BERNARD MAGNERON

Involutions complexes et vecteurs sphériques associés pour les groupes de Lie nilpotents réels

Astérisque, tome 253 (1999)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1999__253__R1_0>

ASTÉRISQUE 253

INVOLUTIONS COMPLEXES ET VECTEURS SPHÉRIQUES ASSOCIÉS POUR LES GROUPES DE LIE NILPOTENTS RÉELS

Bernard Magneron

Société Mathématique de France 1999

Bernard Magneron
Département de Mathématiques, Institut Galilée, Université Paris-Nord, 93430 Villetaneuse, France.
E-mail : `magneron@math.univ-paris13.fr`

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 22E27, 17B30, 43A85, 17B01, 26C99.

Mots clefs. — Groupes de Lie nilpotents réels. Algèbres de Lie nilpotentes réelles. Représentations induites holomorphes. Involutions complexes. Vecteurs sphériques. Propriétés asymptotiques des fonctions polynomiales. Fonctions polynomiales réelles minorées. Formule de Campbell-Hausdorff.

UMR n° 7539 du CNRS, « Analyse, Géométrie et Applications »,
et
UMR n° 7586 du CNRS, Équipe « Théorie des Groupes, Représentations, Applications ».

INVOLUTIONS COMPLEXES ET VECTEURS SPHÉRIQUES ASSOCIÉS POUR LES GROUPES DE LIE NILPOTENTS RÉELS

Bernard Magneron

Résumé. — Les représentations monomiales d'un groupe de Lie nilpotent G dans un espace de Hilbert, obtenues par induction à partir d'un caractère unitaire d'un sous-groupe ont été bien étudiées ces dernières années. Par exemple par Grélaud, Corwin et Greenleaf, Fujiwara et Lipsman.

La construction d'une représentation induite holomorphe à partir d'une sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de la complexifiée $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, subordonnée à une forme f sur $\mathfrak{g}^*$ fournit un autre procédé pour obtenir des représentations unitaires qui généralise le précédent. Ce procédé a été utilisé lorsque $\mathfrak{k}$ est une polarisation positive par Auslander et Kostant en 1971, afin d'obtenir des représentations unitaires irréductibles pour les groupes de Lie résolubles généraux. Depuis lors, l'étude des cas où cette induction conduit à une représentation unitaire non irréductible ne semble pas avoir été abordée.

Dans ce qui suit, une première tentative est faite pour combler cette lacune. En 1985, un travail de Benoist sur la représentation monomiale obtenue à partir du caractère trivial du sous-groupe des points fixes d'une involution de G avaient montré qu'il s'agissait là d'un bon exemple de départ pour étudier les représentations monomiales plus générales. Reprenant la même démarche, on considère maintenant la représentation induite holomorphe $(\rho, \mathcal{H})$ construite à partir de la forme nulle sur la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ des points fixes d'une involution de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Pour cela, on utilise les vecteurs « sphériques » ou vecteurs-distributions annulés par $\mathfrak{k}$, pour chaque représentation unitaire irréductible π de G associée à une G-orbite Ω dans $\mathfrak{g}^*$ par la bijection de Kirillov. On constate qu'ils forment un sous-espace $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}}$ de dimension au plus 1. Ce résultat implique que ρ est sans multiplicité. On met en évidence un cône Θ de $\mathfrak{g}^*$ tel que l'équivalence $\Omega \cap \Theta \neq \varnothing \iff \dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} = 1$ est vérifiée. Notons $\mathring{\Theta}$ l'intérieur de Θ dans le sous-espace $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})^{\perp}$. On démontre alors l'équivalence $\mathcal{H} \neq \{0\} \iff \mathring{\Theta} \neq \varnothing$.

***Abstract* (Complex involutions and associated spherical vectors for real nilpotent Lie groups)**

Monomial representations of a nilpotent Lie group G have been studied successfully during the last few years by several people, including Grélaud, Corwin and Greenleaf, Fujiwara and Lipsman. They are constructed by induction, starting from a unitary character of a G-subgroup.

Starting from a subalgebra $\mathfrak{k}$ of the complexification $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G, and from a form f of $\mathfrak{g}^*$ such that $f([\mathfrak{k},\mathfrak{k}]) = \{0\}$, one can also construct the associated holomorphically induced representation. This gives another way to obtain unitary representations for G. It generalizes the previous one, as can easily be seen.

This construction was used by Auslander and Kostant in 1971, assuming that $\mathfrak{k}$ is a so-called positive polarization. Their goal was to study irreducible unitary representations of general solvable groups. Since then, no attempts seems to have been made to use this method to consider non irreducible unitary representations.

This work is a first attempt to fill in this gap. Benoist's study of the monomial representation associated to the trivial character of the fixed points subgroup for an involution of G, which was carried out in 1985, showed it was a good starting example for studying more general monomial representations. In the same way, we study here the holomorphically induced representation $(\rho, \mathcal{H})$ associated to the trivial functional on the fixed points for an involution of $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, hoping it will give some insight of what might happen in more general instances.

First, we consider the space $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}}$ of "spherical", or $\mathfrak{k}$-annihilated, vectors for each irreducible unitary representation π of G, associated to the G-orbit Ω in $\mathfrak{g}^*$ by the Kirillov bijection. We prove that this space is of dimension at most one, and find a suitable cone Θ such that the equivalence $\Omega \cap \Theta \neq \varnothing \iff \dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} = 1$ holds. These results imply that ρ is always multiplicity free. We then prove the equivalence $\mathcal{H} \neq \{0\} \iff \mathring{\Theta} \neq \varnothing$, where $\mathring{\Theta}$ is the interior of Θ in the subspace $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})^{\perp}$ of $\mathfrak{g}^*$.

Table des matières

INTRODUCTION. CONTEXTE DE NOTRE ÉTUDE

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente réelle et $G = \exp \mathfrak{g}$.

Soient K un sous-groupe de Lie de G et χ un caractère (unitaire) de K. Rappelons que la *représentation monomiale* associée à (K, χ) qu'on désigne ici par

$$\big(\rho(G,K,\chi),\ \mathcal{H}(G,K,\chi)\big)$$

agit dans l'espace $\mathcal{H}(G,K,\chi)$ formé par les (classes de) fonctions Φ mesurables sur G telles que $\Phi(gh) = \Phi(g)\,\chi^{-1}(h)$ pour tout g de G et tout h de K et qui sont telles que $\int_{G/K} |\Phi(g)|^2\, d\dot{g} < \infty$ et que l'action de $\rho(G,K,\chi)$ de G sur $\mathcal{H}(G,K,\chi)$ est donnée par $\rho(G,K,\chi)(g')\,\Phi\,(g) = \Phi({g'}^{-1}g)$.

Dans le cas où $\chi = 1$, on peut alors écrire simplement $\big(\rho(G,K),\ \mathcal{H}(G,K)\big)$ au lieu de $\big(\rho(G,K,1),\ \mathcal{H}(G,K,1)\big)$. La représentation ainsi obtenue est dite *quasi-régulière.*

On note $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{R}$) l'action de $\mathfrak{g}$ sur l'espace $C^\infty(G)$ donnée pour X dans $\mathfrak{g}$ et g dans G par

$$\begin{array}{lrcl} & \mathcal{L}(X)\Phi\,(g) & = & \dfrac{d}{dt}\,\Phi(\exp -tX\ g)\big|_{t=0}, \\ \text{(resp.} & \mathcal{R}(X)\Phi\,(g) & = & \dfrac{d}{dt}\,\Phi(g\ \exp tX)\big|_{t=0}\ ), \end{array}$$

ainsi que son prolongement naturel à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ obtenu par linéarité et composition.

Étant donnée une sous-algèbre de Lie (complexe) $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, nous nous intéressons aux objets associés suivants :

1) Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire irréductible de G, nous considérons l'espace $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}}$ formé par les vecteurs-distributions de π qui sont *annulés par* $\mathfrak{k}$.

2) Nous considérons aussi la *représentation induite holomorphe quasi-régulière* de G associée à $\mathfrak{k}$ qu'on désigne par $\big(\rho(G,\mathfrak{k}), \mathcal{H}(G,\mathfrak{k})\big)$ ou plus simplement par $(\rho, \mathcal{H})$. C'est une sous-représentation de $\rho(G, \exp(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}), 1) = \rho\big(G, \exp(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g})\big)$. Son espace

$\mathcal{H}$ est le complété de l'espace des fonctions Φ de $C^\infty(G)$ qui sont des éléments de $\mathcal{H}\big(G, \exp(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})\big)$ et qui sont telles que $\mathcal{R}(\mathfrak{k})\,\Phi = \{0\}$·

On peut alors se poser les questions suivantes :

a) Peut-on déduire la dimension de l'espace $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}}$ des propriétés algébriques et géométriques de la G-orbite coadjointe associée à π par la bijection de Kirillov ?

b) Peut-on trouver une expression explicite des vecteurs-distributions annulés par $\mathfrak{k}$, sous la forme d'une intégrale, lorsque π se réalise par la construction de Kirillov à partir d'une polarisation de $\mathfrak{g}$?

c) Peut-on trouver des propriétés algébriques et géométriques de $\mathfrak{g}^*$ et de $\mathfrak{k}$ permettant d'affirmer que la représentation ρ n'est pas nulle ?

D'autres questions naturelles se posent que nous n'avons pas abordées faute de temps :

d) Peut-on mettre en évidence une expression explicite des coefficients associés aux vecteurs-distributions annulés par $\mathfrak{k}$ (formule de Kirillov) ?

e) Peut-on désintégrer la représentation $(\rho, \mathcal{H})$ et donner une formule de Plancherel ?

f) Peut-on utiliser la formule de Plancherel pour prouver la résolubilité de certains opérateurs différentiels sur $G/\exp(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})$ associés à $\mathfrak{k}$?

Nous nous restreignons au cas particulier où $\mathfrak{k}$ est formée par les points fixes d'une involution σ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Une présentation de nos résultats se trouve dans les sous-sections 1.1 et 1.2 et une synthèse dans la section 9.

Dans le cas *réel* où $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}$, ρ est une représentation quasi-régulière de G dans $L^2\big(G/\exp(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})\big)$ associée à l'espace symétrique nilpotent $G/\exp(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})$. Des réponses satisfaisantes aux questions ci-dessus ont été alors fournies par Benoist dans sa thèse ([**2**] à [**4**]) et initialement, nous avons cherché à étendre ses résultats. En particulier dans ce travail, nous utilisons comme lui les vecteurs-distributions annulés par $\mathfrak{k}$ (appelés dans ce cas vecteurs *sphériques*) pour obtenir des renseignements sur ρ, par exemple pour vérifier qu'elle est sans multiplicité. Ceci étant, le plus souvent ses méthodes ne se généralisent pas à notre étude, et le cas complexe apparaît comme beaucoup plus long à traiter que le cas réel.

Les résultats de Benoist peuvent être considérés comme des illustrations de la théorie des représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, ou plus généralement des groupes de Lie résolubles exponentiels. Cette théorie, qui s'est développée activement durant ces dernières années a permis l'obtention, dans le cadre de la théorie des orbites, de descriptions de plus en plus précises de ces représentations et des concepts qui leur sont associés. Les résultats obtenus ont aussi permis de mettre en évidence des propriétés de résolubilité des opérateurs différentiels invariants sur ces groupes et les espaces homogènes associés. Mentionnons, par exemple, les travaux de Grélaud ([**13**] et [**14**]), Corwin et Greenleaf [**8**], Fujiwara ([**10**] et [**11**]), Lipsman [**20**] et Benoist ([**2**] à [**4**]).

On peut se demander s'il n'existe pas une théorie concernant certaines (ou éventuellement toutes) les représentations induites holomorphes de ces groupes qui généraliserait la théorie des représentations monomiales. Dans ce contexte, notre travail apparaît comme une première tentative pour expliciter une telle théorie. Notons que jusqu'à maintenant, aucune recherche ne semble avoir été faite dans cette direction. Depuis la parution en 1971 du célèbre article de Auslander et Kostant [**1**], les travaux concernant les représentations induites holomorphes (ou éventuellement harmoniques) ont portés essentiellement sur les critères d'irréducibilité et de non nullité de ces représentations lorsqu'elles sont induites à partir de certaines polarisations complexes des groupes de Lie résolubles (voir, par exemple, les travaux de Rossi-Vergne [**26**], Fujiwara [**9**], Zaïcev [**28**], Penney [**25**]) et plus récemment pour des polarisations faibles, ceux de Inoue [**17**]). Le cas où l'induction se fait à partir d'une sous-algèbre complexe qui n'est pas une polarisation, ne semble pas avoir été abordé.

Lorsque nous avons entamé cette étude, la connaissance des quelques exemples, mentionnés plus haut, de représentations induites holomorphes déjà étudiées était insuffisante pour nous permettre d'imaginer des réponses aux questions que nous nous posions. Il nous a donc fallu commencer par étudier d'autres cas particuliers. C'est pourquoi, avant d'aborder le présent travail, nous avons complètement traité le cas des représentations ρ obtenues à partir des paires symétriques $(\mathfrak{g}, \sigma)$ telles que $\sigma\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\sigma$. Les résultats ainsi obtenus ont été annoncés dans [**22**]. Certains d'entre eux sont présentés dans la sous-section 11.3 comme des corollaires de la présente théorie.

Remerciements. — Je remercie vivement Yves Benoist dont les explications, au début de l'élaboration de ce travail, m'ont été très utiles ainsi que Michèle Vergne qui a lu de façon critique et constructive un premier manuscrit, ce qui m'a conduit à énoncer certains résultats de façon plus concise et plus intrinsèque. Par ailleurs, Hidénori Fujiwara m'a expliqué plusieurs résultats concernant les représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents et a corrigé un grand nombre de coquilles de [**23**]. Jean-Yves Charbonnel et Michel Duflo ont attiré mon attention sur les résultats de l'appendice A1 concernant les propriétés asymptotiques des fonctions semi-algébriques. Jean-Marc Delort sur ceux de l'appendice A6 concernant certaines propriétés des distributions. Les remarques de Daniel Barsky m'ont aidé à mettre en évidence les résultats de l'appendice A4 que je ne parvenais pas à prouver. Enfin, j'ai repris presque mot pour mot des notes inédites de Jacques Helmstetter pour la démonstration de la proposition A3.3 concernant une propriété de la formule de Campbell-Hausdorff. Je les remercie pour leur aide.

SECTION 1

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS

1.1. Notations et résultats principaux

Désormais G désigne un groupe de Lie nilpotent (connexe), simplement connexe, d'élément neutre e, d'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ (de dimension finie) de dual $\mathfrak{g}^*$. On note $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante complexifiée de $\mathfrak{g}$.

On désigne par $\widehat{G}$ le dual unitaire de G et par $\xi : G\backslash\mathfrak{g}^* \to \widehat{G}$ la bijection de Kirillov.

Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation (unitaire, fortement continue) de G. Les représentations de G et de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ associées à π dans l'espace des vecteurs C^∞ (resp. dans son antidual topologique, l'espace des vecteurs-distributions) sont notées $(\pi, \mathcal{H}_\pi^\infty)$ (resp. $(\pi, \mathcal{H}_\pi^{-\infty})$).

Désignons maintenant par $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre (complexe ou réelle) de $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$. On considère [(1)] le sous-espace des vecteurs *annulés par* $\mathfrak{k}$ défini par

$$(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^\mathfrak{k} = \{b \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty} \mid \pi(\bar{\mathfrak{k}})\, b = \{0\}\}.$$

On désigne désormais par σ une involution de l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ de $\mathfrak{g}$. On a donc $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^\mathbb{C})$ avec $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. On suppose que $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{Id})$ est la sous-algèbre des points fixes de σ dans $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$. On dira que le couple $(\mathfrak{g}, \sigma)$ est une *paire symétrique* et que les éléments de $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^\mathfrak{k}$ sont des *vecteurs sphériques.* Nous désignerons par P l'application polynomiale de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$ donnée par

$$P(V) = \frac{1}{2i} \log(\exp V \, \exp -\bar{V})$$

en remarquant que pour $V \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}$, $P(iV) = V$.

[(1)] On notera que dans **[25]**, th. 2, Penney utilise aussi un vecteur $\mathfrak{k}$-semi-invariant dans $\mathcal{H}_\rho^{-\infty}$, qu'il appelle *vecteur de Frobenius*, lorsque $\mathfrak{k}$ est une polarisation positive totalement complexe d'une algèbre de Lie résoluble exponentielle et lorsque ρ est la représentation induite holomorphe associée à $\mathfrak{k}$.

A ℓ dans $\mathfrak{g}^*$, nous associons le polynôme réel sur $\mathfrak{k}$ donné par $P_\ell(V) = \ell\big(P(V)\big)$. Nous définissons alors le cône convexe de $\mathfrak{g}^*$

$$\Theta = \{\ell \in \mathfrak{g}^* | V \to P_\ell(V) \text{ est minoré sur } \mathfrak{k}\}\cdot$$

On a alors (voir plus loin le théorème 9.0.1) le

Théorème 1. — *Soit* $\Omega \in G\backslash\mathfrak{g}^*$, $\pi = \xi(\Omega)$ *alors on a* $\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \leq 1$ *avec*

$$\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} = 1 \iff \Omega \cap \Theta \neq \varnothing.$$

On peut en déduire (voir le corollaire 9.0.2) que ρ est sans multiplicité.

Soit $V \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}$ et $\ell \in \Theta$, la fonction $t \to P_\ell(itV) = t\,\ell(V)$ est minorée sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne $\ell(V) = 0$. On a donc $\Theta \subseteq (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})^\perp$. On note $\mathring{\Theta}$ l'intérieur de Θ dans $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})^\perp$. On a alors (voir le théorème 10.2.8) le

Théorème 2. — *La représentation* $(\rho, \mathcal{H})$ *est non nulle si et seulement si* $\mathring{\Theta}$ *est non vide.*

Les énoncés ci-dessus présentent l'avantage de ne faire intervenir que la structure de $\mathfrak{k}$ et non pas celle de σ. Ils sont donc susceptibles d'une généralisation au cas où $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre quelconque non nécessairement formée par les points fixes d'une involution complexe. Par ailleurs, ils prennent une forme unique dans le cas où $\mathfrak{k}$ est la sous-algèbre des points fixes de plusieurs involutions différentes. Ils sont cependant difficiles à appliquer en pratique, en particulier parce qu'ils font intervenir la formule de Campbell-Hausdorff dont l'utilisation est délicate.

Il est pourtant possible de fournir des énoncés moins intrinsèques, puisqu'ils font intervenir la structure de σ, mais plus faciles à utiliser. La sous-section suivante contient, entre autres, de tels énoncés.

1.2. Notations et résultats complémentaires

Désormais, si $\mathfrak{m}$ est une partie de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, on définit pour $q = 0, 1$

$$\mathfrak{m}_q = \{X \in \mathfrak{m} \mid \sigma X = (-1)^q X\}\cdot$$

Si $\mathfrak{m}$ est un sous-espace vectoriel réel, on conviendra d'écrire $\mathfrak{m}_q^{\mathbb{C}}$ au lieu de $(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})_q$ (et non pas de $(\mathfrak{m}_q)^{\mathbb{C}}$). On a ainsi $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} \bigoplus \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$.

Nous utiliserons souvent le fait que les idéaux des suites centrales ascendantes et descendantes de $\mathfrak{g}$ ont des complexifiés qui sont caractéristiques dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et qui sont donc σ-stables. L'involution σ induit une nouvelle involution complexe sur le complexifié d'un quotient de $\mathfrak{g}$ par un sous-espace de complexifié σ-stable. La notation $\mathfrak{m}_q$ sera encore utilisée lorsque $\mathfrak{m}$ est un sous-espace d'un tel complexifié.

Dans la suite, $\mathfrak{d}$ désignera toujours une algèbre de Lie munie d'une involution complexe telle que $\mathfrak{k}(\mathfrak{d}) + \overline{\mathfrak{k}(\mathfrak{d})}$ engendre $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$. Sauf mention expresse du contraire, il s'agira de la sous-algèbre engendrée par $\big(\mathfrak{k} + \bar{\mathfrak{k}}\big) \cap \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, de telle sorte que $\mathfrak{k}(\mathfrak{d}) = \mathfrak{k}$.

De même, $\mathfrak{e}$ désignera la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $(\mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}}}) \cap \mathfrak{d}$. Nous verrons (proposition 4.1.4) que c'est un idéal de $\mathfrak{d}$.

On pose $D = \exp \mathfrak{d}$ et $E = \exp \mathfrak{e}$.

On note γ le projecteur de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ sur $\mathfrak{k}$ parallèlement à $\mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}}$. On a $\gamma = \dfrac{\mathrm{Id} + \sigma}{2}\cdot$ On définit $\mathfrak{k}_r = \gamma(\mathfrak{d})$. C'est un sous-espace vectoriel *réel* de $\mathfrak{k}$. Du fait que $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{d} \oplus i\,\mathfrak{d}$, on a $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_r + i\,\mathfrak{k}_r$. On pose $\Re e\,\mathfrak{k}_r = \mathfrak{h}$ de telle sorte que $\mathfrak{h}$ est la projection de $\mathfrak{k}_r$ sur $\mathfrak{g}$ parallèlement à $i\mathfrak{g}$. C'est un sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{d}$.

Les objets $\mathfrak{e}$, γ, $\mathfrak{k}_r$ et $\mathfrak{h}$ auront une grande importance dans toute la suite. Lorsque σ est réelle, on a $\mathfrak{k}_r = \mathfrak{h} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}$ de telle sorte que $\mathfrak{h}$ jouera souvent dans le cas général le rôle que jouait $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}$ dans le cas réel. On définit le cône convexe

$$\Theta_0 = \left\{ \ell \in \mathfrak{h}^{\perp} \mid P_\ell(\mathfrak{k}_r) \text{ est minoré } \right\}$$

Nous montrerons plus loin qu'on a $\Theta_0 = \Theta \cap \mathfrak{h}^{\perp}$ (proposition 8.2.4 et théorème 9.0.5). On a alors (proposition 7.2.2 et théorème 9.0.1) le

Théorème 1'. — *Dans les hypothèses du théorème* 1, *on a*

$$\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} = 1 \iff \Omega \cap \Theta_0 \neq \varnothing \iff \Omega \cap \Theta \neq \varnothing.$$

Pour $\ell \in \Theta_0$ *et* $V \in \mathfrak{k}_r$, *on a* $\quad P_\ell(V) = \ell\left(\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{\mathrm{ad}^p\, \Re e\, V\, (\Im m\, V)}{(p+1)!}\right).$

Pour $\ell \in \mathfrak{g}^*$, nous notons maintenant $\mathfrak{e}(\ell)$ le noyau de la forme bilinéaire $X, Y \to \ell([X,Y])$ sur $\mathfrak{e}$. On pose

$$\mathfrak{n} = \bigcap_{\ell \in \Theta_0} \operatorname{Ker} \ell \cap \mathfrak{e}(\ell)$$

et $N = \exp \mathfrak{n}$.

Nous verrons que $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{d}$ et qu'on a $\mathfrak{n} = \bigcap_{\ell \in \Theta} \operatorname{Ker} \ell \cap \mathfrak{e}(\ell)$ (proposition 10.1.2). Le résultat suivant complète le théorème 2.

Théorème 2'. — *On a les équivalences*

$$\rho \text{ non nulle} \iff \mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0 \iff \overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing.$$

Nous nous proposons maintenant de fournir une expression explicite des éléments de $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}}$ pour $\pi \in \widehat{G}$.

Rappelons que d'après la théorie de Kirillov, si $\mathfrak{p}$ est une polarisation (réelle) de $\mathfrak{g}$ en $\ell \in \mathfrak{g}^*$ avec $P = \exp \mathfrak{p}$ et si pour $X \in \mathfrak{p}$, on pose $\chi(\exp X) = e^{i\ell(X)}$, alors on peut prouver que

on a

$$\big(\rho(G, P, \chi), \mathcal{H}(G, P, \chi)\big) \in \xi(G\ell).$$

On a alors (voir le théorème 9.0.4)

Théorème 3. — *Soit $\ell \in \Theta$.*

1) *Il existe des polarisations $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ telles que $\mathfrak{k} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$.*

2) *Soit $\mathfrak{p}$ une telle polarisation, χ le caractère associé à ℓ sur $P = \exp \mathfrak{p}$. Alors il existe une unique fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ de $C^\infty(D)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

$$\text{(C)} \qquad \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(e) = 1, \qquad \mathcal{L}(\mathfrak{k})\,\kappa_\ell^{\mathfrak{p}} = \{0\} \quad \text{et} \quad \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(gh) = \chi(h)\,\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(g)$$

pour tout g de D et tout h de $P \cap D$. C'est l'exponentielle d'une fonction polynomiale sur D.

3) *Soit a un élément non nul de $\mathcal{H}^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}}$. Alors on a pour tout Φ de $\mathcal{H}^\infty(G, P, \chi)$*

$$\text{(I)} \qquad a(\Phi) = \lambda \int_{D/(P\cap D)} \overline{\Phi(h)\,\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(h)}\, d\dot{h}$$

où $d\dot{h}$ est une mesure D-invariante et λ un scalaire complexe non nul bien déterminé.

Considérons une paire symétrique $(\mathfrak{d}, \sigma)$ dans laquelle l'algèbre réelle $\mathfrak{d}$ est a priori, une algèbre de Lie quelconque. Soit $\mathfrak{k}$ la sous-algèbre de ses points fixes, $\mathfrak{e}$ l'idéal de $\mathfrak{d}$ engendré par $(\mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}}}) \cap \mathfrak{d}$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{e})$ son centre. Nous dirons que $(\mathfrak{d}, \sigma)$ est (une paire symétrique) *standard* si les propriétés (P) ci-dessous sont vérifiées :

(P1) $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ est engendrée par $\mathfrak{k} + \bar{\mathfrak{k}}$.
(P2) $\mathfrak{e}$ est de cran ≤ 2.
(P3) $\mathfrak{z}(\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}_1$.
(P4) $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 \oplus \left((\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}) \cap \mathfrak{e} \right)$.

Dans le cas où la paire $(\mathfrak{d}, \sigma)$ vérifie seulement la propriété (P1) ci-dessus, on démontre que l'ensemble $\mathcal{J}$ des idéaux $\mathfrak{j}_i$ de complexifiés σ-stables de $\mathfrak{d}$, tels que $(\mathfrak{d}/\mathfrak{j}_i, \sigma)$ vérifie les propriétés (P2), (P3) et (P4) ci-dessus, contient $\mathfrak{e}$ et est stable par intersection. On note $\mathfrak{j}$ son plus petit élément.

On démontre alors (voir la proposition 7.1.1 pour le 1) et le théorème 10.2.8 pour le 2)) le

Théorème 4. — 1) *On a $\Theta \subseteq \mathfrak{j}^\perp$.*

2) *On a l'implication $\overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \mathfrak{j} = \mathfrak{e}_0$.*

1.3. Quelques exemples simples

Nous vérifions maintenant certains des résultats précédents sur quelques exemples simples. Plus loin dans la section 11, nous présenterons des exemples plus élaborés.

Exemple 1. Lorsque σ est réelle, on a $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{d} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{e} = \mathfrak{j} = \{0\}$. D'après les remarques de la sous-section 1.1, on a donc $\Theta_0 = \Theta = \mathfrak{h}^\perp$. Le théorème $1'$ redonne les résultats suivants de Benoist (voir **[3]**) :

$$(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{h}} \neq \{0\} \iff \dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{h}} = 1 \iff \Omega \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \varnothing.$$

Soit $\mathfrak{p}$ une polarisation de $\mathfrak{g}$ en $\ell \in \mathfrak{h}^{\perp}$, la fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ sur $D = H = \exp \mathfrak{h}$ est la constante 1. Le théorème 3 donne pour $a \in \mathcal{H}^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{h}}$ et $\Phi \in \mathcal{H}^{\infty}(G,P,\chi)$

$$a(\Phi) = \lambda \int_{H/(P\cap H)} \overline{\Phi(h)}\, d\dot{h}$$

qui est également une formule de Benoist.

Par ailleurs, $\mathfrak{e} = \mathfrak{n} = \{0\}$· Le théorème $2'$ redonne le fait évident que ρ est toujours non nulle.

Exemple 2. Supposons maintenant qu'on ait $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y \simeq \mathbb{C}$ ($\mathfrak{g}$ est donc commutative), avec $\mathfrak{k} = \mathbb{C}(X + iY)$ et $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(X - iY)$. On a $\mathfrak{h}^{\perp} = \Theta_0 = \Theta = \{0\}$· On a donc $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} = \{0\}$ pour toute représentation π de $\widehat{G} \simeq \mathbb{R}^2$ sauf lorsque π est triviale. La vérification directe de ce fait est d'ailleurs évidente.

On a $\mathfrak{n} = \mathfrak{e} = \mathfrak{g} \not\subseteq \mathfrak{e}_0 = \{0\}$· Le théorème $2'$ nous permet donc de retrouver le fait élémentaire que la seule fonction entière sur $\mathbb{C}$ de carré intégrable est la fonction identiquement nulle.

Exemple 3. Supposons enfin que $\mathfrak{g}$ soit l'algèbre de Lie de base $\{X; Y_0 \dots Y_n\}$ ($n \geq 0$) ayant pour crochets non nuls :

$$[X, Y_{k-1}] = Y_k, \qquad 1 \leq k \leq n,$$

et σ l'involution de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, obtenue en posant $\mathfrak{k} = \mathbb{C}(X + iY_0)$ et $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} = \bigoplus\limits_{0\leq k\leq n} \mathbb{C}Y_k$.

On constate qu'on a $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{e} = \bigoplus\limits_{0\leq k\leq n} \mathbb{R}Y_k$ et $\gamma(\mathfrak{d}) = \mathfrak{k}_r = \mathbb{R}(X + iY_0)$. D'où $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X$ et $\mathfrak{h}^{\perp} = X^{\perp}$. Soit ℓ dans $\mathfrak{h}^{\perp}$ tel que $\pi = \xi(G\ell)$. On a

$$\begin{aligned} P_\ell\big(x(X + iY_0)\big) &= \ell\Big(\sum_{p\geq 0} \frac{\mathrm{ad}^p\, xX\, (xY_0)}{(p+1)!}\Big) \\ &= \ell(Y_0)\, x + \frac{\ell(Y_1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\ell(Y_n)}{(n+1)!}\, x^{n+1}. \end{aligned}$$

On voit que Θ_0 est formé de l'union de $\{0\}$ et du sous-ensemble des ℓ de $X^{\perp}$ tels que le plus grand m pour lequel on a $\ell(Y_m) \neq 0$, est impair avec $m = 2p+1$ et $\ell(Y_{2p+1}) > 0$.

En ce qui concerne ρ, deux cas peuvent se produire. Si $n = 2m+1$ ($m \geq 0$) est impair, la condition $\ell(Y_{2m+1}) > 0$ entraîne que P_ℓ est minoré sur $\mathfrak{k}_r$ et qu'on a $\ell \in \Theta_0$. On a donc $\bigcap\limits_{\ell\in\Theta_0} \operatorname{Ker} \ell|_{\mathfrak{e}} = \{0\}$ et $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0 = \{0\}$· Le théorème $2'$ entraîne donc que ρ est non nulle.

Si maintenant, $n = 2m$ est pair, on voit qu'on a $\ell \in \Theta_0 \Rightarrow \ell(Y_{2m}) = 0$ puisqu'un polynôme à une variable x de degré impair $2m+1$, n'est jamais minoré. On a donc $Y_{2m} \in \operatorname{Ker} \ell \cap \mathfrak{e} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{n}$. Comme $\mathfrak{e}_0 = \{0\}$, on a $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{e}_0$ et le même théorème entraîne que ρ est nulle.

1.4. Lignes directrices

Nous explicitons les lignes directrices des démonstrations utilisées pour prouver les résultats ci-dessus.

Nous remarquons tout d'abord que le nombre $a(\Phi)$ de la formule (I) du théorème 3 ne dépend que de la restriction de Φ à D. Nous sommes donc amenés (voir la sous-section 3.3) à donner un sens à la notion de vecteur sphérique « *concentrés sur D* » et à noter $\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)$ le sous-espace correspondant, dont a est un élément.

Nous remarquons alors dans la section 3 que si $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ subordonnée à ℓ et telle que $\mathfrak{k}+(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{d})^{\mathbb{C}}=\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ et $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{k})=\{0\}$, il existe une unique fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ vérifiant les propriétés de covariance (C) du théorème 3 (voir le théorème 3.1.2 et la formule (3.3.1)). C'est une exponentielle de fonction polynomiale. Dans le cas où $\mathfrak{p}$ est une polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ qui vérifie ces propriétés, la formule (I) nous fournit alors formellement un élément de $\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}}$ puisqu'on a

$$\begin{aligned}\rho(\bar{\mathfrak{k}})a\,(\Phi) &= \lambda\int_{D/(P\cap D)}\overline{\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(h)\;\mathcal{L}(-\mathfrak{k})\Phi\,(h)}\;d\dot{h}\\ &= \lambda\int_{D/(P\cap D)}\overline{\mathcal{L}(\mathfrak{k})\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}\,(h)\;\Phi(h)}\;d\dot{h}=\{0\}.\end{aligned}$$

Or, on sait que les éléments de $\mathcal{H}^{-\infty}(G,P,\chi)$ correspondent dans des paramétrisations convenables à des distributions tempérées. Utilisant le fait, démontré dans l'appendice A2, que l'exponentielle d'une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^k$ est une distribution tempérée si et seulement si elle est bornée, nous en déduisons que l'intégrale (I), qui converge dans tous les cas pour les fonctions Φ à support compact modulo $P\cap D$, fournit effectivement un vecteur sphérique si et seulement si la fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ est bornée sur D (voir la proposition 3.3.1).

En résumé, si ℓ et $\mathfrak{p}$ vérifient les propriétés $\mathfrak{k}+(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{d})^{\mathbb{C}}=\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ et $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{k})=\{0\}$, on a $\dim\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}}\leq 1$ et l'équivalence

$$\dim\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}}=1\quad\Longleftrightarrow\quad\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}\text{ bornée sur D.}$$

C'est le résultat principal de cette section 3.

Pour pouvoir préciser ces résultats, il est nécessaire de mettre en évidence certains objets associés à la paire $(\mathfrak{g},\sigma)$, en particulier les idéaux $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{j}$, et d'expliciter leurs propriétés. C'est ce qui est fait dans la section 4. On y met aussi en évidence certaines propriétés des paires symétriques standard. Ces résultats seront utiles dans la suite, car désormais beaucoup de raisonnements se feront sur D avec des éléments ℓ de $\mathfrak{d}^*$ tels que $\ell(\mathfrak{j})=\{0\}$.

Les trois sections suivantes sont en grande partie consacrées à la démonstration de l'équivalence $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}}\neq\{0\}\iff\Omega\cap\Theta_0\neq\varnothing$.

Tout d'abord, dans la section 5, nous étudions les fonctions $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ dans le cas particulier où $\ell\in\mathfrak{j}^\perp$ et où les polarisations $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ sont $\mathfrak{e}$-admissibles et telles que

$$\mathfrak{k} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{d}^{\mathbb{C}} \qquad \text{avec} \qquad \ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}) = \{0\}$$

(ce que nous appelons des σ-polarisations dans la sous-section 5.1). Dans ces circonstances particulières, ces fonctions peuvent être calculées explicitement et on constate que ℓ étant fixée, elles sont simultanément bornées sur D lorsque les $\mathfrak{p}$ varient (proposition 5.2.2 et corollaire 5.2.3).

Nous considérons ensuite une orbite Ω de G dans $\mathfrak{g}^*$ avec $\pi = \xi(\Omega)$ telle que $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}$. Nous prouvons par récurrence dans la proposition 6.2.4 qu'on a alors $\Omega \cap (\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^{\perp} \neq \varnothing$, que pour tout élément $\ell \in \Omega \cap (\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^{\perp}$ il existe *une* σ-polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ telle que la fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ correspondante soit bornée et qu'on a $\mathcal{H}^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}} = \mathcal{H}_D^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}}$. Utilisant le corollaire 5.2.3 déjà mentionné, on en déduit, ce qui est important pour la récurrence, que ces propriétés sont vérifiées pour *toutes* les σ-polarisations. Ces résultats entraînent qu'on a $\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} = 1$.

On constate alors (corollaire 7.3.2) que pour des couples $(\ell, \mathfrak{p})$ tels que $\ell \in (\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^{\perp}$ et $\mathfrak{p}$ est une σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ, on a l'implication $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ bornée $\Rightarrow \ell \in \Theta_0$. En résumé, on a $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\} \Rightarrow \Theta_0 \neq \varnothing$.

