'aide des six modèles de secteurs décrits précédemment. D'après la formule, il y a au moins $2p$ secteurs hyperboliques, donc au moins p ayant la même orientation (directe ou indirecte); à cause de l'orientation, les bords de ces secteurs sont disjoints deux à deux; ils constituent donc p branches stables et p branches instables cycliquement alternées.

– *fleur topologique* : en indice $1 + p$ strictement plus grand que 1, il y a au moins p secteurs elliptiques avec la même orientation; dans chacun on trouve un pétale attractif et un répulsif (voir la figure 8).

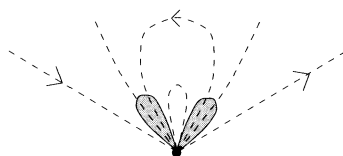


FIGURE 8. Pétales dans un secteur elliptique

Remarquons que dans un secteur elliptique ou parabolique, tout disque assez petit est disjoint de tous ses itérés positifs (ou négatifs), qui sont inclus dans le voisinage; la dynamique ne peut donc pas préserver la mesure de Lebesgue (ou n'importe quelle mesure chargeant les ouverts). Par conséquent, un flot « simple » préservant une bonne mesure est constitué uniquement de secteurs hyperboliques.

c. Flots compliqués. — Tous les germes de flots n'admettent pas une description aussi simple; par exemple :

– on peut compliquer un secteur hyperbolique en faisant pousser une infinité de « bulles » elliptiques (*cf.* figure 9); remarquons que si on n'ajoute qu'un nombre fini

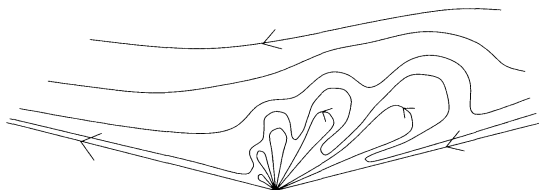


FIGURE 9. De l'elliptique dans l'hyperbolique

de bulles, le germe obtenu est encore un flot simple (on a juste changé un secteur hyperbolique en $k + 1$ secteurs hyperboliques et k secteurs elliptiques alternés).

– on peut compliquer un secteur elliptique en y introduisant des « composantes de Reeb » (cf. figure 10); là encore, tout processus fini redonne un flot simple.

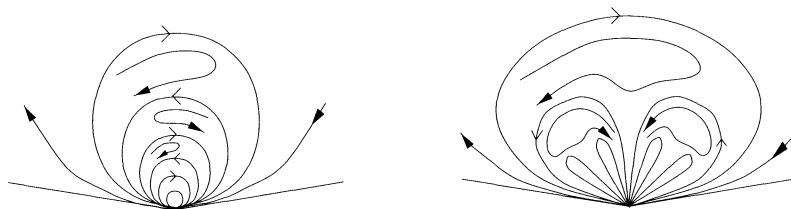


FIGURE 10. Des composantes de Reeb dans l'elliptique

Les germes de feuilletages de surface au voisinage d'une singularité isolée ont été étudiés en toute généralité par Kaplan ([Kap42]).

d. Flot le plus compliqué possible. — En première approximation, on peut mesurer la complexité d'un flot (du plan, par exemple) par son *ensemble singulier* : celui-ci est défini comme la réunion des orbites qui ne sont pas séparées dans l'espace des feuilles du feuilletage par orbites ; ou comme l'ensemble des points de discontinuité de l'application « $x \mapsto$ orbite de x » (pour une topologie de Hausdorff) ; ou encore comme la réunion des bords des composantes de Reeb, une composante de Reeb étant un sous-ensemble du plan, *pas nécessairement fermé*, sur lequel le feuilletage est homéomorphe au feuilletage de Reeb (représenté figure 11). L'ensemble singulier

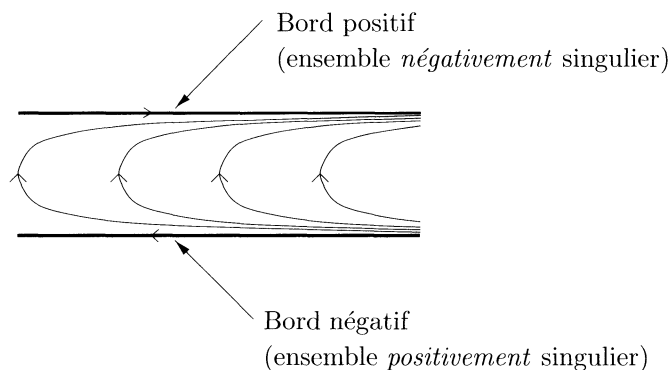


FIGURE 11. Une composante de Reeb

est alors la réunion des ensembles *positivement singulier* et *négativement singulier*, ceux-ci étant définis comme la réunion des *bords négatifs* (respectivement des *bords positifs*) des composantes de Reeb (cf. figure 11). Remarquons encore que l'ensemble singulier est l'ensemble des points en lesquels la famille $\{h_1^n\}$ n'est pas équicontinue

pour la métrique sphérique, ce qui en fait l'analogue des ensembles de Julia de la dynamique holomorphe. L'ensemble singulier des homéomorphismes de Brouwer est étudié dans [Ker34, HT53, Nak95a, Nak95b, BLR03, LR03].

Proposition 1.17. — *Il existe un flot du plan, sans orbite périodique ni point singulier, dont les ensembles positivement et négativement singuliers sont chacun denses dans le plan.*

Démonstration. — On peut trouver une construction compliquée due à T. Homma et H. Terasaka dans [HT53]. Voici une construction élégante que m'a signalée C. Bonatti. On considère le feuilletage du plan par les droites verticales. Enlevons les points de l'ensemble

$$F = \left\{ \left(\frac{p}{q}, q \right) \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\};$$

il nous reste un ouvert U muni d'un feuilletage \mathcal{F} , que l'on relève au revêtement universel $\tilde{U} \simeq \mathbb{R}^2$ pour obtenir un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ du plan. Soit $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ n'importe quel flot de U dont les orbites sont les feuilles de \mathcal{F} ; alors les ensembles positivement et

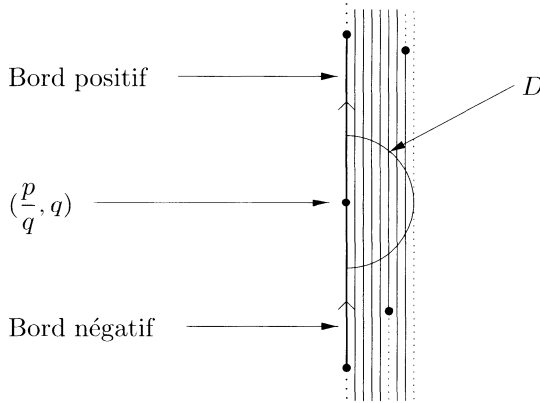


FIGURE 12. La réunion des feuilles de \mathcal{F} qui rencontrent le demi-disque D est une composante de Reeb

négativement singuliers de $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sont égaux, et constitués de tous les points de U d'abscisse rationnelle (figure 12; remarquons que la droite verticale d'abscisse p/q dans le plan contient une infinité de points de l'ensemble F , tous les points $((kp)/(kq), kq)$). Les ensembles singuliers sont donc denses. Comme la préimage d'une composante de Reeb au revêtement universel est une réunion de composantes de Reeb, c'est aussi le cas pour n'importe quel flot le long de $\tilde{\mathcal{F}}$. \square

Cet exemple montre une des limites du théorème de la « fleur topologique » (cf. définition 1.8 et section 1.4) :

Corollaire 1.18. — *Il existe un homéomorphisme local h fixant uniquement 0, d'indice 2, pour lequel il n'y a ni pétale attractif régulier ni pétale répulsif régulier.*

Démonstration. — Si P est un pétale attractif régulier et O un disque euclidien fermé inclus dans l'intérieur de P , la suite des itérés $(h^n(O))_{n \geq 0}$ tend vers le point fixe (par exemple au sens de la topologie de Hausdorff).

Considérons alors l'homéomorphisme h_1 temps un de l'exemple de la proposition 1.17, au voisinage du point fixe à l'infini. Ce point fixe est d'indice 2 (à cause de la formule de Lefschetz). D'autre part, l'intérieur de tout disque euclidien O du plan rencontre l'ensemble positivement singulier de h_1 (qui est le bord négatif d'une composante de Reeb), donc la limite de la suite $(h_1^n(O))_{n \geq 0}$ contient le bord positif d'une composante de Reeb : ceci montre qu'aucun pétale attractif en l'infini n'est régulier. \square

Remarquons que le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ ci-dessus possède un grand nombre de symétries (tous les automorphismes du revêtement utilisé dans la construction) ; par contre, on peut choisir un flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le long de $\tilde{\mathcal{F}}$ qui n'a aucune symétrie, au sens où les seuls homéomorphismes du plan commutant avec ϕ_1 sont les ϕ_t . On pourrait également construire un homéomorphisme h préservant chaque feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$, et ne commutant qu'avec ses itérés (en utilisant les idées de [LR99b] et de [BLR03]).

e. Modification simple de flots

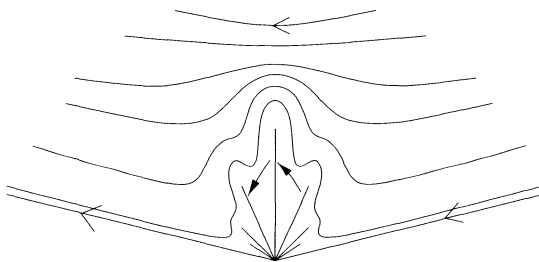


FIGURE 13. Cet homéomorphisme n'est pas le temps un d'un flot

Il existe des germes d'homéomorphismes qui ne sont pas temps un d'un flot. C'est le cas de l'exemple de la figure 13. En effet, quand h est temps un d'un flot, l'ensemble stable du point fixe (défini comme $\{x \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} h^n(x) = 0\}$) est réunion d'orbites du flot ; ça ne peut pas être le cas pour ce dessin. Remarquons qu'on construit facilement une bonne mesure préservée par ce germe.

Dans le cas holomorphe parabolique, le voisinage de 0 est feuilleté par des courbes invariantes (figure 2) ; en particulier, on trouve des courbes totalement invariantes arbitrairement petites. Ceci est encore vrai pour des flots. Mais il n'y a pas d'équivalent de cette propriété pour les homéomorphismes : en effet, la figure 14 montre un germe

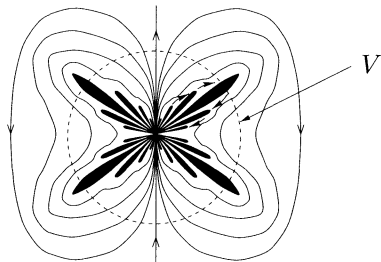


FIGURE 14. Il n'existe pas de « petit » ensemble connexe totalement invariant

d'homéomorphisme, d'indice 2, pour lequel il existe un voisinage V du point fixe tel que tout ensemble connexe, ne contenant pas le point fixe, et totalement invariant doit sortir de V ([LR97]).

f. Modification compliquée de flots. — Les exemples précédents ressemblent encore beaucoup à des flots (notamment par le fait qu'ils se laissent facilement dessiner). Les choses se compliquent pour l'intuition (comme pour le dessinateur) quand des orbites « se croisent ». Dans la proposition suivante, on note $W_{\rightarrow N}$ et $W_{\rightarrow S}$ les ensembles stables de N et S , définis par $W_{\rightarrow N} = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} h^n(x) = N\}$.

Proposition 1.19. — *Pour tout entier p , il existe un homéomorphisme h de la sphère \mathbb{S}^2 , vérifiant :*

- h a exactement deux points fixes N et S ;
- il existe un disque topologique D tel que
 - $\partial D \subset W_{\rightarrow N}$;
 - $D \cap W_{\rightarrow S} \neq \emptyset$;
- les indices des points N et S sont respectivement $1 + p$ et $1 - p$.

De plus, si $p > 0$, h préserve une bonne mesure au voisinage de S .

Comme pour beaucoup d'exemples, on va partir d'un flot très simple et lui faire subir une série de *modifications libres* :

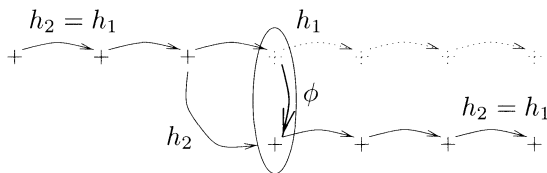


FIGURE 15. Modification libre

Définition 1.20 (M. Brown, figure 15). — L'homéomorphisme h_2 est une *modification libre* de h_1 à support dans D si $h_2 = \phi \circ h_1$, où ϕ est un homéomorphisme tel que :

- (1) le support de ϕ est inclus dans D , autrement dit tout point hors de D est fixe par ϕ ;
- (2) D est un disque topologique fermé d'intérieur *libre* pour h_1 , c'est-à-dire vérifiant $h_1(\text{Int}(D)) \cap \text{Int}(D) = \emptyset$.

L'intérêt des modifications libres est qu'on a :

Affirmation 1.21. — Une modification libre ne change pas l'ensemble des points fixes, ni les indices des points fixes isolés.

La preuve est immédiate (en particulier, on peut toujours calculer les indices le long de courbes qui évitent le support de la modification libre).

Démonstration de la proposition 1.19. — La figure 16 représente un flot sur une demi-sphère, qui est composé d'un secteur hyperbolique en S , et en N d'un secteur elliptique avec une petite bulle elliptique. Soit h_1 le temps un de ce flot, que l'on complète sur la « face cachée » (demi-sphère restante) par n'importe quelle dynamique sans point fixe, de manière à obtenir les indices souhaités pour les points N et S . Soit D un disque topologique fermé comme sur la figure 16, suffisamment petit pour

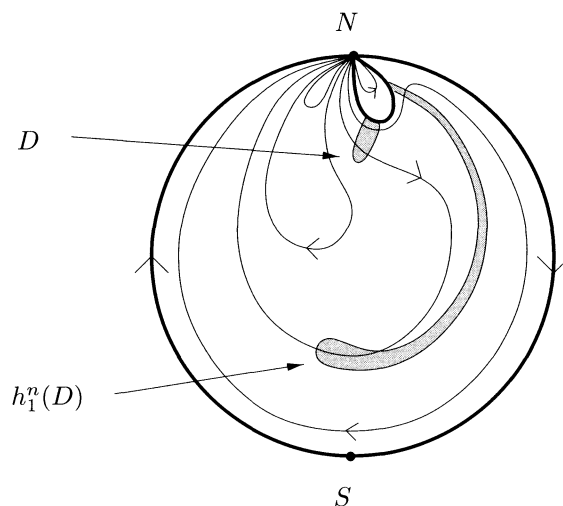


FIGURE 16. Flot à modifier

être disjoint de son image. Remarquons que $D \subset W_{\rightarrow, N}(h_1)$, mais que la suite $(h_1^n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément vers N sur D (le bord de la bulle est dans l'ensemble positivement singulier de h_1). La figure 17 représente les itérés positifs de D au voisinage du point fixe S . Soit γ un arc issu de S , transverse au flot, qui rencontre

tous les itérés $h_1^n(\text{Int}(D))$ pour $n \geq 0$; on choisit pour chaque $n \geq 0$ un point x_n sur $\text{Int}(h_1^n(D)) \cap \gamma$. Le point x_0 tente de s'enfuir vers N à chaque itération par h_1 , le

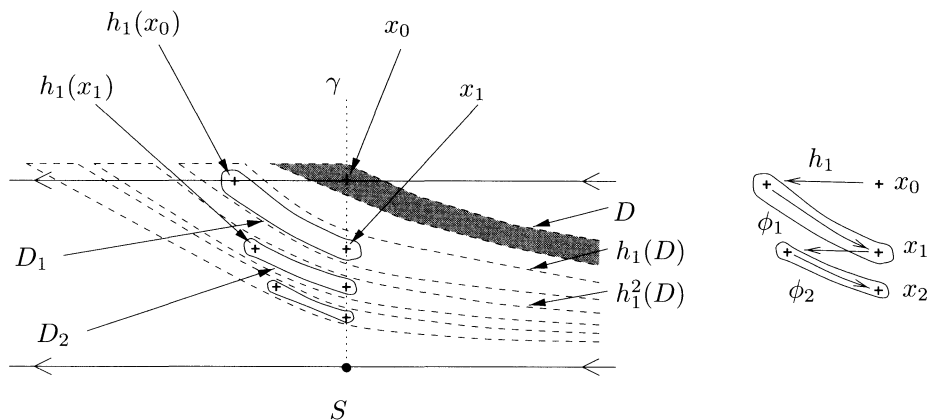


FIGURE 17. Modifications libres successives

but du jeu va être de le ramener vers S par des modifications libres. On choisit pour chaque $n \geq 1$ un disque D_n inclus dans $h_1^n(D)$ et contenant $h_1(x_{n-1})$ et x_n ; ainsi qu'un homéomorphisme ϕ_n qui est l'identité hors de D_n et qui envoie $h_1(x_{n-1})$ sur x_n . On pose alors $h_2 = \phi_1 \circ h_1$, et par récurrence $h_{n+1} = \phi_n \circ h_n$. D'après l'affirmation 1.21, h_n n'a pas d'autres points fixes que N et S , avec le même indice que h_1 . D'autre part, on a pu choisir les D_n de manière à ce que la suite (D_n) tende vers S (pour la topologie de Hausdorff), et dans ce cas la suite (h_n) converge uniformément vers un homéomorphisme h_∞ . Cet homéomorphisme répond au problème; en effet :

- on n'a pas modifié la dynamique sur les itérés de ∂D ; on a donc, comme pour h_1 , $\partial D \subset W_{\rightarrow N}(h_\infty)$;
- la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est devenue une demi-orbite positive de h_∞ ; donc x_0 est un point de D dont les itérés positifs tendent vers S .
- si $p > 0$, on a pu partir d'un flot h_1 qui, au point S , est un germe de flot « simple » ne comportant que des secteurs hyperboliques (voir section a); ce flot préserve une bonne mesure au voisinage de S . Pour que h_∞ préserve encore cette mesure, il suffit alors qu'elle soit préservée par chacun des homéomorphismes ϕ_n ; ceci est possible (on montre très facilement que le groupe des homéomorphismes du disque préservant la mesure de Lebesgue agit transitivement sur l'intérieur du disque; et le théorème d'Oxtoby-Ulam [OU41] permet de généraliser ce résultat à n'importe quelle bonne mesure sur n'importe quel disque topologique fermé). \square

Cet exemple montre une des limites du théorème de la « variété » stable topologique : ici, contrairement au cas des points hyperboliques de la dynamique différentiable, ni l'ensemble stable de S ni son ensemble stable local, ni même leurs

adhérences, ne sont connexes (cette remarque répond à une question de S. Baldwin et E. E. Slaminka, voir [BS90]).

g. Difficultés cachées. — Finissons ce panorama d'exemples en mentionnant un des pièges des germes d'homéomorphismes de surface (ou de difféomorphismes non hyperboliques) : le simple dessin d'un germe hyperbolique selle (troisième dessin de la figure 1) est trompeur, parce qu'on pourrait croire qu'il suffit à définir la dynamique ; en réalité, il existe une infinité (non dénombrable) de classes de conjugaison de germes d'homéomorphismes qui sont toutes représentées par ce dessin. Formellement, ces homéomorphismes préservent tous chaque feuille du feuilletage par hyperboles dessiné sur la figure 1, et déplacent les points dans le sens des flèches ; mais la liberté dans le choix de la longueur du déplacement le long de chaque feuille permet cette coexistence d'une infinité de dynamiques distinctes (bien qu'extrêmement semblables). Certains de ces germes sont temps un d'un flot, d'autres non, certains ne sont même conjugués à aucun de leurs itérés h^n . Le texte [BLR03] donne une idée de la diversité de cette faune, en décrivant un nouvel invariant de conjugaison des homéomorphismes de Brouwer, *l'ensemble oscillant*.

CHAPITRE 2

INTERMÈDE : DU LOCAL AU GLOBAL

Les résultats sur les homéomorphismes locaux vont se déduire de l'étude de la dynamique d'une certaine classe d'homéomorphismes de la sphère ; ce chapitre fait le lien entre le contexte local et le contexte global.

2.1. Le théorème d'extension

Théorème 2.1 (d'extension). — Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local ⁽¹⁾ fixant uniquement 0. Alors il existe un homéomorphisme $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, fixant uniquement 0, ayant le même germe que h en 0.

Ce théorème est déjà connu : il apparaît essentiellement dans un article de O. H. Hamilton, qui l'attribue à M. H. A. Newman (voir [Ham54]). Nous donnons ici une nouvelle preuve, reposant uniquement sur la théorie élémentaire des revêtements, principalement sur les théorèmes de classification des revêtements et de relèvement des applications (voir [Spa66], chapitre 2, théorèmes 13 et 5 des sections 5 et 4). Plus précisément, nous allons démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.2. — Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local fixant uniquement 0 ; on suppose que U est un disque topologique fermé ⁽²⁾, et on note W n'importe quel ouvert connexe, contenant le point 0, tel que W et son image $h(W)$ sont inclus dans U . Alors la restriction de h à W s'étend en un homéomorphisme H du plan dont 0 est le seul point fixe.

L'idée d'utiliser les revêtements dans le contexte des homéomorphismes de surfaces provient de M. Brown ([Bro77]).

Voici l'idée de la preuve. il est facile d'étendre h en un homéomorphisme du plan si l'on autorise l'apparition de nouveaux points fixes ; toute la difficulté consiste ensuite

⁽¹⁾Définition 1.1.

⁽²⁾Définition 1.7.

à éliminer ceux-ci. À l'aide de la théorie des revêtements, on montre que l'application identité de U peut s'étendre en une application q du plan \mathbb{R}^2 sur le complémentaire de l'ensemble des points fixes à éliminer, qui est un revêtement (sauf au dessus du point fixe 0 , qui n'a qu'un seul antécédent par q). On obtient alors le résultat en relevant l'homéomorphisme h par cette application q .⁽³⁾ Soulignons l'un des intérêts de la méthode par revêtement : cette partie de la construction est canonique (voir [LR] pour une application de cette remarque à la construction d'invariants de conjugaison).

La figure 1 montre un homéomorphisme local $h : U \rightarrow V$, fixant uniquement 0 , mais tel que tout homéomorphisme H qui étend h possède au moins deux points fixes⁽⁴⁾. Ceci montre qu'on ne peut pas étendre h sans restriction préalable, et explique le rôle de W dans l'énoncé.

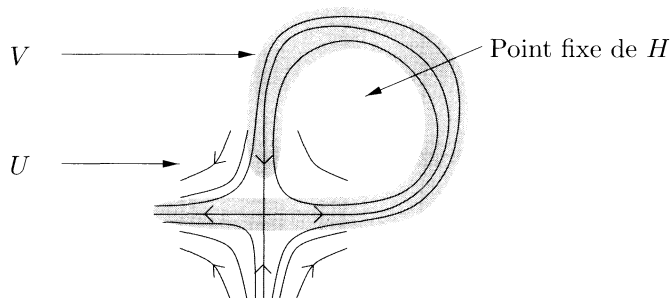


FIGURE 1. On ne peut pas étendre h sans rajouter de point fixe

Démonstration de la proposition 2.2. — Pour tout espace topologique X localement simplement connexe, et tout point x_0 de X , on notera $\pi_1(X, x_0)$ le groupe fondamental de X basé en x_0 . Quand cela a un sens, on note $f_\#$ l'application induite par une application continue f au niveau des groupes fondamentaux. On notera aussi, pour tout sous-ensemble X du plan, $\dot{X} = X \setminus \{0\}$.

Extension avec points fixes. — Comme U est un disque topologique fermé, le théorème de Schoenflies (voir appendice) permet d'étendre h en un homéomorphisme du plan, que l'on note encore h ; bien sûr, en général, cet homéomorphisme a des points fixes hors de U .

Soit O l'unique composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fixe}(h)$ contenant \dot{U} ; on a $h(O) = O$.

Revêtement de O par un anneau ouvert. — Soit x_0 un point de \dot{W} , et notons i l'inclusion de \dot{U} dans O . Le groupe $\pi_1(\dot{U}, x_0)$ est isomorphe au groupe infini cyclique \mathbb{Z} , et s'identifie via $i_\#$ à un sous-groupe de $\pi_1(O, x_0)$ que l'on note G . Soit

⁽³⁾Cette application q n'apparaît pas explicitement dans la preuve ci-dessous, mais correspond à l'application $p \circ s$.

⁽⁴⁾On peut prouver cette affirmation en utilisant le lemme 3.12 ci-dessous.

$p : (\tilde{O}, \tilde{x}_0) \rightarrow (O, x_0)$ le revêtement tel que $p_{\#}(\pi_1(\tilde{O}, \tilde{x}_0)) = G$ (théorème V.13 de [Spa66]). L'espace topologique \tilde{O} est une surface orientable, sans bord, de groupe fondamental isomorphe à \mathbb{Z} , il est par conséquent homéomorphe à l'anneau ouvert $\mathbb{A} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Soit \tilde{U} la composante connexe de $p^{-1}(\dot{U})$ qui contient \tilde{x}_0 ; on voit facilement que la restriction de p à \tilde{U} est un homéomorphisme sur \dot{U} (ceci vient du fait que $p_{\#}(\pi_1(\tilde{U}, \tilde{x}_0)) = \pi_1(\dot{U}, x_0)$ et du théorème de relèvement des applications). Dans la compactification de l'anneau \tilde{O} en deux bouts, on note $+\infty$ le bout qui est dans l'adhérence de \tilde{U} . On considère alors l'inverse de la restriction de p à \tilde{U} : elle s'étend en 0 en un homéomorphisme s entre U et $\tilde{U} \cup \{+\infty\}$.

Relevé de h . — Puisque x_0 est dans \dot{W} , que W et $h(W)$ sont inclus dans U , et que h préserve l'orientation, on a $h_{\#}(G) = i_{\#}\pi_1(\dot{U}, h(x_0))$.⁽⁵⁾ Par conséquent,

$$p_{\#}(\pi_1(\tilde{O}, s \circ h(x_0))) = h_{\#}(G) = (h \circ p)_{\#}(\pi_1(\tilde{O}, \tilde{x}_0)).$$

Le théorème de relèvement des application entraîne alors l'existence d'une (unique) application $\tilde{h} : \tilde{O} \rightarrow \tilde{O}$ telle que $p\tilde{h} = hp$, et qui envoie $\tilde{x}_0 = s(x_0)$ sur $s(h(x_0))$. Cette application est un homéomorphisme (car c'est un revêtement qui induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux). Cet homéomorphisme se prolonge en un homéomorphisme du plan $\tilde{O} \cup \{+\infty\}$ qui fixe $+\infty$, et qui n'a pas d'autre point fixe (car h n'a pas de point fixe autre que 0 dans O). L'application s établit une conjugaison entre le germe de h en 0 et celui de \tilde{h} en $+\infty$.

Le théorème de Schoenflies permet de prolonger s en un homéomorphisme S entre \mathbb{R}^2 et $\tilde{O} \cup \{+\infty\}$. On vérifie que l'homéomorphisme du plan $H = S^{-1}\tilde{h}S$ fixe seulement 0, et qu'il coïncide avec h sur W (car $\tilde{h}(s(W)) \subset s(U)$). \square

⁽⁵⁾C'est ici que la preuve « coince » si $h(W)$ n'est pas inclus dans U : en effet la première extension de h aurait alors pu faire apparaître des points fixes « dans les trous » entre W et $h(W)$ (voir figure 1) ; dans ce cas, on n'aurait pas cette égalité.

CHAPITRE 3

DYNAMIQUE GLOBALE : ÉNONCÉ ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on énonce un théorème sur la dynamique de certains homéomorphismes de la sphère (section 3.1), et on introduit les outils nécessaires à sa démonstration : la théorie des homéomorphismes de Brouwer (section 3.2), la notion d'indice partiel (section 3.3), et les décompositions en briques (section 3.4). *Les chapitres 3 et 4 sont indépendants des chapitres 1 et 2. Dans le chapitre 3, les sections 3.3 et 3.4 sont indépendantes, et peuvent être lues dans un ordre quelconque.*

3.1. Définitions, énoncé

On note \mathbb{S}^2 la sphère topologique orientée de dimension 2, N et S deux points distincts de \mathbb{S}^2 . On se donne un homéomorphisme h de \mathbb{S}^2 qui préserve l'orientation. On suppose que $\text{Fixe}(h) = \{N, S\}$, où $\text{Fixe}(h)$ est l'ensemble des points fixes de h ,

$$\text{Fixe}(h) = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid h(x) = x\}.$$

L'ensemble de ces données sera appelé « hypothèse (H2) ».

a. Définitions

Définition 3.1. — Un ensemble $E \subset \mathbb{S}^2$ est *positivement invariant* si $h(E) \subset E$; on dit aussi que E est un *attracteur*. L'ensemble E est un *attracteur strict* si $h(E) \subset \text{Int}(E) \cup \text{Fixe}(h)$. On définit aussi les ensembles *négativement invariants*, *répulseurs* et *répulseurs stricts* en changeant h en h^{-1} . Un ensemble E est *totalement invariant* s'il est à la fois positivement et négativement invariant ($h(E) = E$).

Définition 3.2. — Un *disque topologique fermé* (respectivement *ouvert*) est un ensemble homéomorphe au disque unité fermé (respectivement ouvert) du plan.

Définition 3.3 (figure 1). — Un *pétale attractif basé en S* est un disque topologique fermé P dans \mathbb{S}^2 , vérifiant :

- $S \in \partial P$;
- $N \notin P$;
- P est un attracteur strict.

Un *pétale répulsif* est un pétale attractif pour h^{-1} . On définit de même les pétales attractifs et répulsifs basés en N .

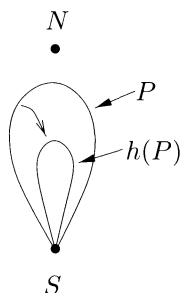


FIGURE 1. Un pétale attractif en S

Définition 3.4 (figure 2). — Un *croissant attractif* pour h est un disque topologique fermé C dans \mathbb{S}^2 , vérifiant :

- $N, S \in \partial C$;
- C est un attracteur strict.

Un *croissant répulsif* est un croissant attractif pour h^{-1} .

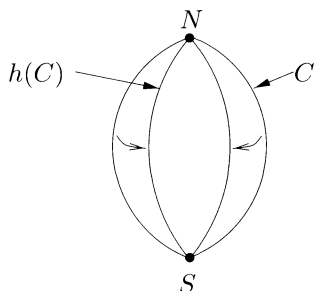


FIGURE 2. Un croissant attractif

Certains croissants ont la propriété d'être des limites de pétales, ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 3.5 (figure 3). — Le croissant attractif C est dit à *dynamique Nord-Sud* si de plus pour tout voisinage O_N de N , il existe un pétale attractif P basé en S tel que

- $P \subset C$;
- $C \setminus P \subset O_N$.

Un *croissant répulsif à dynamique Sud-Nord* est un croissant attractif à dynamique Nord-Sud pour h^{-1} . On définit de même les croissants attractifs à dynamique Sud-Nord et les croissants répulsifs à dynamique Nord-Sud en inversant les rôles des points N et S .

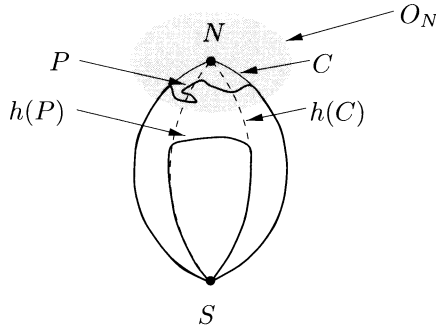


FIGURE 3. Un croissant attractif à dynamique Nord-Sud

b. Énoncé du théorème principal. — On peut maintenant énoncer le résultat qui constitue le cœur de l'article (figure 4).

Théorème D. — Soit h un homéomorphisme de la sphère, préservant l'orientation, fixant uniquement les deux points N et S (hypothèse (H2)), et tel que $\text{Indice}(N) = 1 - p < 1$. Il existe alors p croissants attractifs à dynamique Nord-Sud, et p croissants répulsifs à dynamique Sud-Nord, deux à deux d'intersection réduite à $\{N, S\}$, les croissants attractifs et répulsifs étant cycliquement alternés autour de N et S .

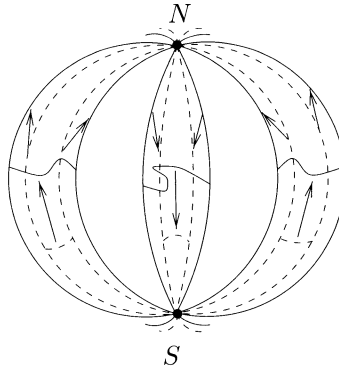


FIGURE 4. Illustration du théorème principal

D'après le théorème de Schoenflies-Homma (voir l'appendice), on peut supposer que les bords des croissants et leurs images sont des grands cercles (géodésiques) de la sphère euclidienne ; le théorème est alors illustré par la figure 4. Remarquons que les

hypothèses du théorème ne sont pas symétriques en N et S : le point N est d'indice $1 - p < 1$, tandis que l'indice de S est $1 + p > 1$ (d'après la formule de Lefschetz) ; la conclusion est tout aussi dissymétrique : notamment, tous les pétales associés aux croissants sont basés en S .

c. Idée de la preuve du théorème D. — Expliquons brièvement les grandes étapes de la preuve du théorème. On commence par construire une *décomposition en briques* : il s'agit d'une sorte de triangulation de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, suffisamment fine pour que chaque triangle (appelé ici *brique*) soit disjoint de son image par h (section 3.4). On cherche alors des croissants et pétales *simpliciaux*, c'est-à-dire qui sont des réunions de briques de la décomposition. Une courte étude combinatoire permet tout d'abord de trouver un premier croissant simplicial (en fait, on se contente d'en trouver un côté, proposition 4.12 et section 4.5). Par ailleurs, on montre que tout croissant simplicial minimal pour l'inclusion est à dynamique Nord-Sud ou Sud-Nord (proposition 4.8 et section 4.3).

On considère alors une famille maximale \mathcal{F} de croissants attractifs et répulsifs simpliciaux minimaux deux à deux d'intérieurs disjoints (section 4.2). Il reste à montrer que cette famille \mathcal{F} contient suffisamment de croissants. Pour cela, on calcule l'indice du point fixe N à l'aide de la notion d'*indice partiel* (étudiée à la section 3.3). Dans ce calcul (proposition 4.11 et section 4.4), on montre d'une part que les zones entre deux croissants successifs de la famille \mathcal{F} ont une contribution nulle (c'est une conséquence de la maximalité de \mathcal{F}). D'autre part, la contribution d'un croissant vaut $+1/2$ ou $-1/2$ selon qu'il est attractif ou répulsif, et à dynamique Nord-Sud ou Sud-Nord : les « bons » croissants (ceux des deux types recherchés par le théorème D) ayant une contribution négative et les « mauvais » une contribution positive. Un petit argument combinatoire montre alors que la famille de croissants \mathcal{F} contient une sous-famille satisfaisant le résultat du théorème.

Il reste à préciser que les résultats intermédiaires sont racontés dans un cadre différent, obtenu en relevant la dynamique au revêtement universel de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$. L'existence d'une unique manière non triviale⁽¹⁾ de relever la dynamique est prouvée à la section 4.6. On peut résumer l'intérêt de ce passage au revêtement par le fait suivant : dans la sphère, le complémentaire d'un croissant est connexe ; par contre, le relevé d'un croissant au revêtement universel est une bande qui sépare le plan en deux composantes connexes, ce qui permet de parler du « côté droit » et du « côté gauche » de la bande.

3.2. La théorie de Brouwer

Dans cette section, on rappelle des objets et des résultats autour de la théorie de Brouwer : l'indice, les chaînes de disques et une variante d'un lemme de Franks qui

⁽¹⁾C'est-à-dire non conjuguée à une translation, voir la proposition 4.45.

joue un rôle important dans ce texte, les droites de Brouwer et l'énoncé du théorème de translation plane.

