Astérisque

Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (II)

Astérisque, tome 279 (2002), p. I-XIV
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2002__279__R1_0>

© Société mathématique de France, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ASTÉRISQUE 279

COHOMOLOGIES p-ADIQUES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (II)

édité par

Pierre Berthelot

Jean-Marc Fontaine

Luc Illusie

Kazuya Kato

Michael Rapoport

Société Mathématique de France 2002
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

P. Berthelot
IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.
E-mail : Pierre.Berthelot@univ-rennes1.fr
Url : http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo/

J.-M. Fontaine
Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : fontaine@math.u-psud.fr

L. Illusie
Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : illusie@math.u-psud.fr

K. Kato
Department of mathematics, faculty of science, Kyoto university, Kyoto, 606-8502, Japon.
E-mail : kazuya@kusm.kyoto-u.ac.jp

M. Rapoport
Universität zu Köln, Mathematisches Institut, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Allemagne.
E-mail : rapoport@math.uni-koeln.de
Url : http://www.mi.uni-koeln.de

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11G10, 11G25, 11S20, 12H25, 13N10 14A99, 14D05, 14D06, 14D10, 14E05, 14E20, 14E22, 14F10, 14F20, 14F30, 14F35 14F40, 14G20, 14G22, 16S32, 32C38.

***Mots clefs*.** — Puissances divisées, opérateur différentiel, $\mathcal{D}$-module, isocristal, sur convergence, complexe parfait, opération cohomologique, cohomologie de de Rham cohomologie cristalline, cohomologie rigide, Frobenius, variété caractéristique, modul holonome, cohomologie étale, réduction semi-stable, site syntomique, coefficients p adiques, cohomologie étale p-adique, géométrie logarithmique, monoïde, log structure log schéma, Kummer, log étale, log lisse, diviseur à croisements normaux, revêtement groupe fondamental, cohomologie de Betti, cohomologie ℓ-adique, modéré, log écla tement, variété torique, acyclicité, cycles proches, cycles évanescents, monodromie poids, régulier, pureté, changement de base, représentation p-adique.

COHOMOLOGIES p-ADIQUES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (II)

édité par Pierre Berthelot, Jean-Marc Fontaine, Luc Illusie, Kazuya Kato, Michael Rapoport

***Résumé.* —** Ce volume est le second d'une série de trois consacrés aux méthodes p-adiques en géométrie arithmétique. Il est centré autour des problèmes de construction des cohomologies p-adiques et des théorèmes de comparaison entre ces cohomologies : géométrie logarithmique, cohomologie cristalline, D-modules arithmétiques, équations différentielles p-adiques, et théorèmes de comparaison de Faltings et Tsuji.

***Abstract* (*p*-adic cohomologies and arithmetic applications (II))**

This volume is the second of three dealing with p-adic methods in arithmetic geometry. It is centered around the construction of p-adic cohomology theories and comparaison theorems between these cohomologies : logarithmic geometry, crystalline cohomology, arithmetic D-modules, p-adic differential equations, and comparison theorems of Faltings and Tsuji.

© Astérisque 279, SMF 2002

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Dans ce texte, qui est un résumé du cours fait au Centre Émile Borel au printemps 1997, nous expliquons comment étendre un certain nombre de résultats classiques de la théorie algébrique des modules sur les anneaux d'opérateurs différentiels, lorsque le schéma de base n'est pas nécessairement de caractéristique 0. Nous montrons en particulier comment se généralisent les résultats basés sur la cohérence, aussi bien dans le cas algébrique que pour les différents complétés que l'on est amené à introduire sur un schéma formel p-adique. Nous donnons enfin quelques résultats et conjectures sur la notion d'holonomie, pour les $\mathcal{D}$-modules munis d'une action de Frobenius.

Ce texte suit le contenu de nos deux cours au Centre Émile Borel de l'I.H.P. durant le semestre p-adique de 1997. Il présente un survol des théories de Fontaine-Laffaille et Fontaine-Messing et (de manière plus détaillée) de leur généralisation par l'un d'entre nous au cas de réduction semi-stable. Il décrit aussi très brièvement un analogue ℓ-adique dû à Nakayama. Nous en profitons pour inclure quelques preuves qui ne se trouvent pas dans la littérature et pour soulever plusieurs questions ouvertes.

Soit $\mathcal{R}$ l'anneau des fonctions analytiques au bord du disque $D(0,1)$ d'un corps p-adique et soit $\mathcal{A}$ le sous-anneau des fonctions analytiques dans le disque tout entier. Le but de ce cours est de montrer que, sous certaines conditions de nature arithmétique portant sur la monodromie p-adique, un $\mathcal{R}$-module libre de type fini à connexion contient un $\mathcal{A}$-réseau sur lequel la connexion a pour seule singularité une singularité méromorphe en 0. Ce résultat est motivé par les propriétés de finitude locales et globales dans la théorie des coefficients p-adiques. Sa démonstration utilise tous les résultats connus de la théorie des équations différentielles p-adiques et fournit donc l'occasion de présenter cette dernière.