La réciproque se démontre suivant le même schéma. Nous prouvons par récurrence l'inclusion $\Theta_0 \subseteq \mathfrak{j}^{\perp}$ et pour $\ell \in \Theta_0$, l'existence d'une σ-polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ (proposition 7.1.1). On constate (corollaire 7.3.2) que la fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ correspondante est bornée. Cette fonction fournit par la formule (I) un vecteur sphérique. On a donc bien $\Omega \cap \Theta_0 \neq \varnothing \Rightarrow (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}$.

Concernant ces résultats, la section 6 regroupe ceux d'entre eux qui sont obtenus par récurrence. Dans la sous-section 6.1, nous explicitons 8 situations possibles pour un couple (G, Ω) avec $\Omega \in G \backslash \mathfrak{g}^*$. Ces situations concernent le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$, son centralisateur $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})$ et la restriction des éléments de Ω à $\mathfrak{z}$. On constate (lemme 6.1.3) que 3 de ces situations sont à éliminer lorsqu'on a ou bien $(\mathcal{H}_{\xi(\Omega)}^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}$ ou bien $\Omega \cap \Theta_0 \neq \varnothing$ ou bien $\Omega \cap \Theta \neq \varnothing$ (nous n'avons pas prouvé à ce stade que ces conditions sont équivalentes). Les démonstrations par récurrence dans les autres situations se feront alors en se ramenant à un quotient ou à un idéal $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ de dimension inférieure à celle de $\mathfrak{g}$.

Dans la section 7, on calcule les restrictions de P et P_ℓ à $\mathfrak{k}_r$, on explicite les propriétés de ces restrictions et leurs conséquences. On caractérise les éléments ℓ de Θ_0 (proposition 7.3.1) et on en déduit (sous-section 7.4) des résultats concernant $\Omega \cap \Theta_0$ pour $\Omega \in G \backslash \mathfrak{g}^*$.

C'est seulement dans la section 8 que la plupart des résultats concernant le cône Θ sont démontrés. On y prouve en particulier (proposition 8.2.4), qu'on a $\Theta_0 = \Theta \cap \mathfrak{h}^{\perp}$ puis par récurrence l'équivalence $\Omega \cap \Theta_0 \neq \varnothing \Longleftrightarrow \Omega \cap \Theta \neq \varnothing$ (proposition 8.2.5).

Tous les résultats, à l'exception du théorème $2'$ sont alors prouvés.

Pour prouver ce théorème $2'$, on utilise dans la section 10 le fait que

$$\rho = \operatorname{Ind}\underset{D}{\overset{G}{\uparrow}} \rho(D, \mathfrak{k}).$$

Ceci a pour conséquence qu'on peut sans perte de généralité supposer $G = D$ dans la démonstration. Nous montrons tout d'abord l'équivalence $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0 \iff \overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing$ (proposition 10.1.3). Nous remarquons alors (corollaire 9.0.2), en utilisant des résultats de Penney et de Bonnet concernant les représentations cycliques qu'on a une désintégration de la forme

$$(\rho, \mathcal{H}) \simeq \int_{\pi \in \widehat{D}} (\pi, \mathcal{H}_\pi)\, d\mu(\pi)$$

avec $\xi^{-1}(\pi) \cap \Theta \neq \varnothing$ et $\pi(N) = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\pi}\}$ μ-presque partout. On en déduit par intégration, qu'on a $\rho(N) = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\}$ et lorsque ρ n'est pas nulle, $N \subseteq \exp(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})$. D'où $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0$.

Pour montrer réciproquement que la condition $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0$ entraîne que ρ n'est pas nulle, nous cherchons à construire une fonction non nulle de $\mathcal{H}$ lorsqu'elle est vérifiée. Pour $\ell \in \Theta_0$, nous considérons les fonctions κ_ℓ sur D qui vérifient les relations

$$\kappa_\ell(e) = 1, \qquad \mathcal{L}(\mathfrak{k})\, \kappa_\ell = \{0\}, \qquad (\mathcal{R} - i\ell)\big(\mathfrak{j} + \mathfrak{z}(\mathfrak{e}) + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}\big)\, \kappa_\ell = \{0\},$$

(voir la sous-section 5.3). On peut trouver un compact $\mathcal{K}$ d'intérieur non vide de $\mathfrak{h}^\perp$ contenu dans Θ_0. Nous faisons une synthèse harmonique des κ_ℓ pour les ℓ dans $\mathcal{K}$ en posant

$$\Phi(g) = \int_{\ell \in \mathcal{K}} \kappa_\ell(g^{-1})\, d\ell.$$

On obtient bien ainsi un élément non nul de $\mathcal{H}$. En particulier, on a $\mathcal{R}(\mathfrak{k})\,\Phi = \{0\}$ par dérivation sous le signe somme. Le fait que Φ soit de carré intégrable sur $D/\exp(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{d})$ est un peu plus délicat à démontrer (voir les remarques de la sous-section suivante).

La condition $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0$ est contraignante. Notre étude montre, en particulier, que si l'on choisit au hasard une paire symétrique $(\mathfrak{g}, \sigma)$ telle que σ n'est pas réelle, il y a toute chance pour qu'elle soit associée à une représentation ρ nulle. La représentation ρ est pourtant fidèle dans de nombreux cas. Nous en fournissons des exemples variés dans la section 11 qui, contrairement aux exemples de la sous-section 1.3, auraient difficilement pu être mis en évidence sans la connaissance de nos résultats. Nous fournissons en particulier un exemple pour lequel $\mathfrak{k}$ est de cran 2 et le polynôme P de degré 4, et d'autres pour lesquels $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ ou $\mathfrak{j}$ ne sont pas des idéaux de $\mathfrak{g}$.

Enfin, un appendice rassemble divers résultats techniques, le plus souvent élémentaires, qui sont utilisés dans la suite. Ils sont énoncés avec démonstrations ou références et de façon indépendante du reste de l'exposé.

1.5. Points importants des démonstrations

Nous énumérons et éventuellement commentons les points qui nous semblent les plus importants dans les démonstrations qui vont suivre.

1) Le fait que si on a deux sous-algèbres $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$, subordonnées aux formes ℓ_1 et ℓ_2 de $\mathfrak{d}^*$ et telles que $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ avec $(\ell_1 - \ell_2)(\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) = \{0\}$, alors il existe une unique fonction $\kappa_{\ell_1,\ell_2}^{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}$ sur D telle que[(2)]

$$\kappa_{\ell_1,\ell_2}^{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}(e) = 1, \quad (\mathcal{L} + i\ell_1)(\mathfrak{p}_1)\,\kappa_{\ell_1,\ell_2}^{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2} = \{0\}, \quad (\mathcal{R} - i\ell_2)(\mathfrak{p}_2)\,\kappa_{\ell_1,\ell_2}^{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2} = \{0\}.$$

(Voir le théorème 3.1.2).

2) Le fait que l'exponentielle d'une fonction polynomiale est une distribution tempérée si et seulement si elle est bornée (appendice A2). Ce résultat n'est probablement pas nouveau mais nous ne connaissons pas de référence le mentionnant. Nous le prouvons en utilisant les résultats de Hörmander concernant les propriétés asymptotiques des fonctions semi-algébriques réelles de plusieurs variables (voir **[16]**, Appendix A et notre appendice A1 plus loin), qui sont eux-mêmes des conséquences du théorème des fonctions implicites pour les fonctions de plusieurs variables complexes et du théorème de Tarsky-Seidenberg en géométrie algébrique réelle.

3) Le fait que l'idéal $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{d}$ ne dépende que de la structure de $\mathfrak{e}$ et non pas de celle de $\mathfrak{d}$ tout entier (voir le théorème 4.2.3). C'est un résultat purement algébrique.

4) Le fait que parmi les 8 situations de $(\mathfrak{g}, \Omega)$ mentionnées plus haut, certaines ne puissent pas se présenter dans les hypothèses qui nous concernent (voir le lemme 6.1.3). En particulier l'élimination de la situation (6) de la proposition 6.1.1 lorsque $(\mathcal{H}_{\xi(\Omega)}^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}$ est une conséquence du fait que sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, il n'existe pas de distribution T non nulle telle que $\bar{z}T = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z}T = 0$.

Les points 3) et 4) entraînent que dans les récurrences, lorsqu'on passe de $\mathfrak{g}$ à un idéal ou à un quotient propre $\mathfrak{g}'$ de dimension strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}$, les idéaux $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{d}$ ne peuvent « diminuer » que lorsque $\mathfrak{g}'$ est un quotient et jamais lorsque c'est un idéal. Cette remarque est à l'origine de la démonstration de nombreux résultats. Par exemple (proposition 7.1.1), de l'inclusion $\Theta \subseteq \mathfrak{j}^{\perp}$.

5) L'apparition lorsqu'on observe les termes de degré au plus 1 en A et 1 en B dans les développements en série obtenus par la formule de Campbell-Hausdorff de $\dfrac{1}{2}\log\exp(T+A)\exp 2B\exp(-T+A)$, de $\dfrac{1}{2}\log\exp(T-A)\exp 2B\exp(T+A)$, ou de $\log\exp A\exp T\exp B$ d'expressions impliquant les développements en série des

(2) J'ai déjà utilisé dans le passé des fonctions $\kappa_{\ell_1,\ell_2}^{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}$ de type gaussien, convenablement covariantes à gauche et à droite, dans un contexte assez voisin (voir **[21]**). Les fonctions utilisées maintenant sont des exponentielles polynomiales de degré pair arbitrairement grand.

fonctions analytiques classiques $\varpi(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$, $\varpi^{-1}(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, $x \tanh \dfrac{x}{2}$ et $\dfrac{x}{\sinh x}$ (voir l'appendice A3).

On notera aussi (proposition A3.3) que si on exprime les termes d'ordre 1 en A et 1 en B de $\log \exp A \exp T \exp B$ sous la forme

$$\sum_{p,q \geq 0} S(p,q)\ [(\operatorname{ad} T)^p A, (\operatorname{ad} -T)^q B]$$

alors pour tout $k \geq 0$, la matrice $\Big(S(p,q)\Big)_{0 \leq p,q \leq k}$ est symétrique, définie positive.

6) La démonstration de l'égalité $\Theta_0 = \Theta \cap \mathfrak{h}^\perp$ (proposition 8.2.4). Cette égalité est, entre autres, une conséquence du résultat ci-dessous qui est probablement inédit (voir la proposition A4.3).

Pour l'énoncer, nous considérons les suites de nombres réels $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n>0}$ telles que $\dfrac{x}{\sin x} = \sum_{n \geq 0} b_n\, x^{2n}$, $x \tan \dfrac{x}{2} = \sum_{n>0} c_n\, x^{2n}$ au voisinage de l'origine.

Nous définissons l'endomorphisme $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) de $\mathbb{R}[x_1 \dots x_k]$ (resp. de l'idéal $\mathbb{R}^1[x_1 \dots x_k]$ formé par les polynômes qui s'annulent à l'origine) et qui, à un polynôme $P = \sum_{p \geq 0} P_p$ (resp. $P = \sum_{p>0} P_p$) pour lequel les P_p sont des composantes homogènes de degré total p, associe le polynôme

$$\mathcal{T}_1 P = \sum_{n \geq 0} (2n)!\, b_n\ P_{2n}$$

(resp.
$$\mathcal{T}_2 P = \sum_{n>0} (2n)!\, (c_n - b_n)\ P_{2n}\ ).$$

Alors $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) laisse stable le cône convexe des polynômes de $\mathbb{R}[x_1 \dots x_k]$ (resp. $\mathbb{R}^1[x_1 \dots x_k]$) qui sont minorés sur $\mathbb{R}^k$.

L'énoncé et la plus grande partie de la démonstration de ce résultat sont élémentaires. Cependant, ici encore, nous utilisons les résultats de Hörmander déjà mentionnés pour le point 2).

7) Le fait que la fonction $g \to \int_{\mathcal{K}} \kappa_\ell(g^{-1})\, d\ell$ explicitée dans la précédente sous-section soit de carré intégrable sur $D/\exp(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})$. C'est la troisième et dernière conséquence dans cet article des résultats de Hörmander déjà utilisés pour les points 2) et 6).

SECTION 2

CONVENTIONS, NOTATIONS ET RAPPELS COMPLÉMENTAIRES

Les notations et les résultats de cette section seront utilisés dans toute la suite.

2.1. Conventions générales

Lorsque $\mathfrak{m}$ désigne un espace vectoriel réel de dimension finie, $\mathfrak{m}^*$ désigne son dual et $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ son complexifié. On ne distingue pas, en ce qui concerne les notations, une forme de $\mathfrak{m}^*$ de sa complexifiée.

Lorsque $\mathfrak{m}$ désigne un espace vectoriel topologique complexe, $\mathfrak{m}^*$ désigne son antidual topologique.

Lorsque $\mathfrak{m}$ est un espace vectoriel complexe de dimension finie, on note $\mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ son réalifié.

Pour $\mathfrak{g}$ ou pour toute autre algèbre de Lie, on note $\left(\mathfrak{z}^j(\mathfrak{g})\right)_{0\leq j\leq n}$, la suite centrale ascendante d'idéaux caractéristiques de $\mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{z}^0(\mathfrak{g}) = \{0\}\cdot$ On désigne par $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z} = \mathfrak{z}^1(\mathfrak{g})$, le centre de $\mathfrak{g}$.

Lorsque $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre réelle de $\mathfrak{g}$ subordonnée à l'élément ℓ de $\mathfrak{g}^*$, on désigne par χ_ℓ (ou plus simplement par χ) le caractère de $P = \exp \mathfrak{p}$ donné par $\chi(\exp X) = e^{i\ell(X)}$.

Soit $\varphi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$ une série formelle à coefficients complexes et X et Y des éléments de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. On convient d'écrire $\operatorname{Ad}\varphi X \cdot Y = \sum_{p=0}^{\infty} a_p\ (\operatorname{ad} X)^p(Y)$. On a ainsi $\operatorname{Ad}\exp X \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et $\operatorname{Ad} X^p = (\operatorname{ad} X)^p$.

Dans toute la suite, ϖ désigne la série formelle associée à la fonction analytique $\dfrac{e^x - 1}{x}\cdot$ On a donc $\operatorname{Ad}\varpi X \cdot Y = \sum_{p\geq 0} \dfrac{(\operatorname{ad} X)^p \cdot Y}{(p+1)!}\cdot$

On pose $G^{\mathbb{C}} = \exp \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Étant donné ℓ dans $\mathfrak{g}^*$, on pose $\mathfrak{g}(\ell) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \ell([X, \mathfrak{g}]) = \{0\}\}\cdot$

En général, on désigne un groupe de Lie et son algèbre de Lie par la même lettre respectivement en caractère latin majuscule et en caractère gothique minuscule.

Étant donné un espace vectoriel réel de dimension finie, on désigne par $\mathcal{D}(\mathfrak{m})$ (resp. $\mathcal{S}(\mathfrak{m})$) l'espace des fonctions C^∞ de support compact (resp. des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées) à valeurs dans $\mathbb{C}$ sur $\mathfrak{m}$. Dans ces conditions, $\mathcal{D}^*(\mathfrak{m})$ (resp. $\mathcal{S}^*(\mathfrak{m})$) désigne l'espace des distributions (resp. des distributions tempérées) considéré comme l'antidual topologique de $\mathcal{D}(\mathfrak{m})$ (resp. $\mathcal{S}(\mathfrak{m})$).

Si maintenant $\mathfrak{m}$ est un espace vectoriel normé (de dimension finie en ce qui nous concerne) et q est un élément de $\mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathfrak{m}\{\{t^{1/q}\}\}$ l'espace des applications continues $t \to f(t)$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathfrak{m}$ et qui peuvent s'écrire pour t réel suffisamment grand en module, sous la forme $f(t) = \sum_{-\infty<k\leq p} A_k\, t^{k/q}$ (avec $A_k \in \mathfrak{m}$). On obtient ainsi le *développement en série de Puiseux* de l'élément f de $\mathfrak{m}\{\{t^{1/q}\}\}$.

On a $f(t) = A_p\, t^{p/q}\,\big(1 + o(1)\big)$ lorsque $|t| \to \infty$.

On note $\deg f$ le degré de f, égal à $-\infty$ lorsque f est nulle pour $|t|$ assez grand et au plus grand entier p tel que $A_p \neq 0$ sinon. On désigne par $\mathfrak{m}\{t^{1/q}\}$ le sous-espace de $\mathfrak{m}\{\{t^{1/q}\}\}$ formé par les fonctions dont le développement en série de Puiseux ne possède qu'un nombre fini de termes non nuls.

On note $\mathfrak{m}_+\{\{t^{1/q}\}\}$ (resp. $\mathfrak{m}_+\{t^{1/q}\}$) les sous-ensembles de $\mathfrak{m}\{\{t^{1/q}\}\}$ (resp. $\mathfrak{m}\{t^{1/q}\}$) formés par les éléments de degré > 0 et $\mathfrak{m}_-\{\{t^{1/q}\}\}$ (resp. $\mathfrak{m}_-\{t^{1/q}\}$) les sous-espaces formés par les éléments de degré ≤ 0.

On convient de noter $x = (x_k \dots x_1)$ un élément courant de $\mathbb{R}^k$ (la lettre x sera aussi quelquefois utilisée pour désigner un élément de $\mathbb{R}$). Lorsque $\mathfrak{m}$ est un espace vectoriel, on désigne alors par $\mathfrak{m}[x]$ l'espace des applications polynomiales sur $\mathbb{R}^k$ à coefficients (et à valeurs) dans $\mathfrak{m}$.

2.2. Espaces et sous-espaces homogènes nilpotents

Dans cette sous-section, la lettre $\mathfrak{p}$ désigne une sous-algèbre de codimension k dans $\mathfrak{g}$ avec $P = \exp \mathfrak{p}$. Les applications exponentielles permettent de munir G et P d'une structure naturelle de variété algébrique réelle, isomorphe à un espace affine. Nous dirons qu'une application η d'un espace vectoriel $\mathfrak{q}$ de dimension k dans G est une *paramétrisation algébrique de G/P par $\mathfrak{q}$* si l'application $Q, h \to \eta(Q)\, h$ de $\mathfrak{q} \times P$ dans G est un difféomorphisme, polynomial ainsi que son inverse et tel que $\eta(0) = e$.

Il est connu (utiliser par exemple [**7**], th. 1.2.12) que la bijection induite par η entre $\mathfrak{q}$ et G/P muni de sa structure différentielle naturelle, est un difféomorphisme qui fait correspondre une mesure G-invariante sur G/P à une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{q}$.

Il existe des paramétrisation algébriques de G/P. Pour en construire un exemple, on définit $\{X_k \dots X_1\}$ comme une *base supplémentaire adaptée à $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$* si, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq k$, $\mathfrak{g}_j = \mathbb{R}X_j \oplus \mathbb{R}X_{j-1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}X_1 \oplus \mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et si on a $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}$. On vérifie alors, qu'étant donnée une telle base, l'application $\eta : \mathbb{R}^k \to G$, donnée par

$$\eta : x = (x_k \dots x_1) \to \exp x_k X_k \dots \exp x_1 X_1$$

est une paramétrisation algébrique de G/P par $\mathbb{R}^k$. Dans ce contexte, on écrira souvent $\exp xX$ au lieu de $\exp x_k X_k \dots \exp x_1 X_1$. Il est connu (voir, par exemple, [7]) qu'il existe toujours des bases supplémentaires adaptées à $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$.

De façon analogue, on dit que le sous-espace $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}$ est *supplémentaire adapté à* $\mathfrak{p}$ *dans* $\mathfrak{g}$ si l'application $(Q,h) \to \exp Q\, h$ de $\mathfrak{q} \times P$ dans G est un difféomorphisme, polynomial ainsi que son inverse. L'application $\eta : Q \to \exp Q$ fournit alors une paramétrisation algébrique de G/P par $\mathfrak{q}$. On montre qu'il existe toujours de tels sous-espaces. On notera cependant que tous les sous-espaces supplémentaires à $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$ ne sont pas nécessairement adaptés. Par exemple, lorsque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3, de crochet non nul $[X,Y] = Z$, le supplémentaire $\mathfrak{q} = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}(Y+Z)$ à $\mathfrak{p} = \mathbb{R}Y$ dans $\mathfrak{g}$ ne lui est pas adapté.

Les résultats ci-dessus restent valables si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, G par $G^{\mathbb{C}}$ et si l'on suppose tous les espaces vectoriels et toutes les algèbres de Lie complexes.

Supposons maintenant que $\mathfrak{g}'$ soit une sous-algèbre de l'algèbre nilpotente $\mathfrak{g}$ (avec $G' = \exp \mathfrak{g}'$) et posons $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}'$ avec $P' = \exp \mathfrak{p}'$. Alors, on vérifie qu'il existe une paramétrisation algébrique η de G/P par $\mathfrak{q}$ et un sous-espace vectoriel $\mathfrak{q}'$ de $\mathfrak{q}$ tels que $\eta(\mathfrak{q}') \subseteq G'$ et que $\eta' = \eta|_{\mathfrak{q}'}$ soit une paramétrisation algébrique de G'/P' par $\mathfrak{q}'$.

2.3. Les espaces $\mathcal{D}^*(G,P,\chi)$ et $\mathcal{H}^{-\infty}(G,P,\chi)$

Revenant au cas réel, donnons-nous maintenant un caractère unitaire χ de P et une paramétrisation algébrique η de G/P par $\mathfrak{q}$. On a une bijection w de l'espace des fonctions Φ sur G qui vérifient les relations de covariance

$$\Phi(gh) = \Phi(g)\,\chi(h^{-1}) \qquad \forall g \in G, \qquad \forall h \in P$$

dans l'espace des fonctions sur $\mathfrak{q}$ donnée par

$$w\Phi\,(Q) = \Phi \circ \eta\,(Q) \qquad \forall Q \in \mathfrak{q}.$$

On définit les espaces $\mathcal{S}(G,P,\chi) = w^{-1}(\mathcal{S}(\mathfrak{q}))$ et $\mathcal{D}(G,P,\chi) = w^{-1}(\mathcal{D}(\mathfrak{q}))$. On les munit de la topologie induite par $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ (resp. $\mathcal{D}(\mathfrak{q})$). On vérifie que les espaces topologiques ainsi obtenus ne dépendent pas du choix de la paramétrisation η.

On pose $W = w|_{\mathcal{D}(G,P,\chi)}$; W définit un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques entre $\mathcal{D}(G,P,\chi)$ et $\mathcal{D}(\mathfrak{q})$. On ne le distingue pas, au niveau des notations, de son prolongement continu qui met en bijection $\mathcal{D}^*(G,P,\chi)$ et $\mathcal{D}^*(\mathfrak{q})$, $\mathcal{S}^*(G,P,\chi)$ et $\mathcal{S}^*(\mathfrak{q})$ ainsi que $\mathcal{S}(G,P,\chi)$ et $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$.

On voit que $\mathcal{L}$ définit une représentation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{D}(G,P,\chi)$, qui se prolonge continûment en une représentation, toujours notée $\mathcal{L}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{D}^*(G,P,\chi)$ qui laisse stables $\mathcal{S}(G,P,\chi)$ et $\mathcal{S}^*(G,P,\chi)$.

On a la représentation ν de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{D}^*(\mathfrak{q})$ donnée par $\nu = W\mathcal{L}W^{-1}$.

Il est bien connu (voir par exemple [**8**]) que lorsque $\mathfrak{p}$ est une polarisation en ℓ de $\mathfrak{g}^*$, on a

$$\mathcal{H}^{\infty}(G,P,\chi) = \mathcal{S}(G,P,\chi) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}^{-\infty}(G,P,\chi) = \mathcal{S}^*(G,P,\chi)$$

et que la représentation $\rho(G,P,\chi)$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{H}^{\pm\infty}(G,P,\chi)$ coïncide avec $\mathcal{L}$.

Dans le contexte du dernier paragraphe de la sous-section précédente, on associe à η' les objets w', W' et ν' correspondants à w, W et ν pour η.

SECTION 3

LES FONCTIONS $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ ET LES VECTEURS SPHÉRIQUES ASSOCIÉS

3.1. Les fonctions $\kappa_{\ell_1,\ell_2}^{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}$

Notons tout d'abord qu'en tout point g du groupe de Lie (nilpotent) réel $D = \exp \mathfrak{d}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ induisent des isomorphismes $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{L}_g$ entre $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ et le complexifié de l'espace tangent à D en g donnés par

$$\mathcal{R}_g(X)\ \Phi = \mathcal{R}(X)\Phi\,(g) \qquad\qquad (\text{resp.}\quad \mathcal{L}_g(X)\ \Phi = \mathcal{L}(X)\Phi\,(g))$$

pour $\Phi \in C^\infty(G)$. On a évidemment

$$\mathcal{R}_g(X) = \mathcal{L}_g(-gX). \tag{3.1.1}$$

Lemme 3.1.1. — *Soient $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ des sous-algèbres de Lie (complexes) de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ telles que $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ avec $M_1 = \exp \mathfrak{m}_1$ et $M_2 = \exp \mathfrak{m}_2$. Alors*

1) *On a $D^{\mathbb{C}} = M_1 M_2$.*[1]
2) *Pour tout g de $D^{\mathbb{C}}$, on a $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_1 + g\,\mathfrak{m}_2$.*
3) *Pour tout g de D, on a $\mathcal{L}_g(\mathfrak{m}_1) + \mathcal{R}_g(\mathfrak{m}_2) = \mathcal{R}_g(\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}) = \mathcal{L}_g(\mathfrak{d}^{\mathbb{C}})$.*

Démonstration. — Nous prouvons le lemme qui est évident lorsque $\mathfrak{m}_1 \subseteq \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$, par récurrence sur $\dim \mathfrak{m}_1/(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$. Nous supposons donc $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$. Soient $\mathfrak{m}'$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ qui contient $\mathfrak{m}_2$, et $U_0 \in \mathfrak{m}_1$ tels que $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}U_0 \oplus \mathfrak{m}'$. On pose $\mathfrak{m}_1' = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}'$. On a $\mathfrak{m}_1 = \mathbb{C}U_0 \oplus \mathfrak{m}'_1$.

1) On a par récurrence

$$D^{\mathbb{C}} = \exp \mathbb{C}U_0 \exp \mathfrak{m}' = \exp \mathbb{C}U_0 \exp \mathfrak{m}_1' \exp \mathfrak{m}_2 = M_1 M_2.$$

2) Soient U et h les uniques éléments de $\mathbb{C}U_0$ et de $M' = \exp \mathfrak{m}'$ tels que $g = \exp U \cdot h$. On a par récurrence $\mathfrak{m}'^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}'_1 + h\,\mathfrak{m}_2$. D'où

$$\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}U_0 + \exp U \cdot \mathfrak{m}'_1 + \exp U \cdot h \cdot \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1 + g \cdot \mathfrak{m}_2.$$

---

[1] Ce résultat se trouve aussi dans **[18]** lemma 6.2.

3) D'après l'égalité (3.1.1) et le 2), on a bien

$$\mathcal{L}_g(\mathfrak{m}_1)+\mathcal{R}_g(\mathfrak{m}_2)=\mathcal{L}_g(\mathfrak{m}_1+g\cdot\mathfrak{m}_2)=\mathcal{L}_g(\mathfrak{d}^{\mathbb C}).$$

□

Théorème 3.1.2. — *Soit $\mathfrak d$ une algèbre de Lie nilpotente réelle. Soient $\mathfrak p_1$ et $\mathfrak p_2$ deux sous-algèbres* réelles *de $\mathfrak d^{\mathbb C}$, $\mathfrak p_1^c=\mathfrak p_1+i\,\mathfrak p_1$, $\mathfrak p_2^c=\mathfrak p_2+i\,\mathfrak p_2$, ℓ_1 et ℓ_2 deux éléments de $\mathfrak d^*$. On suppose que*

1) $\ell_1([\mathfrak p_1,\mathfrak p_1])=\{0\}$ *et* $\ell_2([\mathfrak p_2,\mathfrak p_2])=\{0\}$·
2) $\mathfrak d^{\mathbb C}=\mathfrak p_1^c+\mathfrak p_2^c$.
3) $(\ell_1-\ell_2)(\mathfrak p_1^c\cap\mathfrak p_2^c)=\{0\}$·

Alors il existe une unique fonction $\kappa=\kappa_{\ell_1,\ell_2}^{\mathfrak p_1,\mathfrak p_2}$ sur D à valeurs complexes qui vérifie les propriétés ci-dessous :

(i) $\kappa(e)=1$. *(ii)* $(\mathcal L+i\ell_1)(\mathfrak p_1)\ \kappa=\{0\}$· *(iii)* $(\mathcal R-i\ell_2)(\mathfrak p_2)\ \kappa=\{0\}$·

C'est l'exponentielle d'une fonction polynomiale sur D. Son prolongement analytique $\kappa^{\mathbb C}$ sur $D^{\mathbb C}$ est l'unique fonction telle que

$$\begin{aligned}&\kappa^{\mathbb C}(e)=1\\ (3.1.2)\qquad &\kappa^{\mathbb C}(\exp U_1\,g\,\exp U_2)=e^{i\,\ell_1(U_1)+i\,\ell_2(U_2)}\ \kappa^{\mathbb C}(g)\\ &\qquad\qquad \forall g\in D^{\mathbb C},\quad \forall U_1\in\mathfrak p_1^c,\quad \forall U_2\in\mathfrak p_2^c.\end{aligned}$$

Démonstration. — a) Nous prouvons tout d'abord l'existence et l'unicité de la fonction $\kappa^{\mathbb C}$. D'après le 1) du lemme précédent, tout élément g de $D^{\mathbb C}$ peut se décomposer sous la forme $\exp U_1\ \exp U_2$ avec $U_1\in\mathfrak p_1^c$ et $U_2\in\mathfrak p_2^c$. On a alors nécessairement

$$\kappa^{\mathbb C}(g)=e^{i\,\ell_1(U_1)+i\,\ell_2(U_2)}.$$

Cela prouve l'unicité. Montrons que cette expression ne dépend pas de la forme de la décomposition ci-dessus.

Soient U_1' et U_2' tels que $\exp U_1'\ \exp U_2'=\exp U_1\ \exp U_2$. On a

$$\begin{aligned}&\exp -U_1\ \exp U_1'=\exp U_2\ \exp -U_2'\in\exp(\mathfrak p_1^c\cap\mathfrak p_2^c)\\ \text{D'où}\qquad &\ell_1(\log\exp -U_1\ \exp U_1')=\ell_2(\log\exp U_2\ \exp -U_2')\\ &\qquad=\ell_1(-U_1+U_1')=\ell_2(U_2-U_2')\\ \text{et}\qquad &\ell_1(U_1')+\ell_2(U_2')=\ell_1(U_1)+\ell_2(U_2).\end{aligned}$$

Vérifions maintenant la formule (3.1.2), ce qui démontrera l'existence de $\kappa^{\mathbb{C}}$. Supposons qu'on ait $g = \exp V_1 \, \exp V_2$, alors

$$\begin{aligned}\kappa^{\mathbb{C}}(\exp U_1\, g\, \exp U_2) &= \kappa^{\mathbb{C}}(\exp U_1 \, \exp V_1 \, \exp V_2 \, \exp U_2)\\ &= e^{i\,\ell_1(\log \exp U_1 \exp V_1)+i\,\ell_2(\log \exp V_2 \exp U_2)}\\ &= e^{i\,\ell_1(U_1)}\, e^{i\,\ell_1(V_1)}\, e^{i\,\ell_2(V_2)}\, e^{i\,\ell_2(U_2)}\\ &= e^{i\,\ell_1(U_1)}\, \kappa^{\mathbb{C}}(g)\, e^{i\,\ell_2(U_2)}\end{aligned}$$

comme prévu.

Pour vérifier que $\kappa^{\mathbb{C}}$ est l'exponentielle d'une fonction polynomiale sur $D^{\mathbb{C}}$, on se donne un sous-espace complexe $\mathfrak{p}_1'$ supplémentaire adapté à $\mathfrak{p}_1^c \cap \mathfrak{p}_2^c$ dans $\mathfrak{p}_1^c$. On a une bijection polynomiale

$$g \to \big(U_1 = \mathrm{p}_1(g),\, U_2 = \mathrm{p}_2(g)\big)$$

de $D^{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{p}_1' \times \mathfrak{p}_2^c$ telle que $g = \exp U_1 \, \exp U_2$. On a alors

$$\kappa^{\mathbb{C}}(g) = e^{i\,\ell_1(\mathrm{p}_1(g))+i\,\ell_2(\mathrm{p}_2(g))}.$$

D'où le résultat.

b) On pose alors $\kappa = \kappa^{\mathbb{C}}|_D$. On voit que la fonction κ vérifie bien les formules (i) à (iii). Vérifions (iii) par exemple. Soit $U \in \mathfrak{p}_2$, on a pour $g \in D$, du fait que $\kappa^{\mathbb{C}}$ est holomorphe

$$\mathcal{R}(U)\kappa\,(g) = \frac{d}{dt}\,\kappa^{\mathbb{C}}(g\,\exp tU)|_{t=0} = i\ell_2(U)\,\kappa(g)$$

comme prévu.

c) Il nous reste à vérifier l'unicité. Soit κ' une deuxième fonction vérifiant les propriétés (i) à (iii). Comme κ ne s'annule pas, on peut définir la fonction $\Phi = \kappa^{-1}\,\kappa'$ sur D. On a pour $U \in \mathfrak{p}_2^c$

$$\mathcal{R}(U)\;\Phi = \kappa^{-1}\;\mathcal{R}(U)\kappa' - \mathcal{R}(U)\kappa\;\kappa^{-2}\;\kappa' = \big(i\,\ell_2(U) - i\,\ell_2(U)\big)\;\kappa^{-1}\kappa' = 0.$$

Donc $\mathcal{R}(\mathfrak{p}_2^c)\,\Phi = \{0\}\cdot$ De même $\mathcal{L}(\mathfrak{p}_1^c)\,\Phi = \{0\}\cdot$ D'après le 3) du lemme 3.1.1, on a donc $\mathcal{L}(\mathfrak{d})\,\Phi = \{0\}\cdot$ Finalement $\Phi = 1$ et $\kappa' = \kappa$. Le théorème est démontré. □

3.2. Les fonctions $\kappa_{\ell_1,\ell_2}^{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}$ et les sous-espaces $\mathcal{D}^*(D,P_2,\chi_{\ell_2})^{\mathfrak{p}_1,\ell_1}$

Les objets $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, ℓ_1 et ℓ_2 sont de même nature et vérifient les mêmes propriétés que dans l'énoncé du théorème 3.1.2 mais on suppose de plus que la sous-algèbre $\mathfrak{p}_2$ est contenue dans $\mathfrak{d}$. On note χ_{ℓ_2} le caractère induit par ℓ_2 sur $P_2 = \exp \mathfrak{p}_2$. On reprend les notations de la sous-section 2.3 et on pose

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(*)}(D,P_2,\chi_{\ell_2})^{\mathfrak{p}_1,\ell_1} &= \big\{T \in \mathcal{D}^{(*)}(D,P_2,\chi_{\ell_2}) \mid (\mathcal{L} - i\,\ell_1)\,(\overline{\mathfrak{p}_1})\; T = \{0\}\big\}\\ \mathcal{S}^{(*)}(D,P_2,\chi_{\ell_2})^{\mathfrak{p}_1,\ell_1} &= \big\{T \in \mathcal{S}^{(*)}(D,P_2,\chi_{\ell_2}) \mid (\mathcal{L} - i\,\ell_1)\,(\overline{\mathfrak{p}_1})\; T = \{0\}\big\}\cdot\end{aligned}$$

Proposition 3.2.1. — *On a* $\mathcal{D}^*(D, P_2, \chi_{\ell_2})^{\mathfrak{p}_1, \ell_1} = \mathbb{C}\ \overline{\kappa_{\ell_1,\ell_2}^{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}}$.

Démonstration. — Pour simplifier les notations, on pose dans cette démonstration $\mathfrak{k} = \mathfrak{p}_1^c$, $f = \ell_1$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2$, $P = P_2$, $\chi = \chi_{\ell_2}$ et $\kappa = \kappa_{\ell_1,\ell_2}^{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2}$.

Par définition, la fonction $\bar{\kappa}$ est un élément de $\mathcal{D}^*(D, P, \chi)^{\mathfrak{k},f}$. Il nous faut démontrer qu'elle engendre cet espace.