La théorie de Brouwer traite des homéomorphismes de la sphère \mathbb{S}^2 qui n'admettent pas de courbe fermée d'indice 1. Le point clé est que cette hypothèse interdit presque toute forme de récurrence non triviale dans la dynamique (sections b). Cette propriété remarquable permet ensuite de montrer que tous ces homéomorphismes peuvent être obtenus en recollant des translations : plus précisément, le complémentaire des points fixes est recouvert par des ouverts totalement invariants, homéomorphes au plan (autrement dit : connexes et simplement connexes), sur lesquels la dynamique est conjuguée à une translation du plan ; c'est une partie de ce qu'on appelle le théorème de translation plane (section d). L'article d'origine de Brouwer est la référence [Bro12] ; les références modernes sont [BF93, Bro84, Bro85, Bro90a, Fat87, Fra92, Gui94, Gui95, LCS96].

La théorie construit notamment des courbes disjointes de leur image, appelées *droites de Brouwer* (section c) ; de telles courbes formeront les bords des croissants et des pétales dans la preuve du théorème principal.

On suppose désormais que h est un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 , préservant l'orientation, n'ayant qu'un nombre fini de points fixes (h possède au moins un point fixe d'après la formule de Lefschetz, voir ci-dessous). À partir de la section c, on supposera de plus que h n'a pas de courbe fermée d'indice 1.

a. Rappels sur l'indice. — La formule de Lefschetz est expliquée dans les livres [GP74] dans le cadre différentiable, [Bro71, Dol95] dans le cadre topologique.

Indice d'une courbe fermée dans le plan

Définition 3.6. — Une *courbe* du plan est une application continue γ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^2 . Elle est *simple* si c'est une application injective (on dit aussi que c'est un *arc*) ; *fermée* si $\gamma(0) = \gamma(1)$; *fermée simple* si elle n'a pas d'autre point double que $\gamma(0)$ (dans ce cas, on parle aussi de *courbe de Jordan*, ou de *cercle topologique*). Une courbe *va de* X à Y ou *joint* X et Y si $\gamma(0) \in X$ et $\gamma(1) \in Y$. Les *extrémités* de γ sont les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$; son *intérieur* est $\gamma(]0, 1[)$, noté $\text{Int}(\gamma)$.

On utilisera le même vocabulaire pour les courbes de la sphère. On confondra souvent une courbe γ et son image $\gamma([0, 1])$.

Soit γ une courbe du plan euclidien \mathbb{R}^2 . Si \vec{v} est un champ de vecteurs continu défini sur γ et ne s'y annulant pas, on appelle *indice de \vec{v} le long de γ* , et on note $\text{Indice}(\vec{v}, \gamma)$, la variation angulaire de \vec{v} quand on parcourt γ : plus précisément, soit ϕ le revêtement universel du cercle unité du plan :

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ \theta &\longmapsto \exp(2i\pi\theta).\end{aligned}$$

L'application

$$f = \frac{\vec{v} \circ \gamma}{\|\vec{v} \circ \gamma\|} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

se relève par ϕ en une application $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. telle que $\phi \circ F = f$), et on pose $\text{Indice}(\vec{v}, \gamma) = F(1) - F(0)$. Remarquons que si γ est une courbe fermée, l'indice est un nombre entier.

Soit g une application continue d'un ouvert U du plan dans le plan, et E l'ensemble des points fixes de g ; on définit sur $U \setminus E$ le champ de vecteurs

$$\vec{g}_x = \frac{g(x) - x}{\|g(x) - x\|}.$$

Si maintenant γ est une courbe dans $U \setminus E$, on pose $\text{Indice}(g, \gamma) = \text{Indice}(\vec{g}, \gamma)$.

Si γ est une courbe fermée, l'entier $\text{Indice}(g, \gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ (en tant que courbe fermée) dans le complémentaire des points fixes de g : en particulier, une courbe qui y est nulhomotope est d'indice nul. L'indice est un invariant de conjugaison, c'est-à-dire que pour tout homéomorphisme ϕ préservant l'orientation, on a

$$\text{Indice}(\phi \circ g \circ \phi^{-1}, \phi(\gamma)) = \text{Indice}(g, \gamma).$$

En effet, l'espace des homéomorphismes du plan préservant l'orientation est connexe, et le nombre $\text{Indice}(\phi \circ g \circ \phi^{-1}, \phi(\gamma))$ est un entier qui dépend continûment de ϕ , il est donc constant (voir par exemple [LR97] pour les propriétés topologiques des espaces d'homéomorphismes de surfaces).

Indice d'un point fixe. — Soit g comme ci-dessus, et x_0 un point fixe isolé de g , c'est-à-dire un point isolé de l'ensemble E . On définit alors l'indice de x_0 comme l'indice de n'importe quelle courbe de Jordan γ dans U qui entoure x_0 mais n'entoure aucun autre point fixe. Ce nombre ne dépend pas de la courbe γ choisie, et ne dépend que de la classe de conjugaison du germe de g en x_0 .

On a alors la formule suivante : l'indice d'une courbe de Jordan γ qui n'entoure qu'un nombre fini de points fixes de g est égal à la somme des indices de ces points fixes.

Indices sur la sphère. — Revenons à notre homéomorphisme h de la sphère. On peut maintenant définir l'indice d'un point fixe de h en se ramenant au plan au moyen d'une carte de la sphère.

Comme h est isotope à l'identité, et comme la caractéristique d'Euler-Poincaré de la sphère vaut 2, on a la formule de Lefschetz :

La somme des indices des points fixes de h vaut 2.

Notamment, h a au moins un point fixe.

Soit γ une courbe de Jordan de la sphère évitant les points fixes de h . Choisissons un point fixe de h , que l'on va noter ∞ , et identifions l'ouvert $\mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$ au plan. On peut montrer que l'indice de γ dans cette carte, que l'on note $\text{Indice}_\infty(h, \gamma)$, ne dépend que de la position de ∞ par rapport à γ : plus précisément, le complémentaire

de γ dans \mathbb{S}^2 a exactement deux composantes connexes (théorème de Jordan); si ∞ et ∞' sont dans la même composante connexe, on a $\text{Indice}_{\infty'}(h, \gamma) = \text{Indice}_{\infty}(h, \gamma)$; dans le cas contraire (*i.e.* si γ sépare ∞ et ∞'), $\text{Indice}_{\infty'}(h, \gamma) = 2 - \text{Indice}_{\infty}(h, \gamma)$. Cette affirmation est en fait évidente si h n'a qu'un nombre fini de points fixes (avec la formule de Lefschetz), puisque l'indice d'une courbe plane est la somme des indices des points fixes qu'elle entoure.

Il ressort de ce qui précède que :

Affirmation 3.7. — *Soit γ une courbe de Jordan sur la sphère ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *il existe un point fixe ∞ de h tel que $\text{Indice}_{\infty}(h, \gamma) = 1$;*
- (2) *pour tout point fixe ∞ de h , $\text{Indice}_{\infty}(h, \gamma) = 1$;*
- (3) *la somme des indices des points fixes de h dans chacune des deux composantes du complémentaire de γ vaut 1.*

L'affirmation précédente permet de dire ce qu'est une courbe de Jordan d'indice 1 dans la sphère :

Définition 3.8. — Une courbe de Jordan γ dans \mathbb{S}^2 est dite *d'indice 1* si les propriétés équivalentes de l'affirmation 3.7 sont vérifiées.

Indice des bords des disques attractifs. — Finissons par un lemme qui nous servira à plusieurs reprises, et dont la preuve est typique des calculs d'indices :

Lemme 3.9. — *Soit D un disque topologique fermé de \mathbb{S}^2 dont la frontière ne contient pas de point fixe. Si D est un attracteur ou un répulseur, alors le bord de D est une courbe d'indice 1.*

Démonstration. — Quitte à changer D en son complémentaire, on suppose que D est un attracteur. Le disque complémentaire de D est un attracteur pour h^{-1} , il contient donc un point fixe de h (d'après le théorème de point fixe de Brouwer). Le complémentaire de ce point fixe est identifié au plan. En utilisant le théorème de Schoenflies, on se ramène alors à la situation où D est le disque unité du plan.

Pour tout $t \in [0, 1]$, on note ϕ_t l'homothétie de centre $(0, 0)$ et de rapport t , et on pose $h_t(x) = \phi_t \circ h(x)$. L'hypothèse $h(D) \subset D$ entraîne que h_t n'a pas de point fixe sur ∂D . Le nombre $\text{Indice}(h_t, \partial D)$ est donc défini pour tout t , c'est un entier qui varie continûment, il est donc constant. D'autre part, $h_1 = h$, et h_0 est l'application constante $x \mapsto (0, 0)$, d'où $\text{Indice}(h, \partial D) = \text{Indice}(h_0, \partial D) = 1$. \square

b. Récurrence entraîne indice 1. — Les trois lemmes de ce paragraphe annoncent l'existence d'une courbe d'indice 1 sous des hypothèses de « quasi-périodicité » de plus en plus faibles, illustrées par la figure 5.

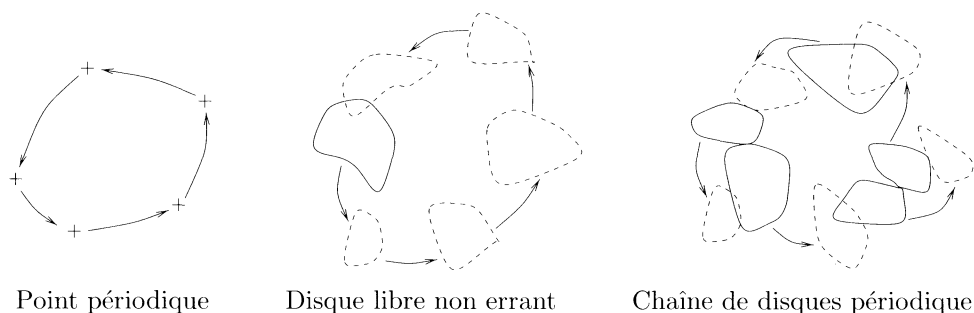


FIGURE 5. Trois types de récurrence de plus en plus fins

Orbite périodique

Lemme 3.10. — *Si h a un point périodique non fixe, alors il existe une courbe d'indice 1.*

Nous admettons ce lemme : pour la preuve en toute généralité, voir [Gui94], [Fat87], [Bro84] ou [BF93].

Si la période est 2, voici un argument adapté de la preuve de A. Fathi revisitée par M. Barge et J. Franks. On considère le revêtement $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ à deux feuillets ramifié au dessus des deux points de l'orbite périodique. Soit \tilde{h} un relevé de h par π , et F le sous-ensemble des points fixes de h constitué de ceux qui se relèvent en deux points fixes de \tilde{h} . Alors l'ensemble des points fixes de \tilde{h} est $\pi^{-1}(F)$; la somme des indices des points de $\pi^{-1}(F)$ pour \tilde{h} est donc égale à 2 (formule de Lefschetz) ; mais c'est aussi le double de la somme des indices des points de F pour h . D'après l'affirmation 3.7, toute courbe séparant F des autres points fixes de h est d'indice 1.

Pour une période plus grande, on ne connaît pas de preuve de « topologie algébrique ». L'idée de [BF93] consiste à se ramener au cas d'une période 2 en effectuant une série de modifications libres de h (définition 1.20). Nous allons déduire les deux lemmes suivants de ce lemme admis.

Disque libre non errant

Définition 3.11. — Un ensemble connexe C est *libre* s'il est disjoint de son image $h(C)$.

Lemme 3.12 (figure 5, milieu). — *Soit D un ensemble connexe par arcs de la sphère. On suppose que D est libre, mais qu'il rencontre l'un de ses itérés $h^n(D)$ pour $n \neq 0$. Alors il existe une courbe d'indice 1.*

La preuve utilise la notion de modification libre (définition 1.20).

Démonstration du lemme 3.12. — Dans un premier temps, on suppose que D est un disque topologique ouvert. On peut d'abord supposer que n est positif (quitte à remplacer D par $D' = h^n(D)$ et n par $n' = -n$), puis que c'est le plus petit entier positif vérifiant $D \cap h^n(D) \neq \emptyset$. Par hypothèse, il existe un point x de D tel que $h^n(x) \in D$. Soit ϕ un homéomorphisme qui envoie $h^n(x)$ sur x et qui est l'identité hors de D ; on pose $h_1 = \phi \circ h$ (voir figure 6).

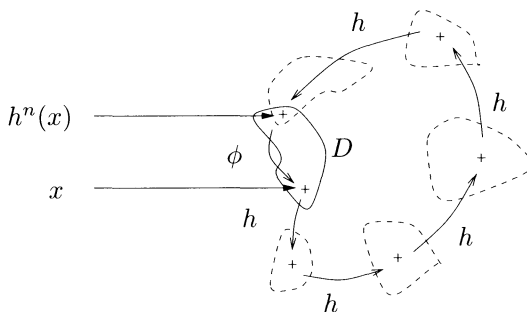


FIGURE 6. Transformation d'une orbite « quasi-périodique » en orbite périodique

En utilisant la minimalité de n , on voit qu'en restriction à D , on a $h_1^n = \phi \circ h^n$. On en déduit que x est un point périodique de h_1 . D'après le lemme 3.10, il existe une courbe γ d'indice 1 pour h_1 . D'autre part, les modifications libres ne changent pas l'indice des courbes, donc γ est aussi une courbe d'indice 1 pour h .

On traite maintenant le cas général, où D est n'importe quel ensemble connexe par arcs. Soit x un point de D tel que $h^n(x)$ soit aussi dans D . Soit γ un arc inclus dans D allant de x à $h^n(x)$. Cet arc est clairement libre; en utilisant le théorème de Schoenflies, on trouve un disque topologique ouvert D' , contenant γ , qui est encore libre; or D' rencontre son itéré $h^n(D')$. On conclut alors en appliquant le premier cas. \square

Rappelons que l'ensemble ω -limite d'un point x est

$$\omega(x) = \bigcap_{n_0 \geq 0} \text{Adh}(\{h^n(x) \mid n \geq n_0\}).$$

Corollaire 3.13. — Soit $x \in \mathbb{S}^2$; s'il n'y a pas de courbe d'indice 1, alors $\omega(x)$ est réduit à un point fixe de h : autrement dit, la suite $(h^n(x))_{n \geq 0}$ converge vers un point fixe de h .

Démonstration. — Soit x_0 un point de \mathbb{S}^2 qui n'est pas fixe. Alors tout disque D centré en x_0 et assez petit est libre. D'après le lemme 3.12, D est disjoint de tous ses itérés (on dit que x_0 est un point errant), autrement dit aucune orbite ne peut rencontrer D plus d'une fois; donc x_0 n'est dans l'ensemble ω -limite d'aucun point x .

Ceci montre que pour tout x , $\omega(x) \subset \text{Fixe}(h)$; il reste à voir que $\omega(x)$ ne peut pas contenir deux points fixes distincts. Soit k le nombre de points fixes de h , soit V_1, \dots, V_k des petits voisinages ouverts (disjoints) de chacun des points fixes, et K le compact complémentaire de la réunion des V_i . On peut choisir les V_i assez petits pour que la propriété de transition suivante soit respectée : tout point x dans un V_i qui a un itéré futur $h^n(x)$ dans un autre V_j doit avoir un itéré intermédiaire $h^m(x)$ ($0 < m < n$) dans K . D'autre part, K peut être recouvert par un nombre fini de disques libres, et chaque disque libre ne peut contenir qu'un seul itéré de x (lemme 3.12). Le point x n'a donc qu'un nombre fini d'itérés positifs dans K ; d'après la propriété de transition, tous ses itérés assez grands appartiennent alors au même V_i , et $\omega(x)$ contient un point fixe. \square

Chaîne de disques périodique. — Le concept de chaîne de disques a été introduit par J. Franks pour généraliser le théorème de Poincaré-Birkhoff ([Fra88]). Il permet d'affaiblir encore l'hypothèse de quasi-périodicité du lemme 3.12. Le lemme de J. Franks concerne les chaînes de *disques ouverts* (définition 3.15 ci-dessous). Nous donnons ici une généralisation aux chaînes de *pseudo-disques* (définitions 3.14 et 3.16). Cette petite amélioration technique nous permettra de simplifier les preuves utilisant les décompositions en briques, en rendant inutile la propriété de transversalité (voir la section 3.4, et aussi [LCa], [LCb], [Sau01]; cette remarque vient d'une discussion avec Lucien Guillou).

Définition 3.14. — Un *pseudo-disque* est une partie D de la sphère telle que pour tout $x, y \in D$, il existe un arc γ qui va de x à y , tel que l'intérieur de γ est inclus dans l'intérieur de D . ⁽²⁾

Définition 3.15 (figure 5, droite). — Une *chaîne de disques ouverts* pour h est une suite $(B_i)_{i=1, \dots, k}$, ($k \geq 1$), de disques topologiques ouverts de la sphère tels que :

- (1) les disques B_i sont disjoints deux à deux ;
- (2) chaque disque B_i est libre ;
- (3) il existe des entiers $n_i > 0$ tels que $h^{n_i}(B_i) \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ pour $i = 1, \dots, k-1$.

La chaîne de disques ouverts est dite *périodique* si de plus il existe $n_k > 0$ tel que $h^{n_k}(B_k) \cap B_1 \neq \emptyset$.

Définition 3.16. — Une *chaîne de pseudo-disques* pour h est une suite $(B_i)_{i=1, \dots, k}$, ($k \geq 1$), de pseudo-disques de la sphère tels que :

- (1') les *intérieurs* des pseudo-disques B_i sont disjoints deux à deux ;
- (2') chaque pseudo-disque B_i est libre ;
- (3') il existe des entiers $n_i > 0$ tels que $h^{n_i}(B_i) \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ pour $i = 1, \dots, k-1$.

⁽²⁾Cette propriété est exactement ce dont on a besoin dans la preuve du lemme 3.18 ci-dessous. En pratique, les pseudo-disques considérés seront toujours des sous-variétés à bord, et presque toujours des disques topologiques fermés (la seule exception concerne la preuve du lemme 3.65).

La chaîne de pseudo-disques est dite *périodique* si de plus il existe $n_k > 0$ tel que $h^{n_k}(B_k) \cap B_1 \neq \emptyset$.

Définition 3.17. — Soit $(B_i)_{i=1,\dots,k}$ une chaîne de pseudo-disques. Pour chaque entier i entre 1 et $k-1$, soit n_i le plus petit entier positif vérifiant $h^{n_i}(B_i) \cap B_{i+1} \neq \emptyset$. Les entiers $(n_i)_{i=1,\dots,k-1}$ seront dits *temps de transition* de la chaîne de pseudo-disques, et on appellera *points de transition* des points $(x_i)_{i=1,\dots,k-1}$ avec $x_i \in B_i \cap h^{-n_i}(B_{i+1})$. Pour une chaîne périodique, on définira de même un temps de transition n_k et un point de transition $x_k \in B_k \cap h^{-n_k}(B_1)$.

Lemme 3.18 (« lemme de Franks »). — *S'il existe une chaîne périodique de pseudo-disques pour h , alors il existe une courbe d'indice 1.*

Démonstration du lemme 3.18. — L'idée consiste à montrer que l'existence d'une chaîne périodique de pseudo-disques entraîne l'existence d'une chaîne périodique de disques ouverts, puis l'existence d'une orbite périodique (après une série de modifications libres, en généralisant la preuve du lemme 3.12).

Soit $(B_i)_{i=1,\dots,k}$ une chaîne périodique de pseudo-disques, telle que k soit minimal parmi toutes les chaînes périodiques pour h . Soient (n_i) les temps de transition de cette chaîne, et (x_i) des points de transition.

Supposons qu'il n'existe pas de courbe d'indice 1.

Montrons d'abord que $k \neq 1$: en effet, sinon, B_1 serait un ensemble libre, connexe par arcs, qui rencontre l'un de ses itérés par h ; ceci contredirait le lemme 3.12.

La minimalité de k implique alors⁽³⁾ :

$$(*) \quad \forall i, j, \forall n > 0, \quad (h^n(B_i) \cap B_j \neq \emptyset \implies j = i + 1).$$

On en déduit que les points $x_1, h^{n_1}(x_1), x_2, h^{n_2}(x_2), \dots, x_k, h^{n_k}(x_k)$ sont deux à deux distincts. En effet :

- (1) $x_i \neq h^{n_i}(x_i)$ d'après le lemme 3.10 ;
- (2) si $i \neq j$, alors $x_i \neq x_j$ (sinon $h^{n_i}(B_j)$ rencontre B_{i+1} , ce qui contredit $(*)$) ;
- (3) si $i \neq j$, alors $h^{n_i}(x_i) \neq h^{n_j}(x_j)$ (sinon $h^{n_j}(B_j)$ rencontre B_{i+1}) ;
- (4) si $i \neq j$, alors $x_i \neq h^{n_j}(x_j)$ (sinon $h^{n_i+n_j}(B_j)$ rencontre B_{i+1}).

On utilise maintenant la définition des pseudo-disques : pour chaque i , on choisit un arc γ_i d'intérieur inclus dans l'intérieur de B_i et reliant x_i et $y_i = h^{n_{i-1}}(x_{i-1})$. D'après le point 2' de la définition d'une chaîne de pseudo-disques, chaque arc γ_i est libre. D'après le point 1', les intérieurs de ces arcs sont disjoints deux à deux. D'autre part, les considérations précédentes sur leurs extrémités montrent que les arcs γ_i sont également disjoints deux à deux.

En épaississant légèrement ces arcs (à l'aide du théorème de Schoenflies), on obtient des disques topologiques ouverts B'_i (chaque B'_i contient γ_i), qui sont encore libres et

⁽³⁾Dans tout ce paragraphe, les indices i et j sont considérés modulo k .

disjoints deux à deux. La suite $(B'_i)_{i=1,\dots,k}$ est alors une chaîne périodique de disques ouverts.

Quitte à changer de chaîne, on peut supposer que k est encore minimal et que les (n_i) sont les temps de transition de $(B'_i)_{i=1,\dots,k}$. Dans ce cas, pour chaque i , les itérés $h(x_i), \dots, h^{n_i-1}(x_i)$ sont en dehors de la réunion de tous les disques de la chaîne. Pour chaque i , on considère alors un homéomorphisme ϕ_i , à support dans $\text{Adh}(B'_i)$, qui envoie $h^{n_i-1}(x_{i-1})$ sur x_i . Remarquons que ces k homéomorphismes commutent (voir figure 7). On pose $\Phi = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_k$, et $h_1 = \Phi \circ h$. Le point x_1 est un point périodique de h_1 (sa période est la somme des temps de transition). \square

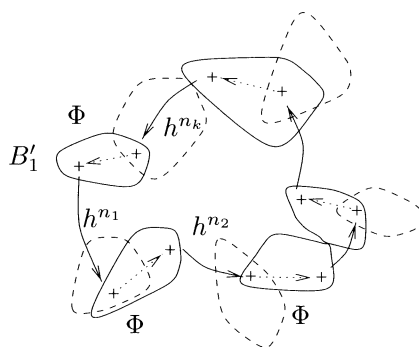


FIGURE 7. Transformation d'une « quasi-orbite périodique » en orbite périodique

c. Droites et domaines de Brouwer. — On suppose dorénavant qu'il n'existe pas de courbe d'indice 1 dans $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fixe}(h)$, ce qui revient à dire qu'il n'existe pas de sous-ensemble de points fixes dont la somme des indices fait 1 (affirmation 3.7).

Définitions

Définition 3.19. — Un *plongement* est une application continue injective. Un plongement est *propre* si l'image réciproque de tout compact est compacte. Une *droite topologique* est l'image d'un plongement propre ϕ de la droite réelle \mathbb{R} dans $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fixe}(h)$.

Pour un plongement de \mathbb{R} dans $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fixe}(h)$, le fait d'être propre équivaut à se prolonger continûment à la droite achevée $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en envoyant les extrémités $+\infty$ et $-\infty$ dans $\text{Fixe}(h)$ (ou encore, ϕ est un homéomorphisme sur son image, qui est fermée dans $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fixe}(h)$). On confondra souvent le plongement ϕ et son image. D'autre part, remarquons que l'adhérence (dans \mathbb{S}^2) d'une droite topologique est un cercle topologique ou un arc, selon qu'elle contient un ou deux points fixes.

Définition 3.20. — Si M est un espace topologique et A, B et C sont trois sous-espaces disjoints, on dit que C *sépare* A et B si A et B sont inclus dans deux composantes connexes distinctes du complémentaire de C .⁽⁴⁾

Définition 3.21. — Une droite topologique Δ est une *droite de Brouwer* si

- (1) elle est libre par h ;
- (2) dans le cas où son adhérence est un cercle topologique, elle sépare son image $h(\Delta)$ et sa préimage $h^{-1}(\Delta)$.

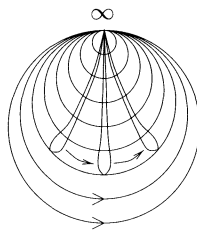


FIGURE 8. Une fausse droite de Brouwer

On peut voir des exemples de droites de Brouwer sur les figures 14 et 30 (pages 49 et 69). La figure 8 représente une droite topologique libre pour la translation $\tau : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$ sur la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, mais qui n'est pas une droite de Brouwer, montrant la nécessité de la deuxième hypothèse.

Propriétés

Remarque 3.22. — Soit Δ_0 une droite topologique libre dont l'adhérence est un cercle topologique, et notons $\vec{\Delta}_0$ la droite Δ_0 orientée de manière à ce que $h(\Delta_0)$ soit situé à droite de $\vec{\Delta}_0$. Alors la deuxième condition de la définition 3.21 est vérifiée (et Δ_0 est une droite de Brouwer) si et seulement si Δ_0 est à gauche de $h(\vec{\Delta}_0)$. Ceci est dû au fait que h préserve l'orientation.

Remarque 3.23. — Soit Δ_0 une droite topologique libre dont l'adhérence est un cercle topologique, et notons $P^+(\Delta_0)$ l'unique disque topologique fermé de la sphère, de frontière $\text{Adh}(\Delta_0)$, qui contient $h(\Delta_0)$. Alors Δ_0 est une droite de Brouwer si et seulement si $P^+(\Delta_0)$ est un attracteur strict. Cet attracteur sera baptisé *pétale attractif* de Δ_0 .

Le lemme 3.12 entraîne immédiatement :

Remarque 3.24. — Une droite de Brouwer est disjointe de tous ses itérés. En particulier, avec la remarque 3.23, on voit qu'une droite de Brouwer pour h est une droite de Brouwer pour h^n pour tout entier $n \neq 0$.

⁽⁴⁾La relation « ne pas être séparés par C » est évidemment une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties connexes de M disjointes de C .

L'intérêt des droites de Brouwer réside dans l'existence d'une zone où la dynamique est conjuguée à une translation :

Affirmation 3.25 (figure 9). — Soit Δ une droite de Brouwer.

- (1) Il existe un unique disque topologique ouvert D tel que
 - $\partial D \setminus \text{Fixe}(h) = \Delta \cup h(\Delta)$;
 - $D \cap h^{-1}(\Delta) = \emptyset$.

De plus, ce disque est libre.

- (2) Soit

$$U(\Delta) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(D \cup \Delta).$$

Il existe un homéomorphisme $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow U(\Delta)$ qui conjugue la translation $\tau : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$ et la restriction $h : U(\Delta) \rightarrow U(\Delta)$. De plus,

- les ensembles $\phi(\{x\} \times \mathbb{R})$ sont des droites de Brouwer ;
- $\phi(\{0\} \times \mathbb{R}) = \Delta$.

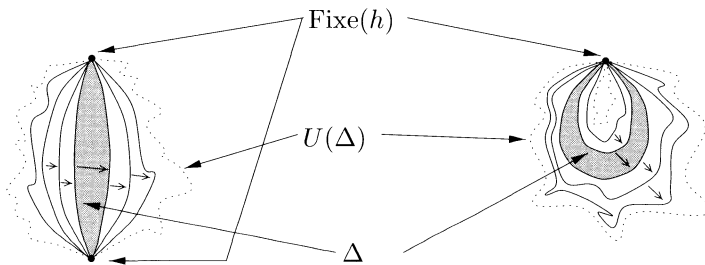


FIGURE 9. Droites et domaines de Brouwer

Définition 3.26. — Le disque D de l'affirmation précédente est appelé *domaine fondamental* de Δ , et noté $D(\Delta, h(\Delta))$. L'ouvert $U(\Delta)$ est appelé *domaine de Brouwer engendré par Δ* .

L'ouvert $U(\Delta)$ est homéomorphe au plan, mais sa frontière n'est en général pas localement connexe.

Démonstration de l'affirmation 3.25

Premier point. — Soit Δ une droite de Brouwer ; on fait la preuve dans le cas où l'adhérence de Δ contient deux points fixes distincts N et S (l'autre cas étant similaire). L'ensemble $\gamma = \Delta \cup h(\Delta) \cup \{N, S\}$ est une courbe de Jordan, et $h^2(\Delta)$ est disjointe de γ (remarque 3.24). Appelons D celui des deux disques topologiques ouverts de frontière γ qui ne contient pas $h^2(\Delta)$. Montrons que D est libre. La frontière de $h(D)$ est $h(\gamma)$, elle ne rencontre pas D . Il y a donc deux possibilités : ou bien

$D \subset h(D)$, ou bien $D \cap h(D) = \emptyset$; il reste à montrer que le premier cas est impossible. Ceci est dû au fait que h préserve l'orientation. En effet, notons $\vec{\Delta}$ la droite Δ orientée de S vers N ; ceci définit localement un côté droit et un côté gauche de $\vec{\Delta}$. L'image $h(\vec{\Delta})$ également orientée de S vers N (parce que h fixe N et S). Supposons par exemple que D soit du côté droit de $\vec{\Delta}$. Alors D est du côté gauche de $h(\vec{\Delta})$ (regarder l'allure au voisinage de N), mais $h(D)$ est du côté droit de $h(\vec{\Delta})$ puisque h préserve l'orientation. Ceci montre que le premier cas est impossible (même raisonnement si D est du côté gauche de Δ).

Deuxième point. — On définit le plongement ϕ en envoyant le domaine fondamental de la translation $[0, 1] \times \mathbb{R}$ sur $\Delta \cup D \cup h(\Delta)$, en respectant la condition de conjugaison sur le bord du domaine; il y a ensuite une unique manière de prolonger ϕ au plan en remplissant la condition de conjugaison. L'affirmation précédente et le lemme 3.12 sur les itérés des disques libres montrent alors que ϕ est injective. Les détails sont laissés au lecteur. \square

d. Théorème de translation plane. — On peut maintenant énoncer le théorème de translation plane de Brouwer. L'énoncé d'origine de Brouwer concerne le cas avec un seul point fixe; l'énoncé généralisé ci-dessous est dû à Slaminka (voir [Sla88b]). Par ailleurs, rappelons que L. Guillou a encore étendu l'énoncé à tout homéomorphisme libre d'une surface compacte ([Gui95]).

Théorème 3.27 (Brouwer, Slaminka). — *Soit h un homéomorphisme de la sphère, préservant l'orientation, ayant un nombre fini de points fixes, sans courbe d'indice 1. Alors pour tout $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \text{Fixe}(h)$ il existe une droite de Brouwer Δ contenant x .*

De manière équivalente, tout point qui n'est pas fixe est dans un domaine de Brouwer (via l'affirmation 3.25, deuxième point). Une des preuves modernes, due à P. Le Calvez et A. Sauzet, sera donnée à la section 3.4 h comme première application des décompositions en briques.

3.3. Indices partiels

Les sections 3.4, 4.3, 4.5, 4.6 sont indépendantes de cette section du texte.

Dans cette section, on suppose que h est un homéomorphisme de la sphère, préservant l'orientation, et ayant un unique point fixe, qu'on note ∞ . L'ensemble de ces données sera appelé « hypothèse (H1) ». D'après la formule de Lefschetz, le point fixe est d'indice 2, et les résultats des paragraphes précédents (b, c, d) s'appliquent à h . On identifiera $\mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$ au plan orienté \mathbb{R}^2 via un homéomorphisme préservant l'orientation, ce qui fait de h un homéomorphisme de Brouwer :

Définition 3.28. — Un homéomorphisme de Brouwer est un homéomorphisme du plan, préservant l'orientation, sans point fixe.

Le théorème principal relie l'indice du point fixe N au nombre de croissants. Pour sa preuve, lorsqu'il faudra montrer qu'on a obtenu le nombre de croissants voulu, nous devrons calculer la contribution de chaque croissant et de chaque zone entre deux croissants adjacents à l'indice du point N . À cet effet, nous introduisons et étudions dans cette section une notion d'indice partiel. En réalité, nous effectuerons le calcul après un passage au revêtement universel de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$; ceci explique le cadre de cette section, celui des homéomorphismes de Brouwer. Dans ce cadre, l'indice partiel va être défini comme un invariant de conjugaison associé à n'importe quel couple de droites de Brouwer disjointes.

a. Topologie des couples de droites de Brouwer disjointes. — Soient Δ_0 et Δ_1 deux droites de Brouwer disjointes. D'après le théorème de Schoenflies-Homma (voir l'appendice), il n'y a qu'une seule configuration topologique possible pour le couple (Δ_0, Δ_1) . Nous faisons quelques considérations préliminaires sur la topologie de ces deux droites et de leurs itérés.

Définition 3.29. — On appellera *disque délimité par* Δ_0 et Δ_1 , et on notera $D(\Delta_0, \Delta_1)$, l'unique disque topologique ouvert de frontière $\Delta_0 \cup \Delta_1$.

Définition 3.30 (figure 10). — On dit que Δ_0 est *de type attractif* ou *attractive* (sous-entendu, *relativement à* Δ_1) si elle ne sépare pas Δ_1 et $h(\Delta_0)$ (de manière équivalente, si elle sépare Δ_1 et $h^{-1}(\Delta_0)$). Dans le cas contraire, on dit que Δ_0 est *répulsive*. Les mêmes définitions s'appliquent à Δ_1 . Si les types des deux droites sont opposés, le couple (Δ_0, Δ_1) est dit *indifférent*; sinon, il est qualifié d'*attractif* ou de *répulsif* selon le type commun.

Affirmation 3.31 (Topologie des couples attractifs). — *Considérons un couple attractif (Δ_0, Δ_1) de droites de Brouwer disjointes. Alors l'adhérence de l'ensemble $D(\Delta_0, \Delta_1)$ est un attracteur strict, et la configuration des droites $\Delta_0, h(\Delta_0), \Delta_1$ et $h(\Delta_1)$ est homéomorphe à celle de la figure 11.*

Démonstration. — Avec les notations de la remarque 3.23, on a $\text{Adh}(D(\Delta_0, \Delta_1)) = P^+(\Delta_0) \cap P^+(\Delta_1)$. Cet ensemble est donc un attracteur strict. En particulier, on a $h(\Delta_0) \subset D(\Delta_0, \Delta_1)$, et les quatre droites $\Delta_0, h(\Delta_0), \Delta_1$ et $h(\Delta_1)$ sont deux à deux disjointes.

Il reste à étudier la configuration topologique. D'après le théorème de Schoenflies-Homma (voir l'appendice), il suffit de montrer que $h(\Delta_0)$ sépare Δ_0 de Δ_1 , et que $h(\Delta_1)$ sépare $h(\Delta_0)$ de Δ_1 .

