Astérisque

GILLES CHRISTOL
ZOGHMAN MEBKHOUT

Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes

Astérisque, tome 279 (2002), p. 125-183
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2002__279__125_0>

Astérisque
279, 2002, p. 125–183

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES ET COEFFICIENTS p-ADIQUES SUR LES COURBES

par

Gilles Christol & Zoghman Mebkhout

Résumé. — Soit $\mathcal{R}$ l'anneau des fonctions analytiques au bord du disque $D(0,1)$ d'un corps p-adique et soit $\mathcal{A}$ le sous-anneau des fonctions analytiques dans le disque tout entier. Le but de ce cours est de montrer que, sous certaines conditions de nature arithmétique portant sur la monodromie p-adique, un $\mathcal{R}$-module libre de type fini à connexion contient un $\mathcal{A}$-réseau sur lequel la connexion a pour seule singularité une singularité méromorphe en 0. Ce résultat est motivé par les propriétés de finitude locales et globales dans la théorie des coefficients p-adiques. Sa démonstration utilise tous les résultats connus de la théorie des équations différentielles p-adiques et fournit donc l'occasion de présenter cette dernière.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 12H25, 14F30.
Mots clefs. — Coefficients p-adiques.

1. Introduction

Dans ce cours, nous avons cherché à donner le maximum d'indications dans le minimum de pages. En particulier, les démonstrations ne sont la plupart du temps qu'esquissées. Pour des démonstrations complètes, nous renvoyons le lecteur aux articles originaux où il trouvera en outre des énoncés plus généraux et des compléments.

La table des matières donne une idée assez précise du contenu. Nous voulons toutefois insister sur les résultats les plus importants.

Soit $p > 0$ un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques et K un corps complet à valuation discrète qui contient $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{R}$ l'anneau des séries de Laurent en la variable x, à coefficients dans le corps K, qui convergent dans une couronne $1 - \epsilon < |x| < 1$, pour $\epsilon > 0$ non précisé, et soit $\mathcal{A}$ le sous-anneau des fonctions analytiques dans le disque unité.

On dira $\mathcal{R}$-module différentiel pour $\mathcal{R}$-module libre de type fini à connexion.

Au chapitre II, on étudie la structure des $\mathcal{R}$-modules différentiels solubles c'est-à-dire dont la fonction rayon de convergence $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ tend vers 1 avec ρ (définition 8.7). Les démonstrations complètes sont dans [**13**].

Pour un tel module différentiel $\mathcal{M}$, on peut définir la « partie modérée » $\mathcal{M}^{\leqslant 0}$: c'est le plus grand quotient de $\mathcal{M}$ qui est « de pente nulle » (théorème 9.10 et définition 9.16). Plus précisément, on construit sur $\mathcal{M}$ une filtration décroissante $\mathcal{M}_{>\gamma}$, « la filtration selon les pentes p-adiques », indexée par les nombres réels positifs γ et liée au rayon de convergence des solutions du module différentiel dans les disques génériques et $\mathcal{M}^{\leqslant 0} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{>0}$.

À partir de la filtration selon les pentes p-adiques, on construit un polygone de Newton $\mathrm{New}(\mathcal{M})$ que nous appellerons *polygone de Newton p-adique* de $\mathcal{M}$. Les sommets de ce polygone sont à coordonnées entières, en particulier sa hauteur, notée $\mathrm{Irr}(\mathcal{M}, p)$, est un entier ce qui constitue l'analogue de la propriété de Hasse-Arf

de la théorie ℓ-adique. Ceci est prouvé à la fin du chapitre IV comme conséquence des théorèmes d'indice pour les modules différentiels solubles de pentes strictement positives.

Dans le chapitre III, on étudie les modules différentiels de pente nulle. Les démonstrations originales complètes sont dans [**12**]. À un tel module différentiel $\mathcal{M}$ de rang μ, on associe un « exposant » $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$: c'est une classe d'équivalence de $\mathbb{Z}_p^\mu$ modulo une certaine relation d'équivalence $\overset{\mathfrak{e}}{\sim}$.

On dit qu'un élément de $\mathbb{Z}_p^\mu/\overset{\mathfrak{e}}{\sim}$ a la propriété DNL si les différences des composantes de l'un de ses représentants ne sont pas des nombres de Liouville p-adiques. Sous cette hypothèse, ces composantes sont des éléments de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ bien définis à l'ordre près. On dit qu'un élément de $\mathbb{Z}_p^\mu/\overset{\mathfrak{e}}{\sim}$ a la propriété NL s'il a la propriété DNL et si les composantes de l'un (et alors de tous) ses représentants ne sont pas des nombres de Liouville.

Le principal résultat dans ce cas est le « théorème de la monodromie p-adique ». Il dit qu'un module différentiel de pente nulle $\mathcal{M}$ dont l'exposant a la propriété DNL s'obtient par extensions successives à partir de modules différentiels de rang un. Un tel module admet alors une filtration « de monodromie » [**12**]. En particulier un module différentiel de pente nulle qui est muni d'une structure de Frobenius est quasi-unipotent : après ramification en x d'ordre première à p il s'obtient par extensions successives de modules triviaux.

On définit l'exposant $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$ d'un module différentiel soluble $\mathcal{M}$ comme l'exposant de sa partie de pente nulle. On dit que $\mathcal{M}$ a la propriété DNL (resp. NL) si son exposant a cette propriété.

Le résultat central de ce cours est l'existence, dans tout $\mathcal{R}$-module différentiel soluble vérifiant des conditions de type NL, d'un $\mathcal{A}$-réseau sur lequel la connexion est méromorphe.

Théorème 1.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module libre de rang fini μ à connexion soluble, ayant la propriété* DNL *et tel que* $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}_{>0})$ *a la propriété* NL. *Quitte à faire une extension finie du corps de base K, $\mathcal{M}$ admet un réseau sur $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-module libre de rang μ) muni d'une connexion prolongeant celle de $\mathcal{M}$ et n'ayant aucune singularité sauf en* 0 *où elle a une singularité méromorphe.*

La démonstration de ce théorème fait l'objet du chapitre V. La preuve complète se trouve dans [**14**].

Pour montrer l'intérêt du Théorème 1.1 nous présentons maintenant l'une de ses applications principales. Il s'agit d'un Théorème d'algébrisation pour une classe de fibrés p-adiques à connexion.

Soit X/V une courbe connexe et lisse sur l'anneau des entiers V de K de corps résiduel k et soit Z/V un fermé de X/V dont le complémentaire est un ouvert affine $j : U/V \hookrightarrow X/V$. On note $\mathcal{X}^\dagger = (X_k, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ le schéma †-adique de Meredith [**30**] associé à la courbe X/V. Sans réellement nuire à la généralité et pour simplifier, le lecteur pourra supposer que X/V est la droite projective $\mathbb{P}^1_V$ sur V.

Dans ce genre de questions, nous trouvons le point de vue, relativement ancien, des schémas de Meredith mieux adapté que celui des schémas formels. En effet, les objets des catégories que l'on considère sont alors des modules sur des faisceaux d'anneaux pour la topologie de Zariski de la variété en caractéristique $p > 0$. L'avantage est de séparer clairement les questions de fondement des questions de nature p-adique.

Soit $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\dagger/V} := \mathit{Diff}_V(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V})$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/V}$. Posons $\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K} := \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/V} \otimes_V K$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\dagger/K} := \mathcal{D}_{\mathcal{X}^\dagger/V} \otimes_V K$. On considère la catégorie $\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ des $\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}$-modules localement libres de rang fini à connexion. C'est une catégorie de $\mathcal{D}_{\mathcal{U}^\dagger/K}$-modules à gauche.

De même sur U/V nous considérons la catégorie $\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{U/K})$ des $\mathcal{O}_{U/K}$-modules localement libres de rang fini à connexion. C'est une catégorie de $\mathcal{D}_{U/K}$-modules à gauche si l'on note $\mathcal{D}_{X/V} := \mathit{Diff}_V(\mathcal{O}_{X/V})$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini du faisceau structural $\mathcal{O}_{X/V}$ et si on pose $\mathcal{D}_{X/K} := \mathcal{D}_{X/V} \otimes_V K$.

On a alors un foncteur exact

$$\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{U/K}) \longrightarrow \mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$$

qui a $\mathcal{M}$ associe $\mathcal{M}^\dagger := \mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K} \otimes_{\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_{U/K}} \varepsilon^{-1}\mathcal{M}$ où ε est le morphisme naturel d'espaces annelés $(X_k, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger/K}) \to (X, \mathcal{O}_{X/K})$.

On note $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ la sous catégorie pleine de $\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ dont les objets sont solubles au sens de Dwork-Robba c'est-à-dire ont un rayon de convergence maximum au point générique de X. Depuis les travaux de Baldassarri et de Chiarellotto [**2**], on sait que les objets de cette catégorie ne sont autres que ce qu'on appelle le plus souvent isocristaux surconvergents.

Soit $\mathcal{M}^\dagger$ un objet de $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$. Pour simplifier, dans cette introduction, on suppose que les points de Z_k sont rationnels sur k. Pour tout point fermé x de Z_k, il définit un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}^\dagger_x$. Le théorème de continuité du rayon de convergence montre que $\mathcal{M}^\dagger_x$ est soluble. On note $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ la sous-catégorie des modules $\mathcal{M}$ tels que $\mathcal{M}^\dagger_x$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{M}^\dagger_{x>0})$ ont la propriété NL en tout point x de Z_k.

On note $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U/K})$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{MLC}(\mathcal{O}_{U/K})$ des modules dont l'image par le foncteur précédent est dans la catégorie $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$. Par construction on a alors un foncteur exact

$$(\dagger) \ : \ \mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U/K}) \to \mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K}).$$

Théorème 1.2. — *Supposons que la courbe X/V est propre. Alors tout objet $\mathcal{M}^\dagger$ de la catégorie* MLCSNL$(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ *est, après éventuellement une extension finie du corps de base K,* dans l'image essentielle *du foncteur* (†).

De plus les K-espaces de cohomologie de de Rham p-adiques

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{U}^\dagger/K}}(U_k;\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K},\mathcal{M}^\dagger),\quad \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_{\mathcal{U}^\dagger/K}}(U_k;\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K},\mathcal{M}^\dagger)$$

sont de dimension finie *et l'on a la formule d'Euler-Poincaré p-adique*

$$\chi\big(U_k, DR(\mathcal{M}^\dagger)\big) = \mu\,\chi(U_k) - \sum_{x\in Z_k} \mathrm{Irr}_x(\mathcal{M},p).$$

Ce théorème est démontré dans [**14**]. Sa première partie est conséquence du théorème 1.1 et de GAGA. La finitude de la cohomologie et la formule d'Euler-Poincaré sont déjà démontrées, pour les modules différentiels algébriques, dans [**10**] comme conséquence du théorème de semi-continuité et sous l'hypothèse fondamentale de l'existence de l'indice local.

La première partie du théorème 1.2 permet de ramener la situation p-adique à la situation algébrique. C'est l'une des motivations essentielles du théorème 1.1. L'autre motivation est la stabilité de la catégorie des coefficients p-adiques par une immersion *ouverte.*

Le foncteur (†) n'est pas pleinement fidèle dans le cas général. Cependant il le devient dans le cas de pente nulle.

Notons $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ des modules de pente nulle dans les classes résiduelles singulières Z_k. Nous supposons pour simplifier que les points de Z_K sont rationnels sur K. Fixons un sous-groupe G^{NL} de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ de classes de nombres non Liouville, par exemple le groupe (des classes modulo $\mathbb{Z}$) des entiers p-adiques qui sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, et notons $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}, G^{\mathrm{NL}})$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K})$ des modules $\mathcal{M}$ tels que, pour tout x dans Z_k, les composantes de l'exposant de $\mathcal{M}_x$ appartiennent à G^{NL}.

Notons de même $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{U/K})$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{MLCS}(\mathcal{O}_{U/K})$ des modules singuliers réguliers aux points de Z_K au sens algébrique et $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{U/K}, G^{\mathrm{NL}})$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{U/K})$ des modules dont les exposants au sens algébrique appartiennent à G^{NL}.

Le théorème suivant est l'analogue p-adique du théorème d'existence de Riemann.

Théorème 1.3. — *Avec les notations précédentes, si on suppose de plus que Z est V-lisse, on a un foncteur exact*

$$\mathfrak{R}:\ \mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{U/K}, G^{\mathrm{NL}}) \to \mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}, G^{\mathrm{NL}})$$

qui est une équivalence de catégories *abéliennes et les exposants algébriques coïncident avec les exposants p-adiques. De plus, pour tout couple d'objets $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de*

$\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}/K}, G^{\mathrm{NL}})$, *le morphisme de comparaison*

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{U}/K}}(U;\mathcal{N},\mathcal{M}) \to \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathcal{U}^\dagger/K}}(U_k;\mathcal{N}^\dagger,\mathcal{M}^\dagger)$$

est un quasi-isomorphisme de complexes à cohomologie de dimension finie.

L'existence du foncteur $\mathfrak{R}$ dans le théorème précédent est précisément le théorème de transfert pour les singularités régulières [**7**]. L'essentielle surjectivité est une conséquence du théorème de la monodromie p-adique 12.3 dans le cas de pente nulle qui est beaucoup plus profond [**12**].

Le théorème 1.2 montre que la catégorie $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ a les invariants et les propriétés de finitude de la catégorie des faisceaux ℓ-adiques lisses. À ce titre elle doit être considérée comme l'analogue p-adique tant recherché de la catégorie des faisceaux ℓ-adiques lisses et permet tous les espoirs. Le théorème 1.3 montre que la catégorie $\mathrm{Rob}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}^\dagger/K}, G^{\mathrm{NL}})$ est l'analogue p-adique de la catégorie des faisceaux ℓ-adiques lisses modérément ramifiés.

Fixons un morphisme de Frobenius $\mathbf{F}$ sur l'anneau $\mathcal{R}$, par exemple la ramification d'ordre une puissance de p composée avec un morphisme de Frobenius de K. On peut considérer la catégorie $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ des $\mathcal{R}$-modules libres à connexion munis d'une structure de Frobenius : un objet $\mathcal{M}$ de $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ est un $\mathcal{R}$-module libre à connexion muni d'un isomorphisme horizontal $\mathbf{F}^*\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}$. Un tel module est automatiquement soluble. Son exposant $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$ est donc bien défini. On peut montrer que les composantes de cet exposant sont des nombres rationnels. En particulier $\mathcal{M}$ a la propriété NL. De plus, le module des endomorphismes $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ est, lui aussi, muni d'une structure de Frobenius. Par suite le module $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}_{>0})$ a la propriété NL. Autrement dit, $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{R})$. Dans cette situation locale, on peut donc appliquer le théorème 1.1. Dans la situation globale avec Frobenius, on pourra de même appliquer les théorèmes 1.2 et 1.3. Par exemple on déduit du théorème précédent que la fonction L d'un fibré p-adique muni d'une structure de Frobenius sur un corps fini est une fraction rationnelle. Cependant nous ferons remarquer au lecteur que nous ne savons ni définir directement l'exposant de la monodromie ni, encore moins, démontrer les théorèmes de base sans sortir de la catégorie $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$. Le Frobenius ne sert qu'à obtenir la rationalité des exposants après que ceux-ci ait été définis et donc à s'assurer que l'obstruction aux propriétés de finitude n'a pas lieu. Dans la catégorie $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ la connexion est prédominante contrairement à ce qui se passe dans la théorie des représentations p-adiques galoisiennes locales.

Nous profitons de l'occasion pour préciser les rapports entre la catégorie des représentations p-adiques de Fontaine et la catégorie $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$. Pour cela, il est nécessaire d'introduire l'*anneau d'Amice* $\mathcal{E}$ des séries de Laurent $\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j x^j$ à coefficients dans K uniformément bornées et telles que $|a_j| \to 0$ quand j tend vers $-\infty$.

Notons $\mathcal{E}^\dagger$ l'intersection de $\mathcal{R}$ avec $\mathcal{E}$. Comme nous avons supposé la valuation du corps K discrète, les anneaux $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\dagger$ sont des corps à valuation discrète. Le corps $\mathcal{E}$ est complet et le corps $\mathcal{E}^\dagger$ est henselien. Le couple $\mathcal{E}/\mathcal{E}^\dagger$ est une extension de corps différentiels (dans [**6**] cette extension était notée $W(0)/W^0(0)$).

Dans la théorie de Fontaine [**22**], si l'on fixe un morphisme de Frobenius sur $\mathcal{E}$, on associe a toute représentation p-adique du groupe de Galois absolu du corps $k((x))$ un $\mathcal{E}$-module muni d'une structure de Frobenius qui détermine une $\mathcal{E}$-connexion. Si, de plus, l'image du groupe d'inertie est finie on obtient ainsi un $\mathcal{E}^\dagger$-module muni d'une structure de Frobenius et d'une $\mathcal{E}^\dagger$-connexion. Au sens de la théorie de Dieudonné, ce module est purement de pente nulle (unit root dans la terminologie de Dwork). Cette construction est l'analogue local de la construction globale de N. Katz [**27**].

Inversement, étant donné un $\mathcal{E}^\dagger$-module muni d'une structure de Frobenius et d'une connexion compatibles, on lui associe deux polygones de Newton. Le premier est fourni par la structure de Frobenius et ne dépend que de la structure de $\mathcal{E}$-module muni de la structure de Frobenius induite. Le second, le polygone de Newton p-adique, est donné par la connexion et dépend de la structure de $\mathcal{R}$-module à connexion soluble. Ces deux polygones correspondent à des filtrations qui n'ont, a priori, rien à voir l'une avec l'autre. La décomposition selon les pentes p-adiques se fait dans l'anneau $\mathcal{R}$ alors que la décomposition selon les pentes de la structure de Frobenius se fait dans le complété d'une clôture algébrique du corps $\mathcal{E}$. Il n'y a aucun moyen connu de passer de l'une à l'autre. Cela indique que la théorie des représentations galoisiennes locales p-adiques en égales caractéristiques et la théorie des équations différentielles, telles qu'elles nous apparaissent aujourd'hui, sont deux théories parallèles mais dont les champs d'application sont profondément différents.

La situation dans laquelle les deux filtrations sont distinctes n'est d'ailleurs pas du tout exceptionnelle. Dans [**29**], on introduit des « équations exponentielles » pour étudier p-adiquement la fonction zêta des variétés affines non singulières sur un corps fini. Ces équations différentielles ont servi de catalyseur lors de l'étude de la structure des équations différentielles p-adiques. Par leur origine géométrique, elles sont munies d'une structure de Frobenius qui n'est pratiquement jamais de pente nulle au sens de la théorie de Dieudonné. Elles ne proviennent donc pas, en général, d'une représentation p-adique en égales caractéristiques.

Cela montre qu'une théorie des coefficients p-adiques parallèle à la théorie ℓ-adique est de nature différentielle. Il est très encourageant de constater que le théorème 1.2 fournit des objets ayant les propriétés nécessaires pour la construction d'une telle théorie sur les courbes dont le véritable test sera la démonstration p-adique de la pureté des zéros et des pôles de la fonction zêta d'une variété algébrique sur un corps fini. En dimensions supérieures, il reste beaucoup de travail à faire. Même en dimension un, il subsiste des problèmes fort intéressants (voir [**14**]).

CHAPITRE I
FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES

2. Notations générales

Dans tout ce texte, K sera un corps ultramétrique d'inégales caractéristiques *maximalement complet* (par exemple un corps à valuation discrète). L'hypothèse « maximalement complet » sera fondamentale dans les chapitres II, IV et V. Dans [**13**], nous avions fait l'hypothèse plus restrictive « localement compact ». Cette restriction est levée dans [**14**] grâce à l'utilisation de la c-compacité à la place de la compacité.

On notera $|\cdot|$ la valeur absolue sur K, V l'anneau des entiers de K, k son corps des restes et p la caractéristique de k. Remarquons cependant que les résultats de ce cours sont de nature fondamentalement transcendante, le corps résiduel k n'y joue pratiquement aucun rôle.

On note π une solution de l'équation $\pi^{p-1}+p=0$ (le π de Dwork).

Soit I un intervalle contenu dans $[0,\infty]$, on pose

$$\mathcal{A}(I)=\Big\{\sum_{s\in\mathbb{Z}} a_s\,x^s\ ;\ a_s\in K,\ (\forall\rho\in I)\ \lim_{s\to\pm\infty}|a_s|\rho^s=0\Big\}.$$

Lorsque 0 (resp.∞) appartient à I cela signifie que $a_s=0$ pour $s<0$ (resp. $s>0$). Autrement dit, $\mathcal{A}(I)$ est l'ensemble des fonctions analytiques à coefficients dans K qui convergent dans la couronne

$$\mathcal{C}(I)=\big\{|x|\in I\big\}.$$

Plus précisément, nous noterons $\mathcal{C}(I)$ l'espace analytique sur K dont les points à valeur dans un surcorps valué Ω de K sont les nombres x de Ω tels que $|x|$ appartienne à I. C'est un affinoïde si et seulement si l'intervalle I est fermé. Sinon c'est un espace de Stein dont les sections globales du faisceau structural sont les fonctions de $\mathcal{A}(I)$.

On écrira $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{A}([0,1[)$.

Pour $0<\varepsilon<1$, on pose $I_\varepsilon=]1-\varepsilon,1[$ et $\mathcal{R}=\bigcup_{\varepsilon>0}\mathcal{A}(I_\varepsilon)$.
Autrement dit, $\mathcal{R}$ est l'ensemble des fonctions analytiques à coefficients dans K qui convergent dans une couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon)$ où ε dépend de la fonction.

S'il y a risque de confusion et pour préciser le corps K, on notera $\mathcal{A}_K(I)$, $\mathcal{A}_K$ ou $\mathcal{R}_K$ pour $\mathcal{A}(I)$, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{R}$.

3. Modules différentiels

Soit A une K-algèbre commutative (par exemple $\mathcal{A}(I)$ ou $\mathcal{R}$) munie d'une dérivation D (par exemple $D=d/dx$) pour laquelle le corps des constantes est K. On

notera $A[D]$ l'anneau non commutatif des polynômes différentiels à coefficients dans A avec, pour a dans A, la règle $Da = aD + D(a)$.

On posera $\mathcal{D}(I) = \mathcal{A}(I)[D]$ et $\mathcal{D} = \mathcal{R}[D]$.

On notera $\mathrm{MLC}(A)$ la sous catégorie pleine de la catégorie des $A[D]$-modules à gauche dont les objets sont libres de type fini en tant que A-modules. Autrement dit, un objet de $\mathrm{MLC}(A)$ est un A-module *libre de type fini* $\mathcal{M}$ muni d'une action de D vérifiant la relation $D(am) = D(a)m + aD(m)$, pour a dans A et m dans $\mathcal{M}$. Nous dirons que les objets de $\mathrm{MLC}(A)$ sont des *A-modules différentiels*. Le rang d'un A-module différentiel sera son rang en tant que A-module.

Remarque 3.1. — Si I est un intervalle fermé, tout $\mathcal{A}(I)[D]$-module contenu dans un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel est un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel (c'est-à-dire libre de type fini sur $\mathcal{A}(I)$: voir [**5**] § 4 par exemple). En particulier les seuls idéaux de $\mathcal{A}(I)$ stables par D sont 0 et $\mathcal{A}(I)$. Ce n'est plus le cas si l'intervalle I n'est pas fermé comme le montre l'exemple suivant dans lequel $I = [0, 1[$.

Exemple 3.2. — Soit a_n une suite de points de la clôture algébrique $\widehat{K}$ de K telle que $|a_n| < 1$ et $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$. D'après [**28**], il existe une fonction f de $\mathcal{A}$ qui a un zéro d'ordre n en a_n. L'idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ engendré par f et ses dérivées est, par construction, stable par D mais n'est pas égal à $\mathcal{A}$ car, si g appartient à $\mathcal{I}$, alors $g(a_n) = 0$ pour n assez grand.

Soit $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$ (sur A). L'action de D sur $\mathcal{M}$ est *représentée* dans cette base par une matrice G définie par $D(\mathfrak{e}_i) = \sum G_{ij}\mathfrak{e}_j$. Plus généralement, pour $s \geqslant 0$, l'action de l'opérateur D^s est représentée dans la base $\mathfrak{e}$ par une matrice G_s. Ces matrices satisfont la formule de récurrence

$$G_0 = \boldsymbol{I} \qquad G_{s+1} = D(G_s) + G_s G \tag{1}$$

où $\boldsymbol{I}$ désigne la matrice identité.