Soit l'isomorphisme $\mathcal{T} : T \to \bar{\kappa}^{-1} T$ de $\mathcal{D}^*(D, P, \chi)$ sur $\mathcal{D}^*(D, P) = \mathcal{D}^*(D, P, 1)$. On vérifie que $\mathcal{T}\,\mathcal{D}^*(D, P, \chi)^{\mathfrak{k},f} = \mathcal{D}^*(D, P)^{\mathfrak{k},0} = \mathcal{D}^*(D, P)^{\mathfrak{k}}$ comme dans le c) de la démonstration du théorème 3.1.2. Nous sommes donc ramenés à démontrer que l'espace $\mathcal{D}^*(D, P)^{\mathfrak{k}}$ est formé par les fonctions constantes sur D. Tenant compte du fait que $\mathcal{R}(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}})\,\mathcal{D}^*(D, P) = \{0\}$, il nous suffira d'utiliser le résultat suivant :

Lemme 3.2.2. — *Dans les hypothèses et avec les notations de la proposition, il existe une famille finie* $\{U_1 \dots U_m\}$ *d'éléments de* $\mathfrak{k}$ *et une famille finie* $\{U_{m+1} \dots U_p\}$ *d'éléments de* $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ *telle que pour tout élément* U *de* $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$, *on puisse trouver des fonctions* $(f_j)_{1\le j\le p}$ *de classe* C^∞ *sur* D *et à valeurs complexes pour lesquelles on ait pour tout* g *de* D

$$\mathcal{L}_g(U) = \sum_{1\le j\le m} f_j(g)\ \mathcal{L}_g(U_j) + \sum_{m<j\le p} f_j(g)\ \mathcal{R}_g(U_j).$$

Preuve (du lemme). — D'après le 3) du lemme 3.1.1 en tout point g de D on peut trouver une famille $\{U_1^g \dots U_{m_g}^g\}$ d'éléments de $\mathfrak{k}$ et une autre $\{U_{m_g+1}^g \dots U_n^g\}$ d'éléments de $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ de telle sorte que

$$\{\mathcal{L}_g(U_1^g) \dots \mathcal{L}_g(U_{m_g}^g);\ \mathcal{R}_g(U_{m_g+1}^g) \dots \mathcal{R}_g(U_n^g)\}$$

forme une base de $\mathcal{L}_g(\mathfrak{d}^{\mathbb{C}})$. Les éléments g' de D tels que

$$\{\mathcal{L}_{g'}(U_1^g) \dots \mathcal{L}_{g'}(U_{m_g}^g);\ \mathcal{R}_{g'}(U_{m_g+1}^g) \dots \mathcal{R}_{g'}(U_n^g)\}$$

est une base de $\mathcal{L}_{g'}(\mathfrak{d}^{\mathbb{C}})$ forment un ouvert de Zariski de D qui contient g et qu'on note O_g. On obtient ainsi un recouvrement $\mathcal{U}' = (O_g)_{g\in D}$ de l'espace topologique (pré-)compact D muni de sa topologie de Zariski dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $\mathcal{U} = (O_i)_{i\in I}$.

Soit $i \in I$. Pour tout g de O_i, on peut écrire de façon unique

$$\mathcal{L}_g(U) = \sum_{1\le j\le m_i} f_j^i(g)\ \mathcal{L}_g(U_j^i) + \sum_{m_i<j\le n} f_j^i(g)\ \mathcal{R}_g(U_j^i)$$

où les fonctions à valeurs complexes f_j^i sont polynomiales.

Soient maintenant $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions de $C^\infty(D)$ qui forme une partition de l'unité sur D relativement au recouvrement $\mathcal{U}$. On a

$$\mathcal{L}_g(U) = \sum_{i\in I}\sum_{1\le j\le m_i} \varphi_i(g)\, f_j^i(g)\ \mathcal{L}_g(U_j^i) + \sum_{i\in I}\sum_{m_i<j\le n} \varphi_i(g)\, f_j^i(g)\ \mathcal{R}_g(U_j^i).$$

En renumérotant convenablement les $(\operatorname{card} I) \times (\dim \mathfrak{d})$ éléments U_j^i de 1 à p, on obtient une décomposition comme dans l'énoncé. □

Le lemme entraîne alors qu'on a

$$\mathcal{L}(U)\, S = \sum_{1 \le j \le m} f_j\, \mathcal{L}(U_j)\, S$$

pour tout S de $\mathcal{D}^*(D,P)$ et tout U de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$. En particulier $\mathcal{L}(\mathfrak{d})\, S = \{0\}$ lorsque $S \in \mathcal{D}^*(D,P)^{\mathfrak{k}}$ ce qui entraîne qu'on a $\mathcal{D}^*(D,P)^{\mathfrak{k}} = \mathbb{C} 1_D$, comme prévu. □

3.3. Les sous-espaces $\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)$ et $\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}}$

Nous revenons au contexte de notre étude tel qu'il a été précisé dans la sous-section 1.1.

Soient $\mathfrak{p}$ une polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ de $\mathfrak{g}^*$, $P = \exp \mathfrak{p}$ et $\chi = \chi_\ell$. Reprenant les résultats et les notations de la sous-section 2.3, on a l'application de restriction surjective

$$R:\ \mathcal{S}(G,P,\chi) \ \to\ \mathcal{S}(D, P\cap D, \chi|_{P\cap D}).$$

Notant R^* l'application adjointe de R qui est injective, on pose par définition

$$\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi) = R^*\big(\mathcal{S}^*(D, P\cap D, \chi|_{P\cap D})\big).$$

Nous dirons que les éléments de $\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)$ sont des vecteurs-distributions *concentrés sur D*.

Dans cette sous-section, on pose $m = \dim \mathfrak{d}/(\mathfrak{d}\cap\mathfrak{p})$. On a donc $m \le k = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Supposons que la paramétrisation algébrique η de G/P par $\mathbb{R}^k$ donnée dans la sous-section 2.2 soit telle que $\eta' = \eta|_{\mathbb{R}^m}$ soit une paramétrisation algébrique de $D/(P\cap D)$ par $\mathbb{R}^m$. On a alors l'équivalence

$$a \in \mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi) \quad \Longleftrightarrow \quad Wa \in \delta_{(x_k \ldots x_{m+1})} \otimes \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^m).$$

Dans la suite on pose

$$\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}} = \mathcal{H}^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}} \cap \mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi).$$

Supposons maintenant qu'on ait $\mathfrak{k} + (\mathfrak{p}\cap\mathfrak{d})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ et $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}) = \{0\}$. D'après le théorème 3.1.2, il existe une unique fonction $\kappa_{0,\ell|_{\mathfrak{d}}}^{\mathfrak{k},\mathfrak{p}\cap\mathfrak{d}}$ sur D que désormais on note $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ pour simplifier, et qui vérifie les propriétés

(3.3.1) (i) $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(e) = 1$, (ii) $\mathcal{L}(\mathfrak{k})\, \kappa_\ell^{\mathfrak{p}} = \{0\}$, (iii) $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(gh) = \chi(h)\, \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(g)$

pour tout g de D et tout h de $P\cap D$.

On a alors la

Proposition 3.3.1. — *On suppose qu'on a* $\mathfrak{k}+(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{d})^{\mathbb{C}}=\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ *et* $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{k})=\{0\}\cdot$ *Alors* $\dim\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}}\leq 1$ *et*

$$\dim\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}}=1 \iff \textit{la fonction } \kappa_\ell^{\mathfrak{p}} \textit{ est bornée sur } D.$$

Soit a *un élément non nul de* $\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}}$. *On a*

$$a(\Phi)=\lambda\int_{D/(P\cap D)}\overline{\Phi(h)\ \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(h)}\ d\dot{h} \tag{3.3.2}$$

pour toute fonction Φ *de* $\mathcal{H}^\infty(G,P,\chi)$. *Ici* λ *est un élément de* $\mathbb{C}^*$ *et* $d\dot{h}$ *une mesure* D*-invariante sur* $D/(P\cap D)$.

Remarque. — Nous montrerons plus loin (proposition 6.2.4) que pour π dans $\widehat{G}$ tel que $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}}\neq\{0\}$ et $\Omega=\xi^{-1}(\pi)$, il existe un élément ℓ de Ω et une polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ telle que $\mathfrak{k}+(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{d})^{\mathbb{C}}=\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ et $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{k})=\{0\}\cdot$ La fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ correspondante sera donc bornée sur D et on aura $\dim\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}}=1$.

Démonstration. — On voit que R^* met en bijection $\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}}$ et

$$\mathcal{S}^*(D,P\cap D,\chi|_{P\cap D})^{\mathfrak{k}}=\mathcal{S}^*(D,P\cap D,\chi|_{P\cap D})^{\mathfrak{k},0}.$$

Or, d'après la proposition 3.2.1, on a

$$\dim\mathcal{D}^*(D,P\cap D,\chi|_{P\cap D})^{\mathfrak{k}}=1 \quad\text{avec}\quad \mathcal{D}^*(D,P\cap D,\chi|_{P\cap D})^{\mathfrak{k}}=\mathbb{C}\,\overline{\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}}.$$

Par conséquent, on a l'équivalence

$$\dim\mathcal{S}^*(D,P\cap D,\chi|_{P\cap D})^{\mathfrak{k}}=1 \iff \overline{\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}}\in\mathcal{S}^*(D,P\cap D,\chi|_{P\cap D})$$

Reprenons les notations de la fin de la sous-section 2.3 dans laquelle on remplace $\mathfrak{g}'$ par $\mathfrak{d}$. On a

$$\overline{\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}}\in\mathcal{S}^*(D,P\cap D,\chi|_{P\cap D}) \iff W'\,\overline{\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}}\in\mathcal{S}^*(\mathfrak{q}').$$

La fonction $W'\overline{\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}}$ est l'exponentielle d'une fonction polynomiale sur $\mathfrak{q}'\simeq\mathbb{R}^k$. D'après un résultat donné en appendice (voir le corollaire A2.2), elle est une distribution tempérée si et seulement si elle est bornée. Finalement

$$\overline{\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}}\in\mathcal{S}^*(D,P\cap D,\chi|_{P\cap D}) \iff \kappa_\ell^{\mathfrak{p}} \text{ bornée sur } D.$$

D'où la proposition. □

SECTION 4

GÉOMÉTRIE DES OBJETS ASSOCIÉS À LA PAIRE SYMÉTRIQUE $(\mathfrak{g}, \sigma)$

Tous les résultats de cette section sont vérifiés pour des paires symétriques $(\mathfrak{g}, \sigma)$ quelconques. L'hypothèse que $\mathfrak{g}$ est nilpotente n'est jamais utilisée.

4.1. Propriétés des sous-algèbres $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$

Proposition 4.1.1. — 1) *Les sous-algèbres $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$ sont de complexifiées σ-stables*

2) *On a $\mathfrak{g}/\mathfrak{d} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{d})_1$ et $\mathfrak{d}/\mathfrak{e} = (\mathfrak{d}/\mathfrak{e})_0$.*

Démonstration. — 1) On utilise le lemme suivant qui est évident :

Lemme 4.1.2. — *Soit $V = V^0 \oplus V^1$ un espace vectoriel, somme directe des sous-espaces V^0 et V^1. Soit W, un sous-espace contenant V^q ($q \in \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). On a alors*

$$W = W \cap (V^0 \oplus V^1) = (W \cap V^0) \oplus (W \cap V^1) = V^q \oplus (W \cap V^{q+1}).$$

Dans la démonstration de la proposition, on pose

$$\mathfrak{d}' = (\mathfrak{k} + \bar{\mathfrak{k}}) \cap \mathfrak{g} \quad \text{et} \quad \mathfrak{e}' = (\mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}}}) \cap \mathfrak{d}.$$

On a $\mathfrak{d}'^{\mathbb{C}} = (\mathfrak{d}'^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}) \oplus \mathfrak{k}$ d'après le lemme. Par conséquent, $\mathfrak{d}'^{\mathbb{C}}$ est σ-stable et il en est de même du complexifié de la sous-algèbre $\mathfrak{d}$ qui est engendrée par $\mathfrak{d}'$. Un raisonnement identique s'applique à $\mathfrak{e}'$ et $\mathfrak{e}$. D'où le 1).

2) La première égalité du 2) découle du fait que $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ et donc qu'on a $(\mathfrak{g}/\mathfrak{d})_0^{\mathbb{C}} = \{0\}$. La seconde découle de même de l'inclusion $\mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$. □

Dans cette section, nous convenons de poser

$$\mathfrak{h}' = \{X \in \mathfrak{d} \mid \exists Y \in \mathfrak{e} \text{ tel que } X + iY \in \mathfrak{k}\}.$$

Lemme 4.1.3. — *On a $\mathfrak{d} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{e}$.*

Démonstration. — Soit U dans $\mathfrak{d}$. On sait qu'on a $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} + \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$. Il existe donc des éléments X, Y de $\mathfrak{d}$ et X', Y' de $\mathfrak{e}$ tels que $X + iY \in \mathfrak{k}$ avec

$$U = (X + iY) + (X' + iY').$$

On a nécessairement $Y = -Y' \in \mathfrak{e}$. D'où $U = X + X'$ avec $X \in \mathfrak{h}'$ et $X' \in \mathfrak{e}$, comme prévu. □

Proposition 4.1.4. — *La sous-algèbre* $\mathfrak{e}$ *est en fait un idéal de* $\mathfrak{d}$.

Démonstration. — Comme $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ est engendrée par $\mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}}}$, il suffit donc de vérifier que $[\mathfrak{h}', \mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}}] \subseteq \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ pour démontrer que $\mathfrak{e}$ est un idéal de $\mathfrak{d}$. Or, pour tout X dans $\mathfrak{h}'$ avec Y dans $\mathfrak{e}$ et $X + iY$ dans $\mathfrak{k}$, on a,

$$[X, \mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}}] \subseteq [X + iY, \mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}}] + [iY, \mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}}] \subseteq [\mathfrak{k}, \mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}}] + [\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}] \subseteq \mathfrak{d}_1^{\mathbb{C}} + \mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$$

comme prévu. □

4.2. L'idéal $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{d}$

Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble des idéaux $\mathfrak{j}_i$ de $\mathfrak{d}$ de complexifiés σ-stables et tels que $\mathfrak{d}/\mathfrak{j}_i$ soit une paire symétrique standard comme dans la sous-section 1.2 page 8. On a le résultat préliminaire suivant :

Lemme 4.2.1. — *Pour qu'une paire symétrique* $(\mathfrak{d}, \sigma)$ *soit telle que*

$$\mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = (\mathfrak{e}_1)^{\mathbb{C}} \oplus \left(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}\right) \qquad \textit{(i.e. pour qu'elle vérifie la propriété (P4)),}$$

(il faut et) il suffit qu'on ait

$$(P_4') \quad \mathfrak{e}_0 = \{0\}, \qquad\qquad (P_4'') \quad \mathfrak{e}_1 \cap (\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}) = \{0\}.$$

Démonstration. — Dans cette démonstration, $\mathfrak{f}$ désigne le sous-espace $(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}) \cap \mathfrak{e}$. Il nous suffit de vérifier que les propriétés (P_4') et (P_4'') entraînent qu'on a $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{f}$. D'après le lemme 4.1.2, $\mathfrak{f}$ est de complexifié σ-stable et on a $\mathfrak{f}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{f}_0^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{f}_1^{\mathbb{C}}$. La propriété (P_4'') entraîne que $\mathfrak{f}_1 = \{0\}$ et pour des raisons de dimensions, $\mathfrak{f}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f}_{1,\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$. Comme

$$\mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_1^{\mathbb{C}} \pmod{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}} = \mathfrak{e}_1^{\mathbb{C}} \pmod{\mathfrak{f}^{\mathbb{C}}},$$

on a

$$\mathfrak{e}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_{1,\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \pmod{\mathfrak{f} + \mathfrak{f}_{1,\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}} = \mathfrak{e}_{1,\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \pmod{\mathfrak{f}}.$$

D'où $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 \pmod{\mathfrak{f}}$ et $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{f}$ comme prévu. □

Proposition 4.2.2. — *L'ensemble* $\mathcal{J}$ *des idéaux* $\mathfrak{j}_i$ *de* $\mathfrak{d}$ *de complexifié* σ*-stable et tels que* $(\mathfrak{d}/\mathfrak{j}_i, \sigma)$ *est une paire symétrique standard n'est pas vide. Il est stable par intersection.*

On note $\mathfrak{j}$ le plus petit élément de $\mathcal{J}$, il est contenu dans $\mathfrak{e}$.

Démonstration. — Comme $\mathcal{J}$ contient $\mathfrak{e}$, il est non vide.

Soient $\mathfrak{j}_{i_1}$ et $\mathfrak{j}_{i_2}$ deux éléments de $\mathcal{J}$ qu'on peut sans perte de généralité supposer contenus dans $\mathfrak{e}$. On définit $\mathfrak{j}_{i_3} = \mathfrak{j}_{i_1} \cap \mathfrak{j}_{i_2}$ et pour $p = 1,2,3$ on pose $\mathfrak{d}_{i_p} = \mathfrak{d}/\mathfrak{j}_{i_p}$ et $\mathfrak{e}_{i_p} = \mathfrak{e}/\mathfrak{j}_{i_p}$. Pour vérifier que $\mathfrak{d}_{i_3}$ est standard dès que $\mathfrak{d}_{i_1}$ et $\mathfrak{d}_{i_2}$ le sont, il suffit d'utiliser les équivalences :

$$\begin{array}{lcl}
\text{(P2) vérifiée} & \Longleftrightarrow & [\mathfrak{e},[\mathfrak{e},\mathfrak{e}]] \subseteq \mathfrak{j}_{i_p} \\
\text{(P3) vérifiée} & \Longleftrightarrow & \left\{ \quad X \in \mathfrak{e}, \quad [X,\mathfrak{e}] \subseteq \mathfrak{j}_{i_p} \Leftrightarrow X \in (\mathfrak{e}_1^{\mathbb{C}} + \mathfrak{j}_{i_p}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{e} \quad \right\} \\
(P_4') \text{ vérifiée} & \Longleftrightarrow & (\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + \mathfrak{j}_{i_p}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{j}_{i_p} \\
(P_4'') \text{ vérifiée} & \Longleftrightarrow & \mathfrak{e} \cap (\mathfrak{e}_1^{\mathbb{C}} + \mathfrak{j}_{i_p}^{\mathbb{C}}) \cap (\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}} + \mathfrak{j}_{i_p}^{\mathbb{C}}) \subseteq \mathfrak{j}_{i_p}
\end{array}$$

□

Théorème 4.2.3. — *L'idéal $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{d}$ est le plus petit idéal de $\mathfrak{e}$ de complexifié σ-stable tel que*

(Q2) $\mathfrak{e}/\mathfrak{j}$ *est de cran au plus* 2.

(Q3) $\mathfrak{z}(\mathfrak{e}/\mathfrak{j}) = (\mathfrak{e}/\mathfrak{j})_1$.

(Q4) $\mathfrak{e}/\mathfrak{j} = (\mathfrak{e}/\mathfrak{j})_1 \oplus \left((\mathfrak{e}/\mathfrak{j})_0^{\mathbb{C}} \oplus \overline{(\mathfrak{e}/\mathfrak{j})_0^{\mathbb{C}}}\right) \cap (\mathfrak{e}/\mathfrak{j})$.

En particulier $\mathfrak{j}$ ne dépend que de $\mathfrak{e}$ et non pas de $\mathfrak{d}$ tout entier.

Démonstration. — Convenons qu'a priori, la lettre $\mathfrak{j}$ désigne le plus petit idéal de $\mathfrak{e}$ qui vérifie les propriétés de l'énoncé. Il nous faut montrer que c'est un idéal de $\mathfrak{d}$. Quitte à quotienter $\mathfrak{d}$ par son plus grand idéal contenu dans $\mathfrak{j}$, qui est de complexifié σ-stable, nous sommes ramenés à démontrer que lorsque $\mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$ ne contient pas d'idéal non nul de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$, il est nécessairement nul ou ce qui revient au même que $\mathfrak{e}$ vérifie les propriétés (P2), (P3), (P_4') et (P_4''). Pour cela, nous utiliserons plusieurs fois le résultat suivant :

Lemme 4.2.4. — *On suppose que $\mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$ ne contient pas d'idéal non nul de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$. Soit $\mathfrak{m}$ une partie de $\mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$, stable par $\mathfrak{k}$, alors $\mathfrak{m} = \{0\}$.*

*Preuve (*du lemme*).* — Dans cette démonstration, on note $\mathfrak{j}'$ le plus petit idéal de $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ qui contient $\mathfrak{m}$. On se propose de montrer que $\mathfrak{j}'$ est nécessairement un idéal de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ contenu dans $\mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$ ce qui, compte tenu des hypothèses, entraînera sa nullité et celle de $\mathfrak{m}$.

On a $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} + \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$, il nous suffit donc de vérifier que, pour U dans $\mathfrak{k}$, on a $\exp U \cdot \mathfrak{j}' = \mathfrak{j}'$. Pour cela, il suffit de remarquer que $\exp U \cdot \mathfrak{j}'$ est un idéal de $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ qui contient $\mathfrak{m}$. Par conséquent, $\exp U \cdot \mathfrak{j}' \supseteq \mathfrak{j}'$ et, finalement pour des raisons de dimension, $\exp U \cdot \mathfrak{j}' = \mathfrak{j}'$. Comme prévu. □

Prouvons maintenant le théorème dans nos hypothèses.

On voit que $[\mathfrak{e},[\mathfrak{e},\mathfrak{e}]]$ est un idéal de $\mathfrak{d}$ de complexifié σ-stable contenu dans $\mathfrak{j}$. Dans nos hypothèses, il est donc réduit à 0 et $\mathfrak{e}$ vérifie la condition (P2).

On a $\mathfrak{z}(\mathfrak{e}) \subseteq \mathfrak{e}_1$ du fait que $\mathfrak{z}(\mathfrak{e})_0^{\mathbb{C}}$ est $\mathfrak{k}$-stable et contenu dans $\mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$ et donc réduit à 0 d'après le lemme.

Nous cherchons maintenant à en déduire qu'on a $\mathfrak{e}_1 \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{e})$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}_1$. Pour cela, nous vérifions tout d'abord que $[\mathfrak{h}', \mathfrak{e}_1] \subseteq \mathfrak{e}_1$. Soient X dans $\mathfrak{h}'$ et Y dans $\mathfrak{e}$ tels que $X + iY \in \mathfrak{k}$. On a bien

$$[X, \mathfrak{e}_1] \subseteq [X + iY, \mathfrak{e}_1] + [-iY, \mathfrak{e}_1] \subseteq \left(\mathfrak{e}_1^{\mathbb{C}} + \mathfrak{z}(\mathfrak{e})^{\mathbb{C}}\right) \cap \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{e}_1.$$

On en déduit que $\mathfrak{e}_1$ est un idéal de $\mathfrak{d}$, en effet

$$[\mathfrak{d}, \mathfrak{e}_1] = [\mathfrak{h}', \mathfrak{e}_1] + [\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1] \subseteq \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{z}(\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}_1.$$

L'idéal $[\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1]$ de $\mathfrak{d}$ est contenu dans $\mathfrak{j}$ d'après (Q3). Il est par conséquent réduit à zéro et $\mathfrak{e}$ vérifie la condition (P3) comme prévu.

Nous cherchons maintenant à montrer que $\mathfrak{e}_0 = \{0\}$ (propriété (P_4')) et que

$$\mathfrak{e}_1 \cap \left(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}\right) = \{0\} \quad \text{(propriété } (P_4'')).$$

Pour cela, on remarque tout d'abord que $\mathfrak{z}(\mathfrak{e})^{\mathbb{C}} + \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ est un idéal de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$. En effet on a

$$[\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{z}(\mathfrak{e})^{\mathbb{C}} + \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}] \subseteq [\mathfrak{k}, \mathfrak{z}(\mathfrak{e})^{\mathbb{C}} + \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}] + [\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}] \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{e})^{\mathbb{C}} + \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}.$$

Dans cette démonstration, nous posons $\mathfrak{m} = \left[\mathfrak{z}(\mathfrak{e})^{\mathbb{C}} + \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}\right] \cap \mathfrak{e}$. D'après ce qui précède, c'est un idéal de $\mathfrak{d}$, de complexifié σ-stable puisqu'il contient $\mathfrak{e}_1$.

On a $\mathfrak{m} = \mathfrak{e}_1 \oplus \mathfrak{m}'$ avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}' &= \{X \in \mathfrak{e} \mid \exists Y \in \mathfrak{e}_1 \quad \text{tel que} \quad X + iY \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}\} \\ \gamma(\mathfrak{m}) = \gamma(\mathfrak{m}') &= \{U \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} \mid \exists X \in \mathfrak{e}, \quad \exists Y \in \mathfrak{e}_1 \quad \text{tels que} \quad U = X + iY \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}\} \end{aligned}$$

Montrons qu'on a nécessairement $\mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{j}$. En effet, soit $X \in \mathfrak{m}' \setminus \mathfrak{j}$ et $Y \in \mathfrak{e}_1$ tels que $X + iY \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$. Si $Y \notin \mathfrak{j}$, alors on a

$$Y \pmod{\mathfrak{j}} \in (\mathfrak{e}/\mathfrak{j})_1 \cap \left((\mathfrak{e}/\mathfrak{j})_0^{\mathbb{C}} + \overline{(\mathfrak{e}/\mathfrak{j})_0^{\mathbb{C}}}\right) \setminus \{0\}\cdot$$

Si $Y \in \mathfrak{j}$, alors $X \pmod{\mathfrak{j}} \in (\mathfrak{e}/\mathfrak{j})_0 \setminus \{0\}\cdot$

Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction avec les hypothèses du théorème.

De plus, $\gamma(\mathfrak{m}') \in \mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$ puisque $\mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$ est stable par σ.

Par conséquent $\mathfrak{m}_0^{\mathbb{C}} = \gamma(\mathfrak{m}') \oplus i\,\gamma(\mathfrak{m}')$ est une partie de $\mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$, stable par $\mathfrak{k}$ et donc nulle d'après le lemme. D'où $\gamma(\mathfrak{m}) = \{0\}\cdot$ On a alors $\mathfrak{e}_0 \subseteq \Re e\,\gamma(\mathfrak{m}') = \mathfrak{m}' = \{0\}$ et $\mathfrak{e}_1 \cap \left(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}\right) = \{0\}\cdot$

Finalement, $\mathfrak{e}$ vérifie bien les propriétés (P_4') et (P_4''). On a $\mathfrak{j} = \{0\}$ et le théorème est démontré. □

4.3. Géométrie des paires symétriques standard

Soit $(\mathfrak{d},\sigma)$ une paire symétrique standard. Nous lui associons les espaces suivants :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}(\mathfrak{d}) &= \mathfrak{f} = (\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}) \cap \mathfrak{e}\\
\mathfrak{i}(\mathfrak{d}) &= \mathfrak{i} = \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{z}(\mathfrak{e})\\
\mathfrak{k}_s(\mathfrak{d}) &= \mathfrak{k}_s = \{U \in \mathfrak{k} \mid \exists X \in \mathfrak{d},\, \exists Y \in \mathfrak{i} \text{ tels que } U = X + iY\}\\
\mathfrak{l}(\mathfrak{d}) &= \mathfrak{l} = \Re e\, \mathfrak{k}_s.
\end{aligned}$$

A la fin de la sous-section, nous généraliserons ces définitions au cas où $(\mathfrak{g},\sigma)$ est une paire symétrique quelconque.

Proposition 4.3.1. — *On suppose que $(\mathfrak{d},\sigma)$ est une paire symétrique standard.*

1) *On a $\mathfrak{f}_q = \{0\}$ $(q = 0,1)$, $\mathfrak{f}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{f}_0^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{f}_1^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{e} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{f}$ et $\mathfrak{d} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{e}$.*

2) *L'application γ de la sous-section 1.2 établit une bijection entre $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{k}_s$ d'une part et $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ de l'autre. On a $\mathfrak{k}_r = \mathfrak{k}_s \oplus \mathfrak{e}_{0,\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{k} = i\,\mathfrak{k}_s \oplus \mathfrak{k}_r$.*

3) *$\mathfrak{i}$ est un idéal de $\mathfrak{d}$.*

4) *$\mathfrak{l}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{d}$ est la somme semi-directe de la sous-algèbre $\mathfrak{l}$ et de l'idéal $\mathfrak{e}$.*

5) *$\mathfrak{k}_r$ et $\mathfrak{k}_s$ sont des sous-algèbres (réelles) de $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}_r$ est la somme semi-directe de la sous-algèbre $\mathfrak{k}_s$ et de l'idéal $\mathfrak{e}_{0,\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$. Enfin $\gamma|_{\mathfrak{l}}$ définit un isomorphisme d'algèbres entre $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{k}_s$.*

Démonstration. — 1) Les trois premières égalités sont des conséquences immédiates de la propriété (P4). Prouvons la quatrième. Pour des raisons de dimensions, on a $\mathfrak{f}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$. Par conséquent $\mathfrak{e}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{i} \oplus i\,\mathfrak{i} \oplus \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{e}_{0,\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e} \oplus i\,\mathfrak{i} \oplus \mathfrak{e}_{0,\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$.

Soit alors U dans $\mathfrak{d}$. On sait qu'on a $U \in \mathfrak{k}$ (mod $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$). D'après ce qui précède, ceci permet d'écrire $U \in \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ (mod $\mathfrak{e} \oplus i\,\mathfrak{i}$). Par conséquent, il existe X dans $\mathfrak{e}$ et Y dans $\mathfrak{i}$ tels que $U + X + iY \in \mathfrak{k}$. On a alors $U = (U + X) - X$ avec $(U + X) \in \mathfrak{l}$ et $X \in \mathfrak{e}$. D'où $\mathfrak{d} = \mathfrak{l} + \mathfrak{e}$.

Soit maintenant X dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{e}$. Soit Y dans $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{e}$ tel que $X + iY \in \mathfrak{k}$. On a $X + iY \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ et $Y \in \mathfrak{i} \cap \mathfrak{f}$, donc $Y = 0$, d'où $X \in \mathfrak{e}_0 = \{0\}$.

Finalement $\mathfrak{d} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{e}$, comme prévu.

2) L'application $\gamma|_{\mathfrak{l}} : \mathfrak{l} \to \mathfrak{k}_s$, associe à X dans $\mathfrak{l}$ l'élément $X + iY$ de $\mathfrak{k}_s$ avec $Y \in \mathfrak{i}$. Elle est visiblement bijective.

On voit que $\gamma|_{\mathfrak{f}}$ est une application linéaire réelle, injective puisque $\mathfrak{f}_1 = \{0\}$, de $\mathfrak{f}$ dans $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$. Elle est bijective, car on a $\dim \mathfrak{f} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \dim \mathfrak{e}_{0,\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}$. On a aussi

$$\mathfrak{k}_r = \gamma(\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{f}) = \gamma(\mathfrak{l}) \oplus \gamma(\mathfrak{f}) = \mathfrak{k}_s \oplus \mathfrak{e}_{0,\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}.$$

Enfin, on a visiblement $\mathfrak{k}_s \cap i\,\mathfrak{k}_s = \{0\}$. D'où

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_r + i\,\mathfrak{k}_r = \mathfrak{k}_s \oplus i\,\mathfrak{k}_s \oplus \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = i\,\mathfrak{k}_s \oplus \mathfrak{k}_r.$$

3) C'est évident car $\mathfrak{i}$ est le centre de l'idéal $\mathfrak{e}$ de $\mathfrak{d}$.

4) et 5) Il suffit de prouver simultanément que $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{k}_s$ sont des sous-algèbres isomorphes par γ.

Soient X_1 et X_2 dans $\mathfrak{l}$ et Y_1 et Y_2 dans $\mathfrak{i}$ tels que $\gamma(X_1) = X_1 + iY_1$ et $\gamma(X_2) = X_2 + iY_2$ soient dans $\mathfrak{k}_s$. On a

$$[\gamma(X_1), \gamma(X_2)] = [X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] = [X_1, X_2] + i\{[X_1, Y_2] + [Y_1, X_2]\}.$$

Comme $\mathfrak{i}$ est un idéal, on a $[X_1, Y_2] + [Y_1, X_2] \in \mathfrak{i}$. Ceci entraîne que $[X_1, X_2] \in \mathfrak{l}$ et $[X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] \in \mathfrak{k}_s$, comme prévu. □

Nous supposons maintenant la paire $(\mathfrak{d}, \sigma)$ quelconque. Dans cette sous-section p désigne la surjection naturelle de $\mathfrak{d}$ sur $\mathfrak{d}/\mathfrak{j}$. Dans toute la suite, on définit

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}(\mathfrak{d}) &= \mathfrak{i} = \mathrm{p}^{-1}(\mathfrak{i}(\mathfrak{d}/\mathfrak{j})) \\ \mathfrak{l}(\mathfrak{d}) &= \mathfrak{l} = \mathrm{p}^{-1}(\mathfrak{l}(\mathfrak{d}/\mathfrak{j})) \\ \mathfrak{f}(\mathfrak{d}) &= \mathfrak{f} = \mathrm{p}^{-1}(\mathfrak{f}(\mathfrak{d}/\mathfrak{j})). \end{aligned}$$

et on pose $\mathfrak{k}_s = \gamma(\mathfrak{l})$, $I = \exp \mathfrak{i}$ et $L = \exp \mathfrak{l}$.

Proposition 4.3.2. — *Lorsque* $(\mathfrak{d}, \sigma)$ *est standard, on a* $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{f}$. *Dans le cas général, on* $\mathfrak{h} + \mathfrak{j} = \mathfrak{l} + \mathfrak{f}$.

Démonstration. — On peut supposer $(\mathfrak{d}, \sigma)$ standard. On a alors

$$\gamma(\mathfrak{i}) = \{0\}, \quad \Re e\, \gamma(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l} \quad \text{et} \quad \Re e\, \gamma(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f},$$

du fait qu'on a $\operatorname{Ker} \gamma|_{\mathfrak{f}} = \{0\}$ et $\gamma(\mathfrak{f}) = \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$. Finalement $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{f}$, comme prévu. □

4.4. La dérivation j et l'application α

Supposons tout d'abord la paire $(\mathfrak{d}, \sigma)$ standard. On définit alors comme suit l'endomorphisme j de $\mathfrak{d} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{f}$:

1) Lorsque X est dans $\mathfrak{l}$, jX est l'unique élément de $\mathfrak{i}$ tel que $X + ijX \in \mathfrak{k}$ (on a $X + ijX = \gamma(X) \in \mathfrak{k}_s$). On a donc $j(\mathfrak{l}) \subseteq \mathfrak{i}$.

2) Lorsque X est dans $\mathfrak{f}$, jX est l'unique élément de $\mathfrak{f}$ tel que $X + ijX \in \mathfrak{k}$ (on a $X + ijX \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$). On a donc $j(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$ avec $j|_{\mathfrak{f}} \circ j|_{\mathfrak{f}} = -\operatorname{Id}|_{\mathfrak{f}}$.

3) Lorsque X est dans $\mathfrak{i}$, $jX = 0$. On a donc $j(\mathfrak{i}) = \{0\}$.

On remarque que pour X dans $\mathfrak{l}$, on a $jX = \Im m\, \gamma(X)$. Utilisant la proposition 4.3.1, on vérifie sans peine la

Proposition 4.4.1. — *L'endomorphisme* j *est une dérivation de* $\mathfrak{d}$.

On définit $\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + ij)_{|_{\mathfrak{k}}}$ et $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - ij)_{|_{\mathfrak{k}}}$. On voit que α (resp. $\bar{\alpha}$) est une bijection $\mathbb{C}$-antilinéaire (resp. $\mathbb{C}$-linéaire) de $(\mathfrak{k}, j_{|_{\mathfrak{k}}})$ sur $\mathfrak{k}_0^{\mathbb{C}}$ (resp. $\overline{\mathfrak{k}_0^{\mathbb{C}}}$). De plus, $\alpha^{\mathbb{C}}$ et $\bar{\alpha}^{\mathbb{C}}$ sont des projecteurs supplémentaires de $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$.

Lorsqu'on considère une paire symétrique $(\mathfrak{g}, \sigma)$ quelconque, j désignera désormais la dérivation de $\mathfrak{d}/\mathfrak{j}$ et α la projection de $\mathfrak{k}/\mathfrak{j}$ sur $(\mathfrak{k}/\mathfrak{j})_0^{\mathbb{C}}$ définies de façon similaire par quotient.

4.5. Les formes h_ℓ, s_ℓ et b_ℓ sur $\mathfrak{k}/\mathfrak{j}$

Soit ℓ dans $\mathfrak{j}^\perp$, ℓ induit une forme linéaire sur $\mathfrak{d}/\mathfrak{j}$ que dans cette sous-section, on note encore ℓ. On définit la forme bilinéaire b_ℓ sur $\mathfrak{k}/\mathfrak{j}$ par $b_\ell(X,Y) = \ell([X,Y])$.

Pour $X, Y \in \mathfrak{k}/\mathfrak{j}$ on a $\ell([X + ijX, Y + ijY]) = \{0\}$, ce qui entraîne qu'on a $\ell([X, jY]) = -\ell([jX, Y])$.