Montrons que $h(\Delta_0)$ sépare Δ_0 et Δ_1 . Supposons le contraire :

(1) la situation est homéomorphe à la figure 12 (a) (d'après le théorème de Schoenflies-Homma, quitte à renverser l'orientation);

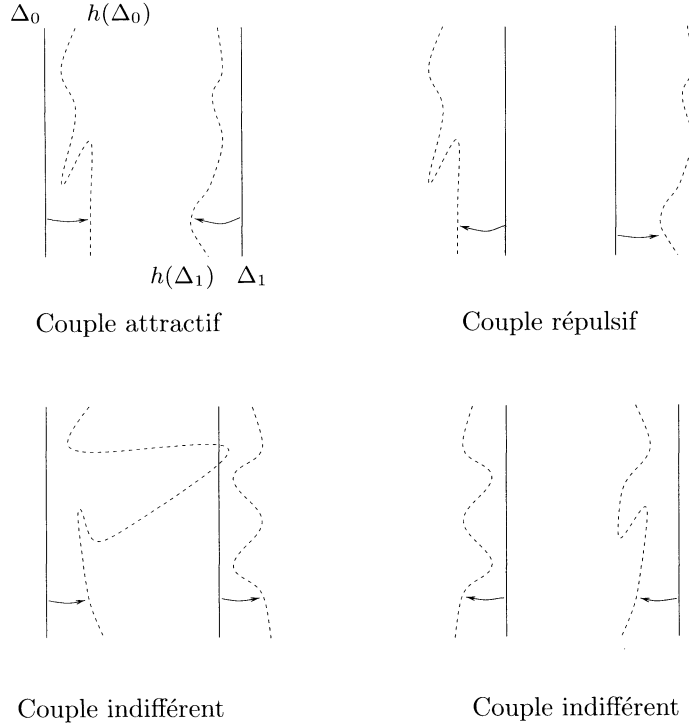


FIGURE 10. Couples de droites de Brouwer disjointes

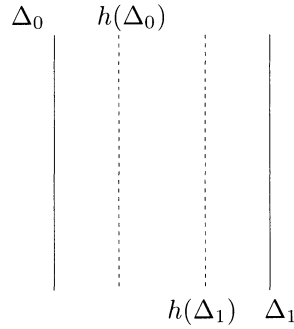


FIGURE 11. Topologie d'un couple attractif

(2) on oriente Δ_0 et Δ_1 comme sur la figure 12 (b), et on en déduit l'orientation de $h(\Delta_0)$ (d'après la remarque 3.22) ;

(3) comme h préserve l'orientation, et que Δ_1 est à droite de $\vec{\Delta}_0$, la droite $h(\Delta_1)$ est aussi à droite de $h(\vec{\Delta}_0)$, et la situation est homéomorphe à la figure 12 (c) ;

(4) l'orientation de $h(\vec{\Delta}_1)$ est alors celle de la figure 12 (d) (d'après la remarque 3.22).

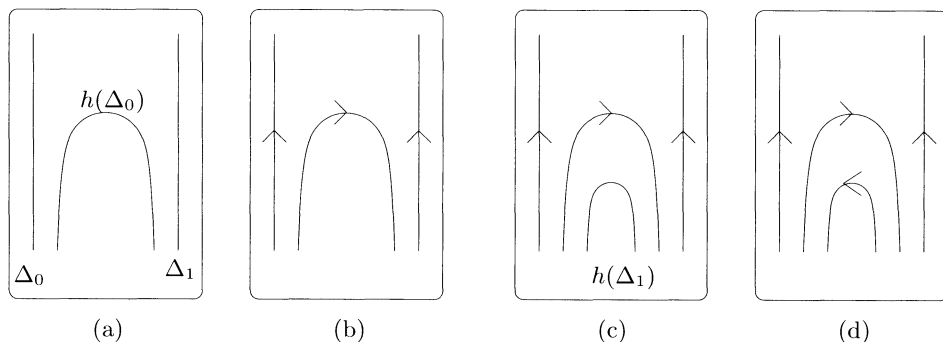


FIGURE 12. Si $h(\Delta_0)$ ne sépare pas Δ_0 et Δ_1 ...

Mais cette dernière figure est contradictoire, puisque Δ_0 est à gauche de $\vec{\Delta}_1$, alors que $h(\Delta_0)$ est à droite de $h(\vec{\Delta}_1)$, et que h préserve l'orientation.

On montre de la même manière que $h(\Delta_1)$ sépare $h(\Delta_0)$ et Δ_1 , ce qui termine la preuve. \square

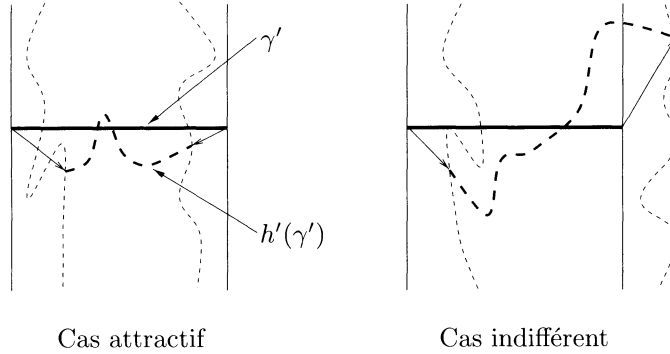
Remarquons qu'il n'y a également qu'une seule configuration topologique possible pour les n premiers itérés de Δ_0 et Δ_1 , pour tout entier n .

b. Définition de l'indice partiel. — Soient Δ_0 et Δ_1 deux droites de Brouwer disjointes. Nous allons définir l'indice partiel de h entre Δ_0 et Δ_1 en examinant la situation au moyen de « cartes » qui redressent ces deux droites ; le jeu consistera alors à montrer que les objets construits ne dépendent pas du choix des cartes. Nous ferons ici un usage intensif des coordonnées euclidiennes du plan \mathbb{R}^2 .

D'après le théorème de Schoenflies-Homma (voir l'appendice), il existe un homéomorphisme g' du plan, préservant l'orientation, tel que les droites $\Delta'_0 = g'(\Delta_0)$ et $\Delta'_1 = g'(\Delta_1)$ sont verticales, et Δ'_0 est à gauche de Δ'_1 (i.e. $\Delta'_0 = \{x_0\} \times \mathbb{R}$, $\Delta'_1 = \{x_1\} \times \mathbb{R}$, avec $x_0 < x_1$, ce que dorénavant nous écrirons $\Delta'_0 < \Delta'_1$). On pose $h' = g' \circ h \circ g'^{-1}$.

Soit γ' une courbe allant de Δ'_0 à Δ'_1 (on ne suppose pas que γ est simple). On distingue deux cas (figure 13) :

Premier cas. Le couple (Δ_0, Δ_1) est indifférent. Dans ce cas, les vecteurs $h'(\gamma'(0)) - \gamma'(0)$ et $h'(\gamma'(1)) - \gamma'(1)$ sont tous les deux d'abscisses strictement positives ou bien tous les deux d'abscisses strictement négatives ; en tous cas, ils ne peuvent pas avoir des directions opposées, et on a $\text{Indice}(h', \gamma') \notin (1/2 + \mathbb{Z})$. On définit le nombre I comme l'entier le plus proche de $\text{Indice}(h', \gamma')$.

FIGURE 13. Définition du nombre I

Second cas. Le couple (Δ'_0, Δ'_1) est attractif ou répulsif. Cette fois-ci, on a $\text{Indice}(h', \gamma') \notin \mathbb{Z}$, et on définit I comme le demi-entier le plus proche de $\text{Indice}(h', \gamma')$.

Définition 3.32. — On appelle *indice partiel de h entre Δ_0 et Δ_1* , et on note $\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1)$, le nombre I .

Nous allons montrer que cette définition est correcte, c'est-à-dire que le nombre I ne dépend pas des choix de la courbe γ' et de l'homéomorphisme g' .

Affirmation 3.33. — *Le nombre I ne dépend pas du choix de la courbe γ' .*

Démonstration. — L'ensemble des choix possibles pour γ' est un espace de courbes qui est connexe (pour la topologie de la convergence uniforme) : c'est même un espace convexe pour la structure affine naturelle. Or $\text{Indice}(h', \gamma')$ dépend continûment de γ' (pour la même topologie). Dans le cas d'un couple indifférent, la composante connexe de $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + 1/2)$ qui contient $\text{Indice}(h', \gamma')$ ne dépend donc pas de γ' , et le nombre I non plus. Le raisonnement est analogue dans le cas attractif ou répulsif. \square

Affirmation 3.34. — *Le nombre I ne dépend pas du choix de l'homéomorphisme g' .*

Il s'agit encore d'un argument de connexité. Appelons \mathcal{G} l'ensemble des homéomorphismes G du plan, préservant l'orientation, tels que $G(\Delta'_0)$ et $G(\Delta'_1)$ soient encore deux droites verticales avec $G(\Delta'_0) < G(\Delta'_1)$. On a :

Lemme 3.35. — *L'espace \mathcal{G} , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, est connexe par arcs.*

Démonstration du lemme 3.35. — Soit $G \in \mathcal{G}$, on cherche un chemin dans \mathcal{G} de G à l'identité. On peut d'abord se ramener au cas où G fixe globalement Δ'_0 et Δ'_1 (à l'aide d'une isotopie affine), puis au cas où G fixe tous les points de ces deux droites. On termine par une variante de l'isotopie d'Alexander ([Ale23], ou bien [LR97]). \square

Démonstration de l'affirmation 3.34. — On fait la preuve dans le cas indifférent, l'argument étant le même dans l'autre situation. Soit g'' un autre homéomorphisme ayant les propriétés requises (préservant l'orientation et envoyer les deux droites de Brouwer Δ_0 et Δ_1 sur deux droites verticales avec $g''(\Delta_0) < g''(\Delta_1)$). Posons $G = g'' \circ g'^{-1}$; alors $G \in \mathcal{G}$. D'après le lemme, il existe une isotopie $(G_t)_{t \in [0,1]}$ telle que $G_0 = G$ et G_1 est l'identité. Soit γ une courbe allant de Δ_0 à Δ_1 , $\gamma' = g'(\gamma)$ et $\gamma'' = g''(\gamma)$. Le nombre $I(t) = \text{Indice}(G_t h' G_t^{-1}, G_t(\gamma'))$ varie continûment, il ne prend pas de valeurs dans $\mathbb{Z} + 1/2$, donc les deux nombres $I(0) = \text{Indice}(g'' h g'^{-1}, \gamma')$ et $I(1) = \text{Indice}(g' h g'^{-1}, \gamma')$ sont dans la même composante connexe de $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + 1/2)$, ce que l'on voulait montrer. \square

L'affirmation 3.34 entraîne immédiatement :

Corollaire 3.36. — *L'indice partiel est un invariant de conjugaison (orientée) : autrement dit, si g est un homéomorphisme du plan préservant l'orientation, on a*

$$\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1) = \text{IP}(ghg^{-1}, g(\Delta_0), g(\Delta_1)).$$

On a aussi, de manière immédiate :

Affirmation 3.37

- (1) $\text{IP}(h, \Delta_1, \Delta_0) = -\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1)$;
- (2) $\text{IP}(h^{-1}, \Delta_0, \Delta_1) = \text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1)$.

c. Exemples. — On peut voir facilement que pour la translation $\tau : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$, tout couple de droites de Brouwer disjointes est d'indice partiel 0, $1/2$ ou $-1/2$. Ceci sera d'ailleurs une conséquence du lemme 3.39.

Pour l'homéomorphisme « multi-Reeb » représenté sur la figure 14 :

- (1) le couple (Δ_0, Δ_1) est répulsif d'indice partiel $-1/2$;
- (2) le couple (Δ_1, Δ_2) est attractif d'indice partiel $-1/2$;
- (3) le couple (Δ_0, Δ_2) est indifférent d'indice partiel -1 ;
- (4) le couple (Δ_3, Δ_2) est répulsif d'indice partiel $3/2$.

De plus, sur l'intérieur de la réunion de deux bandes adjacentes, la restriction de h est conjuguée à la translation : par conséquent, le dessin fournit également des exemples de couples d'indice partiel $+1/2$ ou $-1/2$ pour la translation.

Ce type d'exemple montre que l'indice partiel peut prendre toute valeur $n/2$ avec n entier. Un des principaux résultats de cet article montrera que si $|\text{IP}(\Delta_0, \Delta_1)| > 1/2$, alors on peut découper la bande $D(\Delta_0, \Delta_1)$ en tranches, à l'aide d'une famille de droites de Brouwer, de manière à ce que l'indice partiel dans chaque tranche soit égal à 0, $1/2$ ou $-1/2$.

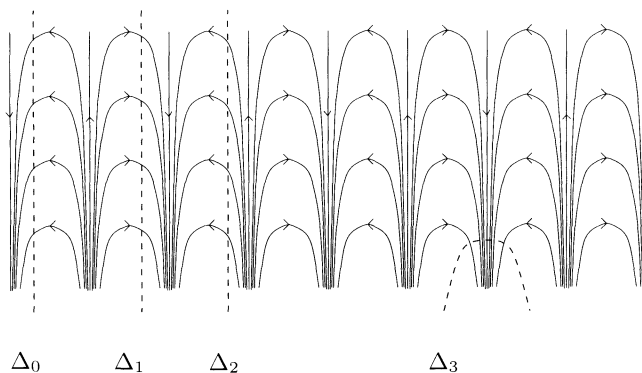


FIGURE 14. Exemples d'indices partiels

d. Relation d'additivité. — L'efficacité de l'indice partiel dans les calculs d'indice repose de manière cruciale sur la propriété d'additivité suivante :

Lemme 3.38 (relation de Chasles). — Soient Δ_0 , Δ_1 et Δ_2 trois droites de Brouwer disjointes, et supposons que Δ_1 sépare Δ_0 et Δ_2 . On a alors :

$$\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_2) = \text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1) + \text{IP}(h, \Delta_1, \Delta_2).$$

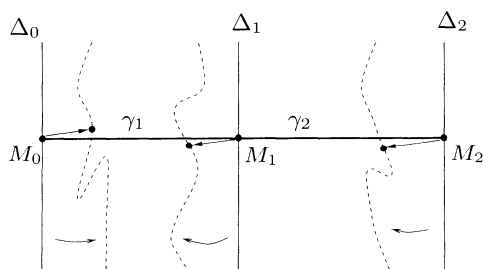


FIGURE 15. La relation de Chasles

Démonstration. — Commençons par une remarque banale : dans la construction conduisant à la définition de l'indice partiel (définition 3.32, figure 13), si chacune des extrémités de la courbe γ' est sur la même droite horizontale que son image par h' , alors l'indice partiel est exactement égal à $\text{Indice}(h', \gamma')$.

Puisque l'indice partiel est un invariant de conjugaison, on peut supposer que Δ_0 , Δ_1 et Δ_2 sont trois droites verticales vérifiant $\Delta_0 < \Delta_1 < \Delta_2$ (quitte à conjuguer en utilisant le théorème de Schoenflies-Homma). Soient M_0 , M_1 et M_2 les points d'intersection respectifs des droites Δ_0 , Δ_1 , Δ_2 avec l'axe des abscisses. En conjuguant

à nouveau h par une application $(x, y) \mapsto (x, y/k)$ avec k très grand, on peut supposer que les trois vecteurs $h(M_i) - M_i$ forment des angles arbitrairement petits avec la direction horizontale (figure 15). Soient alors γ_1 une courbe allant de M_0 à M_1 , γ_2 une courbe allant de M_1 à M_2 , et γ la courbe obtenue en mettant les deux précédentes bout à bout. On a bien sûr

$$\text{Indice}(h, \gamma) = \text{Indice}(h, \gamma_1) + \text{Indice}(h, \gamma_2).$$

On utilise maintenant la remarque initiale : dans la carte choisie,

- le nombre $\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_2)$ est arbitrairement proche de $\text{Indice}(h, \gamma)$;
- le nombre $\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1) + \text{IP}(h, \Delta_1, \Delta_2)$ est arbitrairement proche du nombre $\text{Indice}(h, \gamma_1) + \text{Indice}(h, \gamma_2)$.

Or ces deux nombres sont des demi-entiers : si l'égalité du lemme était fausse, ils différeraient d'au moins $1/2$, ce qui est absurde. \square

e. Indice partiel et arcs libres. — Nous énonçons ici un lemme qui permettra notamment de calculer l'indice partiel à travers un croissant attractif ou répulsif à dynamique Nord-Sud ou Sud-Nord.

Soient Δ_0 et Δ_1 deux droites de Brouwer disjointes. On suppose qu'il existe un arc libre γ allant de Δ_0 à Δ_1 . Puisqu'un sous-arc d'un arc libre est encore libre, on peut en fait demander de plus que l'intérieur de γ soit disjoint des deux droites.

À l'aide du théorème de Schoenflies-Homma (quitte à conjuguer la situation par un homéomorphisme préservant l'orientation), on peut alors supposer que les deux droites de Brouwer sont verticales, avec $\Delta_0 < \Delta_1$, et aussi que γ est un segment horizontal.

Si le couple (Δ_0, Δ_1) est attractif, le disque $D(\Delta_0, \Delta_1)$ qu'il délimite est un attracteur (d'après l'affirmation 3.31), et $h(\gamma)$ est un arc disjoint de γ et inclus dans ce disque. Il y a donc deux possibilités : ou bien $h(\gamma)$ est situé au-dessus de γ , ou bien $h(\gamma)$ est situé au-dessous de γ . On montre que la situation ne dépend pas du choix de la « carte » (préservant l'orientation) donnée par le théorème de Schoenflies-Homma. Ceci vaut également dans le cas répulsif en remplaçant h par h^{-1} .

Lemme 3.39. — *Soient Δ_0 et Δ_1 deux droites de Brouwer disjointes, et γ un arc libre allant de Δ_0 à Δ_1 , dont l'intérieur est disjoint des deux droites.*

Si (Δ_0, Δ_1) est indifférent, l'indice partiel entre Δ_0 et Δ_1 est nul.

Si (Δ_0, Δ_1) n'est pas indifférent, il y a quatre cas :

- si le couple est attractif, alors
 - si $h(\gamma)$ est au-dessus de γ , l'indice partiel vaut $+1/2$;
 - si $h(\gamma)$ est au-dessous de γ , l'indice partiel vaut $-1/2$;
- si le couple est répulsif, alors
 - si $h^{-1}(\gamma)$ est au-dessus de γ , l'indice partiel vaut $+1/2$;
 - si $h^{-1}(\gamma)$ est au-dessous de γ , l'indice partiel vaut $-1/2$.

Démonstration. — On fait la preuve dans le cas indifférent, les autres cas étant similaires, et on suppose par exemple que Δ_0 est attractive et Δ_1 répulsive; autrement dit, pour tout point x de Δ_0 ou Δ_1 , le vecteur $h(x) - x$ est d'abscisse strictement positive (figure 16). Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$i_t = \text{Indice}(h(x) + (t, 0) - x, \gamma).$$

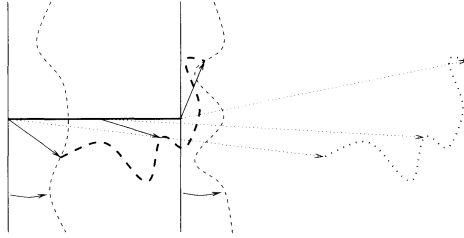


FIGURE 16. L'indice partiel est nul

Comme γ est libre pour h et que Δ_0 est attractive, quand x est un point de γ , le point $h(x)$ n'est jamais situé sur la demi-droite horizontale à gauche de x , donc le vecteur $h(x) + (t, 0) - x$ n'est jamais nul, et le nombre i_t est bien défini. D'autre part $i_t \notin (1/2 + \mathbb{Z})$, i_t varie continûment avec t , et $\lim_{t \rightarrow +\infty} i_t = 0$, donc $i_t \in]-1/2, +1/2[$ pour tout $t \geq 0$; comme $\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1)$ est l'entier le plus proche de i_0 , il est bien nul. \square

Corollaire 3.40

Soient Δ_0 et Δ_1 deux droites de Brouwer disjointes.

(1) Si le domaine de Brouwer engendré par Δ_0 rencontre Δ_1 , alors $\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1) = 0$ (en particulier, pour tout entier n non nul, $\text{IP}(h, \Delta_0, h^n(\Delta_0)) = 0$).

(2) Dans le cas contraire, l'indice partiel $\text{IP}(h, h^p(\Delta_0), h^q(\Delta_1))$ est bien défini pour tous entiers p et q , et est égal à $\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1)$.

Remarquons que si le couple (Δ_0, Δ_1) est attractif ou répulsif, on est toujours dans le deuxième cas (d'après l'affirmation 3.31).

Démonstration

Premier point. — D'après la remarque précédente, dans ce cas, le couple (Δ_0, Δ_1) est indifférent. Notons ensuite que si deux points du plan appartiennent à un même domaine de Brouwer, alors ou bien ils sont dans la même orbite, ou bien il existe un arc libre les joignant : en effet, puisque sur un domaine de Brouwer la dynamique est conjuguée à une translation, il suffit de prouver la même propriété pour la translation, ce qui n'est pas difficile (par exemple en raisonnant dans l'anneau quotient de l'action du plan par la translation). Ceci permet de montrer que si le domaine de Brouwer

engendré par Δ_0 rencontre Δ_1 , alors il existe un arc libre allant de Δ_0 à Δ_1 , puis on conclut à l'aide du lemme 3.39.

Deuxième point. — Considérons d'abord le cas où le couple (Δ_0, Δ_1) est attractif. Comme l'indice partiel est un invariant de conjugaison, quitte à composer par h^{-p} , on peut supposer que $p = 0$. On traite le cas où q est positif (le cas négatif étant similaire). En utilisant de manière itérée l'affirmation 3.31 sur la topologie des couples attractifs, on montre que $h^q(\Delta_1)$ sépare Δ_0 et Δ_1 . Ceci permet d'appliquer la relation de Chasles (lemme 3.38) à ces trois droites; comme l'indice partiel entre Δ_1 et $h^q(\Delta_1)$ est nul d'après le premier point, on obtient le résultat.

On obtient le cas répulsif de la même manière; il reste le cas indifférent. On peut encore supposer que $p = 0$, et on se place dans le cas où q est positif (le cas négatif est similaire). Si la droite Δ_1 est répulsive, alors Δ_1 sépare Δ_0 et $h^q(\Delta_1)$, et on peut appliquer la relation de Chasles et conclure comme dans le cas précédent.

Supposons enfin que Δ_1 est attractive. Si $h^q(\Delta_1)$ sépare Δ_0 et Δ_1 , on conclut comme avant à l'aide de la relation de Chasles. Si $h^q(\Delta_1)$ ne sépare pas Δ_0 et Δ_1 , on voit facilement que Δ_0 rencontre le domaine de Brouwer engendré par Δ_1 , et les deux indices partiels sont nuls d'après le premier point. \square

f. Indice partiel entre deux droites qui se touchent. — Dans certains calculs, il sera pratique de pouvoir parler de l'indice partiel entre deux droites de Brouwer non disjointes, mais « qui ne se traversent pas ».

Soit Δ_0 et Δ_1 deux droites topologiques, et P_0 et P_2 les deux composantes connexes du complémentaire de Δ_1 .

Définition 3.41. — On dira que les droites Δ_0 et Δ_1 *ne se traversent pas* si Δ_0 est contenue dans l'adhérence de P_0 ou de P_2 . On dira que deux droites *se touchent* si elles ne se traversent pas, mais ne sont pas disjointes.

On peut montrer que ces deux relations sont symétriques.

On étend alors la définition de l'indice partiel au cas de deux droites qui se touchent, en posant simplement $\text{IP}(\Delta_0, \Delta_1) = 0$ dans ce cas.

Définition 3.42. — Soient $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ trois droites topologiques qui, deux à deux, ne se traversent pas. Soient P_1 et P_2 les deux composantes connexes du complémentaire de Δ_1 . On dira que Δ_1 *sépare* Δ_0 et Δ_2 si $\Delta_0 \subset \text{Adh}(P_0)$ et $\Delta_2 \subset \text{Adh}(P_2)$ (ou *vice-versa*)

Ces définitions permettent de généraliser la relation de Chasles (lemme 3.38) :

Lemme 3.43 (relation de Chasles généralisée). — *On se donne trois droites de Brouwer Δ_0, Δ_1 et Δ_2 qui, deux à deux, ne se traversent pas, et on suppose que Δ_1 sépare Δ_0 et Δ_2 . On a alors :*

$$\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_2) = \text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1) + \text{IP}(h, \Delta_1, \Delta_2).$$

Démonstration. — On reprend les notations de la définition 3.42. Il est clair que l'une des deux droites $h(\Delta_0)$ et $h^{-1}(\Delta_0)$ est incluse dans P_0 , on la note Δ'_0 . De même, on note Δ'_2 celle des deux droites $h(\Delta_2)$ et $h^{-1}(\Delta_2)$ qui est incluse dans P_2 . Les trois droites de Brouwer Δ'_0 , Δ_1 et Δ'_2 sont maintenant disjointes deux à deux, et Δ_1 sépare les deux autres : on peut alors leur appliquer la première relation de Charles (lemme 3.38). La formule en découle, à l'aide du corollaire 3.40. Les détails sont laissés au lecteur. \square

g. Indice partiel et chaînes de disques. — Nous allons généraliser le lemme 3.39 liant indice partiel et arcs libres à l'aide de la notion de chaîne de pseudo-disques (définition 3.16).

Soit (Δ_0, Δ_1) un couple de droites de Brouwer disjointes ; on suppose que Δ_0 est attractive. Le complémentaire de $\Delta_0 \cup \Delta_1$ a trois composantes connexes, dont les frontières sont respectivement Δ_0 , $\Delta_0 \cup \Delta_1$ et Δ_1 ; on les note O_0 , O_1 et O_2 .

Définition 3.44 (figure 17). — Une chaîne de pseudo-disques de Δ_0 à Δ_1 est une chaîne de pseudo-disques $(B_i)_{i=1,\dots,k}$, ($k \geq 1$), telle que $\text{Adh}(B_1)$ rencontre $\text{Adh}(O_0)$ et $\text{Adh}(B_k)$ rencontre $\text{Adh}(O_2)$.

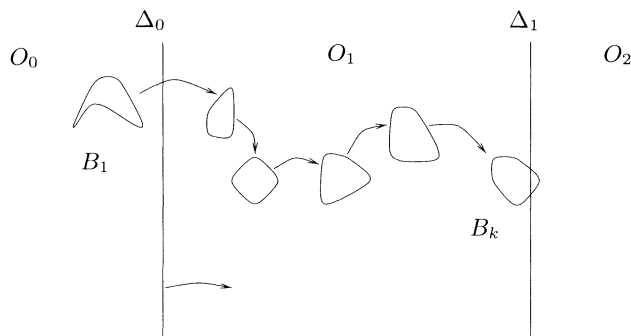


FIGURE 17. Une chaîne de pseudo-disques de Δ_0 à Δ_1

Remarquons que si $k = 1$, B_1 contient un arc libre allant de Δ_0 à Δ_1 ; dans le cas indifférent, la proposition suivante est donc bien une généralisation du lemme 3.39 :

Proposition 3.45 (« lemme de Franks » pour l'indice partiel). — On se donne deux droites de Brouwer Δ_0 et Δ_1 disjointes, avec Δ_0 attractive. S'il existe une chaîne de pseudo-disques de Δ_0 à Δ_1 , alors :

- si le couple (Δ_0, Δ_1) est indifférent, $\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1)$ vaut 0 ;
- si le couple (Δ_0, Δ_1) est attractif, $\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1)$ vaut $+1/2$ ou $-1/2$.

La suite du texte n'utilisera que le cas où le couple (Δ_0, Δ_1) est indifférent.

Démonstration

Cas indifférent. — Supposons qu'il existe une chaîne de pseudo-disques $(B_i)_{i=1,\dots,k}$ de Δ_0 à Δ_1 , et choisissons-la de façon à ce que k soit minimal parmi toutes les chaînes de Δ_0 à Δ_1 . Comme dans la preuve du lemme de Franks (lemme 3.18), l'idée est de transformer la « quasi-orbite » fournie par l'hypothèse en une vraie orbite, à l'aide de modifications libres ; le domaine de Brouwer engendré par Δ_0 rencontrera alors Δ_1 , ce qui permettra de conclure à l'aide du corollaire 3.40.

On commence par montrer l'existence d'une chaîne de disques ouverts pour h , encore notée $(B_i)_{i=1,\dots,k}$, qui est une chaîne de pseudo-disques de Δ_0 à Δ_1 : pour cela on recopie les arguments de minimalité de la preuve du lemme 3.18 (les détails correspondants sont laissés au lecteur).

Dans un deuxième temps, expliquons comment modifier cette chaîne de disques ouverts en une chaîne dont tous les disques ouverts sont inclus dans O_1 . Notons $(n_i)_{i=1,\dots,k-1}$ les temps de transition de la chaîne et (x_i) des points de transition. On peut supposer que l'entier k est minimal (parmi toutes les chaînes de disques ouverts de Δ_0 à Δ_1). Tout d'abord, cette minimalité entraîne clairement que les disques B_2, \dots, B_{k-1} sont tous inclus dans O_1 . La suite $(h^{-n_1}(B_2), B_3, \dots, B_k)$ est encore une chaîne de disques ouverts (en particulier, $h^{-n_1}(B_2)$ est disjoint des autres disques de la chaîne, sans quoi il existerait une chaîne de disques périodique, ce qui contredirait le lemme de Franks 3.18). D'autre part, x_1 appartient à $h^{-n_1}(B_2)$. Si x_1 était dans $\text{Adh}(O_0)$, alors cette nouvelle chaîne de disques contredirait la minimalité de k . Ceci montre que x_1 appartient à O_1 . Soit B'_1 la composante connexe de $B_1 \cap O_1$ qui contient x_1 . Puisque $\text{Adh}(B_1)$ rencontre $\text{Adh}(O_0)$, l'adhérence de B'_1 rencontre Δ_0 . En remplaçant de même B_k par un disque B'_k plus petit, on obtient une chaîne de disques ouverts $(B'_1, B'_2 = B_2, \dots, B'_{k-1} = B_{k-1}, B'_k)$ qui sont tous inclus dans O_1 .

Puisque $\text{Adh}(B'_k)$ rencontre $\text{Adh}(O_2)$, et que la droite Δ_2 est répulsive, il existe un point x_k dans B'_k tel que $h(x_k)$ soit dans O_2 . De même, il existe un point x_0 dans O_0 tel que $h(x_0)$ soit dans B'_1 . On pose $n_0 = 1$.

On effectue maintenant k modifications libres de h : plus précisément, on choisit pour chaque entier i entre 1 et k un homéomorphisme ϕ_i , à support dans $\text{Adh}(B'_i)$, et qui envoie $h^{n_{i-1}}(x_{i-1})$ sur x_i . On considère alors l'homéomorphisme $h_1 = \phi \circ h$, avec $\phi = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_k$ (figure 18). Pour cet homéomorphisme, le point $h(x_k)$ est un itéré du point x_0 .

Puisque les disques B'_i sont tous inclus dans O_1 , le support de ϕ est inclus dans $\text{Adh}(O_1)$. Par conséquent, on voit facilement que les droites Δ_0 et Δ_1 sont aussi des droites de Brouwer pour l'homéomorphisme h_1 . Ceci montre que l'indice partiel $\text{IP}(h_1, \Delta_0, \Delta_1)$ est bien défini. Comme il existe une orbite de h_1 qui rencontre à la fois O_0 et O_2 , le domaine de Brouwer engendré par Δ_0 (pour h_1) doit rencontrer Δ_1 . D'après le corollaire 3.40, on a alors $\text{IP}(h_1, \Delta_0, \Delta_1) = 0$. D'autre part, les indices partiels pour $\text{IP}(h_1, \Delta_0, \Delta_1)$ et $\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1)$ sont égaux : en effet, on peut calculer

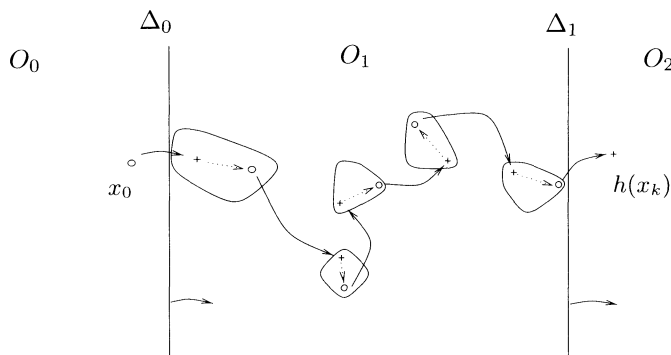


FIGURE 18. Modifications libres pour obtenir une orbite qui traverse la bande

ces deux indices dans une carte où les deux droites sont verticales (comme dans la définition de l'indice partiel), au moyen d'une courbe γ disjointe du compact $K = \text{Adh}(B'_1 \cup \dots \cup B'_k)$; et puisque les deux homéomorphismes coïncident hors de K , leurs indices le long de γ sont égaux.

Cas attractif (schéma de preuve). — Les idées sont les mêmes que dans le cas indifférent. La seule différence significative apparaît après avoir obtenu la chaîne de disques ouverts inclus dans O_1 : cette fois-ci, il n'existe pas de point de B'_k dont l'image est dans O_2 . On se contente donc d'effectuer $k - 1$ modifications libres, à support dans B'_1, \dots, B'_{k-1} . On obtient ainsi un homéomorphisme h_1 tel que, pour un certain n positif, $h_1^n(\Delta_0)$ rencontre B'_k ; d'autre part, B'_k est libre pour h_1 , il y a donc un arc libre pour h_1 de $h_1^n(\Delta_0)$ à Δ_1 . D'après le lemme 3.39, l'indice $\text{IP}(h_1, h_1^n(\Delta_0), \Delta_1)$ vaut $+1/2$ ou $-1/2$. Le deuxième point du corollaire 3.40 donne alors la même valeur pour $\text{IP}(h_1, \Delta_0, \Delta_1)$. Comme dans le cas indifférent, on a $\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1) = \text{IP}(h_1, \Delta_0, \Delta_1)$, ce qui permet de conclure. \square

3.4. Décomposition en briques

Les résultats de cette section sont tous adaptés de la thèse de A. Sauzet [Sau01] et de l'article de P. Le Calvez et A. Sauzet [LCS96]. La possibilité de se passer de la condition de transversalité pour la preuve du théorème de translation plane est apparue lors d'une discussion avec Lucien Guillou.

Dans toute cette section, on suppose que h est un homéomorphisme de la sphère⁽⁵⁾, préservant l'orientation, dont l'ensemble des points fixes est fini. Rappelons que les homéomorphismes de Brouwer s'identifient à des homéomorphismes de la sphère

⁽⁵⁾En réalité, la construction expliquée à la section d est valable sur n'importe quelle surface compacte sans bord.

$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ vérifiant cette hypothèse. Nous rappelons d'abord la définition des décompositions en briques et leur construction ; puis, *en supposant l'absence de courbe d'indice 1*, nous montrons l'existence d'une droite de Brouwer associée à chaque brique, qui fournit une preuve du théorème de translation plane.

a. Introduction aux décompositions en briques. — En première approximation, une décomposition en briques est une sorte de triangulation (localement finie) du complémentaire des points fixes de h dans la sphère. L'idée principale consiste à choisir les triangles assez petits pour qu'ils soient libres. Ceci permet d'appliquer le lemme de Franks aux suites de triangles : on pourrait dire qu'on a ainsi obtenu une discrétisation de la dynamique qui garde la propriété de ne pas avoir d'orbite périodique. Une autre propriété importante des décompositions, appelée minimalité, est que les triangles ne sont pas trop petits, plus précisément que la réunion de deux triangles adjacents n'est jamais libre. Sous ces hypothèses, un procédé dynamique simple (et automatique) associe à chaque triangle B un attracteur $A^+(B)$: celui-ci est simplement obtenu en prenant le plus petit attracteur, réunion de triangles, qui contient l'image de B . La minimalité entraînera la connexité de cet ensemble. On montrera qu'il existe alors une unique composante connexe $\Delta(B)$ du bord de $A^+(B)$ qui rencontre B , et que $\Delta(B)$ est une droite de Brouwer.