La théorie des revêtements presque étales permet la comparaison entre les cohomologies cristalline et étale p-adique des schémas au-dessus d'un anneau de valuation discrète p-adique. Nous donnons une démonstration nouvelle du principal ingrédient technique (théorème de pureté) et étendons ce résultat à toutes les singularités toroïdales. Nous en déduisons une démonstration du théorème de comparaison de Tsuji pour des schémas possédant ce genre de singularités incluant le cas de systèmes locaux appropriés. En chemin, nous sommes amené à établir des résultats de finitude pour la cohomologie cristalline à coefficients dans de tels systèmes locaux.

Ce texte présente les travaux de K. Fujiwara, K. Kato et C. Nakayama sur la cohomologie log étale des log schémas. Après quelques rappels sur le langage des log schémas, nous définissons et étudions une classe de morphismes log étales de log schémas appelés morphismes de Kummer étales (généralisation des morphismes modérément ramifiés de la géométrie algébrique classique), puis la topologie et la cohomologie associées. Les principaux résultats sont des théorèmes de comparaison avec la cohomologie étale classique et la cohomologie de log Betti, un théorème d'invariance de la cohomologie Kummer étale par log éclatements (dont nous donnons une démonstration détaillée), et un théorème de locale acyclicité pour les log schémas log lisses sur un trait, impliquant un théorème de modération pour les cycles proches classiques correspondants. Dans la dernière partie, nous énonçons des résultats de K. Kato sur la cohomologie log étale, où la localisation par les morphismes de Kummer étales est remplacée par la localisation par tous les morphismes log étales.

Nous donnons les grandes lignes de la démonstration de la conjecture semi-stable de J. -M. Fontaine et U. Jannsen par O. Hyodo, K. Kato et l'auteur. Cette conjecture compare les deux cohomologies p-adiques : la cohomologie étale p-adique et la cohomologie de de Rham associées à une variété propre et lisse sur un corps p-adique ayant réduction semi-stable ; elle affirme surtout que ces deux cohomologies avec leurs structures additionnelles peuvent être reconstruites l'une de l'autre. Notre démonstration utilise la cohomologie syntomique, qui a été introduite par J.-M. Fontaine et W. Messing, comme un pont entre les deux cohomologies. Dans l'appendice, nous montrons aussi que la conjecture semi-stable implique la conjecture de de Rham à l'aide de l'altération de de Jong.

ABSTRACTS

Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules
PIERRE BERTHELOT 1

This text is a survey of the course given at the Centre Émile Borel during the spring of 1997. We explain how to extend some classical results of the algebraic theory of modules over rings of differential operators, when the base scheme is not necessarily of characteristic 0. In particular, we show how to generalize the results based on coherence, both in the algebraic case and for various completions which are needed on a p-adic formal scheme. Finally, we give some results and conjectures on the notion of holonomicity, for $\mathcal{D}$-modules endowed with a Frobenius action.

Torsion étale and crystalline cohomologies
CHRISTOPHE BREUIL & WILLIAM MESSING 81

Following our two courses at the Centre Émile Borel of the I.H.P. during the Semestre p-adique of 1997, we present a survey of the Fontaine-Laffaille and Fontaine-Messing theories and (with more details) of their extension by one of us to the semi-stable setting. We also very quickly discuss some ℓ-adic analogues of Nakayama. We take advantage to include a few proofs which are not in the literature and raise several remaining open questions.

Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes
GILLES CHRISTOL & ZOGHMAN MEBKHOUT 125

Let $\mathcal{R}$ be the ring of functions that are analytic at the edge of the disk $D(0,1)$ in some p-adic field and let $\mathcal{A}$ be the subring of those functions that are analytic in the entire disk. The aim of this paper is to prove, under some mild conditions over the p-adic monodromy, that an $\mathcal{R}$-module free of finite rank with connection contains an $\mathcal{A}$-lattice over which the connection has for unic singularity a meromorphic one in 0. This result is basic for local and global finitness properties in the theory of p-adic coefficients. Its proof uses all known results about p-adic differential equations giving the opportunity to present their theory.

The theory of almost étale coverings allows to compare crystalline and p-adic étale cohomology, for schemes over a p-adic discrete valuation ring. Using Frobenius the main technical result (a purity theorem) is reproved and extended to all toroidal singularities. As a consequence one obtains Tsuji's comparison theorem for schemes with such type of singularities, even for cohomology with coefficients in suitable local systems. On the way we have to establish some basic results on finiteness of crystalline cohomology with such coefficients.

This paper is a report on the work of K. Fujiwara, K. Kato and C. Nakayama on log étale cohomology of log schemes. After recalling basic terminology and facts on log schemes we define and study a class of log étale morphisms of log schemes, called Kummer étale morphisms, which generalize the tamely ramified morphisms of classical algebraic geometry. We discuss the associated topology and cohomology. The main results are comparison theorems with classical étale cohomology and log Betti cohomology, a theorem of invariance of Kummer étale cohomology under log blow-ups (for which we provide a complete proof) and a local acyclicity theorem for log smooth log schemes over the spectrum of a henselian discrete valuation ring, which implies tameness for the corresponding classical nearby cycles. In the last section we state results of K. Kato on log étale cohomology, where localization by Kummer étale morphisms is replaced by localization by all log étale morphisms.