On voit que la forme antisesquilinéaire $U, V \to \frac{2}{i}\,\ell([\overline{U}, V])$ sur $(\mathfrak{e}/\mathfrak{j})_0^{\mathbb{C}}$ induit sur $(\mathfrak{k}/\mathfrak{j},\, j)$, une forme sesquilinéaire h_ℓ donnée par

$$h_\ell(X,Y) = \frac{2}{i}\,\ell([\bar{\alpha}X, \alpha Y]) = s_\ell(X,Y) - i\, b_\ell(X,Y)$$

avec $s_\ell(X,Y) = \ell([X, jY])$.

SECTION 5

CALCUL DES FONCTIONS $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ DANS CERTAINS CAS. CONSÉQUENCES

5.1. Idéaux $\mathfrak{n}_\ell$ de $\mathfrak{e}$. Polarisations $\mathfrak{e}$-admissibles et σ-polarisations

Pour ℓ dans $\mathfrak{g}^*$, nous définissons la sous-algèbre $\mathfrak{n}_\ell = \operatorname{Ker}\ell \cap \mathfrak{e}(\ell)$ de $\mathfrak{e}$. Nous posons $N_\ell = \exp \mathfrak{n}_\ell$. Avec les notations de la sous-section 1.2, on a donc

$$\mathfrak{n} = \bigcap_{\ell \in \Theta_0} \mathfrak{n}_\ell.$$

Proposition 5.1.1. — *Soit $\ell \in \mathfrak{j}^\perp$.*

1) *Le noyau de la forme hermitienne $U \to i\,\ell([U,\bar{U}])$ sur $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ est égal à $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}$.*

2) *$\mathfrak{e}(\ell)$ est un idéal de $\mathfrak{e}$ de complexifié σ-stable et on a*

$$\mathfrak{e}(\ell)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{i}^{\mathbb{C}} + \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}}.$$

3) *$\mathfrak{n}_\ell$ est un idéal de $\mathfrak{e}$. Lorsqu'on a $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \subseteq (\operatorname{Ker}\ell)^{\mathbb{C}}$, cet idéal est de complexifié σ-stable.*

Démonstration. — 1) Soit $U \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$. Comme $[\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}, \mathfrak{i} + \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}] \subseteq \mathfrak{j}$, on a

$$\ell([U,\overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}]) = \{0\} \iff \ell([U,\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}]) = \{0\} \iff U \in \mathfrak{e}(\ell)^{\mathbb{C}}.$$

D'où le résultat.

2) Du fait que $\mathfrak{e}/\mathfrak{j}$ est de cran ≤ 2, $\mathfrak{e}(\ell)$ est un idéal de $\mathfrak{e}$.

Soit $X = U_0 + U_1 \in \mathfrak{e}(\ell)$ avec $U_0 \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ et $U_1 \in \mathfrak{e}_1^{\mathbb{C}}$, on a

$$\ell([U_0,\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}]) = \ell([U_0,\mathfrak{e}_1^{\mathbb{C}}]) = \ell([X,\mathfrak{e}_1^{\mathbb{C}}]) = \{0\}\cdot$$

Par conséquent, U_0 et U_1 sont dans $\mathfrak{e}(\ell)^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{e}(\ell)$ est de complexifié σ-stable.

De même, soit $X = V + U + \bar{U} \in \mathfrak{e}(\ell)$ avec $V \in \mathfrak{i}^{\mathbb{C}}$ et $U \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$. On a

$$\ell([U,\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}]) = \ell([U,\overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}]) = \ell([X,\overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}]) = \{0\}\cdot$$

Donc $U \in \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}$ et le résultat.

3) Du fait que $\mathfrak{e}/\mathfrak{j}$ est de cran ≤ 2, $\mathfrak{n}_\ell$ est un idéal de $\mathfrak{e}$. Lorsqu'on a de plus $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \subseteq (\operatorname{Ker}\ell)^{\mathbb{C}}$, on a $\mathfrak{n}_{\ell,0}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{n}(\ell)$ est de complexifié σ-stable. $\square$

Pour ℓ dans $\mathfrak{g}^*$, nous dirons qu'une polarisation réelle $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ est $\mathfrak{e}$-*admissible* si $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{e}$ est une polarisation de $\mathfrak{e}$ en $\ell|_{\mathfrak{e}}$.

Nous dirons qu'une polarisation $\mathfrak{e}$-admissible est une σ-*polarisation* de $\mathfrak{g}$ en ℓ si elle vérifie les conditions supplémentaires suivantes :

$$\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}) = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{e})^{\mathbb{C}}.$$

Remarquons que pour un sous-espace $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$, la condition $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{e})^{\mathbb{C}}$ entraîne qu'on a $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d})^{\mathbb{C}}$ puisque $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} + \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$.

Proposition 5.1.2. — *Soient $\ell \in \mathfrak{j}^{\perp}$ et $\mathfrak{p}$ une polarisation $\mathfrak{e}$-admissible de $\mathfrak{g}$ en ℓ. Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{e})^{\mathbb{C}}$.

(ii) $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}$.

Démonstration. — On remarque qu'on a $\big(\mathfrak{e}/\mathfrak{e}(\ell)\big)^{\mathbb{C}} = \big(\mathfrak{e}/\mathfrak{e}(\ell)\big)_0^{\mathbb{C}} \oplus \overline{\big(\mathfrak{e}/\mathfrak{e}(\ell)\big)_0^{\mathbb{C}}}$. On en déduit que le sous-espace $\big(\mathfrak{e}/\mathfrak{e}(\ell)\big)_0^{\mathbb{C}}$ est totalement isotrope maximal pour la forme symplectique sur $\big(\mathfrak{e}/\mathfrak{e}(\ell)\big)^{\mathbb{C}}$ induite par la forme $X, Y \to \ell([X,Y])$ sur $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$. La proposition est alors une conséquence du fait que $\big(\mathfrak{p}/\mathfrak{e}(\ell)\big)^{\mathbb{C}}$ est également isotrope maximal. □

5.2. Fonctions $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ pour $\ell \in \mathfrak{j}^{\perp}$ lorsque $\mathfrak{p}$ est une σ-polarisation

Proposition 5.2.1. — *Soient $\ell \in \mathfrak{j}^{\perp}$ et $\mathfrak{p}$ une σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ. Alors la fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ qui vérifie les relations (3.3.1) est telle que*

$$\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(\exp -X) = e^{-\ell\left(\operatorname{Ad}\varpi X \cdot \Im m\, \gamma(X)\right)} \quad \textit{pour } X \in \mathfrak{l}. \tag{5.2.1}$$

$$\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(hg) = \kappa_{g\ell}^{\mathfrak{p}}(h)\ \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(g) \quad \forall h \in L, \quad \forall g \in D. \tag{5.2.2}$$

Lorsque de plus $g = \exp Z$ est tel que $\ell([Z, \mathfrak{i}]) = \{0\}$ (en particulier pour $g \in E$), on a

$$\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(hg) = \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(h)\ \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(g). \tag{5.2.3}$$

Démonstration. — Comme $\mathfrak{j}$ est un idéal de $\mathfrak{d}$ avec $\ell(\mathfrak{j}) = \{0\}$, on peut sans perte de généralité se restreindre au cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}$ et où $(\mathfrak{d}, \sigma)$ est standard et supposer seulement que $\ell([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = \{0\}$.

Posons $\kappa = \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ pour simplifier et montrons qu'on a

$$\kappa(\exp -X\ g) = e^{-g\ell\left(\operatorname{Ad}\varpi X \cdot \Im m\, \gamma(X)\right)}\ \kappa(g). \tag{5.2.4}$$

En prenant $g = e$ dans cette formule, on en déduira la formule (5.2.1) puis en prenant $h = \exp -X$ la formule (5.2.2).

Pour cela, on considère la fonction $t \to \Phi(t) = \kappa(\exp -tX\, g)$ sur $\mathbb{R}$. Posons $Y = jX = \Im m\, \gamma(X)$. On a $\mathcal{L}(X+iY)\,\kappa = 0$ avec $\mathcal{L}(X)\,\kappa(\exp -tX\, g) = \dfrac{d}{dt}\Phi(t)$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Y)\,\kappa(\exp -tX\, g) &= \frac{d}{du}\,\kappa(\exp -uY \exp -tX\, g)\,|_{u=0}\\ &= \frac{d}{du}\,\kappa\Big(\exp -tX\, g\ \exp(-ug^{-1}\exp tX\cdot Y)\Big)\,|_{u=0}\\ &= \frac{d}{du}\,e^{-iu\,\ell(g^{-1}\exp tX\cdot Y)}\,|_{u=0}\ \Phi(t)\\ &= -i\ \ell(g^{-1}\exp tX\cdot Y)\ \Phi(t) = -i\ g\ell(\exp tX\cdot Y)\ \Phi(t).\end{aligned}$$

D'où
$$\left[\frac{d}{dt} + g\ell(Y + t[X,Y] + \frac{t^2}{2!}[X,[X,Y]] + \cdots)\right]\ \Phi(t) = 0$$

et
$$\Phi(t) = e^{-g\ell\left(tY + \frac{t^2}{2!}[X,Y] + \frac{t^3}{3!}[X,[X,Y]] + \cdots\right)}\ \Phi(0)\cdot$$

En prenant $t = 1$, il vient comme prévu, $\kappa(\exp -X\, g) = e^{-g\ell(\mathrm{Ad}\,\varpi X\cdot Y)}\kappa(g)$ ce qui nous donne (5.2.4).

Lorsque $g = \exp Z$ est tel que $\ell([Z,\mathfrak{i}]) = \{0\}$ cette formule devient

$$\kappa(\exp -X\, g) = e^{-\ell\left(\mathrm{Ad}\,\varpi X\cdot jX\right)}\ \kappa(g)$$

du fait que $\mathrm{Ad}\,\varpi X\cdot jX$ est dans $\mathfrak{i}$ et que $\ell\big((g^{-1}-\mathrm{Id})\cdot\mathfrak{i}\big) = \{0\}\cdot$ On en déduit (5.2.3). □

Proposition 5.2.2. — *Soient ℓ dans $\mathfrak{j}^\perp$ et $\mathfrak{p}$ une σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ.*

1) *On a* $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{n}_\ell^{\mathbb{C}}$ *et $\mathfrak{n}_\ell$ est de complexifié σ-stable.*

2) *Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :*

(i) La fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ est bornée sur D.

(ii) Le polynôme $V \to \ell(\mathrm{Ad}\,\varpi \Re e\, V\cdot \Im m\, V)$ est minoré sur $\mathfrak{k}_s$ et la forme hermitienne $U \to i\,\ell([U,\bar U])$ est positive sur $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$.

Remarque. — Il peut arriver qu'une forme ℓ de $\mathfrak{j}^\perp$ soit telle que $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \subseteq (\mathrm{Ker}\,\ell)^{\mathbb{C}}$ et qu'elle vérifie les conditions du (ii) mais qu'il n'existe pas de σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ. On en obtient un exemple lorsque $\mathfrak{g}$ est commutatif, σ réelle et $\ell(\mathfrak{k}) \neq \{0\}\cdot$

Par contre, nous verrons que l'existence d'une σ-polarisation est assurée si en plus des conditions précédentes, on suppose ℓ dans $\mathfrak{h}^\perp$ (voir le 3) de la proposition 7.3.1 et le 2) de la proposition 7.1.1).

Démonstration. — 1) La condition $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + (\mathfrak{p}\cap\mathfrak{e})^{\mathbb{C}}$ entraîne qu'on a $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}$. De plus, comme $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}) = \{0\}$ on a

$$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{n}_\ell^{\mathbb{C}}.$$

En particulier (3) de la proposition 5.1.1), $\mathfrak{n}_\ell^{\mathbb{C}}$ est σ-stable.

2) D'après la formule (5.2.3), on a

$$\kappa_\ell^{\mathfrak{p}} \text{ bornée sur } D \iff \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}|_L \text{ bornée et } \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}|_E \text{ bornée.}$$

et d'après la formule (5.2.1)

$$\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}|_L \text{ bornée} \iff V \to \ell(\mathrm{Ad}\,\varpi\,\Re e\,V \cdot \Im m\,V) \text{ minoré sur } \mathfrak{k}_s.$$

Il nous reste à étudier $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}|_E$. On peut donc supposer $G = E$ puis $\mathfrak{n}_\ell = \{0\}$· Dans ces hypothèses, on a $\dim \mathfrak{i} \leq 1$, $\mathfrak{e}$ est une algèbre de Lie de Heisenberg de centre $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{p}$ est un idéal commutatif de $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ et on a $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$.

On a donc une involution σ^1 de $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ telle que $(\sigma^1 - \mathrm{Id})\,\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \{0\}$ et $(\sigma^1 + \mathrm{Id})\,\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \{0\}$· On pose $\gamma^1 = \dfrac{\sigma^1 + \mathrm{Id}}{2}$ et on définit la sous-algèbre

$$\mathfrak{l}^1 = \{X \in \mathfrak{e} \mid \exists Y \in \mathfrak{p} \text{ tel que } X + iY \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}\} = \Re e\,\gamma^1(\mathfrak{e}).$$

On voit que $\mathfrak{e}$ est la somme semi-directe de la sous-algèbre $\mathfrak{l}^1$ et de l'idéal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{e}$ et qu'on a $\gamma^1(X) = X + ijX$ pour $X \in \mathfrak{l}^1$.

Utilisant la formule (5.2.1), on a alors pour tout X de $\mathfrak{l}^1$ et tout h de P

$$\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(\exp X\ h) = e^{-\ell(\mathrm{Ad}\,\varpi X \cdot jX)}\ \chi(h)$$

et puisque $\mathfrak{e}$ est de cran ≤ 2,

$$\ell(\mathrm{Ad}\,\varpi X \cdot jX) = \ell(jX) + \frac{1}{2}\,\ell([X, jX])$$
$$= \ell(jX) + \frac{i}{4}\,\ell([X + ijX, X - ijX]) = \ell(jX) + \frac{i}{4}\,\ell([\gamma^1(X), \overline{\gamma^1(X)}]).$$

On a une forme bilinéaire symétrique sur $\gamma^1(\mathfrak{l}^1)$ donnée par $U, V \to i\,\ell([U, \bar{V}])$ qui est une restriction de la forme hermitienne $U, V \to i\,\ell([U, \bar{V}])$ sur

$$\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \gamma^1(\mathfrak{l}^1) \oplus i\,\gamma^1(\mathfrak{l}^1)$$

Lorsque $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} \neq \{0\}$, ces formes sont non dégénérées puisque $\mathfrak{n}_\ell = \{0\}$ et elles ont la même signature. Elles sont simultanément (définies) positives si et seulement si la fonction $X \to \ell(jX) + \dfrac{i}{4}\,\ell([X + ijX, X - ijX]) = \ell(jX) + \dfrac{i}{4}\,\ell([\gamma^1(X), \overline{\gamma^1(X)}])$ est minorée sur $\mathfrak{l}^1$ ou encore si et seulement si $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(E)$ est borné. □

Les propriétés (ii) de la proposition ne dépendent pas du choix de la σ-polarisation $\mathfrak{p}$. Utilisant la proposition 3.3.1, on en déduit immédiatement le

Corollaire 5.2.3. — *Soient ℓ dans $\mathfrak{j}^\perp$, $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^1$ deux σ-polarisations de $\mathfrak{g}$ en ℓ.*

1) *On a l'équivalence* $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(D)$ *bornée* $\iff$ $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}^1}(D)$ *bornée.*
2) *On a* $\dim \mathcal{H}_D^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}} = \dim \mathcal{H}_D^{-\infty}(G, P^1, \chi)^{\mathfrak{k}}$.

5.3. Les fonctions κ_ℓ

Remarquons qu'on a $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + (\mathfrak{i}^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}})$ et $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} + (\mathfrak{i}^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}})$ avec $\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{i}^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}) \subseteq \mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$. De plus $(\mathfrak{i}^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$. Soit ℓ dans $\mathfrak{j}^{\perp}$. En prenant $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}_2 = (\mathfrak{i}^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}})$, $\ell_1 = 0$ et $\ell_2 = \ell$, on se trouve dans les hypothèses du théorème 3.1.2. On a donc une fonction $\kappa_{0,\ell}^{\mathfrak{k},\, \mathfrak{i}^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}}$ sur D que l'on conviendra désormais d'écrire κ_ℓ.

Dans ce qui suit, nous n'utiliserons les fonctions κ_ℓ que pour construire des éléments non nuls de $\mathcal{H}$ (voir le lemme 10.2.6), mais on peut imaginer qu'elles pourraient aussi être utiles dans d'autres circonstances, par exemple pour expliciter une formule de Plancherel pour la représentation ρ.

Proposition 5.3.1. — *On suppose* $\mathfrak{j} = \{0\}$· *Soient* X *dans* $\mathfrak{l}$, Y *dans* $\mathfrak{f}$ *et* Z *dans* $\mathfrak{i}$, *on a*

$$\kappa_\ell\big(\exp -X \exp -(Y+Z)\big) = e^{-\ell(\mathrm{Ad}\,\varpi X \cdot jX)}\, e^{-\frac{\ell(jY)}{2} - \frac{s_\ell(Y,Y)}{4}}\, e^{-i\ell(\frac{Y}{2}+Z)}.$$

Démonstration. — On a, en utilisant la formule de Campbell-Hausdorff et le fait que $\mathfrak{e}/\mathfrak{j}$ est de cran ≤ 2 :

$$\begin{aligned}\kappa_\ell(\exp -Y) &= \kappa_\ell\big(\exp(-\alpha Y - \bar{\alpha} Y)\big) = \kappa_\ell\big(\exp -\alpha Y \exp -\bar{\alpha} Y \exp -\tfrac{1}{2}[\alpha Y, \bar{\alpha} Y]\big) \\ &= e^{-i\ell(\bar{\alpha} Y)}\, e^{-\frac{i}{2}\ell([\alpha Y, \bar{\alpha} Y])} = e^{-i\frac{\ell}{2}(Y)}\, e^{-\frac{\ell}{2}(jY) - \frac{1}{4}s_\ell(Y,Y)}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on vérifie que comme pour la formule (5.2.3) on a

$$\kappa_\ell\big(\exp -X \exp -(Y+Z)\big) = \kappa_\ell(\exp -X)\ \kappa_\ell\big(\exp -(Y+Z)\big)$$

D'où $\kappa_\ell\big(\exp -X \exp -(Y+Z)\big) = e^{-\ell(\mathrm{Ad}\,\varpi X \cdot jX)}\, \kappa_\ell(\exp -Y)\, e^{-i\ell(Z)}$

et la proposition. □

SECTION 6

RÉCURRENCES ET VECTEURS SPHÉRIQUES

Dans toute la suite, on pose

$$\Theta_0 = \{\ell \in \mathfrak{h}^\perp \mid V \to \ell(\mathrm{Ad}\, \varpi \Re e\, V \cdot \Im m\, V) \quad \text{est minoré sur } \mathfrak{k}_r\}\cdot$$

Nous verrons (propositions 7.2.2 et 8.2.4), qu'on a $\Theta_0 \subseteq \Theta$ et que pour $\ell \in \mathfrak{j}^\perp$ et $V \in \mathfrak{k}_r$, on a $P_\ell(V) = \ell(\mathrm{Ad}\, \varpi \Re e\, V \cdot \Im m\, V)$ de telle sorte que la définition ci-dessus est en accord avec celle de la sous-section 1.2.

6.1. Les différentes situations pour $(\mathfrak{g}, \sigma, \Omega)$

Le résultat ci-dessous sera utilisé dans la suite, lorsqu'on cherchera à mettre en évidence des propriétés par récurrence.

Proposition 6.1.1. — *Soit Ω une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$. Au moins une des situations ci-dessous concernant $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})$ est vérifiées pour tous les ℓ de Ω. Quand elle l'est pour un, elle l'est pour tous :*

(1) $\mathfrak{g} = \{0\}\cdot$

(2) On a $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 = \mathbb{R}Z$, $\ell(Z) \neq 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})$ *et* $\left(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}\right)_q = \{0\}$ $(q = 0, 1)\cdot$

(3) $\ell(\mathfrak{z}_0^{\mathbb{C}}) \neq \{0\}\cdot$

(4) On a un idéal non nul $\mathfrak{g}''$de $\mathfrak{g}$, de complexifié σ-stable et qui est contenu dans $\mathfrak{z} \cap \mathrm{Ker}\, \ell$.

(5) On a $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 = \mathbb{R}Z$, $\ell(Z) \neq 0$, $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_0 = \{0\}$, $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_1 = \mathfrak{z}$ *et* $\left(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}\right)_0 \neq \{0\}\cdot$

(6) On a $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 = \mathbb{R}Z$, $\ell(Z) \neq 0$, $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})$ *et* $\left(\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))/\mathfrak{z}\right)_q = \{0\}$ *pour* $q = 0, 1$.

(7) On a $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 = \mathbb{R}Z$, $\ell(Z) \neq 0$ *et* $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_0 \neq \{0\}\cdot$

(8) On a $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 = \mathbb{R}Z$, $\ell(Z) \neq 0$ *et* $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_1 \neq \mathfrak{z}\cdot$

Démonstration. — Si on n'est pas dans la situation (1), on peut supposer $\dim \mathfrak{g} > 0$. Si, de plus, on n'est pas dans la situation (3), on peut supposer $\ell(\mathfrak{z}_0^{\mathbb{C}}) = \{0\}\cdot$ Or, $(\mathfrak{z}_0^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{z}_0^{\mathbb{C}}}) \cap \mathfrak{g}$ est de complexifié σ-stable (proposition 4.1.1). Si, de plus, on n'est pas dans la situation (4), on peut supposer, ce que nous faisons désormais, que $\dim \mathfrak{z} = 1$ avec $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1$ et $\ell(\mathfrak{z}) \neq \{0\}\cdot$ Trois cas peuvent alors se présenter :

- $(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})/\mathfrak{z})_q = \{0\}$ pour $q = 0,1$ (i.e. les $\left(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}\right)_q^{\mathbb{C}}$ sont totalement complexes).
- $(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})/\mathfrak{z})_0 \neq \{0\}\cdot$
- $(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})/\mathfrak{z})_1 \neq \{0\}\cdot$

Dans le premier cas, on a évidemment $\left(\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))/\mathfrak{z}\right)_q = \{0\}\cdot$ Dans ce cas, ou bien $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})$ et on se trouve dans la situation (2), ou bien $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})$ et on se trouve dans la situation (6).

Dans le second cas, ou bien $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_0 = \{0\}$ et on est soit dans la situation (5), soit dans la situation (8), ou bien $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_0 \neq \{0\}$ et on est dans la situation (7).

Dans le troisième cas, du fait que $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}$ est inclus strictement dans $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_1$, on est dans la situation (8). □

Les remarques qui suivent concernent des résultats et des notations qui seront utilisés dans la suite dans certaines des situations de la proposition précédente.

Situation (4)

Dans cette situation, on note p, la projection canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}''$. C'est un homomorphisme d'algèbres de Lie qui induit un homomorphisme de groupes de Lie (encore noté p) de G sur $G' = \exp \mathfrak{g}'$ avec $G' \simeq G/G''$ où $G'' = \exp \mathfrak{g}''$. On voit que σ induit sur $\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$ une involution σ'. On associe à $(\mathfrak{g}', \sigma')$ les mêmes objets que ceux que l'on avait associés à $(\mathfrak{g}, \sigma)$, avec les mêmes notations affectées d'un prime. On voit que $\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}_q = \mathrm{p}(\mathfrak{g}_q^{\mathbb{C}})$ $(q = 0,1)$ et que $\mathrm{p}^{-1}(\mathrm{j}') \supseteq \mathrm{j}$.

Par ailleurs, p^* établit une bijection entre $\mathfrak{g}'^*$ et $\mathfrak{g}''^{\perp} \subseteq \mathfrak{g}^*$. Son inverse est encore notée p. On a $\Omega \subseteq \mathfrak{g}''^{\perp}$. On pose $\Omega' = \mathrm{p}\,\Omega$.

On a $\mathrm{p}(g\ell) = \mathrm{p}(g)\ \mathrm{p}(\ell)$ pour tout g de G et tout ℓ de $\mathfrak{g}''^{\perp}$. En particulier, Ω' est une G'-orbite dans $\mathfrak{g}'^*$.

On se fixe ℓ_0 dans Ω, on se donne une polarisation de référence a priori quelconque $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ_0. On voit que $\mathfrak{p}' = \mathrm{p}(\mathfrak{p})$ est une polarisation de $\mathfrak{g}'$ en ℓ_0'. On pose $P^{(\prime)} = \exp \mathfrak{p}^{(\prime)}$ et $\chi^{(\prime)} = \chi_{\ell_0^{(\prime)}}$.

On a alors une bijection unitaire de $\mathcal{H}(G,P,\chi)$ sur $\mathcal{H}(G',P',\chi')$ toujours notée p, telle que $\mathrm{p}\,\rho(G,P,\chi)\,(g) = \rho(G',P',\chi')\,(\mathrm{p}g)$ pour tout g de G, et caractérisée par les relations $(\mathrm{p}\Phi)\,(\mathrm{p}g) = \Phi(g)$ pour tout Φ de $\mathcal{H}(G,P,\chi)$ et tout g de G. Elle se prolonge en une bijection de $\mathcal{H}^{-\infty}(G,P,\chi)$ sur $\mathcal{H}^{-\infty}(G',P',\chi')$ de telle sorte que

$$\mathrm{p}\ \mathcal{H}^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}} = \mathcal{H}^{-\infty}(G',P',\chi')^{\mathfrak{k}'}. \tag{6.1.1}$$

Situations (5), (6), (7) *et* (8)

Dans ces situations, on a $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 = \mathbb{R}Z$. Quitte à multiplier Z par une constante convenable, on peut supposer $\ell(Z) = 1$ pour tous les ℓ de Ω.

Lemme 6.1.2. — 1) *Dans les situations (5) et (7) (resp. la situation (8)), on a un idéal* $\mathfrak{g}'$ *et une sous-algèbre* $\mathfrak{g}'' = \{X, X', Z\}$ *de* $\mathfrak{g}$ *avec* $X \neq \{0\}$, $X' \neq \{0\}$, *de telle sorte que pour* $q = 0$ *(resp. pour* $q = 1$*), on ait*

- $X' \in \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_q^{\mathbb{C}} \pmod{\mathfrak{z}^{\mathbb{C}}}$ *et* $X \in \mathfrak{g}_{q+1}^{\mathbb{C}} \pmod{\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}}$
- *Dans la situation (5), il existe un élément* c *de* $\mathbb{R}^*$ *tel que* $X' + icZ \in \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_r$.
- *Dans la situation (7), on a* $X' \in \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_0$.
- *Dans la situation (8), on a* $X' \in \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_1 \setminus \mathfrak{z}$ *et* $X \in \mathfrak{l}$.
- $[X, X'] = Z$.
- $\mathfrak{g}' = \{U \in \mathfrak{g} \mid [U, X'] = 0\}$.

On a alors $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}'$ *et* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}'$. *De plus,* $\mathfrak{g}'$ *est de complexifié* σ*-stable et contient* $\mathfrak{e}$.

2) *Dans la situation (6), on a* $\mathfrak{z}\big(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})\big)_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{z}\big(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})\big)^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_r \neq \{0\}$.

3) *Dans la situation (6), on a un idéal* $\mathfrak{g}'$ *et des éléments* X, Y, X' *et* Y' *dans* $\mathfrak{g}$, *de telle sorte que*

- $X + iY \in \mathfrak{k}_r$, $\quad X' + iY' \in \mathfrak{z}\big(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})\big)_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{z}\big(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})\big)^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_r$.
- $[X + iY, X' - iY'] = 2Z$, $\quad [X + iY, X' + iY'] = 0$, $\quad [X' + iY', X' - iY'] = 0$.
- $\mathfrak{g}' = \{U \in \mathfrak{g} \mid [U, X' + iY'] = 0\}$.

On a alors $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y \oplus \mathfrak{g}'$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}'$ *et* $\mathfrak{g}'$ *est de complexifiée* σ*-stable.*

Démonstration. — 1) Dans la situation (7), on choisit X' dans $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_0 \setminus \{0\}$. Dans la situation (8), on choisit X' dans $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_1 \setminus \mathfrak{z}$. Dans la situation (5), on considère $\dot{X}'$ dans $\big(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}\big)_0 \setminus \{0\}$. Soit $\mathfrak{m}$ l'image réciproque de $\mathbb{R}\dot{X}'$ par la projection $X' \to \dot{X}'$ de $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})$ sur $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}$. C'est une sous-algèbre de dimension 2 et de complexifiée σ-stable. On a $\mathfrak{m}/\mathfrak{z} = (\mathfrak{m}/\mathfrak{z})_0$, d'où $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{z}$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{z} \oplus (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{m})$. On choisit alors X' dans $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{m}) \setminus \{0\}$. Par hypothèse, on a $X' \notin \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_0$, donc $\gamma(X') = X' + icZ \in \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_r$ avec $c \neq 0$.

Dans ces situations (5), (7) et (8), définissant $\mathfrak{g}'$ comme dans l'énoncé, on voit que $\mathfrak{g}'$ est de complexifiée σ-stable, que c'est un hyperplan dans $\mathfrak{g}$ qui est un idéal contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. De plus, $\mathfrak{g}_q^{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$, d'où $\mathfrak{g}' \supseteq \mathfrak{d} \supseteq \mathfrak{e}$ pour $q = 0$ et $\mathfrak{g}' \supseteq \mathfrak{e}$ pour $q = 1$. Dans les deux cas, $\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{g}'$. Par ailleurs, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}' = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}')_{q+1}$. Soit $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}'$, on a $X \in \mathfrak{g}_{q+1}^{\mathbb{C}} \pmod{\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}}$. Dans la situation (8) où $q = 1$, on peut choisir X dans $\mathfrak{l}$. En effet, $\mathfrak{g}'$ contient $\mathfrak{e}$ mais ne contient pas $\mathfrak{d}$. Comme $\mathfrak{d} = \mathfrak{l} + \mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}'$ ne contient pas $\mathfrak{l}$. D'où ce résultat.

Dans tous les cas, on a $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}'$ avec $[X, X'] \in \mathbb{R}^* Z$. Quitte à multiplier X par un scalaire convenable, on peut supposer $[X, X'] = Z$.

2) D'après un résultat élémentaire donné en appendice, sur les suites centrales ascendantes d'idéaux d'une algèbre de Lie nilpotente (proposition A7.1), l'inégalité $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})$ entraîne $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})) \neq \mathfrak{z}$. Comme $(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})/\mathfrak{z})_0^{\mathbb{C}}$ est totalement complexe, les sous-algèbres $\left(\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))/\mathfrak{z}\right)_0^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))_0^{\mathbb{C}}$ sont aussi totalement complexes. De plus, $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))_0^{\mathbb{C}}$ n'est pas réduite à zéro, sinon on aurait

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))/\mathfrak{z} = \left(\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))/\mathfrak{z}\right)_1 = \{0\} \qquad \text{avec} \qquad \mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})) = \mathfrak{z},$$

ce qui entraînerait une contradiction.

La sous-algèbre commutative de $\mathfrak{d}$,

$$\mathfrak{m} = \left(\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))_0^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))_0^{\mathbb{C}}}\right) \cap \mathfrak{g}$$

est de complexifiée σ-stable et non nulle. On a $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})) = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}$. On en déduit que $\mathfrak{m}_1^{\mathbb{C}}$ est totalement complexe. Montrons que cela entraîne que $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_0^{\mathbb{C}}$ est égal à $\gamma(\mathfrak{m})$, ce qui nous donnera le 2). Pour cela, il suffit de vérifier que la multiplication par i laisse $\gamma(\mathfrak{m})$ stable. Soit $U = \gamma(V)$ avec V dans $\mathfrak{m}$. Comme $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}_1^{\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathfrak{m}_1^{\mathbb{C}}}$, il existe un élément V' de $\mathfrak{m}$ tel que $V + iV' \in \mathfrak{m}_1^{\mathbb{C}}$. D'où $\gamma(iV) = \gamma(V')$ et $iU = \gamma(V') \in \gamma(\mathfrak{m})$. Comme prévu.

3) Soit $\qquad \underline{\mathfrak{g}} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))] = \{0\}\}$.

Comme $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})) \neq \mathfrak{z}$, on voit que $\underline{\mathfrak{g}}$ est une sous-algèbre propre de $\mathfrak{g}$, de complexifiée σ-stable. On constate que la forme bilinéaire $X, Y \to \ell([X, Y])$ sur $\mathfrak{g}$, met de façon naturelle les espaces vectoriels $A = \mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))/\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{g}/\underline{\mathfrak{g}}$ en dualité. On identifie alors $\mathfrak{g}/\underline{\mathfrak{g}}$ avec le dual A^* de A.

On voit que σ induit une involution sur les espaces $A^{\mathbb{C}}$ et $A^{*\mathbb{C}}$. Par hypothèse, les $A_q^{\mathbb{C}}$ pour $q \in \mathbb{Z}_2$, sont totalement complexes et on a $A^{\mathbb{C}} = A_0^{\mathbb{C}} \oplus A_1^{\mathbb{C}}$. Ils sont donc en fait totalement complexes maximaux et on a $A^{\mathbb{C}} = \overline{A_0^{\mathbb{C}}} \oplus A_0^{\mathbb{C}}$. Par ailleurs, du fait que $\mathfrak{z}_0 = \{0\}$, on a $A_q^{*\mathbb{C}} \simeq (A_q^{\mathbb{C}})^{\perp}$. L'orthogonal d'un sous-espace totalement complexe maximal est totalement complexe maximal. On a donc $A^{*\mathbb{C}} = \overline{A_0^{*\mathbb{C}}} \oplus A_0^{*\mathbb{C}}$. Par conséquent, $\overline{A_0^{\mathbb{C}}}$ et $A_0^{*\mathbb{C}}$ sont en dualité.

Comme $\mathfrak{k}_r$ engendre linéairement $\mathfrak{k}$, il existe donc des éléments $X + iY \in \mathfrak{k}_r$ et $X' + iY' \in \mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))_0^{\mathbb{C}}$ tels que $[X + iY, X' - iY'] = \alpha Z$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$. D'après le 2), on peut supposer $\alpha = 2$, quitte à multiplier $X' + iY'$ par un scalaire convenable. Comme $X + iY \in \mathfrak{k}$ et $X' + iY' \in \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})_0^{\mathbb{C}}$, on a $[X + iY, X' + iY'] \subseteq \mathfrak{z}_0^{\mathbb{C}} = \{0\}$. De même, comme $X' + iY' \in \mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))^{\mathbb{C}}$, $[X' + iY', X' - iY'] = 0$.

On voit alors que $\mathfrak{g}'$, tel qu'il est défini dans le 3) du lemme, est un idéal propre de $\mathfrak{g}$, de complexifié σ-stable, qui contient X', Y' et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Les relations précédentes donnent

$$(6.1.2) \qquad [X, X'] = [Y, Y'] = Z \qquad [X, Y'] = [X', Y] = 0 \qquad [X', Y'] = 0.$$

Comme $\mathfrak{g}' = \{U \in \mathfrak{g} \mid [U, X'] = 0, \quad [U, Y'] = 0\}$,

$\mathfrak{g}'$ est de codimension 1 ou 2 dans $\mathfrak{g}$ et il ne contient pas X et Y. Par ailleurs, $X + \mathfrak{g}'$ et $Y + \mathfrak{g}'$ sont linéairement indépendants dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ puisque l'appartenance $\lambda X + \mu Y \in \mathfrak{g}'$ entraîne qu'on a $[\lambda X + \mu Y, X'] = 0$ et $[\lambda X + \mu Y, Y'] = 0$ avec $\lambda = \mu = 0$. Finalement $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y \oplus \mathfrak{g}'$. □

Dans ces situations (5) à (8), on pose $\sigma' = \sigma|_{\mathfrak{g}'}$. On associe à $(\mathfrak{g}', \sigma')$ les mêmes objets que ceux qu'on avait associés à $(\mathfrak{g}, \sigma)$ en les affectant d'un prime.

On pose $s = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$. On a $s = 1$ dans les situations (5), (7) et (8) et $s = 2$ dans la situation (6).

On se fixe ℓ_0 dans Ω, avec $\ell'_0 = \ell_0|_{\mathfrak{g}'}$. Quitte à remplacer ℓ_0 par $\exp xX\ \ell_0$ dans les situations (5) et (7) et ℓ_0 par $\exp xX\ \exp yY\ \ell_0$ dans la situation (6), avec x et y convenables, on peut supposer dans ces situations qu'on a $\ell_0(X') = 0$ avec de plus $\ell_0(Y') = 0$ dans la situation (6). On pose $\chi^{(\prime)} = \chi_{\ell_0^{(\prime)}}$.

On se fixe une polarisation de référence $\mathfrak{p}_R$ de $\mathfrak{g}'$ en ℓ'_0 avec $P_R = \exp \mathfrak{p}_R$. C'est aussi une polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ_0. On pose $k = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}_R$.