Dans sa preuve du théorème de Brouwer, L. Guillou ([Gui94]) utilisait déjà des triangulations libres. D'autre part, M. Flucher avait combiné des triangulations libres avec le lemme de Franks pour obtenir des points fixes d'homéomorphismes du tore, autour de la conjecture d'Arnol'd ([Flu90]). P. Le Calvez et A. Sauzet ont alors exploité ces idées pour obtenir ce qui est sans doute la preuve la plus claire du théorème de Brouwer ([LCS96]). Enfin, la propriété de minimalité est introduite dans la thèse d'A. Sauzet ([Sau01]), qui y étudie les propriétés combinatoires de ces triangulations de manière intensive, afin de construire des courbes disjointes de leur image pour les homéomorphismes du tore, de l'anneau ou de la sphère. On peut citer également l'utilisation de discrétisation de la dynamique dans les preuves combinatoires du théorème de Conley-Zehnder données par S. Alpern et V. S. Prasad ([AP93]) ; dans ce contexte, la très jolie utilisation du résultat combinatoire appelé « théorème des mariages » remonte à P. Lax ([Lax71]).

b. Définition. — On pose $U = \mathbb{S}^2 \setminus \text{Fixe}(h)$. On dira qu'un sous-ensemble de U est *borné* si son adhérence dans \mathbb{S}^2 est disjointe de $\text{Fixe}(h)$.

Définition 3.46. — Un *graphe triadique* est un sous-ensemble fermé F de U , tel que, en tout point x de F , F est localement homéomorphe à l'un des deux dessins de la figure 19. Si F est localement homéomorphe au dessin de droite, on dit que le point x est un *sommet* de F .

Soit F un graphe triadique.



FIGURE 19. Aspect local d'un graphe triadique

Définition 3.47. — Une *brique* de F est l'adhérence (dans U) d'une composante connexe du complémentaire de F dans U .

Définition 3.48. — Deux briques de F , distinctes, sont *adjacentes* si leur intersection n'est pas vide.

Définition 3.49. — Une *arête* de F est l'adhérence (dans U) d'une composante connexe du complémentaire dans F des sommets.

Définition 3.50. — Un graphe triadique F est dit *compact* si aucun point fixe de h n'est dans l'adhérence d'une brique (autrement dit, toute brique est bornée).

Définition 3.51. — Le graphe triadique F est dit *libre* (pour h) si toute brique de F est libre.

Définition 3.52. — Le graphe triadique F , libre, est dit *minimal* si pour tout couple de briques adjacentes B et B' , la réunion $B \cup B'$ n'est pas libre.

Définition 3.53. — Une *décomposition en briques* pour h est un graphe triadique, compact, libre, minimal.⁽⁶⁾

Nous avons expliqué plus haut les motivations des deux propriétés principales, la liberté et la minimalité. Prendre un graphe triadique au lieu d'une triangulation quelconque est une astuce topologique pour que le bord de n'importe quelle réunion de briques soit toujours une sous-variété (*cf.* affirmation 3.66 ci-dessous). Les briques bornées sont une commodité, sans doute pas essentielle, qui évitera les études de cas.

Remarque 3.54. — Une décomposition en briques pour h est aussi une décomposition en briques pour h^{-1} .

Remarque 3.55. — Dans la définition d'une décomposition en briques, on ne suppose pas que F est connexe, ni qu'une arête contient deux sommets distincts, et borde deux briques adjacentes distinctes. Néanmoins, en l'absence de courbe d'indice 1, toutes ces propriétés découleront des propriétés de h (voir le corollaire 3.69 ci-dessous).

⁽⁶⁾Le vocabulaire adopté ici diffère légèrement de celui de [Sau01] : notamment, on a remplacé « brique fermée » par « brique », « borné » par « compact », et « maximal » par « minimal ».

Remarque 3.56. — Soit F un graphe triadique libre. Si F est minimal pour l'inclusion (*i.e.* s'il n'existe aucun graphe triadique libre strictement inclus dans F), alors F est minimal au sens de la définition 3.52 ci-dessus. ⁽⁷⁾

Démonstration de la remarque. — Sinon, il existe deux briques B_1, B_2 distinctes, adjacentes, dont la réunion B est libre. On vérifie facilement que $F' = F \setminus \text{Int}(B)$ est un graphe triadique libre, strictement inclus dans F . \square

c. Exemples. — La figure 20 montre l'allure au voisinage d'un point fixe : remarquons que puisque les briques sont bornées, tout voisinage du point fixe doit contenir une infinité de briques. Par contre, comme F est un graphe triadique, la famille des briques de F est localement finie au voisinage de tout point de U (et la réunion d'un nombre quelconque de briques est toujours un fermé de U).

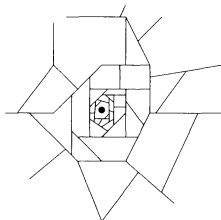


FIGURE 20. Allure d'une décomposition au voisinage d'un point fixe

Les figures 21 et 22 montrent des décompositions pour la translation $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ et l'homéomorphisme linéaire hyperbolique selle $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$ dans le modèle du plan.

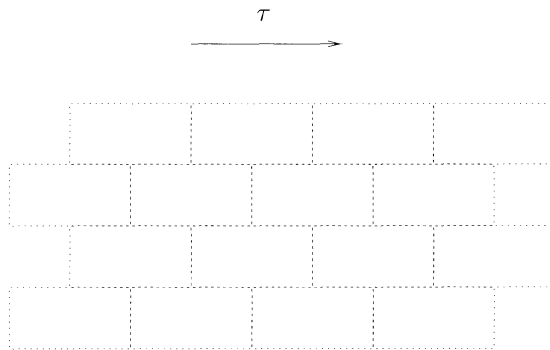


FIGURE 21. Une décomposition pour la translation

⁽⁷⁾La réciproque est également vraie si l'on suppose que toute arête borde deux briques distinctes, ce qui est vérifié en l'absence de courbe d'indice 1 (voir le corollaire 3.69) ; nous n'en aurons pas besoin.

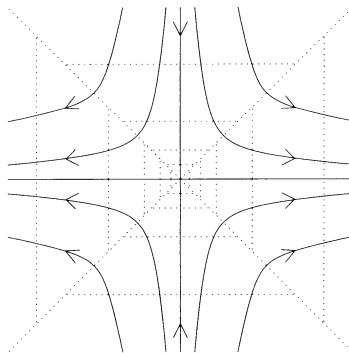


FIGURE 22. Une décomposition pour le linéaire hyperbolique

d. Construction d'une décomposition. — *La preuve du théorème de cette section n'est pas essentielle à la compréhension du texte, et peut être omise en première lecture.*

Théorème 3.57 (A. Sauzet). — *Il existe une décomposition triadique, compacte, libre et minimale pour h .*

Nous donnons une démonstration fortement inspirée de celle d'A. Sauzet ; voici la principale modification : plutôt que de construire d'abord une décomposition dont les briques ne sont pas compactes et qu'il faut re-découper *a posteriori*, on impose dans la décomposition la présence d'un certain nombre de briques, construites *a priori*, qui vont obliger la décomposition à être compacte. Remarquons que ceci permet d'éviter le recours au lemme de Franks (voir [Sau01], section 3.6) ; la construction présentée ici a donc l'avantage d'être valable pour tout homéomorphisme de la sphère (ou d'une autre surface compacte) avec un nombre fini de points fixes, sans hypothèse d'indice.

Démonstration. — Tout d'abord, il est très facile de trouver un graphe triadique compact F (par exemple, en utilisant le dual d'une triangulation localement finie de U). On peut tout aussi facilement gagner la liberté : si une brique B de F n'est pas libre, on la subdivise en briques assez petites (de diamètres inférieurs à $\varepsilon = \inf\{d(x, h(x)) \mid x \in B\}$). On voudrait ensuite obtenir la minimalité en choisissant deux briques adjacentes dont la réunion est libre, en enlevant une arête dans leur intersection, et en recommençant tant que F n'est pas minimale. En général, malheureusement, ce procédé fait perdre la compacité en donnant naissance à des briques non compactes (autrement dit, la famille des décompositions triadiques libres F' incluses dans F est inductive pour l'inclusion et on peut lui appliquer le lemme de Zorn, mais ceci est faux en général pour les décompositions triadiques, libres et compactes).

Le lemme suivant a pour but d'obtenir une propriété supplémentaire qui empêche l'apparition des briques non compactes :

Définition 3.58 (figure 23). — On appelle *anneau pré-décomposé* tout ensemble \mathcal{C} inclus dans U , homéomorphe à l'anneau $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$, muni d'un ensemble $F_{\mathcal{C}}$ appelé *pré-décomposition* de \mathcal{C} et vérifiant :

- (1) $F_{\mathcal{C}}$ est un graphe triadique, inclus dans \mathcal{C} ;
- (2) $F_{\mathcal{C}}$ contient le bord de \mathcal{C} ;
- (3) les adhérences des composantes connexes de $\mathcal{C} \setminus F_{\mathcal{C}}$ sont libres (on les appellera *briques* de $F_{\mathcal{C}}$) ;
- (4) la réunion de deux briques de $F_{\mathcal{C}}$ adjacentes n'est pas libre ;
- (5) *propriété supplémentaire* : aucune brique ne rencontre simultanément les deux composantes connexes $\partial^+ \mathcal{C}$ et $\partial^- \mathcal{C}$ de $\partial \mathcal{C}$.

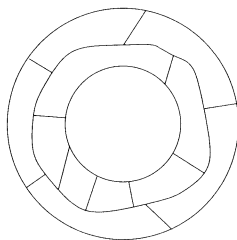


FIGURE 23. Topologie d'un anneau pré-décomposé

Lemme 3.59. — Soit J un cercle topologique dans U tel que $h(J) \cap J \neq \emptyset$. Alors tout voisinage de J contient un anneau pré-décomposé.

Utilisation du lemme. — À l'aide de ce lemme, on reprend toute la preuve du théorème 3.57. Soit x un point fixe de h ; on trouve facilement un cercle topologique qui entoure x , arbitrairement petit, et qui rencontre son image. Le lemme permet donc de trouver une suite $(C_i(x))_{i \geq 0}$ de petits anneaux pré-décomposés, entourant x , convergeant vers x (pour la topologie de Hausdorff) et disjoints deux à deux (figure 24). On effectue cette construction pour chacun des points fixes de h . On recommence alors la preuve expliquée plus haut : l'ensemble $\cup_{x,i} F_{C_i(x)}$ est un graphe triadique, et il est facile de l'étendre, à l'extérieur de la réunion des anneaux $C_i(x)$, pour obtenir un graphe triadique et libre que l'on note F . On utilise le lemme de Zorn pour choisir un graphe triadique libre F' , inclus dans F , qui est minimal pour l'inclusion. D'après la remarque 3.56, F' est également minimal au sens de la définition 3.52. On montre enfin que F' est une décomposition en briques grâce à l'affirmation suivante :

Affirmation 3.60. — Tout graphe triadique libre F' inclus dans F est compact.

En effet, si F' est inclus dans F , toute brique de F' est réunion de briques de F . Une brique de F' non bornée devrait traverser de part en part au moins un des anneaux pré-décomposés C ; elle rencontrerait alors les deux composantes connexes

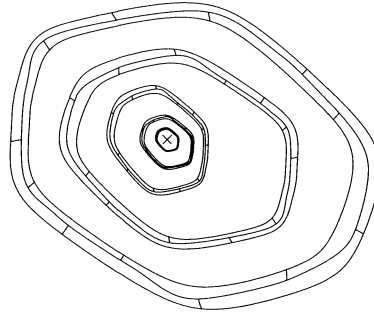


FIGURE 24. Suite d'anneaux pré-décomposés autour d'un des points fixes de h

du bord de cet anneau, donc contiendrait deux briques de F_C adjacentes (propriété supplémentaire de la définition 3.58), et ne pourrait pas être libre (propriété 4 de la définition 3.58). Ceci termine la preuve du théorème 3.57 à partir du lemme 3.59. \square

Démonstration du lemme 3.59. — On part d'une « décomposition libre minimale » de J , i.e. une famille finie (J_0, \dots, J_{k-1}) , $k \geq 2$, de sous-arcs de J d'intérieurs disjoints deux à deux, d'union J , libres, tels que la réunion de deux arcs adjacents ne soit pas libre (son existence est immédiate puisque $J \cap h(J) \neq \emptyset$). À l'aide du théorème de Schoenflies, on épaissit ensuite J en un anneau \mathcal{C} homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ suffisamment fin pour que les ensembles $B_i \simeq J_i \times [-1, 1]$ soient encore libres ; l'ensemble F_C^0 réunion des bords des B_i vérifie alors les points 1 à 4 de la définition 3.58.

Par un argument classique de transversalité, quitte à remplacer l'anneau \mathcal{C} et le graphe F_C^0 par un anneau et un graphe arbitrairement proches, on peut renforcer le point 4 en supposant de plus qu'on a la propriété :

(4bis) pour tout couple (b, c) de briques adjacentes de F_C^0 , l'image de l'intérieur de l'une rencontre l'autre.

D'autre part, nous dirons que F_C est à briques rectangulaires pour traduire le fait qu'il existe une identification de \mathcal{C} à $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ dans laquelle les briques sont des produits cartésiens d'un intervalle strict de \mathbb{S}^1 par un intervalle de $[-1, 1]$.

Nous allons maintenant obtenir la propriété supplémentaire de la définition 3.58 (aucune brique de F_C ne traverse l'anneau \mathcal{C}). L'affirmation suivante permet de conclure par une récurrence descendante sur le nombre de briques qui traversent \mathcal{C} :

Affirmation 3.61. — Soit F_C un ensemble vérifiant les propriétés 1, 2, 3 et 4bis relativement à un anneau \mathcal{C} , à briques rectangulaires. Supposons que F_C ne vérifie pas la propriété supplémentaire.

Alors il existe un anneau \mathcal{C}' arbitrairement proche de \mathcal{C} et un ensemble $F_{\mathcal{C}'}$, vérifiant encore les propriétés 1, 2, 3 et 4bis relativement à \mathcal{C}' , à briques rectangulaires, et tel

que le nombre de briques de $F_{\mathcal{C}}'$ traversant C' soit strictement inférieur au nombre de briques de $F_{\mathcal{C}}$ traversant C .

En première approximation, l'idée de la preuve consiste à fusionner deux briques adjacentes B et C pour obtenir une brique qui n'est plus libre, puis à re-découper cette brique « transversalement » en deux briques qui ne traversent plus \mathcal{C} . Pour conserver les propriétés de la décomposition, il faut pouvoir contrôler l'intersection de l'image de C avec B : pour cette raison, on va plutôt fusionner B avec un petit morceau de C soigneusement choisi.

Démonstration de l'affirmation 3.61. — On utilise l'identification de \mathcal{C} avec $\mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ dans laquelle les briques sont des produits cartésiens. On choisit n'importe quelle brique $B \simeq [\theta_0, \theta_1] \times [-1, 1]$ de $F_{\mathcal{C}}$ qui traverse l'anneau \mathcal{C} , et n'importe quelle autre brique $C \simeq [\theta_1, \theta_2] \times I$ adjacente à B (cf. figure 25, dessin de gauche). D'après la propriété 4bis,

$$\text{Int}(C) \cap (h(B) \cup h^{-1}(B)) \neq \emptyset.$$

Il existe donc $t \in]-1, 1[$ tel que l'arc $[\theta_1, \theta_2] \times \{t\}$ rencontre $h(B) \cup h^{-1}(B)$; pour simplifier, on suppose que $t = 0$. On note $x \simeq (\theta_1, 0)$, et $y \simeq (\theta'_1, 0)$ où $\theta'_1 < \theta_2$ est le plus petit nombre tel que l'arc $\gamma = [x, y] = [\theta_1, \theta'_1] \times \{0\}$ rencontre $h(B) \cup h^{-1}(B)$. On a notamment :

- (a) $\gamma \subset C$;
- (b) $y \in h(\partial B)$ ou bien $y \in h^{-1}(\partial B)$;
- (c) $(B \cup \gamma) \cap h(B \cup \gamma) \subset \{y, h(y)\}$.

Le dernier point utilise la liberté de B et celle de C (qui contient γ), ainsi que la définition de γ .

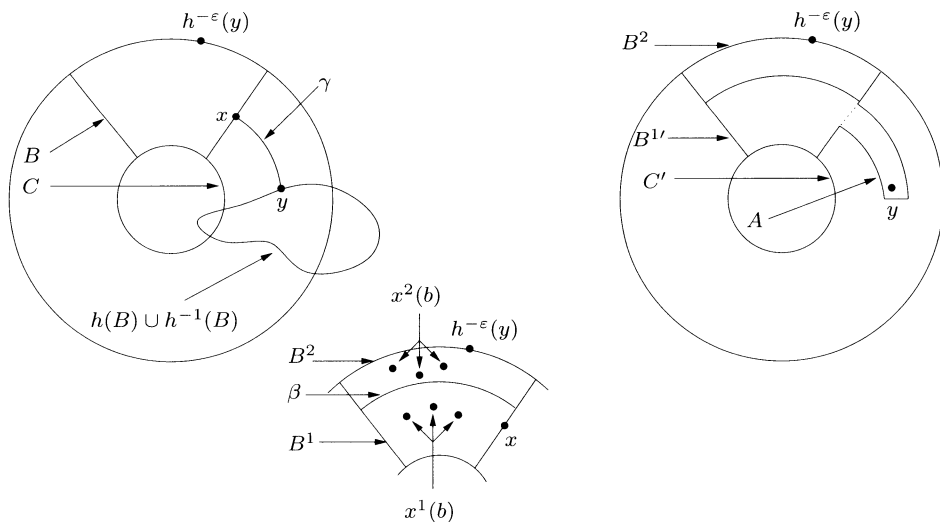
D'après le point b, on peut choisir $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $h^{-\varepsilon}(y) \in \partial B$. Il peut arriver que la brique B contienne aussi le point $h^{+\varepsilon}(y)$: dans ce cas, la définition de γ dit que $h^{+\varepsilon}(y)$ est sur la frontière de B ; dans le cas particulier où $h^{+\varepsilon}(y) = h^{-\varepsilon}(y)$, on ne change rien ; dans le cas contraire, quitte à effectuer une modification arbitrairement petite du graphe $F_{\mathcal{C}}$ et de l'anneau \mathcal{C} , on peut supposer que $h^{+\varepsilon}(\gamma)$ est disjoint de B , tout en conservant l'ensemble des propriétés précédentes (et notamment le fait que $h^{-\varepsilon}(y) \in \partial B$). En résumé, après modification éventuelle, on a :

- (d) ou bien $h^{+\varepsilon}(y) = h^{-\varepsilon}(y)$, ou bien $h^{+\varepsilon}(y) \notin B$.

Pour chacune des briques b de $F_{\mathcal{C}}$ adjacentes à la brique B (y compris pour $b = C$), la propriété 4bis permet de choisir deux points distincts $x^1(b)$ et $x^2(b)$ dans l'ensemble

$$\text{Int}(B) \cap h^{-\varepsilon(b)}(b)$$

avec $\varepsilon(b) = +1$ ou -1 . On choisit maintenant un arc β dans B (cf. figure 25, dessin du milieu), d'intérieur inclus dans l'intérieur de B , qui joint $\{\theta_0\} \times [-1, 1]$ à $\{\theta_1\} \times [-1, 1]$, et qui vérifie

FIGURE 25. Déformation et découpage de la brique B

(e) l'arc β sépare les points x et $h^{-\varepsilon}(y)$ dans B (ces deux points sont distincts car γ est libre, cf. point a) ;

(f) pour chacune des briques b adjacentes à B dans le graphe F_C , l'arc β sépare les deux points $x^1(b)$ et $x^2(b)$.

Quitte à changer de coordonnées, on suppose que $\beta \simeq [\theta_0, \theta_1] \times \{s\}$. L'arc β découpe la brique B en deux rectangles B^1 et B^2 , et on choisit les notations pour que $x \in B^1$ (et donc $h^{-\varepsilon}(y) \notin B^1$). Alors l'ensemble $B^1 \cup \gamma$ est libre : en effet, ceci suit du point c et du fait que B^1 ne contient ni $h^{+\varepsilon}(y)$ ni $h^{-\varepsilon}(y)$ (point d). On choisit maintenant $\delta > 0$ tel que, en posant $A = [\theta_1, \theta_1' + \delta] \times [-\delta, \delta]$, l'ensemble $B^{1'} = B^1 \cup A$ est encore libre. On peut également supposer que l'ensemble $C' = \text{Adh}(C \setminus A)$ est non vide, connexe, rencontre B ; et aussi que A ne rencontre pas l'arc β .

On modifie alors F_C de la manière suivante (figure 25, dessin de droite) : d'une part, on remplace l'arc $\{\theta_1\} \times [-\delta, \delta]$, qui est l'un des côtés du rectangle A , par la réunion des trois autres côtés ; d'autre part, on rajoute l'arc β . Cette procédure produit un sous-ensemble F'_C , d'un anneau⁽⁸⁾ C' ; l'ancienne brique B est remplacée par les briques $B^{1'}$ et B^2 , l'ancienne brique C est remplacée par $C' = \text{Adh}(C \setminus A)$, les autres briques restent inchangées (si on omet la modification arbitrairement petite de C et F_C opérée précédemment).

L'ensemble F'_C vérifie clairement les propriétés 1, 2 et 3 de la définition 3.58. Le couple $(B^{1'}, B^2)$ vérifie la propriété 4bis puisque $\text{Int}(B^{1'})$ contient y et B^2 contient $h^{-\varepsilon}(y)$. Grâce au point f, pour chaque brique b adjacente à la brique $B^{1'}$, le couple

⁽⁸⁾En fait, on a $C' = C$ sauf si on a effectué la petite modification avant le point d.

$(B^{1'}, b)$ vérifie aussi cette propriété. Ceci est encore vrai pour les couples (B^2, b) avec b adjacente à B^2 . Enfin, pour toute brique b adjacente à C dans l'ancien graphe F_C , le couple (C, b) vérifiait la propriété 4bis, et on a pu choisir le nombre δ (épaisseur de A) suffisamment petit pour que ceci soit encore vrai, pour la brique C' , dans le nouveau graphe $F_{C'}$. La propriété 4bis est donc globalement vérifiée.

Il est clair que le nombre de briques traversant l'anneau a diminué de 1, et que $F_{C'}$ est encore à briques rectangulaires. La preuve de l'affirmation 3.61 est terminée... \square

...et aussi la preuve du lemme 3.59. \square

Définition 3.62. — On appelle *pré-décomposition finie* un graphe triadique F tel que

- (1) F est un ensemble compact de U ;
- (2) si l'on appelle *pré-briques* les adhérences des composantes connexes du complémentaire de F ne contenant pas de point fixe, les pré-briques sont libres.

D'après la première propriété, les pré-briques sont en nombre fini, et leur union K est compacte. La construction des décompositions en briques a pour corollaire immédiat :

Corollaire 3.63. — Soit F une pré-décomposition finie. Il existe une décomposition en briques F' telle que $F' \cap K \subset F \cap K$, autrement dit toute pré-brique de F est incluse dans une brique de F' .

e. Premières propriétés des décompositions en briques. — On considère toujours un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 , préservant l'orientation, n'ayant qu'un nombre fini de points fixes ; de plus, on suppose désormais qu'il n'existe pas de courbe d'indice 1 pour h . On se donne une décomposition en briques F pour h (théorème 3.57).

Lemme de Franks. — Nous commençons par appliquer le lemme de Franks aux briques de F .

Définition 3.64. — Une *chaîne de briques* est une suite B_1, \dots, B_k de briques de la décomposition F telles que pour tout $i = 1, \dots, k-1$, $h(B_i)$ rencontre B_{i+1} (figure 26).

Insistons sur le fait que, contrairement à la définition des chaînes de disques, les briques d'une chaîne de briques ne sont pas supposées *a priori* être deux à deux distinctes.

Lemme 3.65 (discrétisation du lemme de Franks). — Dans une chaîne de briques, toutes les briques sont distinctes. En particulier, toute chaîne de briques est une chaîne de pseudo-disques, et il n'existe pas de chaîne de briques qui soit une chaîne de pseudo-disques périodique.

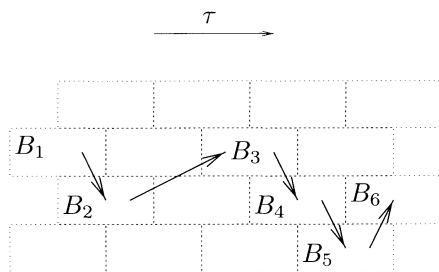


FIGURE 26. Une chaîne de briques pour la translation

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'une brique vérifie clairement la définition d'un pseudo-disque (définition 3.14). Soit (B_1, \dots, B_k) une chaîne de briques, et supposons qu'il existe deux entiers $i < j$ tels que $B_i = B_j$. Il est clair que, quitte à extraire, on peut supposer de plus que les briques B_i, \dots, B_{j-1} sont deux à deux distinctes. Elles forment alors une chaîne de pseudo-disques périodique, ce qui contredit le lemme de Franks (lemme 3.18). \square

Énoncés des propriétés. — On note ∂_U la frontière topologique dans U .

Affirmation 3.66. — Si V est une réunion quelconque de briques, alors $\partial_U V$ est une sous-variété sans bord de U , fermée dans U , donc une réunion (finie ou non) de cercles topologiques et de droites topologiques.

Affirmation 3.67. — Soit B_1 et B_2 deux briques adjacentes; alors de deux choses l'une :

- (1) soit $h(B_1)$ rencontre B_2 ,
- (2) soit $h(B_2)$ rencontre B_1 .

Affirmation 3.68. — Les briques sont des disques topologiques fermés.

Corollaire 3.69

- (1) Toute arête est incluse dans deux briques distinctes;
- (2) toute arête contient deux sommets distincts;
- (3) F est connexe.

Affirmation 3.70. — L'image par h de toute brique B rencontre au moins une brique adjacente à B . Même chose pour l'image par h^{-1} .

Preuves des propriétés. — La preuve de l'affirmation 3.66 est immédiate.

Démonstration de l'affirmation 3.67. — Puisque $B_1 \cup B_2$ n'est pas libre, mais que B_1 et B_2 le sont, c'est que $h(B_1)$ rencontre B_2 ou $h(B_2)$ rencontre B_1 . D'autre part, si ces deux possibilités étaient simultanément réalisées, alors (B_1, B_2, B_1) serait une chaîne de briques qui contredirait le lemme 3.65. \square

Démonstration de l'affirmation 3.68. — Soit B une brique. D'après l'affirmation 3.66, son bord est une réunion de cercles et de droites topologiques; comme B est compacte (par définition des décompositions en briques), c'est en fait une réunion de cercles. Il suffit donc de montrer que le bord de B est connexe, ou encore que le complémentaire de B dans la sphère est connexe.

Comme ∂B est une réunion de cercles topologiques, chaque composante connexe de $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Int}(B)$ est un disque topologique fermé. Soit D_1 l'un d'entre eux; c'est aussi une réunion de briques de la décomposition.

Soit $B_1 = B$, et B_2 une brique de D_1 adjacente à B . En appliquant l'affirmation 3.67, on voit que D_1 rencontre $h(B)$ ou $h^{-1}(B)$. Supposons par exemple que D_1 rencontre $h(B)$: comme B est libre, $h(B)$ est un ensemble connexe inclus dans le complémentaire de B , il est donc inclus dans D_1 . Comme $\partial D_1 \subset B$, on a alors $h(\partial D_1) \subset D_1$.

Ceci nous donne deux possibilités : ou bien $h(D_1) \subset D_1$, ou bien $h(\text{Adh}(\mathbb{S}^2 \setminus D_1)) \subset D_1$. Dans le premier cas, D_1 serait un disque attractif, mais c'est exclu, car le lemme 3.9 entraînerait l'existence d'une courbe d'indice 1, contrairement aux hypothèses. On est par conséquent dans le deuxième cas, et l'ensemble $\text{Adh}(\mathbb{S}^2 \setminus D_1)$ est libre. Par minimalité de la décomposition, cet ensemble étant une réunion de briques, il est en fait constitué d'une seule brique, qui est nécessairement la brique B . Ceci prouve que le complémentaire de B est le disque D_1 , qui est connexe. \square

Démonstration du corollaire 3.69

Point 1 (figure 27). — Soient B une brique et α une arête incluse dans B , qui n'est incluse dans aucune autre brique. Nous allons montrer que sous ces hypothèses, B ne peut pas être un disque topologique.

L'intérieur de α est inclus dans l'intérieur de B (sans quoi α borderait une autre brique). Par définition des briques, l'ensemble $O = B \setminus F$ est un ouvert connexe. Il existe donc une courbe de Jordan γ incluse dans $O \cup \alpha$, rencontrant α en unique point, et de manière transverse (voir figure 27).

Soient D_1 et D_2 les deux disques topologiques délimités par γ . Montrons que D_1 rencontre le complémentaire de B . Ou bien D_1 contient un point fixe de h , qui est dans le complémentaire de B puisque B est bornée (compacité des décompositions). Ou bien D_1 ne contient aucun point fixe : dans ce cas, l'ensemble $G = (F \cap D_1) \setminus \text{Int}(\alpha)$ est un graphe triadique qui n'a qu'un nombre fini de sommets. Comme tout graphe fini sans feuille possède un cycle, on peut trouver une courbe de Jordan γ' incluse dans G , donc dans $F \cap D_1$. L'un des deux disques topologiques ouverts bordés par γ' est alors inclus dans le complémentaire de B .

En appliquant le même raisonnement à D_2 , on voit que le complémentaire de B a au moins deux composantes connexes, ce qui contredit l'affirmation 3.68.

Point 2 (figure 27). — Si une arête β contenait un unique sommet, alors l'autre arête α adjacente à ce sommet serait contenue dans une unique brique, contredisant le point 1.

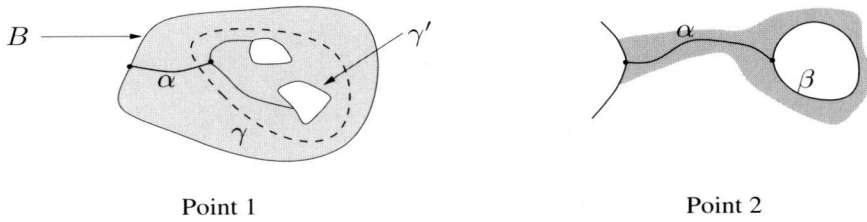


FIGURE 27. Preuve du corollaire 3.69

Point 3. — Commençons par remarquer que tout point de F appartient à la frontière d'au moins une brique : ceci est une conséquence du point 1.

Les briques sont en nombre dénombrable ; on peut les numérotter de manière à ce que chaque brique B_i soit adjacente à une brique B_j avec $j < i$. Pour tout entier n , la réunion $\partial B_0 \cup \dots \cup \partial B_n$ est alors connexe puisque chaque bord ∂B_i est connexe. Or d'après la remarque initiale, $F = \cup \partial B_i$, c'est donc une réunion croissante d'ensembles connexes, il est connexe. \square

Démonstration de l'affirmation 3.70 (figure 28). — On raisonne par l'absurde. Soit \mathcal{E} l'ensemble des briques adjacentes à B . Si $h(B)$ ne rencontre aucune des briques de \mathcal{E} , c'est que $h^{-1}(B)$ les rencontre toutes (d'après l'affirmation 3.67). Soit $B_0 \in \mathcal{E}$; comme B est libre, $h^{-1}(B)$ ne rencontre pas $B_0 \cap B$, en particulier B_0 n'est pas contenu dans $h^{-1}(B)$. La brique B_0 rencontre donc à la fois $h^{-1}(B)$ et son complémentaire, elle rencontre donc la frontière $h^{-1}(\partial B)$. Il existe donc une brique B_1 , adjacente à B , telle que $h^{-1}(B_1) \cap B_0 \neq \emptyset$. En réitérant le processus, on trouve une suite B_0, B_1, \dots

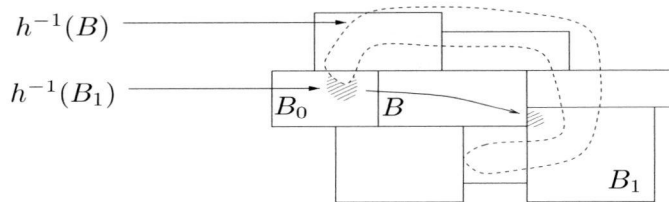


FIGURE 28. Preuve de l'affirmation 3.70

de briques de \mathcal{E} telles que $h(B_i) \cap B_{i+1} \neq \emptyset$. D'après la discrétisation du lemme de Franks (lemme 3.65), les briques $(B_i)_{i \geq 0}$ sont toutes distinctes ; mais c'est impossible puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de briques adjacentes à B . \square

f. Construction des attracteurs $A^+(B)$. — Soit B une brique de la décomposition. On pose $A_0(B) = B$, et on définit par récurrence, pour tout entier positif i ,

$$A_{i+1}(B) = \bigcup \{B' \text{ brique de } F \mid B' \cap h(A_i) \neq \emptyset\}.$$

On pose alors :

Définition 3.71 (figure 29). — $A^+(B) = \bigcup_{i \geq 1} A_i$.

On montre facilement :

Affirmation 3.72. — L'ensemble $A^+(B)$ est l'union des briques B' telles qu'il existe une chaîne de briques $(B_1 = B, \dots, B_k = B')$ avec $k \geq 2$. C'est aussi le plus petit ensemble dont l'intérieur contient $h(B)$, qui est une réunion de briques de F , et est un attracteur strict.

On définit $A^-(B)$ de manière symétrique :

Définition 3.73. — L'ensemble $A^-(B)$ est l'union des briques B' telles qu'il existe une chaîne de briques $(B_1 = B', \dots, B_k = B)$ avec $k \geq 2$.

La figure 29 illustre la construction de l'ensemble $A^+(B)$, la figure 30 montre $A^+(B)$ et $A^-(B)$ pour une brique d'une décomposition pour l'homéomorphisme linéaire hyperbolique selle.

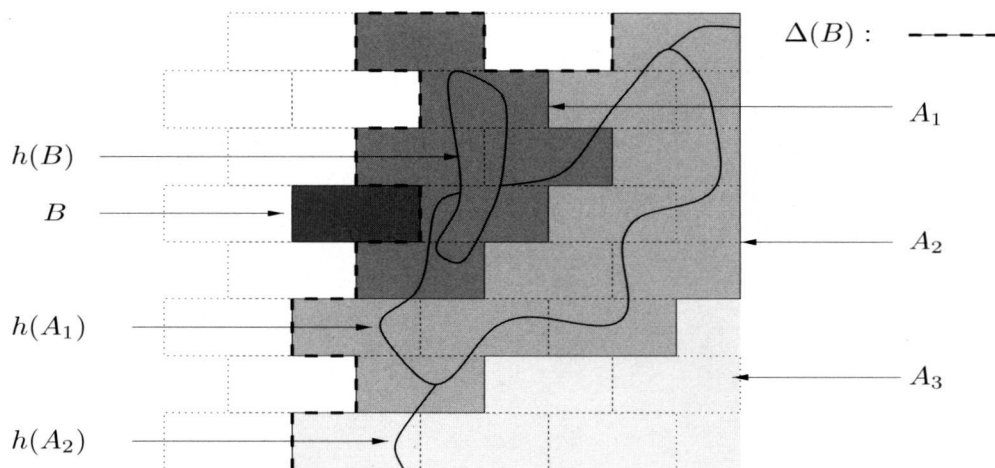


FIGURE 29. Construction de l'attracteur $A^+(B)$: les premières étapes

Affirmation 3.74. — L'attracteur $A^+(B)$ est connexe et rencontre B . Les intérieurs des ensembles B , $A^+(B)$ et $A^-(B)$ sont deux à deux disjoints.

Affirmation 3.75. — Toute brique adjacente à B est soit dans $A^+(B)$, soit dans $A^-(B)$, et $A^+(B) \cap B$ et $A^-(B) \cap B$ sont connexes et non vides.

