

Astérisque

Autour de l'analyse microlocale - Volume en l'honneur de Jean-Michel Bony - Pages préliminaires

Astérisque, tome 284 (2003), p. I-XIV

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2003__284__R1_0>

© Société mathématique de France, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ASTÉRIQUE 284

**AUTOUR DE L'ANALYSE
MICROLOCALE**

VOLUME EN L'HONNEUR DE JEAN-MICHEL BONY

édité par
Gilles Lebeau

G. Lebeau

UMR 6621 du CNRS, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice,
Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France.

E-mail : Gilles.Lebeau@math.unice.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 17B15, 30C35, 30D05, 31C10, 35A, 35A07, 35A27, 32C38, 35D10, 35H, 35L25, 35L40, 35L55, 35L70, 35N, 35P05, 37F99, 37J40, 37K05, 47J20, 58J52.

Mots clefs. — Équation d'ondes quasi-linéaire, inégalité d'énergie, décroissance, explosion, optique géométrique, inégalité de Poincaré, calcul paradifférentiel, norme à poids, estimation bilinéaire, analyse microlocale, calcul pseudodifférentiel de Weyl-Hörmander, faisceaux, micro-support, $\mathcal{D}$ -modules, ind-objets, groupe de Lie, paire symétrique, régularité, Bohr, Sommerfeld, valeur propre, tore, équation de Cauchy-Riemann, inégalité de Sobolev logarithmique, opérateurs de Hörmander, hypoellipticité, vitesse de groupe, polynôme hyperbolique, opérateur hyperbolique, variété caractéristique, réflexion de Schwarz, transformations conformes, paires d'arcs analytiques.

AUTOUR DE L'ANALYSE MICROLOCALE
VOLUME EN L'HONNEUR DE JEAN-MICHEL BONY

édité par Gilles Lebeau

Résumé. — À l'occasion du soixantième anniversaire de Jean-Michel Bony, ses élèves, collaborateurs et amis ont tenu à lui dédier ce volume de la collection *Astérisque*. Il contient des articles de recherche en Analyse Microlocale linéaire, non-linéaire, algébrique..., illustrant la vivacité de ce domaine des mathématiques auquel J.-M. Bony a tant contribué.

Abstract (Around microlocal analysis. Volume in honor of Jean-Michel Bony)

On the occasion of the sixtieth birthday of Jean-Michel Bony, his former students, collaborators and friends dedicate to him this *Astérisque* volume. It contains research articles on the linear, non-linear and algebraic microlocal analysis..., illustrating the vividness of this field of mathematics to which J.-M. Bony contributed so much.

TABLE DES MATIÈRES

Résumés des articles	ix
Abstracts	xi
Préface	xiii
 S. ALINHAC — <i>An Example of Blowup at Infinity for a Quasilinear Wave Equation</i>	1
Introduction	2
I. Main result and ideas of the proof	2
II. Large time existence, induction hypothesis and first consequences	9
III. Improved L^∞ estimates on u	17
IV. A calculus of modified Klainerman's vector fields	36
V. Weighted L^2 norms, Poincaré Lemma and Energy Inequalities	58
VI. Commutations with the operator P	64
VII. L^2 estimates of u and a	75
References	91
 H. BAHOURI & J.-Y. CHEMIN — <i>Microlocal analysis, bilinear estimates and cubic quasilinear wave equation</i>	93
Introduction	93
1. Method of the proof and structure of the paper	96
2. Littlewood-Paley theory and Parilinearization of the equation	102
3. Reduction to microlocalized estimates	106
4. Approximation of the solution and geometrical optics	118
5. The concept of microlocalized functions	127
6. The propagation theorem	132
7. The conclusion of the proof	136
References	139