Maintenant, si m est un élément de $\mathcal{M}$ et si on note $[m]$ le vecteur colonne de ses composantes dans la base $\mathfrak{e}$, on trouve $D(m) = D\big({}^t[m]\big)\,\mathfrak{e} + {}^t[m]\,G\mathfrak{e}$ c'est-à-dire

$$[D(m)] = D([m]) + {}^tG[m] \tag{2}$$

Par ailleurs, à la base $\mathfrak{e}$, correspond la présentation suivante dans la catégorie des $A[D]$-modules :

$$0 \longrightarrow A[D]^\mu \xrightarrow{\bullet(D-G)} A[D]^\mu \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

où $\bullet(D - G)$ est la multiplication à droite par la matrice $D\,\boldsymbol{I} - G$.

Soit N un $A[D]$-module quelconque. La suite exacte courte (3) donne lieu à la suite exacte longue (de K-espaces vectoriels) :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M}, N) \longrightarrow N^\mu \xrightarrow{(D-G)\bullet} N^\mu \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{A[D]}(\mathcal{M}, N) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

où $(D-G)\bullet$ représente l'action à gauche de l'opérateur $D-G$ (l'opérateur D agissant composante par composante). Autrement dit, on a

$$\mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M},N)=\ker(D-G,N^{\mu}) \tag{5}$$

$$\mathrm{Ext}^1_{A[D]}(\mathcal{M},N)=\mathrm{coker}(D-G,N^{\mu}) \tag{6}$$

Remarque 3.3. — Soit B une K-algèbre qui contient A et à laquelle la dérivation D se prolonge et soit N un $B[D]$-module. Une base de $\mathcal{M}$ est aussi une base de $B\otimes_A\mathcal{M}$. On trouve donc que $\mathrm{Ext}^i_{B[D]}(B\otimes_A\mathcal{M},N)=\mathrm{Ext}^i_{A[D]}(\mathcal{M},N)$ pour tout i. En fait ces espaces sont nuls pour $i\geqslant 2$.

Remarque 3.4. — Si le corps des constantes de B est K, on constate que

$$\dim_K\big(\mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M},B)\big)\leqslant \mathrm{rg}_A(\mathcal{M})$$

Lorsque cette inégalité est une égalité, on dit que le A-module différentiel $\mathcal{M}$ est *soluble* dans B.

On dit que $\mathcal{M}$ a un *indice* dans B si $\mathrm{Ext}^1_{A[D]}(\mathcal{M},B)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie. Dans ces conditions, on pose :

$$\chi(\mathcal{M},B)=\dim\big(\mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M},B)\big)-\dim\big(\mathrm{Ext}^1_{A[D]}(\mathcal{M},B)\big)$$

Les relations (5) et (6) montrent que

$$\chi(\mathcal{M},B)=\dim\big(\mathrm{coker}(D-G,B^{\mu})\big)-\dim\big(\ker(D-G,B^{\mu})\big)=\chi(D-G,B^{\mu}).$$

Définition 3.5. — Pour deux A-modules différentiels $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, et pour u dans $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ et m dans $\mathcal{M}$, on pose $D(u)(m)=D(u(m))-u(D(m))$. On munit ainsi le A-module (libre de type fini) $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ d'une structure de $A[D]$-module.

Les applications linéaires u de $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{M},\mathcal{N})$ dont la dérivée $D(u)$ est nulle sont celles qui commutent avec D et donc appartiennent à $\mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Elles sont dites *horizontales.*

Dans la situation précédente, soit $\mathfrak{e}$ (resp. $\mathfrak{f}$) une base de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) et notons G (resp. F) la matrice qui représente la dérivation D dans cette base. Si, dans ces bases, l'application linéaire u est représentée par une matrice H (c'est-à-dire $H\cdot\mathfrak{e}=\mathfrak{f}$), alors $D(u)$ est représentée par la matrice $\nabla(H)$ définie par :

$$\nabla(H)=D(H)-GH+HF. \tag{7}$$

En particulier, l'application linéaire u est horizontale si et seulement si

$$D(H)=GH-HF. \tag{8}$$

4. Rayon de convergence

La grande différence entre la théorie des équations différentielles complexe et la théorie des équations différentielles p-adiques est qu'une solution p-adique ne converge pas jusqu'à la première singularité contrairement à une solution complexe. C'est là un enrichissement considérable du calcul différentiel comme nous le verrons. Il est naturel d'introduire le rayon de convergence des solutions au voisinage d'un point.

Nous profitons de cette occasion pour faire rapidement le lien entre la notion globale de *point analytique* au sens de Berkovich [**1**], c'est-à-dire, dans le cas affine, de semi-norme multiplicative continue, et la notion locale de *point générique* au sens de Dwork [**18**].

4.1. Rayon de convergence et point analytique. — La première définition du rayon de convergence d'un module différentiel est une variante de la notion de norme spectrale.

Définition 4.1. — Soit $\rho > 0$ un nombre réel et soit E_ρ le (corps) complété de $K(x)$ pour la valeur absolue définie sur les polynômes de $K[x]$ par :

$$\Big|\sum_{i=0}^{d} a_i\, x^i\Big|_\rho = \max_{0\leqslant i\leqslant d} |a_i|\,\rho^i$$

On considère un anneau A tel que $K[x] \subset A \subset E_\rho$, muni de la valeur absolue $|\cdot|_\rho$ et de la dérivation $D = d/dx$.

Par exemple, pour ρ dans I, on a $K[x] \subset \mathcal{A}(I) \subset E_\rho$. L'anneau $\mathcal{A}(I)$ est ainsi muni de la valeur absolue $|\cdot|_\rho$. L'espace analytique $\mathcal{C}(I)$ contient donc, pour chaque nombre ρ de I, un *point analytique* (au sens de [**1**]) défini par cette (semi)-norme multiplicative.

Les endomorphismes d'un K-espace vectoriel normé E sont munis de la norme $\|u\| = \max_{x\in E-\{0\}}(\|u(x)\|/\|x\|)$. En particulier, si G est une matrice de $\mathrm{Mat}(\mu, E_\rho)$, on pose

$$\|G\|_\rho = \max_{1\leqslant i,j\leqslant \mu} |G_{ij}|_\rho$$

C'est la norme de G en tant qu'opérateur sur l'espace E_ρ^μ muni de la norme « sup ». C'est donc une norme d'algèbre.

Nous commençons par calculer la norme spectrale de l'opérateur $D = d/dx$ agissant sur A. Comme

$$\Big|\frac{1}{s!}D^s(x^n)\Big|_\rho = \Big|\binom{n}{s}x^{n-s}\Big|_\rho \leqslant \rho^{-s}\,|x^n|_\rho$$

avec égalité pour $n = s$, on trouve

$$\|D\|_{\mathrm{Sp},\rho} := \lim_{s\to\infty} \|D^s\|_\rho^{1/s} = \lim_{s\to\infty} |s!|^{1/s}\rho^{-1} = |\pi|\rho^{-1}$$

(rappelons que π désigne une racine $(p-1)$-ième de $-p$). Autrement dit, le *rayon* ρ du point $|\cdot|_\rho$ est donné par la formule :

$$\rho = |\pi|/\|D\|_{\mathrm{Sp},\rho}. \tag{9}$$

Soit maintenant $\mathcal{M}$ un A-module différentiel. À toute base $\mathfrak{e} = \{\mathfrak{e}_i\}$ de $\mathcal{M}$, on associe la norme sur $\mathcal{M}$ définie par

$$\|\sum a_i \mathfrak{e}_i\|_{\mathfrak{e},\rho} = \max |a_i|_\rho.$$

On peut alors définir la *norme spectrale* de l'opérateur D agissant sur $\mathcal{M}$:

$$\|D\|_{\mathrm{Sp},\mathfrak{e},\rho} = \lim_{s\to\infty} \|D^s\|_{\mathfrak{e},\rho}^{1/s}.$$

Par analogie avec (9), on pose :

$$\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) = |\pi|/\|D\|_{\mathrm{Sp},\mathfrak{e},\rho}$$

et on dit que $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)$ est le *rayon de convergence* du module différentiel $\mathcal{M}$ (au point analytique $|\cdot|_\rho$).

Si $\mathfrak{e}$ est une base de $\mathcal{M}$ et si on note G (resp. G_s) la matrice de l'opérateur D (resp. D^s) dans la base $\mathfrak{e}$. La proposition suivante n'est pas difficile à démontrer.

Proposition 4.2. — *Le nombre* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)$ *est indépendant de la base* $\mathfrak{e}$. *On a :*

$$\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) = \min\left(\rho, \liminf_{s\to\infty} \left\|\frac{1}{s!}G_s\right\|_\rho^{-1/s}\right).$$

4.2. Rayon de convergence et point générique. — Le rayon de convergence d'un module différentiel doit son nom au fait qu'il s'interprète comme le rayon de convergence des solutions de ce module différentiel au voisinage du *point générique.*

On choisit un corps valué Ω qui contient la clôture algébrique $\widehat{K}$ de K, dont le groupe des valeurs absolues est $\mathbb{R}^+$ et dont le corps des restes est transcendant sur celui de $\widehat{K}$. Pour a dans Ω et $r > 0$, on pose $D(a,r) = \{x \in \Omega;\ |x-a| < r\}$. La fonction $\sum_{s=0}^{\infty} a_s(x-a)^s$ est dite *analytique* (resp. *bornée*) dans le disque $D(a,r)$ si $\liminf_{s\to\infty} |a_s|^{-1/s} = r$ (resp. si les $|a_s|$ sont bornés).

Définition 4.3. — Soit $\rho > 0$ un réel. Un *point générique* (au bord du disque $D(0,\rho)$) est un élément t_ρ de Ω tel que $|t_\rho| = \rho$ et dont la distance à $\widehat{K}$ est égale à ρ. Autrement dit, le disque $D(t_\rho,\rho)$ ne contient pas de point de $\widehat{K}$.

À isomorphisme continu de Ω/K près, il n'y a qu'un seul point générique au bord du disque $D(0,\rho)$.

Pour $0 < r < \rho$, on note $\mathcal{A}_\rho(r)$ (resp. $\mathcal{B}_\rho(r)$) l'anneau des fonctions analytiques (resp. bornées) dans le disque $D(t_\rho,r)$.

Par construction, une fraction rationnelle f de $K(x)$ n'a ni pôle ni zéro dans le disque $D(t_\rho,\rho)$ donc $|f|_\rho = |f(t_\rho)| = \max_{x\in D(t_\rho,\rho)} |f(x)|$. Par suite $K(x) \subset \mathcal{B}_\rho(\rho)$ et $E_\rho \subset \mathcal{B}_\rho(\rho) \subset \mathcal{A}_\rho(\rho)$. Donc $\mathcal{A}_\rho(\rho)$ est un $E_\rho[D]$-module (et en particulier un $A[D]$-module).

Pour étudier les solutions dans le disque générique, nous introduisons la *résolvante* du système différentiel $D(X) = GX$. C'est la fonction de deux variables

$$Y_G(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} G_s(y)\frac{(x-y)^s}{s!}. \tag{10}$$

où les matrices G_s sont définies par la récurrence (1) Si on a $|G_s(y)| \leqslant \|G_s\|_\rho$, par exemple parce que y appartient à $D(t_\rho,\rho)$, elle est définie pour $|x-y| < \mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)$. En particulier, lorsque $A = \mathcal{A}(I)$, c'est une fonction analytique sur le domaine

$$\Delta_{\mathcal{M}} = \{(|x|,|y|) \in I^2\,;\ |x-y| < \mathrm{Ray}(\mathcal{M},|x|)\}.$$

Lorsque la fonction Y_G est définie aux points (x,y) et (x,z) elle vérifie les relations

$$\begin{aligned} Y_G(x,y)\,Y_G(y,z) &= Y_G(x,z)\\ Y_G(x,x) &= \boldsymbol{I}\\ \frac{\partial}{\partial x}Y_G(x,y) &= G(x)\,Y_G(x,y)\\ \frac{\partial}{\partial y}Y_G(x,y) &= -Y_G(x,y)\,G(y) \end{aligned}$$

Soit G une matrice de $\mathrm{Mat}(\mu,E_\rho)$. Notons X_{t_ρ} la matrice, analytique au voisinage du point générique t_ρ, telle que $D(X_{t_\rho}) = G\,X_{t_\rho}$ et $X_{t_\rho}(t_\rho) = \boldsymbol{I}$. On a $X_{t_\rho}(x) = Y_G(x,t_\rho)$. Les matrices G_s appartiennent à $\mathrm{Mat}(\mu,E_\rho)$ et, par suite, la matrice X_{t_ρ} appartient à $\mathrm{Gl}\left(\mu,\mathcal{A}_\rho\big(\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)\big)\right)$. Comme les colonnes de la matrice X_{t_ρ} forment une base des solutions analytiques au voisinage de t_ρ de l'équation $(D-G)X = 0$, on en déduit une nouvelle interprétation du rayon de convergence (voir (5)).

Proposition 4.4. — *Le nombre* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)$ *est le plus grand des nombres réels pour lesquels on a*

$$\dim_K\left(\mathrm{Hom}_{A[D]}\left(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\right)\right) = \dim_A(\mathcal{M}).$$

En utilisant cette interprétation du rayon de convergence d'un module différentiel et en remarquant que la primitive d'une fonction analytique au voisinage du point t_ρ a le même rayon de convergence que la fonction, la méthode de variation de la constante permet de démontrer la proposition suivante.

Proposition 4.5. — *Soit* $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathrm{MLC}(A)$. *On a* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) = \min\big(\mathrm{Ray}(\mathcal{N},\rho),\mathrm{Ray}(\mathcal{Q},\rho)\big)$.

5. La théorie de Dwork et Robba

Nous présentons les principaux résultats obtenus par Dwork et Robba concernant la catégorie $\mathrm{MLC}(E_\rho)$. Afin de pouvoir appliquer ces résultats à la catégorie $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I)\big)$, nous travaillons avec un anneau A tel que $K[x] \subset A \subset E_\rho$, mais ceci n'est pas une réelle généralisation.

On note Ω le corps des constantes de l'anneau A.

5.1. Décompositions liées au rayon de convergence. — Le premier résultat remarquable montre qu'un E_ρ-module différentiel dont les solutions au voisinage du point générique n'ont pas toutes le même rayon de convergence n'est pas irréductible.

Pour cela, pour $0 < r \leqslant \rho$, on munit l'anneau $E_\rho[D]$ de la norme

$$\Big|\sum_i a_i(x)D^i\Big|_{\rho,r} := \sup_i |i!\, a_i|_\rho\, r^{-k}.$$

C'est la norme d'opérateur sur l'espace $\mathcal{B}_\rho(r)$ des fonctions analytiques bornées dans le disque $D(t_\rho, r)$.

Soit $\mathcal{M}$ un E_ρ-module différentiel. C'est un quotient de l'anneau $E_\rho[D]$ en vertu du lemme du vecteur cyclique. La topologie quotient sur l'espace $\mathcal{M}$ n'est en général pas séparée. L'adhérence de zéro $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ pour cette topologie est un E_ρ-sous-module différentiel de $\mathcal{M}$ (le fait que E_ρ soit un corps est ici essentiel). Le résultat suivant repose sur le fait que E_ρ est complet.

Théorème 5.1 **([18], [31])**. — *Soit $\mathcal{M}$ un E_ρ-module différentiel. L'injection*

$$\mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\left(\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}), \mathcal{B}_\rho(r)\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\left(\mathcal{M}, \mathcal{B}_\rho(r)\right)$$

est un isomorphisme et $\mathrm{Ray}\left(\mathcal{M}/\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}), \rho\right) \geqslant r$.

De plus, si $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ alors $\mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\left(\mathcal{M}, \mathcal{A}_\rho(r)\right) = 0$.

En général, le module différentiel $\overline{O}_{\rho,r}(\mathcal{M})$ a encore des solutions non nulles dans $\mathcal{B}_\rho(r)$. En itérant le processus, on construit une filtration décroissante dans $\mathcal{M}$ dont les quotients successifs sont entièrement solubles dans $\mathcal{B}_\rho(r)$ et on obtient le résultat suivant.

Corollaire 5.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un E_ρ-module différentiel. Pour $0 < r \leqslant \rho$, il existe un sous-module différentiel $\mathcal{N}_r$ de $\mathcal{M}$ tel que toute application horizontale de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{A}_\rho(r)$ s'annule sur $\mathcal{N}_r$ et tel que*

$$\mathrm{Ray}(\mathcal{M}/\mathcal{N}_r) \geqslant r \text{ et } \dim_{E_\rho}(\mathcal{M}/\mathcal{N}_r) = \dim_K\Big(\mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\left(\mathcal{M}, \mathcal{A}_\rho(r)\right)\Big).$$

Autrement dit cette décomposition sépare les solutions de rayon de convergence $\geqslant r$ de celles des solutions de rayon $< r$.

Exemple 5.3. — Soit a un nombre de $\mathbb{Z}_p$. Monsky a proposé l'opérateur suivant :

$$M_a := p(1-x)\,D^2 - x\,D - a.$$

Un calcul explicite montre que cet opérateur admet une solution dans $\mathcal{E}^\dagger$. C'est en particulier une solution dans $\mathcal{B}_1(1)$. Les autres solutions de l'opérateur M_a au voisinage du point générique t_1 ont un rayon de convergence égal à $|\pi|$.

Cet exemple montre que, même pour un $K(x)$-module différentiel, la décomposition du corollaire 5.2 n'a pas lieu dans $K(x)$.

Notons $E_\rho^\dagger$ le sous-corps de E_ρ formé des éléments analytiques *superadmissibles* c'est-à-dire prolongeables dans une couronne $\mathcal{C}(]\rho-\varepsilon,\rho[)$ pour $\varepsilon>0$ non précisé. L'exemple de Monsky suggère, et Dwork et Robba ont montré, que la décomposition du corollaire 5.2 a toujours lieu dans le corps $E_\rho^\dagger$. Ce second théorème est beaucoup plus difficile à démontrer que le précédent. Ce résultat profond a ouvert une fausse piste dans l'étude de la structure des modules différentiels. En effet, contrairement à ce que pensait, entre autres, Robba (voir [**36**]), la démonstration du théorème 9.10 ci-dessous n'utilise pas le théorème 5.4 mais apparaît plutôt comme une variante « en famille » de celle du théorème 5.2.

Théorème 5.4 **([20])**. — *Si, dans le corollaire 5.2, on part d'un $E_\rho^\dagger$-module différentiel, alors le sous module différentiel $\mathcal{N}_r$ est, lui aussi, un $E_\rho^\dagger$-module différentiel.*

5.2. Foncteur « solutions dans le disque générique ». — En s'inspirant des méthodes utilisées dans le cas complexe, Robba a montré que l'action d'un opérateur différentiel de $E_\rho[D]$ sur $\mathcal{A}_\rho(r)$ est surjective. Ceci est remarquable car, en général, un tel opérateur n'est pas trivialisable sur cet anneau.

Théorème 5.5 **([31])**. — *Soit G une matrice de* $\mathrm{Mat}(E_\rho)$ *et soit r un réel tel que $0<r\leqslant\rho$. Si l'opérateur $D-G$, agissant à gauche sur $\mathcal{A}_\rho(r)^\mu$, est injectif, il est surjectif.*

Corollaire 5.6. — *Soit A un anneau tel que $K[x]\subset A\subset E_\rho$, soit $\mathcal{M}$ un A-module différentiel et soit r un réel tel que $0<r\leqslant\rho$. On a* $\mathrm{Ext}^1_{A[D]}\big(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$.

Preuve. — Notons G la matrice de la dérivation D dans une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$.

Si $\mathrm{Hom}_{A[D]}\big(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$, la relation (5) montre que l'opérateur $D-G$ est injectif dans $\mathcal{A}_\rho(r)^\mu$. D'après le théorème 5.5, il est surjectif et d'après la relation (6), on a $\mathrm{Ext}^1_{A[D]}\big(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$.

Le cas où $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)\geqslant r$ est une conséquence immédiate de la méthode de variation des constantes.

Dans le cas général, d'après le théorème 5.2, il existe, dans la catégorie $\mathrm{MLC}(E_\rho)$, une suite exacte $0\longrightarrow\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{Q}\longrightarrow 0$ dans laquelle $\mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{N},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$ et $\mathrm{Ray}(\mathcal{Q},\rho)\geqslant r$. Donc $\mathrm{Ext}^1_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{N},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=\mathrm{Ext}^1_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{Q},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$ ce qui entraîne $\mathrm{Ext}^1_{E_\rho[D]}\big(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$ et, d'après la remarque 3.3, $\mathrm{Ext}^1_{A[D]}\big(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r)\big)=0$. □

Corollaire 5.7. — *Le foncteur $\mathcal{M}\to\mathrm{Hom}_{A[D]}(\mathcal{M},\mathcal{A}_\rho(r))$ de la catégorie* $\mathrm{MLC}(A)$ *dans la catégorie des Ω-espaces vectoriels (de dimension finie) est exact.*

6. Rayon de convergence et majoration de la dérivation

Le calcul du rayon de convergence d'un module différentiel est en général difficile. Il y a cependant un cas favorable. C'est celui où le module différentiel possède une base « cyclique ». En effet, s'il n'est pas trop grand, le rayon de convergence est

alors directement donné par la norme de la matrice qui représente la dérivation dans cette base (théorème 6.2). Pour exploiter cette propriété remarquable, on utilise d'une part l'élimination des singularités apparentes (pour se ramener au cas d'une base cyclique) et d'autre part le Frobenius (pour se ramener au cas d'un « petit » rayon de convergence).

6.1. Bases cycliques. — L'existence de bases cycliques est affirmée par le théorème du vecteur cyclique. Malheureusement celui-ci n'est vrai que si l'on travaille sur un corps. Nous sommes donc amenés à introduire le corps F des fractions de l'anneau A. Il est évidemment contenu dans le corps E_ρ. L'énoncé suivant précise que l'on peut trouver une *base cyclique* d'un F-module différentiel « proche » d'une base donnée.

***Théorème 6.1* (du vecteur cyclique).** — *Soit $\mathcal{M}$ un A-module différentiel de rang μ. Le F-espace vectoriel $F \otimes_A \mathcal{M}$ a une base $\mathfrak{m}$ de la forme $\{m, D(m), \dots, D^{\mu-1}(m)\}$.*

Plus précisément, étant donnés $\varepsilon > 0$ et une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$, on peut choisir le vecteur cyclique *m de telle sorte que la matrice H de passage de la base $\mathfrak{e}$ à la base $\mathfrak{m}$ vérifie*

$$\|H\|_\rho \|H^{-1}\|_\rho \leqslant (1+\varepsilon) \max(1, \rho\|G\|_\rho^{2\mu-1})/|(\mu-1)!|$$

où G désigne la matrice de la dérivation dans la base $\mathfrak{e}$.

Si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) > |\pi|\rho$, *on peut même le choisir de telle sorte que*

$$\|H\|_\rho \|H^{-1}\|_\rho \leqslant (1+\varepsilon) \max(1, \rho\|G\|_\rho^{\mu-1})/\big|(\mu-1)! \prod_{j=1}^{\mu-1} \tbinom{\mu}{j}\big|.$$

Principe de la démonstration [**8**]. — Elle suit d'assez près celle de Deligne dans [**17**] en cherchant à minimiser le wronskien de l'élément cyclique m. □

6.2. Majoration de la dérivation dans une base cyclique. — Le résultat suivant a eu de nombreux avatars ([**33**], [**3**], [**37**], [**9**],...) depuis son apparition dans la démonstration de Katz du théorème de Turrittin [**26**]. Nous en donnons la version p-adique.