L'allure au voisinage d'une brique est donc celle de la figure 31.

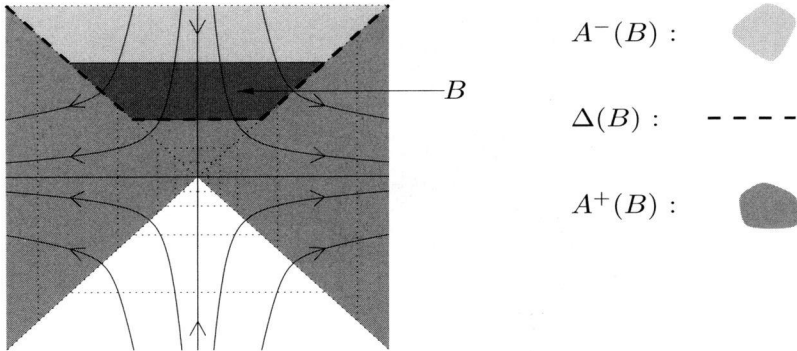


FIGURE 30. Les ensembles $A^+(B)$ et $A^-(B)$ pour l'homéomorphisme linéaire hyperbolique selle (la décomposition est celle de la figure 22)

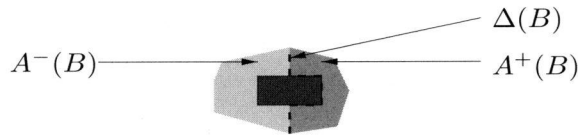


FIGURE 31. Topologie des ensembles $A^-(B)$, $A^+(B)$ et $\Delta(B)$ au voisinage d'une brique

Affirmation 3.76. — Soit A un attracteur strict, connexe, qui est une réunion de briques. Alors les composantes connexes de la frontière de A dans U sont des droites topologiques.

Démonstration de l'affirmation 3.74. — Comme B est connexe, la réunion A_1 des briques qui rencontrent $h(B)$ est connexe. De plus, elle rencontre B car $h(B)$ rencontre au moins une brique adjacente à B (affirmation 3.70). La connexité de $A^+(B)$ s'en suit. Comme $A^+(B)$ contient A_1 , il rencontre B .

La deuxième phrase de l'affirmation est une conséquence immédiate de la version discrétisée du lemme de Franks (lemme 3.65). \square

Démonstration de l'affirmation 3.75. — D'après l'affirmation 3.67, toute brique adjacente à B est dans $A^+(B)$ ou dans $A^-(B)$; mais pas dans les deux d'après l'affirmation précédente. Celle-ci dit également que les ensembles $A^+(B) \cap B$ et $A^-(B) \cap B$ ne sont pas vides. Il reste à montrer leur connexité.

Supposons que l'un de ces deux ensembles ne soit pas connexe. Alors on peut trouver quatre briques B_1, B_2, B_3, B_4 , adjacentes à B , telle que B_1 et B_3 soient dans $A^+(B)$ et B_2 et B_4 dans $A^-(B)$, et telles qu'en parcourant ∂B on rencontre successivement B_1, B_2, B_3 et B_4 (figure 32).

Comme $A^+(B)$ est connexe et réunion de briques, son intérieur est connexe par arcs, et il existe un arc $\gamma \subset \text{Int}(A^+(B))$ joignant un point de B_1 à un point de B_3 .

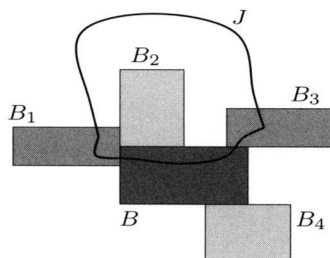


FIGURE 32. Preuve de l'affirmation 3.75

À l'aide d'un autre arc $\gamma' \subset B \cup B_1 \cup B_3$, on peut prolonger γ en une courbe de Jordan J . Cette courbe de Jordan ne rencontre pas $A^-(B)$ et sépare B_2 et B_4 , ce qui contredit la connexité de $A^-(B)$. \square

Démonstration de l'affirmation 3.76. — Soit C l'une de ces composantes connexes. D'après l'affirmation 3.66, il suffit de prouver que C n'est pas un cercle topologique. Supposons le contraire; comme A est connexe, l'un des deux disques topologiques ouverts bordés par C est disjoint de A , on le note D . Comme A est un attracteur strict, on a $h(C) \cap D = \emptyset$, donc de deux choses l'une : ou bien $D \subset h(D)$, mais le lemme 3.9 interdit les disques attractifs; ou bien l'adhérence de D est libre. Dans ce cas, l'adhérence de D est exactement l'une des briques de la décomposition (minimalité de la décomposition). Par ailleurs, les briques adjacentes à D sont toutes dans A ; et l'une d'entre elles au moins, notons-la B_1 , doit rencontrer $h^{-1}(D)$ (affirmation 3.70). On a alors $h(B_1) \cap D \neq \emptyset$, ceci contredit le fait que A est un attracteur. \square

g. Construction des droites de Brouwer $\Delta(B)$. — D'après l'affirmation 3.75, il existe une unique composante connexe de $\partial A^+(B)$ qui rencontre B .

Définition 3.77 (figures 29 et 30). — On note $\Delta(B)$ l'unique composante connexe de la frontière de $A^+(B)$ dans U qui rencontre B .

Proposition 3.78. — L'ensemble $\Delta(B)$ est une droite de Brouwer. L'ensemble $B \cup \Delta(B)$ est libre, et le domaine de Brouwer engendré par $\Delta(B)$ contient B .

Démonstration

$\Delta(B)$ est libre. — C'est clair puisque $A^+(B)$ est un attracteur strict.

$\Delta(B)$ est une droite topologique. — C'est une conséquence de l'affirmation 3.76.

$\Delta(B)$ est une droite de Brouwer. — Si les deux extrémités de Δ aboutissent au même point fixe x de h , il reste à montrer que Δ sépare $h(\Delta)$ et $h^{-1}(\Delta)$. Soit D celui des deux disques topologiques fermés bordés par $\Delta(B) \cup \{x\}$ qui contient $A^+(B)$, et D' son complémentaire. Puisque $h(A^+(B)) \subset A^+(B)$, on a $h(\partial D) \subset D$. Si $h(D') \subset D$,

alors D' est libre, ce qui contredit la minimalité de la décomposition car D' contient plusieurs briques (par exemple, $A^-(B) \subset D'$). On a donc $h(D) \subset D$.

On en déduit $h(D) \subset D \subset h^{-1}(D)$, et la propriété de séparation est vérifiée.

Fin de la preuve. — Par définition de $A^+(B)$, $h(B) \subset \text{Int}(A^+(B))$, donc $h(B) \cap \Delta(B) = \emptyset$. D'autre part $h(\Delta(B)) \subset \text{Int}(A^+(B))$, donc $h(\Delta(B)) \cap B = \emptyset$ d'après l'affirmation 3.74. Comme B et $\Delta(B)$ sont libres, ceci montre que $B \cup \Delta(B)$ est libre.

Comme B est connexe et rencontre $\Delta(B)$, on en déduit que B est dans le domaine de Brouwer engendré par $\Delta(B)$ (plus précisément, $h(B)$ est dans le domaine fondamental de $\Delta(B)$, $D(\Delta(B), h(\Delta(B)))$). \square

h. Preuve du théorème de Brouwer, corollaires

Théorème 3.79 (Brouwer). — *Tout point de $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fixe}(h)$ est dans un domaine de Brouwer.*

Démonstration (P. Le Calvez, A. Sauzet). — Tout point de U est dans une brique B , et toute brique B est dans le domaine de Brouwer engendré par $\Delta(B)$ (proposition 3.78). \square

Le résultat suivant nous servira à la section 4.6 :

Corollaire 3.80 (de la preuve du théorème de Brouwer)

- (1) *Tout arc libre est contenu dans un domaine de Brouwer ;*
- (2) *S'il existe un arc libre γ de x à y , alors il existe un arc libre de x à $h^n(y)$ pour tout entier n .*

Démonstration

Premier point. — Un arc libre est inclus dans un disque topologique fermé libre D ; le bord d'un tel disque forme une pré-décomposition finie (définition 3.62). D'après le corollaire 3.63, on peut choisir une décomposition en briques dont une brique contient D . Comme toute brique est incluse dans un domaine de Brouwer, on obtient le résultat.

Deuxième point. — Remarquons tout d'abord que l'arc γ étant libre, il est disjoint de tous ses itérés par h (lemme 3.12). En particulier, x et y ne sont pas dans la même orbite de h .

Examinons d'abord le cas où h est une translation affine du plan. Soit p l'application quotient du plan dans l'anneau ouvert \mathbb{R}^2/h . L'hypothèse entraîne donc que $p(x) \neq p(y)$. On construit alors facilement, dans l'anneau, un arc qui relie $p(x)$ à $p(y)$ et qui fait « n tours de plus de $p(\gamma)$ ». Cet arc se relève en un arc γ' joignant x à $h^n(y)$; comme $p(\gamma')$ est un arc, γ' est libre.

Revenons au cas général. D'après le premier point, un arc libre est inclus dans un domaine de Brouwer. Mais puisque la restriction de h à un tel domaine est conjuguée à une translation affine du plan (affirmation 3.25, second point), le cas précédent permet de conclure. \square

CHAPITRE 4

PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL DE DYNAMIQUE GLOBALE

Dans ce chapitre, nous prouvons le théorème principal de dynamique globale (théorème D). Rappelons que l'idée de la preuve est décrite à la section 3.1.c. La section 4.1 contient les énoncés des lemmes et propositions utilisés dans cette preuve ; la preuve proprement dite occupe la section 4.2. Les lemmes sont ensuite démontrés dans les sections 4.3 à 4.6. *Les sections 4.2 à 4.6 sont largement indépendantes les unes des autres, et peuvent être lues dans un ordre quelconque (la seule exception notable concerne la section 4.5, qui utilise les notions introduites au début de la section 4.3).*

4.1. Énoncés des lemmes

Dans cette section, on énonce les lemmes et propositions qui seront utilisés dans la preuve du théorème principal ; leurs démonstrations font l'objet des sections suivantes. En a, on transpose les définitions des croissants et des pétales, introduites précédemment sous l'hypothèse (H2) du théorème principal, au cadre des homéomorphismes de Brouwer (hypothèse (H1)) ; les hypothèses (H2) et (H1) sont respectivement introduites aux paragraphes 3.1 et 3.3). Ceci permet, en b, d'écrire une version du théorème principal dans ce cadre (théorème E). Il reste alors à énoncer les résultats permettant le changement de cadre : en c, l'existence d'une droite de Brouwer reliant les deux points fixes ; en d et e, la possibilité de relever canoniquement la dynamique sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ en un homéomorphisme de Brouwer.

a. Croissants et pétales pour les homéomorphismes de Brouwer. — Nous commençons par définir pétales et croissants pour un homéomorphisme de Brouwer H , c'est-à-dire sous l'hypothèse (H1). La définition des pétales ne posera pas de problème si on assimile H à un homéomorphisme de la sphère fixant un unique point. La définition des croissants est un peu plus compliquée : pour la comprendre, il peut être utile de garder à l'esprit que lorsqu'on appliquera la définition, H sera le relevé d'un homéomorphisme h de l'anneau $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, et que les croissants de H (pour

la nouvelle définition) doivent correspondre à des croissants de h (pour la définition donnée à la section 3.1). Il faudra ainsi penser aux croissants de H comme ayant deux extrémités (bien que, dans la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, ces extrémités aboutissent toutes les deux au point fixe ∞). Ceci est illustré sur la figure 1.

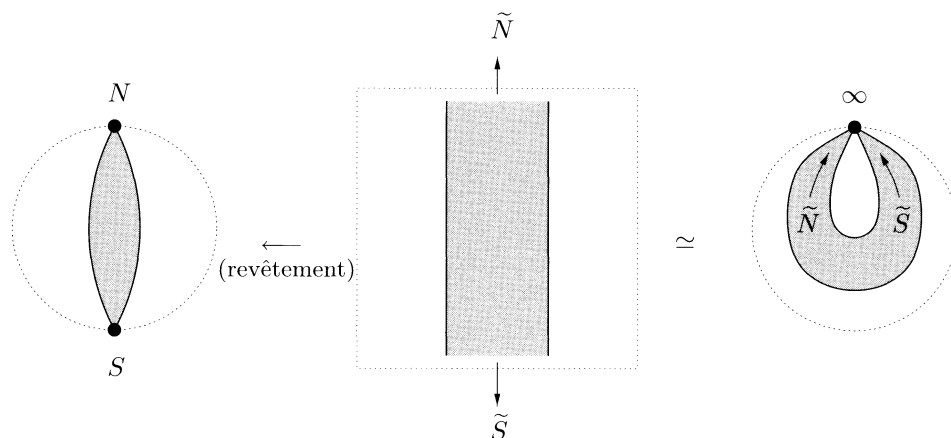


FIGURE 1. Les deux notions de croissants : pour un homéomorphisme de la sphère fixant N et S (à gauche), ou pour un homéomorphisme de Brouwer, vu comme homéomorphisme du plan sans point fixe (au milieu) ou comme homéomorphisme de la sphère fixant le point à l'infini (à droite)

Pétales. — Soit H un homéomorphisme de Brouwer.

Définition 4.1. — Soit Δ une droite de Brouwer pour H . On appellera *pétale attractif* de Δ l'unique disque topologique fermé $P^+(\Delta)$ de la sphère $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ dont la frontière est $\Delta \cup \{\infty\}$ et qui contient $H(\Delta)$. De même, le *pétale répulsif* de Δ sera le pétale attractif de Δ pour l'homéomorphisme H^{-1} , noté $P^-(\Delta)$.

Nous avons déjà vu que $P^+(\Delta)$ est un attracteur strict (remarque 3.23). On confondra parfois le pétale et sa trace dans le plan.

Croissants

Définition 4.2. — Si Δ_0 et Δ_1 sont deux droites topologiques disjointes, rappelons que $D(\Delta_0, \Delta_1)$ désigne l'unique disque topologique ouvert du plan de frontière $\Delta_0 \cup \Delta_1$. On dira que l'adhérence, dans le plan \mathbb{R}^2 , de l'ensemble $D(\Delta_0, \Delta_1)$ est une *bande topologique*. Les deux droites Δ_0 et Δ_1 seront appelées *bords* de la bande.

Définition 4.3. — Si (Δ_0, Δ_1) est un couple attractif de droites de Brouwer disjointes, on appellera *croissant (attractif) de (Δ_0, Δ_1)* la bande topologique $\text{Adh}(D(\Delta_0, \Delta_1))$. On définit de même le croissant (répulsif) associé à un couple répulsif.

Nous avons déjà vu que les croissants attractifs ainsi définis sont des attracteurs stricts (affirmation 3.31, figure 11 page 45).

Bouts d'une bande topologique. — Soit $A = \text{Adh}(D(\Delta_0, \Delta_1))$ une bande topologique. On notera \hat{A} le compactifié en bouts de A ; \hat{A} est homéomorphe au disque fermé. On le muni d'une orientation compatible avec celle du plan. On notera \tilde{N} et \tilde{S} les deux bouts de A , de manière à ce qu'en parcourant la courbe bordant \hat{A} dans le sens positif, on rencontre Δ_0 , \tilde{S} , Δ_1 et \tilde{N} dans cet ordre (autrement dit, si l'on se place dans une carte où Δ_0 et Δ_1 sont des droites euclidiennes verticales avec Δ_0 à gauche de Δ_1 , \tilde{N} est le bout « en haut » et \tilde{S} est le bout « en bas » : voir la figure 1). Remarquons que ce choix de notation dépend de l'ordre des deux droites de Brouwer dans le couple (Δ_0, Δ_1) (si on permute ces deux droites, les bouts \tilde{N} et \tilde{S} sont également permutés).

Supposons de plus que A est un croissant attractif. Puisque $H(A) \subset A$, et que H est propre, la restriction de H à A s'étend à \hat{A} . De plus, la configuration topologique des deux droites et de leurs images (affirmation 3.31, figure 11) montre que cette extension fixe les deux bouts \tilde{N} et \tilde{S} .

Croissants à dynamique \tilde{N} - \tilde{S}

Définition 4.4. — Un croissant attractif $A = \text{Adh}(D(\Delta_0, \Delta_1))$ est dit à *dynamique \tilde{N} - \tilde{S}* si pour tout voisinage $O_{\tilde{N}}$ de \tilde{N} dans \hat{A} , il existe un pétale attractif P pour H tel que

- $P \subset A$;
- $A \setminus P \subset O_{\tilde{N}}$.

On définit de la même manière les croissants attractifs à dynamique \tilde{S} - \tilde{N} , et les croissants répulsifs à dynamique \tilde{N} - \tilde{S} ou \tilde{S} - \tilde{N} .

Pétales et croissants simpliciaux

Définition 4.5. — Soit F une décomposition en briques pour H . On dira alors qu'une droite topologique est *simpliciale* si elle est incluse dans F (c'est-à-dire réunion d'arêtes de F). On dira qu'un pétale ou un croissant est simplicial si sa frontière (dans $\mathbb{S}^2 \setminus \text{Fixe}(h)$) est incluse dans F . On dira enfin qu'un croissant à dynamique \tilde{N} - \tilde{S} ou \tilde{S} - \tilde{N} est simplicial si c'est un croissant simplicial, et si les pétales de la définition 4.4 peuvent être choisis simpliciaux. Ces définitions se transposent sans difficulté au cadre d'un homéomorphisme de la sphère ayant deux points fixes (hypothèse (H2)).

Définition 4.6. — Soit D une bande topologique; un croissant A' est un *sous-croissant* de D si A' est inclus dans D , et si l'intérieur de A' sépare les deux bords de D (de manière équivalente, si l'adhérence de A' dans \hat{A} contient les deux bouts de \hat{A}).

Remarquons que si A' est un sous-croissant d'une bande topologique D , alors les bouts de A' s'identifient aux bouts de D .

Définition 4.7. — On dira qu'un croissant attractif simplicial A est *minimal* si il ne possède pas de sous-croissant attractif simplicial différent de A .

b. Une version du théorème principal pour les homéomorphismes de Brouwer. — Dans cette partie, nous commençons par énoncer une version du théorème principal pour les homéomorphismes de Brouwer (théorème E). Cet énoncé est ensuite découpé en trois morceaux : la proposition 4.8 affirme qu'il existe des croissants simpliciaux minimaux, et qu'ils contiennent toujours suffisamment de pétales ; le lemme 4.9 permettra de parler de famille maximale de croissants simpliciaux minimaux ; enfin, la proposition 4.11 calcule l'indice partiel dans une bande en fonction du type des croissants minimaux qu'elle contient.

Théorème E. — Soient H un homéomorphisme de Brouwer, et F une décomposition en briques pour H . Soit (Δ_0, Δ_1) un couple de droites de Brouwer simpliciales disjointes, tel que $\text{IP}(\Delta_0, \Delta_1) = -p < 0$.

La bande $\text{Adh}(\Delta_0, \Delta_1)$ contient alors $2p$ sous-croissants simpliciaux minimaux : p croissants attractifs à dynamique \tilde{N} - \tilde{S} , et p croissants répulsifs à dynamique \tilde{S} - \tilde{N} , d'intérieurs disjoints deux à deux, les croissants attractifs et répulsifs étant alternés entre Δ_0 et Δ_1 .

Remarquons que dans le cas où l'indice partiel est strictement positif, on peut appliquer le théorème au couple (Δ_1, Δ_0) . On peut tester le théorème sur l'exemple « multi-Reeb » de la figure 14 (section 3.3 c).

Proposition 4.8. — Soit H un homéomorphisme de Brouwer, et F une décomposition en briques pour H .

(1) Tout croissant attractif simplicial A possède un sous-croissant attractif simplicial minimal ;

(2) tout croissant attractif simplicial minimal est à dynamique \tilde{S} - \tilde{N} ou \tilde{N} - \tilde{S} .

L'énoncé est encore vrai en changeant « attractif » en « répulsif ».

Lemme 4.9 (figure 2). — Soit H un homéomorphisme de Brouwer, et F une décomposition en briques pour H . Soit (Δ_0, Δ_1) un couple de droites de Brouwer simpliciales disjointes.

Il existe alors un entier $k \geq -1$ et une famille (éventuellement vide)

$$\mathcal{F} = \{\text{Adh}(D(\Delta'_0, \Delta'_1)), \dots, \text{Adh}(D(\Delta'_{2k}, \Delta'_{2k+1}))\}$$

de sous-croissants simpliciaux de la bande topologique $\text{Adh}(D(\Delta_0, \Delta_1))$, telle que

- les disques topologiques ouverts $D(\Delta'_{2i}, \Delta'_{2i+1})$ sont deux à deux disjoints ;
- ces croissants sont minimaux ;
- la famille \mathcal{F} est maximale pour l'inclusion : autrement dit, il n'existe pas de famille \mathcal{F}' de sous-croissants de $D(\Delta_0, \Delta_1)$, d'intérieurs deux à deux disjoints, simpliciaux, minimaux, qui contienne strictement \mathcal{F} .

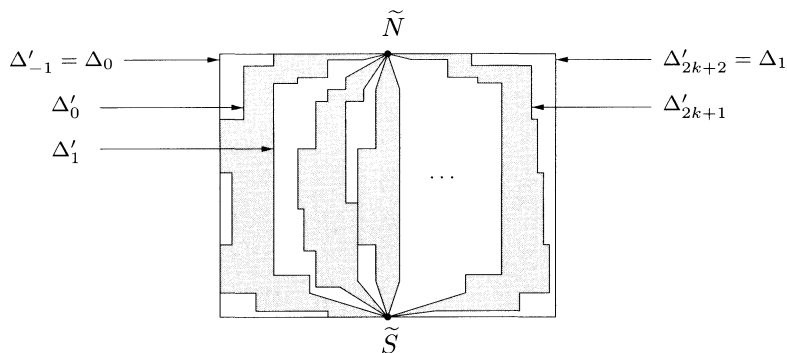


FIGURE 2. Famille maximale de croissants minimaux

Démonstration du lemme 4.9. — On se place sous les hypothèses du lemme. Soit k_0 la largeur simpliciale de la bande $\text{Adh}(D(\Delta_0, \Delta_1))$, c'est-à-dire le plus petit entier tel qu'il existe une famille de k_0 arêtes de la décomposition F , dont la réunion est connexe et rencontre Δ_0 et Δ_1 .

Si $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_k\}$ est une famille de croissants simpliciaux, attractifs ou répulsifs pour H , d'intérieurs deux à deux disjoints, et tels que l'intérieur de chaque croissant sépare Δ_0 et Δ_1 , alors il est clair que $k \leq k_0$.

Ceci entraîne immédiatement l'existence d'une famille \mathcal{F} de croissants minimaux qui est maximale pour l'inclusion. \square

Si \mathcal{F} est une famille de croissants vérifiant les conclusions du lemme précédent, on supposera toujours que les droites Δ'_i sont numérotées dans l'ordre naturel de Δ_0 vers Δ_1 ⁽¹⁾. Dans ce cas, le bout \tilde{N} de chacun des croissants de \mathcal{F} s'identifie naturellement au bout \tilde{N} de la bande $\text{Adh}(D(\Delta_0, \Delta_1))$ (même remarque pour les bouts \tilde{S}). On posera aussi $\Delta'_{-1} = \Delta_0$ et $\Delta'_{2k+2} = \Delta_1$.

On note alors $\#(\mathcal{F}, a, \tilde{N}\tilde{S})$, $\#(\mathcal{F}, r, \tilde{S}\tilde{N})$, $\#(\mathcal{F}, a, \tilde{S}\tilde{N})$ et $\#(\mathcal{F}, r, \tilde{N}\tilde{S})$ le nombre de croissants de chaque type dans \mathcal{F} (attractif \tilde{N} - \tilde{S} , etc.).

Remarque 4.10. — Dans une telle famille \mathcal{F} , deux croissants successifs quelconques $\text{Adh}(D(\Delta'_{2i}, \Delta'_{2i+1}))$ et $\text{Adh}(D(\Delta'_{2i+2}, \Delta'_{2i+3}))$ sont toujours l'un attractif et l'autre répulsif. En effet, si par exemple ils étaient tous deux attractifs, alors la bande qui les sépare serait un croissant répulsif simplicial, donc contiendrait un croissant répulsif simplicial minimal d'après la proposition 4.8. Ceci contredirait la maximalité de \mathcal{F} . Le même raisonnement montre que si le couple (Δ_0, Δ_1) est indifférent, \mathcal{F} contient autant de croissants attractifs que de répulsifs.

⁽¹⁾Autrement dit, que l'intérieur du croissant $D(\Delta'_{2i}, \Delta'_{2i+1})$ sépare la droite Δ_0 , la droite Δ'_{2i} et les croissants $D(\Delta'_{2j}, \Delta'_{2j+1})$ pour $j < i$, d'une part, de la droite Δ_1 , de la droite Δ'_{2i+1} , et des croissants $D(\Delta'_{2j}, \Delta'_{2j+1})$ pour $j > i$, d'autre part.

Proposition 4.11. — Soit H un homéomorphisme de Brouwer, et F une décomposition en briques pour H . Soit (Δ_0, Δ_1) un couple de droites de Brouwer simpliciales disjointes, et \mathcal{F} une famille maximale de sous-croissants simpliciaux minimaux de la bande $\text{Adh}(D(\Delta_0, \Delta_1))$ (c'est-à-dire que \mathcal{F} vérifie la conclusion du lemme 4.9). Alors :

(1) pour tout $i = -1, \dots, k$, l'indice partiel $\text{IP}(H, \Delta'_{2i+1}, \Delta'_{2i+2})$ entre les bords de deux croissants successifs est nul, et si ces deux droites sont disjointes, il existe une chaîne de pseudo-disques de l'une à l'autre, constituée de briques de la décomposition⁽²⁾ ;

(2) on a la formule suivante :

$$\text{IP}(H, \Delta_0, \Delta_1) = \frac{\left(\#(\mathcal{F}, a, \tilde{S}\tilde{N}) + \#(\mathcal{F}, r, \tilde{N}\tilde{S})\right) - \left(\#(\mathcal{F}, a, \tilde{N}\tilde{S}) + \#(\mathcal{F}, r, \tilde{S}\tilde{N})\right)}{2}.$$

Remarquons en particulier que si l'indice partiel entre Δ_0 et Δ_1 est très négatif, on obtient un grand nombre de croissants attractifs à dynamique $\tilde{N}\tilde{S}$ ou répulsifs à dynamique $\tilde{S}\tilde{N}$. Inversement, si la famille \mathcal{F} est vide, on a $k = -1$, et la proposition affirme l'existence d'une chaîne de briques de Δ_0 à Δ_1 .

c. Existence d'une droite de Brouwer à extrémités Nord-Sud

Proposition 4.12. — Soit h un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 , préservant l'orientation, avec $\text{Fixe}(h) = \{N, S\}$ (hypothèse (H2)). On suppose que $\text{Indice}(h, N) \neq 1$. Soit F une décomposition en briques pour h .

Alors il existe au moins une droite de Brouwer Δ_0 pour h , simpliciale (i.e. incluse dans F), dont l'adhérence contient N et S .

d. Définition d'un indice pour les homéomorphismes de Brouwer commutant à la translation. — On se place sous l'hypothèse (H2) : h est un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 , préservant l'orientation, avec $\text{Fixe}(h) = \{N, S\}$. Nous allons mélanger trois points de vue, qu'on appelle « modèle de la sphère, du plan, de l'anneau ». Le passage d'un point de vue à l'autre se fait de la manière suivante :

- on identifie $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ au plan \mathbb{R}^2 via un homéomorphisme préservant l'orientation qui envoie N sur $(0, 0)$ (par exemple la projection stéréographique) ;
- soit τ la translation $(\tilde{\theta}, r) \mapsto (\tilde{\theta} + 1, r)$. On identifie l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{R}^2 / \tau$ à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ via l'homéomorphisme $(\theta, r) \mapsto \exp(-r + 2i\pi\theta)$ (« exp » est l'exponentielle complexe, on a également identifié \mathbb{R}^2 au plan complexe).

Il est clair que l'homéomorphisme h vit dans chacun des trois modèles. Ces modèles sont orientés de manières compatibles, en choisissant $t \mapsto \exp(it)$ comme orientation du cercle unité du plan.

⁽²⁾Définition 3.44.

On a un quatrième point de vue avec le revêtement universel de l'anneau \mathbb{A} :

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{A} \\ (\tilde{\theta}, r) \longmapsto (\tilde{\theta} + \mathbb{Z}, r). \end{cases}$$

Pour ne pas confondre ce dernier point de vue avec le modèle du plan, on notera $\tilde{\mathbb{A}}$ le revêtement universel de \mathbb{A} . La figure 3 résume les différents points de vue.

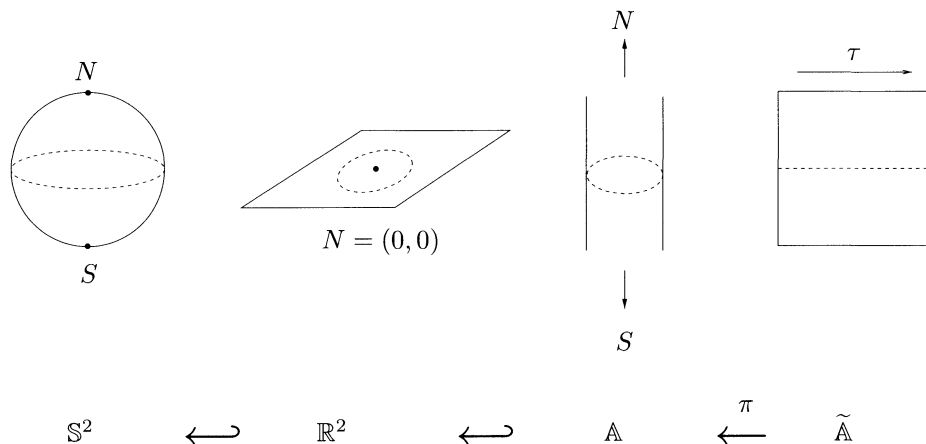


FIGURE 3. Les différents modèles

Définition 4.13. — Un *relevé* de h par π est un homéomorphisme H de $\tilde{\mathbb{A}}$ tel que $\pi H = h\pi$. Si C est un sous-ensemble connexe de \mathbb{A} , un *relevé* de C est une composante connexe de $\pi^{-1}(C)$.

On note maintenant $\text{Comm}(\tau)$ l'ensemble des homéomorphismes du plan $\tilde{\mathbb{A}}$, préservant l'orientation, qui commutent avec la translation $\tau : (\tilde{\theta}, r) \mapsto (\tilde{\theta} + 1, r)$; c'est aussi l'ensemble des relevés d'homéomorphismes de l'anneau \mathbb{A} isotopes à l'identité (voir par exemple [LR01], section 3). Comme h préserve l'orientation et fixe N et S , il est isotope à l'identité dans le modèle de l'anneau. Autrement dit :

Affirmation 4.14. — *Tout relevé H de h est un élément de $\text{Comm}(\tau)$, sans point fixe.*

Nous allons montrer :

Affirmation 4.15. — *Soit $H \in \text{Comm}(\tau)$ un homéomorphisme de Brouwer et γ une courbe du plan vérifiant $\tau(\gamma(0)) = \gamma(1)$. Le nombre $\text{Indice}(H, \gamma)$ est un entier qui ne dépend pas de la courbe γ . De plus, il est invariant par conjugaison : si $g \in \text{Comm}(\tau)$, on a $\text{Indice}(gHg^{-1}, \gamma) = \text{Indice}(H, \gamma)$.*

Définition 4.16. — Cet entier est appelé *indice* de H (par rapport à τ), et noté $\text{Indice}(H, \tau)$.

Démonstration de l'affirmation 4.15. — Soit Γ l'espace des courbes γ du plan vérifiant $\gamma(1) = \tau(\gamma(0))$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Cet espace est connexe par arcs (et même convexe). Le nombre $\text{Indice}(H, \gamma)$ dépend continûment de γ ; comme H commute avec la translation τ , il prend des valeurs entières sur Γ ; donc ce nombre ne dépend pas de γ . D'autre part, l'espace $\text{Comm}(\tau)$ est connexe (puisque constitué de relevés d'homéomorphismes isotope à l'identité). Le nombre $\text{Indice}(gHg^{-1}, \tau)$ dépend continûment de g , donc $\text{Indice}(H, \tau)$ est constant sur l'espace connexe des conjugués à H via un élément de $\text{Comm}(\tau)$. \square

e. Existence d'un relevé canonique

Proposition 4.17. — Soit h un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 , préservant l'orientation, avec $\text{Fixe}(h) = \{N, S\}$ (hypothèse (H2)). On suppose que $\text{Indice}(h, N) \neq 1$.

Il existe alors un unique relevé \tilde{h} de h par π vérifiant $\text{Indice}(\tilde{h}, \tau) = \text{Indice}(h, N) - 1$. On a de plus :

- (1) si Δ est une droite de Brouwer pour h dont l'adhérence contient N et S , alors tout relevé de Δ est une droite de Brouwer pour \tilde{h} ;
- (2) si γ est un arc libre pour \tilde{h} , $\pi(\gamma)$ est un arc libre pour h ;
- (3) si F est une décomposition en briques pour h , alors $\tilde{F} = \pi^{-1}(F)$ est une décomposition en briques pour \tilde{h} .

Définition 4.18. — Le relevé \tilde{h} de h donné par cette proposition est appelé *relevé canonique* de h .

4.2. Preuve du théorème à partir des lemmes

Nous allons prouver un énoncé qui précise le théorème D (énoncé au paragraphe 3.1 b) :

Théorème F (« version simpliciale » du théorème principal). — Soit h un homéomorphisme de la sphère, préservant l'orientation, fixant uniquement les deux points N et S (hypothèse (H2)). On suppose que $\text{Indice}(h, N) = 1 - p < 1$. Soit F une décomposition en briques pour h .

Il existe alors p croissants attractifs simpliciaux, minimaux, à dynamique Nord-Sud, et p croissants répulsifs simpliciaux, minimaux, à dynamique Sud-Nord, d'intérieurs disjoints deux à deux, les croissants attractifs et répulsifs étant cycliquement alternés autour de N et S .

On déduit facilement le théorème D de cet énoncé. En effet, on peut toujours trouver une décomposition en briques pour h (théorème 3.57). On applique alors le théorème F. Puis on remplace chaque croissant attractif par son image par h . On obtient ainsi une nouvelle famille de croissants deux à deux d'intersection réduite à $\{N, S\}$ (et non plus seulement d'intérieurs disjoints), qui vérifie donc la conclusion

du théorème D. Remarquons par contre que les nouveaux croissants ne sont plus simpliciaux.

Démonstration du théorème F. — Soit h vérifiant les hypothèses du théorème, et F une décomposition en briques pour h .

On applique d'abord la proposition 4.12 qui nous donne une droite de Brouwer Δ_0 , simpliciale, dont l'adhérence contient les points N et S .

On utilise maintenant la proposition 4.17 : on note $H = \tilde{h}$ l'homéomorphisme de Brouwer, relevé canonique de h . L'automorphisme du revêtement universel π est toujours noté τ . On note aussi \tilde{F} la décomposition en briques pour H obtenue en relevant F (point 3 de la proposition). Soient $\tilde{\Delta}_0$ un relevé de Δ_0 , et $\tilde{\Delta}_1 = \tau(\tilde{\Delta}_0)$. Ces deux ensembles sont des droites de Brouwer pour H (point 1 de la proposition). Elles sont disjointes. On peut alors relier l'indice partiel entre ces deux droites à l'indice de H en tant que commutant à la translation :

Affirmation 4.19. — $\text{IP}(H, \tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1) = \text{Indice}(H, \tau)$.