M. KASHIWARA & P. SCHAPIRA — <i>Microlocal study of ind-sheaves I: micro-support and regularity</i>	143
1. Introduction	143
2. Notations and review	145
3. Complements of homological algebra	150
4. Micro-support and regularity	152
5. Invariance by contact transformations	159
6. Ind-sheaves and $\mathcal{D}$ -modules	161
7. An example	162
References	164
Y. LAURENT — <i>Regularity of $\mathcal{D}$-modules associated to a symmetric pair</i>	165
Introduction	165
1. Bifiltrations of $\mathcal{D}$ -modules	166
2. Symmetric pairs	174
References	179
A. MELIN & J. SJÖSTRAND — <i>Bohr-Sommerfeld quantization condition for non-selfadjoint operators in dimension 2</i>	181
0. Introduction	181
Contents of the paper	185
1. Construction of complex Lagrangian torii in $p^{-1}(0)$ in dimension 2	185
Appendix A : Reduction of elliptic vector fields on a torus	195
Appendix B : 2-dimensional manifolds with elliptic vector fields	197
2. Review of Fourier integral operators between H_Φ spaces	201
3. Formulation of the problem in H_Φ and reduction to a neighborhood of $\xi = 0$ in $T^*\Gamma_0$	203
4. Spectrum of elliptic first order differential operators on Γ_0	208
5. Grushin problem near $\xi = 0$ in $T^*\Gamma_0$	210
6. The main result	214
Appendix A : Remark on multiplicities	226
Appendix B : Modified $\bar{\partial}$ -equation for $(I_1(z), I_2(z))$	228
7. Saddle point resonances	230
References	243
Y. MORIMOTO & C.-J. XU — <i>Logarithmic Sobolev inequality and semi-linear Dirichlet problems for infinitely degenerate elliptic operators</i>	245
1. Introduction	245
2. Logarithmic Sobolev inequality	247
3. Variational problems	251
4. Boundedness and regularity of weak solutions	254
5. Appendix : Logarithmic regularity estimate	259
References	263

J. RAUCH — <i>Group velocity at smooth points of hyperbolic characteristic varieties</i>	265
References	269
J.-M. TRÉPREAU — <i>Discrimination analytique des difféomorphismes résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$ et réflexion de Schwarz</i>	271
Introduction	271
1. Paires d'arcs analytiques et réflexions	276
2. Classification des paires de type 2	281
3. Perturbations d'une paire de cercles tangents	285
4. Invariants géométriques d'une paire	291
5. Des exemples, avec une ellipse et une droite	302
Appendice: complément au Chapitre 2	311
Références	318

RÉSUMÉS DES ARTICLES

<i>An Example of Blowup at Infinity for a Quasilinear Wave Equation</i> SERGE ALINHAC	1
--	---

Nous considérons un exemple d'équation d'ondes quasi-linéaire qui se situe entre les exemples vraiment non-linéaires (pour lesquels l'explosion en temps fini est connue) et les exemples vérifiant la condition nulle (pour lesquels la solution existe globalement et est asymptotiquement libre). Nous montrons l'existence globale, bien que des arguments d'optique géométrique non-linéaire indiquent un comportement non libre de la solution à l'infini. La méthode de la preuve fait intervenir la commutation avec des champs dépendant de u , et utilise des idées proches de celles du calcul paradifférentiel.

<i>Microlocal analysis, bilinear estimates and cubic quasilinear wave equation</i> HAJER BAHOURI & JEAN-YVES CHEMIN	93
--	----

Dans cet article, nous étudions l'existence et l'unicité locale de solutions pour une équation d'onde quasilinear cubique. Les classiques estimations de Strichartz ne sont pas adaptées dans ce cas. Nous démontrons des estimations bilinéaires pour des solutions d'équations d'ondes à coefficients variables. Les deux outils principaux sont le calcul paradifférentiel de Bony et la microlocalisation au sens du calcul pseudodifférentiel de Weyl-Hörmander.

<i>Microlocal study of ind-sheaves I : micro-support and regularity</i> MASAKI KASHIWARA & PIERRE SCHAPIRA	143
---	-----

Nous introduisons les notions de micro-support et régularité pour les ind-faisceaux et prouvons leur invariance par transformations de contact quantifiées. Nous appliquons ces résultats aux ind-faisceaux des solutions holomorphes tempérées des $\mathcal{D}$ -modules. Nous prouvons que le micro-support d'un tel ind-faisceau est la variété caractéristique du $\mathcal{D}$ -module correspondant et que le ind-faisceau est régulier si le $\mathcal{D}$ -module est holonome régulier. Nous calculons enfin un exemple du ind-faisceau des solutions tempérées d'un $\mathcal{D}$ -module irrégulier en dimension un.