Théorème 6.2. — *Soient $\mathcal{M}$ un A-module différentiel de rang μ et m un vecteur cyclique de $F \otimes_A \mathcal{M}$. Si, dans la décomposition $D^\mu(m) = a_{\mu-1}D^{\mu-1}(m) + \cdots + a_0 m$, l'un des coefficients a_i $(0 \leqslant i < \mu)$ vérifie $|a_i|_\rho > \rho^{i-\mu}$ alors*

$$\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = |\pi| \min_{0 \leqslant i < \mu} |a_i|_\rho^{-1/(\mu-i)} < |\pi|\rho$$

Preuve. — Prenons un élément α dans une extension K' du corps K tel que $|\alpha| = \max_{0 \leqslant i < \mu} |a_i|_\rho^{1/(\mu-i)} > \rho^{-1}$. Puisque $K' \otimes_K \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ ont même rayon de convergence, on peut supposer que $K' = K$. La dérivation D est représentée dans la base

$m, \alpha D(m), \ldots, \alpha^{1-\mu} D^{\mu-1}(m)$ par la matrice :

$$G = \alpha G' , \qquad G' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ b_0 & \ldots & & & b_{\mu-1} \end{pmatrix}$$

avec $b_i = \alpha^{i-\mu} a_i$ de telle sorte que $\|G'\|_\rho = \max |b_i|_\rho = 1$. Il en résulte que la matrice $\overline{G'}$, image de G' dans le corps des restes pour la norme $\|\cdot\|_\rho$, n'est pas nilpotente. Donc $\|G'^s\|_\rho = \|G'\|_\rho^s$ pour tout entier s. Par ailleurs, on a $\|D\|_\rho = \rho^{-1} < |\alpha| = \|G\|_\rho$ et on en déduit facilement que $\|G_s\| = \|G^s\| = |\alpha|^s$ c'est-à-dire $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}) = |\pi||\alpha|^{-1}$. □

Corollaire 6.3. — *Soit $\mathcal{M}$ un A-module différentiel de rang μ. Si* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) < |\pi|\rho$, *il existe une extension K' de K et une base $\mathfrak{e}$ de $K' \otimes_K F \otimes_A \mathcal{M}$ telle que* $\|D\|_{\mathfrak{e},\rho} = |\pi| / \mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) > \rho^{-1}$.

Corollaire 6.4. — *Soit $\mathcal{M}$ un A-module différentiel de rang μ. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) \geqslant |\pi|\rho$,

2) *Pour tout vecteur cyclique m de $F \otimes_A \mathcal{M}$, on a* $D^\mu(m) = a_{\mu-1} D^{\mu-1}(m) + \cdots + a_0 m$ *avec* $|a_i|_\rho \leqslant \rho^{i-\mu}$.

3) *Dans une (et alors dans toute) base cyclique $\mathfrak{m}$ de $F \otimes_A \mathcal{M}$, on a* $\|D\|_{\mathfrak{m},\rho} \leqslant 1/\rho$ *(et par suite* $\|x^s D^s\|_{\mathfrak{m},\rho} \leqslant 1$ *pour tout* $s \geqslant 0$*).*

4) *Dans une (et alors dans toute) base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$,* $\|D^s\|_{\mathfrak{e},\rho} = \mathrm{O}(\rho^{-s})$.

6.3. Élimination des singularités apparentes. — Notons $\mathcal{F}(I)$ le corps des fractions de $\mathcal{A}(I)$. Une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$, même si elle est contenue dans $\mathcal{M}$, n'est pas forcément une base de $\mathcal{M}$. La matrice de la dérivation dans la base $\mathfrak{e}$ peut présenter des *singularités apparentes*. Les diverses variantes du théorème de Birkhoff montrent comment les faire disparaître [(1)] tout en conservant certaines propriétés de la matrice de dérivation. Par exemple, les constructions du paragraphe précédent donnent des bases (cycliques) de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$ dont la matrice de la dérivation est « petite ». En supprimant les singularités apparentes, on obtient des bases du $\mathcal{A}(I)$-module différentiel initial ayant la même propriété.

Théorème 6.5* (Birkhoff p-adique)**. — ***1) *Soit $I \subset]0, \infty[$ un intervalle fermé borné, soit ρ dans $|K^*|$ et soit H une matrice de* $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$. *Il existe une matrice L de* $\mathrm{Gl}(\mu, K(x))$ *et une matrice M de* $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}(I)\big)$ *telles que* $\|L\|_\rho = \|L^{-1}\|_\rho = 1$ *et* $H = LM$.

(1) Plus précisément, profitant du fait que la droite projective est de genre 0, on déplace toutes les singularités apparentes vers le même point (en général 0 ou l'infini).

2) Soit $I = (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$, un intervalle, soit ρ dans $I \cap |K^*|$ et soit H une matrice de $\mathrm{Gl}\left(\mu, \mathcal{A}(I)\right)$. Il existe une matrice L de $\mathrm{Gl}\left(\mu, \mathcal{A}(]0, \beta))\right)$, une matrice M de $\mathrm{Gl}\left(\mu, \mathcal{A}((\alpha, \infty])\right)$ telles que $\|L\|_\rho = \|L^{-1}\|_\rho = 1$ et $H = LM$.

Plus précisément, dans les deux cas, les matrices L et M ainsi qu'une matrice diagonale N à coefficients dans $\mathbb{Z}$ sont uniques si on impose les conditions supplémentaires $|L_{ij}|_\rho < 1$ pour $i < j$ et $x^N L$ tend vers $\boldsymbol{I}$ quand x tend vers 0.

Principe de la démonstration. — La démonstration du point 1) est purement algébrique et repose sur le fait que, lorsque l'intervalle I est fermé, les éléments de $\mathcal{A}(I)$ n'ont qu'un nombre fini de zéros. Elle utilise la fonction $\lambda/(x-a)$ ($|\lambda| = \max(\rho, |a|)$) qui a un unique pôle en a et un unique zéro à l'infini et vérifie $|\lambda/(x-a)|_\rho = 1$.

Le point 2) est nettement plus difficile. Il se démontre à partir du point 1) avec $I = [\rho]$ en faisant un passage à la limite pour la norme $|\cdot|_\rho$. Pour cela l'unicité de la décomposition obtenue en 1) est fondamentale. C'est en fait un cas particulier d'un résultat un peu plus général dans lequel on travaille sur le corps E_ρ des *éléments analytiques* au lieu du corps $\mathcal{F}(I)$ [**4**]. □

Corollaire 6.6. — *Soit $I \subset [0, \infty[$ un intervalle, soit ρ dans $I \cap |K^*|$ et soit H une matrice de $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$. Il existe une matrice T de $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$ et une matrice S de $\mathrm{Gl}\left(\mu, \mathcal{A}([0, \infty[)\right)$ telles que $\|T\|_\rho = \|T^{-1}\|_\rho = 1$ et $H = TS$.*

Preuve. — Soit $H = LM$ la première décomposition de Birkhoff de la matrice H vue comme élément de $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{F}([\rho]))$: la matrice M appartient à $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A}[\rho])$, la matrice L appartient à $\mathrm{Gl}(\mu, K(x)) \subset \mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{F}([\rho]))$ et $\|L\|_\rho = \|L^{-1}\|_\rho = 1$.

La deuxième décomposition de Birkhoff pour la matrice M s'écrit $M = PQ$ avec P dans $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A}(]0, \rho]))$, Q dans $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty]))$ et $\|P\|_\rho = \|P^{-1}\|_\rho = 1$.

La deuxième décomposition de Birkhoff pour la matrice $Q(1/x)$, l'intervalle $]0, 1/\rho]$ et la norme $\|\cdot\|_{1/\rho}$ donne $Q = RS$ avec R dans $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A}([\rho, \infty[))$, $\|R\|_\rho = \|R^{-1}\|_\rho = 1$ et S dans $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A}([0, \infty[))$.

On pose $T = LPR$. A priori, T appartient à $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{F}([\rho]))$ et vérifie $\|T\|_\rho = \|T^{-1}\|_\rho = 1$. Mais comme $T = HS^{-1}$ et comme $\mathcal{A}([0, \infty[) \subset \mathcal{F}(I)$, la matrice T appartient en fait à $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{F}(I))$. □

On peut en fait choisir S dans $\mathrm{Gl}(\mu, K[x])$ mais en général pas dans $\mathrm{Gl}(\mu, K)$.

6.4. Bases dans lesquelles la dérivation est petite. — Nous pouvons maintenant donner la traduction du théorème 6.2 dans le cas des $\mathcal{A}(I)$-modules différentiels.

Corollaire 6.7. — *Soit $I = (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$ un intervalle, soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel et soit ρ dans I.*

1) *Si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) \geqslant |\pi|\rho$, il existe une base de $\mathcal{M}$ dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice G vérifiant $\|G\|_\rho \leqslant 1/\rho$.*

2) Si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) < |\pi|\rho$ *, il existe une extension* K' *de* K *et une base de* $K'\otimes_K \mathcal{M}$ *dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice* G *vérifiant* $\|G\|_\rho = |\pi|/\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)$.

Preuve. — Montrons le résultat 1). D'après le théorème du vecteur cyclique, il existe une base cyclique $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{F}(I)\otimes_{\mathcal{A}(I)}\mathcal{M}$. D'après le corollaire 6.4, la matrice $G_\mathfrak{m}$ qui représente la dérivation dans la base $\mathfrak{m}$ vérifie $\|G_\mathfrak{m}\|_\rho \leqslant 1/\rho$.

Soit $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$ et soit H la matrice de $\mathrm{Gl}(\mathcal{F}(I))$ telle que $\mathfrak{m} = H\mathfrak{e}$ et soit $H = TS$ la décomposition donnée dans le corollaire 6.6. Comme S appartient à $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{A}([0,\infty[)) \subset \mathrm{Gl}(\mathcal{A}(I))$, la famille $\mathfrak{f} = T^{-1}\mathfrak{m} = S\mathfrak{e}$ est une base de $\mathcal{M}$. La matrice représentant la dérivation dans la base $\mathfrak{f}$ vaut $G_\mathfrak{f} = (S'+SG_\mathfrak{e})S^{-1} = T^{-1}(-T'+G_\mathfrak{m}T)$. Ses coefficients, comme ceux de S, S^{-1} et $G_\mathfrak{e}$, appartiennent à $\mathcal{A}(I)$. Par ailleurs, comme $\|T\|_\rho = \|T^{-1}\|_\rho = 1$, on a $\|G_\mathfrak{f}\|_\rho \leqslant \max(\|G_\mathfrak{m}\|_\rho, \|T'\|_\rho) \leqslant 1/\rho$.

Le résultat 2) se démontre de manière analogue en remplaçant le corollaire 6.4 par le corollaire 6.3. □

7. Frobenius

Dans ce paragraphe, nous étudions comment se transforment les modules différentiels par la ramification $x \mapsto \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est un relèvement de x^p. Le cas des $\mathcal{A}([0,\rho[)$-modules différentiels (on parle alors de *point ordinaire*) est relativement simple et traité dans [**5**]. Le cas où l'on autorise une *singularité régulière* en 0 est déjà plus difficile (voir [**7**]). Le cas général de MLC $\big(\mathcal{A}(I)\big)$ est démontré dans [**9**].

7.1. Indépendance par rapport au relèvement. — Étant donné un intervalle I, nous posons $I^p = \{\rho^p\,;\ \rho \in I\}$. Soit maintenant φ un élément de $\mathcal{A}(I)$ tel que $|\varphi(x)-x^p|_\rho < \rho^p$ pour tout ρ dans I. L'application φ^* définie par $\varphi^*(f) = f\circ\varphi$ est une injection de $\mathcal{A}(I^p)$ dans $\mathcal{A}(I)$. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}(I^p)$-module différentiel, on note $\varphi^*(\mathcal{M})$ le $\mathcal{A}(I)$-module différentiel obtenu par transport de structure. Plus précisément, si $\mathfrak{e}$ est une base de $\mathcal{M}$ dans laquelle la dérivation est représentée par la matrice G, alors $\varphi^*(\mathcal{M})$ a une base $\varphi^*(\mathfrak{e})$ dans laquelle la dérivation est représentée par la matrice $\varphi'\varphi^*(G)$. Il est facile de vérifier que φ^* est un foncteur exact.

Proposition 7.1. — *Soient* φ *et* ψ *deux éléments de* $\mathcal{A}(I^p)$ *tels que* $|\varphi(x)-x^p|_\rho < \rho^p$ *et* $|\psi(x)-x^p|_\rho < \rho^p$ *pour* ρ *dans* I^p*. Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{A}(I^p)$*-module différentiel tel que* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p) > |\varphi-\psi|_\rho$ *pour tout* ρ *dans* I^p*. Les* $\mathcal{A}(I)$*-modules différentiels* $\varphi^*(\mathcal{M})$ *et* $\psi^*(\mathcal{M})$ *sont isomorphes.*

Preuve. — Choisissons une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$ et notons G_s la matrice de D^s dans la base $\mathfrak{e}$. En utilisant les propriétés de la résolvante (3), on vérifie que la matrice

$$H = \sum_{s=0}^{\infty} \psi^*(G_s)\,\frac{(\varphi-\psi)^s}{s!}$$

appartient à $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A}(I))$ car elle a pour inverse la matrice

$$H^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi^*(G_s) \frac{(\psi - \varphi)^s}{s!}.$$

Elle réalise donc un morphisme horizontal entre $\varphi^*(\mathcal{M})$ muni de la base $\varphi^*(\mathfrak{e})$ et $\psi^*(\mathcal{M})$ muni de la base $\psi^*(\mathfrak{e})$. □

D'après cette proposition, on peut supposer que $\varphi(x) = x^p$ sans nuire à la généralité. C'est ce que nous ferons dans la suite.

7.2. Frobenius et rayon de convergence. — Nous calculons le rayon de convergence de l'image par Frobenius d'un module différentiel.

Proposition 7.2. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I^p)$-module différentiel et soit ρ dans I.*

1) $\mathrm{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}),\rho) \geqslant \min\Big(\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p)^{1/p}, p\rho^{1-p}\,\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p)\Big)$.

2) Si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) > |\pi|^p \rho^p$ *alors* $\mathrm{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}), \rho) = \mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p)^{1/p}$.

Preuve. — Soit t_ρ un point générique tel que $|t_\rho| = \rho$ et soit $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$. Notons G_s (resp. F_s) la matrice représentant l'opérateur D^s dans la base $\mathfrak{e}$ (resp. $\varphi^*(\mathfrak{e})$). Notons X la solution au voisinage du point (générique) t_ρ^p du système $D(X) = GX$ telle que $X(t_\rho^p) = \boldsymbol{I}$. La matrice $Y(x) = X(x^p)$ vérifie $D(Y) = px^{p-1}G(x^p)Y = FY$ et $Y(t_\rho) = \boldsymbol{I}$. On en déduit

$$X(x^p) = \sum_{s=0}^{\infty} G_s(t_\rho^p) \frac{(x^p - t_\rho^p)^s}{s!} = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t_\rho) \frac{(x - t_\rho)^i}{i!} = Y(x)$$

Le rayon de convergence de X est $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p)$ et le rayon de convergence de Y est $\mathrm{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}), \rho)$.

On a $|x^p - t_\rho^p| = \max(|x - t_\rho|^p, |p||x - t_\rho|\rho^{p-1})$ d'où la minoration 1).

Pour $|x - t_\rho| > |\pi|\rho$, on a $|x^p - t_\rho^p| = |x - t_\rho|^p$. On en déduit que, pour $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) > |\pi|^p\rho^p$, on a $\mathrm{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}),\rho) \geqslant \mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p)^{1/p}$. Pour obtenir l'inégalité dans l'autre sens, on définit les nombres α_i par la relation

$$(x^p - 1)^s = (x - 1)^{ps} + \sum_{i=s}^{ps-1} \alpha_i (x - 1)^i,$$

on vérifie que $|\alpha_i| \leqslant |\pi|^{ps-i}$ et on en déduit qu'il n'y a pas de compensation quand on développe les termes de la série définissant $X(x^p)$ en puissance de $(x - t_\rho^p)$. □

Exemple 7.3. — L'hypothèse $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) > |\pi|^p\rho^p$ est cruciale dans 2). Ainsi, pour $\mathcal{M} = x^{1/p}\mathcal{A}(I^p)$ on a $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho^p) = \rho|\pi|^p$ mais $\varphi^*(\mathcal{M}) = \mathcal{A}(I)$ et $\mathrm{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}), \rho) = \rho$.

7.3. Unicité de l'antécédent

Théorème 7.4. — *Soit I un intervalle et soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{A}(I^p)$-modules différentiels tels que $\varphi^*(\mathcal{M})$ et $\varphi^*(\mathcal{N})$ sont isomorphes. S'il existe ρ dans I tel que $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho^p) > |\pi|^p\rho^p$ et $\mathrm{Ray}(\mathcal{N},\rho^p) > |\pi|^p\rho^p$, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont isomorphes.*

Preuve. — D'après le corollaire 6.7, il existe une base $\mathfrak{e}$ (resp. $\mathfrak{f}$) de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice G (resp. F) telle que $\|G\|_{\rho^p} \leqslant 1/\rho^p$ (resp. $\|F\|_{\rho^p} \leqslant 1/\rho^p$). L'isomorphisme entre $\varphi^*(\mathcal{M})$ et $\varphi^*(\mathcal{N})$ est représenté dans les bases $\varphi^*(\mathfrak{e})$ et $\varphi^*(\mathfrak{f})$ par une matrice H de $\mathrm{Gl}(\mu,\mathcal{A}(I))$. On l'écrit $H = \sum_{i=0}^{p-1} x^i\varphi^*(H_i)$ où H_i est une matrice à coefficients dans $\mathcal{A}(I^p)$. La relation (8) s'écrit $iH_i + px\,D(H_i) = px(FH_i - H_iG)$. En calculant la norme $\|\cdot\|_{\rho^p}$ des deux membres, on en déduit que $H_i = 0$ pour $i \neq 0$. Donc $H = \varphi^*(H_0)$ et la matrice H_0 représente l'isomorphisme cherché dans les bases $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{f}$. □

7.4. Existence de l'antécédent

Théorème 7.5. — *Soit I un intervalle et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel.*

1) *Si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) > |p|^{1/p}\rho$ pour tout ρ dans I, il existe un (unique) $\mathcal{A}(I^p)$-module différentiel $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{M}=\varphi^*(\mathcal{N})$ et $\mathrm{Ray}(\mathcal{N},\rho^p) = \mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)^p$.*

2) *Si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) > |\pi|\rho$ pour tout ρ dans I, il existe un (unique) $\mathcal{F}(I^p)$-module différentiel $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{M}=\varphi^*(\mathcal{N})$ et $\mathrm{Ray}(\mathcal{N},\rho^p) = \mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho)^p$.*

Remarque 7.6. — On conjecture que l'hypothèse faible ($\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) > |\pi|\rho$) suffit pour obtenir la conclusion forte ($\mathcal{N}$ est un $\mathcal{A}(I^p)$-module différentiel).

Principe de la démonstration [**9**]. — On veut construire une base de $\mathcal{M}$ dans laquelle la matrice de dérivation est de la forme $px^{p-1}\varphi^*(F)$. Pour cela, si l'opérateur D^s est représenté par la matrice G_s dans une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$ et si Y_G est définie par la formule (10), on considère la matrice :

$$(11)\qquad H = \frac{1}{p}\sum_{\xi^p=1} Y_G(\xi x, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s x^s G_s(x)\ , \qquad \gamma_s = \frac{1}{p}\sum_{\xi^p=1}\frac{(\xi-1)^s}{s!}.$$

Les nombres γ_s sont rationnels et dans $\mathbb{Z}_p$ ce qui est facile à vérifier à partir de la relation bien connue $|\xi - 1| \leqslant |\pi|$ pour toute racine p-ième de l'unité ξ. Par ailleurs, les coefficients des matrices G_s sont dans $\mathcal{A}(I)$ et, pour ρ dans I, la suite $\|x^sG_s\|_\rho$ tend vers 0 car $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) > |\pi|\rho$. On en conclut que les coefficients de la matrice H sont dans $\mathcal{A}(I)$.

Maintenant, pour f dans $\mathcal{A}(I)$, la « trace » $\sum_{\xi^p=1} f(\xi x)$ appartient à $\varphi^*\big(\mathcal{A}(I^p)\big)$. À partir des propriétés de la matrice Y_G, on trouve :

$$D(H) = \frac{1}{p}\sum_{\xi^p=1} \xi G(\xi)\,H - H\,G = px^{p-1}\varphi^*(F)\,H - H\,G$$

pour une matrice F à coefficients dans $\mathcal{A}(I^p)$. La relation (8) montre que la matrice H représente un morphisme horizontal de $\mathcal{M}$ dans un module différentiel de la forme $\varphi^*(\mathcal{N})$ pour un $\mathcal{A}(I^p)$-module différentiel $\mathcal{N}$. Si la matrice H est inversible, ce morphisme est un isomorphisme.

La difficulté est donc de choisir la base $\mathfrak{e}$ de telle sorte que la matrice H soit inversible. Pour cela, on travaille avec un base cyclique ce qui oblige à passer au corps des quotients $\mathcal{F}(I)$, donc à introduire des singularités apparentes qu'il faudra supprimer à l'aide du théorème de Birkhoff.

Supposons donc que la base $\mathfrak{e}$ soit cyclique et choisissons un nombre ρ dans I. Le corollaire 6.4 et sa variante x-adique (théorème de Turrittin) montrent d'une part que $\|x^s G_s\|_\rho \leqslant 1$ pour tout s et d'autre part que $xG = C + L$ où C est une matrice constante telle que $\|C\| \leqslant 1$ et $\|L\|_\rho < 1$. De plus, la matrice $\overline{C}$, image de C par passage au corps des restes, a des valeurs propres entières. En faisant des transformations de cisaillement, on se ramène à la situation $xG = C_0 + xC_1 + \cdots + x^\nu C_\nu + F$ avec $\|C_i\| \leqslant 1$, C_0 nilpotente et $\|F\|_\rho < 1$.

En s'inspirant de la formule (11) et en utilisant le fait que $\log(\xi) = 0$, on montre que

$$\sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s C_0(C_0 - 1)\cdots(C_0 - s + 1) = \frac{1}{p}\sum_{\xi^p=1} (\xi x)^C = \boldsymbol{I}\,.$$

Il en résulte que

$$H = \boldsymbol{I} + xP(x) + S, \qquad \|S\|_\rho < 1, \qquad P \in \mathrm{Mat}(\mu, K[x]) \quad \|P\|_\rho \leqslant 1$$

Si ρ n'est pas la borne inférieure de I, on constate qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $|\det(H) - 1|_r < 1$ pour $\rho - \varepsilon < r < \rho$. Il en résulte que la matrice H appartient à $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A}(]\rho - \varepsilon, \rho[))$.

Une application du théorème de Birkhoff permet de supprimer les singularités apparentes sur le cercle $|x| = \rho$. On peut ainsi se ramener au cas où H appartient à $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A}(]\rho - \varepsilon, \rho]))$ (pour des raisons apparemment techniques, pour pouvoir conclure, il faut supposer que $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) > |p|^{1/p}\rho$).

L'unicité de l'antécédent montre que si l'on connaît un antécédent sur deux intervalles J_1 et J_2 d'intersection non vide alors on connaît un antécédent sur la réunion $J_1 \cup J_2$. Ceci permet d'obtenir un antécédent sur toute la couronne en recollant les antécédents construits sur les « petits » intervalles de la forme $]\rho - \varepsilon, \rho]$ et $[\rho, \rho + \varepsilon[$, (obtenu par changement de x en $1/x$). Plus précisément, on considère l'ensemble des triplets $(J, \mathcal{N}, \mathfrak{i})$ où J est un intervalle contenu dans I, $\mathcal{N}$ un $\mathcal{A}(J)$-module différentiel et $\mathfrak{i}$ un isomorphisme de $\varphi^*(\mathcal{N})$ dans $\mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$. Cet ensemble est non vide (nous venons de construire un module différentiel $\mathcal{N}$ associé à un intervalle de la forme $]\rho - \varepsilon, \rho]$). On vérifie facilement qu'il est inductif et qu'un élément maximal est forcément défini sur I. □

Remarque 7.7. — Si le rayon de convergence de $\mathcal{M}$ est suffisamment grand, plus précisément si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) > |p|^{p^{-h}}\rho$ pour tout ρ de I, on peut itérer le procédé. À partir d'un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}$ on construit ainsi une suite $\{\mathcal{N}_i\}_{0\leqslant i\leqslant h}$ telle que $\mathcal{N}_i$ soit un $\mathcal{A}(I^{p^i})$-module différentiel vérifiant $\varphi^*(\mathcal{N}_{i+1}) = \mathcal{N}_i$ pour $0 \leqslant i < h$. Une telle construction est traditionnellement appelée *structure de Frobenius faible* de $\mathcal{M}$. Au prix de quelques difficultés techniques, elle permet, par exemple, de ramener l'étude du rayon de convergence d'un module différentiel $\mathcal{M}$ tel que $\mathrm{Ray}(\mathcal{M},\rho) < \rho$ à celle d'un module différentiel $\mathcal{N}_h$ vérifiant $\mathrm{Ray}(\mathcal{N}_h,\rho) \leqslant |\pi|\rho$ pour lequel, d'après le théorème 6.2, on sait calculer le rayon de convergence à partir des coefficients de la matrice représentant la dérivation dans une base cyclique.