En effet, le théorème de Schoenflies permet de supposer que Δ_0 est une droite verticale de l'anneau \mathbb{A} , donc que $\tilde{\Delta}_0$ et $\tilde{\Delta}_1$ sont deux droites euclidiennes verticales dans le plan $\tilde{\mathbb{A}}$. Dans cette situation, d'après les définitions, chacun des deux indices est égal à l'indice de H le long de n'importe quelle courbe allant d'un point \tilde{x} de $\tilde{\Delta}_0$ à $\tau(\tilde{x})$, ce qui prouve l'affirmation.

On applique maintenant le lemme 4.9 au couple $(\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1)$ de droites de Brouwer simpliciales pour H (pour la décomposition \tilde{F}). On obtient ainsi une famille maximale $\tilde{\mathcal{F}}$ de croissants simpliciaux minimaux. D'après la proposition 4.8, ces croissants sont tous à dynamique \tilde{N} - \tilde{S} ou \tilde{S} - \tilde{N} . Et on a la formule de la proposition 4.11 reliant l'indice partiel $\text{IP}(H, \tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1)$ au nombre de croissants de chaque type. Remarquons que d'après l'affirmation 4.19 ci-dessus et les propriétés du relevé canonique, on a

$$\text{IP}(H, \tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1) = \text{Indice}(H, \tau) = \text{Indice}(h, N) - 1 = -p < 0;$$

la formule de la proposition 4.11 montre alors que la famille $\tilde{\mathcal{F}}$ contient au moins 2 croissants.

D'autre part, la restriction de la projection π au disque topologique ouvert $D(\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1)$ se prolonge continûment aux bouts \tilde{N} et \tilde{S} de la bande $\text{Adh}(D(\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1))$, en une application $\hat{\pi}$ qui envoie \tilde{N} sur N et \tilde{S} sur S ; cette application est un homéomorphisme sur son image.

Ceci permet de voir facilement que les projections des croissants de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont des croissants pour h , et que « les types dynamiques se correspondent » (c'est-à-dire que l'image par π d'un croissant attractif à dynamique \tilde{N} - \tilde{S} pour H est un croissant attractif à dynamique Nord-Sud pour h , etc.).

Le compte y est. — Soit maintenant \mathcal{F} l'image par π de la famille $\tilde{\mathcal{F}}$. C'est une famille de croissants attractifs ou répulsifs pour h , à dynamique Nord-Sud ou Sud-Nord,

d'intérieurs deux à deux disjoints. Il reste à extraire de la famille \mathcal{F} une sous-famille \mathcal{F}' constituée de p croissants attractifs Nord-Sud et p croissants répulsifs Sud-Nord, la difficulté étant que les croissants des deux types doivent être cycliquement alternés autour de N .

Rappelons tout d'abord que \mathcal{F} contient exactement le même nombre de croissants attractifs que de croissants répulsifs, et qu'ils sont alternés autour de N . Ceci provient de la maximalité de $\tilde{\mathcal{F}}$ (remarque 4.10).

D'autre part, la formule de la proposition 4.11 donne alors (avec des notations évidentes) :

$$(*) \quad \underbrace{(\#(\mathcal{F}, a, NS) + \#(\mathcal{F}, r, SN))}_{\text{types recherchés}} - (\#(\mathcal{F}, a, SN) + \#(\mathcal{F}, r, NS)) = 2p.$$

Il y a deux cas :

(1) Si la famille \mathcal{F} ne contient que des croissants des types recherchés (attractifs Nord-Sud et répulsifs Sud-Nord), comme il y a autant d'attractifs que de répulsifs, il y en a p de chaque sorte, et \mathcal{F} vérifie la conclusion du théorème.

(2) Dans le cas contraire, d'après la formule, puisque $2p > 0$, \mathcal{F} contient néanmoins des croissants des types recherchés ; il y a donc dans \mathcal{F} deux croissants successifs, l'un qui est d'un des deux types recherchés, l'autre non. On considère la sous-famille \mathcal{F}_1 obtenue à partir de \mathcal{F} en enlevant ces deux croissants. Comme on a enlevé un croissant non-recherché et un croissant recherché, la formule (*) est encore valable en remplaçant \mathcal{F} par la sous-famille \mathcal{F}_1 ; comme ils étaient adjacents, \mathcal{F}_1 est encore constituée de croissants alternativement attractifs et répulsifs.

On itère ce procédé d'extraction jusqu'à obtenir une sous-famille \mathcal{F}_l qui ne contient plus que des croissants des types recherchés. Cette sous-famille satisfait encore à la formule (*), et vérifie donc la conclusion du théorème d'après l'étude du premier cas.

Ceci termine la preuve du théorème F. \square

4.3. Étude des croissants minimaux (proposition 4.8)

Pour cette section, on suppose que H est un homéomorphisme de Brouwer, et que F est une décomposition en briques pour H . On considère un couple attractif $(\partial^- A, \partial^+ A)$ de droites de Brouwer disjointes, le croissant A associé, et sa frontière $\partial A = \partial^- A \cup \partial^+ A$. On note N et S les deux bouts de A . Tous les ensembles considérés seront supposés être inclus dans $\hat{A} = A \cup \{N, S\}$.⁽³⁾

Remarquons notamment que, puisque A est un attracteur strict simplicial, pour toute brique B incluse dans A , l'attracteur $A^+(B)$ et la droite de Brouwer $\Delta(B)$ sont également inclus dans A .

⁽³⁾De fait, nous n'utiliserons que la restriction de H à A , et ce qui suit est valable pour tout plongement de \hat{A} dans \hat{A} , vérifiant des hypothèses évidentes.

a. Types topologiques et types dynamiques des droites de Brouwer

Définition 4.20 (figure 4). — Soit Δ une droite topologique dans A ; on appelle *extrémités* de Δ l'intersection de l'ensemble $\{N, S\}$ avec l'adhérence de Δ (dans \widehat{A}). Il y a donc trois possibilités, et selon les cas, la droite topologique Δ est dite à *extrémités Nord*, à *extrémités Sud* ou à *extrémités Nord-Sud* (ou encore de *type topologique Nord*, *Sud* ou *Nord-Sud*).

Définition 4.21 (figure 4). — Une droite de Brouwer Δ , incluse dans A , qui est une droite topologique à extrémités Nord est dite de *type dynamique* $(\rightarrow N)$ si $\Delta \cup \{N\}$ sépare $H(\Delta)$ et le point fixe S (ou, de manière équivalente, si $H(\Delta) \cup \{N\}$ ne sépare pas Δ et S).

Dans le cas contraire, elle est dite de *type dynamique* $(N \rightarrow)$. On définit de même les droites de Brouwer de *type dynamique* $(\rightarrow S)$ et $(S \rightarrow)$.

Remarquons que si Δ est de type dynamique $(\rightarrow N)$, alors le pétale attractif $P^+(\Delta)$ est inclus dans \widehat{A} ; de même, si Δ est de type dynamique $(N \rightarrow)$, alors le pétale répulsif $P^-(\Delta)$ est inclus dans \widehat{A} .

Définition 4.22 (figure 4). — Une droite de Brouwer Δ qui est une droite topologique à extrémités Nord-Sud est dite de *type dynamique Est-Ouest* si $H(\Delta)$ sépare Δ de $\partial^- A$ dans A ; dans le cas contraire, elle est dite de *type dynamique Ouest-Est*.

Par exemple, les droites $\partial^- A$ et $\partial^+ A$ sont respectivement de types dynamiques Ouest-Est et Est-Ouest.

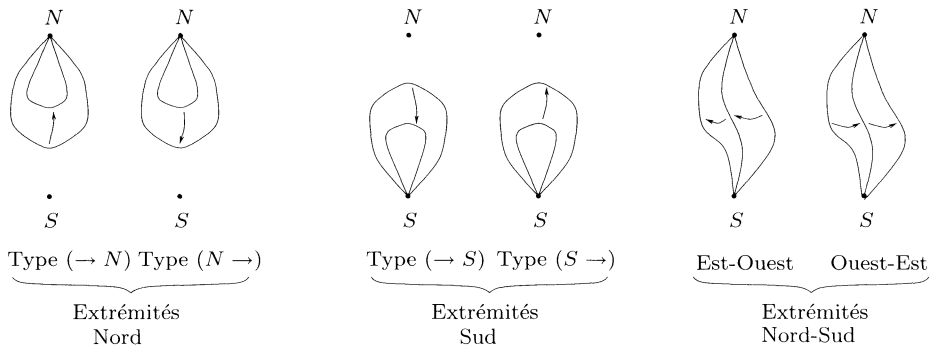


FIGURE 4. Extrémités et types dynamiques des droites de Brouwer

Définition 4.23 (figure 5). — Le *type topologique* d'une brique B de la décomposition F , incluse dans A , est le type topologique de sa droite de Brouwer associée $\Delta(B)$. De même, le *type dynamique* de B est le type dynamique de $\Delta(B)$.

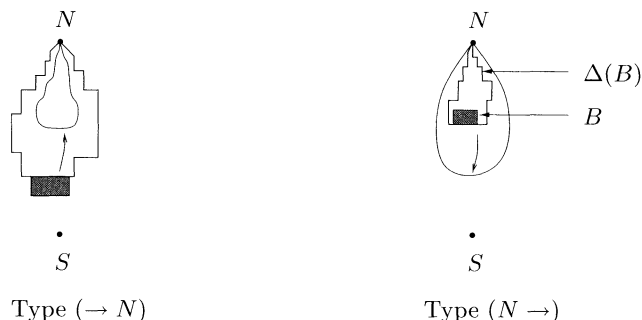


FIGURE 5. Briques de type Nord

Si B est une brique de type dynamique $(\rightarrow N)$, $A^+(B)$ est un attracteur dont l'adhérence (dans \hat{A}) ne contient pas S . Puisque les points errent (lemme 3.12 et corollaire 3.13), les itérés positifs des points de $A^+(B)$ tendent alors vers N (et aussi ceux des points de B puisque $H(B) \subset A^+(B)$). De même, les itérés positifs d'une brique de type dynamique $(\rightarrow S)$ tendent vers S . On en déduit que les types dynamiques $(\rightarrow N)$ et $(\rightarrow S)$ sont « incompatibles » :

Affirmation 4.24. — *Si B est une brique de type dynamique $(\rightarrow N)$, et B' une brique de type dynamique $(\rightarrow S)$, alors B et B' ne peuvent pas être adjacentes. Mieux, les ensembles $B \cup A^+(B)$ et $B' \cup A^+(B')$ sont disjoints.*

De même, si B est une brique de type dynamique $(N \rightarrow)$, le pétale répulsif de $\Delta(B)$, $P^-(\Delta(B))$, est un attracteur pour H^{-1} , inclus dans \hat{A} , dont l'adhérence ne contient pas S . On en déduit :

Affirmation 4.25. — *Si B est une brique de type dynamique $(N \rightarrow)$, et B' une brique de type dynamique $(S \rightarrow)$, alors B et B' ne peuvent pas être adjacentes.*

La preuve de la dernière affirmation est laissée au lecteur :

Affirmation 4.26. — *Soit Δ une droite de Brouwer à extrémités Nord-Sud, simpliciale, incluse dans A . Si Δ rencontre $\partial^+ A$, alors Δ est de type dynamique Est-Ouest.*

b. Courbes simpliciales. — Dans cette section, nous soulignons l'un des principaux intérêts des décompositions en briques : la recherche de droites de Brouwer simpliciales est grandement facilitée par des propriétés de passage à la limite.

Soit \mathcal{V}_1 l'ensemble des sous-variétés du plan, incluses dans A , de dimension 1, éventuellement à bord, qui sont des réunions d'arêtes de la décomposition F .⁽⁴⁾ Les éléments de \mathcal{V}_1 sont appelés *sous-variétés simpliciales*. Cet ensemble \mathcal{V}_1 est muni d'une

⁽⁴⁾Autrement dit, toute réunion d'une famille d'arêtes qui ne contient pas trois arêtes ayant un sommet commun.

topologie de Hausdorff (induite par le plongement $C \mapsto \text{Adh}(C)$ de \mathcal{V} dans l'espace des compacts de \hat{A}). On a un critère très simple de convergence : une suite $(V_k) \subset \mathcal{V}_1$ converge vers V_∞ si et seulement si pour toute brique B de la décomposition, pour tout k assez grand, $B \cap V_k = B \cap V_\infty$ (autrement dit, une suite converge si et seulement si sa trace sur tout compact de A est stationnaire). Insistons sur le fait que \mathcal{V}_1 contient l'ensemble vide.

Affirmation 4.27

- (1) L'espace topologique \mathcal{V}_1 est compact ;
- (2) l'ensemble des sous-variétés simpliciales libres pour H est fermé dans \mathcal{V}_1 ;

Les preuves sont laissées au lecteur.

Voici un exemple d'utilisation de l'espace \mathcal{V}_1 .

Lemme 4.28. — Soit (δ_k) une suite de sous-variétés simpliciales connexes, telle qu'il existe deux suites (x_k) et (y_k) de points de (δ_k) qui tendent respectivement vers N et S . Alors toute valeur d'adhérence L de (δ_k) dans \mathcal{V}_1 contient une droite topologique à extrémités Nord-Sud.

Démonstration. — Quitte à raccourcir δ_k , on peut supposer que δ_k est un arc dont x_k et y_k sont les extrémités. Quitte à extraire, on peut de plus supposer que la suite (δ_k) converge vers L . Comme (x_k) tend vers N et (y_k) tend vers S , la sous-variété simpliciale L est une sous-variété sans bord, et son adhérence dans \hat{A} contient les points N et S . On voit facilement que $L \cup \{N, S\}$ est connexe ; par conséquent les composantes connexes de L sont des droites topologiques. Notons L_N (respectivement L_S) la réunion de celles qui sont à extrémités Nord (respectivement à extrémités Sud). On peut montrer que les ensembles $L_N \cup \{N\}$ et $L_S \cup \{S\}$ sont fermés dans \hat{A} . Supposons maintenant que L ne contienne aucune droite topologique à extrémités Nord-Sud. Alors ces deux fermés formeraient une partition de $L \cup \{N, S\}$, ce qui contredirait la connexité de cet ensemble. On en déduit le lemme. \square

c. Étude des croissants attractifs minimaux

Remarque 4.29 (de lecture). — La preuve de la proposition 4.8 est la plus « technique » de ce texte. Cependant, on peut se convaincre facilement que les preuves des théorèmes de dynamique locale A et C (version topologique du « théorème de la fleur » de Leau-Fatou, et indice des itérés) n'utilisent qu'une propriété faible des croissants à dynamique Nord-Sud, propriété qui s'obtient assez rapidement (étape 4 du deuxième point de la preuve ci-dessous, affirmation 4.34). Plus précisément, on peut définir :

Définition 4.30. — Un croissant attractif C est dit *faiblement à dynamique Nord-Sud* si il existe un pétale attractif P basé en S , inclus dans C , qui rencontre les deux bords de C .

Dans tous les énoncés conduisant aux théorèmes A et C (notamment dans le théorème F et l'affirmation 4.39), on peut alors remplacer « croissant attractif à dynamique Nord-Sud » par « croissant attractif faiblement à dynamique Nord-Sud ». Par contre, la version topologique du théorème de la variété stable (théorème B) nécessite la notion forte de croissant à dynamique Nord-Sud, et donc la lecture de toute la preuve de la proposition 4.8.

Démonstration de la proposition 4.8

Preuve du premier point. — L'existence d'un sous-croissant attractif simplicial minimal dans A va essentiellement découler du lemme de Zorn : l'idée est de considérer une droite de Brouwer Δ^- , de type dynamique Ouest-Est, « la plus à droite possible » dans A , puis une droite de Brouwer Δ^+ , de type dynamique Est-Ouest, à droite de Δ^- , « la plus à gauche possible », pour obtenir un croissant minimal $\text{Adh}(\Delta^-, \Delta^+)$. Détaillons cette idée.

Soit \mathcal{D} la famille des droites de Brouwer incluses dans A , simpliciales, à extrémités Nord-Sud, et de type dynamique Ouest-Est. Cette famille contient $\partial^- A$. Si Δ est un élément de \mathcal{D} , alors Δ est disjointe de $\partial^+ A$ d'après l'affirmation 4.26. À chaque élément Δ de \mathcal{D} correspond donc un croissant attractif $\text{Adh}(\Delta, \partial^+ A)$ (affirmation 3.31). On munit \mathcal{D} de l'ordre induit, *via* cette correspondance, par l'inclusion sur les croissants.

Montrons rapidement que \mathcal{D} est inductive. Soit $(\Delta_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathcal{D} totalement ordonnée, c'est-à-dire telle que pour tout n , $\text{Adh}(\Delta_{n+1}, \partial^+ A) \subset \text{Adh}(\Delta_n, \partial^+ A)$. D'après le lemme 4.28, il existe une droite topologique Δ_∞ , à extrémités Nord-Sud, incluse dans une valeur d'adhérence de la suite (Δ_n) . Cette droite est libre (affirmation 4.27), c'est donc une droite de Brouwer ; on montre facilement qu'elle est de type dynamique Ouest-Est : Δ_∞ est donc un élément de \mathcal{D} .⁽⁵⁾ De plus, il est clair que $\text{Adh}(\Delta_\infty, \partial^+ A) \subset \cap_n \text{Adh}(\Delta_n, \partial^+ A)$, ce qui prouve que \mathcal{D} est inductive.

On choisit alors un élément Δ^- de \mathcal{D} qui soit minimal pour l'ordre.

De manière symétrique, on considère la famille \mathcal{D}' des droites de Brouwer incluses dans le croissant attractif $\text{Adh}(\Delta^-, \partial^+ A)$, simpliciales, à extrémités Nord-Sud, et de type dynamique Est-Ouest. On montre que cette famille est inductive. On trouve ainsi une seconde droite de Brouwer Δ^+ . Le croissant attractif $\text{Adh}(\Delta^-, \Delta^+)$ est alors un sous-croissant simplicial de A , attractif, minimal pour l'inclusion.

Preuve du deuxième point. — On suppose maintenant que le croissant attractif simplicial A est minimal. Voici comment la preuve va se dérouler. Nous allons montrer que pour toute brique B , incluse dans A et rencontrant $\partial^- A$, la droite de Brouwer $\Delta(B)$ est à extrémités Nord ou à extrémités Sud. L'incompatibilité entre ces deux types de briques oblige alors toutes les briques (dans A) adjacentes à $\partial^- A$ à être du même type ; et ce type déterminera le type dynamique du croissant (Nord-Sud ou

⁽⁵⁾Il est tout à fait possible que la suite (Δ_n) ne converge pas vers Δ_∞ (et que l'inclusion $\text{Adh}(\Delta_\infty, \partial^+ A) \subset \cap_n \text{Adh}(\Delta_n, \partial^+ A)$ soit une inclusion stricte).

Sud-Nord). Si par exemple elles sont toutes à extrémités Nord, on étudie le pétale attractif $P^+(\Delta(B))$ pour B adjacente à $\partial^- A$ et très proche du point S . On montre d'abord que ce pétale rencontre les deux bords de A (ce qui prouve que A est faiblement à dynamique Sud-Nord). Finalement, on prouve que ce pétale est arbitrairement grand dans A , ce qui conclut.

(1) **Affirmation 4.31.** — *Les seules droites de Brouwer simpliciales à extrémités Nord-Sud incluses dans A sont $\partial^- A$ et $\partial^+ A$.*

Démonstration. — Soit Δ' une telle droite. Si Δ' est de type dynamique Est-Ouest, alors elle ne peut pas rencontrer $\partial^- A$ (affirmation 4.26) ; et la bande $\text{Adh}(\partial^- A, \Delta')$ est un croissant attractif inclus dans A (affirmation 3.31). Par minimalité, on en déduit que $\Delta' = \partial^+ A$. Pour l'autre type dynamique, on conclut de manière analogue. \square

(2) Soit B une brique dans A rencontrant la frontière ∂A .

Affirmation 4.32. — *La brique B est de type dynamique $(\rightarrow N)$ ou $(\rightarrow S)$.*

Démonstration. — Comme A est attractif, $\Delta(B)$ ne contient pas $B \cap \partial A$, et ne peut pas être égale à $\partial^- A$ ou à $\partial^+ A$; elle n'est donc pas à extrémités Nord-Sud d'après l'affirmation 4.31.

Supposons par exemple que B est de type topologique N . Comme $H(\Delta(B)) \subset A \setminus (\partial A \cup B)$, et que B rencontre ∂A , la droite $H(\Delta(B))$ ne sépare pas B et S . Or $H(\Delta(B))$ ne sépare pas non plus B et $\Delta(B)$. Donc $H(\Delta(B))$ ne sépare pas S et $\Delta(B)$, elle est donc de type dynamique $(\rightarrow N)$.

Pour les mêmes raisons, le type dynamique $(S \rightarrow)$ est exclu. \square

(3) Puisque les types dynamiques $(\rightarrow N)$ et $(\rightarrow S)$ sont incompatibles (affirmation 4.24), toutes les briques adjacentes à $\partial^- A$ sont du même type dynamique. Dans la suite, on se place dans le cas où ce type dynamique commun est $(\rightarrow N)$ (le cas $(\rightarrow S)$ s'en déduit en échangeant les rôles de N et S). Soit alors $(B_i)_{i \geq 0}$ n'importe quelle suite de briques adjacentes au bord $\partial^- A$, telle que $\lim_{i \rightarrow +\infty} B_i = S$. On note $P^+(B_i)$ le pétale attractif associé à la droite de Brouwer $\Delta(B_i)$.

Nous allons montrer que pour tout i assez grand, le pétale $P^+(B_i)$ est arbitrairement grand dans A , ce qui prouvera que le croissant attractif A est à dynamique Sud-Nord.

(4) Soit Δ_∞ une valeur d'adhérence de la suite $(\Delta(B_i))_{i \geq 0}$ dans l'espace topologique \mathcal{V}_1 (section 4.3 b).

Affirmation 4.33. — *Δ_∞ contient $\partial^- A \cup \partial^+ A$.*

Démonstration. — Pour tout i , on note δ_i^- et δ_i^+ les deux composantes connexes de $\Delta(B_i) \setminus B_i$ (le fait qu'il y en ait exactement deux provient de l'affirmation 3.75, figure 31). Par compacité de \mathcal{V}_1 , les suites de sous-variétés simpliciales (δ_i^-) et (δ_i^+) ont des valeurs d'adhérence. De plus, elles vérifient chacune les hypothèses du lemme 4.28 :

notons alors δ_∞^- et δ_∞^+ deux droites topologiques à extrémités Nord-Sud incluses dans leurs valeurs d'adhérence respectives. Puisque l'ensemble des sous-variétés simpliciales libres est compact, δ_∞^- et δ_∞^+ sont libres : ce sont deux droites de Brouwer. Puisque pour tout i , $\delta_i^- \cap \delta_i^+ = \emptyset$, on a encore $\delta_\infty^- \cap \delta_\infty^+ = \emptyset$ (le fait d'être disjoint « passe à la limite » dans \mathcal{V}_1). Comme les seules droites de Brouwer simpliciales à extrémités Nord-Sud sont $\partial^- A$ et $\partial^+ A$ (affirmation 4.31), on en déduit que $\delta_\infty^- \cup \delta_\infty^+ = \partial^- A \cup \partial^+ A$, ce que l'on voulait. \square

On en déduit immédiatement :

Affirmation 4.34. — *Pour i assez grand, $P^+(B_i)$ est un pétale attractif basé en N qui rencontre les deux bords de A . Notamment, A est faiblement à dynamique Sud-Nord.*

(5) Soient x^- et x^+ deux points respectivement sur $\partial^-(A)$ et $\partial^+(A)$. D'après le point 4, quitte à ré-indexer les (B_i) , on peut supposer que pour tout $i \geq 0$, $\Delta(B_i)$ contient x^- et x^+ . On note (cf. figure 6, dessin de gauche) :

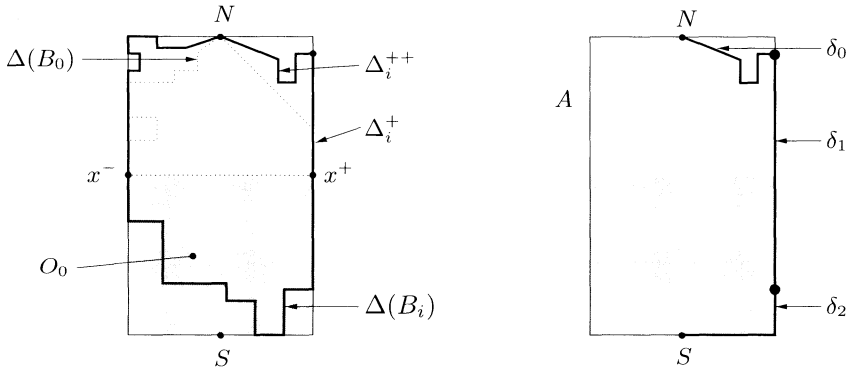


FIGURE 6. Anatomie de $\Delta(B_i)$

- Δ_i^+ la composante connexe de $\Delta(B_i) \cap \partial^+(A)$ contenant x^+ ;
- Δ_i^{++} la composante connexe de $\Delta(B_i) \setminus \Delta_i^+$ qui ne contient pas x^- ;
- O_i la composante connexe de $A \setminus \Delta(B_i)$ contenant S ;

et on définit symétriquement Δ_i^- et Δ_i^{--} . Remarquons que d'après le point 4, Δ_i^+ tend vers $\partial^+ A$ quand i tend vers $+\infty$.

La fin de la preuve consiste à montrer que pour tout i assez grand, Δ_i^{++} est vide, et que $\Delta_\infty = \partial^- A \cup \partial^+ A$.

(6) La suite $(A^+(B_i))_{i \geq 0}$ est essentiellement croissante ; plus précisément :

Affirmation 4.35

- Pour tout $j \geq 0$ il existe i_j tel que pour tout $i \geq i_j$, $A^+(B_j) \subset A^+(B_i)$.
- La suite $\Delta(B_i)$ converge (vers Δ_∞) dans \mathcal{V}_1 .

Démonstration. — Le point 4 dit que $B_j \cap \partial^-(A)$ est incluse dans $\Delta(B_i)$ pour tout i assez grand, ce qui n'est possible que si $B_j \subset A^+(B_i)$, ce qui entraîne la première partie de l'affirmation puisque $A^+(B_j)$ est le plus petit attracteur strict, réunion de briques, contenant $H(B_j)$.

On déduit de cette première affirmation que pour toute brique B incluse dans A , de deux choses l'une : soit B n'est inclus dans $A^+(B_i)$ pour aucun $i \geq 0$, soit il existe n_0 tel que pour tout $i \geq n_0$, B est inclus dans $A^+(B_i)$. Par conséquent, la trace de la suite $(A^+(B_i))$ sur tout compact de A est constante à partir d'un certain rang, donc la trace de $\Delta(B_i)$ également. La seconde partie de l'affirmation en découle. \square

Quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(A^+(B_i))_{i \geq 0}$ est croissante, ce que nous ferons dorénavant.

(7) Soit $i > 0$; puisque $(A^+(B_i))$ contient $A^+(B_0)$, il est clair que $\Delta_i^{++} \cap O_0 = \emptyset$ (cf. figure 6). Nous allons en déduire :

Affirmation 4.36. — Pour tout i assez grand, Δ_i^{++} et Δ_i^{--} sont vides.

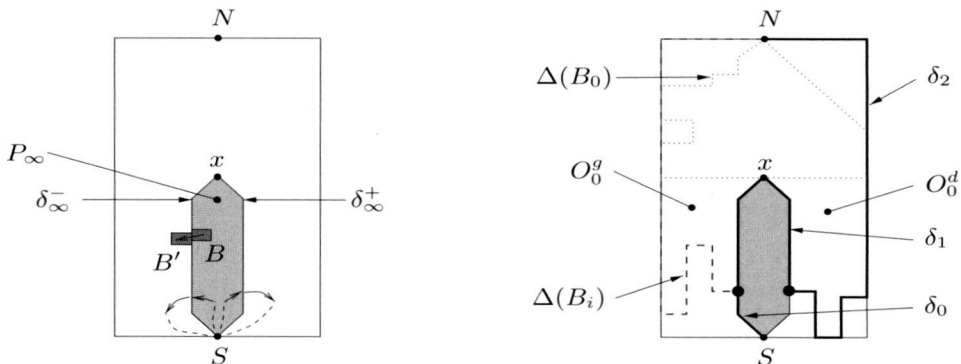
Démonstration. — Fixons i ; soit $\delta_0 = \Delta_i^{++}$, $\delta_1 = \Delta_i^+$, et δ_2 la composante connexe de $\partial^+ A \setminus \delta_1$ dont l'adhérence contient S (figure 6, dessin de droite); on pose $\delta = \delta_0 \cup \delta_1 \cup \delta_2$. Montrons alors que δ est libre. Les deux ensembles $\delta'_0 = \delta_0 \cup \delta_1$ et $\delta'_2 = \delta_1 \cup \delta_2$ sont libres, en tant que morceaux des droites de Brouwer $\Delta(B_i)$ et $\partial^+ A$; par conséquent, il y a juste à montrer que $H(\delta_0) \cap \delta_2 = \emptyset$ et $H(\delta_2) \cap \delta_0 = \emptyset$. La première égalité est toujours vraie car A est un attracteur strict; la deuxième est vérifiée si on choisit i assez grand pour que $H(\delta_2) \subset O_0$ (ce qui est possible puisque, dans \mathcal{V}_1 , $\lim_{i \rightarrow +\infty} \Delta_i^+ = \partial^+ A$, donc $\lim_{i \rightarrow +\infty} \delta_2 = \emptyset$). La droite δ est donc une droite de Brouwer simpliciale à extrémités Nord-Sud; d'après le point 1, on a alors $\delta = \partial^+ A$, c'est-à-dire $\Delta_i^{++} = \emptyset$. \square

(8) **Affirmation 4.37.** — On a $\Delta_\infty = \partial^- A \cup \partial^+ A$.

Démonstration. — Les composantes connexes de Δ_∞ sont des droites topologiques; on raisonne par l'absurde en supposant que l'une d'entre elles, notée δ_∞ , est distincte (et donc disjointe) de $\partial^- A$ et de $\partial^+ A$.

Grâce aux deux affirmations précédentes (4.35 et 4.36), on voit que pour tout i assez grand, $A^+(B_i) \cup \{N\}$ est un voisinage de N dans \hat{A} ; par conséquent, la seule possibilité est que δ_∞ soit à extrémités Sud. De plus, elle est libre (affirmation 4.27). On appelle P_∞ le disque topologique fermé de frontière $\delta_\infty \cup \{S\}$ inclus dans \hat{A} .

Montrons que P_∞ est un pétale répulsif, autrement dit que δ_∞ est une droite de Brouwer. Nous savons déjà que c'est une droite topologique libre, il s'agit donc de prouver que la condition de séparation est respectée. Soit x un point arbitraire de δ_∞ , et notons δ_∞^- et δ_∞^+ les deux arcs découpés par les deux points x et S sur la courbe de Jordan $\delta_\infty \cup \{S\}$, de manière à ce que les arcs $\partial^- A \cup \{N, S\}$, δ_∞^- , δ_∞^+ et $\partial^+ A \cup \{N, S\}$ soient disposés dans cet ordre autour de S (figure 7, gauche).

FIGURE 7. Construction de δ

Considérons deux briques adjacentes $B \subset P_\infty$ et $B' \not\subset P_\infty$, situées de part et d'autre de δ_∞ . Pour i assez grand, l'attracteur $A^+(B_i)$ contient B' mais ne contient pas B . On ne peut donc pas avoir $H(B') \cap B \neq \emptyset$; par minimalité de la décomposition en briques, on a alors $H(B) \cap B' \neq \emptyset$.

En appliquant cet argument à des briques rencontrant δ_∞^- ou δ_∞^+ et arbitrairement proches de S , on obtient que les arcs $\partial^- A \cup \{N, S\}$, $H(\delta_\infty^-)$, δ_∞^- , $H^{-1}(\delta_\infty^-)$, $H^{-1}(\delta_\infty^+)$, δ_∞^+ , $H(\delta_\infty^+)$ et $\partial^+ A \cup \{N, S\}$ (qui sont disjoints deux à deux) sont disposés dans cet ordre autour de S . Ceci prouve que δ_∞ sépare son image par H de sa préimage : c'est bien une droite de Brouwer ; on voit également que son type dynamique est $(S \rightarrow)$.

Nous allons conclure la preuve de l'affirmation 4.37 par un argument similaire à celui utilisé dans la preuve de l'affirmation 4.36 (figure 7, droite). Comme P_∞ est un pétale répulsif simplicial, on a $\Delta(B_i) \cap \text{Int}(P_\infty) = \emptyset$ pour tout i . Considérons à nouveau un point x de δ_∞ ; quitte à ré-indexer, on peut supposer que $\Delta(B_i)$ contient x pour tout $i \geq 0$. Soit i assez grand (voir plus loin). On note (figure 7) :

- δ_1 la composante connexe de $\Delta(B_i) \cap \delta_\infty$ contenant x ;
- δ_2 la composante de $\Delta(B_i) \setminus \delta_1$ rencontrant $\partial^+ A$;
- $\delta_0 = \delta_\infty^- \setminus \delta_1$.

Posons encore $\delta'_0 = \delta_0 \cup \delta_1$, $\delta'_2 = \delta_1 \cup \delta_2$, et $\delta = \delta_0 \cup \delta_1 \cup \delta_2 = \delta'_0 \cup \delta'_2$.

Montrons que δ est une droite de Brouwer. Les arcs δ'_0 et δ'_2 sont libres, donc (comme au point 7) il suffit de montrer que $H(\delta_0) \cap \delta_2 = \emptyset$ et $H^{-1}(\delta_0) \cap \delta_2 = \emptyset$. La deuxième égalité est toujours vraie car P_∞ est un répulseur strict, donc $H^{-1}(\delta_0) \subset \text{Int}(P_\infty)$. Montrons la première : l'ensemble O_0 a été défini au point 5 ; on écrit $O_0 \setminus P_\infty$ comme l'union disjointe de O_0^g et O_0^d (points situés « à gauche » et « à droite » de P_∞ , figure 7). D'après le point 6, pour tout $i \geq i_0$, $\delta_2 \cap O_0^g = \emptyset$. Mais si i tend vers $+\infty$, δ_1 tend (dans \mathcal{V}_1) vers $\delta_\infty = \partial P_\infty$, donc δ_0 tend vers \emptyset ; comme P_∞ est un répulseur, on peut choisir i pour que $H(\delta_0) \subset O_0^g$, et dans ce cas l'égalité est vérifiée.

On a alors trouvé une droite de Brouwer à extrémités Nord-Sud δ dans A qui n'est égale à aucun des deux bords de A , ce qui contredit l'affirmation 4.31. \square

(9) Les affirmations 4.36 et 4.37 entraînent que pour tout voisinage O_S de S , pour i assez grand, $\Delta(B_i) \setminus \partial A \subset O_S$. Ceci prouve que A est un croissant attractif à dynamique Sud-Nord. \square

4.4. Indice partiel et construction de droites de Brouwer (proposition 4.11)

Dans cette section, on suppose que H est un homéomorphisme de Brouwer, et que F est une décomposition en briques pour H .

a. Indices partiels et décomposition en briques. — La formule contenue dans la proposition 4.11 affirme l'existence d'un certain nombre de croissants. Le lemme suivant est un morceau de la proposition (obtenu dans le cas particulier où la famille \mathcal{F} est vide). Il nous permettra de prouver cette proposition en construisant, l'une après l'autre, les droites de Brouwer qui bordent les croissants.

Lemme 4.38 (figure 8). — *Soit H un homéomorphisme de Brouwer, F une décomposition en briques pour H , et (Δ_0, Δ_1) un couple indifférent de droites de Brouwer simpliciales disjointes, Δ_0 étant attractive.*

Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

(1) *l'indice partiel $IP(H, \Delta_0, \Delta_1)$ est différent de 0 ;*

(2) *il n'existe pas de chaîne de pseudo-disques de Δ_0 à Δ_1 , constituée de briques de la décomposition F .*

Alors il existe une droite de Brouwer simpliciale Δ'_0 disjointe des droites topologiques Δ_0 et Δ_1 , les séparant, telle que le couple (Δ_0, Δ'_0) est attractif.