Regularity of $\mathcal{D}$ -modules associated to a symmetric pair

YVES LAURENT 165

Sur une algèbre de Lie réductive, les distributions invariantes qui sont vecteurs propres des opérateurs différentiels bi-invariants sont les solutions d'un système holonome. Il a été démontré par Kashiwara-Hotta que ce module est régulier. Nous résolvons ici une conjecture de Sekiguchi en montrant que ce résultat est encore vrai dans le cas plus général des paires symétriques.

Bohr-Sommerfeld quantization condition for non-selfadjoint operators in dimension 2

ANDERS MELIN & JOHANNES SJÖSTRAND 181

Pour une classe d'opérateurs h -pseudodifférentiels non-autoadjoints, nous déterminons toutes les valeurs propres dans un domaine complexe indépendant de h et nous montrons que ces valeurs propres sont données par une condition de quantification de Bohr-Sommerfeld. Aucune condition d'intégrabilité complète est supposée, et une étape géométrique de la démonstration est donnée par un théorème du type KAM dans le complexe (sans petits dénominateurs).

Logarithmic Sobolev inequality and semi-linear Dirichlet problems for infinitely degenerate elliptic operators

YOSHINORI MORIMOTO & CHAO-JIANG XU 245

Soit $X = (X_1, \dots, X_m)$ un système de champs de vecteurs infiniment dégénérés. On montre d'abord l'inégalité de Sobolev logarithmique pour ce système de champs de vecteurs sur les espaces de fonctions associés, puis on étudie le problème de Dirichlet semi-linéaire pour des opérateurs somme de carrés de champs de vecteurs X .

Group velocity at smooth points of hyperbolic characteristic varieties

JEFFREY RAUCH 265

En un point lisse d'une variété caractéristique définie par un polynôme homogène hyperbolique, le plan tangent détermine la vitesse de groupe. Dans cet article, on en déduit un algorithme algébrique de calcul de ce plan tangent en un point donné. Il n'est intéressant que là où la différentielle du polynôme s'annule.

Discrimination analytique des difféomorphismes résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$ et réflexion de Schwarz

JEAN-MARIE TRÉPREAU 271

Nous montrons que des arguments géométriques très simples, basés sur la réflexion de Schwarz, permettent souvent de décider si deux paires d'arcs analytiques tangents en $0 \in \mathbb{C}$ sont analytiquement équivalentes au voisinage de 0. Nous en déduisons la construction de familles nombreuses de germes, formellement mais non analytiquement conjugués, de difféomorphismes analytiques résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$.

ABSTRACTS

<i>An Example of Blowup at Infinity for a Quasilinear Wave Equation</i> SERGE ALINHAC	1
--	---

We consider an example of a Quasilinear Wave Equation which lies between the genuinely nonlinear examples (for which finite time blowup is known) and the null condition examples (for which global existence and free asymptotic behavior is known). We show global existence, though geometrical optics techniques show that the solution does not behave like a free solution at infinity. The method of proof involves commuting with fields depending on u , and uses ideas close to that of the paradifferential calculus.

<i>Microlocal analysis, bilinear estimates and cubic quasilinear wave equation</i> HAJER BAHOURI & JEAN-YVES CHEMIN	93
--	----

In this paper, we study the local wellposedness of a cubic quasilinear wave equation. The Strichartz estimate used for the solutions of linear variable coefficients wave equations are not relevant here. We prove bilinear estimates for solutions of linear wave equations with variable coefficients. The main tools are Bony's paradifferential calculus and the microlocalization in the sense of Weyl-Hörmander calculus.