CHAPITRE II
LE THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION

C'est le théorème de décomposition qui montre le rôle fondamental de l'anneau $\mathcal{R}$ pour les équations différentielles p-adiques. Comme on peut le voir sur l'exemple 8.3 ci-dessous, on ne peut espérer avoir un résultat analogue au Théorème 9.10 sur le corps des éléments analytiques au bord $E_1^\dagger$ ni même sur le corps $\mathcal{E}^\dagger$. On constate donc que le théorème 9.10 est indépendant du résultat de Dwork-Robba 5.4 aussi bien pour son contenu que pour sa démonstration. C'est bien entendu là un point de structure essentiel.

8. $\mathcal{R}$-modules différentiels solubles

Par définition de $\mathcal{R}$, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{R}$-module différentiel, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$-module différentiel $\mathcal{M}_\varepsilon$ tel que

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{A}(I_\varepsilon)} \mathcal{M}_\varepsilon. \tag{12}$$

Deux modules différentiels $\mathcal{M}_\varepsilon$ vérifiant la relation (12) deviennent isomorphes après diminution éventuelle de ε. Nous ferons donc comme si $\mathcal{M}_\varepsilon$ était unique.

De même, tout morphisme $\mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M}$ de $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$ provient d'un morphisme $\mathcal{N}_\varepsilon \xrightarrow{u_\varepsilon} \mathcal{M}_\varepsilon$ de $\mathrm{MLC}\left(\mathcal{A}(I_\varepsilon)\right)$ pour ε suffisamment petit.

8.1. La catégorie $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$. — Les anneaux $\mathcal{A}(I)$, pour I ouvert, et $\mathcal{R}$ ne sont ni principaux ni même noethériens. Cependant la proposition suivante montre qu'ils sont cohérents et que tout module sans torsion sur ces anneaux est plat.

Proposition 8.1. — *Tout idéal de type fini de $\mathcal{A}(I)$ (resp. $\mathcal{R}$) est principal et tout sous-module de type fini d'un $\mathcal{A}(I)$-module (resp. $\mathcal{R}$-module) libre de type fini est libre.*

Preuve. — Pour $\mathcal{A}(I)$, comme le corps K est maximalement complet, ceci résulte d'un théorème de Lazard [**28**]. Le cas de $\mathcal{R}$ s'en déduit. □

Théorème 8.2. — *Les catégories* $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$ *et* $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I)\big)$ *sont abéliennes.*

Preuve. — Le cas de $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$ se ramène facilement à celui de $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I)\big)$.

Soit $\mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M}$ un morphisme de $\mathcal{A}(I)$-modules libres. Le noyau de u est cohérent donc de type fini et libre d'après la proposition 8.1. En général, il n'en est pas de même du conoyau.

Par contre, lorsque u est un morphisme de $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I)\big)$ nous allons voir que la connexion force le conoyau de u à être libre.

Si l'intervalle I est fermé, l'anneau $\mathcal{A}(I)$ est principal et le résultat est classique (par exemple [**5**]).

Le cas général se ramène par localisation au précédent : les couronnes $\mathcal{C}(J)$, pour J fermé, forment un recouvrement admissible de la couronne $\mathcal{C}(I)$ et le faisceau conoyau de $\widetilde{\mathcal{N}} \xrightarrow{\widetilde{u}} \widetilde{\mathcal{M}}$ est localement libre de rang fini et localement facteur direct de $\widetilde{\mathcal{M}}$. Comme $\mathcal{C}(I)$ est une variété de Stein, le théorème B de Cartan montre que le module $\mathrm{coker}(u)$ des sections globales de $\mathrm{coker}(\widetilde{u})$ est un facteur direct de type fini de $\mathcal{M}$. On conclut à l'aide de la proposition 8.1. □

Exemple 8.3. — C'est l'exemple fondamental qui a suggéré la forme du théorème de décomposition.

Considérons la série $f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \pi^{-s} s!\, x^s$. L'encadrement classique

$$|\pi|^{s-1} \leqslant |s!| \leqslant |\pi|^s (s+1)$$

avec égalité respectivement pour $s = p^h$ et $s = p^h - 1$, montre que la fonction f est analytique non bornée dans le disque $|x| < 1$. Par ailleurs elle satisfait l'équation inhomogène $x(f + xf') = \pi(f-1)$ et donc l'équation différentielle homogène $L(f) = 0$ avec $L = D(x^2 D + x - \pi) = x^2 D + (3x - \pi)D + 1$.

Il est facile de vérifier que les solutions dans $\mathcal{R}$ de l'équation $L(f) = 0$ sont de la forme λf. Formellement, cela se traduit par le fait que L est divisible à droite par $D - f'/f$. La difficulté vient de ce que la fonction f, n'étant pas bornée, a une infinité de zéros dans toute couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon)$; la différentielle logarithmique f'/f n'appartient donc pas à $\mathcal{R}$. Nous considérons le morphisme de $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$:

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot L \xrightarrow{u} \mathcal{R}, \qquad P \mapsto P(f).$$

Le théorème 8.2 affirme alors que l'image et le noyau de u sont des $\mathcal{R}$-modules libres ce que l'on peut vérifier directement : les zéros de f sont simples si bien que

$$\mathrm{Im}(u) = \mathcal{R} f + \mathcal{R} f' = \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \ker(u) = \mathcal{R}(fD - f').$$

Exemple 8.4. — Les équations $M_{f,n,m}$ étudiées dans [**29**] fournissent de nombreux exemples analogues au précédent : leur avantage est que, par construction, ils ont une

structure de Frobenius alors que, dans l'exemple 8.3, l'existence de cette structure de Frobenius n'est pas évidente.

Considérons l'opérateur différentiel d'ordre deux

$$L := x^2(D + \frac{1}{3})(D + \frac{5}{3}) + \frac{8\pi}{27}D.$$

C'est l'équation $M_{x^2,1,3}$ de [**29**]. Cet opérateur admet la solution

$$f(x) = 1 + \sum_{k\geqslant 1} a_k x^{2k} \quad \text{avec} \quad a_k = -\frac{27(2k+1/3)(2k+5/3)}{16\pi k} a_{k-1}.$$

Si le corps K contient π et si $p > 5$, c'est une fonction non bornée de $\mathcal{A}$. Comme dans l'exemple 8.3, l'opérateur L admet une factorisation sur le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{R}$ et non sur le corps des éléments analytiques au bord comme l'espérait Robba.

En vertu de ([**29**], 4.1.1), le module différentiel $\mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot L$ est, pour $p \neq 3$, muni d'une structure de Frobenius (définie en fait sur l'anneau $\mathcal{A}(]1-\epsilon, 1+\epsilon[)$ pour un certain $\epsilon > 0$). En particulier il est soluble.

8.2. Fonction rayon de convergence. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel. Pour chaque nombre ρ de $I \cap]0, \infty[$, on a défini le rayon de convergence $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$. Nous nous proposons d'étudier la manière dont celui-ci dépend de ρ.

Définition 8.5. — On dit qu'une fonction f a *logarithmiquement* une propriété sur l'intervalle I de $\mathbb{R}^+$ si la fonction $g(x) = \log(f(e^x))$ a cette propriété sur l'intervalle $\log(I)$.

Proposition 8.6. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel de rang μ. La fonction $\rho \mapsto \mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ est continue, logarithmiquement concave et logarithmiquement affine par morceaux (avec éventuellement une infinité de « morceaux ») sur l'intervalle I.*

Plus précisément, il existe une partition $I = \bigcup I_i$, des nombres réels positifs α_i et des nombres β_i rationnels de dénominateur inférieur ou égal à μ tels que, pour ρ dans I_i, on ait $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \alpha_i \rho^{\beta_i}$.

Preuve. — La concavité est une conséquence facile de la convexité logarithmique de la fonction $\rho \to |f|_\rho$. La continuité sur l'intérieur de l'intervalle I s'en déduit immédiatement. La continuité aux extrémités éventuelles de l'intervalle I nécessite l'utilisation du théorème de majoration explicite de Dwork-Robba [**21**].

Lorsque la condition (*) : $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) < |\pi|\rho$ est satisfaite pour tout nombre ρ de l'intervalle I, l'affinité par morceaux et le résultat sur la pente de chaque morceau est une conséquence facile de la proposition 6.2.

Le cas général se ramène à ce cas particulier : localement, à l'aide du théorème 7.5 on construit un antécédent de Frobenius qui satisfait la majoration (*). Ceci montre que la fonction rayon de convergence a localement les propriétés voulues. En fait la

démonstration complète comporte des difficultés techniques que nous n'aborderons pas ici. □

8.3. Plus grande pente d'un module différentiel soluble. — Soit maintenant $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel et soit $\mathcal{M}_\varepsilon$ un $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$-module différentiel qui vérifie la relation (12). Le germe en 1 de la fonction $\rho \mapsto \mathrm{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho)$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{M}_\varepsilon$. Par abus de notation, pour ρ suffisamment proche de 1, nous écrirons $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ au lieu de $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho)$.

La concavité montre que la limite $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) := \lim_{\rho \to 1^-} \mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$ existe. Par construction $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) \leqslant 1$.

Définition 8.7. — Nous dirons que $\mathcal{M}$ est *soluble* si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) = 1$.

On note $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$ la catégorie des $\mathcal{R}$-modules différentiels solubles.

Proposition 8.8. — *La catégorie* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$ *est abélienne.*

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.5 et du théorème 8.2. □

***Théorème 8.9* (Existence de la plus grande pente).** — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble de rang μ. Il existe un nombre rationnel $\beta \geqslant 0$, de dénominateur inférieur ou égal à μ, tel que, pour ρ proche de* 1, *on ait* $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho^{\beta+1}$.

Preuve. — Ce résultat s'obtient facilement à partir de la proposition 8.6 : d'une part les pentes des « morceaux » d'une fonction concave affine par morceaux forment une suite décroissante et, d'autre part, une suite minorée (par 0) et décroissante de nombres rationnels de dénominateurs bornés est stationnaire. □

Définition 8.10. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Le nombre rationnel β défini dans le théorème précédent s'appelle la *plus grande pente* de $\mathcal{M}$ et se note $\mathrm{pt}(\mathcal{M})$.

8.4. La catégorie $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$. — Les résultats sur le foncteur de Frobenius agissant sur la catégorie $\mathrm{MLC}\left(\mathcal{A}(I)\right)$ se traduisent facilement dans la catégorie $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$.

Soit φ un élément de $\mathcal{R}$ tel que $\lim_{\rho \to 1} |\varphi(x) - x^p|_\rho < 1$. On définit, par composition, un morphisme de Frobenius d'anneaux $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ et, par image inverse, un foncteur exact de la catégorie $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$ dans elle-même :

$$\varphi^*(\mathcal{M}) := \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M}$$

Corollaire 8.11. — *Soient φ et ψ des éléments de $\mathcal{R}$ tels que* $\lim_{\rho \to 1} |\varphi(x) - x^p|_\rho < 1$ *et* $\lim_{\rho \to 1} |{}_\rho\psi(x) - x^p| < 1$ *et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Les $\mathcal{R}$-modules différentiels $\varphi^*(\mathcal{M})$ et $\psi^*(\mathcal{M})$ sont isomorphes.*

Preuve. — Voir proposition 7.1. □

D'après ce corollaire, si on ne s'intéresse qu'aux modules différentiels solubles, on peut se limiter au cas $\varphi(x) = x^p$.

Corollaire 8.12. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Alors $\varphi^*(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble et* $\operatorname{pt}\big(\varphi^*(\mathcal{M})\big) = \operatorname{pt}(\mathcal{M})$.

Preuve. — Voir proposition 7.2-2. □

Remarque 8.13. — Si d est un entier premier à p, le module différentiel soluble $\varphi_d^*(\mathcal{M})$ obtenu à partir de la ramification $x \mapsto x^d$ vérifie $\operatorname{pt}\big(\varphi_d^*(\mathcal{M})\big) = d \operatorname{pt}(\mathcal{M})$. Le comportement du foncteur de Frobenius vis à vis des pentes est donc tout à fait singulier. En particulier, comme les modules différentiels de rang un ont une pente entière, un module différentiel dont l'une des pentes a un dénominateur divisible par p ne peut pas, même après ramification, être obtenu par extensions successives de modules différentiels de rang un.

Corollaire 8.14. — *Le foncteur φ^* de la catégorie* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$ *dans elle même est une équivalence de catégorie.*

Preuve. — C'est une conséquence des théorèmes 7.5 et 7.4. □

Fixons un morphisme de Frobenius.

Définition 8.15. — On dit qu'un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$ a une *structure de Frobenius* s'il existe un entier $h \geqslant 1$ pour lequel $\varphi^{*h}(\mathcal{M})$ est isomorphe à $\mathcal{M}$ (dans $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$).

On note $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$ dont les objets sont les $\mathcal{R}$-modules différentiels ayant une structure de Frobenius.

Proposition 8.16. — $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ *est une sous-catégorie de* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$.

Preuve. — Soit $\mathcal{M}$ un objet de $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$. Pour simplifier la démonstration nous supposons que la structure de Frobenius est d'ordre $h = 1$, c'est-à-dire que $\varphi^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Le cas général se traite de manière analogue.

Soit $\mathcal{M}_\varepsilon$ un $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$-module différentiel vérifiant (12). D'après la proposition 7.2-1, pour ε suffisamment petit et ρ^p dans I_ε, on a :

$$\begin{aligned} 1 \geqslant \rho^{-1} \operatorname{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho) &= \rho^{-1} \operatorname{Ray}(\varphi^*(\mathcal{M}_\varepsilon), \rho) \\ &\geqslant \rho^{-1} \min\big(\operatorname{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho^p)^{1/p}, p\rho^{1-p} \operatorname{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho^p)\big) \\ &\geqslant \rho^{-p} \operatorname{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho^p). \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour ρ dans I_ε, la suite $u_h = \rho^{-p^{-h}} \operatorname{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho^{p^{-h}})$ est croissante et converge vers une limite ℓ qui vérifie $1 \geqslant \ell \geqslant \min(\ell^{1/p}, p\ell)$ c'est-à-dire $\ell = 1$. □

Remarque 8.17. — Il est d'usage de dire que les objets de MLCF($\mathcal{R}$) ont une *structure de Frobenius forte.* Toutefois, à bien des égards, cette structure forte donne moins d'informations que la structure de Frobenius faible. En effet l'*antécédent fort* du module différentiel $\mathcal{M}_\varepsilon$ est $\mathcal{M}_\varepsilon$ lui-même, donc défini dans la même couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon)$ alors que l'antécédent faible de $\mathcal{M}_\varepsilon$ est défini dans la couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon^p)$ qui est strictement plus grande.

9. Pentes d'un module différentiel

9.1. Topologies. — L'anneau $\mathcal{A}(I)$ est muni de la topologie localement convexe définie par la famille des valeurs absolues $|\cdot|_\rho$ pour ρ dans I. Cette topologie est celle de la convergence uniforme sur les sous-couronnes fermées de $\mathcal{C}(I)$. Elle fait de $\mathcal{A}(I)$ un espace de Fréchet c'est-à-dire métrique complet.

Définition 9.1. — Soit $\lambda \geqslant 0$ un nombre réel et soit ρ dans I. On définit une norme sur $\mathcal{D}(I)$ en posant :

$$\Big\| \sum a_i \frac{1}{i!} D^i \Big\|_{\lambda,\rho} = \max |a_i|_\rho \, \rho^{-i(1+\lambda)}.$$

Ce sont les normes des polynômes différentiels de $\mathcal{D}(I)$ vus comme opérateurs sur les espaces $\mathcal{B}_\rho(\rho^{\lambda+1})$.

Définition 9.2. — Pour $\lambda \geqslant 0$, on note $\mathcal{T}_\lambda$ la topologie définie sur $\mathcal{D}(I)$ par la famille de normes $\|\cdot\|_{\lambda,\rho}$ pour ρ dans I.

Remarque 9.3. — Lorsque l'intervalle I est ouvert, l'espace $\mathcal{D}(I)$, muni de la topologie $\mathcal{T}_\lambda$, est un espace métrique séparé mais n'est pas complet. Ce n'est même pas une limite inductive de Fréchet.

Dans ce cas, et contrairement à ce qui se passe dans le théorème 5.2, les hypothèses du théorème des homomorphismes, même le plus général ([**23**], Chap. IV théorème 2), ne sont pas satisfaites. Ceci montre les limites des méthodes de l'analyse fonctionnelle et nous devrons utiliser des méthodes spécifiques aux équations différentielles p-adiques.

Définition 9.4. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}(I)$-module différentiel. On le munit de la topologie quotient $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$ donnée par une présentation

$$\mathcal{D}(I)^\mu \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Cette topologie est indépendante de la présentation choisie. Elle n'est pas séparée en général. Le point de départ de la démonstration du théorème de décomposition est d'étudier l'adhérence de 0 pour cette topologie ainsi que le séparé associé.

Le résultat suivant est fondamental. À cause des idéaux différentiels non triviaux dans le cas d'un intervalle ouvert (exemple 3.2), il ne peut pas être démontré par voie purement algébrique.

Théorème 9.5. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel de rang μ et soit $\lambda \geqslant 0$. L'adhérence $\overline{O}_\lambda(\mathcal{M})$ de zéro dans $\mathcal{M}$ pour la topologie $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$ est un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel.*

Preuve. — Soit J un intervalle fermé contenu dans I. On munit $\mathcal{M}_J = \mathcal{A}(J) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$ de la topologie quotient induite par la norme $\max_{\rho \in J} \| \cdot \|_{\lambda,\rho}$ sur $\mathcal{D}(I)$ et on note $\mathcal{N}_J$ l'adhérence de 0 dans cet espace. Par définition de la topologie quotient, on a

$$\overline{O}_\lambda(\mathcal{M}) = \bigcap_{J \text{ fermé de } I} \mathcal{N}_J.$$

Comme $\mathcal{N}_J$ est un module différentiel sur l'anneau principal $\mathcal{A}(J)$, c'est un module libre de type fini. On constate que le rang de $\mathcal{N}_J$ est une fonction décroissante de J. Il en résulte que, pour J assez grand, les $\mathcal{N}_J$ sont les sections locales d'un faisceau $\widetilde{\mathcal{N}}$ localement libre sur la couronne $\mathcal{C}(I)$. On en déduit que $\overline{O}_\lambda(\mathcal{M}) = \Gamma\big(\mathcal{C}(I), \widetilde{\mathcal{N}}\big)$ est un module libre de type fini. □

La catégorie MLC $\big(\mathcal{A}(I)\big)$ étant abélienne, on a aussi :

Corollaire 9.6. — *Sous les hypothèses du théorème, le séparé associé $\mathcal{M}/\overline{O}_\lambda(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel.*

Proposition 9.7. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel et soit $\lambda \geqslant 0$. Si l'adhérence de 0 pour la topologie $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$ est $\mathcal{M}$ tout entier, alors, pour tout ρ dans I, on a* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I)}\big(\mathcal{M}, \mathcal{A}_\rho(\rho^{\lambda+1})\big) = 0$.

Preuve. — La démonstration reprend des idées déjà utilisées par Dwork [**18**] et Robba [**31**].

On considère une présentation

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(I)^\mu \xrightarrow{u} \mathcal{D}(I)^\mu \xrightarrow{v} \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Par hypothèse, tout élément $m = v(P)$ de $\mathcal{M}$ appartient à l'adhérence de 0. Il existe donc une suite Q_n dans $\mathcal{D}(I)^\mu$ telle que, pour tout ρ dans I, la suite $\|u(Q_n) - P\|_{\lambda,\rho}$ tende vers 0. Mais la norme $\| \cdot \|_{\lambda,\rho}$ est la norme d'opérateur sur $\mathcal{B}_\rho(\rho^{\lambda+1})$; si g est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I)}\Big(\mathcal{M}, \mathcal{B}_\rho(\rho^{\lambda+1})\Big)$, on a :

$$|g(m)|_\rho = |g \circ v(P)|_\rho = |g \circ v(P - u(Q_n))|_\rho \leqslant \|u(Q_n) - P\|_{\lambda,\rho} \max_{1 \leqslant i \leqslant \mu} |g \circ v(e_i)|_\rho$$

où $\{e_i\}$ désigne la base canonique de $\mathcal{D}(I)^\mu$. En faisant tendre n vers l'infini, on trouve $g(m) = 0$ c'est-à-dire $g = 0$. Pour terminer, on utilise un résultat de Dwork [**18**] disant que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I)}\Big(\mathcal{M}, \mathcal{B}_\rho(\rho^{\lambda+1})\Big) = 0$ entraîne $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I)}\Big(\mathcal{M}, \mathcal{A}_\rho(\rho^{\lambda+1})\Big) = 0$. □

9.2. Le théorème de décomposition. — Le but de ce paragraphe est d'énoncer et de donner une idée de la démonstration du théorème de base sur les modules différentiels solubles. Pour les détails techniques, bien sûr essentiels, nous renvoyons le lecteur à [**13**].

La démonstration du théorème de décomposition utilise le théorème 9.5 et la proposition 9.7. Il repose aussi de manière essentielle sur le théorème 9.8. Les majorations et minorations explicites qui interviennent dans ce dernier sont des résultats fins de la théorie des équations différentielles p-adiques.

Théorème 9.8. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Si* $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) > \lambda \geqslant 0$, *pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la topologie $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$ sur $\mathcal{M}_\varepsilon$ n'est pas séparée.*

Esquisse de preuve. — Posons $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) = \beta > \lambda$. Pour ε assez petit et ρ dans I_ε, on a $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho^{\beta+1}$. On choisit une base de $\mathcal{M}_\varepsilon$ et on note G_s la matrice de l'opérateur D^s dans cette base.

Pour ρ fixé dans I_ε, on cherche l'antécédent de Frobenius de $\mathcal{M}$ d'ordre maximum et on prend une base cyclique de celui-ci. La majoration obtenue dans le théorème 6.2 et le fait qu'il existe une base cyclique pas trop éloignée de la base de départ (théorème 6.1) permettent de montrer les majoration et minoration suivantes dans lesquelles c_1 et c_2 sont des fonctions définies sur I_ε avec c_1 logarithmiquement convexe

$$\left\| x^s \frac{1}{s!} G_s \right\|_\rho \leqslant c_2(\rho)\, \rho^{-\beta s} \qquad (\forall s \geqslant 0)$$

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant p^h} \left\| x^s \frac{1}{s!} G_s \right\|_\rho \geqslant c_1(\rho)\, \rho^{-\beta p^h} \qquad (\forall h \geqslant 0)$$

Par des arguments de convexité, on en déduit qu'il existe des coefficients $\alpha_{h,s}$ $(0 \leqslant s \leqslant p^h)$ égaux à 0 ou 1 tels que, pour tout $h \geqslant 0$, on ait :

$$0 < c_1(\rho)\, \rho^{-\beta p^h} \leqslant \left\| \sum_{s=0}^{p^h} \alpha_{h,s}\, x^s \frac{1}{s!} G_s \right\|_\rho \leqslant c_2(\rho)\, \rho^{-\beta p^h} \tag{13}$$

On pose alors $L_h = \displaystyle\sum_{s=0}^{p^h} \alpha_{h,s}\, x^{s+[\beta p^h]} \frac{1}{s!} D^s$ où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α. Comme $\rho < 1$, on a $\|L_h\|_{\lambda,\rho} \leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant p^h} \rho^{s+[\beta p^h]}\, \rho^{-s(\lambda+1)} \leqslant \rho^{(\beta-\lambda)p^h - 1}$. Comme $\beta > \lambda$, la suite L_h tend vers 0 dans $\mathcal{D}(I_\varepsilon)$ pour la topologie localement convexe des normes $\|\cdot\|_{\lambda,\rho}$ $(\rho \in I)$. La minoration (13) montre que l'image dans $\mathcal{M}$ de la suite L_h ne tend pas vers 0 pour la topologie quotient (la majoration (13) montre qu'elle est bornée).

Un argument de compacité, ou plutôt de c-compacité si le corps K est sphériquement complet mais pas localement compact, permet d'extraire (resp. de c-extraire) de l'image de la suite L_h dans $\mathcal{M}_\varepsilon$ une suite qui converge vers un élément non nul. Cet élément appartient par construction à l'adhérence de 0. □

Définition 9.9. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble et soit $\lambda \geqslant 0$.

1) On dit que $\mathcal{M}$ a des *pentes supérieures*[2] *à* λ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour ρ dans I_ε, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I_\varepsilon)}\left(\mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{A}_\rho(\rho^{\lambda+1})\right) = 0$.