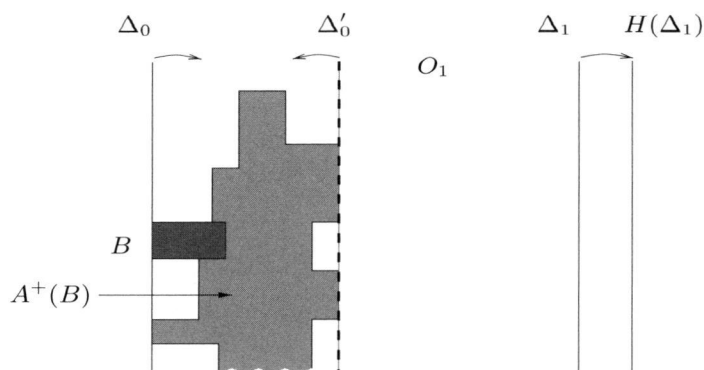


FIGURE 8. Obtention d'une droite de Brouwer à contre-courant

Démonstration du lemme 4.38. — Rappelons que d'après le « lemme de Franks » pour l'indice partiel (proposition 3.45), l'hypothèse 1 du lemme implique l'hypothèse 2. Il suffit donc d'écrire la preuve sous la deuxième hypothèse du lemme.

On note O_1 le disque ouvert $D(\Delta_0, \Delta_1)$ (figure 8). Soit \mathcal{B} l'ensemble des briques de F incluse dans $\text{Adh}(O_1)$ et rencontrant Δ_0 . Soit $B \in \mathcal{B}$. Puisque (B) est une chaîne de briques (de longueur 1), l'hypothèse 2 du lemme implique que $B \cap \Delta_1 = \emptyset$. D'après la caractérisation de $A^+(B)$ en termes de chaîne de briques (affirmation 3.72), on a aussi $A^+(B) \cap \Delta_1 = \emptyset$. Puisque Δ_0 est attractive, on a $A^+(B) \subset P^+(\Delta_0)$; on en déduit que $A^+(B)$ est inclus dans $O_1 \cup \Delta_0$. D'autre part, remarquons que l'ensemble $B \cup A^+(B)$ est encore un attracteur strict puisque, par définition de $A^+(B)$, on a $h(B) \subset \text{Int}(A^+(B))$. Posons alors

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \cup A^+(B).$$

Cet ensemble est inclus dans $O_1 \cup \Delta_0$. C'est un attracteur strict, puisqu'il est réunion d'attracteurs stricts, et il est connexe. D'après l'affirmation 3.76, les composantes connexes de ∂A sont des droites topologiques. Soit Δ'_0 l'unique composante connexe de ∂A qui sépare Δ_0 et Δ_1 (on peut par aussi définir Δ'_0 comme la frontière de la composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus A$ qui contient Δ_1). Cette droite topologique est disjointe de Δ_0 et de Δ_1 , et elle est libre puisque A est un attracteur strict.

Vérifions qu'elle sépare son image et sa préimage. Tout d'abord, remarquons que Δ_1 sépare Δ_0 et $H(\Delta_1)$ (car Δ_1 est répulsif pour le couple (Δ_0, Δ_1)); comme Δ'_0 sépare Δ_0 et Δ_1 , on peut supposer que $\Delta_0, \Delta'_0, \Delta_1, H(\Delta_1)$ sont quatre droites verticales dans le plan, dont les abscisses sont rangées dans cet ordre (à l'aide du théorème de Schoenflies-Homma, voir l'appendice). En particulier, Δ'_0 ne sépare pas Δ_1 et $H(\Delta_1)$. Soit maintenant U le demi-plan ouvert de frontière Δ'_0 qui contient Δ_1 . L'attracteur A ne rencontre pas U , donc $H(\Delta'_0)$, qui est inclus dans A , est disjoint de U . Autrement dit, U ne rencontre pas la frontière de $H(U)$, et comme U est connexe, U est inclus dans $H(U)$ ou dans son complémentaire. Mais d'autre part $H(U)$ contient $H(\Delta_1)$, qui est aussi dans U , donc on a en fait $U \subset H(U)$.

L'ensemble $\text{Adh}(U)$ est donc un pétale répulsif, et sa frontière Δ'_0 est une droite de Brouwer d'après la remarque 3.23. Comme A est un attracteur, le couple (Δ_0, Δ'_0) est attractif. \square

On peut remarquer que dans cette construction, il existe une chaîne de briques de Δ_0 à Δ'_0 , et que par conséquent l'indice partiel entre ces deux droites vaut $+1/2$ ou $-1/2$ (d'après le « lemme de Franks pour l'indice partiel », proposition 3.45).

b. Indice partiel et type des croissants

Démonstration de la proposition 4.11. — Soit (Δ_0, Δ_1) un couple de droites de Brouwer simpliciales disjointes, et \mathcal{F} une famille maximale de sous-croissants simpliciaux minimaux de la bande $\text{Adh}(D(\Delta_0, \Delta_1))$.

Premier point. — Soit i un entier entre -1 et k . Puisque les intérieurs des croissants sont disjoints deux à deux, les droites topologiques Δ'_{2i+1} et Δ'_{2i+2} , appartenant à deux croissants successifs, ne se traversent pas (définition 3.41), et l'indice partiel est bien défini (section 3.3 f). Dans le cas où elles ne sont pas disjointes, il vaut 0 par définition.

Dans le cas où elles sont disjointes, $(\Delta'_{2i+1}, \Delta'_{2i+2})$ est un couple indifférent de droites de Brouwer simpliciales. On se place par exemple dans le cas où Δ'_{2i+1} est attractive. Supposons par l'absurde que l'indice partiel n'est pas nul, ou qu'il n'existe pas de chaîne de pseudo-disques de Δ'_{2i+1} à Δ'_{2i+2} constituée de briques. On peut alors appliquer le lemme 4.38 au couple $(\Delta'_{2i+1}, \Delta'_{2i+2})$, et on obtient une droite de Brouwer Δ , séparant Δ'_{2i+1} et Δ'_{2i+2} , la bande $\text{Adh}(D(\Delta'_{2i+1}, \Delta))$ étant un croissant attractif simplicial dont l'intérieur est disjoint des autres croissants de la famille \mathcal{F} . D'après la proposition 4.8, ce croissant contient un sous-croissant attractif simplicial minimal C . L'existence de C contredit la maximalité de la famille \mathcal{F} .

Deuxième point. — Soit $C = \text{Adh}(D(\Delta'_{2i}, \Delta'_{2i+1}))$ un croissant de \mathcal{F} . D'après la proposition 4.8, le croissant C , étant minimal, est à dynamique $\tilde{S}\text{-}\tilde{N}$ ou $\tilde{N}\text{-}\tilde{S}$. L'indice partiel à travers le croissant est alors donné par l'affirmation suivante :

Affirmation 4.39. — Si $\text{Adh}(D(\Delta, \Delta'))$ est un croissant attractif à dynamique $\tilde{N}\text{-}\tilde{S}$, ou répulsif à dynamique $\tilde{S}\text{-}\tilde{N}$, alors l'indice partiel $\text{IP}(\Delta, \Delta')$ vaut $-1/2$. Dans les deux autres cas, l'indice partiel vaut $+1/2$.

Démonstration de l'affirmation. — On suppose par exemple que le croissant est attractif. D'après la définition 4.4 des croissants à dynamique $\tilde{N}\text{-}\tilde{S}$ ou $\tilde{S}\text{-}\tilde{N}$, il existe un pétale attractif, basé en \tilde{S} ou en \tilde{N} , dont le bord rencontre les deux bords du croissant $D(\Delta, \Delta')$. Soit γ un sous-arc du bord du pétale, rencontrant les deux bords du croissant, et minimal pour l'inclusion. L'arc γ est libre. Si le croissant est à dynamique $\tilde{S}\text{-}\tilde{N}$, $H(\gamma)$ est au-dessus de γ , et s'il est à dynamique $\tilde{N}\text{-}\tilde{S}$, $H(\gamma)$ est au-dessous de γ . Le lemme 3.39 montre alors que l'indice partiel $\text{IP}(\Delta, \Delta')$ vaut $1/2$ dans le premier cas, $-1/2$ dans le second. \square

On obtient bien sûr l'indice partiel à travers les croissants répulsifs à dynamique $\tilde{S}\text{-}\tilde{N}$ ou $\tilde{N}\text{-}\tilde{S}$ en appliquant l'affirmation à H^{-1} .

Terminons maintenant la preuve du deuxième point. Nous connaissons l'indice partiel entre deux droites successives quelconques de la famille $(\Delta'_{-1}, \dots, \Delta'_{2k+2})$.

Puisque les intérieurs des croissants sont deux à deux disjoints, pour tout i , les deux droites Δ'_i et Δ'_{i+1} ne se traversent pas. De plus, pour tous $i < j < k$, la droite Δ'_j sépare Δ'_i et Δ'_k (au sens de la définition 3.42). On peut donc appliquer $2k$ fois la relation de Chasles généralisée (lemme 3.43), ce qui donne la formule voulue. \square

c. Preuve du théorème sur les homéomorphismes de Brouwer

Démonstration du théorème E (paragraphe 4.1 b). — À partir de la proposition 4.11, il suffit de recopier les arguments de la fin de la preuve du théorème principal (section 4.2, paragraphe intitulé « le compte y est »). Les détails de la preuve sont laissés au lecteur. Ajoutons que cet énoncé n'est pas utilisé dans le reste du texte. \square

4.5. Une droite de Brouwer à extrémités Nord-Sud (proposition 4.12)

Pour prouver cette proposition, nous allons réutiliser des techniques introduites par Alain Sauzet dans la démonstration d'un résultat similaire ([Sau01], théorème 5.1).

Soit h un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 , préservant l'orientation, avec $\text{Fixe}(h) = \{N, S\}$ (hypothèse (H2)). On suppose que $\text{Indice}(h, N) \neq 1$. Soit F une décomposition en briques pour h .

Les notions de *types topologiques*, de *types dynamiques*, ainsi que l'espace \mathcal{V}_1 des sous-variétés simpliciales ont été définis dans le contexte d'un croissant attractif simplicial A pour un homéomorphisme de Brouwer H (sections 4.3 a et 4.3 b). Ces définitions et les résultats de ces sections se transposent sans difficulté, et quasiment mot pour mot, au contexte de la présente section (remplacer H par h , le plan \mathbb{R}^2 et A par $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, et le compactifié \hat{A} par \mathbb{S}^2).

Démonstration de la proposition 4.12

Premier cas. — S'il y a une brique B de type topologique Nord-Sud, on a gagné.

Deuxième cas. — Supposons maintenant qu'il existe des droites de Brouwer $\Delta(B)$ de type topologique Sud arbitrairement proches de N .

Autrement dit, il existe une suite (B_k) de briques de type topologique Sud et une suite (x_k) de sommets de F tendant vers N telle que pour chaque k , $x_k \in \Delta(B_k)$. La suite $(\Delta(B_k))$ vérifie alors les hypothèses du lemme 4.28.⁽⁶⁾

Il existe donc une droite topologique Δ de type Nord-Sud, incluse dans une valeur d'adhérence de la suite $(\Delta(B_k))$. Cette droite est libre (affirmation 4.27), c'est donc une droite de Brouwer à extrémités Nord-Sud : on a encore gagné.

Troisième cas. — S'il existe des droites de Brouwer $\Delta(B)$ à extrémités Nord arbitrairement proches de S , on conclut comme au deuxième cas en échangeant les rôles de N et S .

Et c'est tout. — Nous allons montrer qu'on est forcément dans l'un des trois cas énumérés. On raisonne par l'absurde, en supposant le contraire. Il existe alors un voisinage connexe O_N de N qui ne rencontre pas de droite $\Delta(B)$ à extrémités Sud,

⁽⁶⁾Ce lemme a été énoncé dans le contexte d'un croissant attractif pour un homéomorphisme de Brouwer, mais l'énoncé et la preuve se transposent quasiment mot pour mot au présent contexte (le seul changement, dans la preuve, est que R est maintenant un anneau et non un disque topologique).

et un voisinage connexe O_S de S qui ne rencontre pas de droite $\Delta(B)$ à extrémités Nord. Remarquons que si B est de type dynamique $(\rightarrow N)$, $\Delta(B)$ sépare $A^+(B)$ de S , donc aussi de O_S ; en particulier, $A^+(B)$ et O_S sont disjoints.

Affirmation 4.40. — *Il existe une famille $\{B_1, \dots, B_k\}$ de briques qui sont toutes du même type dynamique $((S \rightarrow)$ ou $(N \rightarrow))$, telles que $C = B_1 \cup \dots \cup B_k$ est connexe et sépare N et S .*

Démonstration de l'affirmation. — On pose

$$E_N = \bigcup \{B \cup A^+(B) \mid B \text{ brique de type dynamique } (\rightarrow N)\},$$

$$E_S = \bigcup \{B \cup A^+(B) \mid B \text{ brique de type dynamique } (\rightarrow S)\}.$$

Puisque E_N est une réunion de briques et ne rencontre pas O_S , $E_N \cup \{N\}$ est fermé. Cet ensemble est aussi connexe (comme réunion de connexes contenant N). De plus, $E_N \cap E_S = \emptyset$ (voir l'affirmation 4.24 sur « l'incompatibilité » des types $(\rightarrow N)$ et $(\rightarrow S)$). Il n'est pas difficile de voir qu'il existe alors une famille $\{B_1, \dots, B_k\}$ de briques telles que $C = B_1 \cup \dots \cup B_k$ est connexe, ne rencontre pas $\text{Int}(E_N \cup E_S)$ et sépare N et S (figure 9 : on peut construire C en « faisant le tour » de $O_N \cup E_N$). Les

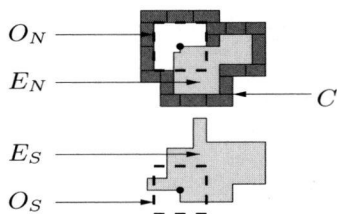


FIGURE 9. Construction de C

briques B_i ne peuvent pas être de type Nord-Sud, sans quoi on serait dans le premier cas; ni de type dynamique $(\rightarrow N)$ ou $(\rightarrow S)$, sinon elles seraient incluses dans E_N ou E_S . Elles sont donc chacune de type dynamique $(S \rightarrow)$ ou $(N \rightarrow)$; comme ces deux types dynamiques sont « incompatibles » (affirmation 4.25) et que C est connexe, elles sont toutes du même type dynamique. \square

Fin de la preuve de la proposition 4.12. — On suppose par exemple que toutes les briques B_i sont de type dynamique $(S \rightarrow)$.⁽⁷⁾ Remarquons d'abord que dans ce cas, l'adhérence du répulseur $A^-(B_i)$ ⁽⁸⁾ contient S et pas N (figure 10).

Soit $C' = A^-(B_1) \cup \dots \cup A^-(B_k)$. Cet ensemble est connexe, c'est une réunion de répulseurs, donc un répulseur. De plus, $\text{Adh}(C')$ contient S et pas N .

⁽⁷⁾Ici, on conclurait facilement avec un lemme de Birkhoff, (voir par exemple [LR00]), mais un petit argument permet de l'éviter.

⁽⁸⁾Définition 3.73.

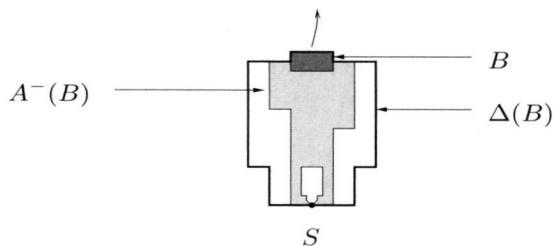


FIGURE 10. L'ensemble $A^-(B)$ pour une brique de type dynamique $(S \rightarrow)$

On considère la composante connexe de $\mathbb{S}^2 \setminus C'$ qui contient N ; soit D son adhérence. Comme C' est un répulseur, on a $h^{-1}(\partial D) \cap \text{Int}(D) = \emptyset$; donc D est un attracteur. De plus, on voit facilement que c'est un disque topologique. D'après le lemme 3.9, ceci contredit le fait qu'il n'existe pas de courbe d'indice 1. \square

Remarquons que le deuxième cas envisagé, dans lequel l'absence de brique de type topologique Nord-Sud oblige à effectuer un passage à la limite, survient pour la décomposition de l'homéomorphisme linéaire hyperbolique selle dessinée sur les figures 22 et 30, pages 59 et 69.

4.6. Construction du relevé canonique (proposition 4.17)

a. Preuve de la proposition 4.17. — Soit h un homéomorphisme de la sphère \mathbb{S}^2 , préservant l'orientation, avec $\text{Fixe}(h) = \{N, S\}$ (hypothèse (H2)). On suppose que $\text{Indice}(h, N) \neq 1$.

Construction du relevé \tilde{h} . — D'après la proposition 4.12, il existe au moins une droite de Brouwer Δ_0 dont l'adhérence contient N et S .

On se place dans le modèle du plan. Commençons par remarquer que les quatre droites topologiques $\Delta_0, h(\Delta_0), h^2(\Delta_0)$ et $h^3(\Delta_0)$ sont disposées dans cet ordre cyclique autour du point N . Ceci découle facilement du fait que le domaine fondamental $D(\Delta_0, h(\Delta_0))$ est libre (affirmation 3.25). Quitte à conjuguer h en utilisant le théorème de Schoenflies-Homma, (voir l'appendice) on peut supposer que ces quatre droites topologiques sont des demi-droites euclidiennes issues de N découpant quatre quart-de-plans, disposées comme sur la figure 11.

Notons $P_1 = D(\Delta_0, h(\Delta_0)), \dots, P_4 = D(h^3(\Delta_0), \Delta_0)$ les quatre quart-de-plans comme sur la figure 11. L'ensemble P_1 étant un disque topologique ouvert libre, il est disjoint de tous ses itérés (lemme 3.12) : on a donc $h(P_1) = P_2$, $h(P_2) = P_3$, $h(P_3) \subset P_4$ et $h(P_4) \subset P_4 \cup P_1$. Notons $[AB]$ le segment euclidien, dans le modèle du plan, joignant les deux points A et B . Dans cette situation, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on a la propriété $N \notin [Xh(X)]$, autrement dit le segment $[Xh(X)]$ est inclus dans l'anneau \mathbb{A} .

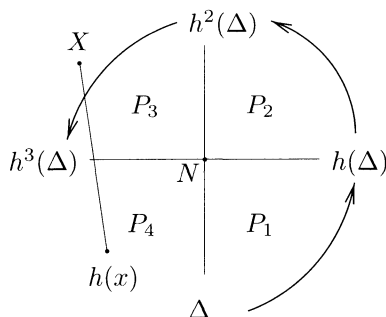


FIGURE 11. L'image d'un point X n'est jamais sur la demi-droite issue de N , opposée à X

On considère :

- X_0 un point quelconque de l'anneau \mathbb{A} ;
- $\gamma = [X_0 h(X_0)]$;
- \tilde{X}_0 un relevé de X_0 à $\tilde{\mathbb{A}}$;
- $\tilde{\gamma}$ l'arc relevé de γ issu de \tilde{X}_0 ;
- \tilde{Y}_0 l'autre extrémité de $\tilde{\gamma}$.

D'après les propriétés générales des revêtements, il existe un unique relevé \tilde{h} de h vérifiant $\tilde{h}(\tilde{X}_0) = \tilde{Y}_0$.

Comme \tilde{h} commute avec l'automorphisme de revêtement τ , il ne dépend pas du choix du relevé \tilde{X}_0 . Comme l'arc $[Xh(X)]$ varie continûment avec X , le relevé \tilde{h} ne dépend pas non plus du choix du point X_0 .

Calcul des indices. — Notons $\tilde{\theta}$ l'application $(\tilde{\theta}, r) \mapsto \tilde{\theta}$ du plan $\tilde{\mathbb{A}}$. Par construction, l'homéomorphisme \tilde{h} vérifie la propriété :

$$(*) \quad \text{Pour tout } \tilde{X} \in \tilde{\mathbb{A}}, \quad |\tilde{\theta}(\tilde{X}) - \tilde{\theta}(\tilde{h}(\tilde{X}))| < \frac{1}{2}.$$

La formule reliant les indices découle alors du lemme suivant :

Lemme 4.41. — Soit g un homéomorphisme de l'anneau \mathbb{A} , sans point fixe, isotope à l'identité, et \tilde{g} un relevé de g au plan $\tilde{\mathbb{A}}$. Supposons que \tilde{g} vérifie la propriété $(*)$ ci-dessus. Alors $\text{Indice}(\tilde{g}, \tau) = \text{Indice}(g, N) - 1$.

(La preuve du lemme 4.41 est donnée plus loin.)

Unicité. — Le lemme précédent prouve notamment que l'indice de \tilde{h} par rapport à τ n'est pas nul. Soit maintenant $\tilde{h}' = \tau^k \circ \tilde{h}$ un autre relevé de h (pour fixer les idées, prenons $k > 0$, le cas négatif étant similaire), et \tilde{X} un point de $\tilde{\mathbb{A}}$. De la propriété $(*)$, on déduit l'inégalité

$$(**) \quad \tilde{\theta}(\tilde{h}'(\tilde{X})) = \tilde{\theta}(\tilde{h}(\tilde{X})) + k \geq \tilde{\theta}(\tilde{h}(\tilde{X})) + 1 > \tilde{\theta}(\tilde{X}) + 1/2$$

ce qui entraîne facilement que l'indice de \tilde{h}' par rapport à τ est nul (« le vecteur $\tilde{h}'(\tilde{X}) - \tilde{X}$ pointe partout vers la droite, il ne peut pas faire de tours » : voir par exemple la preuve du lemme 3.39).

Point 1 : relevé des droites de Brouwer. — Un relevé d'une droite topologique de \mathbb{S}^2 est clairement une droite topologique de $\tilde{\mathbb{A}}$. Un relevé d'un ensemble libre est clairement libre. Il reste à voir que tout relevé $\tilde{\Delta}$ d'une droite de Brouwer Δ dont l'adhérence contient N et S vérifie la propriété de séparation : $\tilde{\Delta}$ sépare $\tilde{h}(\tilde{\Delta})$ de $\tilde{h}^{-1}(\tilde{\Delta})$.

Or cette propriété est clairement vérifiée si Δ est la droite de Brouwer Δ_0 utilisée dans la construction de \tilde{h} donnée ci-dessus. Par unicité, l'homéomorphisme \tilde{h} ne dépend pas de la droite utilisée dans la construction, donc la propriété est vérifiée pour toute droite Δ .

Point 2 : projection des arcs libres. — Rappelons que le nombre $\text{Indice}(\tilde{h}, \tau)$ n'est pas nul. Nous allons alors utiliser le lemme suivant (dont la preuve est donnée plus loin) :

Lemme 4.42. — *Soit $H \in \text{Comm}(\tau)$, et supposons qu'il existe un arc γ dans $\tilde{\mathbb{A}}$, libre pour H , et un entier k non nul tels que $\gamma(1) = \tau^k(\gamma(0))$.*

Alors $\text{Indice}(H, \tau) = 0$.

Soit γ un arc de $\tilde{\mathbb{A}}$ libre pour \tilde{h} , montrons que $\pi(\gamma)$ est un arc libre pour h . La courbe $\pi(\gamma)$ est bien un arc : sinon l'arc γ rencontre un de ses itérés $\tau^k(\gamma)$, ce qui est exclu d'après le lemme 4.42 ci-dessus (que l'on applique au sous-arc γ' de γ allant d'un point x dans $\gamma \cap \tau^{-k}(\gamma)$ au point $\tau^k(x)$). Si $\pi(\gamma)$ n'est pas libre, $\tilde{h}(\gamma)$ rencontre $\tau^k(\gamma)$ pour un certain entier k (avec $k \neq 0$ puisque γ est libre pour \tilde{h}). Soit $x \in \gamma$ tel que $y = \tilde{h}^{-1}(\tau^k(x)) \in \gamma$. L'arc γ est alors un arc libre pour \tilde{h} contenant x et y : d'après le corollaire 3.80, il existe aussi un arc libre pour \tilde{h} qui contient x et $\tilde{h}(y) = \tau^k(x)$. Ceci contredit encore le lemme 4.42.

Point 3 : relevé d'une décomposition en briques. — Soit enfin F une décomposition en briques pour h , et $\tilde{F} = \pi^{-1}(F)$; il s'agit de montrer que \tilde{F} est une décomposition en briques pour \tilde{h} .

Il est clair que \tilde{F} est encore un graphe triadique. Comme les briques de F sont des disques topologiques, chaque brique de \tilde{F} est un disque topologique relevé d'une brique de F . En particulier, le graphe triadique \tilde{F} est libre et compact. Il reste à prouver que \tilde{F} est minimal, c'est-à-dire que la réunion de deux briques adjacentes n'est pas libre.

Soient \tilde{B}_0 et \tilde{B}_1 deux briques de \tilde{F} adjacentes, et appelons $B_0 = \pi(\tilde{B}_0)$ et $B_1 = \pi(\tilde{B}_1)$ les briques correspondantes dans F . Les briques B_0 et B_1 sont adjacentes ; donc l'image de l'une rencontre l'autre, par exemple il existe $x \in B_0$ tel que $h(x) \in B_1$.

Soit \tilde{x} un relevé de x dans \tilde{B}_0 , et \tilde{y} un relevé de $h(x)$ dans \tilde{B}_1 . Puisque \tilde{B}_0 et \tilde{B}_1 sont adjacentes, il existe un arc γ allant de \tilde{x} à \tilde{y} et inclus dans $\tilde{B}_0 \cup \tilde{B}_1$.

Or l'arc $\pi(\gamma)$ n'est pas libre, puisqu'il va de x à $h(x)$; d'après le point précédent de la proposition, l'arc γ n'est pas libre. *A fortiori*, la réunion $\tilde{B}_0 \cup \tilde{B}_1$ n'est pas libre. Ceci prouve que \tilde{F} est minimal, et achève la preuve de la proposition 4.17.

Transitions pour \tilde{F} . — Remarquons au passage que puisque $h(B_0) \cap B_1 \neq \emptyset$, le lemme de Franks (3.65) entraîne $h(B_1) \cap B_0 = \emptyset$, donc $\tilde{h}(\tilde{B}_1) \cap \tilde{B}_0 = \emptyset$. La décomposition \tilde{F} étant minimale, c'est donc l'image de \tilde{B}_0 qui rencontre \tilde{B}_1 . Autrement dit, l'application π envoie les « transitions » de \tilde{F} sur les transitions de F (ou, en terme de l'orientation des arêtes définie dans [Sau01], est compatible avec les orientations).

b. Preuve des deux lemmes

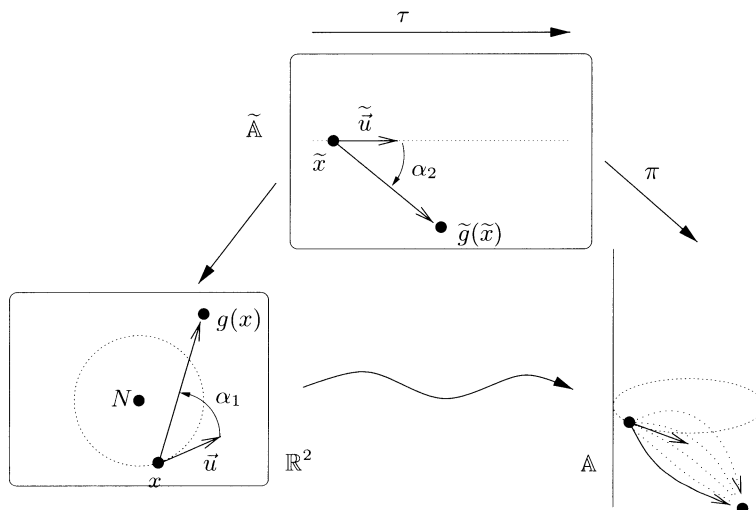


FIGURE 12. Preuve du lemme 4.41

Démonstration du lemme 4.41. — Voici une explication informelle, qui s'appuie sur la figure 12. On se place sous les hypothèses du lemme. D'après la définition de l'indice, le nombre $\text{Indice}(g, N) - 1$ correspond alors, dans le modèle du plan \mathbb{R}^2 (dessin en bas à gauche), à la variation angulaire de l'angle α_1 entre le vecteur « tournant » \vec{u} et la direction du segment euclidien de x à $g(x)$, lorsque le point x parcourt un cercle qui entoure N (le « -1 » vient du fait que le vecteur \vec{u} fait un tour lorsque x parcourt le cercle).

Le nombre $\text{Indice}(\tilde{g}, \tau)$, lui, correspond à la variation angulaire de l'angle α_2 représenté sur le dessin du haut, entre le vecteur horizontal \tilde{u} , relevé de \vec{u} , et la direction du segment de \tilde{x} à $\tilde{g}(\tilde{x})$, lorsque le point \tilde{x} parcourt un segment horizontal de longueur 1 (qui se projette sur le cercle).

Pour montrer que ces deux nombres n'en sont qu'un, le problème vient du fait que les deux angles α_1 (en un point x) et α_2 (en un relevé \tilde{x}) ne sont pas égaux (comme on peut le voir sur le dessin : la projection de $\tilde{\mathbb{A}}$ sur \mathbb{A} est une isométrie locale pour les métriques naturelles sur les dessins, mais pas celle de $\tilde{\mathbb{A}}$ sur \mathbb{R}^2).

Cependant, grâce à l'hypothèse (*), ces deux angles ne prennent jamais des valeurs opposées. On en déduit facilement que les deux variations angulaires coïncident (une manière géométrique de voir que l'application α_1 est homotope à l'application α_2 consiste à déformer le plan \mathbb{R}^2 en l'anneau \mathbb{A} , en passant par des cônes de plus en plus pointus ; à tout moment de la déformation, l'hypothèse (*) assure l'existence d'une unique géodésique minimisante de x à $g(x)$; au début de la déformation, cette géodésique coïncide avec le segment euclidien du plan \mathbb{R}^2 ; à la fin, elle coïncide avec le segment géodésique dans l'anneau \mathbb{A} , qui se relève en un segment euclidien dans le plan $\tilde{\mathbb{A}}$). \square

Démonstration du lemme 4.42. — On se place sous les hypothèses du lemme. On considère, dans l'anneau \mathbb{A} , la courbe $\pi(\gamma)$; c'est une courbe fermée, qui fait k fois le tour de \mathbb{A} . On voit facilement qu'une telle courbe contient une courbe fermée simple, et que cette courbe fermée simple fait une fois le tour de \mathbb{A} (pas plus, sinon elle aurait un point double ; et elle ne peut pas être nulhomotope, sans quoi γ aurait un point double). Cette courbe fermée simple possède un relevé γ' inclus dans γ , et γ' est encore libre pour H : quitte à remplacer γ par γ' , on peut supposer que $k = 1$ et que $\pi(\gamma)$ est une courbe fermée simple de \mathbb{A} .

On peut maintenant se ramener au cas où $\gamma = [0, 1] \times \{0\}$: en effet, le théorème de Schoenflies fournit un homéomorphisme g de \mathbb{A} , isotope à l'identité, vérifiant $g(\pi(\gamma)) = \pi([0, 1] \times \{0\})$, et on remplace H par $\tilde{g}H\tilde{g}^{-1}$ où \tilde{g} est un relevé de g ; ceci ne change pas la valeur de $\text{Indice}(H, \tau)$ d'après l'affirmation 4.15.

Rappelons que $\text{Int}(\alpha)$ désigne l'intérieur d'un arc α , c'est-à-dire l'ensemble $\alpha \setminus]0, 1[$. Soit, dans $\tilde{\mathbb{A}}$, les deux demi-droites $D_1 =]-\infty, 0] \times \{0\}$ et $D_2 = [1, +\infty[\times \{0\}$. Supposons que $H(\gamma)$ rencontre D_1 et D_2 . On voit alors facilement que $\text{Int}(\tau(H(\gamma)))$ doit rencontrer $\text{Int}(H(\gamma))$; mais alors $\text{Int}(\tau(\gamma))$ rencontrerait $\text{Int}(\gamma)$, or ce n'est pas le cas.

L'une au moins des deux demi-droites D_1 et D_2 est donc disjointe de $H(\gamma)$; supposons par exemple qu'il s'agisse de D_1 . Alors, comme γ est libre, $H(\gamma)$ est disjoint de $D_1 \cup \gamma$. Dans ce cas, pour tout $X \in \gamma$, le vecteur $H(X) - X$ ne pointe jamais dans la direction horizontale gauche. Ceci entraîne que $\text{Indice}(H, \tau) = 0$ (l'argument est le même que celui donné dans la preuve du lemme 3.39 et représenté sur la figure 16, page 51). \square

c. Compléments sur \tilde{h} et sur les autres relevés de h . — L'énoncé suivant contient quelques propriétés supplémentaires des relevés de h , qui ne seront pas utilisées dans le texte. Il nécessite les définitions suivantes (et les définitions similaires pour \tilde{h}) :

Définition 4.43. — Un arc de translation pour h est un arc γ qui relie un point x à son image $h(x)$, et tel que $\gamma \cap h(\gamma) = \{h(x)\}$.

Définition 4.44. — Un couple (x, y) de points de \mathbb{A} n'appartenant pas à la même orbite de h est *singulier* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point z et un entier positif n , tel que z soit ε -proche de x , et $h^n(z)$ ε -proche de y .

Proposition 4.45 (complément à la proposition 4.17). — *Sous les hypothèses de la proposition 4.17, on a :*

- (1) *un couple (x, y) de points de \mathbb{A} est singulier si et seulement s'il existe des relevés \tilde{x} et \tilde{y} de x et y tels que (\tilde{x}, \tilde{y}) soit singulier pour \tilde{h} ;*
- (2) *le relevé canonique \tilde{h} n'est pas conjugué à une translation affine. En particulier, il existe des couples singuliers pour \tilde{h} ;*
- (3) *les autres relevés \tilde{h}' de h sont tous conjugués à une translation affine ;*
- (4) *si γ est un arc de translation pour h , alors tout relevé $\tilde{\gamma}$ est un arc de translation pour le relevé canonique \tilde{h} , et est libre pour les autres relevés de h .*

Démonstration. — Pour le premier point, la propriété essentielle est que dans les coordonnées de la figure 11, toute orbite pour \tilde{h} est entièrement incluse dans une bande verticale de largeur 2. Le deuxième point peut se déduire du lemme 4.42 (l'existence de couples singuliers provient alors d'un résultat de B. Kerékjártó, voir par exemple [LR99a], proposition 8). Le troisième point découle immédiatement de l'inégalité (**) (preuve de l'unicité dans la proposition 4.17). Le dernier point découle du point 2 de la proposition 4.17 concernant les arcs libres. Les détails sont laissés au lecteur. \square

Une conséquence de ce complément est qu'il existe aussi des couples de points de \mathbb{A} singuliers pour h . Ceci peut également se prouver directement, selon la stratégie suivante : dans le cas contraire, tous les points de l'anneau \mathbb{A} ont le même ensemble ω -limite, qui est l'un des deux points fixes (par exemple N). Dans ce cas, un argument célèbre de Birkhoff montre qu'il existe un disque attractif contenant le point N (voir par exemple [LR00]). D'après le lemme 3.9, l'indice de N est alors égal à 1.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS EN DYNAMIQUE LOCALE

Nous déduisons du théorème d'extension 2.1, du théorème d'existence de décomposition en briques 3.57 et de la version simpliciale du théorème principal (théorème F page 80) les théorèmes de dynamique locale A, B et C. La preuve du théorème A utilisera aussi les résultats élémentaires sur les décompositions en briques; celle du théorème C nécessite de plus un certain nombre des résultats intermédiaires de ce texte. *Les sections 5.1, 5.2 et 5.3 sont complètement indépendantes.*

5.1. Théorème de la fleur topologique

Démonstration du théorème A. — Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local dont le point fixe est d'indice strictement supérieur à 1. On applique le théorème d'extension 2.1, et on se place dans le modèle de la sphère, mais en identifiant $(0, 0)$ à S et l'infini à N . On obtient ainsi un homéomorphisme de la sphère fixant uniquement N et S , que l'on note encore h , avec $\text{Indice}(h, S) = 1 + p > 1$. L'homéomorphisme h vérifie alors les hypothèses du théorème principal, et il suffit maintenant de montrer que tout voisinage de S contient p pétales attractifs et p pétales répulsifs, d'intersections deux à deux égales à $\{S\}$, cycliquement alternés.