We give an outline of the proof of the semi-stable conjecture of J.-M. Fontaine and U. Jannsen by O. Hyodo, K. Kato and the author. This conjecture compares the two p-adic cohomologies : p-adic étale cohomology and de Rham cohomology associated to a proper smooth variety over a p-adic field with semi-stable reduction; it especially asserts that these two cohomologies with their additional structures can be reconstructed from each other. Our proof uses syntomic cohomology, which was introduced by J.-M. Fontaine and W. Messing, as a bridge between the two cohomologies. In the appendix, we also show that the semi-stable conjecture implies the de Rham conjecture thanks to the alteration of de Jong.

INTRODUCTION

Un semestre spécial, consacré aux cohomologies p-adiques et à leurs applications arithmétiques, a eu lieu, du 17 février au 11 juillet 1997, dans le cadre du centre Émile Borel, situé à Paris dans les locaux de l'institut Henri Poincaré.

Les principaux thèmes abordés ont été :

- les théorèmes de comparaison entre différentes cohomologies p-adiques des variétés algébriques sur les corps locaux, les représentations p-adiques du groupe de Galois absolu d'un tel corps,
- les groupes p-divisibles et la théorie de Dieudonné cristalline, la cohomologie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, les équations différentielles p-adiques,
- l'uniformisation p-adique, l'étude des espaces symétriques p-adiques, des courbes hyperboliques p-adiques, de la cohomologie des variétés de Shimura,
- la géométrie et la cohomologie logarithmiques,
- les fonctions L p-adiques, leurs relations avec les systèmes d'Euler, en particulier dans le cas des formes modulaires.

Les activités structurées ont consisté en

a) Douze cours :

- P. Berthelot (Rennes) : *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques*,
- C. Breuil (CNRS, Orsay) : *Cohomologie log cristalline et cohomologie étale de torsion* (Cours Peccot du Collège de France),
- G. Christol (Paris VI) : *Equations différentielles p-adiques*,
- G. Faltings (MPI, Bonn) : *Almost étale extensions*,
- J.-M. Fontaine (Orsay) : *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques*,
- L. Illusie (Orsay) et A. Ogus (Berkeley) : *Géométrie logarithmique*,
- K. Kato (Tokyo) : *Euler systems and p-adic L-functions*,
- W. Messing (Minneapolis) : *Topologie et cohomologie syntomiques et log syntomiques*,

– S. Mochizuki (RIMS, Kyoto) : *The Ordinary and Generalized Ordinary Moduli of Hyperbolic Curves*,
– M. Rapoport (Cologne) : *Aspects p-adiques des variétés de Shimura*,
– P. Schneider (Münster) : *Analysis on p-adic symmetric spaces*,
– T. Zink (Bielefeld) : *Cartier theory and its connection to crystalline Dieudonné theory.*

b) Un séminaire avec un ou deux exposés chaque semaine.

c) Deux colloques :
– *Problèmes de coefficients en cohomologie cristalline et en cohomologie rigide*, du 28 au 30 avril,
– *Arithmétique des fonctions L et méthodes p-adiques*, du 30 juin au 4 juillet.

d) Un groupe de travail sur *le théorème de comparaison de Tsuji*, du 20 au 29 mai.

Les organisateurs ont demandé à tous ceux qui avaient fait un cours de le rédiger ou de nous faire parvenir un texte sur un sujet voisin. Nous avons également invité Takeshi Tsuji à écrire un résumé de sa démonstration, maintenant publiée[1], de la *conjecture* C_{st}.

Nous tenons à remercier les auteurs non seulement pour leur contribution mais aussi pour leur patience ; nous espérons qu'ils voudront bien nous excuser du retard avec lequel ces volumes paraissent.

Les articles ont été examinés par des rapporteurs que nous remercions pour leur aide aussi désintéressée qu'utile.

Enfin, nous pensons que tous ceux qui ont participé à ce semestre seront d'accord avec nous pour saluer l'atmosphère agréable dans laquelle il s'est déroulé. Nous remercions chaleureusement Joseph Oesterlé, alors directeur du Centre Émile Borel, son équipe et tout le personnel de l'Institut Henri Poincaré pour leur gentillesse, leur compétence, leur efficacité et leur dévouement. Ils se joindront sûrement à nous pour accorder une mention spéciale à Madame Nocton, notre bibliothécaire — tous les mathématiciens qui ont travaillé à Paris la connaissent et savent combien son rôle a été précieux ; et une autre à notre secrétaire — Florence Damay — qui a quitté le Centre Émile Borel juste à la fin de notre semestre ; elle en fut la cheville ouvrière mais aussi le sourire, avec une formidable aptitude à comprendre et résoudre les problèmes extra-mathématiques rencontrés par les très nombreux participants.

Les éditeurs

[1] *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **137** (1999), 233–411