2) Si $\mathcal{M}$ est non nul, on dit qu'il est *purement de pente* β si $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) = \beta$ et si $\mathcal{M}$ a des pentes supérieures à λ pour tout $\lambda < \beta$.

***Théorème 9.10* (de décomposition)**. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble non nul et soit $\lambda \geqslant 0$ un réel. Il existe un (unique) sous-module différentiel $\mathcal{M}_{>\lambda}$ de $\mathcal{M}$ qui a des pentes supérieures à λ et tel que* $\mathrm{pt}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}) \leqslant \lambda$.

Si, de plus, $0 \leqslant \lambda < \mathrm{pt}(\mathcal{M})$, alors $\mathcal{M}_{>\lambda}$ est non nul.

Preuve. — Posons $\beta = \mathrm{pt}(\mathcal{M})$. On prend ε suffisamment petit pour que $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho) = \rho^{\beta+1}$ pour ρ dans I_ε.

Pour $\lambda \geqslant \mathrm{pt}(\mathcal{M})$, on prend $\mathcal{M}_{>\lambda} = 0$.

Supposons donc $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$ et notons $\mathcal{N}_\varepsilon$ l'adhérence de zéro dans $\mathcal{M}_\varepsilon$ pour la topologie $\mathcal{T}_{\lambda,Q}$. Le théorème 9.8 dit que $\mathcal{N}_\varepsilon \neq 0$ pour ε assez petit. Maintenant, pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, l'injection $\mathcal{M}_\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{M}_{\varepsilon'}$ est continue donc $\mathcal{N}_\varepsilon \hookrightarrow \mathcal{N}_{\varepsilon'}$. D'après le théorème 9.5, il en résulte que les $\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{A}(I_\varepsilon)} \mathcal{N}_\varepsilon$ forment une suite croissante de sous-$\mathcal{R}$-modules différentiels de $\mathcal{M}$. Cette suite est nécessairement stationnaire. On note $\mathcal{M}_{>\lambda,0}$ sa limite ; c'est un $\mathcal{R}$-module différentiel (comme sous-module différentiel de $\mathcal{M}$) non nul d'après le théorème 9.8. La catégorie $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$ étant abélienne, $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$ est aussi un objet de $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$.

La topologie sur $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$ est quotient de celle de $\mathcal{M}$ (une présentation de $\mathcal{M}$ fournit une présentation de $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$). Par construction, $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}$ est donc séparé, et, d'après le théorème 9.8, $\mathrm{pt}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda,0}) \leqslant \lambda$. Comme $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$, on a $\mathrm{pt}(\mathcal{M}_{>\lambda,0}) = \mathrm{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$.

Par contre, il n'y a aucune raison pour que la topologie sur $\mathcal{M}_{>\lambda,0}$ soit la topologie induite par celle de $\mathcal{M}$. On itère donc le procédé en construisant, à partir des adhérences de zéro, un sous-module différentiel $\mathcal{M}_{>\lambda,i+1}$ de $\mathcal{M}_{>\lambda,i}$ tel que $\mathrm{pt}(\mathcal{M}_{>\lambda,i}/\mathcal{M}_{>\lambda,i+1}) \leqslant \lambda$ et $\mathrm{pt}(\mathcal{M}_{>\lambda,i+1}) = \mathrm{pt}(\mathcal{M}_{>\lambda,i}) = \mathrm{pt}(\mathcal{M}) > \lambda$.

La suite des $\mathcal{M}_{>\lambda,i}$ étant décroissante et $\mathcal{M}_{>\lambda,i}$ ne pouvant être nul d'après le théorème 9.8, le processus s'arrête lorsque $\mathcal{M}_{>\lambda,\nu+1} = \mathcal{M}_{>\lambda,\nu}$ ce qui signifie, d'après la proposition 9.7, que toutes les pentes de $\mathcal{M}_{>\lambda,\nu}$ sont supérieures à λ. Le module $\mathcal{M}_{>\lambda} := \mathcal{M}_{>\lambda,\nu}$ a toutes les propriétés demandées. □

Exemple 9.11. — Reprenons l'exemple 8.3 ou l'exemple 8.4 avec $p > 5$. L'opérateur L a un point singulier régulier à l'infini et un point singulier irrégulier en zéro. En utilisant le théorème de transfert [**7**], on montre que le module différentiel $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot L$ est de pente strictement positive (sinon les solutions à l'infini convergeraient plus loin qu'elles ne le font). Par ailleurs, la solution f fournit une solution dans $\mathcal{A}_\rho(\rho)$ pour ρ

[2] Plus la pente est grande plus les rayons de convergence de $\mathcal{M}$ sont petits.

assez proche de 1. Donc, $\mathcal{M}_{>\lambda}$ et $\mathcal{M}^{\leqslant\lambda}$ sont tous deux non nuls donc de rang un. Il résulte alors du théorème de décomposition, mais on peut le vérifier directement, que l'adhérence de l'idéal (L) de $\mathcal{D}(I_\varepsilon)$ pour la topologie $\mathcal{T}_0$ est égale à l'idéal $\big(L, f\,D - f'\big)$.

Corollaire 9.12. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel tel que toutes les pentes du module différentiel dual $\mathcal{M}^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ sont supérieures à 0. Étant donné une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$ et un nombre ε suffisamment petit, il existe, pour tout intervalle fermé J contenu dans I_ε, un nombre réel M_J tel que, pour tout m dans $\mathcal{M}$, on ait $\|m\|_{\mathfrak{e},\rho} \leqslant M_J \, \|D(m)\|_{\mathfrak{e},\rho}$.*

Preuve. — Si la dérivation est représentée dans la base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$ par la matrice G, elle est représentée dans la base duale $\mathfrak{e}^*$ de $\mathcal{M}^*$ par la matrice $-{}^tG$. Comme toute les pentes de $\mathcal{M}^*$ sont supérieures à 0, on a $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*_{>0}$ et 0 est dense dans $\mathcal{M}^*$ pour la topologie quotient associée à la pente 0. Ceci signifie que, pour tout ε suffisamment petit, tout intervalle fermé J contenu dans I_ε et tout $\eta > 0$, il existe une matrice $Q_{J,\eta}$ de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{D}(I_\varepsilon)\big)$ telle que, pour tout ρ de J,

$$\big\| Q_{J,\eta} \left(D\ \boldsymbol{I} - (-{}^tG) \right) - \boldsymbol{I} \big\|_{0,\rho} < \eta.$$

Soit maintenant m un élément de $\mathcal{M}_\varepsilon$ et notons $[m]$ le vecteur colonne de ses composantes dans la base $\mathfrak{e}$. Par définition de la norme $\| \cdot \|_{0,\rho}$, on a pour ρ dans J

$$\big\| Q_{J,1} \left(D([m]) + {}^tG[m] \right) - [m] \big\|_\rho < \big\| [m] \big\|_\rho$$

c'est-à-dire , en posant $M_J = \max_{\rho \in J} \|Q_{J,1}\|_{0,\rho}$ et en utilisant la formule (2),

$$\|m\|_{\mathfrak{e},\rho} = \big\| [m] \big\|_\rho = \big\| Q_{J,1} \, [D(m)] \big\|_\rho \leqslant M_J \, \big\| [D(m)] \big\|_\rho = M_J \, \|D(m)\|_{\mathfrak{e},\rho}. \qquad \square$$

9.3. Fonctorialité. — Pour simplifier les notations, étant donné un objet $\mathcal{M}$ de $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$, on pose, pour ε suffisamment petit et ρ dans I_ε :

$$\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I_\varepsilon)} \left(\mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{A}_\rho(\rho^{\lambda+1}) \right)$$

Autrement dit, d'une part, $\mathcal{M}$ a toutes ses pentes supérieures à λ si et seulement si $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = 0$ pour ρ suffisamment proche de 1 et, d'autre part, $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) \leqslant \lambda$ si et seulement si $\dim_K \big(\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) \big) = \dim_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ pour ρ suffisamment proche de 1.

Lemme 9.13. — *Soit $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ une suite exacte de* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$ *et soit $\lambda \geqslant 0$ un réel.*

1) *On a $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) = \max \Big(\mathrm{pt}(\mathcal{N}), \mathrm{pt}(\mathcal{Q}) \Big)$.*

2) *Si toutes les pentes de $\mathcal{M}$ sont supérieures à λ, il en est de même des pentes de $\mathcal{N}$ et des pentes de $\mathcal{Q}$.*

3) *Si toutes les pentes de $\mathcal{N}$ sont supérieures à λ, alors $\mathcal{N}$ est contenu dans $\mathcal{M}_{>\lambda}$.*

Preuve. — 1) C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.5.

2) Supposons ε suffisamment petit et ρ dans I_ε. On a d'après le corollaire 5.7 :

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{Q}, \rho) \longrightarrow \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) \longrightarrow \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N}, \rho) \longrightarrow 0 \tag{14}$$

Comme, par hypothèse, $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = 0$, on trouve $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N}, \rho) = \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{Q}, \rho) = 0$.

3) Par hypothèse, pour ε suffisamment petit et ρ dans I_ε, on a

$$\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}_{>\lambda}, \rho) = \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N}, \rho) \oplus \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}_{>\lambda}, \rho) = 0.$$

Or $\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda}$ est un quotient de $\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}_{>\lambda}$ donc, d'après 2), $\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda}, \rho) = 0$. Maintenant, la suite exacte (14) montre que :

$$\mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/(\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda}), \rho) = \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}, \rho).$$

Par ailleurs, comme $\mathrm{pt}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}) \leqslant \lambda$, on obtient (cf. remarque 3.4) :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}) &= \dim_K \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}, \rho) \\ &= \dim_K \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}/(\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda}), \rho) \\ &\leqslant \dim_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}/(\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda})) \end{aligned}$$

d'où il résulte que $\mathcal{N} + \mathcal{M}_{>\lambda} = \mathcal{M}_{>\lambda}$. □

Lemme 9.14. — *Soit $\mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M}$ un morphisme de* MLCS($\mathcal{R}$). *On a $u(\mathcal{N}_{>\lambda}) \subset \mathcal{M}_{>\lambda}$.*

Preuve. — Comme $u(\mathcal{N}_{>\lambda})$ est un quotient de $\mathcal{N}_{>\lambda}$, d'après le lemme 9.13-2, toutes ses pentes sont supérieures à λ. D'après le lemme 9.13-3, il est contenu dans $\mathcal{M}_{>\lambda}$. □

Lemme 9.15. — *Si $\mathrm{pt}(\mathcal{M}) \leqslant \lambda$ et si $\mathcal{M}$ a toutes ses pentes supérieures à λ, alors $\mathcal{M} = 0$.*

Preuve. — En effet, pour ε suffisamment petit et pour ρ dans I_ε, on a :

$$0 = \dim_K \mathcal{S}_\lambda(\mathcal{M}, \rho) = \dim_{\mathcal{R}} \mathcal{M}.$$ □

Définition 9.16. — On pose $\mathcal{M}^{\leqslant\lambda} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{>\lambda}$.

Théorème 9.17. — *Les modules différentiels $\mathcal{M}_{>\lambda}$ et $\mathcal{M}^{\leqslant\lambda}$ dépendent fonctoriellement de $\mathcal{M}$. Les foncteurs ainsi définis de la catégorie* MLCS($\mathcal{R}$) *dans elle-même sont exacts.*

Preuve. — D'après le lemme 9.14 un morphisme $\mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M}$ de la catégorie MLCS($\mathcal{R}$) définit par restriction un morphisme $\mathcal{N}_{>\lambda} \xrightarrow{u_\lambda} \mathcal{M}_{>\lambda}$. Par passage au quotient, on en déduit un morphisme $\mathcal{N}^{\leqslant\lambda} \xrightarrow{u^\lambda} \mathcal{M}^{\leqslant\lambda}$.

Considérons maintenant une suite exacte de MLCS($\mathcal{R}$) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{u} \mathcal{M} \xrightarrow{v} \mathcal{Q} \longrightarrow 0.$$

On lui associe la suite exacte de complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_{>\lambda} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N}^{\leqslant\lambda} & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle u_\lambda}\downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle u^\lambda}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{>\lambda} & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}^{\leqslant\lambda} & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle v_\lambda}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle v^\lambda}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{>\lambda} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathcal{Q}^{\leqslant\lambda} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Par hypothèse, le complexe $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q}$ a une cohomologie nulle. D'après le lemme 9.13-2 (resp. 9.13-1) les espaces de cohomologie du complexe $\mathcal{N}_{>\lambda} \longrightarrow \mathcal{M}_{>\lambda} \longrightarrow \mathcal{Q}_{>\lambda}$ (resp. $\mathcal{N}^{\leqslant\lambda} \longrightarrow \mathcal{M}^{\leqslant\lambda} \longrightarrow \mathcal{Q}^{\leqslant\lambda}$) ont toutes leurs pentes supérieures à λ (resp. sont de pente inférieure à λ). La suite exacte longue de cohomologie montre que ces espaces sont isomorphes donc nuls d'après le lemme 9.15. □

9.4. Images inverses. — Le comportement du foncteur $\mathcal{M} \to \mathcal{M}_{>\lambda}$ par images inverses est délicat ([**13**], 6.3) : pour $d \geqslant 2$ on note φ_d la ramification d'ordre d.

Théorème 9.18. — *Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble, $d \geqslant 2$ un entier et λ un réel. On suppose que $0 \leqslant \lambda < pt(\mathcal{M})$. Alors*
1) *l'image inverse $\varphi_d^*(\mathcal{M})$ est soluble,*
2) *on a une injection $\varphi_d^*(\mathcal{M})_{>d\lambda} \to \varphi_d^*(\mathcal{M}_{>\lambda})$,*
3) *cette injection est une bijection si d est premier avec p.*

À l'aide du corollaire 8.12, on en déduit le corollaire :

Corollaire 9.19. — *La catégorie* $\mathrm{MLCF}(\mathcal{R})$ *est stable par les foncteurs $\mathcal{M} \to \mathcal{M}_{>\lambda}$ et $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\leqslant\lambda}$.*

9.5. Polygone de Newton. — Le théorème de décomposition permet de définir les pentes d'un module différentiel soluble.

***Corollaire 9.20* (décomposition suivant les pentes).** — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Il y a une filtration décroissante de $\mathcal{M}$ par des sous-modules différentiels $\mathcal{M}_{>\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) dont le gradué associé $\mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M} = \left(\bigcap_{\nu<\lambda} \mathcal{M}_{>\nu}\right)/\mathcal{M}_{>\lambda}$ est nul ou purement de pente λ.*

Preuve. — Par construction, $\mathcal{M}_{>\lambda}$ est le plus grand sous-module différentiel de $\mathcal{M}$ dont toutes les pentes sont supérieures à λ. Pour $\nu \geqslant \lambda$, $\mathcal{M}_\nu$, qui a des pentes supérieures à $\nu \geqslant \lambda$, est contenu dans $\mathcal{M}_{>\lambda}$.

La suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{M}_{>\lambda} \longrightarrow \bigcap_{\nu<\lambda} \mathcal{M}_\nu \longrightarrow \mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M} \longrightarrow 0$ montre que, s'il est non nul, $\mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M}$ a des pentes supérieures à ν pour tout $\nu < \lambda$. Par ailleurs, le lemme du serpent fournit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\leqslant\lambda} \longrightarrow \bigcup_{\nu<\lambda} \mathcal{M}^{\leqslant\nu} \longrightarrow 0$$

qui montre que $\mathrm{pt}(\mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M}) \leqslant \lambda$. □

Définition 9.21. — On appelle *pentes* du module différentiel soluble $\mathcal{M}$ les nombres réels λ pour lesquels $\mathrm{Gr}_\lambda(\mathcal{M}) \neq \{0\}$.

Définition 9.22. — Le *polygone de Newton* d'un module différentiel soluble $\mathcal{M}$ est le polygone convexe commençant au point $(0,0)$ et qui a, pour chaque pente λ de $\mathcal{M}$, un coté de pente λ dont la projection sur l'axe des abscisses a pour longueur le rang de $\mathrm{Gr}_\lambda \mathcal{M}$. Nous le noterons $\mathrm{New}(\mathcal{M})$.

Le corollaire 14.12 dit que les sommets du polygone de Newton ont des coordonnées entières. En particulier, cela implique que les pentes d'un module différentiel soluble de rang μ sont des nombres rationnels dont le dénominateur est inférieur ou égal à μ.

CHAPITRE III
MODULES DIFFÉRENTIELS DE PENTE NULLE

De nombreux problèmes dans la théorie de la cohomologie p-adique des variétés algébriques sur les corps finis se réduisent à étudier l'indice d'un opérateur différentiel $P(x, D)$ de $K[x, D]$ opérant sur un espace de fonctions analytiques.

Le théorème de décomposition du chapitre II permet de décomposer le module différentiel $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P$ en sa partie de pentes strictement positives $\mathcal{M}_{>0}$ et sa partie modérée $\mathcal{M}^{\leqslant 0}$.

Le premier théorème d'indice de P. Robba [**31**] montre que l'obstruction à l'existence de l'indice pour l'opérateur P ne provient pas de la partie de pentes strictement positives. L'exemple de l'opérateur $xD-\alpha$ avec α nombre de Liouville a montré depuis longtemps [**15**] qu'il n'en est pas de même pour la partie modérée.

Un point clef de la théorie est donc de savoir associer à chaque module différentiel de pente nulle un « exposant » sur lequel on puisse lire l'obstruction à l'existence de l'indice. Dans le cas complexe, le problème ne se pose pas car il n'y a pas de nombre de Liouville. De plus, l'action de la monodromie fournit une définition facile des exposants.

Dans le cas p-adique, il faut trouver un succédané à la monodromie. On pourra voir dans [**36**] les difficultés conceptuelles auxquelles une approche « naïve » conduit. En effet, si l'exposant d'un opérateur d'ordre un se lit directement sur ses coefficients, cela n'est plus du tout vrai pour un opérateur d'ordre $\geqslant 2$ (on passe d'une situation abélienne à une situation non abélienne). Même si cela n'est pas évident dans la présentation adoptée ici, c'est finalement la structure de Frobenius faible qui va fournir la solution.

Dans ce chapitre nous allons définir la notion « d'exposant » pour les modules de pente nulle et démontrer le théorème de monodromie locale p-adique selon lequel, si l'exposant d'un module différentiel de pente nulle « a des différences non Liouville », il s'obtient par extensions successives de modules de rang un définis par $xD - \alpha$ où α parcourt les composantes de l'exposant. Ce sont ces nombres α qui représentent l'obstruction à l'existence de l'indice.

Nous parlons de l'exposant (au singulier) alors que, dans le cas complexe il y a *des* exposants (définis modulo $\mathbb{Z}$ et à l'ordre près). Cette terminologie inhabituelle est

due au fait que, dans la situation p-adique, on ne peut, en général, associer à un module différentiel de Robba qu'un exposant global appartenant à un ensemble quotient compliqué. Ce n'est que lorsque cet exposant a « des différences non Liouville », qu'on peut le considérer comme une famille non ordonnée de nombres de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$. Dans ce cas, ces nombres (les composantes de l'exposant) jouent le rôle des exposants complexes.

10. L'ensemble des exposants

Nous commençons par définir l'ensemble dans lequel se trouvent les exposants des modules différentiels.

Dans ce paragraphe, on note $|\alpha|_\infty = \pm\alpha$ la valeur absolue ordinaire de l'entier α pour la distinguer de sa valeur absolue p-adique qui est notée $|\alpha|$.

Définition 10.1. — Pour α dans $\mathbb{Z}_p$ on note $\alpha^{(h)}$ le représentant entier de α modulo p^h qui se trouve dans l'intervalle $[(1-p^h)/2, (1+p^h)/2[$.

Définition 10.2. — Un élément α de $\mathbb{Z}_p$ est dit Liouville s'il n'appartient pas à $\mathbb{Z}$ et si l'une au moins des séries $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha - s} x^s$ ou $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + s} x^s$ a un rayon de convergence strictement inférieur à 1.

Le résultat suivant est facile à vérifier.

Proposition 10.3. — *Un nombre α est Liouville si et seulement s'il n'appartient pas à $\mathbb{Z}$ et si la suite $|\alpha^{(h)}|_\infty/h$ a une limite inférieure finie.*

Soit μ un entier, $\Delta = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu\}$ un élément de $\mathbb{Z}_p^\mu$ et σ une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, \mu\}$. On pose $\sigma(\Delta) = \{\Delta_{\sigma(1)}, \ldots, \Delta_{\sigma(\mu)}\}$, $\Delta^{(h)} = \{\Delta_1^{(h)}, \ldots, \Delta_\mu^{(h)}\}$ et, si Δ appartient à $\mathbb{Z}^\mu$, $\|\Delta\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant \mu} |\Delta_i|_\infty$.

Définition 10.4. — On dit que deux éléments Δ et Δ' de $\mathbb{Z}_p^\mu$ sont équivalents, et on note $\Delta \overset{\mathfrak{E}}{\sim} \Delta'$, s'il existe une suite σ_h de permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, \mu\}$ telles que la suite $\|\Delta'^{(h)} - \sigma_h(\Delta)^{(h)}\|_\infty$ soit un $\mathrm{O}(h)$.

Proposition 10.5. — *Soient Δ et Δ' deux éléments équivalents de $\mathbb{Z}_p^\mu$. Si aucune des différences $\Delta_i - \Delta_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant \mu)$ n'est de Liouville, il existe une permutation σ telle que $\Delta - \sigma(\Delta')$ appartienne à $\mathbb{Z}^\mu$. En particulier les différences $\Delta'_i - \Delta'_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant \mu)$ ne sont pas Liouville.*

Preuve. — Comme, pour $i \neq j$, les différences $\Delta_i - \Delta_j$ sont non Liouville, pour h assez grand, les nombres $\Delta_i^{(h)}$ et $\Delta_j^{(h)}$ sont distincts modulo n'importe quelle suite qui est un $\mathrm{O}(h)$. On en déduit que l'on peut choisir la suite de permutations $\{\sigma_h\}$ de telle sorte qu'elle soit constante à partir d'un certain rang. □

Exemple 10.6. — Posons $\alpha = \sum_{h=0}^{\infty} p^{f(2h)}$ et $\beta = \sum_{h=0}^{\infty} p^{f(2h+1)}$ où f est une fonction qui croit suffisamment vite vers l'infini. On montre que $\Delta = (\alpha, -\beta)$ et $\Delta' = (\alpha - \beta, 0)$ sont équivalents dans $\mathbb{Z}_p^2$ alors que $\Delta - \sigma(\Delta')$ n'appartient à $\mathbb{Z}^2$ pour aucune permutation σ.

Définition 10.7. — On note $\mathfrak{E}_\mu$ l'ensemble quotient $\mathbb{Z}_p^\mu / \overset{\mathfrak{E}}{\sim}$.

Définition 10.8. — On dit qu'un élément $\widetilde{\Delta}$ de $\mathfrak{E}_\mu$ *a des différences non Liouville* si l'un de ses représentants vérifie la condition de la proposition 10.5 (tous ses représentants vérifient alors cette condition).

Définition 10.9. — On dit qu'un élément $\widetilde{\Delta}$ de $\mathfrak{E}_\mu$ est *non Liouville* s'il a des différences non Liouville, et si, pour l'un de ses représentants Δ, les nombres Δ_i $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$ ne sont pas Liouville (tous ses représentants vérifient alors cette condition).

11. Exposant d'un module différentiel de Robba

Nous suivons ici la méthode utilisée par Dwork dans [**19**]. Celle-ci est plus directe que la présentation originale de [**12**] car elle revient à travailler directement sur le h-ième antécédent de Frobenius au lieu de procéder pas à pas. Cela rend les démonstrations un peu moins techniques mais, évidemment, ne supprime aucune des difficultés profondes liées à l'existence de nombres de Liouville.

11.1. Modules différentiels de Robba. — Soit $\mathcal{M}$ un $K(x)$-module différentiel soluble *régulier* (c'est-à-dire n'ayant, dans le disque unité, qu'une singularité régulière en 0). Il résulte du théorème de transfert [**7**] que, si les exposants de $\mathcal{M}$ en 0 ont des différences qui ne sont pas des nombres de Liouville, alors $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho$ pour tout $\rho < 1$. Suivant l'idée de Robba [**36**], nous considérons les $\mathcal{R}$-modules différentiels ayant cette dernière propriété pour ρ proche de 1. Nous verrons que, si leur exposant a des différences non Liouville, ils s'obtiennent, en tensorisant par $\mathcal{R}$, à partir des $K(x)$-modules différentiels solubles réguliers.