<i>Microlocal study of ind-sheaves I : micro-support and regularity</i> MASAKI KASHIWARA & PIERRE SCHAPIRA	143
---	-----

We introduce the notions of micro-support and regularity for ind-sheaves, and prove their invariance by quantized contact transformations. We apply these results to the ind-sheaves of temperate holomorphic solutions of $\mathcal{D}$ -modules. We prove that the micro-support of such an ind-sheaf is the characteristic variety of the corresponding $\mathcal{D}$ -module and that the ind-sheaf is regular if the $\mathcal{D}$ -module is regular holonomic. We finally calculate an example of the ind-sheaf of temperate solutions of an irregular $\mathcal{D}$ -module in dimension one.

Regularity of $\mathcal{D}$ -modules associated to a symmetric pair

YVES LAURENT 165

The invariant eigendistributions on a reductive Lie algebra are solutions of a holonomic $\mathcal{D}$ -module which has been proved to be regular by Kashiwara-Hotta. We solve here a conjecture of Sekiguchi saying that in the more general case of symmetric pairs, the corresponding module is still regular.

Bohr-Sommerfeld quantization condition for non-selfadjoint operators in dimension 2

ANDERS MELIN & JOHANNES SJÖSTRAND 181

For a class of non-selfadjoint h -pseudodifferential operators in dimension 2, we determine all eigenvalues in an h -independent domain in the complex plane and show that they are given by a Bohr-Sommerfeld quantization condition. No complete integrability is assumed, and as a geometrical step in our proof, we get a KAM-type theorem (without small divisors) in the complex domain.

Logarithmic Sobolev inequality and semi-linear Dirichlet problems for infinitely degenerate elliptic operators

YOSHINORI MORIMOTO & CHAO-JIANG XU 245

Let $X = (X_1, \dots, X_m)$ be an infinitely degenerate system of vector fields, we prove firstly the logarithmic Sobolev inequality for this system on the associated Sobolev function spaces. Then we study the Dirichlet problem for the semilinear problem of the sum of square of vector fields X .