On note $x' = (x_{k-s} \dots x_1)$ un élément courant de $\mathbb{R}^{k-s}$. On se donne une paramétrisation algébrique $\eta' : x' \to \eta'(x')$ de G'/P_R par $\mathbb{R}^{k-s}$. Dans la situation (6) (resp. les situations (5), (7) et (8)), l'application $\eta : (x, y;\ x') \to \exp xX\ \exp yY\ \eta'(x')$ (resp. $\eta : (x;\ x') \to \exp xX\ \eta'(x')$) fournit une paramétrisation algébrique de G/P_R par $\mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{k-2}$ (resp. $\mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k-1}$). On pose $\mathcal{D}^{(*)} = \mathcal{D}^{(*)}(\mathbb{R}^k)$, $\mathcal{D}'^{(*)} = \mathcal{D}^{(*)}(\mathbb{R}^{k-s})$ et $\mathcal{S}^{(\prime)(*)} = \mathcal{S}^{(*)}(\mathbb{R}^{k(-s)})$.

Comme dans la sous-section 2.3 on associe à $\eta^{(\prime)}$ la bijection $w^{(\prime)}$ de l'espace des fonctions Φ sur $G^{(\prime)}$ qui vérifient la relation de covariance $\Phi(gh) = \chi^{(\prime)}(h)^{-1}\ \Phi(g)$ pour g dans $G^{(\prime)}$ et h dans P_R sur l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^{k(-s)}$ donnée par

$$w'(\Phi)\,(x') = \Phi\big(\eta'(x')\big)$$

$$w(\Phi)\,(x, y;\ x') = \Phi\big(\exp xX\ \exp yY\ \eta'(x')\big) \text{ dans la situation (6),}$$

$$w(\Phi)\,(x;\ x') = \Phi\big(\exp xX\ \eta'(x')\big) \text{ dans les situations (5), (7) et (8),}$$

ainsi que la bijection associée $W^{(\prime)}$ de $\mathcal{D}^*(G^{(\prime)}, P^{(\prime)}, \chi^{(\prime)})$ sur $\mathcal{D}^{(\prime)*}$ et la représentation $\nu^{(\prime)}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{(\prime)})$ sur l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur $\mathcal{D}^{(\prime)}$ donnée par

$$\nu^{(\prime)} = W^{(\prime)}\,\mathcal{L}^{(\prime)}\,W^{(\prime)-1}\big|_{\mathcal{D}^{(\prime)}}$$

et son prolongement continu à $\mathcal{D}^{(\prime)*}$.

On pose

$$\mathcal{D}^{(\prime)*,\mathfrak{k}^{(\prime)}} = \big\{T \in \mathcal{D}^{(\prime)*} \mid \nu^{(\prime)}\,(\overline{\mathfrak{k}^{(\prime)}})\,T = \{0\}\big\}$$

et

$$\mathcal{S}^{(\prime)*,\mathfrak{k}^{(\prime)}} = \mathcal{D}^{(\prime)*,\mathfrak{k}^{(\prime)}} \cap \mathcal{S}^{(\prime)*}.$$

On voit que

$$W^{(\prime)}\ \mathcal{H}^{-\infty}(G^{(\prime)}, P_R, \chi^{(\prime)})^{\mathfrak{k}^{(\prime)}} = \mathcal{S}^{(\prime)*,\mathfrak{k}^{(\prime)}}. \tag{6.1.3}$$

Par ailleurs, dans toutes ces situations, on a

$$\nu(X) = -\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \nu(X') = -ix, \qquad \nu(Z) = i. \tag{6.1.4}$$

Dans la situation (6) on a de plus,

$$\nu(Y') = -i\,y \tag{6.1.5}$$

Vérifions par exemple la seconde égalité de (6.1.4). Soit T dans $\mathcal{D}$, puisque $\ell_0(X') = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\nu(X')\,T\ (x,x') &= \mathcal{L}(X')\,T\ \left(\exp xX\ \eta'(x')\right) = \frac{d}{dt}T\big(\exp -tX'\ \exp xX\ \eta'(x')\big)\big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}T\Big(\exp xX\ \eta'(x')\ \exp -t\ \exp -xX\cdot X'\Big)\big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}T\Big(\exp xX\ \eta'(x')\ \exp -t(X'-xZ)\Big)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{-i\,tx}\big|_{t=0}\,T(x,x') \\
&= -ix\ T(x,x'),
\end{aligned}$$

comme prévu.

Lemme 6.1.3. — *Soit Ω une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$, $\pi = \xi(\Omega)$. On suppose que l'une des hypothèses ci-dessous est vérifiée :*

1) $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}\cdot$ 2) $\Omega\cap\Theta_0 \neq \varnothing$. 3) $\Omega\cap\Theta\neq\varnothing$.

Alors on se trouve nécessairement dans l'une des situations (1), (2), (4), (7) ou (8) de la proposition 6.1.1.

Remarque. — Les hypothèses $\ell\in\mathfrak{j}^\perp$ avec $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ minoré ne sont pas suffisantes pour écarter la situation (3). Pour cette raison, elles ne se prêtent pas aux raisonnements par récurrence qui seront faits dans la suite lorsqu'on suppose de plus $\ell\in\mathfrak{h}^\perp$. Cela explique partiellement l'importance du cône Θ_0 dans les prochaines sections.

L'hypothèse $\Theta_0\subseteq\mathfrak{h}^\perp$ sera ainsi utilisée pour prouver le point 2) a) dans la démonstration ci-dessous.

Démonstration. — Dans la démonstration, ℓ désigne un élément quelconque de Ω.

1) Nous montrons que dans les situations (3), (5) et (6), on a l'implication $a\in(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \Rightarrow a=0$.

a) Dans la situation (3), donnons-nous $U\in\mathfrak{z}_0^{\mathbb{C}}$ et $\ell\in\Omega$ tels que $\ell(U)\neq 0$. Pour tout élément b de $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$, on a $\pi(\overline{U})\,b = i\,\ell(\overline{U})\ b$. Par ailleurs, pour U dans $\mathfrak{k}$, on a $\pi(\overline{U})\,b=0$. D'où $b=0$, comme prévu.

b) Dans la situation (5), compte tenu de la formule (6.1.3), il suffit de montrer qu'on a $\mathcal{D}^{*,\mathfrak{k}} = \{0\}\cdot$ Soit T dans $\mathcal{D}^{*,\mathfrak{k}}$. On a en utilisant les formules (6.1.4),

$$\nu(X'+i\,cZ)\,T = -(ix+c)\,T = 0 \quad \text{avec} \quad c\neq 0.$$

D'où $(x^2 + c^2)\,T = 0$ et $T = 0$, comme prévu.

c) Dans la situation (6), comme dans l'étude de la situation précédente, il nous suffit de vérifier qu'on a $\mathcal{D}^{*,\mathfrak{k}} = \{0\}$. Pour cela, nous allons montrer qu'étant donné T dans $\mathcal{D}^*$, les conditions $\nu(X - iY)\,T = 0$ et $\nu'(X' - iY')\,T = 0$ sont suffisantes pour que T soit nul. Les opérateurs $\nu(X)$, $\nu(X')$ et $\nu(Y')$ ont déjà été calculés (formules (6.1.4) et (6.1.5)). En particulier, on a $i\,\nu(X' - iY')\,T = \bar{z}\,T$. Afin de calculer $\nu(X - iY)\,T$, nous explicitons maintenant $\nu(Y)$.

Pour cela on note tout d'abord, en utilisant la formule de Campbell-Hausdorff et le fait que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}'$, qu'on a

$$\exp -tY \;\exp xX \;\exp yY = \exp xX \;\exp(y - t)Y \;\exp \sum_{1 \le r \le u'} t^r Q_r$$

avec $Q_r \in \mathfrak{g}'[x, y]$ (notations de la sous-section 2.1).

Soit maintenant S_0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et S_1 dans $\mathcal{D}'$. On a

$$\begin{aligned}
\big(\nu(Y)\,(S_0 \otimes S_1)\big)\,(x, y;\, x') &\\
&= \big(\mathcal{L}(Y)\,w(S_0 \otimes S_1)\big)\,\big(\exp xX \;\exp yY\,\eta'(x')\big)\\
&= \frac{d}{dt}\big(w(S_0 \otimes S_1)\,(\exp -tY \;\exp xX \;\exp yY\,\eta'(x')\big)\,|_{t=0}\\
&= \frac{d}{dt}\big(w(S_0 \otimes S_1)\,(\exp xX \;\exp(y - t)Y \;\exp \textstyle\sum t^r Q_r\;\eta'(x')\big)\,|_{t=0}\\
&= \frac{d}{dt}\Big[S_0(x, y - t)\;\, w' S_1\big(\exp \textstyle\sum t^r Q_r\;\eta'(x')\big)\Big]\,|_{t=0}\\
&= -\Big(\frac{\partial}{\partial y} S_0(x, y)\Big)\;S_1(x') + S_0(x, y)\;\Big(\nu'(-Q_1) S_1\,(x')\Big).
\end{aligned}$$

Comme $Q_1 \in \mathfrak{g}'[x, y]$, on a aussi une égalité de la forme

$$\big(\tfrac{i}{2}\nu'(-Q_1)\,S_1\big)\,(x') = \sum_{0 \le r \le u,\;\, 0 \le r' \le v} z^r\,\bar{z}^{r'}\;\,\nu'(P_{rr'}) S_1\,(x')$$

où les $P_{rr'}$ sont des éléments convenables de $\mathfrak{g}'[x']$. D'où

$$-\frac{1}{2}\,\nu(X - iY)(S_0 \otimes S_1)\;\,(z; x') = \frac{\partial}{\partial z} S_0(z)\;\,S_1(x') + \sum_{r, r'} z^r \bar{z}^{r'} S_0(z)\;\,\nu'(P_{rr'})\,S_1\;(x').$$

Comme les $\nu'(P_{rr'})$ sont des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux dans $\mathbb{R}^{k-2}$, on a finalement

$$-\frac{1}{2}\,\nu(X - iY) = \frac{\partial}{\partial z} + \mathrm{p}(z, \bar{z}, x', \tfrac{\partial}{\partial x'})$$

où p est une expression polynomiale ne comprenant que des puissances de z, $\bar{z}$, x_m et $\dfrac{\partial}{\partial x_m}$ $(k - 2 \ge m \ge 1)$.

En conclusion, $\quad T \in \mathcal{D}^{*,\mathfrak{k}} \Longrightarrow \begin{cases} \bar{z}\, T = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} + \mathrm{p}(z, \bar{z}, x', \dfrac{\partial}{\partial x'})\, T = 0. \end{cases}$

On utilise les mêmes notations que celles qui sont définies dans l'appendice A5. On note δ la mesure de Dirac sur $\mathbb{C}$. Pour p dans $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{A}_p$ le sous-espace de $\mathcal{D}^*$ formé par les distributions de la forme $\dfrac{\partial^p \delta}{\partial z^p} \otimes S$ avec $S \in \mathcal{D}'^*$. On pose $\mathcal{A}^p = \bigoplus_{p' \leq p} \mathcal{A}_p$ et $\mathcal{A} = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_p$.

Montrons qu'on aboutit à une contradiction si l'on suppose T non nul. Un résultat élémentaire sur la variable complexe et les distributions concentrées sur des sous-espaces vectoriels (proposition A5.2) nous donne l'équivalence $\bar{z}\, T = 0 \Longleftrightarrow T \in \mathcal{A}$. Dans ces conditions (proposition A5.1), il existe de façon unique un élément p de $\mathbb{N}$ et un élément non nul S de $\mathcal{D}'^*$ tels que

$$T = \frac{\partial^p \delta}{\partial z^p} \otimes S \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{A}^{p-1}).$$

On a donc $\dfrac{\partial T}{\partial z} = \dfrac{\partial^{p+1} \delta}{\partial z^{p+1}} \otimes S$ (mod $\mathcal{A}^p$). Or, on voit facilement (proposition A5.3) que $\mathrm{p}(z, \bar{z}, x', \dfrac{\partial}{\partial x'})\, T \in \mathcal{A}^p$. Par conséquent, $\dfrac{\partial^{p+1} \delta}{\partial z^{p+1}} \otimes S \in \mathcal{A}^p$, ce qui entraîne qu'on a $S = 0$ et la contradiction attendue.

2) Nous vérifions que dans les situations (3), (5) et (6), on a $\Omega \cap \Theta_0 = \varnothing$.

a) Prouvons qu'on ne peut pas être dans la situation (3) lorsque $\Omega \cap \Theta_0 \neq \varnothing$. Il suffit de vérifier que $\ell \in \Theta_0 \Rightarrow \ell(\mathfrak{z}_0^{\mathbb{C}}) = \{0\}$, ou encore, puisque $\gamma(\mathfrak{z})$ engendre $\mathfrak{z}_0^{\mathbb{C}}$, que $\ell(\gamma(\mathfrak{z})) = \{0\}$. Soient $X, Y \in \mathfrak{z}$ tels que $X + iY \in \gamma(\mathfrak{z})$. On a $\ell(X) = 0$ puisque $\ell \in \mathfrak{h}^{\perp}$. Par ailleurs, la fonction $t \to \ell(\mathrm{Ad}\, \varpi tX \cdot tY) = \ell(tY)$ doit être minorée. D'où $\ell(Y) = 0$ et $\ell(X + iY) = 0$, comme prévu.

b) Dans la situation (5) le polynôme $V \to \ell(\mathrm{Ad}\, \varpi\, \Re e\, V \cdot \Im m\, V)$ n'est jamais minoré sur $\mathfrak{k}_r$. En effet, posant $V_t = t\,(X' + icZ)$, on a

$$\ell(\mathrm{Ad}\, \varpi\, \Re e\, V_t \cdot \Im m\, V_t) = \ell(\mathrm{Ad}\, \varpi\, tX' \cdot tcZ) = ct$$

qui n'est pas minoré lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

c) On aboutit à la même conclusion dans la situation (6). Supposons donc ℓ dans Θ_0. Nous posons pour t dans $\mathbb{R}$,

$$V_t = (X + iY) + it\,(X' + iY') = (X - tY') + i\,(Y + tX').$$

On obtient ainsi un élément de $\mathfrak{k}_r$. On a en utilisant les relations (6.1.2)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}\, \varpi\, \Re e\, V_t \cdot \Im m\, V_t &= \mathrm{Ad}\, \varpi(X - tY') \cdot Y + t\ \mathrm{Ad}\, \varpi(X - tY') \cdot X' \\ &= \mathrm{Ad}\, \varpi X \cdot Y + \frac{t}{2}\,([Y, Y'] + [X, X'] + 2X') \end{aligned}$$

$$\ell(\mathrm{Ad}\, \varpi\, \Re e\ V_t \cdot \Im m\, V_t) = \ell(\mathrm{Ad}\, \varpi X \cdot Y) + t$$

du fait que $\ell(Z)=1$ et $\ell(X')=0$.

Lorsque t varie cette quantité n'est pas minorée.

3) Nous vérifions enfin que dans les situations (3), (5) et (6), $P_\ell(\mathfrak{k})$ n'est pas minoré.

a) Dans la situation (3), on se donne V dans $\mathfrak{z}_0^{\mathbb{C}}$ tel que $\ell(\Re e\, V)\neq 0$. Le polynôme $t\to P_\ell(itV)=t\,\ell(\Re e\, V)$ n'est pas minoré et on a $\ell\notin\Theta$.

b) Dans la situation (5), on voit que $t\to P_\ell(tX'+itcZ)=tc\,\ell(Z)$ n'est pas minoré sur $\mathbb{R}$.

c) Dans la situation (6), on se donne un élément α de $\mathbb{R}$ et on considère le polynôme

$$A : t\to P_\ell\Big(\log\big(\exp(\alpha X+i\alpha Y)\ \exp i\,t(X'+iY')\big)\Big) \qquad \text{de } \mathbb{R}[t].$$

On pose $V_\alpha=P(\alpha X+i\alpha Y)$. On a $V_\alpha=\alpha Y+W_\alpha$ avec $W_\alpha\in\mathfrak{g}'$. On obtient, en utilisant le fait que $[Y,X']=0$ et $[V_\alpha,X']=0$.

$$\begin{aligned}A(t)=&\frac{1}{2i}\,\ell\Big(\log\Big(\exp(\alpha X+i\alpha Y)\ \exp-(\alpha X-i\alpha Y)\ \exp(\alpha X-i\alpha Y)\\ &\qquad\qquad \exp -t(Y'-iX')\ \exp t(Y'+iX')\ \exp-(\alpha X-i\alpha Y)\Big)\Big)\\ =&\frac{1}{2i}\,\ell\Big(\log\Big(\exp 2i\,V_\alpha\ \exp(\mathrm{Ad}\exp\alpha X\cdot 2it\,X')\Big)\Big)\\ =&\frac{1}{2i}\,\ell\Big(\log\Big(\exp 2i\,V_\alpha\ \exp(2it\,X'+2it\alpha\,Z)\Big)\Big)=\ell(V_\alpha+tX'+t\alpha\,Z).\end{aligned}$$

Choisissant α tel que $\ell(X'+\alpha Z)\neq 0$, on voit que A et P_ℓ ne sont pas minorés et qu'on a $\ell\notin\Theta$. □

6.2. Une condition suffisante pour que les vecteurs sphériques soient concentrés sur D

Lemme 6.2.1. — *On se place dans les situations (1) ou (2) de la proposition* 6.1.1

1) *On a* $\mathfrak{g}=\mathfrak{d}=\mathfrak{e}$ *avec* $\mathfrak{j}=\{0\}$ *et* $\mathfrak{l}=\{0\}\cdot$ *En particulier,* $\mathfrak{g}$ *est de Heisenberg. On a* $\Omega\cap\mathfrak{h}^\perp=\{\ell_1\}$ *avec* $\ell_1(Z)=\ell(Z)$ *et* $\ell_1(\mathfrak{f})=\{0\}\cdot$

2) *Pour tout* ℓ *de* Ω, *il existe une* σ*-polarisation* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{g}$ *en* ℓ.

Démonstration. — 1) En effet, on a

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{z}_1^{\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}\oplus\overline{\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}}=\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}+\overline{\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}}$$

avec pour $q=0,1$, $[\mathfrak{g}_q^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}_q^{\mathbb{C}}]\subseteq\mathfrak{z}_0^{\mathbb{C}}=\{0\}$ et $[\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}},\overline{\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}}]\subseteq\mathfrak{z}^{\mathbb{C}}$. (On a $[\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}},\overline{\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}}]=\mathfrak{z}^{\mathbb{C}}=\mathbb{R}Z$ dès que $\dim\mathfrak{g}>1$). D'où $\mathfrak{g}=\mathfrak{d}=\mathfrak{e}$. Comme la paire $(\mathfrak{e},\sigma)$ est standard, on a $\mathfrak{j}=\{0\}$ et $\mathfrak{l}=\{0\}\cdot$ L'égalité $\Omega\cap\mathfrak{h}^\perp=\{\ell_1\}$ est un résultat facile et classique concernant les orbites de la représentation coadjointe des groupes de Heisenberg.

2) Il suffit de prouver le résultat lorsque $\dim \mathfrak{g} > 1$. On a alors $\mathfrak{f} \neq \{0\}$.

Choisissons une base orthogonale $U_1 = X_1 + ijX_1, \ldots, U_k = X_k + ijX_k$ de $(\mathfrak{f}, j)$ pour la forme hermitienne h_ℓ. Alors l'espace $\bigoplus_{1 \leq p \leq k} \mathbb{R}X_p$ est lagrangien pour la forme symplectique b_ℓ de $\mathfrak{f}$. De plus les $(X_p, jX_p)_{1 \leq p \leq k}$ forment une base de l'espace vectoriel réel $\mathfrak{f}$. On en déduit que $\mathfrak{p} = \mathbb{R}Z \bigoplus_{1 \leq p \leq k} \mathbb{R}X_p$ est une polarisation de $\mathfrak{e}$ en ℓ telle que $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$. Les sous-espaces $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ et $\bigoplus_{1 \leq p \leq k} \mathbb{C}X_p$ sont lagrangiens pour la forme symplectique $b_\ell^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{f}^{\mathbb{C}}$ et ont pour somme $\mathfrak{f}^{\mathbb{C}}$. Ils sont donc transverses. On a donc $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \{0\}$. En particulier $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}) = \{0\}$ et $\mathfrak{p}$ est une σ-polarisation. □

Lemme 6.2.2. — *Soit ℓ dans $(\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^\perp$ et $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{d}$ subordonnée à ℓ et telle que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{e}$ soit une polarisation de $\mathfrak{e}$ en $\ell|_{\mathfrak{e}}$. On a*

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l}) + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{e}) \qquad \textit{avec} \qquad \mathfrak{p} \cap \mathfrak{e} = \mathfrak{i} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{f}).$$

Démonstration. — La seconde égalité découle de l'inclusion $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{p}$ et du fait que $\mathfrak{e} = \mathfrak{i} + \mathfrak{f}$.

Soient maintenant X dans $\mathfrak{l}$ et Y dans $\mathfrak{e}$ tels que $X + Y \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{d}$. Pour démontrer la première égalité, il suffit de montrer qu'on a $Y \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{e}$. Pour cela il suffit de vérifier que $\ell([Y, \mathfrak{p} \cap \mathfrak{e}]) = \ell([Y, \mathfrak{p} \cap \mathfrak{f}]) = \{0\}$. Or $\ell([X, \mathfrak{f}]) \subseteq \ell(\mathfrak{f}) = \{0\}$. Donc

$$\ell([Y, \mathfrak{p} \cap \mathfrak{f}]) = \ell([X + Y, \mathfrak{p} \cap \mathfrak{f}]) \subseteq \ell([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = \{0\}$$

comme prévu. □

Lemme 6.2.3. — *Soit ℓ dans $(\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^\perp$ et $\mathfrak{p}$ une polarisation $\mathfrak{e}$-admissible de $\mathfrak{g}$ en ℓ. Pour tout h de L, on a l'équivalence*

$$\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}) = \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap h\,\mathfrak{k}) = \{0\}.$$

Démonstration. — Dans cette démonstration, nous associons à l'involution $h\sigma h^{-1}$ les mêmes objets que ceux qu'on avait associés à σ, avec les mêmes notations, en les affectant d'un prime. On a, pour $q = 0, 1$, $(\mathfrak{g}_q^{\mathbb{C}})' = h\,(\mathfrak{g}_q^{\mathbb{C}})$. Cela entraîne que $\mathfrak{d}' = h\,\mathfrak{d} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}' = \mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}' = \mathfrak{j}$, $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}$, $\mathfrak{e}'^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}' = \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}$ et $j'|_{(\mathfrak{f}'/\mathfrak{j}')} = j|_{(\mathfrak{f}/\mathfrak{j})}$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}$, que $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}' = \{0\}$, que $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{d}$ telle que $\ell([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = \{0\}$ et que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{e}$ est une polarisation de $\mathfrak{e}$ en $\ell|_{\mathfrak{e}}$. C'est ce que nous faisons dans la suite.

On a $j' = hjh^{-1}$. En effet, pour X dans $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}$, on a $X + ij'X \in \mathfrak{k}'_r = h\,\mathfrak{k}_r$. D'où $h^{-1}X + i\,h^{-1}j'h(h^{-1}X) \in \mathfrak{k}_r$, ce qui donne le résultat.

Nous établissons maintenant les égalités

$$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k} = \Big([(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{i}]^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}\Big) \bigoplus (\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}) = (\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_s) \oplus i\,(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_s) \oplus (\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}).$$

La première égalité découle du fait que $\mathfrak{k} = [\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{i})^{\mathbb{C}}] \oplus \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ et du fait que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{i} \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{f})$ (voir le lemme précédent).

Montrons la deuxième égalité. Soit $X \in [(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{i}]^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}$. A priori, on a $X = X_1 + iX_2 - Y_2 + iY_1$ avec $X_1, X_2 \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}$ et $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{i}$. Or,

$$X - (X_1 + ijX_1) - i\,(X_2 + ijX_2) \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{i}^{\mathbb{C}} = \{0\}.$$

On a donc $Y_1 = jX_1$ et $X_1 + iY_1 \in \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_s$. De même, $i\,(X_2 + iY_2) \in i\,(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_s)$. On en déduit le résultat.

Comme $\ell(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}) = \{0\}$, cela entraîne qu'on a $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}) = \mathbb{C}\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_s)$. Or, on sait que $\ell(\Re e\,(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_s)) = \ell(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l}) = \{0\}$. Comme $\Im m\,(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_s) = j\,(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l})$, on a l'équivalence

$$\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}) = \{0\} \Longleftrightarrow \ell(j(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l})) = \{0\}.$$

On en déduit que pour démontrer le lemme, il suffit de vérifier l'équivalence

$$\ell(j\,(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l})) = \{0\} \Longleftrightarrow \ell(j'\,(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l})) = \{0\}. \tag{6.2.1}$$

Pour cela, on se donne X dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l}$. Soit X_0 l'élément de $\mathfrak{l}$ tel que $h = \exp X_0$. On pose $h_t = \exp tX_0$ et $j_t = h_t j h_{-t}$, de telle sorte que $h_1 = h$, $j_1 = j'$ et $j_0 = j$. On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} j_t X = \frac{d}{dt}(h_t j h_{-t})\,X &= \frac{d}{ds}(\exp sX_0\, h_t\ j\ h_{-t}\ \exp -sX_0)\ X\,\big|_{s=0} \\ &= [X_0, (h_t j h_{-t})\,X] - (h_t j h_{-t})\,[X_0, X] = -[j_t X_0, X],\end{aligned}$$

du fait que j_t est une dérivation. Comme $\ell([\mathfrak{i}, X]) \subseteq \ell([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = \{0\}$, on a donc $\frac{d}{dt}\ell(j_t X) = 0$ et la fonction $t \to \ell(j_t X)$ est constante. D'où $\ell(j'X) = \ell(jX) = 0$, l'équivalence (6.2.1) et le lemme. □

Proposition 6.2.4. — *Soit Ω une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$, $\pi = \xi(\Omega)$. On suppose qu'on a $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}$, alors*

1) *On a $\Omega \cap (\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^{\perp} \neq \varnothing$.*

2) *Soit $\ell \in \Omega \cap (\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^{\perp}$ alors il existe une σ-polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ.*

3) *Soit $(\ell, \mathfrak{p})$ comme dans le 2). La fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ sur D associée qui est donnée par la formule (3.3.1) est bornée.*

4) *Soit $(\ell, \mathfrak{p})$ comme dans le 2). On a*

$$\mathcal{H}^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}} = \mathcal{H}_D^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}}.$$

5) *On a $\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} = 1$.*

Remarque. — Ce résultat montre donc que toutes les G-orbites Ω dans $\mathfrak{g}^*$ telles que $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}$, contiennent des éléments ℓ associés à des vecteurs sphériques concentrés sur D. Il peut paraître surprenant que dans notre démonstration, il faille choisir ℓ dans $(\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^{\perp}$ pour trouver une telle forme, alors que la définition de ce sous-espace n'est pas naturelle. Cependant cette hypothèse que nous avons déjà utilisée dans les énoncés et les démonstrations des deux lemmes précédents, nous semble de plus nécessaire pour prouver la proposition dans la situation (7) de la proposition 6.1.1.

Démonstration. — Le 5) est une conséquence immédiate des résultats 1) à 4) et de la proposition 3.3.1. Nous prouvons donc ces propriétés 1) à 4).

Supposons que pour ℓ donnée dans $\Omega \cap (\mathfrak{h}+\mathfrak{j})^{\perp}$, il existe une σ-polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ telle que le 3) et le 4) de la proposition soient vérifiés. Le 3) est alors également vérifiés pour toutes les σ-polarisations $\mathfrak{p}^1$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ d'après le corollaire 5.2.3. Du fait que $\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} = 1$, on a aussi

$$\dim \mathcal{H}^{-\infty}(G, P^1, \chi^1)^{\mathfrak{k}} = \dim \mathcal{H}_D^{-\infty}(G, P^1, \chi^1)^{\mathfrak{k}} = 1$$

et le 4) est également vérifié. En conclusion, il nous suffit de démontrer les propriétés 3) et le 4) pour une seule σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ pour être assuré qu'elles sont vérifiées pour toutes les σ-polarisations des formes de $\Omega \cap (\mathfrak{h}+\mathfrak{j})^{\perp}$.

Ces propriétés sont vérifiées dans les situations (1) et (2) de la proposition 6.1.1 d'après le lemme 6.2.1. Compte tenu du lemme 6.1.3, il nous suffit donc de les démontrer par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$ dans chacune des situations (4), (7) et (8). Nous utilisons les notations de la sous-section 6.1 pour chacune de ces situations.

a) *Situation* (4). 1) La formule (6.1.1) nous donne l'équivalence

$$\mathcal{H}^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}} \neq \{0\} \iff \mathcal{H}^{-\infty}(G', P', \chi')^{\mathfrak{k}'} \neq \{0\}.$$

Par récurrence, on a l'implication $\mathcal{H}^{-\infty}(G', P', \chi')^{\mathfrak{k}'} \neq \{0\} \Rightarrow \Omega' \cap (\mathfrak{h}'+\mathfrak{j}')^{\perp} \neq \varnothing$. Or, $\Omega = \mathrm{p}^{-1}(\Omega')$ et $\mathrm{p}^{-1}(\mathfrak{h}'+\mathfrak{j}') \supseteq (\mathfrak{h}+\mathfrak{j})$. D'où $\Omega \cap (\mathfrak{h}+\mathfrak{j})^{\perp} \neq \varnothing$.

2) Par récurrence, il existe une σ'-polarisation $\mathfrak{p}'$ de $\mathfrak{g}'$ en $\ell' = \mathrm{p}(\ell)$ et la polarisation $\mathfrak{p} = \mathrm{p}^{-1}(\mathfrak{p}')$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ est une σ-polarisation.

3) et 4) Choisissons $\mathfrak{p}'$ comme dans le 2). Par récurrence, $\kappa_{\ell'}^{\mathfrak{p}'}$ est bornée sur D' et $\mathcal{H}^{-\infty}(G', P', \chi')^{\mathfrak{k}'} = \mathcal{H}_{D'}^{-\infty}(G', P', \chi')^{\mathfrak{k}'}$. Comme $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{g}''$, cela entraîne que $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ est bornée et que $\mathcal{H}^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}} = \mathcal{H}_D^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}}$.

b) *Situation* (7). On remarque qu'on a $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}$, $\mathfrak{j}' = \mathfrak{j}$ et $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$ du fait des inclusions $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{g}'$.

Par hypothèse, il existe un élément non nul T de $\mathcal{S}^{*,\mathfrak{k}}$. Comme $\ell_0(X') = 0$, on a $\nu(X')T = -ixT = 0$ d'après la formule (6.1.4). On en déduit que $T = \delta_x \otimes T'$ avec $T' \in \mathcal{S}'^{*,\mathfrak{k}'} \setminus \{0\}$.

1) On a donc $(\mathcal{H}_{\xi'(G'\ell_0')}^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}$ et par récurrence $G'\ell_0 \cap (\mathfrak{h}+\mathfrak{j})^{\perp} \neq \varnothing$, ce qui entraîne qu'on a $\Omega \cap (\mathfrak{h}+\mathfrak{j})^{\perp} \neq \varnothing$.

2) On peut choisir $\ell_0 = \ell$ dans $(\mathfrak{h}+\mathfrak{j})^{\perp}$. Par récurrence, il existe une σ'-polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}'$ en $\ell' = \ell_{|_{\mathfrak{g}'}}$. Comme $\ell([X, X']) \neq 0$, $\mathfrak{p}$ est aussi une σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ qui est de plus contenue dans $\mathfrak{g}'$.

3) et 4) Comme on a $\ell(\mathfrak{h}) = \{0\}$, on a $\ell(X') = 0$ et on peut choisir $\ell_0 = \ell$. Il nous suffit de prouver le fait que $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(D)$ est borné et l'égalité $\mathcal{H}^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}} =$

$\mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}}$ dans le cas particulier où $\mathfrak{p}$ est contenu dans $\mathfrak{g}'$. On peut alors choisir $\mathfrak{p}_R = \mathfrak{p}$.

Nous reprenons les notations et les conventions de la sous-section 3.3. En particulier, on pose $k = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ et $m = \dim \mathfrak{d}/(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{d})$. Soit $a \in \mathcal{H}^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}}$ et $T = Wa$, nous avons vu que T est de la forme $\delta_x \otimes T'$ où T' est un élément non nul de $\mathcal{S}'^{*,\mathfrak{k}} = W'\,\mathcal{H}^{-\infty}(G',P,\chi)^{\mathfrak{k}}$. Par récurrence $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}} = \kappa_\ell^{\mathfrak{p}'}$ est bornée sur $D = D'$ et

$$T' = \delta_{(x_{k-1}\dots x_{m+1})} \otimes S \quad \text{avec} \quad S \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^m).$$

D'où $$T = \delta_{(x,x_{k-1},\dots,x_{m+1})} \otimes S \quad \text{et} \quad a = W^{-1}T \in \mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}},$$

comme prévu.

c) *Situation* (8). Pour x dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\sigma_x = \exp -xX\ \sigma\ \exp xX \quad \text{et} \quad \sigma'_x = \sigma_x\big|_{\mathfrak{g}'} = \exp -xX\ \sigma'\ \exp xX.$$

On associe à $(\mathfrak{g},\sigma_x)$ et $(\mathfrak{g}',\sigma'_x)$, les mêmes objets que ceux que l'on avait associés à $(\mathfrak{g},\sigma)$ et à $(\mathfrak{g}',\sigma')$ avec les mêmes notations, en les indiçant avec un x. On a par exemple, $\mathfrak{k}'_x = \exp -xX\ \mathfrak{k}'$.

On remarque qu'on a $(\mathfrak{g}_q^{\mathbb{C}})_x^{(\prime)} = \exp -xX\ (\mathfrak{g}_q^{\mathbb{C}})^{(\prime)}$, $\mathfrak{e}_x^{(\prime)} = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{j}_x^{(\prime)} = \mathfrak{j}$ *et* $\mathfrak{h}'_x + \mathfrak{j} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{j}$.

En effet le fait que $(\mathfrak{g}_q^{\mathbb{C}})_x^{(\prime)} = \exp -xX\ (\mathfrak{g}_q^{\mathbb{C}})^{(\prime)}$ est évident. On a alors $\mathfrak{e}_x^{(\prime)} = \exp -xX\ \mathfrak{e} = \mathfrak{e}$ et $\mathfrak{j}_x^{(\prime)} = \mathfrak{j}$ puisque $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{j}$ sont des idéaux de $\mathfrak{d}$ et que $X \in \mathfrak{d}$ (théorème 4.2.3). De plus, utilisant la proposition 4.3.2 et le fait que $X \in \mathfrak{l}$, on a

$$\mathfrak{h}'_x + \mathfrak{j} = \mathfrak{l}'_x + \mathfrak{f}_x = \exp -xX\ (\mathfrak{l}' + \mathfrak{f}) = \mathfrak{l}' + \mathfrak{f} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{j}.$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\mathfrak{p}$ une σ_x-polarisation de $\mathfrak{g}'$ en ℓ', alors pour tout t réel, $\mathfrak{p}$ est une σ'_t-polarisation de $\mathfrak{g}'$ en ℓ' et une σ_t-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ.

Il suffit de prouver ce résultat pour $t = 0$ avec $\sigma = \sigma_0$.

Comme $\ell([X,X']) \neq 0$, $\mathfrak{p}$ est aussi une polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ. Par ailleurs, on a $\mathfrak{e}_x^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_{x,0}^{\mathbb{C}} + (\mathfrak{p}\cap\mathfrak{e}_x)^{\mathbb{C}}$ et comme $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_x$ et $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_{x,0}^{\mathbb{C}}$, on a $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + (\mathfrak{p}\cap\mathfrak{e})^{\mathbb{C}}$.

De plus, comme $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_x = \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}'_x$, on a $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}_x) = \{0\}$ et en utilisant le lemme 6.2.3, $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}) = \{0\}$.

En résumé, $\mathfrak{p}$ est une σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ qui est contenue dans $\mathfrak{g}'$.

Soit T dans $\mathcal{S}^{*,\mathfrak{k}}$. Alors (avec les notations de la formule (A6.3)) la distribution T se désintègre sous la forme $T = \int_{\mathbb{R}} T_x\,dx$, avec $T_x \in \mathcal{S}'^{*,\mathfrak{k}'_x}$.

En effet, nous remarquons tout d'abord qu'étant donnés un élément Y de $\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\varphi_1 \in \mathcal{D}'$, on a

$$\nu(Y)\,\varphi_0 \otimes \varphi_1\,(x;x') = \varphi_0(x)\ \big(\nu'(\exp -xX \cdot Y)\,\varphi_1\big)(x'). \tag{6.2.2}$$

D'où $\nu(Y) = \sum_p (-x)^p \otimes \dfrac{1}{p!}\,\nu'(\mathrm{ad}^p X \cdot Y)$.