Définition 11.1. — Soit I un intervalle et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel. On dit que $\mathcal{M}$ est *de Robba* si $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}, \rho) = \rho$ pour tout ρ dans I.

Définition 11.2. — Un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$ sera dit *de pente nulle* s'il est (purement) de pente 0. Cela signifie que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$-module différentiel $\mathcal{M}_\varepsilon$ est de Robba.

On notera $\mathrm{Rob}\big(\mathcal{A}(I)\big)$ (resp. $\mathrm{Rob}(\mathcal{R})$) la sous-catégorie pleine de $\mathrm{MLC}\big(\mathcal{A}(I)\big)$ (resp. $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$) dont les objets sont les modules différentiels de Robba (resp. de pente nulle). Il résulte du théorème 8.2 et de la proposition 4.5 que les catégories $\mathrm{Rob}(\mathcal{A}(I))$ et $\mathrm{Rob}(\mathcal{R})$ sont abéliennes.

11.2. Cas d'une couronne fermée. — On note Γ_h le groupe des racines p^h-ièmes de l'unité dans une clôture algébrique $\widehat{K}$ de K. Pour ζ dans Γ_h et δ dans $\mathbb{Z}_p$, le nombre ζ^δ est bien défini.

Si Δ appartient à $\mathbb{Z}_p^\mu$, on note ζ^Δ la matrice diagonale dont le i-ième terme de la diagonale vaut ζ^{Δ_i}.

***Théorème 11.3* (définition de l'exposant).** — *Soit $I \subset]0,\infty[$ un intervalle fermé, soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}(I)$-module différentiel de Robba de rang μ, soit $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$ et soit $Y_\mathfrak{e}$ la résolvante associée (voir formule 10).*

L'ensemble des éléments Δ de $\mathbb{Z}_p^\mu$ pour lesquels il existe une suite (S_h) dans $\mathrm{Mat}\left(\mu, \mathcal{A}_{\widehat{K}}(I)\right)$ et deux constantes c_1, $c_2 > 0$ qui vérifient, pour tout entier $h > 0$, les conditions suivantes :

1) *$\zeta^\Delta S_h(x) = S_h(\zeta x)\, Y_\mathfrak{e}(\zeta x, x)$ pour tout ζ dans Γ_h,*

2) *$\|S_h\|_\rho \leqslant c_1^h$ pour tout ρ dans I,*

3) *Il existe ρ_0 dans I pour lequel $|\det(S_h)|_{\rho_0} \geqslant c_2$,*

est non vide, indépendant de la base $\mathfrak{e}$ et contenu dans une classe d'équivalence pour la relation $\overset{\mathfrak{e}}{\sim}$ (voir 10.4).

Preuve. — Elle se fait en plusieurs étapes

11.2.1. Existence. — Comme $\mathcal{M}$ est de Robba, la matrice $Y_\mathfrak{e}(x,y)$ est définie pour $|x|$ dans I et $|x-y| < |x|$. En particulier elle est définie pour $y = \zeta x$ et ζ dans Γ_h. On pose :

$$S_{h,\Delta}(x) = p^{-h} \sum_{\zeta \in \Gamma_h} \zeta^{-\Delta}\, Y_\mathfrak{e}(\zeta x, x)$$

La condition 1) se déduit facilement des relations $Y_\mathfrak{e}(\xi x, \zeta x) Y_\mathfrak{e}(\zeta x, x) = Y_\mathfrak{e}(\xi x, x)$ et $(\zeta\xi)^\Delta = \zeta^\Delta \xi^\Delta$ pour ζ et ξ dans Γ_h.

Puisque $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}) = \rho$, pour tout ρ dans I, les majorations explicites de Dwork-Robba [**21**] s'écrivent :

$$\| \frac{1}{s!} G_s \|_\rho \leqslant c(\rho)\, s^{\mu-1}\, \rho^{-s}$$

avec $c(\rho)$ donné explicitement à partir des $\|G_s\|_\rho$ pour $s < \mu$. En particulier, c est une fonction continue de ρ sur I. La condition 2) s'en déduit facilement avec $c_1 = p^\mu \max_{\rho \in I} c(\rho)$ (remarquer que $|\zeta - 1| < |\pi|^{p^{1-h}}$ pour ζ dans Γ_h).

Pour démontrer la troisième relation, on vérifie que la i-ième ligne de la matrice $S_{h,\Delta}$ ne dépend en fait que de Δ_i et est la somme, pour α dans $\{0,1,\ldots,p-1\}$, des i-ièmes lignes des matrices $S_{h+1,\Delta+\alpha \boldsymbol{I}}$. On en déduit que, pour Δ dans $\mathbb{Z}^\mu$, on a

$$\det(S_{h,\Delta}) = \sum_{v \in \mathfrak{D}} \det(S_{h+1,\Delta+p^h v})$$

où $\mathfrak{D}$ désigne l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans $\{0,1,\ldots,p-1\}$. Pour ρ_0 fixé dans I, ceci permet de construire, par récurrence, une suite Δ_h de $\mathbb{Z}^\mu$

telle que :

$$|\det(S_{h+1,\Delta_{h+1}})|_{\rho_0} \geqslant |\det(S_{h,\Delta_h})|_{\rho_0} \geqslant |\det(S_{0,0})|_{\rho_0} = 1.$$

Cette suite converge, dans $\mathbb{Z}_p^\mu$ vers un élément Δ qui vérifie les conditions 1) et 3).

11.2.2. Indépendance par rapport à la base. — Un changement de bases, de $\mathfrak{e}$ à $\mathfrak{f}$, dans $\mathcal{M}$ est représenté par une matrice H de $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}(I)\big)$. Les résolvantes correspondant à ces bases sont alors reliées par la relation $Y_\mathfrak{f}(x,y) = H(x)\, Y_\mathfrak{e}(x,y)\, H^{-1}(y)$. Supposons que la suite S_h vérifie les conditions 1), 2) et 3) pour le μ-uplet Δ et la matrice $Y_\mathfrak{e}$. On constate que la suite $S_h\, H^{-1}$ vérifie ces mêmes conditions pour Δ et la matrice $Y_\mathfrak{f}$.

11.2.3. Équivalence. — D'après la condition 2), on a $|\det(S_h)|_\rho \leqslant c_1^{\mu h}$ pour tout ρ dans I.

La convexité logarithmique de la fonction $\rho \mapsto |\det(S_h)|_\rho$ sur I et la condition 3) impliquent qu'il existe une constante $c_3 > 0$ telle que $|\det(S_h)|_\rho \geqslant c_3^h$ pour tout ρ dans I. Après multiplication de chaque matrice S_h par une constante (dépendant de h) et après changement de la constante c_1, on se ramène au cas où l'on peut supposer que la suite $\{S_h\}$ vérifie la condition plus forte :

3') $|\det(S_h)|_\rho \geqslant 1$ pour tout ρ dans I.

Nous supposerons désormais que la suite S_h (resp. S'_h) vérifie les conditions 1), 2) et 3') pour le μ-uplet Δ (resp. Δ') et la constante c_1 (resp. c'_1).

Posons $Q_h = S'_h\, S_h^{-1}$. La condition 1) donne

$$\zeta^{\Delta'} Q_h(x)\, \zeta^{-\Delta} = Q_h(\zeta x) \text{ pour tout } \zeta \text{ dans } \Gamma_h. \tag{15}$$

En particulier, si la fonction $\det(Q_h)$ s'annule en x alors elle s'annule aux p^h points ζx pour ζ dans Γ_h. La pente logarithmique de la fonction $\rho \mapsto |\det(Q_h)|_\rho$ augmente donc de p^h au point $\rho = |x|$. Maintenant, les conditions 2) et 3') pour les suites S_h et S'_h donnent, avec $c_4 = c'_1\, c_1^{\mu-1}$ et pour tout ρ dans I :

$$\|Q_h\|_\rho \leqslant c_4^h \qquad c_1^{-\mu h} \leqslant |\det(Q_h)|_\rho. \tag{16}$$

Un argument de convexité montre alors que $|\det(S_h)|_\rho$ ne peut pas s'annuler sur la couronne $\mathcal{C}(I_h)$ où I_h est une suite croissante d'intervalles dont la réunion est l'intérieur de I.

Considérons maintenant la décomposition $Q_h(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} q_s\, x^s$ où les q_s sont des matrices constantes, et posons :

$$c_5 = \max\Big(\min_{\rho\in I}\big(\frac{\rho}{\rho_0}\big), \min_{\rho\in I}\big(\frac{\rho_0}{\rho}\big)\Big) < 1.$$

La majoration (16) s'écrit :

$$\|q_s\| \leqslant c_4^h \min_{\rho\in I}(\rho^{-s}) = c_4^h\, c_5^{|s|\infty}\, \rho_0^{-s}.$$

Par ailleurs, la condition (15) s'écrit :

$$\zeta^{\Delta'_i-\Delta_j}(q_s)_{ij} = \zeta^s(q_s)_{ij} \qquad (\forall \zeta \in \Gamma_h)\ (1 \leqslant i,j \leqslant \mu)$$

et montre que le coefficient $(q_s)_{ij}$ est nul si s n'est pas congru à $\Delta'_i - \Delta_j$ modulo p^h. Donc, si $(q_s)_{ij} \neq 0$, alors $|s|_\infty \geqslant |\Delta_i'^{(h)} - \Delta_j^{(h)}|_\infty$. Il en résulte que :

$$|(Q_h)_{ij}|_{\rho_0} = \max_{s\in\mathbb{Z}} (|(q_s)_{ij}|\rho_0^s) \leqslant c_4^h\, c_5^{|\Delta_i'^{(h)}-\Delta_j^{(h)}|_\infty}. \tag{17}$$

Finalement, la minoration (9) montre qu'il existe, pour chaque valeur de h, une permutation σ_h telle que

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant\mu} |(Q_h)_{i\sigma_h(i)}|_{\rho_0} \geqslant c_1^{-\mu h}.$$

En combinant ces deux informations, on en déduit que

$$|\Delta_i'^{(h)} - \Delta_{\sigma_h(i)}^{(h)}|_\infty \leqslant h\,\frac{\log(c_1^\mu\, c_4)}{-\log(c_5)}.$$

Autrement dit, les μ-uplets Δ et Δ' sont équivalents. □

Définition 11.4. — On appelle exposant de $\mathcal{M}$ et on note $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$ la classe d'équivalence de $\mathfrak{E}_\mu$ définie dans le théorème 11.3.

11.3. Cas général. — Soient $I \supset J$ deux intervalles fermés et $\mathcal{M}$ un objet de $\mathrm{Rob}(\mathcal{A}(I))$. Un μ−uplet Δ et une suite $\{S_h\}$ vérifiant les conditions 1), 2) et 3) du théorème 11.3 sur l'intervalle I vérifient ces mêmes conditions sur l'intervalle J. On en déduit que l'exposant du module $\mathcal{A}(J)\otimes_{\mathcal{A}(I)}\mathcal{M}$ est le même que celui de $\mathcal{M}$. Ceci justifie les définitions suivantes.

Définition 11.5. — Soit I un intervalle et $\mathcal{M}$ un objet de $\mathrm{Rob}\,\mathcal{A}(I)$. On appelle exposant de $\mathcal{M}$ l'exposant du module $\mathcal{A}(J)\otimes_{\mathcal{A}(I)}\mathcal{M}$ où J est un intervalle fermé non réduit à un point contenu dans I.

Définition 11.6. — Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel de pente nulle. Les $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$-modules différentiels $\mathcal{M}_\varepsilon$ qui sont de Robba ont tous le même exposant. Celui-ci est appelé exposant de $\mathcal{M}$.

11.4. Propriétés des exposants. — Pour $0 < \nu < \mu$, la bijection canonique $\mathbb{Z}_p^\nu \times \mathbb{Z}_p^{\mu-\nu} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\mu$ définit, par passage au quotient, une application surjective $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{\Delta'}) \mapsto \widetilde{\Delta}\oplus\widetilde{\Delta'}$ de $\mathfrak{E}_\nu \times \mathfrak{E}_{\mu-\nu}$ sur $\mathfrak{E}_\mu$. Si $\mu \geqslant 2$, cette application n'est pas bijective.

Soit $\widetilde{\Delta}$ (resp. $\widetilde{\Delta'}$) un élément de $\mathfrak{E}_\nu$ (resp. $\mathfrak{E}_{\mu-\nu}$). Si $\widetilde{\Delta}\oplus\widetilde{\Delta'}$ a des différences non Liouville (resp. est non Liouville), il en est de même de $\widetilde{\Delta}$ et $\widetilde{\Delta'}$. La réciproque est fausse ($\widetilde{\Delta}$ et $\widetilde{\Delta'}$ peuvent avoir des différences non Liouville alors que certaines différences de $\widetilde{\Delta}\oplus\widetilde{\Delta'}$ sont Liouville).

Proposition 11.7. — *Soit I un intervalle et soit $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ une suite exacte de* $\mathrm{Rob}(\mathcal{A}(I))$. *On a $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M}) = \mathfrak{Exp}(\mathcal{N}) \oplus \mathfrak{Exp}(\mathcal{Q})$. En particulier, si $\mathcal{M}$ a un exposant non Liouville (resp. dont les différences sont non Liouville), il en est de même de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$.*

Preuve. — On complète une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{N}$ en une base $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ de $\mathcal{M}$. Le μ-uplet Δ et la suite $\{S_{h,\Delta}\}$ construite dans le théorème 11.3 pour satisfaire les conditions 1), 2) et 3) dans la base $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$, fournissent par restriction (resp. passage au quotient) un ν-uplet $(\Delta_1, \ldots, \Delta_\nu)$ (resp. $(\mu-\nu)$-uplet $(\Delta_{\nu+1}, \ldots, \Delta_\mu)$) et une suite de matrices satisfaisant ces mêmes conditions dans la base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{N}$ (resp. $\bar{\mathfrak{f}}$ de $\mathcal{Q}$). □

La multiplication par p des éléments de $\mathbb{Z}_p^\mu$ composante par composante définit par passage au quotient une bijection de $\mathfrak{E}_\mu$ dans lui-même que nous noterons p.

Proposition 11.8. — *Soit I un intervalle et $\mathcal{M}$ un objet de* $\mathrm{Rob}(\mathcal{A}(I))$. *Pour $\varphi(x) = x^p$, le module $\varphi^*(\mathcal{M})$ est de Robba et on a $\mathfrak{Exp}(\varphi^*(\mathcal{M})) = p\ \mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$.*

Preuve. — Le fait que $\varphi^*(\mathcal{M})$ soit de Robba est une conséquence immédiate de la proposition 7.2. Si $Y_{\mathfrak{e}}(x, y)$ est la résolvante pour $\mathcal{M}$ dans une base $\mathfrak{e}$, alors la résolvante pour $\varphi^*(\mathcal{M})$ dans la base $\varphi^*(\mathfrak{e})$ est $Y_{\mathfrak{e}}(x^p, y^p)$. Soit Δ un μ-uplet et $\{S_h\}$ une suite satisfaisant les conditions 1), 2) et 3) du théorème 11.3 dans la base $\mathfrak{e}$, on constate que $p\Delta$ et $\{\varphi^*(S_h)\}$ vérifient ces mêmes conditions dans la base $\varphi^*(\mathfrak{e})$ de $\varphi^*(\mathcal{M})$. □

Corollaire 11.9. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel de pente nulle ayant une structure de Frobenius forte (c'est-à-dire tel que $\varphi^{*\,h}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ pour un entier $h > 1$). Alors l'exposant de $\mathcal{M}$ est rationnel (c'est un μ-uplet de nombres de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ à permutation près).*

Preuve. — Si Δ est un représentant de l'exposant de $\mathcal{M}$, il existe une puissance q de p telle que $\Delta \overset{\mathfrak{S}}{\sim} q\Delta$ (proposition 11.8). Autrement dit, pour tout entier h, il existe une permutation σ_h telle que $\|\Delta^{(h)} - q\,\sigma_h(\Delta^{(h)})\|_\infty = \mathrm{O}(h)$. Maintenant, comme l'ordre de σ_h divise $\mu!$, on trouve $\|\Delta^{(h)} - q^{\mu!}\,\Delta^{(h)}\|_\infty = \mathrm{O}(h)$ et on en déduit que $\Delta - q^{\mu!}\Delta$ appartient à $\mathbb{Z}^\mu$. □

12. Structure des modules différentiels de pente nulle

Théorème 12.1. — *Soit I un intervalle ouvert. Tout $\mathcal{A}(I)$-module différentiel $\mathcal{M}$ de Robba dont l'exposant $\widetilde{\Delta}$ a des différences non Liouville s'obtient par extensions successives à partir des modules de rang un $x^{\Delta_i}\mathcal{A}(I)$ $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$.*

Remarque 12.2. — Comme les différences de $\widetilde{\Delta}$ ne sont pas Liouville, les composantes Δ_i sont définies modulo $\mathbb{Z}$ à ordre près si bien que les modules $x^{\Delta_i}\mathcal{A}(I)$ ne dépendent pas, à ordre près, du représentant Δ choisi.

Preuve. — On choisit un représentant Δ de $\widetilde{\Delta}$ dont les différences ne soient pas dans $\mathbb{Z} - \{0\}$. Par définition, si J est un intervalle fermé contenu dans I, il existe une suite $\{S_h\}$ vérifiant les conditions 1), 2) et 3) du théorème 11.3. On peut même supposer qu'elle vérifie la condition 3'). On pose alors

$$Q_h = S_{h+1}\, S_h^{-1}.$$

Quitte à changer c_1 en c_1^2, la suite $\{S_{h+1}\}$ vérifient les conditions 1), 2) et 3'). La matrice Q_h vérifie donc les relations (15) et (16) et le coefficient $(Q_h)_{ij}$ ne contient que des puissances de x congrues à $\Delta_i - \Delta_j$ modulo p^h.

On note R_h la matrice obtenue, à partir de la matrice Q_h, en ne gardant, dans le coefficient $(Q_h)_{ij}$, que le terme de degré $(\Delta_i - \Delta_j)^{(h)}$. Par construction, la matrice R_h commute avec la matrice ζ^Δ et un calcul analogue à celui qui justifiait (17) donne, pour ρ dans l'intérieur de I :

$$\|Q_h - R_h\|_\rho \leqslant c_4^h\, c_5(\rho)^{p^h} \tag{18}$$

avec $c_5(\rho) < 1$. On en déduit que, quelque soit l'intervalle fermé $\widetilde{J}$ contenu dans J, pour h assez grand, disons $h \geqslant h_0$, R_h appartient à $\mathrm{Gl}\left(\mu, \mathcal{A}(\widetilde{J})\right)$ et, d'après les conditions (16), que $\max(\|R_h\|, \|R_h^{-1}\|) \leqslant c_6^h$.

On considère alors la suite C_h $(h \geqslant h_0)$ de matrices inversibles définies par la récurrence

$$C_{h+1} = R_h\, C_h \qquad C_{h_0} = \boldsymbol{I}$$

et l'on vérifie facilement qu'il existe une constante c_7 telle que

$$\|C_{h+1}^{-1} Q_h\, C_h - \boldsymbol{I}\,\|_\rho \leqslant c_7^{h^2}\, c_5(\rho)^{p^h}$$

pour tout ρ dans $\widetilde{J}$. On en déduit que la suite :

$$C_h^{-1}\, S_h = C_h^{-1} Q_{h-1} C_{h-1}\; C_{h-1}^{-1} Q_{h-2} C_{h-2}\; \cdots\; C_{h_0+1}^{-1} Q_{h_0}\; S_{h_0}$$

converge dans $\mathrm{Mat}(\mathcal{A}(\widetilde{J}))$. Notons S sa limite.

Par passage à la limite, la condition 1) donne

$$\zeta^\Delta\, S(x) = S(\zeta x)\, Y_{\mathfrak{e}}(\zeta x, x) \qquad (\forall \zeta \in \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \Gamma_h).$$

En particulier, si le déterminant de $S(x)$ s'annulait en un point x, il s'annulerait en tous les points ζx ce qui est impossible pour une fonction analytique. Donc S appartient à $\mathrm{Gl}\left(\mu, \mathcal{A}(\widetilde{J})\right)$.

Le changement de base associé à la matrice S fournit une base $S\mathfrak{e}$ de $\mathcal{A}(\widetilde{J}) \otimes_{\mathcal{A}(I)} \mathcal{M}$ dans laquelle la résolvante $Y_{S\mathfrak{e}}$ satisfait la condition $Y_{S\mathfrak{e}}(\zeta x, x) = \zeta^\Delta$ d'où, en dérivant par rapport à x, on déduit que la matrice $G_{S\mathfrak{e}}$ représentant la dérivation vérifie la relation :

$$\zeta\, G_{S\mathfrak{e}}(\zeta x)\, \zeta^\Delta = \zeta^\Delta\, G_{S\mathfrak{e}}(x)$$

Puisque les différences $\Delta_i - \Delta_j$ ne sont pas des entiers non nuls, cette relation montre que $G_{S\mathfrak{e}}(x) = A\, x^{-1}$ où A est une matrice constante. On en déduit que $Y_{S\mathfrak{e}}(x, y) =$

$(x/y)^A = \left(1 + \frac{x-y}{y}\right)^A$ ce qui donne $\zeta^\Delta = Y_{S\mathfrak{e}}(\zeta x, x) = \zeta^A$ et montre que la partie semi-simple de la matrice A est la matrice diagonale de diagonale Δ.

Pour terminer la démonstration, il suffit de « recoller » les solutions obtenues pour les différents intervalles $\widetilde{J}$. □

***Corollaire 12.3* (théorème de la monodromie p-adique).** — *Tout $\mathcal{R}$-module différentiel de pente nulle dont l'exposant $\widetilde{\Delta}$ a des différences non Liouville s'obtient par des extensions successives à partir des modules différentiels (de rang un) $x^{\Delta_i}\mathcal{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$.*

Comme on l'a dit dans l'introduction, le théorème d'existence de Riemann 1.3 est une conséquence facile de ce corollaire.

CHAPITRE IV
THÉORÈMES D'INDICE

Il y a deux théorèmes d'indice de natures différentes.

Le premier concerne les polynômes différentiels. Il s'obtient assez facilement à partir des résultats des chapitres précédents. Il dit que les $K(x)$-modules différentiels dont l'exposant est non Liouville ont une cohomologie p-adique finie. C'est lui qui intervient dans la démonstration de la finitude de la cohomologie p-adique des modules exponentiels [**29**]. À ce titre, c'est l'un des ingrédients clefs dans la démonstration de la finitude des nombres de Betti p-adiques d'une variété affine non singulière sur un corps fini.

Le deuxième théorème d'indice dit que les $\mathcal{R}$-modules différentiels solubles dont l'exposant est non Liouville ont un indice nul sur $\mathcal{R}$. Pour l'obtenir, les résultats des chapitres précédents sont insuffisants. Sa démonstration nécessite l'introduction de la notion d'indice généralisé.

13. Opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux

13.1. Exposant

Définition 13.1. — On appelle exposant du $\mathcal{R}$-module différentiel soluble $\mathcal{M}$, et on note $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$, l'exposant de sa partie de pente nulle $\mathcal{M}^{\leqslant 0}$. C'est donc un élément de $\mathfrak{E}_\nu$ pour $\nu = \mathrm{rg}(\mathcal{M}^{\leqslant 0}) \leqslant \mathrm{rg}(\mathcal{M})$.

Dans ce paragraphe, nous considérons un opérateur différentiel $L = \sum_{i=0}^{\mu-1} a_i D^i$ de l'algèbre de Weyl $K[x][D]$.

Rappelons que $E_1^\dagger = E_1 \cap \mathcal{R}$ désigne le corps des éléments analytiques superadmissibles c'est-à-dire prolongeables dans une couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon)$. Par ailleurs, on pose

$\mathcal{H}^\dagger = \frac{1}{x}\bigcup_{\varepsilon>0}\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\infty])$, de telle sorte que l'on a $\mathcal{R} = \mathcal{A}\oplus\mathcal{H}^\dagger$. Les sous-anneaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}^\dagger$ sont duals topologiques l'un de l'autre.