Group velocity at smooth points of hyperbolic characteristic varieties

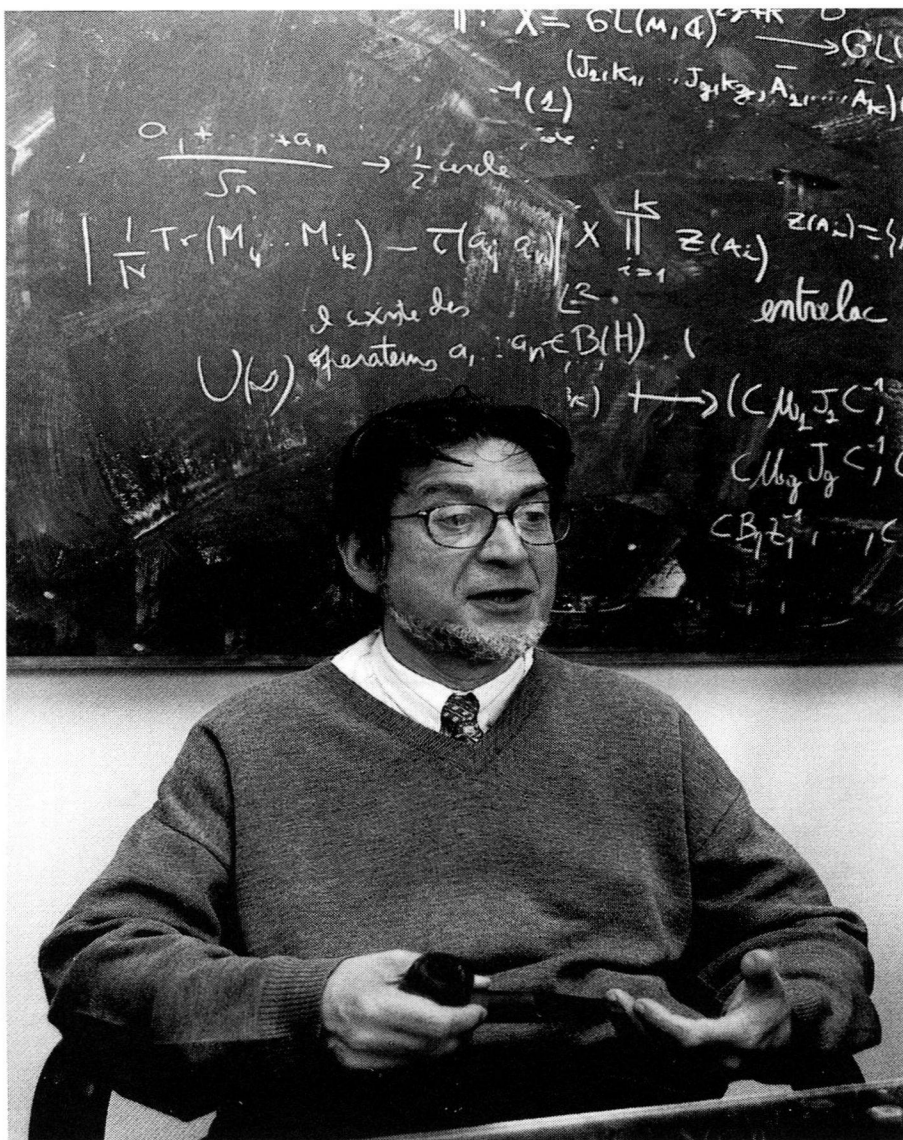
JEFFREY RAUCH 265

At a smooth point of the characteristic variety defined by a homogeneous hyperbolic polynomial, the tangent plane determines the group velocity. In this note an algebraic algorithm is derived for computing this tangent plane at a given point. This is interesting only where the differential of the polynomial vanishes.

Discrimination analytique des difféomorphismes résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$ et réflexion de Schwarz

JEAN-MARIE TRÉPREAU 271

We show that simple geometric arguments, based on the Schwarz reflection, allow in many cases to decide whether two pairs of tangent analytic arcs at $0 \in \mathbb{C}$ are conformally equivalent in a small neighborhood of 0. As an application, we exhibit big families of germs of analytic resonant diffeomorphisms of $(\mathbb{C}, 0)$, which are formally, but not analytically conjugate.



Jean-Michel Bony (mai 2002)

PRÉFACE

L'Analyse Microlocale s'est développée dans le dernier tiers du vingtième siècle à la suite des travaux fondateurs de M. Sato et de son école en Analyse Algébrique. Jean-Michel Bony est un des principaux artisans de l'extraordinaire fécondité de cette « analyse dans l'espace de phase », dont les concepts et méthodes vont tant faire progresser notre compréhension des équations aux dérivées partielles.

À l'occasion de son soixantième anniversaire, ses élèves, collaborateurs et amis ont donc souhaité offrir à Jean-Michel Bony ce recueil d'articles de recherche.

On y trouvera deux articles en Analyse Algébrique, un d'Analyse Complexe, trois en Analyse Microlocale linéaire et deux en Analyse Microlocale non-linéaire. M. Kashiwara et P. Schapira introduisent et développent leur théorie du micro-support des Ind-faisceaux. Y. Laurent prouve une conjecture de Sekiguchi sur la régularité des $\mathcal{D}$ -modules associés à une paire symétrique. J.-M. Trépreau expose une approche géométrique de la classification holomorphe des paires d'arcs tangents. A. Melin et J. Sjöstrand élucident la théorie spectrale des opérateurs non autoadjoints en dimension 2. Y. Morimoto et C.-J. Xu étudient les sommes de carrés de champs de vecteurs infiniment dégénérés. J. Rauch introduit un algorithme de calcul de la vitesse de groupe d'une équation hyperbolique. Enfin, l'article de S. Alinhac sur le comportement asymptotique des équations d'ondes non-linéaires et celui de H. Bahouri et J.-Y. Chemin sur le problème de Cauchy local pour les équations d'ondes quasi-linéaires illustrent l'efficacité des techniques d'analyse microlocale non-linéaire, dont Jean-Michel Bony, en inventant le paraproduit, fut le pionnier.

Gilles Lebeau