Soit F une décomposition en briques pour h (théorème 3.57). D'après le théorème F (page 80), il existe p croissants attractifs à dynamique Nord-Sud, simpliciaux, et p croissants répulsifs à dynamique Sud-Nord, également simpliciaux, deux à deux d'intérieurs disjoints, et cycliquement alternés autour de S . Par définition, un croissant attractif à dynamique Nord-Sud contient un pétale simplicial attractif basé en S ; de même un croissant répulsif à dynamique Sud-Nord contient un pétale simplicial répulsif basé en S .

Pour obtenir l'existence des $2p$ pétales *dans tout voisinage de S* , il suffit donc de montrer qu'un pétale attractif simplicial contient des pétales attractifs arbitrairement proches de S ; plus précisément, il nous reste à prouver :

Lemme 5.1. — Soit h un homéomorphisme de la sphère, préservant l'orientation, fixant uniquement les deux points N et S , tel que $\text{Indice}(h, N) \neq 1$. Soit F une décomposition en briques pour h , et O_S un voisinage de S . Alors tout pétale attractif simplicial P basé en S contient un pétale attractif simplicial basé en S et inclus dans O_S .

Soit $K = P \setminus O_S$; il s'agit de montrer qu'il existe un pétale attractif simplicial, inclus dans P , et disjoint de K . On peut toujours supposer que K est réunion d'un nombre fini de briques de la décomposition, et que chaque composante connexe de K rencontre le bord de P (quitte à grossir K).

Puisque K rencontre le bord de P , il existe une brique B_1 incluse dans K et rencontrant le bord de P . Comme P est un attracteur strict réunion de briques, $A^+(B_1) \subset P$, et $\Delta(B_1)$ est à extrémités Sud; de plus, on voit facilement que la brique B_1 ne peut qu'être de type dynamique $(\rightarrow S)$. La droite $\Delta(B_1)$ délimite donc un pétale attractif $P_1 = P^+(B_1)$, inclus dans P , et ne contenant pas B_1 .

On applique ce procédé autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir un pétale attractif P_k disjoint de K (plus précisément, on peut raisonner par récurrence sur le nombre de briques contenues dans K , en remarquant que, à l'étape k , chaque composante connexe de $K \cap P_k$ rencontre le bord de P_k). \square

5.2. Branches stables et instables locales

Démonstration du théorème B. — Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local dont le point fixe est d'indice strictement inférieur à 1. D'après le théorème d'extension 2.1, il suffit de traiter le cas où l'homéomorphisme local h est la restriction à un voisinage de N (que l'on notera encore U) d'un homéomorphisme de la sphère fixant uniquement N et S (que l'on notera encore h), avec $\text{Indice}(h, N) = 1 - p < 1$.

D'après le théorème global D, il existe p croissants attractifs à dynamique Nord-Sud et p croissants répulsifs à dynamique Sud-Nord, deux à deux d'intersection égale à $\{N, S\}$, cycliquement alternés autour de N .

Soit A l'un des croissants attractifs à dynamique Nord-Sud. Par définition, il existe un pétale attractif P en S , inclus dans A , tel que $A \setminus P \subset U$. On peut de plus supposer que la situation est homéomorphe au dessin de la figure 1 (a), c'est-à-dire que l'ensemble $\alpha = \partial P \setminus \partial A$ est connexe : en effet, dans le cas contraire, on peut se ramener à cette situation en modifiant légèrement le pétale P , comme indiqué sur la partie (b) de la figure.

On pose alors $W_{k_A} = \text{Adh}(A \setminus P)$ (c'est un disque topologique); et pour tout $n \geq 0$, on appelle k_n la composante connexe de $h^n(A) \cap W_{k_A}$ qui contient N . On pose $k_A = \bigcap_{n \geq 1} k_n$.

Affirmation 5.2. — Soit U' un disque topologique fermé, voisinage de N , tel que $U' \cap A = W_{k_A}$; alors l'ensemble k_A est une branche instable U' -locale.

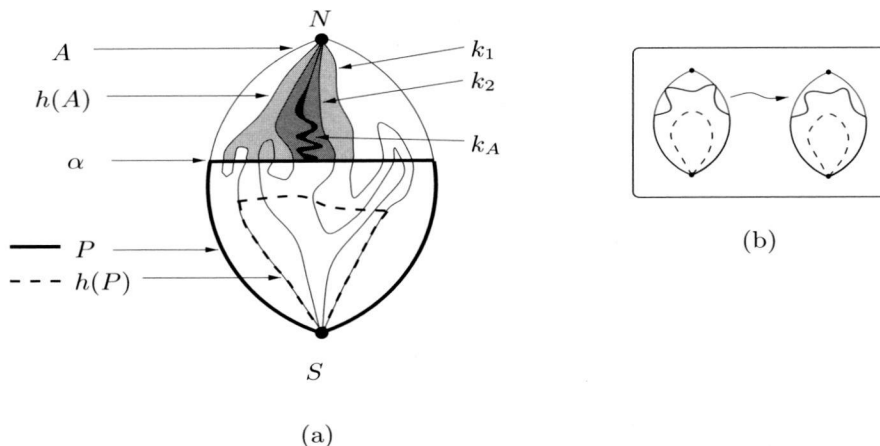


FIGURE 1. Construction d'une branche instable locale

Démonstration. — Nous prouvons successivement que k_A vérifie les quatre points de la définition des branches instables U' -locales (définition 1.13).

L'ensemble k_n contient N , et on voit facilement qu'il rencontre α . Il est compact, connexe, plein (une composante connexe d'un ensemble plein est pleine). On a aussi $h^{n+1}(A) \subset h^n(A)$, donc $k_{n+1} \subset k_n$.

Par conséquent l'ensemble k_A contient N , rencontre α et est inclus dans U' (ceci prouve le premier point). Il est compact et connexe comme intersection décroissante d'ensembles compacts et connexes ; il est plein comme intersection d'ensembles pleins. Ceci prouve le deuxième point.

Montrons que $k_A \subset h(k_A)$. Tout d'abord, $k_1 \subset h(W_{k_A})$; en effet, on a

$$\begin{aligned} k_1 &\subset h(A) \cap (W_{k_A}) = h(W_{k_A} \cup P) \cap W_{k_A} \\ &= (h(W_{k_A}) \cap W_{k_A}) \cup (h(P) \cap W_{k_A}) \\ &= h(W_{k_A}) \cap W_{k_A} \end{aligned}$$

car $h(P) \cap W_{k_A} = \emptyset$ (P est un attracteur strict). On a donc $k_{n+1} \subset k_1 \subset h(W_{k_A})$; k_{n+1} est un ensemble connexe inclus dans $h^{n+1}(A) \cap h(W_{k_A})$ et qui contient N . Or $h(k_n)$ est la composante connexe de $h^{n+1}(A) \cap h(W_{k_A})$ contenant N ; on a donc $k_{n+1} \subset h(k_n)$. On en déduit $k_A \subset h(k_A)$.

Soit x un point de k_A . Ses itérés négatifs sont tous dans k_A , donc ne peuvent que tendre vers N d'après le corollaire 3.13. Ceci prouve le troisième point.

L'ensemble W_{k_A} est un voisinage de $k_A \setminus \{N\}$ dans U' . Soit y un point de W_{k_A} . D'après la définition des croissants attractifs à dynamique Nord-Sud, il existe un pétale attractif basé en S contenant y , par conséquent les itérés positifs de y tendent vers S , et y possède un itéré positif hors de U' . Ceci prouve le quatrième point. \square

On effectue la même construction pour chaque croissant attractif à dynamique Nord-Sud A_1, \dots, A_p , et la construction similaire pour chaque croissant répulsif à dynamique Sud-Nord A'_1, \dots, A'_p (en remplaçant h par h^{-1}). Ceci produit des ensembles $W_{k_{A_i}}, W_{k_{A'_i}}$ et des compacts $k_{A_i}, k_{A'_i}$.

On trouve facilement un disque topologique fermé U' , voisinage de N , inclus dans $U \cap h(U)$, tel que pour tout i , $U' \cap A_i = W_{k_{A_i}}$ et $U' \cap A'_i = W_{k_{A'_i}}$. Les compacts k_{A_i} et $k_{A'_i}$ sont des branches instables et stables U' -locales vérifiant les propriétés voulues. \square

5.3. Indices des itérés

Dans cette section, nous montrons le théorème C : pour un homéomorphisme local d'indice différent de 1, les indices de h^n et de h sont égaux pour tout n non nul. Le point 1 du théorème, qui revient à montrer que l'indice de h^n est bien défini pour tout entier n non nul, découle du lemme (bien connu) suivant :

Lemme 5.3 (absence de récurrence locale). — *Soit $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme local fixant uniquement 0, tel que l'indice du point fixe est différent de 1. Il existe alors un ensemble $U' \subset U$, voisinage de 0, ayant la propriété suivante. Pour tout point x de U' , si la suite $(h^n(x))_{n \geq 0}$ est définie pour tout n positif et entièrement incluse dans U' , alors cette suite tend vers 0.*

En particulier, pour tout entier $n > 0$, il existe un voisinage U'' de 0, connexe, tel que l'homéomorphisme local $h^n : U'' \rightarrow h^n(U'')$ n'a pas d'autre point fixe que 0.

Remarquons que l'exemple de la figure 1 page 26 montre qu'on ne peut pas toujours choisir $U' = U$.

Démonstration du lemme. — Il s'agit d'un lemme de dynamique locale ; il suffit donc de prouver le lemme pour un homéomorphisme local de même germe que h . Le théorème d'extension 2.1 permet alors de supposer (quitte à diminuer U) que h est la restriction d'un homéomorphisme défini sur le plan \mathbb{R}^2 , encore noté h , et fixant uniquement 0. Dans ce cadre, l'hypothèse d'indice permet d'appliquer la théorie de Brouwer : en particulier, le corollaire 3.13 dit que les orbites des points tendent vers 0 ou l'infini. Ceci entraîne l'existence du voisinage U' requis par le lemme. Soit maintenant $n > 0$. On choisit alors un voisinage U'' de 0, connexe, suffisamment petit pour que $U'', h(U''), \dots, h^n(U'')$ soient inclus dans U' . L'homéomorphisme h^n est bien défini sur U'' ; l'application $h^n : U'' \rightarrow h^n(U'')$ est un homéomorphisme local ; et pour tout point fixe x de cet homéomorphisme local, l'orbite de x sous h est entièrement incluse dans U' , donc tend vers 0 : par conséquent, $x = 0$. \square

Ce lemme montre le premier point du théorème C pour les entiers $n > 0$. Ce premier point est également vérifié pour les entiers $n < 0$ (ce que l'on voit en prouvant un lemme symétrique, ou en l'appliquant à l'homéomorphisme h^{-1}). Passons maintenant

au calcul de l'indice des itérés de h . L'idée de la démonstration est simple. Comme toujours, il suffit de faire la preuve dans le cadre global. À l'aide des résultats de ce texte, nous pouvons découper la sphère en un certain nombre de croissants attractifs et répulsifs, à dynamique Nord-Sud ou Sud-Nord, d'intérieurs disjoints deux à deux. On voit assez facilement que les indices partiels pour h et pour h^n à travers chaque croissant coïncident. D'autre part, entre deux croissants adjacents, l'indice partiel pour h est nul, et il existe une chaîne de disques pour h , grâce à laquelle on peut montrer que l'indice partiel pour h^n est encore nul. La relation de Chasles permet de conclure.

En pratique, on va se ramener, *via* le relevé canonique, au cadre des homéomorphismes de Brouwer. On commence donc par prouver une version du théorème dans ce cadre. Remarquons que l'une des difficultés de la preuve concerne le changement de cadre : en effet, si H désigne le relevé canonique de h , il n'est pas clair *a priori* que H^n soit le relevé canonique de h^n (tant qu'on ne sait pas quel est l'indice de h^n , le relevé canonique n'est pas défini...). Ceci sera par contre un corollaire immédiat du théorème et de la proposition 5.4.

Rappelons qu'une droite de Brouwer pour H est encore une droite de Brouwer pour toute les puissances non nulles de H (remarque 3.24).

Proposition 5.4 (Indices partiels des itérés). — *Soit H un homéomorphisme de Brouwer, et F une décomposition en briques pour H . Soit (Δ_0, Δ_1) un couple de droites de Brouwer simpliciales disjointes. Alors pour tout entier n non nul, les indices partiels $\text{IP}(H, \Delta_0, \Delta_1)$ et $\text{IP}(H^n, \Delta_0, \Delta_1)$ sont égaux.*

On se place sous les hypothèses de la proposition 5.4, et on considère une famille vérifiant la conclusion du lemme 4.9, autrement dit une famille maximale de sous-croissants simpliciaux minimaux de la bande $\text{Adh}(D(\Delta_0, \Delta_1))$,

$$\mathcal{F} = \{\text{Adh}(D(\Delta'_0, \Delta'_1)), \dots, \text{Adh}(D(\Delta'_{2k}, \Delta'_{2k+1}))\}.$$

Comme en 4.1.b, on pose $\Delta'_{-1} = \Delta_0$ et $\Delta'_{2k+2} = \Delta_1$. La preuve de la proposition 5.4 nécessite le lemme suivant.

Lemme 5.5 (complément à la proposition 4.11). — *Pour tout i entre -1 et $2k+1$, et pour tout entier n non nul, on a*

$$\text{IP}(H, \Delta'_i, \Delta'_{i+1}) = \text{IP}(H^n, \Delta'_i, \Delta'_{i+1}).$$

Démonstration du lemme 5.5. — Il suffit de traiter le cas $n > 0$, puisque l'indice partiel pour H est toujours égal à l'indice partiel pour H^{-1} (affirmation 3.37).

Soit C un croissant de la famille \mathcal{F} . Le croissant C étant minimal, d'après la proposition 4.8, il est à dynamique \tilde{S} - \tilde{N} ou \tilde{N} - \tilde{S} . Il est clair que C est encore un croissant pour H^n , ayant le même type dynamique que pour H (on peut par exemple utiliser l'affirmation 3.31). Puisque l'indice partiel entre les deux bords de C ne dépend

que du type dynamique de C (affirmation 4.39), les indices partiels pour H et pour H^n sont égaux. Ceci montre le lemme pour les entiers i pairs.

Soit maintenant i un entier impair. Si les droites Δ'_i et Δ'_{i+1} ne sont pas disjointes, elles se touchent (définition 3.41), et l'indice partiel est nul pour H comme pour H^n (par définition). Il reste le cas où ces deux droites sont disjointes ; il s'agit de montrer que l'indice partiel pour H^n est encore nul.

Le couple $(\Delta'_i, \Delta'_{i+1})$ est indifférent, on suppose par exemple que Δ'_i est attractive. D'après la proposition 4.11, l'indice partiel est nul pour H , et il existe une chaîne de pseudo-disques (D_1, \dots, D_p) , pour H , de Δ'_i à Δ'_{i+1} (constituée de briques). Notons $(n_i)_{i=1, \dots, p-1}$ les temps de transition de la chaîne. Considérons alors la suite

$$(D_1, H^{(n-1) \times n_1}(D_2), \dots, H^{(n-1) \times (n_1 + \dots + n_{p-1})}(D_p)).$$

Les disques topologiques qui la composent sont deux à deux disjoints, sans quoi il existerait une chaîne de pseudo-disques périodique pour H (ce qui contredirait le lemme de Franks 3.18). De plus, cette suite est une chaîne de pseudo-disques pour H^n , avec les mêmes temps de transition (n_i) . Cette chaîne de pseudo-disques va de la droite de Brouwer Δ'_i à la droite $\Delta''_{i+1} = H^{(n-1) \times (n_1 + \dots + n_{p-1})}(\Delta'_{i+1})$.

Le lemme de Franks pour l'indice partiel (proposition 3.45) montre alors que le nombre $\text{IP}(H^n, \Delta'_i, \Delta''_{i+1})$ est nul.

D'autre part, la droite Δ''_{i+1} est incluse dans le domaine de Brouwer engendré, pour H^n , par Δ'_{i+1} . D'après le deuxième point du corollaire 3.40, on a $\text{IP}(H^n, \Delta'_{i+1}, \Delta''_{i+1}) = 0$.

Les droites de Brouwer Δ'_i , Δ'_{i+1} et Δ''_{i+1} sont clairement disjointes, la deuxième séparant les deux autres. On peut donc appliquer la relation de Chasles (lemme 3.38), obtenant $\text{IP}(H^n, \Delta'_i, \Delta''_{i+1}) = \text{IP}(H^n, \Delta'_i, \Delta'_{i+1}) + \text{IP}(H^n, \Delta'_{i+1}, \Delta''_{i+1})$. Deux des termes de la relation étant nuls, le troisième l'est aussi, ce qui nous donne bien

$$\text{IP}(H^n, \Delta'_i, \Delta'_{i+1}) = 0 = \text{IP}(H, \Delta'_i, \Delta'_{i+1}).$$

Ceci termine la preuve du lemme. □

Démonstration de la proposition 5.4. — Comme dans la preuve de la formule de la proposition 4.11, on applique la relation de Chasles généralisée (lemme 3.43), pour H d'une part, et pour H^n d'autre part, à la famille des droites $\Delta'_{-1} = \Delta_0, \dots, \Delta'_{2k+2} = \Delta_1$. D'après le lemme, les indices partiels entre deux droites successives sont les mêmes pour H et H^n , et on obtient le résultat. □

Démonstration du théorème C. — Grâce au théorème d'extension, il suffit de prouver que si h est un homéomorphisme de la sphère, préservant l'orientation, fixant uniquement les deux points N et S , tel que $\text{Indice}(N) = 1 - p \neq 1$, alors pour tout entier $n \neq 0$, $\text{Indice}(h^n, N) = \text{Indice}(h, N)$.

Comme dans la preuve du théorème principal :

– on se donne une décomposition en briques F pour h (théorème 3.57) ;

- on note Δ_0 une droite de Brouwer simpliciale à extrémités Nord-Sud pour h (son existence est assurée par la proposition 4.12) ;
- on note $H = \tilde{h}$ le relevé canonique de h au plan $\tilde{\mathbb{A}}$, fourni par la proposition 4.17 ;
- on note $\tilde{\Delta}_0$ un relevé de Δ_0 , et $\tilde{\Delta}_1 = \tau(\tilde{\Delta}_0)$ (où τ désigne l'automorphisme de revêtement).

On a alors (comme dans l'affirmation 4.19) :

$$\begin{aligned} \text{IP}(H, \tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1) &= \text{Indice}(H, \tau), \\ \text{IP}(H^n, \tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1) &= \text{Indice}(H^n, \tau). \end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned} \text{Indice}(h, N) &= \text{Indice}(H, \tau) + 1, \\ \text{Indice}(h^n, N) &= \text{Indice}(H^n, \tau) + 1. \end{aligned}$$

En effet, la première égalité vient de la définition du relevé canonique. Montrons la deuxième. On reprend pour cela les idées de la construction du relevé canonique. Soit $n > 0$ fixé ; puisque les indices sont des invariants de conjugaison, quitte à conjuguer h , on peut supposer que les $(2n + 3)$ droites de Brouwer $\Delta_0, \dots, h^{2(n+1)}(\Delta_0)$ sont des demi-droites euclidiennes issues de N , découpant le plan en $2n + 3$ secteurs de même taille (généralisant la figure 11 page 97). Dans ce modèle, on voit facilement que le relevé canonique H de h vérifie l'inégalité :

$$\text{Pour tout } \tilde{X} \in \tilde{\mathbb{A}}, \quad |\tilde{\theta}(\tilde{X}) - \tilde{\theta}(H^n(\tilde{X}))| < \frac{1}{2}.$$

Comme H^n est un relevé de h^n , l'égalité $\text{Indice}(h^n, N) = \text{Indice}(H^n, \tau) + 1$ découle alors du lemme 4.41.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que

$$\text{IP}(H, \tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1) = \text{IP}(H^n, \tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1).$$

Cette dernière égalité est une application de la proposition 5.4. □

APPENDICE : THÉORÈME DE SCHOENFLIES-HOMMA ET VARIANTES

Le théorème de Schoenflies est l'un des outils techniques les plus couramment utilisés dans les problèmes de topologie plane. Dans ce texte, nous appliquons un certain nombre de variantes qui peuvent toutes être vues comme des corollaires d'un théorème de Homma. Dans cet appendice, nous énonçons le théorème de Homma et expliquons quelques-unes de ses utilisations.

Le théorème de Schoenflies

Théorème (Schoenflies). — *Tout homéomorphisme entre deux courbes de Jordan incluses dans \mathbb{S}^2 s'étend en un homéomorphisme de \mathbb{S}^2 .*

Le théorème de Schoenflies-Homma

Définition ([Hom53]). — On appelle *ensemble en forme de « Y »* un ensemble qui est la réunion de trois arcs ayant en commun un seul point, extrémité de chacun d'eux.

L'orientation de la sphère induit un ordre cyclique sur l'ensemble des trois arcs qui constituent n'importe quel ensemble de ce type, au voisinage du point d'intersection.

Théorème (Homma). — *Soit F un ensemble compact, connexe et localement connexe de la sphère. Une application continue et injective de F dans la sphère s'étend en un homéomorphisme de la sphère préservant l'orientation si et seulement si elle préserve l'ordre cyclique de tous les ensembles en forme de « Y » contenus dans F .*

Utilisations. — On utilise le théorème avec divers ensembles F , ces ensembles étant à chaque fois des graphes simpliciaux finis. Les détails sont laissés au lecteur. On a essentiellement besoin de trois variantes :

– Dans le cas où F est une courbe fermée simple ou bien un arc, F ne contient aucun ensemble en forme de « Y », et on retrouve en particulier le théorème de Schoenflies.

– Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ ($k \geq 2$), une famille de droites topologiques du plan, deux à deux disjointes. Supposons que pour tout $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k$, la droite Δ_{i_2} sépare Δ_{i_1} de Δ_{i_3} . Alors il existe un homéomorphisme h du plan, préservant l'orientation, qui envoie chacune des droites Δ_i sur la droite verticale $i \times \mathbb{R}$.

– Soient N et S deux points antipodaux de la sphère, et $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, $k \geq 2$ une famille d'arcs d'extrémités N et S , deux à deux d'intérieurs disjointes. Alors il existe un homéomorphisme de la sphère, fixant N et S , qui envoie chacun des arcs sur un demi-grand cercle.

Remarquons que dans beaucoup de cas, on a besoin de spécifier l'image d'un certain nombre de points par l'homéomorphisme recherché ; ceci arrive en particulier quand on veut obtenir un homéomorphisme du plan, c'est-à-dire qui fixe le point à l'infini. Ceci ne pose pas de problème (typiquement, on utilise que le groupe des homéomorphismes du disque qui fixent chaque point du bord est transitif).

BIBLIOGRAPHIE

- [Ale23] J.W. ALEXANDER – « On the deformation of an n -cell », *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **9** (1923), p. 406–407.
- [And70] S. ANDREA – « The plane is not compactly generated by a free mapping », *Trans. Amer. Math. Soc.* **151** (1970), p. 481–498.
- [AP93] S. ALPERN & V.S. PRASAD – « Combinatorial proofs of the Conley-Zehnder-Franks theorem on a fixed point for torus homeomorphisms », *Adv. in math.* **99** (1993), p. 238–247.
- [BF93] M. BARGE & J. FRANKS – « Recurrent sets for planar homeomorphism », in *Proceedings of the Smalefest* (M.W. Hirsch & al., éd.), 1993, p. 186–195.
- [BLR03] F. BÉGUIN & F. LE ROUX – « Ensemble oscillant d'un homéomorphisme de Brouwer, homéomorphismes de Reeb », *Bull. Soc. math. France* **131** (2003), p. 149–210.
- [Bon97] M. BONINO – Thèse, Institut Fourier, Grenoble, 1997.
- [Bon99] ———, « Propriétés locales de l'espace des homéomorphismes de Brouwer », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19** (1999), no. 6, p. 1405–1423.
- [Bon01] ———, « A dynamical property for planar homeomorphisms. Application to the problem of canonical position around an isolated fixed point », *Topology* **40** (2001), no. 6, p. 1241–1257.
- [Bro12] L.E.J. BROUWER – « Beweis des ebenen Translationssatzes », *Math. Ann.* **72** (1912), p. 37–54.
- [Bro71] R.F. BROWN – *The Lefschetz fixed point theorem*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill.-London, 1971.
- [Bro77] M. BROWN – « A short short proof of the Cartwright-Littlewood theorem », *Proc. Amer. Math. Soc.* **65** (1977), p. 372.

- [Bro84] ———, « A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs », *Houston J. Math.* **10** (1984), p. 35–41.
- [Bro85] ———, « Homeomorphisms of two-dimensional manifolds », *Houston J. Math.* **11** (1985), p. 455–469.
- [Bro90a] ———, « Fixed points for orientation preserving homeomorphisms of the plane which interchange two points », *Pacific J. Math.* (1990).
- [Bro90b] ———, « On the fixed point index of iterates of planar homeomorphism », *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), p. 1109–1114.
- [BS90] S. BALDWIN & E. SLAMINKA – « A stable/unstable “manifold” theorem for area preserving homeomorphisms of two manifolds », *Proc. Amer. Math. Soc.* **109** (1990), no. 3, p. 823–828.
- [Cam78] C. CAMACHO – « On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in \mathbb{C}^2 », in *Journées Singulières de Dijon (Univ. Dijon, Dijon, 1978)*, Soc. Math. France, Paris, 1978, p. 3, 83–94.
- [CG93] L. CARLESON & T. W. GAMELIN – *Complex dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Dol95] A. DOLD – *Lectures on algebraic topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1972 edition.
- [Dum77] F. DUMORTIER – « Singularities of vector fields on the plane », *J. Differential Equations* **23** (1977), no. 1, p. 53–106.
- [Dum78] ———, *Singularities of vector fields*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1978.
- [Fat87] A. FATHI – « An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs », *Enseign. Math.* **33** (1987), p. 315–322.
- [Flu90] M. FLUCHER – « Fixed points of measure preserving torus homeomorphisms », *Manuscripta Math.* **68** (1990), p. 271–293.
- [Fra88] J. FRANKS – « Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem », *Ann. of Math.* **128** (1988), p. 139–151.
- [Fra92] ———, « A new proof of the Brouwer plane translation theorem », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **12** (1992), p. 217–226.
- [GP74] V. GUILLEMIN & A. POLLACK – *Differential topology*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [Gui94] L. GUILLOU – « Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff », *Topology* **33** (1994), p. 331–351.

- [Gui95] ———, « A generalized translation theorem for free homeomorphisms of surfaces », *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), p. 3243–3250.
- [Ham54] O.H. HAMILTON – « A short proof of the Cartwright-Littlewood theorem », *Canad. J. Math.* (1954).
- [Hir90] K. HIRAIDE – « Expansive homeomorphism of compact surfaces are pseudo-Anosov », *Osaka J. Math.* (1990).
- [Hom53] T. HOMMA – « An extension of the Jordan Curve Theorem », *Yokohama Math. J.* **1** (1953), p. 125–129.
- [HT53] T. HOMMA & H. TERASAKA – « On the structure of the plane translation of Brouwer. », *Osaka J. Math.* **5** (1953), p. 233–266.
- [Kap42] W. KAPLAN – « The structure of a curve-family on a surface in the neighborhood of an isolated singularity », *Amer. J. Math.* **64** (1942), p. 1–35.
- [Ker34] B. KERÉKJÁRTÓ – « Sur le groupe des transformations topologiques du plan », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (1934), p. 393–400.
- [Lax71] P.D. LAX – « Approximation of measure preserving transformations », *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971), p. 133–135.
- [LCa] P. LE CALVEZ – « Une version feuilletée du théorème de translation de Brouwer », Prépublication.
- [LCb] ———, « Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer », Prépublication.
- [LC99] ———, « Une propriété dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe d'indice > 1 », *Topology* **38** (1999), no. 1, p. 23–35.
- [LC03] ———, « Dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série* **129** (2003), p. 3221–3230.
- [LCS96] P. LE CALVEZ & A. SAUZET – « Une démonstration dynamique du théorème de translation de Brouwer », *Expo. Math.* **14** (1996), no. 3, p. 277–287.
- [LCY97] P. LE CALVEZ & J.-C. YOCOZ – « Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe », *Ann. of Math. (2)* **146** (1997), no. 2, p. 241–293.
- [Lew89] J. LEWOWICZ – « Expansive homeomorphisms of surfaces », *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **20** (1989), no. 1, p. 113–133.
- [LR] F. LE ROUX – « Un indice qui affine l'indice de Poincaré-Lefschetz pour les points fixes d'homéomorphismes de surfaces », en préparation.

- [LR97] ———, *Étude topologique de l'espace des homéomorphismes de Brouwer*, Thèse, Institut Fourier, Grenoble, 1997.
- [LR99a] ———, « Bounded recurrent sets for planar homeomorphisms », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19** (1999), no. 4, p. 1085–1091.
- [LR99b] ———, « Classes de conjugaison des flots du plan topologiquement équivalents au flot de Reeb », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **328** (1999), no. 1, p. 45–50.
- [LR00] ———, « Migration des points errants d'un homéomorphisme de surface », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), no. 3, p. 225–230.
- [LR01] ———, « Étude topologique de l'espace des homéomorphismes de Brouwer, II », *Topology* **40** (2001), p. 1089–1121.
- [LR03] ———, « Invariants combinatoires des homéomorphismes de surfaces (I), structure des homéomorphismes de Brouwer », Prépublication Orsay, 2003.
- [Mat01] S. MATSUMOTO – « Types of fixed points of index one of surface homeomorphisms », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **21** (2001), no. 4, p. 1181–1211.
- [Mil99] J. MILNOR – *Dynamics in one complex variable*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999, Introductory lectures.
- [Nak95a] H. NAKAYAMA – « A non-flowable plane homeomorphism whose non-Hausdorff set consists of two disjoint lines », *Houston J. Math.* **21** (1995), no. 3, p. 569–572.
- [Nak95b] ———, « On dimensions of non-Hausdorff sets for plane homeomorphisms », *J. Math. Soc. Japan* **47** (1995), no. 4, p. 789–793.
- [Nik74] N.A. NIKISHIN – « Fixed points of diffeomorphisms of two-dimensional spheres preserving an oriented plane », *Funktsional Anal. i Prilozhen* **8** (1974), p. 84–85.
- [OU41] J.C. OXToby & S.M. ULAM – « Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity. », *Ann. of Math.* **II. Ser.** **42** (1941), p. 874–920.
- [PS87] S. PELIKAN & E.E. SLAMINKA – « A bound for the fixed point index of area-preserving homeomorphisms of two-manifolds », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **7** (1987), p. 463–479.
- [Sau01] A. SAUZET – *Applications des décompositions libres à l'étude des homéomorphismes de surface*, Thèse, Université Paris Nord, 2001.
- [Sch75] B.V. SCHMITT – « Sur les plongements, admettant zero ou un point fixe, du disque dans le plan », *Topology* **14** (1975), p. 357–365.
- [Sim74] C.P. SIMON – « A bound for the fixed-point index of an area-preserving map with applications to mechanics », *Invent. Math.* **26** (1974), p. 187–200.

- [Sla88a] E.E. SLAMINKA – « Area preserving homeomorphisms of two manifolds », in *Hamiltonian dynamical systems (Boulder, CO, 1987)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, p. 153–167.
- [Sla88b] ———, « A Brouwer translation theorem for free homeomorphisms », *Trans. Amer. Math. Soc.* **306** (1988), no. 1, p. 277–291.
- [Sla93] ———, « Removing index 0 fixed points for area preserving maps of two manifolds », *Trans. Amer. Math. Soc.* **340** (1993), no. 1, p. 429–445.
- [Spa66] E.H. SPANIER – *Algebraic topology*, Springer-Verlag, 1966.
- [Whi33] H. WHITNEY – « Regular families of curves », *Ann. of Math. II ser.* **34** (1933), p. 244–270.

INDEX

- $A^+(B)$, 68
- $A^-(B)$, 68
- \mathbb{A} , 78
- $\tilde{\mathbb{A}}$, 78
- $\text{Comm}(\tau)$, 79
- $D(\Delta_0, \Delta_1)$, 44, 74
- $\Delta(B)$, 70
- $\text{Fixe}(h)$, 29
- $\text{IP}(h, \Delta_0, \Delta_1)$, 47
- $\text{Indice}(H, \tau)$, 79
- $\text{Int}(E)$, $\text{Adh}(E)$, ∂E , 5
- \mathcal{V}_1 , 84
- anneau pré-décomposé, 60
- arc, 33
- arc de translation, 100
- arc libre, 50, 80
- arc libre et domaine de Brouwer, 71
- attracteur, 29
- attracteur strict, 29
- bande topologique, 74
- branche stable, 9, 104
- brique, 57
- brique adjacente, 57
- brique attracteur, 68
- brique droite de Brouwer, 70
- brique incompatibilité, 84
- brique type dynamique, 83
- brique type topologique, 83
- cercle topologique, 33
- chaîne de disques ouverts, 38
- chaîne de pseudo-disques, 38
- chaîne entre deux droites de Brouwer, 53, 78
- chaîne et indice partiel, 77, 108
- chaîne périodique, 38
- courbe, 33
- courbe d'indice 1, 35
- croissant, 30, 74
- croissant à dynamique \tilde{N} - \tilde{S} , 75
- croissant à dynamique Nord-Sud, 30
- croissant bouts, 75
- croissant minimal, 76
- décomposition, 55
- décomposition arête, 57
- décomposition construction, 59
- disque attractif, 35, 66, 70, 96
- disque topologique, 29
- disque topologique fermé, 7
- domaine de Brouwer, 42
- domaine fondamental, 42
- droite de Brouwer, 41
- droite de Brouwer attractive, 44
- droite de Brouwer couple, 44
- droite de Brouwer type dynamique, 83
- droite de Brouwer type topologique, 83
- droite topologique, 40
- droite topologique extrémités, 83
- droites topologiques qui se touchent, 52, 108
- droites topologiques qui se traversent, 52, 93
- espace d'homéomorphismes, 34, 47, 80
- extension théorème d', 25
- germe, 5
- homéomorphisme de Brouwer, 43
- homéomorphisme local, 5
- hypothèse (H1), 43
- hypothèse (H2), 29
- indice, 14, 33
- indice dans $\tilde{\mathbb{A}}$, 79
- indice partiel, 43, 107
- Lefschetz formule de, 34
- lemme de Franks, 39

- lemme de Franks pour l'indice partiel, 53
- libre, 36
- modification libre, 21, 36, 39, 54
- orbite périodique, 36
- pétale, 7, 30, 74
- pétale régulier, 7
- plein, 9
- plongement, 40
- pseudo-disque, 38
- relation de Chasles, 49
- relation de Chasles généralisée, 52, 93, 108
- relevé, 79
- relevé canonique, 80
- séparer, 40, 52
- Schoenflies-Homma théorème de, 31, 44, 46, 49, 92, 96, 111
- simplicial, 75
- singulier couple, 101
- singulier ensemble, 17
- sous-croissant, 75
- sous-variété simpliciale, 84
- support, 21
- transition points de, 39
- transition temps de, 39
- translation, 42
- translation plane énoncé, 43
- translation plane preuve, 71
- triadique, 56