À L on associe le $E_1^\dagger$-module différentiel $M = E_1^\dagger[D]/E_1^\dagger[D]\cdot L$ et le $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M} = \mathcal{R}\otimes_{E_1^\dagger} M = \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot L$. Le théorème 5.4 fournit une décomposition

$$0 \longrightarrow M^{\mathrm{inj}} \longrightarrow M \longrightarrow M^{\mathrm{sol}} \longrightarrow 0$$

dans $\mathrm{MLC}(E_1^\dagger)$ avec $\mathrm{Ray}(M^{\mathrm{sol}},1) = 1$ et $\mathrm{Hom}_{E_1^\dagger[D]}\left(M^{\mathrm{inj}},\mathcal{A}_1(1)\right) = 0$

En vertu du théorème de continuité du rayon de convergence, le $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}^{\mathrm{sol}} = \mathcal{R}\otimes_{E_1^\dagger} M^{\mathrm{sol}}$ est soluble. On définit l'exposant de L comme l'exposant de $\mathcal{M}^{\mathrm{sol}}$. On le note $\mathfrak{Exp}(L)$.

13.2. Indice d'un polynôme différentiel

***Théorème 13.2* (conjecture de Robba).** — *Soit L un opérateur de l'algèbre de Weyl $K[x][D]$. Si son exposant $\mathfrak{Exp}(L)$ est non Liouville alors il a un indice dans les espaces $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}^\dagger$.*

De plus on a : $\chi(L,\mathcal{R}) = \chi(L,\mathcal{A}) + \chi(L,\mathcal{H}^\dagger) = 0$.

Preuve. — Nous reprenons les notations précédentes

1) La propriété d'être « injectif » est vraie sur un intervalle ouvert. Pour ρ suffisamment proche de 1, on a $\mathrm{Hom}_{E_\rho[D]}\left(M^{\mathrm{inj}},\mathcal{A}_\rho(\rho)\right) = 0$. Le théorème de l'indice de Robba [**31**] montre que, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et ρ dans I_ε, M^{inj} a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$.

2) Le corollaire 12.3 dit que la partie modérée $\mathcal{M}^{\mathrm{sol}\leqslant 0}$ de $\mathcal{M}^{\mathrm{sol}}$ s'obtient par extensions successives de modules différentiels de la forme $x^\alpha\mathcal{R}$ avec α composante de l'exposant de L c'est-à-dire , par hypothèse, nombre non Liouville de $\mathbb{Z}_p$. Un calcul direct montre que, pour ρ dans I_ε, $x^\alpha\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$. On en déduit que, pour ε assez petit, $\left(\mathcal{M}^{\mathrm{sol}\leqslant 0}\right)_\varepsilon$ a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$.

3) Par définition de la partie de pentes positives, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et ρ dans I_ε, on a $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}^{\mathrm{sol}}_{>0},\rho) < \rho$. Le théorème de l'indice de Robba [**31**] montre que $\left(\mathcal{M}^{\mathrm{sol}}_{>0}\right)_\varepsilon$ a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$.

Les résultats 2) et 3) montrent que $\left(\mathcal{M}^{\mathrm{sol}}\right)_\varepsilon$ a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$. Il en est alors de même de M^{sol}.

Si on ajoute le résultat 1), on en déduit que M lui-même a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$ c'est-à-dire que l'opérateur L a un indice nul dans $\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)$.

En utilisant la dualité entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}^\dagger$, on montre alors un théorème de continuité de l'indice pour les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux ([**11**] ou [**10**] 4.5.3). D'après celui-ci, L a un indice dans $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ et

$$\chi(L,\mathcal{R}) = \chi\big(L,\mathcal{A}(I_\varepsilon)\big) = \lim_{\rho\to 1}\chi\big(L,\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\rho[)\big) = 0.$$

La décomposition en somme directe $\mathcal{R} = \mathcal{A}\oplus\mathcal{H}^\dagger$ donne une suite exacte « longue » : $\ker(L,\mathcal{H}^\dagger) \longrightarrow \mathrm{coker}(L,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{coker}(L,\mathcal{R})$. Le noyau de l'opérateur différentiel L est

un espace vectoriel de dimension finie sur K. On vient de voir que le conoyau $\operatorname{coker}(L, \mathcal{R})$ est également de dimension finie. Il en résulte que $\operatorname{coker}(L, \mathcal{A})$ est de dimension finie. L'opérateur L a donc un indice sur $\mathcal{A}$. Pour conclure, on utilise la propriété d'additivité des indices. □

Remarque 13.3. — Le théorème de continuité de l'indice qui a constitué un point clef de la démonstration précédente est vrai pour les $K(x)$-modules différentiels mais pas en général pour les $\mathcal{R}$-modules différentiels.

Définition 13.4. — On dit qu'un polynôme différentiel L à coefficients dans $K[x]$ a une *structure de Frobenius en* 0 si le $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot L$ a une structure de Frobenius.

Corollaire 13.5. — *Soit L un polynôme différentiel à coefficients dans $K[x]$ qui a une structure de Frobenius en* 0. *Alors L a un indice dans $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}^\dagger$ et $\mathcal{R}$ et on a les égalités* $\chi(L, \mathcal{R}) = \chi(L, \mathcal{A}) + \chi(L, \mathcal{H}^\dagger) = 0$.

Preuve. — D'après le théorème 8.16, le module différentiel $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot L$ est soluble. Autrement dit, $\mathcal{M}^{\mathrm{inj}} = 0$. Le théorème de décomposition de Dwork-Robba n'est pas nécessaire dans cette situation.

Par définition $\mathcal{M}$ a une structure de Frobenius. D'après le corollaire 9.19, il en est de même de $\mathcal{M}^{\leqslant 0}$. D'après le corollaire 11.9 l'exposant $\mathfrak{Exp}(L) := \mathfrak{Exp}(\mathcal{M}^{\leqslant 0})$ a des composantes rationnelles donc est non Liouville. On peut appliquer le théorème 13.2. □

14. Indice des $\mathcal{R}$-modules différentiels

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble de pente nulle dont l'exposant est non Liouville, d'après le théorème de la monodromie p-adique, son indice sur $\mathcal{R}$ est nul car somme des indices $\chi(x\,D - \alpha, \mathcal{R})$ avec α non-Liouville.

Pour un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$ dont toutes les pentes sont strictement positives, le théorème de l'indice de Robba affirme que, pour ε suffisamment petit et ρ dans I_ε, on a $\chi\big(\mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{A}(]1-\varepsilon, \rho[)\big) = 0$. Mais, contrairement au cas des polynômes différentiels, on ne sait pas passer à la limite lorsque ρ tend vers 1 pour en déduire que $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{R}) = 0$. C'est là une différence profonde entre la situation rationnelle et la situation analytique. Le résultat est cependant vrai (théorème 14.13) mais sa démonstration nécessite l'introduction de la notion d'indice généralisé.

14.1. Indices généralisés sur une couronne. — L'anneau $\mathcal{R}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{A}$. On ne peut donc pas parler, en général, de l'indice dans $\mathcal{A}$ d'un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathcal{R}$ (resp. d'un $\mathcal{R}$-module différentiel). On contourne toutefois cette difficulté en introduisant la notion d'indice généralisé.

Posons $\mathcal{H}_\varepsilon = \frac{1}{x}\mathcal{A}(]1-\varepsilon,\infty])$ de telle sorte que $\mathcal{A}(I_\varepsilon) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{H}_\varepsilon$. Notons γ^+ (resp. γ^-) la projection de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ sur $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon$) : elle consiste à annuler les coefficients des puissances négatives (resp. positives) de x.

Par abus de notation, si μ est un entier, nous noterons encore γ^+ (resp. γ^-) la projection de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ sur $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$) composante par composante et, si L est un opérateur sur $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$, nous noterons encore L sa restriction à $\mathcal{A}^\mu$ ou $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$.

Définition 14.1. — On dit qu'un opérateur u de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ a un *indice généralisé* dans $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$) si l'opérateur $\gamma^+ \circ u$ (resp. $\gamma^- \circ u$) a un indice dans $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$). Dans ces conditions, on pose :

$$\widetilde{\chi}(u, \mathcal{A}^\mu) := \chi(\gamma^+ \circ u, \mathcal{A}^\mu) \qquad \text{resp. } \widetilde{\chi}(u, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu) := \chi(\gamma^- \circ u, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu).$$

L'indice généralisé possède des propriétés voisines de celles d'un indice. Pour les démontrer, on a besoin d'un théorème d'analyse p-adique.

Définition 14.2. — Une partie U d'un espace vectoriel topologique localement convexe sur le corps maximalement complet K est dite *c-compacte* si toute intersection dénombrable de fermés de U convexes non vides emboîtés est non vide.

On dit qu'une application linéaire u entre deux K-espaces vectoriels topologiques localement convexes E et F séparés, est *c-compacte* si elle transforme un voisinage convenable de zéro dans E en une partie relativement c-compacte de F.

En s'inspirant de la démonstration du théorème classique de la perturbation compacte ([**23**], Chap. V), on démontre un théorème de perturbation c-compacte (on trouve dans [**16**] les principaux ingrédients nécessaires à cette démonstration).

Théorème 14.3. — *Soit u et v deux applications linéaires continues entre deux K-espaces vectoriels topologiques de type $\mathcal{LF}$ (limite inductive de Fréchet). Si v a un indice et si u est c-compacte, alors $v+u$ est à indice et l'on a $\chi(u+v) = \chi(v)$.*

Soit u une matrice de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{D}(I_\varepsilon)\big)$. Nous noterons encore u l'opérateur $X \mapsto u \cdot X$ sur $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$.

Proposition 14.4. — *Soit u et v deux matrices de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{D}(I_\varepsilon)\big)$. Si deux des trois opérateurs u, v et $u \circ v$ ont un indice généralisé sur $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$), il en est de même du troisième et on a*

$$\widetilde{\chi}(u \circ v, \mathcal{A}^\mu) = \widetilde{\chi}(u, \mathcal{A}^\mu) + \widetilde{\chi}(v, \mathcal{A}^\mu) \qquad \text{resp. } \widetilde{\chi}(u \circ v, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu) = \widetilde{\chi}(u, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu) + \widetilde{\chi}(v, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu).$$

Preuve. — Donnons la démonstration dans le cas de $\mathcal{A}$.

On reprend une idée de Robba [**35**] en écrivant :

$$\gamma^+ \circ u \circ v = \gamma^+ \circ u \circ \gamma^+ \circ v + \gamma^+ \circ u \circ \gamma^- \circ v = (\gamma^+ \circ u) \circ (\gamma^- \circ v) + \gamma^+ \circ u \circ \gamma^- \circ v$$

Il suffit de vérifier que la « perturbation » $\gamma^+ \circ u \circ \gamma^- \circ v$ est c-compacte pour pouvoir conclure en utilisant le théorème 14.3. Pour cela on utilise le lemme ci-dessous et on

remarque que le produit de l'opérateur c-compact $\gamma^+ \circ u \circ \gamma^-$ par l'opérateur continu v est c-compact. □

Lemme 14.5. — *Soit u une matrice de* $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{D}(I_\varepsilon)\big)$. *L'application $\gamma^+ \circ u \circ \gamma^-$, de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ dans lui-même, est c-compacte.*

Preuve. — Pour n entier, notons u_n la matrice à coefficients dans $K[x, 1/x][D]$ obtenue en ne gardant dans les coefficients de u que les termes dont la puissance de x est comprise entre $-n$ et n. On constate facilement que l'opérateur $\gamma^+ \circ u_n \circ \gamma^-$ est de rang fini. Plus précisément, pour ρ et r dans I_ε et pour f dans $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ on trouve :

$$\|\gamma^+ \circ u \circ \gamma^-(f)\|_\rho \leqslant \max\big(\|u\|_{0,r}, \|u\|_{0,\rho}\big)\, \|f\|_r \tag{19}$$

Si on note $\mathcal{B}$ la boule unité de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ muni de la norme $\|\cdot\|_r$. Par définition de la topologie, c'est un ouvert de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$. La formule (19) montre que, quelque soit le voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$, pour n assez grand, $\gamma^+ \circ (u - u_n) \circ \gamma^-(\mathcal{B})$ est contenu dans $\mathcal{U}$. Le lemme en résulte. □

Proposition 14.6. — *Une matrice u de* $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{D}(I_\varepsilon)\big)$ *a un indice sur $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$ si et seulement si elle a un indice généralisé sur $\mathcal{A}^\mu$ et sur $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$. On a alors $\chi\big(u, \mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu\big) = \widetilde{\chi}(u, \mathcal{A}^\mu) + \widetilde{\chi}(u, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu)$.*

Preuve. — Posons $\widetilde{u} = u - \gamma^+ \circ u \circ \gamma^- - \gamma^- \circ u \circ \gamma^+$. D'une part l'opérateur $\gamma^+ \circ u \circ \gamma^- - \gamma^- \circ u \circ \gamma^+$ est c-compact d'après le lemme 14.5 et d'autre part la restriction de $\widetilde{u}$ à $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$) vaut $\gamma^+ \circ u$ (resp. $\gamma^- \circ u$). On en déduit :

$$\begin{aligned}\chi\big(u, \mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu\big) &= \chi\big(\widetilde{u}, \mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu\big) = \chi(\widetilde{u}, \mathcal{A}^\mu) + \chi(\widetilde{u}, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu) \\ &= \chi(\gamma^+ \circ u, \mathcal{A}^\mu) + \chi(\gamma^- \circ u, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu) = \widetilde{\chi}(u, \mathcal{A}^\mu) + \widetilde{\chi}(u, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu).\end{aligned}$$

□

Définition 14.7. — Soit g une fonction de $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ qui ne s'annule pas dans la couronne $\mathcal{C}(I_\varepsilon)$. On note $\mathrm{ord}(g)$ la pente logarithmique de la fonction $\rho \mapsto |g|_\rho$ sur l'intervalle I_ε. Lorsque la fonction g appartient à $\mathcal{A}$, cette pente est en effet égale au nombre de zéros de la fonction g dans le disque $D(0,1)$. Remarquons en outre que $\mathrm{ord}(g)$ est toujours un entier.

Proposition 14.8. — *Toute matrice u de* $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ *a un indice généralisé sur $\mathcal{A}^\mu$ et sur $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$. On a $\widetilde{\chi}(u, \mathcal{A}^\mu) = -\widetilde{\chi}(u, \mathcal{H}_\varepsilon^\mu) = \mathrm{ord}\big(\det(u)\big)$.*

Preuve. — D'après le théorème de Birkhoff, on a $u = x^N L\, M$ avec N matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{Z}$, L dans $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{A})$ et M dans $\mathrm{Gl}(\mu, \mathcal{H}_\varepsilon)$. En utilisant la proposition 14.6, on voit que L (resp. M), ayant un indice nul sur $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$) et sur $\mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu$, a un indice généralisé nul sur $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$ (resp. $\mathcal{A}^\mu$). La proposition 14.4 montre que $L\, M$ a des indices généralisés nuls sur $\mathcal{A}^\mu$ et sur $\mathcal{H}_\varepsilon^\mu$. On est ramené au cas $u = x^N$ qui est facile à traiter. □

14.2. Indices dans $\mathcal{R}$. — Il est naturel de noter encore γ^+ (resp. γ^-) la projection de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}^\dagger$). Si u est un opérateur sur $\mathcal{R}^\mu$, son indice généralisé sur $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}^{\dagger\mu}$) sera l'indice de l'opérateur $\gamma^+ \circ L$ (resp. $\gamma^- \circ L$) sur $\mathcal{A}^\mu$ (resp. $\mathcal{H}^{\dagger\mu}$).

***Corollaire 14.9* (définition de l'indice généralisé).** — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel de rang μ et soit $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$ dans laquelle la dérivation est représentée par la matrice G. L'indice généralisé $\widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{A}^\mu\big)$ (resp. $\widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{H}^{\dagger\mu}\big)$) est indépendant de la base $\mathfrak{e}$. On l'appelle* indice généralisé *de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}^\dagger$) et on le note $\widetilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ (resp. $\widetilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{H}^\dagger)$).*

Preuve. — C'est une conséquence facile des propositions 14.4 et 14.8. □

Proposition 14.10. — *Soit $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ une suite exacte de* $\mathrm{MLC}(\mathcal{R})$. *Si $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$ ont un indice généralisé sur $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}^\dagger$) alors $\mathcal{M}$ a un indice généralisé dans $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{H}^\dagger$) qui est la somme de ceux de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$.*

Preuve. — On complète une base $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{N}$ en une base $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ de $\mathcal{M}$. L'additivité de l'indice généralisé se ramène immédiatement à celle de de l'indice ordinaire. □

***Théorème 14.11* (existence de l'indice généralisé).** — *Si un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble $\mathcal{M}$ a un exposant non Liouville, alors il a un indice généralisé dans $\mathcal{A}$ et dans $\mathcal{H}^\dagger$.*

Pour ε assez petit, si la dérivation D est représentée dans une base par la matrice G, on a

$$\widetilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) := \widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{A}^\mu\big) = -\widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{H}^\mu_\varepsilon\big) = -\widetilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{H}^\dagger)$$

et ce nombre est la hauteur (c'est-à-dire l'ordonnée du dernier sommet) du polygone de Newton $\mathrm{New}(\mathcal{M})$.

Preuve. — Grâce à la proposition 14.10, on se ramène au cas où $\mathcal{M}$ est irréductible.

Si $\mathcal{M}$ est de pente nulle, le théorème 12.1 dit que $\mathcal{M} = x^\alpha \mathcal{R}$ avec α nombre non Liouville de $\mathbb{Z}_p$. Dans ce cas, un calcul direct permet de conclure.

Supposons donc que $\mathcal{M}$ n'est pas de pente nulle et donc purement de pente $\lambda > 0$. On a $\mathrm{Ray}(\mathcal{M}_\varepsilon, \rho) < \rho$ pour $1 - \varepsilon \leqslant \rho < 1$. En utilisant le théorème 7.5, on trouve un antécédent de Frobenius $\mathcal{N}_\rho$ de $\mathcal{M}_\varepsilon$ au voisinage de ρ tel $\mathrm{Ray}(\mathcal{N}_\rho, \rho) < |\pi|\rho$. Le théorème 6.2 et le fait que l'indice d'un opérateur inversible ne change pas par « petite perturbation » ramène le calcul de l'indice généralisé $\widetilde{\chi}\big(\mathcal{N}_\rho, \mathcal{A}([0, \rho[)\big)$ à celui de l'indice généralisé de la multiplication par un élément non nul a_0 de $\mathcal{A}(]1-\varepsilon, \rho[)$. Celui-ci est donné par la proposition 14.8.

On conclut par un passage à la limite quand ρ tend vers 1 en utilisant la propriété de Mittag-Leffler pour les systèmes projectifs d'espaces métriques à image dense (EGA III, chap. 0, 13.2.4). □

Corollaire 14.12. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble. Les sommets du polygone de Newton de $\mathcal{M}$ sont à coordonnées entières.*

Preuve. — Pour $\lambda > 0$, le module différentiel $\mathrm{Gr}_\lambda(\mathcal{M})$ est purement de pente $\lambda > 0$ donc a un exposant vide et en particulier non Liouville ! Maintenant, la hauteur du coté de pente λ du polygone de Newton de $\mathcal{M}$ s'interprète comme l'indice généralisé dans $\mathcal{A}$ du module différentiel $\mathrm{Gr}_\lambda(\mathcal{M})$. □

Théorème 14.13. — *Si un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$ soluble a un exposant non Liouville, alors il a un indice sur $\mathcal{R}$ et, pour ε suffisamment petit, on a $\chi(\mathcal{M},\mathcal{R}) = \chi\big(\mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big) = 0$.*

Preuve. — D'après la proposition 14.6 et le théorème 14.11, on a, en notant G la matrice qui représente la dérivation D dans une base :

$$\chi\big(x(D-G), \mathcal{A}(I_\varepsilon)^\mu\big) = \widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{A}^\mu\big) + \widetilde{\chi}\big(x(D-G), \mathcal{H}_\varepsilon^\mu\big) = 0. \qquad \square$$

CHAPITRE V
DÉMONSTRATION DU THÉORÈME D'ALGÉBRICITÉ

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{R}$-module différentiel, on munit $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$ de la structure de $\mathcal{R}$-module différentiel définie en 3.5. Rappelons l'énoncé que nous voulons démontrer

Théorème 1.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module libre de rang fini μ à connexion soluble, ayant la propriété* DNL *et tel que* $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}_{>0})$ *a la propriété* NL. *Quitte à faire une extension finie du corps de base K, $\mathcal{M}$ admet un réseau sur $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-module libre de rang μ) muni d'une connexion prolongeant celle de $\mathcal{M}$ et n'ayant aucune singularité sauf en* 0 *où elle a une singularité méromorphe.*

Pour simplifier l'exposé nous introduisons deux définitions.

Définition 14.14. — On note MLCSNL($\mathcal{R}$) la sous-catégorie pleine de MLCS($\mathcal{R}$) dont les objets vérifient les deux conditions suivantes :

1) L'exposant de $\mathcal{M}$ a des différences non Liouville,

2) L'exposant de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ est non Liouville.

Définition 14.15. — Un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$ est dit *algébrisable* s'il existe une extension finie K' de K et un $\mathcal{A}_{K'}[1/x]$-module différentiel $\mathcal{M}^{\mathrm{alg}}$ tel que $K' \otimes_K \mathcal{M} = \mathcal{R}_{K'} \otimes_{\mathcal{A}_{K'}[1/x]} \mathcal{M}^{\mathrm{alg}}$.

de telle sorte que le le théorème 1.1 se réécrit :

Théorème 1.1-bis. — *Tout objet de* MLCSNL($\mathcal{R}$) *est algébrisable.*

15. Réduction au cas irréductible

Nous procédons en plusieurs étapes. La première, qui est l'objet de ce paragraphe, consiste à vérifier que, dans la démonstration du théorème 1.1, on peut supposer que le module différentiel $\mathcal{M}$ satisfait l'hypothèse supplémentaire suivante :

(H) Pour toute extension finie K' de K, $K' \otimes_K \mathcal{M}$ est irréductible dans $\mathrm{MLC}(\mathcal{R}_{K'})$.

Par récurrence sur le rang μ de $\mathcal{M}$, cela résultera du corollaire 15.3 et du lemme 15.4.

Lemme 15.1. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel soluble dont l'exposant a des différences non Liouville. On a $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{>0} \oplus \mathcal{M}^{\leqslant 0}$.*

Preuve. — Il faut montrer que l'extension $0 \longrightarrow \mathcal{M}_{>0} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\leqslant 0} \longrightarrow 0$ est triviale. Par définition, l'exposant de $\mathcal{M}$ est l'exposant de $\mathcal{M}^{\leqslant 0}$. Celui-ci, qui est de pente nulle, a donc des différences non Liouville. D'après le théorème 12.1, il s'obtient par extensions successives de modules différentiels de la forme $x^\alpha \mathcal{R}$. Par ailleurs, les pentes de $\mathcal{M}_{>0}$ sont strictement positives. Il suffit donc de prouver que toute extension $0 \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow x^\alpha \mathcal{R} \longrightarrow 0$ avec α entier p-adique et $\mathcal{P}$ de pentes supérieures à 0 est triviale. Pour cela, on va montrer que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{P}) = 0$.

Posons $\mathcal{P}^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}, \mathcal{R})$. Les solutions du module différentiel $\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}$ se déduisent facilement de celles de $\mathcal{P}$. On constate en particulier que, pour ρ suffisamment proche de 1, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{A}_\rho(\rho)) = 0$$

et, a fortiori :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{R}) = 0.$$

D'autre part, d'après le théorème 14.13, on a :

$$0 = \chi(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{R}) = \dim\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{R})\big) - \dim\big(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{R})\big).$$

Donc, finalement, comme $\mathcal{P}$ est libre de rang fini sur $\mathcal{R}$:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{P}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}^* \otimes_{\mathcal{R}} x^\alpha \mathcal{R}, \mathcal{R}) = 0. \qquad \square$$

Lemme 15.2. — *Soit $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ une suite exacte de* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$. *Si l'exposant de $\mathcal{M}$ a des différences non Liouville (resp. est non Liouville), il en est de même des exposants de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$.*

Preuve. — Par définition, l'exposant de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$, $\mathcal{Q}$) est celui de $\mathcal{M}_{>0}$ (resp. $\mathcal{N}_{>0}$, $\mathcal{Q}_{>0}$). Maintenant, la suite $0 \longrightarrow \mathcal{N}_{>0} \longrightarrow \mathcal{M}_{>0} \longrightarrow \mathcal{Q}_{>0} \longrightarrow 0$ est exacte d'après le théorème 9.17. Le lemme est donc une conséquence immédiate de la proposition 11.7. $\square$

Corollaire 15.3. — *Soit $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ une suite exacte de* $\mathrm{MLCS}(\mathcal{R})$. *Si $\mathcal{M}$ est un objet de* $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{R})$, *il en est de même de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$.*

Preuve. — Le lemme 15.2 montre que les exposants de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Q}$ ont des différences non Liouville. Par ailleurs, les modules différentiels $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{N})$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})$ sont des sous-quotients de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$, le même lemme montre qu'ils ont des exposants non Liouville. $\square$

Lemme 15.4. — *Soit* $0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* MLCSNL($\mathcal{R}$). *Si* $\mathcal{N}$ *et* $\mathcal{Q}$ *sont algébrisables, il en est de même de* $\mathcal{M}$.