En particulier, $\nu(Y) = i\,\mathrm{p}(x; x'; \dfrac{\partial}{\partial x'})$ où p est une expression polynomiale en x, x' et $\dfrac{\partial}{\partial x'}$, qui ne comprend pas l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x}$ (p est du premier ordre en $\dfrac{\partial}{\partial x'}$, mais ce fait est sans importance ici).

Choisissons Y dans $\mathfrak{g}'$ tel que $X + iY \in \mathfrak{k}$. On a alors $-\nu(X - iY)\,T = 0$. D'où

$$\frac{\partial}{\partial x} T - \mathrm{p}(x;\, x', \frac{\partial}{\partial x'})\, T = 0.$$

Cela entraîne, d'après un résultat élémentaire rappelé en appendice (proposition A6.1) que $T = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} T_x \, dx$.

Montrons maintenant que les T_x sont dans $\mathcal{S}'^{*,\mathfrak{k}'_x}$. Soient U dans $\mathfrak{k}'$, φ_0 et φ_1 comme ci-dessus. On a, en utilisant la formule (6.2.2)

$$\langle \nu(\bar{U})\, T, \varphi_0 \otimes \varphi_1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)\, \langle \nu'(\exp -xX \cdot \bar{U})\, T_x, \varphi_1 \rangle \; dx = 0.$$

Or, la fonction $x \to \langle \nu'(\exp -xX \cdot \overline{U})\, T_x, \varphi_1 \rangle$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque l'application $x \to T_x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}'^*$ l'est. En faisant varier φ_0 puis φ_1, on en déduit qu'on a $\nu'(\exp -xX \cdot \overline{U})\, T_x = 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et le résultat.

En particulier, la condition $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}$ entraîne l'existence d'au moins un x pour lequel $\mathcal{S}'^{*,\mathfrak{k}'_x} \neq \{0\}$.

1) Par récurrence et en remplaçant σ par σ'_x, on en déduit qu'on a

$$G'\ell'_0 \cap (\mathfrak{h}' + \mathfrak{j})^\perp \neq \varnothing.$$

Soit g' dans G' tel que $g'\ell'_0 \in (\mathfrak{h}' + \mathfrak{j})^\perp$. Pour tout x' de $\mathbb{R}$, on a $\exp x'X'\, g'\ell'_0 \in (\mathfrak{h}' + \mathfrak{j})^\perp$. On peut alors choisir x'_0 tel que $\exp x'_0X'\, g'\ell_0(X) = 0$. On voit que $\exp x'_0X'\, g'\ell_0 \in \Omega \cap (\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^\perp \neq \varnothing$ du fait que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{h}'$.

2) On choisit $\ell_0 = \ell$ dans $\Omega \cap (\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^\perp$. La condition $\mathcal{S}'^{*,\mathfrak{k}'_x} \neq \{0\}$ entraîne par récurrence et en remplaçant σ par σ'_x l'existence d'une σ'_x-polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}'$ en ℓ', dont nous savons qu'elle est aussi une σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ qui est contenue dans $\mathfrak{g}'$.

3) et 4) Comme dans l'étude de la situation (7), il nous suffit de montrer ces résultats dans le cas particulier où $\mathfrak{p}$ est contenu dans $\mathfrak{g}'$.

Nous choisissons $\ell_0 = \ell$, $\mathfrak{p}_R = \mathfrak{p}$ et η de telle sorte qu'on ait $\eta(x_{m-1} \ldots x_1) \subseteq D'$ et que $\eta|_{\mathbb{R}^{m-1}}$ soit une paramétrisation algébrique de D'/P par $\mathbb{R}^{m-1}$. Alors

$$\eta|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m-1}} : (x;\, x_{m-1} \ldots x_1) \to \exp xX\; \eta(x_{m-1} \ldots x_1),$$

fournit une paramétrisation algébrique de D/P par $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$.

Soit $a \in \mathcal{H}^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}}$ et $Wa = T = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} T_x \, dx$ avec $T_x \in \mathcal{S}'^{*,\mathfrak{k}'_x}$. Nous savons que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathfrak{p}$ est une σ'_x-polarisation de $\mathfrak{g}'$ en ℓ'. Par récurrence et en remplaçant σ par σ'_x, on en déduit que dans la formule $T = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} T_x \, dx$, les distributions

T_x sont de la forme $T_x = \delta_{(x_{k-1}\cdots x_m)} \otimes S_x$ avec $S_x \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^{m-1})$. On en déduit immédiatement l'existence d'un élément S de $\mathcal{S}^*(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1})$ donné par $S = \int_{\mathbb{R}} S_x\, dx$ tel que $T = \delta_{(x_{k-1}\cdots x_m)} \otimes S$.

On a bien $a \in \mathcal{H}_D^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}}$ et la fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ est bornée sur D d'après la proposition 3.3.1, comme prévu. $\square$

SECTION 7

PROPRIÉTÉS DU CÔNE Θ_0

7.1. Récurrences, cônes Θ_0 et Θ et polarisations

Proposition 7.1.1. — 1) *On a* $\Theta_0 \subseteq \mathrm{j}^\perp$ *(resp.* $\Theta \subseteq \mathrm{j}^\perp$ *).*

2) *Soit* $\ell \in \Theta_0$ *(resp.* $\ell \in \Theta$*), alors il existe une* σ*-polarisation de* $\mathfrak{g}$ *en* ℓ*.*

Remarque. — 1) Nous verrons plus loin (proposition 8.2.4) qu'on a $\Theta_0 \subseteq \Theta$. La première inclusion est donc en fait une conséquence de la deuxième.

2) Lorsque $\ell \in \Theta$, la condition $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}) = \{0\}$ est en fait automatiquement satisfaite pour une polarisation quelconque de $\mathfrak{g}$ en ℓ (voir plus loin le 2) du lemme 8.3.2).

Démonstration. — On se donne $\ell \in \Theta_0$ (resp. $\ell \in \Theta$) et on cherche à prouver qu'on a $\ell(\mathrm{j}) = \{0\}$. D'après le lemme 6.1.3, il nous suffit de prouver la proposition dans les situations (1), (2), (4), (7) et (8) de la proposition 6.1.1 en utilisant pour chaque situation, les conventions et les notations de la sous-section 6.1.

a) *Situations* (1) et (2). Cela résulte du lemme 6.2.1.

b) *Situations* (4). Par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, on a $\Theta'_0 \subseteq \mathrm{j}'^\perp$ (resp. $\Theta' \subseteq \mathrm{j}'^\perp$). Du fait que la paire $(\mathfrak{d}'/\mathrm{j}' = \mathfrak{d}/\mathrm{p}^{-1}(\mathrm{j}'),\ \sigma')$ est standard, on déduit que $\mathrm{p}^{-1}(\mathrm{j}') \supseteq \mathrm{j}$. On a donc $\ell(\mathrm{j}) \subseteq \ell\big(\mathrm{p}^{-1}(\mathrm{j}')\big) = \ell'(\mathrm{j}') = \{0\}$. D'où $\Theta_0 \subseteq \mathrm{j}^\perp$ (resp. $\Theta \subseteq \mathrm{j}^\perp$).

De plus par récurrence, il existe une σ'-polarisation de $\mathfrak{g}'$ en ℓ' et $\mathfrak{p} = \mathrm{p}^{-1}(\mathfrak{p}')$ fournit une σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ.

c) *Situations* (7) et (8). On a par récurrence $\ell' \in \Theta'_0 \subseteq \mathrm{j}'^\perp$ (resp. $\ell' \in \Theta' \subseteq \mathrm{j}'^\perp$). Du fait que $\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{g}'$, on a $\mathrm{j}' = \mathrm{j}$ d'où $\ell(\mathrm{j}) = \ell'(\mathrm{j}') = \{0\}$.

Par ailleurs, il existe une σ'-polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}'$ en ℓ' qui est également une σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ contenue dans $\mathfrak{g}'$. D'où le 2). □

7.2. Les restrictions à $\mathfrak{k}_r$ des polynômes P et P_ℓ

Proposition 7.2.1. — *On suppose la paire* $(\mathfrak{d},\sigma)$ *standard.*

1) *Soient* V *dans* $\mathfrak{k}_r$ *et* X *dans* $\mathfrak{h}$ *tels que* $V = X + ijX$, *alors on a* $P(V) = \operatorname{Ad}\varpi\,\Re e\, V\cdot \Im m\, V = \operatorname{Ad}\varpi X\cdot jX \in \mathfrak{e}$. *Lorsque de plus* V *est dans* $\mathfrak{k}_s$, *on a* $P(V)\in \mathfrak{i}$.

2) *Pour tout* $U = X + ijX$ *de* $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ *on a*

$$
\begin{aligned}
P(U) &= \Im m\, U + \frac{i}{4}[U,\bar U] = \Im m\, U + \frac{1}{2}[\Re e\, U, \Im m\, U]\\
&= jX + \frac{1}{2}[X,jX].
\end{aligned}
\tag{7.2.1}
$$

3) *Soient* V, W *dans* $\mathfrak{k}_r$ *et* X *dans* $\mathfrak{h}$ *tels que* $V = X + ijX$. *Alors on a*

$$
\begin{aligned}
P(\log\exp V\exp W) &= P(V) + \operatorname{Ad}\exp\Re e\, V\cdot P(W)\\
&= \operatorname{Ad}\varpi X\cdot jX + \operatorname{Ad}\exp X\cdot P(W)
\end{aligned}
\tag{7.2.2}
$$

4) *Si* U *dans* $\mathfrak{k}_r$ *est tel que* $[\Re e\, U, \mathfrak{i}] = \{0\}$ *(en particulier si* $U\in\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$*) et si* W *est dans* $\mathfrak{k}_s$, *on a*

$$
P(\log\exp U\exp W) = P(U) + P(W). \tag{7.2.3}
$$

Démonstration. — 1) Utilisant une expression donnée en appendice (voir le 4) de la proposition A3.1) et déduite de la formule de Campbell-Hausdorff, on peut voir que pour $T\in\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ et A contenu dans un idéal de cran 2 de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ (en l'occurrence $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$), on a

$$
\frac{1}{2}\log\exp(T+A)\exp(-T+A) = \operatorname{Ad}\varpi T\cdot A\,.
$$

Choisissant $T = \Re e\, V = X$ et $A = i\,\Im m\, V = ijX \in \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$, on obtient bien

$$
P(V) = \frac{1}{2i}\log\exp(X+ijX)\exp(-X+ijX) = \operatorname{Ad}\varpi X\cdot jX.
$$

2) Cela résulte du 1) et du fait que $\mathfrak{e}$ est de cran 2.

3) On a $P(\log\exp V\exp W) = \dfrac{1}{2i}\log\exp V\exp 2i\,P(W)\exp -\bar V$.

Utilisant une expression donnée en appendice (voir le 1) de la proposition A3.2) et déduite de la formule de Campbell-Hausdorff, on peut voir que pour $T\in\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ et A et B contenus dans un même idéal de cran 2 de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ (en l'occurrence $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$), on a

$$
\frac{1}{2}\log\exp(T+A)\exp 2B\exp(-T+A) = \operatorname{Ad}\varpi T\cdot A + \operatorname{Ad}\exp T\cdot B.
$$

Choisissant $T = \Re e\, V = X$ et $A = i\,\Im m\, V = ijX$ et $B = i\,P(W)$, on obtient bien (7.2.2).

4) On remarque qu'on a $\operatorname{Ad}\exp\Re e\, U\cdot P(W) = P(W)$. On remplace V par U dans le 3), en utilisant le fait que $P(W)\in\mathfrak{i}$. □

Proposition 7.2.2. — *On se donne ℓ dans $\mathfrak{j}^\perp$ ainsi que V et W dans $\mathfrak{k}_r$, on a alors les égalités*

1) $P_\ell(V) = \ell(\mathrm{Ad}\,\varpi\,\Re e\,V \cdot \Im m\,V)$.

2) $P_\ell(\log\exp V \exp W) = P_\ell(V) + P_{\exp -\Re e\,V\cdot\ell}(W)$.

3) *Si U dans $\mathfrak{k}_r$ est tel que $\ell([\Re e\,U, \mathfrak{i}]) = \{0\}$ (en particulier si $U \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$) et si $W \in \mathfrak{k}_s$, on a*

$$P_\ell(\log\exp U \exp W) = P_\ell(U) + P_\ell(W).$$

4) *Soit g dans L, on a*

$$P_{g\ell}(V) = P_\ell\Big(\log\big(\exp(\gamma\,\log g^{-1})\exp V\big)\Big) - P_\ell(\gamma\,\log g^{-1}).$$

Démonstration. — Le 1), le 2) et le 3) sont respectivement des conséquences du 1), du 3) et du 4) de la proposition précédente.

On déduit le 4) du 2) en remplaçant W par V et V par $\gamma\,\log g^{-1}$ de telle sorte que $g^{-1} = \exp\Re e\,V$. □

7.3. Le cône Θ_0 et les vecteurs sphériques

Proposition 7.3.1. — *Soit $\ell \in \mathfrak{j}^\perp$, on a les équivalences*

1) $$P_\ell(\mathfrak{k}_r) \text{ minoré} \iff P_\ell(\mathfrak{k}_s) \text{ minoré} \quad \text{et} \quad P_\ell(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}) \text{ minoré}.$$

2) $$P_\ell(\mathfrak{k}_r) \text{ minoré} \iff \begin{cases} V \to \ell(\mathrm{Ad}\,\varpi\,\Re e\,V\cdot\Im m\,V) \text{ est minoré sur } \mathfrak{k}_s. \\ \text{La forme hermitienne } U \to i\,\ell([U,\bar U]) \text{ est positive sur } \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}. \\ \text{On a } \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \subseteq (\mathrm{Ker}\,\ell)^{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

Lorsque ces conditions équivalentes sont vérifiées, l'idéal $\mathfrak{n}_\ell$ de $\mathfrak{e}$ est de complexifié σ-stable.

Soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$, on a l'équivalence

3) $$\ell \in \Theta_0 \iff \begin{cases} \ell \in (\mathfrak{h}+\mathfrak{j})^\perp. \\ V \to \ell(\mathrm{Ad}\,\varpi\,\Re e\,V\cdot\Im m\,V) \text{ est minoré sur } \mathfrak{k}_s. \\ \text{La forme hermitienne } U \to i\,\ell([U,\bar U]) \text{ est positive sur } \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

Démonstration. — Comme on a $\Theta_0 \subseteq \mathfrak{j}^\perp$, on peut supposer $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}$ et $\mathfrak{j} = \{0\}$ dans la démonstration ci-dessous.

1) Cela découle du fait que $\mathfrak{k}_r = \log\exp\mathfrak{k}_s\exp\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ (proposition 4.3.1) et du 3) de la proposition 7.2.2.

2) On a d'après le 1) de la proposition 7.2.2

$$P_\ell(\mathfrak{k}_s) \text{ minoré} \iff V \to \ell(\operatorname{Ad} \varpi \,\Re e\, V \cdot \Im m\, V) \text{ est minoré sur } \mathfrak{k}_s.$$

Par ailleurs, d'après la formule (7.2.1), on a $P_\ell(U) = \ell(\Im m\, U) + \dfrac{i}{4}\,\ell([U, \bar{U}])$ pour U dans $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$. D'où

$$P_\ell(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}) \text{ minoré} \implies \text{la forme hermitienne } U \to i\,\ell([U, \bar{U}]) \text{ est positive sur } \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}.$$

Pour $U \in \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}$, on a $P_\ell(U) = \ell(\Im m\, U)$. D'où $\ell(\Im m\, U) = 0$ lorsque $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ est minoré, puis en changeant U en iU, $\ell(U) = 0$, $\ell\big(\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}\big) = \{0\}$ et l'implication « $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$minoré $\Rightarrow$ $\ell\big(\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}\big) = \{0\}$ ».

Pour montrer la réciproque $\Leftarrow$ on peut sans perte de généralité supposer $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}$. La condition $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \subseteq (\operatorname{Ker}\ell)^{\mathbb{C}}$ entraîne d'après le 3) de la proposition 5.1.1 que $\mathfrak{n}_\ell$ est un idéal de $\mathfrak{e}$ de complexifié σ-stable qu'on peut, sans perte de généralité, supposer réduit à $\{0\}$· La forme $U \to i\ell([U, \bar{U}])$ est alors non dégénérée sur $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$, et on a l'équivalence

$$(7.3.1) \qquad P_\ell(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}) \text{ minoré} \iff \begin{cases} \text{La forme hermitienne } U \to i\,\ell([U, \bar{U}]) \text{ est} \\ \text{(définie) positive sur } \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

On déduit alors cette réciproque du 1).

3) Pour $\ell \in (\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^\perp$ la condition $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \subseteq (\operatorname{Ker}\ell)^{\mathbb{C}}$ est automatiquement satisfaite. On déduit alors le 3) du 2). □

Corollaire 7.3.2. — *Soient $\ell \in (\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^\perp$ et $\mathfrak{p}$ une σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ. On a l'équivalence*

$$\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(D) \textit{ borné} \iff \ell \in \Theta_0.$$

Démonstration. — Cela est une conséquence du 3) de la proposition précédente et de la proposition 5.2.2. □

Proposition 7.3.3. — *Soit $\Omega \in G\backslash\mathfrak{g}^*$ et $\pi = \xi(\Omega)$. Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :*

(i) $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}$·
(ii) $\Omega \cap \Theta_0 \neq \varnothing$.

Remarque. — 1) Ce résultat sera complété plus loin (théorème 9.0.1).

2) Il peut arriver qu'on ait $\ell \in \mathfrak{j}^\perp$ avec $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ minoré et que $(\mathcal{H}_{\xi(G\ell)}^{-\infty})^{\mathfrak{k}}$ soit réduit à zéro. On en obtient un exemple en choisissant $\mathfrak{g}$ commutatif, σ réelle et ℓ telle que $\ell(\mathfrak{k}) \neq \{0\}$· D'après la proposition, la condition supplémentaire $\ell \in \mathfrak{h}^\perp$ assure cependant la non nullité de ce sous-espace.

Démonstration. — (i) $\Rightarrow$ (ii). D'après la proposition 6.2.4, si $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}}$ n'est pas réduit à zéro, on a $\Omega \cap (\mathfrak{h}+\mathfrak{j})^\perp \neq \varnothing$. Pour ℓ dans $\Omega \cap (\mathfrak{h}+\mathfrak{j})^\perp$, il existe une σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ et la fonction correspondante $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ est bornée sur D. D'après le corollaire précédent, cela entraîne qu'on a $\ell \in \Theta_0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Réciproquement pour $\ell \in \Theta_0 \subseteq (\mathfrak{h}+\mathfrak{j})^\perp$, il existe une σ-polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ d'après la proposition 7.1.1. D'après le corollaire précédent la fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ correspondante est bornée sur D et d'après la proposition 3.3.1 on a $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}$. □

7.4. Le cône Θ_0 et les G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$

Proposition 7.4.1. — *1) Soit $\ell \in \mathfrak{j}^\perp$ et $g \in D$. On a l'équivalence*

$$P_\ell(\mathfrak{k}_r) \textit{ minoré} \iff P_{g\ell}(\mathfrak{k}_r) \textit{ minoré.}$$

2) Le cône Θ_0 est stable par L.

Démonstration. — On peut supposer $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}$ et $\mathfrak{j} = \{0\}$.

1) Soit ℓ tel que $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ soit minoré. Il suffit de démontrer que pour tout g de E et pour tout g de L, on a $P_{g\ell}(\mathfrak{k}_r)$ minoré.

Pour $g \in E$ et en utilisant le 1) de la proposition 7.3.1, on est successivement amené à montrer l'équivalence

$$P_\ell(\mathfrak{k}_s) \text{ minoré} \iff P_{g\ell}(\mathfrak{k}_s) \text{ minoré}$$

qui est évidente puisque $P(\mathfrak{k}_s) \in \mathfrak{i}$ et que l'action de E sur $\mathfrak{i}$ est triviale, puis l'équivalence

$$P_\ell(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}) \text{ minoré} \iff P_{g\ell}(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}) \text{ minoré.}$$

Pour prouver ce dernier résultat, on peut supposer $\mathfrak{d} = \mathfrak{e}$. On peut supposer de plus $\mathfrak{n}_\ell = \{0\}$, puisque lorsqu'une des deux propriétés ci-dessus est vérifiée, l'idéal $\mathfrak{n}_\ell = g^{-1}\mathfrak{n}_\ell = \mathfrak{n}_{g\ell}$ de $\mathfrak{e}$ est de complexifié σ-stable.

On a alors en utilisant la proposition 7.3.1 et le fait que $[U,\bar U] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{e})$

$$P_\ell(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}) \text{ minoré} \iff \begin{cases} \text{La forme hermitienne} \\ U \to i\,\ell([U,\bar U]) \\ \text{est positive sur } \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}. \end{cases} \iff P_{g\ell}(\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}) \text{ minoré.}$$

Comme prévu.

Enfin, le fait que $P_{g\ell}(\mathfrak{k}_r)$ est minoré pour tout g de L découle du 4) de la proposition 7.2.2 et du fait que $\exp(\gamma \log g^{-1}) \cdot \exp V$ décrit $\mathfrak{k}_r$ lorsque V décrit $\mathfrak{k}_r$.

2) D'après le 1), il suffit de vérifier que $\mathfrak{h}^\perp$ est L-stable. Comme on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{f}$ cela résulte du fait que $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{f}$ sont stables par $\mathfrak{l}$. □

Proposition 7.4.2. — *Soit Ω une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ telle que $\Omega \cap \Theta_0 \neq \varnothing$. On a $\Omega \cap \Theta_0 = \Omega \cap \mathfrak{h}^\perp$ et $\Omega \cap \Theta_0$ est une L-orbite.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent, Θ_0 est stable par L. Il nous suffit donc de prouver que pour toute forme ℓ de $\Omega \cap \Theta_0$ et ℓ_1 de $\Omega \cap \mathfrak{h}^\perp$, il existe un élément g de L tel que $\ell_1 = g\ell$.

D'après le lemme 6.1.3, il nous suffit de vérifier ce résultat dans les situations (1), (2), (4), (7) et (8) de la proposition 6.1.1. Nous utilisons dans chaque situation les notations et les conventions de la sous-section 6.1.

1) *Situations* (1) *et* (2). Le résultat est évident du fait que $\mathfrak{l} = \{0\}$ et que $\Omega \cap \mathfrak{h}^\perp$ est formé du seul élément $\ell = \ell_1$ (voir le 1) du lemme 6.2.1).

2) *Situation* (4). Comme $\ell \in \mathfrak{g}''^\perp$, on a

$$\ell \in \Omega \cap \Theta_0 \iff \ell' \in \Omega' \cap \Theta_0'.$$

Par récurrence, il existe un élément $g' = \mathrm{p}(g)$ de L' avec $g \in L$, tel que $g'\ell' = \ell_1'$. On a alors $g\ell = \ell_1$. D'où le résultat.

3) *Situations* (7) *et* (8). Comme $\ell_1 \in \Omega$, il existe a priori un élément x de $\mathbb{R}$, et un élément g' de G' tels que $\exp xX\, g' \cdot \ell = \ell_1$.

Dans la situation (7), on a $X' \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h}$, donc $\ell(X') = \ell_1(X') = 0$. Cela entraîne que $x = 0$.

Dans la situation (8), du fait que X est dans $\mathfrak{l}$, on a $\exp -xX \cdot \ell_1 \in (\mathfrak{h} + \mathfrak{j})^\perp$. Quitte à remplacer ℓ_1 par $\exp -xX \cdot \ell_1$, on peut encore supposer $x = 0$.

Dans les deux cas, on a alors $g'\ell = \ell_1$ et par conséquent, $g'\ell' = \ell_1'$. Par récurrence, on en déduit donc l'existence d'un élément h' de L' tel que $h'\ell' = \ell_1'$. De plus, pour tout x' de $\mathbb{R}$, on a $\exp x'X'\ h' \cdot \ell' = \ell_1'$ puisque $X' \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$. Par ailleurs, $\exp x'X'\ h' \cdot \ell\,(X) = h'\ell\,(X + x'Z)$. Il existe donc un unique élément x_0' dans $\mathbb{R}$ (nul dans la situation (8)) tel que $\exp x_0'X'\ h' \cdot \ell\,(X) = \ell_1(X)$. On pose $h = \exp x_0'X'\ h'$. On a $h\,\ell = \ell_1$ du fait que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}'$ et $h \in L$ du fait qu'on a $X' \in \mathfrak{l}$ dans la situation (7) et $h = h'$ dans la situation (8).

On a donc toujours $\ell_1 \in L\,\ell$ et le résultat. □

SECTION 8

PROPRIÉTÉS DU CÔNE Θ

8.1. Résultats supplémentaires concernant le polynôme P sur $\mathfrak{k}$

Dans cette sous-section on suppose la paire $(\mathfrak{d}, \sigma)$ standard.

Proposition 8.1.1. — *Pour tout M de $\mathfrak{k}$, il existe un triplet unique (U, V, W) dans $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{k}_s \times \mathfrak{k}_s$ tel que*

$$\exp M = \exp U \, \exp iV \, \exp W.$$

Démonstration. — Comme la sous-algèbre réelle $\mathfrak{k}_r$ de $\mathfrak{k}$ est la somme semi-directe de $\mathfrak{k}_s$ et de $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$, on peut écrire a priori $\exp M = \exp U \exp M'$ avec $U \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ et $M' \in \mathfrak{k}_s \oplus i\,\mathfrak{k}_s$. D'après le 5) de la proposition 4.3.1, $\gamma|_{\mathfrak{l}} = (\mathrm{Id} + ij)|_{\mathfrak{l}}$ établit un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{k}_s$. Il existe donc un (unique) élément M_0 de $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ tel que $M' = M_0 + ijM_0$. On peut écrire $\exp M_0$ sous la forme $\exp iX_0 \exp X_0'$ avec $X_0, X_0' \in \mathfrak{l}$, de façon unique. On a $X_0 = \dfrac{1}{2i} \log(\exp M_0 \exp -\overline{M}_0)$ et $X_0' = \log(\exp -i\,X_0 \exp M_0)$ (décomposition polaire). D'où

$$\exp M' = \exp \gamma M_0 = \exp i\,\gamma X_0 \exp \gamma X_0'.$$

Posant $\gamma X_0 = V$ et $\gamma X_0' = W$, on obtient $\exp M = \exp U \exp iV \exp W$ comme prévu. $\square$

Proposition 8.1.2. — *Soient V et W dans $\mathfrak{k}_s$ et X l'élément de $\mathfrak{l}$ tel que $V = X + ijX$. On a*

$$P(\log \exp iV \, \exp W) = X + \mathrm{Ad} \tan \frac{X}{2} \cdot jX + \mathrm{Ad}\, \frac{X}{\sin X} \cdot P(W).$$

Démonstration. — On a

$$P(\log \exp iV \exp W) = \frac{1}{2i} \log \exp(iX - jX) \exp 2iP(W) \exp(iX + jX)$$

Utilisant une expression déduite de la formule de Campbell-Hausdorff et donnée en appendice (voir le 2) de la proposition A3.2), on peut voir que pour T dans $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ et pour A et B contenus dans un même idéal commutatif de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ (en l'occurrence $\mathfrak{i}^{\mathbb{C}}$), on a

$$\frac{1}{2}\log\exp(T-A)\exp 2B\exp(T+A) = T + \operatorname{Ad}\tanh\frac{T}{2}\cdot A + \operatorname{Ad}\frac{T}{\sinh T}\cdot B.$$

Choisissant $T = iX$, $A = jX$ et $B = i\,P(W)$, on obtient bien la formule de l'énoncé. □

Proposition 8.1.3. — *Soient X dans $\mathfrak{l}$, Y dans $\mathfrak{i}$ et U dans $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$, on a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\,\log\bigl(\exp U\,\exp(iX+iY)\,\exp -\bar{U}\bigr) = \frac{X}{2} + \frac{Y}{2} + \\ \Im m\,\Bigl(U - \frac{1}{2}[iX,U] + \sum_{p\geq 1} a_{2p}\,\operatorname{Ad}(iX)^{2p}\cdot U\Bigr) + \\ \frac{i}{2}\sum_{p,q\in\mathbb{N}} S(p,q)\,[\operatorname{Ad}(iX)^p\cdot U, \operatorname{Ad}(-iX)^q\cdot\bar{U}]\end{aligned}$$

où les $(a_{2p})_{p\geq 1}$ sont les coefficients des x^{2p} dans le développement de Taylor à l'origine de la fonction analytique $\varpi^{-1}(x)$ sur $\mathbb{R}$ de telle sorte que

$$\varpi^{-1}(x) = \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{p\geq 1} a_{2p}\,x^{2p} \quad \textit{lorsque} \quad x \neq 0.$$

et les $\Bigl(S(p,q)\Bigr)_{p,q\geq 0}$ sont les coefficients des $x^p\,x'^q$ dans le développement de Taylor de l'unique fonction analytique sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(x,x') = \frac{\varpi^{-1}(-x') - \varpi^{-1}(-x)}{e^{x'} - e^{x}} \quad \textit{lorsque} \quad x \neq x'.$$

Pour tout k de $\mathbb{N}$ la matrice $\Bigl(S(p,q)\Bigr)_{0\leq p,q\leq k}$ est réelle, symétrique et définie positive.

Démonstration. — Utilisant une expression déduite de la formule de Campbell-Hausdorff et donnée en appendice (voir la proposition A3.3), on peut voir que lorsque T est dans $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ et lorsque A et B sont chacun contenus dans un idéal commutatif de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ (en l'occurrence $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{i}^{\mathbb{C}}$ pour A et $\overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}} \oplus \mathfrak{i}^{\mathbb{C}}$ pour B), ces deux idéaux étant eux-mêmes contenus dans un idéal de cran 2 de $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ (en l'occurrence $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$), on a

$$\begin{aligned}\log\exp A\exp T\exp B = T + \operatorname{Ad}\varpi^{-1}T\cdot A + \operatorname{Ad}\varpi^{-1}(-T)\cdot B \\ + \sum_{p,q\geq 0} S(p,q)\,[\operatorname{Ad}T^p\cdot A, \operatorname{Ad}(-T)^q\cdot B].\end{aligned}$$

où les matrices $\Bigl(S(p,q)\Bigr)_{0\leq p,q\leq k}$ vérifient les propriétés de l'énoncé.

Choisissant $A = U$, $B = -\bar{U}$ et $T = iX + iY$ et notant que Y est dans le centre de U, on obtient bien la formule de l'énoncé. □

Une synthèse des trois dernières propositions nous donne la

Proposition 8.1.4. — *Soient M dans $\mathfrak{k}$ et (U, V, W) dans $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{k}_s \times \mathfrak{k}_s$ de telle sorte que $\exp M = \exp U \exp iV \exp W$ (voir la proposition 8.1.1). Soit X l'élément de $\mathfrak{l}$ tel que $V = X + ijX$. Alors on a*

$$\begin{aligned}P(M) &= P(\log \exp U \ \exp iV \ \exp W) \\ &= X + \operatorname{Ad} \tan \frac{X}{2} \cdot jX + \operatorname{Ad} \frac{X}{\sin X} \cdot P(W) \\ &\qquad + \Im m \, \big(U - \frac{1}{2}[2iX, U] + \sum_{p \geq 1} a_{2p} \operatorname{Ad}(2iX)^{2p} \cdot U\big) \\ &\qquad\qquad + \frac{i}{2} \sum_{p,q \in \mathbb{N}} S(p,q) \Big[\operatorname{Ad}(2iX)^p \cdot U, \operatorname{Ad}(-2iX)^q \cdot \bar{U}\Big].\end{aligned}$$

Démonstration. — Posant $Y = \operatorname{Ad} \tan \frac{X}{2} \cdot jX + \operatorname{Ad} \frac{X}{\sin X} \cdot P(W) \in \mathfrak{i}$. On remarque qu'on a $X \in \mathfrak{l}$ et $Y \in \mathfrak{i}$.

Par ailleurs

$$\begin{aligned}P(M) &= \frac{1}{2i} \log\big(\exp U \ \exp 2i \, P(\log \exp iV \ \exp W) \ \exp -\bar{U}\big) \\ &= \frac{1}{2i} \log\Big(\exp U \ \exp 2i\big(X + \operatorname{Ad} \tan \frac{X}{2} \cdot jX + \operatorname{Ad} \frac{X}{\sin X} \cdot P(W)\big) \ \exp -\bar{U}\Big)\end{aligned}$$

La formule de l'énoncé est alors une conséquence immédiate de la proposition précédente. □

8.2. Le cône Θ et les G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$

On suppose la paire $(\mathfrak{d}, \sigma)$ standard. Utilisant le 1) et le 2) de la proposition 7.2.2, on associe à $\ell \in \mathfrak{d}^*$ et à $W \in \mathfrak{k}_s$ les polynômes $X \to R_\ell(X)$ et $X \to Q_\ell^W(X)$ sur $\mathfrak{l}$ donnés par

$$\begin{aligned}R_\ell(X) &= P_\ell(X + ijX) = \ell(\operatorname{Ad} \varpi X \cdot jX) \\ Q_\ell^W(X) &= P_\ell\big(\log \exp(X + ijX) \ \exp W\big) = \ell\big(\operatorname{Ad} \varpi X \cdot jX + \operatorname{Ad} \exp X \cdot P(W)\big).\end{aligned}$$

On voit que si $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ est minoré, alors $R_\ell(\mathfrak{l})$ est minoré et l'application

$$X, W \to Q_\ell^W(X)$$

est minorée sur $\mathfrak{l} \times \mathfrak{k}_s$.

Désignons par X un élément courant de $\mathfrak{l}$. On constate qu'on a $Q_\ell^W \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $R_\ell \in \mathbb{R}^1[X]$ où $\mathbb{R}^1[X]$ est l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ formé par les éléments qui s'annulent à l'origine). Soit $\mathbb{R}_p[X]$ $(p \geq 0)$ le sous-espace des polynômes homogènes de degré total p dans $\mathbb{R}[X]$.

Soient $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 1}$ les suites des coefficients de x^{2n} dans les développements de Taylor à l'origine des fonctions analytiques $\frac{x}{\sin x}$ et $x \tan \frac{x}{2}$.

Soit $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) l'endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{R}^1[X]$) ayant pour noyau le sous-espace engendré par les monômes de degré total impair et tel que les $\mathbb{R}_{2n}[X]$ pour $n \geq 0$ (resp. $n > 0$) soient des sous-espaces propres de valeur propre $(2n)!\, b_n$ (resp. $(2n)!\,(c_n - b_n)$). On a le

Lemme 8.2.1. — *On suppose $(\mathfrak{d}, \sigma)$ standard. On se donne ℓ dans $\mathfrak{d}^*$. Soient $U \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$, $V, W \in \mathfrak{k}_s$ et $X \in \mathfrak{l}$ tel que $V = X + ijX$. On a*

$$P_\ell(\log \exp U \, \exp iV \, \exp W) = A_\ell(W, X) + B_\ell(X) + C_\ell(X, U)$$

avec

$$\begin{aligned}
A_\ell(W, X) &= \mathcal{T}_1 Q_\ell^W(X) \\
B_\ell(X) &= \ell(X) + \mathcal{T}_2 R_\ell(X) \\
C_\ell(X, U) &= \sum_{p,q} S(p,q)\, \frac{i}{2}\, \ell\big([\mathrm{Ad}(2iX)^p \cdot U,\ \mathrm{Ad}(-2iX)^q \cdot \bar{U}]\big) \\
&\qquad + \Im m\, \ell\big(U - \frac{1}{2}[2iX, U] + \sum a_{2p}\, \mathrm{Ad}(2iX)^{2p} \cdot U\big).
\end{aligned}$$

Démonstration. — D'après la proposition 8.1.4 on a

$$\begin{aligned}
&P_\ell(\log \exp U \, \exp iV \, \exp W) = \\
&\quad \ell(X) + \ell\Big(\mathrm{Ad} \tan \frac{X}{2} \cdot jX + \mathrm{Ad}\, \frac{X}{\sin X} \cdot P(W)\Big) \\
&\qquad + \Im m\, \ell\big(U - \frac{1}{2}[2iX, U] + \sum_{p \geq 1} a_{2p}\, \mathrm{Ad}(2iX)^{2p} \cdot U\big) \\
&\qquad\quad + \frac{i}{2} \sum_{p,q \in \mathbb{N}} S(p,q)\, \ell\big([\mathrm{Ad}(2iX)^p \cdot U,\ \mathrm{Ad}(-2iX)^q \cdot \bar{U}]\big).
\end{aligned}$$

Par ailleurs $Q_\ell^W(X) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p!} \Big[\ell(\mathrm{Ad}\, X^{p-1} \cdot jX) + \ell\big(\mathrm{Ad}\, X^p \cdot P(W)\big)\Big] + \ell\big(P(W)\big)$.