Preuve. — Par définition, quitte à remplacer K par une extension finie, il existe des $\mathcal{A}[1/x]$-modules différentiels $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{Q}'$ tels que $\mathcal{N} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{A}[1/x]} \mathcal{N}'$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{A}[1/x]} \mathcal{Q}'$.

Toute suite exacte de MLC($\mathcal{A}[1/x]$) donnant, après tensorisation par $\mathcal{R}$, une suite exacte de MLC($\mathcal{R}$), on a un morphisme canonique :

$$\theta : \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}[1/x][D]}(\mathcal{Q}', \mathcal{N}') \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}). \tag{20}$$

Le lemme dit que cette application est surjective.

Comme $\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$ est un sous-objet de $\operatorname{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$, son exposant est non Liouville. En particulier, d'après le théorème 14.13,

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{N}^*, \mathcal{R}) = \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}), \mathcal{R})$$

est un K-espace vectoriel de dimension finie.

Maintenant, θ est le morphisme en degré 1 donné par le morphisme des complexes associés à une présentation de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}[1/x]}(\mathcal{Q}', \mathcal{N}')$ et de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$ (voir (4))

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}[1/x]^\mu & \longrightarrow & \mathcal{A}[1/x]^\mu & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}^\mu & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{R}^\mu & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Le morphisme δ est continu pour la topologie de type $\mathcal{LF}$ de $\mathcal{R}^\mu$. Son conoyau est de dimension finie. D'après le théorème des homomorphismes pour les espaces de type $\mathcal{LF}$ de Grothendieck [**23**], son image est un sous-espace fermé. Autrement dit, la topologie qu'il induit sur son conoyau $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}), \mathcal{R})$ est séparée. Par ailleurs, $\mathcal{A}[1/x]$ est, pour tout $\varepsilon > 0$, dense dans $\mathcal{A}(I_\varepsilon)$ donc dense dans $\mathcal{R}$. Il en résulte que l'image de θ est un sous-espace partout dense de l'espace vectoriel de dimension finie séparé $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{D}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}), \mathcal{R})$. C'est donc l'espace tout entier. □

16. Réduction au cas complètement irréductible

Cette réduction ne présente pas de réelles difficultés

Nous commençons par préciser quelle est la partie de pente nulle du module différentiel des endomorphismes.

Proposition 16.1. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un module différentiel de* MLCSNL($\mathcal{R}$) *de rang* μ *satisfaisant l'hypothèse* ***(H)***.

1) *On a* $\operatorname{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}) = K\,\mathrm{Id}$.

2) *Il existe un entier* d *premier à* p *et qui divise* μ *pour lequel* $\{0, \frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \ldots, \frac{d-1}{d}\}$ *est un représentant de l'exposant de* $\operatorname{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$. *De plus, on a* $\operatorname{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0} = \mathcal{R}[u]$ *où* u *est un* $\mathcal{R}$*-automorphisme de* $\mathcal{M}$ *tel que* $xD(u) = \frac{1}{d}\,u$ *et* $u^d = cx\,\mathrm{Id}$ *avec* $c \neq 0$ *dans* K.

Preuve. — Considérons un élément non nul u de $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$. Son polynôme unitaire minimal est à coefficients dans K. Soit λ une racine de P dans une extension finie de K. Comme $u - \lambda\,\mathrm{Id}$ est, par construction, non inversible, il en résulte que $u = \lambda\ \mathrm{Id}$. Le point 1) est bien démontré.

Par hypothèse, l'exposant de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ a des différences non Liouville. D'après le lemme 15.1, on peut considérer $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}$ comme un sous module différentiel de $\mathcal{M}$. D'après le théorème 12.1, un nombre α est composante de l'exposant si et seulement s'il existe u non nul dans $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ tel que $x\,D(u) = \alpha\,u$.

On vérifie que les multiplicités des composantes de l'exposant sont égale à un puis que ces composantes forment un sous-groupe fini de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On en déduit que $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}$ possède une base de la forme $\{\mathrm{Id}, u, u^2, \ldots, u^{d-1}\}$ où $u := u_{1/d}$ est un endomorphisme inversible tel que $xD(u) = \frac{1}{d}\,u$.

En particulier on a $xD(u^d) = u^d$. On en déduit $u^d = cx\,\mathrm{Id}$ (avec $c \neq 0$) puis $\det(u)^d = c^\mu x^\mu$. Mais, $\det(u)$ appartenant à $\mathcal{R}$, ceci implique que d divise μ. □

Dans le théorème d'algébrisation, on doit autoriser une extension du corps des constantes mais il n'y a pas besoin de « ramifier » la variable. Cela va résulter du lemme 16.4 ci-dessous.

Définition 16.2. — Un module différentiel $\mathcal{M}$ de $\mathrm{MLCSNL}(\mathcal{R})$, est dit *complètement irréductible* si la composante de pente nulle $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}$ de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ est de rang 1.

Si $\mathcal{M}$ est décomposable, $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}$ contient les projections sur les sous-modules stables par dérivation. Il en résulte qu'un module différentiel complètement irréductible est irréductible.

Soit d un entier. Nous considérons l'extension $\mathcal{R}[y]$ où $y^d = x$. C'est une K-algèbre que l'on munit de la dérivation D, prolongeant celle de $\mathcal{R}$, définie par $D(y) = \frac{1}{d}\,y^{1-d}$. On obtient ainsi un plongement de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}[y] = \mathcal{R}[y][D]$. On peut aussi voir $\mathcal{R}[y]$ comme un $\mathcal{R}$-module différentiel de rang d, de base $1, y, \ldots, y^{d-1}$.

Pour un $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{M}$, on note $\theta^*(\mathcal{M})$ le $\mathcal{R}[y]$-module différentiel obtenu par extension des scalaires de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}[y]$. En tant que $\mathcal{R}[y]$-module, on a $\theta^*(\mathcal{M}) = \mathcal{R}[y] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M}$. En particulier le rang de $\theta^*(\mathcal{M})$ est celui de $\mathcal{M}$.

Inversement, à un $\mathcal{R}[y]$-module différentiel $\mathcal{N}$, nous associons le $\mathcal{R}$-module différentiel $\theta_*(\mathcal{N})$ obtenu par restriction des scalaires de $\mathcal{D}[y]$ à $\mathcal{D}$. Le rang de $\theta_*(\mathcal{N})$ est d fois celui de $\mathcal{N}$. On a $\theta_*\theta^*(\mathcal{M}) = \mathcal{R}[y] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{M} = \mathcal{M} \oplus x^{1/d}\mathcal{M} \oplus \cdots \oplus x^{(d-1)/d}\mathcal{M}$.

Lemme 16.3. — *Les notations sont celles de la proposition 16.1. Quitte éventuellement à faire une extension finie du corps K, il existe dans $\theta^*(\mathcal{M})$ un sous $\mathcal{R}[y]$-module différentiel $\mathcal{N}$, de rang μ/d, complètement irréductible tel que $\mathcal{M} = \theta_*(\mathcal{N})$. En particulier, si $\mathcal{N}$ est algébrisable, il en est de même de $\mathcal{M}$.*

Preuve. — Le polynôme minimal de u sur $\mathcal{F}$ est $u^d - c\,x$. Supposons que K soit suffisamment gros pour que $c = \gamma^d$ avec γ dans K. Les valeurs propres de u sont

donc les $\zeta\gamma\, y$ pour $\zeta^d = 1$. Elles ont toutes le même ordre μ/d (elles s'échangent par l'automorphisme $y \mapsto \zeta y$). L'endomorphisme $u - \gamma y$ a un noyau $\mathcal{N}$ de rang μ/d qui est un sous $\mathcal{R}[y]$-module différentiel de $\theta^*(\mathcal{M})$.

On vérifie que u réalise un morphisme de $\mathcal{M}$ dans $x^{1/d}\mathcal{M}$ d'où il résulte que $\theta_*\theta^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^d$. Mais $\theta_*(\mathcal{N})$ est un sous module différentiel de rang μ de $\theta_*\theta^*(\mathcal{M})$. Comme $\mathcal{M}$ est irréductible, l'unicité de la décomposition de Jordan-Hölder montre que $\theta_*(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$. Par ailleurs, si $\mathcal{N}$ était réductible, il en serait de même de $\theta_*(\mathcal{N})$ (la réciproque est fausse). Donc $\mathcal{N}$ est irréductible.

Quitte à changer la dérivation $D = d/dx$ en $d\,y^{d-1}\,D = d/dy$, $\mathcal{R}[y]$ est isomorphe à $\mathcal{R}$. D'après la définition même de l'exposant 11.3, pour un module différentiel $\mathcal{Q}$ de pente nulle, l'exposant de $\theta^*(\mathcal{Q})$, vu comme $\mathcal{R}$-module différentiel par l'isomorphisme précédent, est d fois celui de $\mathcal{Q}$. L'exposant de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}[y]}\left(\theta^*(\mathcal{M})\right)$ est donc $\{0,\dots,0\}$ (0 répété d fois). Comme $\mathrm{End}_{\mathcal{R}[y]}(\mathcal{N})$ est un sous quotient de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}[y]}\left(\theta^*(\mathcal{M})\right)$, son exposant ne comprend que des 0. La proposition 16.1 montre que $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{R}$-module différentiel complètement irréductible.

Si le module différentiel $\mathcal{N}$ est algébrisable, il possède une base $\mathfrak{e}$ dans laquelle la dérivation est représentée par une matrice G de $\mathrm{Mat}(\frac{\mu}{d}, \mathcal{A}[\frac{1}{x}, y])$. En considérant la base $\{y^i\mathfrak{e}\}_{0\leqslant i<d}$ de $\theta_*(\mathcal{N})$, on constate que $\mathcal{M} = \theta_*(\mathcal{N})$ est algébrisable. □

Corollaire 16.4. — *Pour démontrer le théorème d'algébrisation, il suffit de vérifier que tout module différentiel complètement irréductible dans* $\mathrm{MLCSNL}\left(\mathcal{R}\right)$ *est algébrisable.*

Preuve. — C'est une conséquence immédiate des lemmes 16.3 et 15.4. Notons que, l'identité étant toujours dans la composante de pente nulle de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$, un module complètement irréductible est irréductible. □

17. Le cas complètement irréductible

Contrairement à ce qui se passe dans le cas complexe (théorème de Turrittin), les modules différentiels p-adiques complètement irréductibles (c'est-à-dire qui le restent après ramification de la variable) ne sont pas, en général, de rang un. Les techniques que nous utilisons pour les étudier ont des analogues dans le cas complexe mais sont alors sans objet.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-module différentiel complètement irréductible, $\mathfrak{e}$ une base de $\mathcal{M}$ et G la matrice représentant la dérivation D dans cette base. La base $\mathfrak{e}$ fournit une base « canonique » de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$, c'est-à-dire un isomorphisme i de $\mathcal{R}$-modules différentiels entre $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ muni de la dérivation D et $\mathrm{Mat}(\mu, \mathcal{R})$ muni de la dérivation ∇ définie par $\nabla(X) = D(X) - G\,X + X\,G$.

Nous aurons besoin de trois lemmes. Le premier précise les matrices qui ont une « primitive », le deuxième donne une majoration de cette primitive et le troisième contient la partie combinatoire de la démonstration.

Lemme 17.1. — *Soit ε suffisamment petit. Pour toute matrice X de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ dont le résidu de la trace est nul, il existe une matrice Y de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ telle que $\nabla(Y) = X$.*

Preuve. — On a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}), \mathcal{R}\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}, \mathcal{R}\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{R}, \mathcal{R}\big) = K$$

D'après le théorème 14.13, l'indice de $\mathrm{End}_{\mathcal{A}(I_\varepsilon)}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ est nul pour ε suffisamment petit. On a donc :

$$\dim_K \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}(\mathcal{I}_\varepsilon)}\big(\mathrm{End}_{\mathcal{A}(I_\varepsilon)}(\mathcal{M}_\varepsilon), \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big) = \dim_K \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(I_\varepsilon)}\big(\mathrm{End}_{\mathcal{A}(I_\varepsilon)}(\mathcal{M}_\varepsilon), \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big) = 1$$

Comme le résidu de la trace d'une matrice de la forme $\nabla(Y) = D(Y) - GY + YG$ est évidemment nul, l'image de l'opérateur ∇, qui est de codimension 1 dans $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ d'après le calcul précédent, est exactement l'ensemble des matrices dont le résidu de la trace est nul. □

Lemme 17.2. — *Pour ε suffisamment petit et pour tout intervalle fermé J contenu dans I_ε, il existe un nombre réel M_J tel que, pour toute matrice X de $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ de trace nulle, on ait $\|X\|_J \leqslant M_J \|\nabla(X)\|_J$.*

Preuve. — On remarque tout d'abord que $\mathrm{tr}\big(\nabla(X)\big) = \mathrm{tr}\big(D(X)\big) = D\big(\mathrm{tr}(X)\big)$. Autrement dit, l'application $\mathrm{tr} \circ i$ de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{R}$ est horizontale. Comme $\mathcal{R}$ est évidemment un $\mathcal{R}$-module différentiel de pente nulle, on a $\mathcal{R}_{>0} = 0$. Par suite, $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})_{>0}$ est contenu dans le noyau de $\mathrm{tr} \circ i$. Par hypothèse, $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})^{\leqslant 0}$ est de rang 1 donc $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})_{>0}$ est de rang $\mu^2 - 1$ comme $\ker(\mathrm{tr} \circ i)$. Ces deux $\mathcal{R}$-modules différentiels sont donc égaux.

Maintenant, $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})$ est son propre dual et il en est de même pour $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M})_{>0}$. Le lemme est alors une conséquence du corollaire 9.12. □

Lemme 17.3. — *Soit A une $\mathbb{Q}$-algèbre non commutative unitaire contenant des éléments x_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ et un élément C. On suppose que l'algèbre A est munie d'une $\mathbb{Q}$-dérivation ∇ et d'une norme d'algèbre ultramétrique $\|\cdot\|$ vérifiant, pour $1 \leqslant i \leqslant k$:*

$$\nabla(x_i) = x_{i-1}\, C \qquad \|i!\, x_i\| \leqslant c^i$$

pour une constante c et $x_0 = 1$. Alors, il existe un élément P_k dans la sous-algèbre engendrée par les x_i et un élément R_k dans la sous-algèbre engendrée par les commutateurs tels que :

$$x_k\, C = \nabla(P_k) + R_k \qquad \|(k+1)!\, P_k\| \leqslant c^{k+1} \qquad \|(k+1)!\, R_k\| \leqslant c^k\, \|C\|$$

Preuve. — Si l'algèbre A est commutative, on constate que $x_i = x_1^i + Q_i(x_1)$ où Q_i est un polynôme de degré au plus $i-2$ sur l'anneau des constantes de A. Il suffit de prendre $P_k = x_1^{k+1} + Q_{k+1}(x_1)$ avec $Q'_{k+1} = Q_k$ (et bien sur $R_k = 0$). Le passage au cas non commutatif est essentiellement un exercice de combinatoire sur les mots en

les x_i. Les majorations reposent sur le fait bien connu que, pour tous entiers s et n, $(ns)!$ est divisible par $s(n!)^s$. □

Fin de la preuve du théorème. — Pour N entier, on définit la projection γ_N de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{A}[1/x]$ par :

$$\gamma_N(x^s) = \begin{cases} 0 & \text{si } |s|_\infty > N \\ x^s & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme le résidu de la matrice $C = G - \gamma_N(G)$ est nul, d'après le lemme 17.1, il existe une matrice X_1 dans $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ telle que $\Delta(X_1) = C$. On a $C = w\, \boldsymbol{I} + C_0$ où C_0 est une matrice de trace nulle si bien que $X_1 = W\, \boldsymbol{I} + \Delta^{-1}(C_0)$ où W est une primitive de w. On en déduit que $\|X_1\|_J$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

On choisit $N > 1$ suffisamment grand pour que

$$\|G - \gamma_N(G)\|_J < |\pi|\, \frac{1}{M_J} \qquad \|X_1\|_J < |\pi|.$$

Le lemme 17.3, appliqué à l'algèbre $A = \mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(I_\varepsilon)\big)$ munie de la norme $\|\cdot\|_J$ et au nombre $c = \max\{M_J\, \|C\|_J, \|X_1\|_J\} < |\pi|$, permet de construire par récurrence, une suite de matrices X_k vérifiant :

$$X_0 = \boldsymbol{I} \qquad \nabla(X_k) = X_{k-1}\, C.$$

Avec les notations de ce lemme, puisque la matrice R_k est de trace nulle, on trouve en utilisant le lemme 17.2 :

$$\begin{aligned} \|X_{k+1}\|_J = \|P_k + \nabla^{-1}(R_k)\|_J &\leqslant \max\big(\|P_k\|_J, M_J \|(R_k)\|_J\big) \\ &\leqslant \frac{1}{|(k+1)!|} \max\big(c^{k+1}, M_J\, c^k \|C\|_J\big) \leqslant \frac{1}{|(k+1)!|} c^{k+1} \leqslant \left(\frac{c}{|\pi|}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

En particulier, la suite X_k tend vers 0 uniformément sur J et $\|X_k\|_J < 1$ pour $k > 0$. Donc la matrice

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} X_k$$

converge dans $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}(J)\big)$ et, vérifiant $\|H - \boldsymbol{I}\|_J < 1$, appartient à $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}(J)\big)$. On trouve :

$$\nabla(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \nabla(X_k) = \sum_{k=0}^{\infty} X_{k-1}\, C = H\, C.$$

Il vient :

$$D(H) = \nabla(H) + GH - HG = H\,(G - \gamma_N(G)) + GH - HG = G\,H - H\,\gamma_N(G)$$

On utilise alors le théorème de Birkhoff 6.5-2) : si $J = [\alpha, \beta]$ il existe une matrice L de $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}([\alpha, \infty[)\big)$ et une matrice M de $\mathrm{Gl}\big(\mu, \mathcal{A}([0, \beta])\big)$ telles que $H = LM$. Comme les coefficients de la matrice $\gamma_N(G)$ appartiennent à $K[x, 1/x] \subset \mathcal{A}([0, \beta])[1/x]$ et ceux de la matrice G à $\mathcal{A}(I_\varepsilon) \subset \mathcal{A}([\alpha, 1[)$.

Dans la base $\mathfrak{f} = L\,\mathfrak{e}$ de $\mathcal{M}$, la dérivation est représentée par la matrice

$$F = -L^{-1}\big(D(L) - GL\big) = \big(D(M) + M\gamma_N(G)\big)\, M^{-1}$$

qui appartient à $\mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}([\alpha, 1[)\big) \cap \mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}([0, \beta])[1/x]\big) = \mathrm{Mat}\big(\mu, \mathcal{A}[1/x]\big)$.

Index des notations

Index terminologique

Références

[1] V.G. Berkovich.– *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields.* Mathematical surveys and monographs, 33, A.M.S. Providence, Rodhe Island (1990)

[2] F. Baldassarri, B. Chiarellotto.– Algebraic versus rigid cohomology with logarithmic coefficients. *Barsotti Memorial Symposium* Perspectives in Math. 15, Academic Press (1994) 11-50.

[3] E. Bombieri, S. Sperber.– On the p-adic analycity of solutions of linear differential equations. *Illinois J. of Math.* 26 (1982) 10-18.

[4] G. Christol.– Décomposition des matrices en facteurs singuliers. Application aux équations différentielles. *Groupe d'étude d'analyse ultramétrique* 7-8 (1979/81) n°5, 17p.

[5] G. Christol.– Systèmes différentiels linéaires p-adiques : structure de Frobenius faible. *Bull. de la S.M.F.* 109 (1981) 83-122.

[6] G. Christol.– *Modules Différentiels et Équations Différentielles p−adiques.* Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics n°66 Kingston (1983).

[7] G. Christol.– Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers. *Astérisque* n°119/120 (*Cohomologie p-adique*) (1984) 151-168.

[8] G. Christol, B. Dwork.– Effective p-adic bounds at regular singular points. *Duke Math. J.* 62 (1991) 689-720.

[9] G. Christol, B. Dwork.– Modules différentiels sur des couronnes. *Ann. Inst. Fourier* 44 (1994) 663-701.

[10] G. Christol, Z. Mebkhout.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques I. *Ann. Inst. Fourier* 43 (1993) 1545-1574.

[11] G. Christol, Z. Mebkhout.– Topological vector spaces and index theory. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 2 (1995) 93-98.

[12] G. Christol, Z. Mebkhout.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II. *Annals of Math.* 146 (1997) 345-410.

[13] G. Christol, Z. Mebkhout.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III. *Annals of Math.* 151 (2000) 385-457.

[14] G. Christol, Z. Mebkhout.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques IV. *Invent. Math.* 143 (2001) 629-672.

[15] D. Clark.– A note on the p-adic convergence of solution of linear differential equation. *Proc. Amer. Math. Soc.* 17 (1966) 262-267.

[16] N. De Grande-De Kimpe, J. Martinez-Maurica.– Fredholm Theory for p-adic locally convex spaces. *Ann. Math. pura et applicata* 160 (1991) 223-234.

[17] P. Deligne.– *Equations différentielles à points singuliers réguliers.* Lecture note in Math. 163 (1970).

[18] B. Dwork.– On p-adic differential equation II. *Annals of Math.* 98 (1973) 366-376.

[19] B. Dwork.– On exponents of p-adic differential modules. *J. reine angew. Math.* 484 (1997) 85-126.

[20] B. Dwork, P. Robba.– On ordinary linear differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 231 (1977) 1-46.

[21] B. Dwork, P. Robba.– Effective p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 259 (1980) 559-577.

[22] M. Fontaine.– Représentations p-adiques des corps locaux. *Grothendieck Feschrift II*, Progress in Math. 87 (1990) 249-309.

[23] A. Grothendieck.– *Espaces vectoriels topologiques*, Sao Paulo (1954).

[24] A. Grothendieck .– Crystals and De Rham Cohomology of schemes. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland Company (1968) 306-358.

[25] A. Grothendieck .– Groupes de Barsotti-Tate et Cristaux *Actes, Congrès Inter. Math.* Tome 1 (1970) 431-436, Gauthiers-Villards, Paris 1971.

[26] N. Katz.– Nilpotent connexions and the monodromy theorem : applications of a result of Turrittin, *Publ. Math. I.H.E.S.* 39 (1970) 175-232.

[27] N. Katz.– Travaux de Dwork, *Sém. Bourbaki.* 24 (1971/72) n°409 34p.

[28] M. Lazard.– Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. *Publ. Math. I.H.E.S.* 14 (1962) 47-75.

[29] Z. Mebkhout.– Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière. *Am. J. Math.* 119 (1997) 1027-1081.

[30] D. Meredith.– Weak formal schemes, *Nagoya Math. J.* 45 (1972), 1-38.

[31] P. Robba.– On the index of p-adic differential operators I. *Annals of Math.* 101 (1975) 280-316.

[32] P. Robba.– On the index of p-adic differential operators II. *Duke Math. J.* 43 (1976) 19-31.

[33] P. Robba.– Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles. *L'enseignement mathématiques,* 26 (1980) 279-311.

[34] P. Robba.– On the index of p-adic differential operators III, applications to twisted exponential sums. *Astérisque* 119-120 (1984) 191-266.

[35] P. Robba.– Indice d'un opérateur différentiel p-adique IV : Cas des systèmes. Mesure de l'irrégularité dans un disque. *Ann. Inst. Fourier* 35 (1985) 13-55.

[36] P. Robba.– Conjectures sur les équations différentielles p-adiques linéaires. *Groupe d'Étude d'Analyse Ultramétrique.* 12ème année (1984-85) n°2, 8p.

[37] P. T. Young.– Radii of convergence and index for p-adic differential operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* 333 (1992) 769-785.

G. CHRISTOL, Université Paris 6, case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05
E-mail : christol@math.jussieu.fr • *Url :* http://riemann.math.jussieu.fr/~christol/
Z. MEBKHOUT, Université Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris cedex 05
E-mail : mebkhout@math.jussieu.fr • *Url :* http://riemann.math.jussieu.fr/~mebkhout/