Les polynômes $\ell(\mathrm{Ad}\, X^{p-1} \cdot jX)$ et $\ell\big(\mathrm{Ad}\, X^p \cdot P(W)\big)$ sont des éléments de $\mathbb{R}_p[X]$. On a donc

$$\mathcal{T}_1 Q_\ell^W(X) = \sum_{n \geq 1} b_n \Big(\ell(\mathrm{Ad}\, X^{2n-1} \cdot jX) + \ell\big(\mathrm{Ad}\, X^{2n} \cdot P(W)\big)\Big) + b_0\, \ell\big(P(W)\big).$$

De même
$$R_\ell(X) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p!}\, \ell(\mathrm{Ad}\, X^{p-1} \cdot jX)$$

et
$$\mathcal{T}_2 R_\ell(X) = \sum_{n \geq 1} (c_n - b_n)\, \ell(\mathrm{Ad}\, X^{2n-1} \cdot jX),$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 Q_\ell^W(X) + \mathcal{T}_2 R_\ell(X) &= \sum_{n\geq 1} c_n\, \ell\big(\mathrm{Ad}\, X^{2n-1}\cdot jX\big) + \sum_{n\geq 0} b_n\, \ell\big(\mathrm{Ad}\, X^{2n}\cdot P(W)\big)\\ &= \ell\Big(\mathrm{Ad}\tan\frac{X}{2}\cdot jX + \mathrm{Ad}\,\frac{X}{\sin X}\cdot P(W)\Big)\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Lemme 8.2.2. — *On suppose $(\mathfrak{d},\sigma)$ standard. Soit $\ell\in\mathfrak{d}^*$ tel que $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ soit minoré alors*

a) $W, X \to \mathcal{T}_1 Q_\ell^W$ *est minoré sur* $\mathfrak{k}_s\times\mathfrak{l}$.
b) $X\to \mathcal{T}_2 R_\ell(X)$ *est minoré sur* $\mathfrak{l}$.
c) $X, U\to C_\ell(X,U)$ *est minoré sur* $\mathfrak{l}\times\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$.

Démonstration. — a) Soit un nombre réel m tel que $P_\ell(\mathfrak{k}_r)\geq m$. On peut démontrer de façon élémentaire (voir le 2) de la proposition A4.3) l'implication $Q(\mathfrak{l})\geq m \Rightarrow \mathcal{T}_1 Q(\mathfrak{l})\geq m$ pour tout Q de $\mathbb{R}[X]$. Comme on a $Q_\ell^W(\mathfrak{l})\geq m$, on a bien $A_\ell(W,V) = \mathcal{T}_1 Q_\ell^W(\mathfrak{l})\geq m$.

b) On peut démontrer de façon presqu'élémentaire (voir le 1) de la proposition A4.3) l'implication $Q(\mathfrak{l})$ minoré $\Rightarrow \mathcal{T}_2 Q(\mathfrak{l})$ minoré pour tout Q de $\mathbb{R}^1[X]$. Comme on a $R_\ell(\mathfrak{l})\geq m$, $\mathcal{T}_2 R_\ell(\mathfrak{l})$ est bien minoré.

c) Le fait que $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ soit minoré entraîne d'après la proposition 5.1.1 et le 2) de la proposition 7.3.1, que le noyau $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}$ de la forme hermitienne positive $U\to i\,\ell([U,\bar U])$ est contenu dans $(\operatorname{Ker}\ell)^{\mathbb{C}}$ et dans $\mathfrak{n}_\ell^{\mathbb{C}}$. En quotientant $\mathfrak{e}$ par l'idéal $\mathfrak{n}_\ell$, on en déduit facilement que pour tout β réel, la fonction

$$i\,\ell([U,\bar U]) + \beta\,\Im m\,\ell(U)$$

est minorée sur $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$.

Pour $p\in\mathbb{N}$, nous posons $U_p = \mathrm{Ad}(2iX)^p\cdot U$. On a $U_0 = U$. On note k le plus grand élément tel que $U_k\neq 0$.

Nous utilisons le fait que la matrice symétrique $S_k = \Big(S(p,q)\Big)_{0\leq p,q\leq k}$ est définie positive. On peut écrire S_k sous la forme ${}^tAA$ avec $A = \Big(\alpha_{pq}\Big)$. On a $S_k(p,q) = \sum_{0\leq s\leq k}\alpha_{sp}\,\alpha_{sq}$. Nous posons $V_s = \sum_{0\leq p\leq k}\alpha_{sp}\,U_p$ pour $0\leq s\leq k$. Soit $B = A^{-1} = \Big(\beta_{pq}\Big)$. On a $U_s = \sum_{0\leq p\leq k}\beta_{sp}\,V_p$. Finalement, on obtient

$$C_\ell(X,U) = \sum_{0\leq s\leq k}\Big(\frac{i}{2}\,\ell([V_s,\bar V_s]) + \gamma_s\,\Im m\,\ell(V_s)\Big)$$

où les γ_s sont des nombres réels indépendants de X et dont la valeur précise est sans importance. Les fonctions $V \to \left(\frac{i}{2}\,\ell([V,\bar{V}]) + \gamma_s\,\Im m\,\ell(V)\right)$ étant minorées sur $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ pour tous les s, on a bien le c). □

Lemme 8.2.3. — *On suppose $(\mathfrak{d},\sigma)$ standard. Soit $\ell \in \mathfrak{d}^*$ tel que $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ est minoré. On a l'implication*

$$X \to B_\ell(X) = \ell(X) + \mathcal{T}_2 R_\ell\,(X) \text{ est minoré sur } \mathfrak{l} \quad \Longrightarrow \quad \ell \in \Theta.$$

Démonstration. — Cela résulte des deux derniers lemmes. □

Proposition 8.2.4. — *On a* $\Theta_0 = \Theta \cap \mathfrak{h}^\perp$.

Démonstration. — On désigne par ℓ un élément de $\mathfrak{g}^*$. D'après la proposition 7.1.1, on a $\ell(\mathfrak{j}) = \{0\}$ dès qu'on a $\ell \in \Theta$ ou $\ell \in \Theta_0$. Sans perte de généralité, on peut donc supposer $\mathfrak{j} = \{0\}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}$ dans la démonstration.

Dans ce contexte pour $\ell \in \mathfrak{h}^\perp$, on a l'équivalence

$$P_\ell(\mathfrak{k}_r) \text{ minoré} \quad \Longleftrightarrow \quad P_\ell(\mathfrak{k}) \text{ minoré}$$

d'après la proposition 8.1.1 et les deux derniers lemmes. D'où la proposition. □

Proposition 8.2.5. — *Soit Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$.*

1) *Si $\ell \in \Omega \cap \Theta$, on a $E\ell \cap \Theta_0 \neq \varnothing$.*
2) *On a $\Omega \cap \Theta \neq \varnothing \iff \Omega \cap \Theta_0 \neq \varnothing$.*
3) *$\Omega \cap \Theta$ est contenu dans une orbite de D dans $\mathfrak{g}^*$.*

Démonstration. — Le 2) est une conséquence immédiate du 1) et de la proposition précédente. Le 3) est une conséquence du 1) et du fait que $\Omega \cap \Theta_0$ est une L-orbite (proposition 7.4.2). Nous prouvons donc le 1).

Pour un élément de $\mathfrak{g}^*$ le fait d'appartenir ou non à Θ_0 ou à Θ ne dépend que de sa restriction à $\mathfrak{d}$. Sans perte de généralité, il nous suffit donc de nous restreindre au cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}$. Compte tenu des inclusions $\Theta_0 \subseteq \mathfrak{j}^\perp$ et $\Theta \subseteq \mathfrak{j}^\perp$, on peut de plus supposer la paire $(\mathfrak{d},\sigma)$ standard.

D'après le lemme 6.1.3, il nous suffit de prouver ce résultat dans les situations (1), (2), (4), (7) et (8) de la proposition 6.1.1 en utilisant pour chaque situation les notations de la sous-section 6.1.

On peut écarter la situation (7). En effet, si on se trouvait dans cette situation, on aurait simultanément $\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{d}'$, $X \in \mathfrak{e}$ et $X \notin \mathfrak{d}'$ ce qui aboutirait à une contradiction.

1) *Situations* (1) *et* (2). Dans ces situations, on sait (voir le lemme 6.2.1) que l'orbite $E\,\ell$ est formée par les éléments λ de $\mathfrak{e}^*$ tels que $\lambda(Z) = \ell(Z)$. L'élément ℓ_1 de Ω tel que $\ell_1(\mathfrak{f}) = \{0\}$ est dans $\mathfrak{h}^\perp$ et donc dans Θ_0. D'où le résultat.

2) *Situation* (4). On a $\quad \ell \in \Omega \cap \Theta \iff \ell' \in \Omega' \cap \Theta'$.

Par récurrence, il existe un élément $g' = \mathrm{p}(g)$ de E' (avec $g \in E$) tel que $g'\ell' \in \Theta_0'$. On a alors $g\ell \in \Theta_0$. D'où le résultat.

3) *Situation* (8). Comme $\ell' \in \Theta'$, il existe par récurrence un élément g' de $E = E'$ tel que $g'\ell' \in \Theta'_0$. Pour tout réel x', on a $\exp x'X'\, g' \in E$ puisque $X' \in \mathfrak{d}_1 \subseteq \mathfrak{e}$. On a alors $\exp x'X'\, g'\, \ell' = g'\ell' \in \Theta'_0 \subseteq \mathfrak{h}'^{\perp}$ puisque X' est dans le centre de $\mathfrak{d}'$. De plus, d'après le 1) du lemme 7.4.1 $V \to P_{\exp x'X'\, g'\, \ell}(V)$ est minoré sur $\mathfrak{k}_r$. Or $\exp x'X'\, g'\ell\,(X) = g'\ell\,(X) + x'$. Prenant $g = \exp x'_0 X'\; g'$ avec $x'_0 = -\,g'\ell(X)$, on a $g \in E$, $g\ell\,(\mathfrak{h}) = g\ell\,(\mathbb{R}X \oplus \mathfrak{h}') = \{0\}$ et $P_{g\ell}(\mathfrak{k}_r)$ est minoré. Par conséquent $g\ell \in \Theta_0$. D'où la proposition. □

8.3. Le cône Θ et les vecteurs sphériques

Lemme 8.3.1. — *Soient $\ell \in \mathfrak{d}^*$, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{p}$ deux sous-algèbres de $\mathfrak{d}$ subordonnées à ℓ avec $M = \exp \mathfrak{m}$, $P = \exp \mathfrak{p}$ et $\chi = \chi_\ell$. On suppose de plus que $\mathfrak{p}$ est une* polarisation *de $\mathfrak{d}$ en ℓ. Alors la correspondance $\Phi \to \mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}\Phi$ donnée par*

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}\Phi\,(h) = \int_{P/(P\cap M)} \Phi(hk)\,\chi(k)\; d\dot{k}$$

établit une surjection continue de $\mathcal{S}(D,M,\chi)$ sur $\mathcal{S}(D,P,\chi)$ qui commute avec l'action de D sur ces sous-espaces.

Démonstration. — Lorsque $\mathfrak{m}$ est également une polarisation, il est bien connu (voir [**19**]) que $\mathcal{F}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}$ est une bijection appelée *opérateur d'entrelacement canonique.* Le lemme est une généralisation de ce résultat et sa démonstration est identique. □

Lemme 8.3.2. — 1) *Soit $\ell \in \mathfrak{j}^{\perp}$ tel que $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ est minoré, alors toute polarisation $\mathfrak{e}$-admissible $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ est telle que $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{e})^{\mathbb{C}}$*

2) *Soit $\ell \in \Theta$ et $\mathfrak{p}$ une polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ, alors on a $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}) = \{0\}$·*

3) *Toute polarisation $\mathfrak{e}$-admissible de $\mathfrak{g}$ en $\ell \in \Theta$ est une σ-polarisation.*

Démonstration. — 1) D'après la proposition 5.1.2, il suffit de vérifier que $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}$ ou de façon équivalente, que $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{e}(\ell)^{\mathbb{C}}$. D'après le 2) de la formule 7.3.1, la forme hermitienne $U \to i\,\ell([U,\bar{U}])$ est positive sur $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$. Soit $U \in \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$. On a $i\,\ell([U,\bar{U}]) = 0$ ce qui entraîne du fait de la positivité, que U est dans le noyau de la forme hermitienne et d'après le 1) de la proposition 5.1.1, que $U \in \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}$, comme prévu.

2) Soit $U \in \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}$. La fonction $t \to P_\ell(t\,U) = t\,\ell(\Im m\, U)$ est minorée sur $\mathbb{R}$. On a donc $\ell(\Im m\, U) = 0$. En changeant U en iU, on voit de même que $\ell(\Re e\, U) = 0$ et $\ell(U) = 0$.

3) Cela est une conséquence du 1) et du 2). □

Proposition 8.3.3. — *Soit $\ell \in \Theta$.*

1) *Pour une polarisation quelconque $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ, on a*

$$\mathcal{H}^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}} = \mathcal{H}_D^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}} \qquad \textit{avec} \qquad \dim \mathcal{H}^{-\infty}(G,P,\chi)^{\mathfrak{k}} = 1.$$

2) *Soit* $\mathfrak{p}$ *une polarisation de* $\mathfrak{g}$ *en* ℓ *telle que* $\mathfrak{k} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ *alors il existe une unique fonction* $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ *qui vérifie les propriétés (3.3.1). Cette fonction est bornée et les éléments de* $\mathcal{H}^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}}$ *sont de la forme (3.3.2).*

Démonstration. — 1) Pour une forme ℓ de $\mathfrak{g}^*$, le fait d'appartenir à Θ ne dépend que de la restriction $\ell|_{\mathfrak{d}}$ de ℓ à $\mathfrak{d}$. La proposition 7.1.1 implique alors l'existence d'une $\sigma|_{\mathfrak{d}}$-polarisation $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{d}$ en $\ell|_{\mathfrak{d}}$. On pose $Q = \exp \mathfrak{q}$. La fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{q}}$ correspondante est bornée d'après la proposition 5.2.2 et le 2) de la proposition 7.3.1. Soient $d\dot{h}$ (resp. $d\dot{k}$) une mesure D-invariante sur D/Q (resp. une mesure Q-invariante sur $Q/(P \cap Q)$). Posons pour $\Phi \in \mathcal{H}^{\infty}(G, P, \chi)$

$$a(\Phi) = \int_{D/Q} \overline{\left(\int_{Q/(P\cap Q)} \Phi(hk)\,\chi(k)\,d\dot{k} \right) \kappa_\ell^{\mathfrak{q}}(h)}\; d\dot{h}.$$

On voit que a est un élément non nul de $\mathcal{H}_D^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}}$, en utilisant le lemme 8.3.1. Cela prouve le 1) (compte tenu du 5) de la proposition 6.2.4).

2) D'après le lemme précédent, on a $\ell(\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k}) = \{0\}$ ce qui entraîne l'existence de la fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$. D'après le 1), on a $\dim \mathcal{H}_D^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}} = 1$. Cela entraîne d'après la proposition 3.3.1 que $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ est bornée et le 2). $\square$

SECTION 9

SYNTHÈSE ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

Dans cette section, nous faisons une synthèse des résultats concernant les vecteurs sphériques, donnés dans les sections précédentes.

Théorème 9.0.1. — *Soit Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$, $\pi = \xi(\Omega)$. Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :*

(i) $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \neq \{0\}\cdot$
(ii) $\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} = 1\,.$
(iii) $\Omega \cap \Theta \neq \varnothing\,.$
(iv) $\Omega \cap \Theta_0 \neq \varnothing\,.$

Démonstration. — Les équivalences (i) $\Longleftrightarrow$ (ii), (i) $\Longleftrightarrow$ (iv) et (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) sont données respectivement par les propositions 6.2.4, 7.3.3 et 8.2.5. □

Avant de démontrer le résultat suivant, nous remarquons qu'on voit facilement que la forme $a = a(G, \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{H}^\infty = \mathcal{H}^\infty(G, \mathfrak{k})$ donnée par $a(\Phi) = < a, \Phi > = \bar{\Phi}(e)$ définit un élément naturel de $\mathcal{H}^{-\infty}$ tel que

1) $a \in (\mathcal{H}^{-\infty})^{\mathfrak{k}}$.

2) a est cyclique pour ρ (i.e. le sous-espace vectoriel engendré par $\rho(G)\,a$ est dense dans $\mathcal{H}^{-\infty}$).

On a alors le

Corollaire 9.0.2. — *La représentation cyclique $(\rho, \mathcal{H}, a)$ est sans multiplicité. Plus précisément, on a une désintégration centrale de la forme,*

$$(\rho, \mathcal{H}, a) \simeq \int_{\pi \in \widehat{G}}^{\oplus} (\pi, \mathcal{H}_\pi, a_\pi)\; d\mu(\pi)$$

avec $a_\pi \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}}$ et $\xi^{-1}(\pi) \cap \Theta = \xi^{-1}(\pi) \cap \Theta_0 \neq \varnothing$, μ-presque partout.

Démonstration. — Des résultats de Penney **[24]** et de Bonnet **[5]** nous permettent d'affirmer a priori, qu'on a une désintégration centrale canonique de la représentation $(\rho, \mathcal{H}, a)$ comme ci-dessous :

$$(\rho, \mathcal{H}, a) = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} (\rho_\pi, \mathcal{H}_{\rho_\pi}, a_\pi)\, d\mu(\pi)$$

où μ est la mesure de Plancherel, $\rho_\pi \simeq n(\pi)\,\pi$ est factorielle, quasi-équivalente à π. La fonction n sur $\widehat{G}$ est la fonction multiplicité à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Le fait que a soit cyclique et qu'il soit dans $(\mathcal{H}^{-\infty})^{\mathfrak{k}}$ entraîne par désintégration que μ-presque-partout, les a_π sont aussi cycliques et qu'ils sont dans $(\mathcal{H}_{\rho_\pi}^{-\infty})^{\mathfrak{k}}$. On peut en déduire que

$$n(\pi) \leq \dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} \leq 1, \quad \mu\text{-presque-partout.}$$

On a donc bien $\mathcal{H}_{\rho_\pi} = \mathcal{H}_\pi$ avec $\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{\mathfrak{k}} = 1$ et $\xi^{-1}(\pi) \cap \Theta_0 \neq \varnothing$, μ-presque-partout. □

Proposition 9.0.3. — *Soit $\ell \in \Theta$.*

1) *Il existe des polarisations $\mathfrak{e}$-admissible de $\mathfrak{g}$ en ℓ.*

2) *Toute polarisation $\mathfrak{e}$-admissible $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ est telle que*

$$\mathfrak{k} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{d}^{\mathbb{C}}.$$

Démonstration. — 1) Voir le 2) de la proposition 7.1.1.

2) Voir le 3) du lemme 8.3.2 et les résultats de la sous-section 5.1 concernant les polarisations. □

Théorème 9.0.4. — *Soit Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ et $\ell \in \Omega \cap \Theta$.*

1) *On a $\mathcal{H}^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}} = \mathcal{H}_D^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}}$ pour toute polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en ℓ avec $\dim \mathcal{H}^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}} = 1$.*

2) *Soit $\mathfrak{p}$ une polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ telle que $\mathfrak{k} + (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{d})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$. Alors il existe une unique fonction $\kappa_\ell^{\mathfrak{p}}$ sur D qui vérifie les propriétés ci-dessous*

$$\text{(i) } \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(e) = 1, \qquad \text{(ii) } \mathcal{L}(\mathfrak{k})\, \kappa_\ell^{\mathfrak{p}} = \{0\}, \qquad \text{(iii) } \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(gh) = \chi(h)\, \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(g),$$

pour tout g de D et tout h de $P \cap D$. Cette fonction est bornée.

3) *On choisit $\mathfrak{p}$ comme dans le 2). Soit $d\dot{h}$ une mesure D-invariante sur $D/(P \cap D)$. Soit a un élément non nul de $\mathcal{H}_D^{-\infty}(G, P, \chi)^{\mathfrak{k}}$. Alors il existe un scalaire complexe λ non nul bien déterminé tel que*

$$a(\Phi) = \lambda \int_{D/(P \cap D)} \overline{\Phi(h)\, \kappa_\ell^{\mathfrak{p}}(h)}\, d\dot{h}$$

pour toute fonction Φ de $\mathcal{H}^{\infty}(G, P, \chi)$.

Démonstration. — C'est une reformulation détaillée de la proposition 8.3.3. □

Théorème 9.0.5. — *Soit Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ telle que $\Omega \cap \Theta \neq \varnothing$.*

1) *On a $\Omega \cap \Theta_0 = \Omega \cap \mathfrak{h}^\perp$ et $\Omega \cap \Theta_0$ est une L-orbite non vide dans $\mathfrak{g}^*$.*
2) *$\Omega \cap \Theta$ est contenu dans une orbite de D dans $\mathfrak{g}^*$.*

Démonstration. — Voir les propositions 7.4.2 et 8.2.5. □

SECTION 10

NON NULLITÉ DE LA REPRÉSENTATION ρ

Dans ce qui suit, étant donné un sous-ensemble Γ de $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})^{\perp}$, nous notons $\mathring{\Gamma}$ son intérieur dans $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})^{\perp}$.

10.1. Le cône $\mathring{\Theta}$ et l'idéal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{d}$

Dans cette sous-section, nous cherchons à prouver l'équivalence $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0 \Longleftrightarrow \mathring{\Theta} \neq \varnothing$.

Nous posons $\Theta_1 = \{\ell \in \big((\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}) + \mathfrak{j}\big)^{\perp} \mid P_\ell(\mathfrak{k}_r) \text{ minoré }\}$.

On peut trouver des exemples pour lesquels on a $\Theta \neq \Theta_1$. Cependant, on a la

Proposition 10.1.1. — *On a* $\Theta \subseteq \Theta_1$ *et* $\mathring{\Theta} = \mathring{\Theta}_1$.

Démonstration. — On sait depuis la sous-section 1.1 que $\Theta \subseteq (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})^{\perp}$ et depuis la proposition 7.1.1 qu'on a $\Theta \subseteq \mathfrak{j}^{\perp}$. D'où $\Theta \subseteq \Theta_1$ puisqu'on a l'implication $P_\ell(\mathfrak{k})$ minoré $\Rightarrow$ $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ minoré.

Il nous reste à prouver l'inclusion $\mathring{\Theta}_1 \subseteq \Theta$. Si $\mathring{\Theta}_1$ n'est pas vide, on a $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}$. Quitte à quotienter par $\mathfrak{j}$, il nous suffit donc de montrer cette inclusion pour les paires $(\mathfrak{d}, \sigma)$ standard.

Dans ce contexte, soit ℓ dans $\mathring{\Theta}_1$. Nous utilisons les notations et les résultats de la sous-section 8.2. Utilisant le lemme 8.2.3, nous nous proposons de montrer que $B_\ell(\mathfrak{l})$ est minoré ou de façon équivalente (voir plus loin le corollaire A1.3), que pour tout élément f de $\mathfrak{l}\{t\}$, la fonction $t \to B_\ell\big(f(t)\big) = \ell\big(f(t)\big) + \mathcal{T}_2 R_\ell\,\big(f(t)\big)$ est minorée sur $\mathbb{R}$. Comme on sait d'après le b) du lemme 8.2.2 que $t \to \mathcal{T}_2\, R_\ell\,\big(f(t)\big)$ est minorée, cela est évident lorsque la fonction $t \to \ell\big(f(t)\big)$ est minorée. Nous supposons désormais qu'elle ne l'est pas. Dans ces conditions, on peut écrire

$$f(t) = X_1\, t^{\beta_1} + \cdots + X_p\, t^{\beta_p}$$

où les $X_1 \dots X_p$ sont des éléments non nuls de $\mathfrak{l}$ et les $\beta_1 < \cdots < \beta_p$ sont des entiers avec $\beta_p > 0$. On a un plus grand élément p'' avec $1 \leq p'' \leq p$ et $s'' = \beta_{p''} > 0$ tel que $\ell(X_{p''}) \neq 0$ et un plus grand élément p' avec $p'' \leq p' \leq p$ et $s' = \beta_{p'}$ tel que $X_{p'} \notin \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}$ et donc tel que $jX_{p'} \neq 0$. On a donc $\ell\big(f(t)\big) = \ell(X_{p''})\, t^{s''}\big(1 + o(1)\big)$ lorsque $|t| \to \infty$. Pour prouver le résultat, il suffit de vérifier qu'il existe un entier s pair avec $s > s' \geq s''$ et un réel $M > 0$ tels que $\mathcal{T}_2 R_\ell\,\big(f(t)\big) = M\, t^s + o(t^s)$.

Pour cela nous introduisons dans cette démonstration pour $q \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{A}_{qp}$ des applications α de $\{1 \dots q\}$ dans $\{1 \dots p\}$. Pour $r \in \mathbb{Z}$, nous notons A_{qr} l'élément de $\mathfrak{i}$ donné par

$$A_{qr} = \frac{1}{q!} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{qp},\ \sum_{i=1}^{q} \beta_{\alpha(i)} = r} \operatorname{Ad} X_{\alpha(1)} \operatorname{Ad} X_{\alpha(2)} \dots \operatorname{Ad} X_{\alpha(q-1)} \cdot jX_{\alpha(q)}.$$

On pose $s = \operatorname{Sup}\{r \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{N} \text{ tel que } A_{qr} \neq 0\}$. Lorsque u parcourt $\mathbb{R}$, on a

$$R_\ell\big(uf(t)\big) = \ell\Big(\operatorname{Ad} \varpi\, uf(t) \cdot j\, uf(t)\Big) = \sum_{r \leq s} \Big(\sum_{q \in \mathbb{N}} \ell(A_{qr})\, u^q\Big)\, t^r.$$

et

$$R_\ell\big(f(t)\big) = \sum_{r \leq s} \ell(A_r)\, t^r \quad \text{avec} \quad A_r = \sum_{q \in \mathbb{N}} A_{qr}.$$

De même, $$\mathcal{T}_2 R_\ell\,\big(u\, f(t)\big) = \sum_{r \leq s} \Big(\sum_{n \in \mathbb{N}} (2n)!\,(c_n - b_n)\ \ell(A_{2n,r})\, u^{2n}\Big)\, t^r.$$

On voit que s est aussi le plus grand des entiers r tels que l'élément $\sum_{q \in \mathbb{N}} A_{qr}\, u^q$ de $\mathfrak{i}[u]$ n'est pas identiquement nul.

Dans cette démonstration on pose $S(u) = \sum_{q \in \mathbb{N}} A_{qs}\, u^q$ et pour ℓ dans $\mathfrak{g}^*$, $S_\ell(u) = \ell\big(S(u)\big)$. On voit que $S_\ell \in \mathbb{R}^1[u]$. On a

$$R_\ell\big(uf(t)\big) = S_\ell(u)\, t^s + o(t^s)$$

et

$$\mathcal{T}_2 R_\ell\,\big(uf(t)\big) = \mathcal{T}_2 S_\ell\,(u)\, t^s + o(t^s).$$

Le fait que $R_\ell(\mathfrak{l})$ et $\mathcal{T}_2 R_\ell\,(\mathfrak{l})$ sont minorés entraîne qu'on a $S_\ell(u) \geq 0$ et $\mathcal{T}_2\, S_\ell(u) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ (nous allons voir qu'en fait, on a $\mathcal{T}_2 S_\ell\,(u) > 0$).

Il est clair qu'on a $s \geq s' \geq 1$ puisque $A_{1,s'} = j\, X_{p'} \neq 0$. Montrons par l'absurde qu'en fait $s > s'$. Supposons qu'on ait $s = s'$. Comme ℓ est dans l'intérieur de Θ_1, il existe un élément ℓ' de Θ_1 tel que $\ell'(jX_{p'}) \neq 0$. L'élément $S_{\ell'}(u)$ de $\mathbb{R}[u]$ a pour terme de plus bas degré $\ell'(jX_{p'})\, u$. Il existe donc un réel u_0 tel que $S_{\ell'}(u_0) < 0$. On a alors $R_{\ell'}\big(u_0\, f(t)\big) = S_{\ell'}(u_0)\, t^{s'} + o(t^{s'})$ qui n'est pas minoré lorsque $|t| \to \infty$, en contradiction avec le fait que $R_{\ell'}(\mathfrak{l}) = P_{\ell'}(\mathfrak{k}_s)$ est minoré.

Nous nous proposons maintenant de montrer que S_ℓ est un élément non identiquement nul de $\mathbb{R}[u]$. Comme S n'est pas identiquement nul, il suffit de montrer par l'absurde l'implication $S(u) \neq 0 \Rightarrow S_\ell(u) \neq 0$. Soit donc un réel u_0 tel qu'on ait simultanément $S(u_0) \neq 0$ et $S_\ell(u_0) = 0$. Le fait que ℓ est dans l'intérieur de

Θ_1 entraîne l'existence d'un élément ℓ' dans $\overset{\circ}{\Theta}_1$ tel que $S_{\ell'}(u_0) < 0$. Ici encore, $R_{\ell'}(u_0 f(t))$ n'est pas minoré lorsque $|t| \to \infty$ et on a une contradiction.

En résumé, on a $s > s'$ avec s pair, S_ℓ est un polynôme d'une variable, non identiquement nul et tel que $S_\ell(u) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. Une démonstration élémentaire donnée en appendice (3) de la proposition A4.3) permet d'en déduire que $\mathcal{T}_2 S_\ell(u) > 0$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, posant $M = \mathcal{T}_2 S_\ell(1)$, on a $M > 0$ avec $s > s'$. Finalement, on a $B_\ell(f(t)) = Mt^s + o(t^s)$ qui est minoré. D'où la proposition. □

Proposition 10.1.2. — 1) *L'idéal* $\mathfrak{n} = \bigcap_{\ell \in \Theta_0} \mathfrak{n}_\ell$ *de* $\mathfrak{e}$ *de la sous-section 5 est en fait un idéal de* $\mathfrak{d}$ *de complexifié* σ*-stable et qui contient* $\mathfrak{j}$.

2) *On a* $\bigcap_{\ell \in \Theta_1} \operatorname{Ker} \ell = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}) + \mathfrak{n}$.

Remarque. — On pourrait aussi montrer qu'on a $\mathfrak{n} = \bigcap_{\ell \in \Theta} \operatorname{Ker} \ell \cap \mathfrak{e}$.

Démonstration. — 1) Le fait que $\mathfrak{j}$ est contenu dans $\mathfrak{n}$, résulte de l'inclusion $\Theta_0 \subseteq \mathfrak{j}^\perp$ (1) de la proposition 7.1.1).

Pour $\ell \in \Theta_0$, on a $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} \subseteq (\operatorname{Ker} \ell)^{\mathbb{C}}$. D'après le 3) de la proposition 5.1.1, cela implique que les $\mathfrak{n}_\ell$ sont de complexifiés σ-stables. Il en est donc de même de $\mathfrak{n}$. Pour démontrer que c'est de plus un idéal de $\mathfrak{d}$, il suffit de vérifier qu'il est stable par $\mathfrak{l}$. Cela découle du fait que Θ_0 est stable par L (voir la proposition 7.4.2).

2) Les faits que l'application $V \to P_\ell(V)$ est minorée sur $\mathfrak{k}_s$ et que la forme hermitienne $U \to i\ell([U, \bar{U}])$ est positive sur $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ ne dépendent que de la restriction de ℓ à $\mathfrak{i}$. On en déduit, en utilisant le 2) de la proposition 7.3.1, qu'on a

$$\ell \in \Theta_1 \implies \ell + \left((\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}) + \mathfrak{i} + \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}\right)^\perp \subseteq \Theta_1$$

ou encore, en utilisant le fait que $\mathfrak{e}(\ell)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{i}^{\mathbb{C}} + \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}}$ (voir le 2) de la proposition 5.1.1) que

$$\ell \in \Theta_1 \iff \ell + \left((\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}) + \mathfrak{e}(\ell)\right)^\perp \cap \Theta_0 \neq \varnothing.$$

On a donc

$$\bigcap_{\ell \in \Theta_1} \operatorname{Ker} \ell \cap \mathfrak{e} = \bigcap_{\ell \in \Theta_1} \operatorname{Ker} \ell \cap \mathfrak{e}(\ell) = \bigcap_{\ell \in \Theta_0} \operatorname{Ker} \ell \cap \mathfrak{e}(\ell) = \mathfrak{n}$$

et

$$\bigcap_{\ell \in \Theta_1} \operatorname{Ker} \ell = \bigcap_{\ell \in \Theta_1} \operatorname{Ker} \ell \cap \mathfrak{l} + \bigcap_{\ell \in \Theta_1} \operatorname{Ker} \ell \cap \mathfrak{e} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}) + \mathfrak{n}.$$

□

Proposition 10.1.3. — 1) *Les deux propriétés ci-dessous sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0$.

(ii) $\overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing$.

2) *Lorsque ces propriétés sont vérifiées, l'intérieur de* Θ_0 *dans* $\mathfrak{h}^\perp$ *n'est pas vide.*

Démonstration. — 1) D'après la proposition 10.1.1 et le 2) de la proposition précédente, on a les équivalences

$$\overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing \iff \overset{\circ}{\Theta}_1 \neq \varnothing \iff \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}.$$

Lorsque $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{e}_0 \subseteq \mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{e}_0$. D'où

$$\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g} \iff \mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0$$

et le 1).

2) Soit $\ell \in \overset{\circ}{\Theta} \subseteq \mathfrak{j}^\perp$ et $\mathcal{V}_\ell$ un voisinage de ℓ contenu dans Θ. D'après le 1) de la proposition 8.2.5, il existe un élément g de $E \subseteq D$ tel que $g\ell \in \Theta_0 \subseteq \mathfrak{h}^\perp$. Il nous suffit de vérifier que $g\mathcal{V}_\ell \cap \mathfrak{h}^\perp \subseteq \Theta_0$.

Ceci résulte de l'équivalence $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ minoré $\iff$ $P_{g\ell}(\mathfrak{k}_r)$ minoré, valable pour $\ell \in \mathfrak{j}^\perp$ et $g \in D$, donnée dans la proposition 7.4.1. □

10.2. Non nullité de ρ

Dans les lemmes qui suivent, on suppose la paire $(\mathfrak{d}, \sigma)$ standard et on désigne par $\mathfrak{q}$ un sous-espace supplémentaire adapté à $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{d})$ dans $\mathfrak{l}$ avec $k = \dim \mathfrak{q}$. On se fixe une norme euclidienne $|\ |_0$ de $\mathfrak{q}$ et une norme $|\ |_1$ de $\mathfrak{f}$.

Dans cette sous-section, nous cherchons à démontrer l'équivalence $\overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing \iff \rho$ non nulle (voir le théorème 10.2.8). Nous avons déjà annoncé dans la sous-section 1.4 que lorsque $\overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing$, la fonction

$$g \to \Phi(g) = \int_{\mathcal{K}} \kappa_\ell(g^{-1})\, d\ell \quad \text{sur} \quad D$$

où $\mathcal{K}$ est une boule fermée de rayon non nul pour une norme euclidienne quelconque contenue dans Θ_0, fournira un élément non nul de $\mathcal{H}(D, \mathfrak{k})$. D'où l'implication $\overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing \Rightarrow \rho$ non nulle.

Ce résultat sera énoncé dans le lemme 10.2.6. Pour le prouver, il est nécessaire de vérifier que Φ est de carré intégrable sur $D/\exp(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{d})$. Pour cela, nous verrons qu'il suffit de constater que lorsque ℓ varie, les fonctions $X \to P_\ell\big(\gamma(X)\big)$ et $Y \to s_\ell(Y, Y)$ sont respectivement uniformément minorées sur $\mathfrak{q}$ et sur $\mathfrak{f}$ par des fonctions φ_1 et φ_2 telles que les intégrales $\displaystyle\int_{\mathfrak{q}} e^{-\varphi_1(X)}\, dX$ et $\displaystyle\int_{\mathfrak{f}} e^{-\varphi_2(Y)}\, dY$ convergent.

La seconde minoration sera facile à obtenir (voir le lemme 10.2.4 et le 2) du lemme 10.2.5). Pour prouver la première, nous considérerons la fonction

$$\varphi(r) = \inf_{\ell \in \mathcal{K},\ |X|_0^2 = r} \ell\big(P \circ \gamma(X)\big).$$

Les propriétés asymptotiques des fonctions algébriques de la variable réelle nous permettrons de prévoir qu'on a $\varphi(r) = M\, r^\alpha \big(1 + o(1)\big)$ avec $M \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$. La fonction φ étant minorée, on a les possibilités suivantes :

a) $\alpha \leq 0$.

b) $\alpha > 0$ et $M > 0$.

Les énoncés des lemmes 10.2.1 à 10.2.3 nous permettront de constater que la condition $\mathring{\Theta} \neq \varnothing$ entraîne que seule la possibilité b) est à retenir. On en déduira immédiatement l'existence d'une fonction φ_1 convenable (voir le 1) du lemme 10.2.5).

Par ailleurs, le dernier lemme 10.2.7 avant l'énoncé du théorème 10.2.8 permettra d'obtenir facilement l'implication réciproque ρ non nulle $\Rightarrow \mathring{\Theta} \neq \varnothing$.

Lemme 10.2.1. — *Soit $f \in \mathfrak{l}\{\{t\}\}$.*

1) Il existe un couple unique d'éléments (φ_-, φ_+) tel que $\varphi_- \in \mathfrak{l}_-\{\{t\}\}$ et $\varphi_+ \in t\,\mathfrak{l}[t]$ et qu'on ait pour $|t|$ assez grand

$$\exp f(t) = \exp \varphi_-(t)\ \exp \varphi_+(t).$$

2) Il existe un couple d'éléments (f_-, f_+) tel que $f_- \in \mathfrak{l}_-\{\{t\}\}$ et $f_+ \in t\,\mathfrak{q}[t]$ et qu'on ait pour $|t|$ assez grand

$$\exp f(t) = \exp f_-(t)\ \exp f_+(t) \pmod{\exp(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{d})}. \tag{10.2.1}$$

De plus, on a $f_+ \neq 0$ dès que $f \in \mathfrak{q}_+\{\{t\}\}$.

Démonstration. — Le 1) s'obtient par récurrence sur le cran de $\mathfrak{l}$. Le début du 2) se déduit du 1). Soit $f \in \mathfrak{q}\{\{t\}\}$ tel que $f_+ = 0$. Alors f ne tend pas vers l'infini lorsque $t \to \infty$ et donc $f \notin \mathfrak{q}_+\{\{t\}\}$. D'où la fin du lemme. □

Lemme 10.2.2. — *L'application $f \to P \circ \gamma \circ f$ de $\mathfrak{q}\{\{t\}\}$ dans $\mathfrak{i}\{\{t\}\}$ envoie $\mathfrak{q}_+\{\{t\}\}$ dans $\mathfrak{i}_+\{\{t\}\}$.*

Démonstration. — Supposons f dans $\mathfrak{q}\{\{t\}\}$. Utilisant la décomposition (10.2.1) et la formule (7.2.2), il vient

$$\begin{aligned} P(\gamma f(t)) &= P\big(\log \exp \gamma f_-(t)\ \exp \gamma f_+(t)\big) \\ &= P\big(\gamma f_-(t)\big) + \operatorname{Ad} \exp f_-(t) \cdot P\big(\gamma f_+(t)\big) \end{aligned} \tag{10.2.2}$$

Lorsque de plus f est dans $\mathfrak{q}_+\{\{t\}\}$, on peut écrire

$$j f_+(t) = A_1\, t + A_2\, t^2 + \cdots + A_p\, t^p$$

avec $p \geq 1$ et $A_p \neq 0$. Notons $\mathfrak{m}$ le $\mathfrak{l}$-module engendré par $\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ dans $\mathfrak{i}$ et posons $\mathfrak{m}_0 = [\mathfrak{l}, \mathfrak{m}]$. Du fait que $\mathfrak{l}$ est nilpotent, il existe un q tel que $1 \leq q \leq p$ et $A_q \notin \mathfrak{m}_0$. Notons $\mathfrak{m}_1$ le $\mathfrak{l}$-sous-module $\mathfrak{m}_0 \bigoplus\limits_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq q}} \mathbb{R} A_i$ dans $\mathfrak{m}$.

La formule (10.2.2) entraîne qu'on a

$$P\big(\gamma f(t)\big) = A_q\, t^q \pmod{\mathfrak{i}_-\{\{t\}\} + \mathfrak{m}_1\{\{t\}\}}$$

avec $A_q \notin \mathfrak{m}_1$. Donc $P \circ \gamma \circ f \in \mathfrak{i}_+\{\{t\}\}$. D'où le lemme. □

Lemme 10.2.3. — *On suppose de plus* $\overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing$. *Soit* f *dans* $\mathfrak{q}_+\{\{t\}\}$, *alors il existe un* p *de* $\mathbb{N}^*$ *et un* A *non nul de* $\mathfrak{i}$ *tels que* $P \circ \gamma \circ f\ (t) = A\, t^{2p}\big(1 + o(t)\big)$ *pour* $|t|$ *assez grand. Pour tout* ℓ *de* $\overset{\circ}{\Theta}$, *on a* $\ell(A) > 0$.

Remarque. — On déduit facilement du résultat précédent que $0 \notin \overset{\circ}{\Theta}$ dès qu'on a $\mathfrak{k} \neq (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$.

Démonstration. — D'après le lemme précédent, on sait que

$$P \circ \gamma \circ f\ (t) = A\, t^{p'}\big(1 + o(1)\big) \quad \text{avec} \quad A \in \mathfrak{i} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad p' > 0.$$

Pour tout ℓ de $\mathfrak{d}^*$ on a donc $P_\ell(\gamma \circ f\,(t)) = \ell(A)\ t^{p'}\big(1 + o(1)\big)$ lorsque $|t| \to \infty$.

On a donc $\ell(A) \geq 0$ dès que $\ell \in \Theta$, du fait que $P_\ell(\mathfrak{k}_r)$ est minoré. De plus, on a $\ell(A) \neq 0$ dès que $\ell \in \overset{\circ}{\Theta}$. En effet, s'il existait un élément ℓ de $\overset{\circ}{\Theta} \cap A^\perp$, il existerait dans tout voisinage de ℓ un élément ℓ' de Θ avec $\ell'(A) < 0$ et $P_{\ell'}(\mathfrak{k}_r)$ non minoré. On aurait donc bien une contradiction.

Pour la même raison, on voit que $p' = 2p$ est pair. □

Lemme 10.2.4. — *Soit* $\ell \in \overset{\circ}{\Theta} = \overset{\circ}{\Theta}_1$. *On a* $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} = \{0\}$ *et la forme hermitienne* $U \to i\,\ell([U, \bar{U}])$ *est non dégénérée sur* $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$.

Démonstration. — D'après le 1) de la proposition 5.1.1, dire que la forme hermitienne de l'énoncé est dégénérée équivaut à dire qu'on a $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \neq \{0\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un élément ℓ de $\overset{\circ}{\Theta}$ tel que $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \neq \{0\}$. La condition $\ell \in \Theta$ entraîne d'après le 2) de la proposition 7.3.1, qu'on a $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \subseteq (\operatorname{Ker}\ell)^{\mathbb{C}}$. Par ailleurs, tout voisinage de ℓ dans $(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})^\perp$ contient un élément de ℓ' tel que

$$(\ell - \ell')\,(\mathfrak{i}) = \{0\} \qquad \text{et} \qquad (\ell - \ell')\,\big(\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}}\big) \neq \{0\}.$$

On a alors $\mathfrak{e}(\ell') = \mathfrak{e}(\ell)$ et $\mathfrak{e}(\ell')_0^{\mathbb{C}} \not\subseteq (\operatorname{Ker}\ell')^{\mathbb{C}}$ ce qui entraîne qu'on a $\ell' \notin \Theta$ et la contradiction. □

Lemme 10.2.5. — *On suppose* $\overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing$. *Soit* $\mathcal{K}$ *une boule fermée de rayon non nul de* $\mathfrak{h}^\perp$ *pour une norme euclidienne, contenue dans* Θ_0 *(voir le 2) de la proposition 10.1.3). Alors,*

1) *Il existe des constantes* c_0 *de* $\mathbb{R}_+^*$, b_0 *de* $\mathbb{R}$ *et* β *de* $\mathbb{R}_+^*$ *telles que, pour* X *assez grand dans* $\mathfrak{q}$, *on ait*

$$\ell\big(P \circ \gamma\ (X)\big) \geq b_0 + c_0 |X|_0^\beta, \quad \forall\, \ell \in \mathcal{K}.$$

2) *Il existe une constante* c_1 *de* $\mathbb{R}_+^*$ *telle que*

$$s_\ell(Y, Y) \geq c_1\, |Y|_1^2, \qquad \forall\, Y \in \mathfrak{f}, \quad \forall\, \ell \in \mathcal{K}.$$

Démonstration. — 1) Le résultat étant évident lorsque $k = 0$, nous supposons désormais $k > 0$. Le sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathfrak{q} \times \mathfrak{h}^{\perp}$ formé par les éléments (r, y, X, ℓ) tels que $r = |X|_0^2$, $y = \ell\big(P \circ \gamma\ (X)\big)$, $X \in \mathfrak{q}$ et $\ell \in \mathcal{K}$ est semi-algébrique. Puisque $k > 0$, on a une fonction $r \to \varphi(r)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \inf\{y \mid \exists\, (X,\ell) \in \mathfrak{q} \times \mathfrak{h}^{\perp} \text{ tel que } (r,y,X,\ell) \in \mathcal{E}\}\\ &= \inf_{\ell \in \mathcal{K},\ |X|_0 = r} \ell\big(P \circ \gamma(X)\big).\end{aligned}$$

Pour des raisons de compacité, pour tout r de $\mathbb{R}_+$, il existe un couple (X_r, ℓ_r) de $\mathfrak{q} \times \mathfrak{h}^{\perp}$ tel que $(r, \varphi(r), X_r, \ell_r) \in \mathcal{E}$.

Utilisant un résultat classique (proposition A1.1), on en déduit qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ et des applications $r \to X(r)$ de $\mathfrak{q}\{\{r^{\frac{1}{q}}\}\}$ et $r \to \ell(r)$ de $\mathfrak{h}^{\perp}\{\{r^{\frac{1}{q}}\}\}$ telles que $\big(r, \varphi(r), X(r), \ell(r)\big) \in \mathcal{E}$. C'est-à-dire telles que $\varphi(r) = \ell(r)\,\big[P \circ \gamma\ \big(X(r)\big)\big]$. On a $X(r) \to \infty$ lorsque $r \to \infty$, l'application $r \to X(r)$ est donc en fait un élément de $\mathfrak{q}_+\{\{r^{\frac{1}{q}}\}\}$. D'après le lemme 10.2.3, il existe un p dans $\mathbb{N}^*$ et un élément A non nul dans $\mathfrak{i}$ tels que

$$P \circ \gamma\ \big(X(r)\big) = A\, r^{\frac{2p}{q}}\big(1 + o(1)\big) \text{ lorsque } r \to \infty\cdot$$

Par ailleurs, comme $r \to \ell(r)$ est borné, on a $\ell(r) = \ell_0\big(1 + o(1)\big)$ lorsque $r \to \infty\cdot$ D'où par passage à la limite $\ell_0 \in \mathcal{K}$. Par conséquent,

$$\varphi(r) = \ell_0(A)\,\big(r^{\frac{2p}{q}} + o(1)\big) \text{ avec } \ell_0(A) > 0.$$

Choisissant $0 < c_0 < \ell_0(A)$, $\beta = \dfrac{2p}{q}$ et b_0 convenablement, on obtient l'inégalité du 1).

2) On a $\displaystyle\inf_{Y \in \mathfrak{f}\setminus\{0\},\ \ell \in \mathcal{K}} \frac{s_\ell(Y,Y)}{|Y|_1^2} = \inf_{|Y|_1 = 1,\ \ell \in \mathcal{K}} s_\ell(Y,Y)$.
D'après le lemme précédent, la forme hermitienne $Y \to s_\ell(Y,Y) = 2i\ell([\alpha Y, \bar{\alpha} Y])$ sur $(\mathfrak{f}, j)$ est non dégénérée. La fonction $\ell, Y \to s_\ell(Y,Y)$ est continue et ne s'annule donc pas sur le compact $\mathcal{K} \times \{Y \mid |Y|_1 = 1\}$. Son minimum c_1 est strictement positif. D'où le résultat. □

Dans le résultat suivant, on utilise la fonction κ_ℓ et l'expression qu'on en a donnée dans la proposition 5.3.1.

Lemme 10.2.6. — *On suppose $\overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing$. Alors la fonction Φ sur D donnée par $\Phi(g) = \int_{\mathcal{K}} \kappa_\ell(g^{-1})\, d\ell$ est bien définie et c'est un élément non nul de $\mathcal{H}$.*

Démonstration. — Il nous faut vérifier que :

a) Φ est bien définie sur D.
b) $\mathcal{R}(\mathfrak{k})\,\Phi = \{0\}\cdot$

c) $0 < \int_{D/\exp(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g})} |\Phi(g)|^2 \, dg < \infty$·

Pour g fixé dans D et pour tout X de $\mathfrak{d}$, les fonctions $\ell \to \kappa_\ell(g^{-1})$ et $\ell \to (\mathcal{L}(X)\,\kappa_\ell)\,(g^{-1})$ sont continues sur le compact $\mathcal{K}$. De plus, on a pour tout ℓ de $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}(\mathfrak{k})\,\kappa_\ell = \{0\}$· On en déduit les propriétés a) puis, par dérivation sous le signe somme, b).

Il nous reste à démontrer le c). Pour cela, on remarque que l'application

$$\mathfrak{i} \times \mathfrak{f} \times \mathfrak{q} \ni (Z, Y, X) \longrightarrow \exp(Z + Y)\, \exp X \in D$$

fournit une paramétrisation algébrique de $D/\exp(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g})$ par $\mathfrak{i} \times \mathfrak{f} \times \mathfrak{q}$. Posant

$$\psi(Z, Y, X) = \Phi\big(\exp(Z + Y)\, \exp X\big)$$

et $\quad \psi_\ell(Z, Y, X) = \kappa_\ell\big(\exp -X \;\; \exp -(Y + Z)\big) = e^{-i\ell(Z)}\, e^{-P_\ell(\gamma(X))}\, e^{-\frac{s_\ell(Y,Y)}{4}},$

il vient (voir la proposition 5.3.1),

$$\int_{D/\exp(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g})} |\Phi|^2(g)\, d\dot{g} = \int_{\mathfrak{i}\times\mathfrak{f}\times\mathfrak{q}} |\psi|^2(Z, Y, X)\; dX\, dY\, dZ$$

avec
$$\psi(Z, Y, X) = \int_{\mathcal{K}} \psi_\ell(Z, Y, X)\; d\ell.$$

Posant $\mathrm{Int} = \int_{\mathfrak{i}\times\mathfrak{f}\times\mathfrak{q}} \Big|\int_{\mathcal{K}} \psi_\ell(Z, Y, X)\, d\ell\Big|^2 dZ\, dY\, dX$, nous devons vérifier qu'on a $0 < \mathrm{Int} < \infty$.

Utilisant la formule de Parseval, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{Int} &= \int_{\mathfrak{f}\times\mathfrak{q}} \Big(\int_{\mathfrak{i}} \Big|\int_{\mathcal{K}\subseteq\mathfrak{i}^*} e^{-i\ell(Z)}\, e^{-P_\ell(\gamma(X))}\, e^{-\frac{s_\ell(Y,Y)}{4}}\, d\ell\Big|^2 dZ\Big)\; dY\, dX \\ &= c \int_{\mathfrak{f}\times\mathfrak{q}} \Big(\int_{\mathcal{K}} e^{-2\,P_\ell(\gamma(X))}\, e^{-\frac{s_\ell(Y,Y)}{2}}\, d\ell\Big)\; dY\, dX\end{aligned}$$

où $c > 0$ est une constante sans importance, qui ne dépend que du choix des mesures de Lebesgue.

En utilisant le lemme 10.2.5, on obtient bien

$$0 < \mathrm{Int} < c \Big(\int_{K} d\ell\Big) \Big(\int_{\mathfrak{f}} e^{-\frac{c_1}{2}|Y|_1^2}\, dY\Big) \Big(\int_{\mathfrak{q}} e^{-2b_0 - 2c_0|X|_0^\beta}\, dX\Big) < \infty.$$

□

Nous abandonnons désormais l'hypothèse que $(\mathfrak{d}, \sigma)$ est standard.

Lemme 10.2.7. — *On suppose qu'on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}$. Alors, on a $\rho(N) = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\}$·*

Démonstration. — D'après le corollaire 9.0.2, on a une désintégration centrale de la forme

$$\rho \simeq \int_{\pi \in \widehat{D}} \pi \, d\mu(\pi) \quad \text{avec } \xi^{-1}(\pi) \cap \Theta_0 \neq \varnothing, \ \mu\text{-presque partout.}$$

Montrons que μ-presque partout, on a $\pi(N) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_\pi}$ ce qui entraînera le lemme. Choisissons ℓ dans $\xi^{-1}(\pi) \cap \Theta_0$, $\mathfrak{p}$ une polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ et posons $\pi = \rho(D, P, \chi_\ell)$. Pour Φ dans $\mathcal{H}_\pi$, h dans N et g dans D, on a

$$\big(\pi(h)\,\Phi\big)\,(g) = \Phi(h^{-1}\,g) = \chi_\ell(g^{-1}\,h\,g)\ \Phi(g) = \Phi(g)$$

puisque $\chi_\ell(N) = \{1\}\cdot$ D'où le résultat attendu. □

Théorème 10.2.8. — 1) *Les propriétés ci-dessous sont équivalentes :*

(i) La représentation ρ n'est pas nulle.

(ii) $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0$.

(iii) $\overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing$.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on a $\mathfrak{j} = \mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0$.

2) *Pour que ρ soit fidèle, il faut et il suffit qu'en plus des conditions précédentes, on ait* $\bigcap_{g \in G} g\,(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}) = \{0\}\cdot$

Démonstration. — 1) On a $\rho \simeq \mathrm{Ind}\uparrow_D^G \rho(D, \mathfrak{k})$. D'où l'équivalence

$$\rho \text{ non nulle} \iff \rho(D, \mathfrak{k}) \text{ non nulle.}$$

Sans perte de généralité, on pourra donc supposer $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}$, dans la suite de la démonstration du 1).

L'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) a déjà été démontrée dans la proposition 10.1.3. Il suffit de prouver l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) dans l'hypothèse où $\mathfrak{j} = \mathfrak{e}_0 = \{0\}\cdot$ Elle est alors une conséquence immédiate du lemme 10.2.6. Prouvons qu'on a (i) $\Rightarrow$ (ii), ce qui achèvera la démonstration.

D'après le lemme 10.2.7, pour tout Φ de $\mathcal{H}$ et tout g de D, la fonction $h \to |\Phi(gh)|^2$ est constante sur le sous-groupe $\exp(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})\ N$ de D. Or, on a

$$\int_{G/\exp(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g})} |\Phi(g)|^2\, d\dot{g} = \int_{G/\exp(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g})N} \Big(\int_{\exp(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g})N/\exp(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g})} |\Phi(gh)|^2\, d\dot{h} \Big)\, d\dot{g} < \infty\cdot$$

Lorsque Φ n'est pas nulle, l'intégrale ne peut converger que si on a $N \subseteq \exp(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g})$ ou de façon équivalente que si on a $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}$. Dans cette éventualité, on a vu que $\mathfrak{j} = \mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0$ comme prévu.

2) C'est une conséquence d'un résultat élémentaire concernant les sous-représentations des représentations quasi-régulières qui est donné dans le 2) de la proposition A8.1. □

SECTION 11

QUELQUES EXEMPLES

Dans cette section, nous fournissons des exemples d'involutions complexes associées à des représentations ρ fidèles. Nous décrivons tout d'abord un des procédés de construction que nous avons utilisés pour les obtenir.

11.1. Un procédé de construction

Soit un entier $r > 1$. Supposons que $(\mathfrak{g}^{(r-1)}, \sigma)$ soit une paire symétrique munie d'une $\mathbb{Z}$-graduation de la forme $\mathfrak{g}^{(r-1)} = \bigoplus_{1 \leq q \leq r-1} \mathfrak{g}_{(q)}$. Cela signifie que les $\mathfrak{g}_{(q)}$ sont nuls pour $q < 1$ et $q > r-1$, qu'ils sont de complexifiés σ-stables et qu'on a $[\mathfrak{g}_{(q)}, \mathfrak{g}_{(q')}] \subseteq \mathfrak{g}_{(q+q')}$. On se propose de construire une nouvelle involution complexe $(\mathfrak{g}^{(r)}, \sigma)$ possédant les mêmes propriétés, à condition de remplacer $r-1$ par r. L'algèbre $\mathfrak{g}^{(r)} = \bigoplus_{1 \leq q \leq r} \mathfrak{g}_{(q)}$ sera une extension centrale de $\mathfrak{g}^{(r-1)}$ par l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_{(r)}$ considéré comme algèbre de Lie commutative. En général, $\mathfrak{g}_{(r)}$ sera non nul. Pour cela, nous allons construire certains sous-espaces et certaines sous-algèbres dont les complexifiés sont, eux aussi, munis naturellement d'une involution. Celle-ci sera encore systématiquement notée σ.

Tout d'abord, on définit le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}'_{(r)} = \bigoplus_{s+t=r} \mathfrak{g}_{(s)} \wedge \mathfrak{g}_{(t)}$ de $\mathfrak{g}^{(r-1)} \wedge \mathfrak{g}^{(r-1)}$. Puis on considère le sous-espace vectoriel $V_{(r)}$ de $\mathfrak{g}'_{(r)}$ qui est engendré par les éléments de la forme

$$X_1 \wedge [X_2, X_3]_{\mathfrak{g}^{(r-1)}} + X_3 \wedge [X_1, X_2]_{\mathfrak{g}^{(r-1)}} + X_2 \wedge [X_3, X_1]_{\mathfrak{g}^{(r-1)}}$$

avec, pour $i = 1, 2, 3$, $X_i \in \mathfrak{g}_{(s_i)}$ de telle sorte que $s_1 + s_2 + s_3 = r$.

On choisit ensuite un sous-espace vectoriel $V'_{(r)}$ de $\mathfrak{g}'_{(r)}$, de complexifié σ-stable et qui contient $V_{(r)}$ (par exemple $V_{(r)}$ lui-même). On définit tout d'abord $\mathfrak{g}_{(r)} = \mathfrak{g}'_{(r)}/V'_{(r)}$ puis $\mathfrak{g}^{(r)} = \bigoplus_{1 \leq q \leq r} \mathfrak{g}_{(r)}$. On peut alors munir $\mathfrak{g}^{(r)}$ d'une unique structure d'algèbre de Lie telle que pour $X \in \mathfrak{g}_{(s)}$ et $Y \in \mathfrak{g}_{(t)}$,

$$[X,Y]_{\mathfrak{g}^{(r)}} = \begin{cases} [X,Y]_{\mathfrak{g}^{(r-1)}} & \text{si } s+t \neq r \\ X \wedge Y \mod V'_{(r)} & \text{si } s+t = r. \end{cases}$$

On voit que $(\mathfrak{g}^{(r)}, \sigma)$ vérifie les conditions attendues. A partir d'une paire symétrique $(\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}_{(1)}, \sigma)$ où $\mathfrak{g}^{(1)}$ est un espace vectoriel, considéré comme une algèbre de Lie commutative, on peut donc, par récurrence sur r et en utilisant le procédé précédent, construire un couple $(\mathfrak{g}^{(r)}, \sigma)$ de cran r arbitrairement grand.

11.2. Exemples

Nous donnons des exemples de paires symétriques $(\mathfrak{g}, \sigma)$ pour lesquels $\mathfrak{g}$ est graduée. On fournit la base de $\mathfrak{g}$ dont les éléments non indicés sont générateurs et de graduation 1 et dont les autres éléments sont indicés par leur graduation. Seuls les crochets non nuls sont explicités. L'involution σ est caractérisée par la donnée de $\mathfrak{k}$ et de $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$. On utilise la définition de $\overset{\circ}{\Theta}$ donnée dans la sous-section 10.1. Dans tous les exemples sauf pour le premier, on a $\overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing$ ou de façon équivalente $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0$, avec de plus $\bigcap_{g \in G} g(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}) = \{0\}$. D'après le théorème 10.2.8, la représentation ρ associée est alors fidèle.

Un exemple pour lequel $\Theta_0 = \{0\}$

Modification page 84 lignes -11 -3

Exemple 11.2.1. — *On a un couple* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *où* $\mathfrak{g}$ *est de cran* 2 *avec*

$$\mathfrak{g} = \{X, Y, U_2, Z, T\} \qquad \textit{et} \qquad [X,Y] = [Z,T] = U_2 \quad \textit{de telle sorte que}$$
$$\mathfrak{k} = \{X + iZ, Y + iT\} \qquad \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} = \{X + iY, T, U_2\}.$$

On a alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{e} = \{X, Y, T, U_2\}$, $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(Y + iT)$, $\mathfrak{e}_0 = \{0\}$, $\mathfrak{e}_1^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{k}_s = \mathbb{R}i\,(X + iZ) \oplus \mathbb{C}(Y + iT)$, $\mathfrak{h} = \{Z, Y, T\}$, $\mathfrak{j} = \{Y, T\}$.

Comme $\mathfrak{j} \neq \mathfrak{e}_0$, la représentation ρ est nulle d'après le (ii) du théorème 10.2.8.

On notera que $\mathfrak{e}$ est de cran 2, que $\mathfrak{z}(\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}_1 = \{T, U_2\}$, que $\mathfrak{e}_0 = \{0\}$ mais qu'on a $\mathfrak{e}_1 \cap (\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} + \overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}}) = \mathbb{R}T \neq \{0\}$.

Un exemple pour lequel $\mathfrak{l}$ *n'est pas commutatif et pour lequel on a* $\mathrm{d}^\circ P = 4$

Exemple 11.2.2. — *On a un couple* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *où* $\mathfrak{g}$ *est de cran* 4 *avec*

$$\mathfrak{g} = \{X, Y, U, Z_2, U_2, V_2, U_3, V_3, U_4\} \qquad \textit{avec}$$

$$\begin{array}{llll}
[X,Y]=Z_2 & [X,U]=U_2 & [X,U_2]=U_3 & [X,U_3]=U_4 \\
 & & [X,V_2]=V_3 & \\
 & [Y,U]=V_2 & [Y,U_2]=2V_3 & [Y,V_3]=U_4 \\
 & & [Z_2,U]=-V_3 & [Z_2,V_2]=-U_4
\end{array}$$

et
$$\mathfrak{k}=\{X+iU,Y,Z_2-iV_2\}$$
$$\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}=\{U,U_2,V_2,U_3,V_3,U_4\}\cdot$$

On a alors $\mathfrak{e}=\mathfrak{i}=\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{j}=\{0\}$, $\mathfrak{l}=\mathfrak{h}=\{X,Y,Z_2\}$, $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}=\{Y\}$ *et* $\mathfrak{g}=\mathfrak{d}=\mathfrak{l}\bigoplus\mathfrak{i}$. *Les sous-algèbres* $\mathfrak{l}$ *et* $\mathfrak{k}$ *sont de Heisenberg, de centre respectif* $\mathbb{R}Z_2$ *et* $\mathbb{C}(Z_2-iV_2)$. *On a* $P\big(\gamma(xX+yY+zZ_2)\big)=P\Big(\gamma\big(xX+(z-\frac{xy}{2})Z_2\big)\Big)$ *avec*

$$P\big(\gamma(xX+zZ_2)\big)=\big(\frac{x^4}{24}+\frac{1}{2}z^2\big)\,U_4+\frac{x^3}{6}\,U_3-xzV_3+\frac{x^2}{2}\,U_2-zV_2+xU.$$

Les éléments ℓ *de* $\mathfrak{h}^{\perp}$ *tels que* $\ell(U_4)>0$ *sont dans* Θ_0. *On a*

$$\mathfrak{n}=\{0\}\quad et\quad \bigcap_{g\in G} g\,(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g})=\{0\}\cdot$$

Démonstration. — Les résultats sont en général de simples calculs. Nous en vérifions quelques uns.

En utilisant la formule de Campbell-Hausdorff pour les groupes de Heisenberg et la formule (7.2.2), on a du fait que Y est un élément de $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
P\big(\gamma(xX+yY+zZ_2)\big)&=P\Big(\gamma\big(\log\exp(xX+yY+zZ)\big)\Big)\\
&=P\Big(\log\exp\gamma\big(xX+(z-\frac{xy}{2})\,Z_2\big)\exp\gamma(yY)\Big)\\
&=P\Big(\gamma\big(xX+(z-\frac{xy}{2})Z_2\big)\Big)
\end{aligned}$$

Pour vérifier que l'élément ℓ de $\mathfrak{h}^{\perp}$ est dans Θ_0, il suffit donc de constater que $x,z\to P\big(\gamma(xX+zZ_2)\big)$ est minoré sur $\mathbb{R}^2$. Supposons qu'on ait $\ell(U_4)>0$, alors

$$P\big(\gamma(xX+zZ_2)\big)=\alpha x^4+\mathrm{p}_1(x)+\beta z^2+axz+bz$$

avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$, $a,b\in\mathbb{R}$ et $\mathrm{p}_1\in\mathbb{R}_3[x]$. Posant $z_1=z+\dfrac{a}{2\beta}\,x$, il vient

$$P\big(\gamma(xX+zZ_2)\big)=\alpha x^4+\mathrm{p}(x)+\beta z_1^2+bz_1$$

avec $\mathrm{p}\in\mathbb{R}_3[x]$. Sous cette forme, il est clair que P_ℓ est minoré.

On a $\mathfrak{n}\subseteq\displaystyle\bigcap_{\ell\in\mathfrak{h}^{\perp}\ \ell(U_4)>0}\operatorname{Ker}\ell\cap\mathfrak{e}=\{0\}$ et

$$\bigcap_{g\in G} g\,(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g})=\bigcap_{g\in G}\mathbb{R}\,gY\subseteq\bigcap_{x\in\mathbb{R}}\exp xX\cdot\mathbb{R}Y=\{0\}\cdot\qquad\square$$

Un exemple pour lequel $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$ ne sont pas des idéaux de $\mathfrak{g}$

Exemple 11.2.3. — *On a un couple $(\mathfrak{g}, \sigma)$ où $\mathfrak{g}$ est de cran 3 avec*

$$\mathfrak{g} = \{T, Y, X, U, U_2, T_2, Y_2, T_3\} \qquad et$$

$$\begin{array}{ll} [X, U] = U_2 & [T, Y_2] = -[X, T_2] = T_3 \\ [Y, X] = -[T, U] = Y_2 & \\ [T, Y] = T_2 & \end{array}$$

ainsi que
$$\mathfrak{k} = \{X + iU, Y, Y_2\}$$
$$\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} = \{T + iY, U, U_2, T_2, T_3\}\cdot$$

On a alors $\mathfrak{d} = \{Y, U, X, U_2, Y_2\}$, $\mathfrak{e} = \mathfrak{i} = \{U, U_2\}$, $\mathfrak{j} = \{0\}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} = \{X, Y, Y_2\}$, $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g} = \{Y, Y_2\}\cdot$

On a $P\big(\gamma(xX + yY + zY_2)\big) = \dfrac{1}{2}\, x^2 U_2 + xU.$

Les éléments ℓ de $\mathfrak{h}^\perp$ tels que $\ell(U_2) > 0$ sont dans Θ_0. On a $\mathfrak{n} = \{0\}$ et $\bigcap_{g \in G} g\,(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}) = \{0\}\cdot$

Un exemple pour lequel $\overline{\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}} \not\subseteq \mathfrak{e}_1^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{j}$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}$

Exemple 11.2.4. — *On a un couple $(\mathfrak{g}, \sigma)$ où $\mathfrak{g}$ est de cran 4 avec*

$$\mathfrak{g} = \{T, X, Y, X_2, Y_2, U_2, W_3, U_4\} \qquad avec$$

$$\begin{array}{llll} [X, Y] = U_2 & [X_2, Y] = [X, Y_2] = W_3 & & [X_2, Y_2] = U_4 \\ [T, X] = X_2 & [T, Y] = Y_2 & [T, U_2] = 2W_3 & [T, W_3] = U_4 \end{array}$$

et
$$\mathfrak{k} = \{X + iY, X_2 + 2iY_2, W_3\}$$
$$\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} = \{T, X + 2iY, X_2 + iY_2, U_2, U_4\}\cdot$$

On a alors

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{d} = \mathfrak{e} = \{X, Y, X_2, Y_2, U_2, W_3, U_4\}, & \mathfrak{i} = \{U_2, U_4\} + \mathfrak{j}, \\ \mathfrak{j} = \{W_3\}, & \mathfrak{h} = \{X, Y, X_2, Y_2, W_3\}, \\ \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}} = \{X + iY, X_2 + 2iY_2\} + \mathfrak{j}^{\mathbb{C}}. & \end{array}$$

On a $\mathfrak{g} = \mathbb{R}T \bigoplus \mathfrak{e}$ et $\mathfrak{e}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Pour $U = z(X + iY) + w(X_2 + 2iY_2) \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ avec $z, w \in \mathbb{C}$, on a

$$i[U, \overline{U}] = 2\, z\bar{z}\, U_2 + 3\,(z\bar{w} + \bar{z}w)\, W_3 + 4\, w\bar{w}\, U_4.$$

Soit $\ell \in \mathfrak{h}^{\perp}$, *on a* $\ell \in \Theta_0$ *dès que* $\ell(U_2) \geq 0$ *et* $\ell(U_4) \geq 0$. *On a alors*

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{j} = \{W_3\} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{g \in G} g\,(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}) = \{0\}\cdot$$

Un exemple pour lequel $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{i}$ *et* $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}$

Exemple 11.2.5. — *On a un couple* $(\mathfrak{g}', \sigma')$ *où* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ *est l'algèbre de Lie de l'exemple précédent et* σ' *est associée à*

$$\mathfrak{k}' = \{T + iW_3, X + iY, X_2 + iY_2\}$$

et

$$\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}_1 = \{X - iY, X_2 - iY_2, U_2, W_3, U_4\}\cdot$$

On a alors

$$\mathfrak{d}' = \mathfrak{g}', \quad \mathfrak{e}' = \{X, Y, X_2, Y_2, U_2, W_3, U_4\}, \quad \mathfrak{h}' = \{T, X, Y, X_2, Y_2\},$$
$$\mathfrak{j}' = \{0\}, \quad \mathfrak{i}' = \{U_2, W_3, U_4\}, \quad \mathfrak{e}'^{\mathbb{C}}_0 = \overline{\mathfrak{e}'^{\mathbb{C}}_1} = \{X + iY, X_2 + iY_2\},$$
$$\mathfrak{l}' = \{T\}, \quad \mathfrak{k}' \cap \mathfrak{g}' = \{0\}, \quad \mathfrak{g}' = \mathfrak{l}' \bigoplus \mathfrak{e}'.$$

de telle sorte que $(\mathfrak{d}', \sigma')$ *est une paire symétrique standard.*

Pour $U = z(X + iY) + w(X_2 + iY_2) \in \mathfrak{e}'^{\mathbb{C}}_0$ *avec* $z, w \in \mathbb{C}$, *on a*

$$\frac{i}{2}\,[U, \bar{U}] = z\bar{z}\,U_2 + (z\bar{w} + \bar{z}w)\,W_3 + w\bar{w}\,U_4\,.$$

De plus, $P\big(t\,\gamma(T)\big) = \dfrac{t^2}{2}\,U_4 + t\,W_3$ *et* $P\big(it\,\gamma(T)\big) = \dfrac{t^2}{2}\,U_4 + t\,T$. *Soit* $\ell \in \mathfrak{h}'^{\perp}$, *on a* $\ell \in \Theta'_0$ *dès que* $\ell(U_4) > 0$ *et* $\ell(U_2)\,\ell(U_4) - \ell(W_3)^2 \geq 0$. *On a* $\mathfrak{n} = \{0\}\cdot$

11.3. Le cas des involutions complexes qui commutent à leur conjuguée

Associons à σ l'involution $\bar{\sigma}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, donnée par $\bar{\sigma}(X) = \overline{\sigma(\bar{X})}$. Nous nous intéressons dans cette sous-section aux paires symétriques $(\mathfrak{g}, \sigma)$ telles que $\sigma\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\sigma$. Dans ce cas, il existe une involution τ de $\mathfrak{g}$ telle que $\tau^{\mathbb{C}} = \sigma\bar{\sigma}$. Étant donnée une partie $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, on convient dans cette sous-section de poser pour $q \in \mathbb{Z}_2$,

$$\mathfrak{m}^q = \{X \in \mathfrak{m} \mid \tau^{\mathbb{C}}(X) = (-1)^q\,X\}\cdot$$

Avec les conventions de la sous-section 1.2, on vérifie qu'on a

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = (\mathfrak{g}^0_0)^{\mathbb{C}} \bigoplus (\mathfrak{g}^0_1)^{\mathbb{C}} \bigoplus (\mathfrak{g}^1)^{\mathbb{C}}_0 \bigoplus (\mathfrak{g}^1)^{\mathbb{C}}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \bigoplus \mathfrak{g}_1 \bigoplus \mathfrak{g}^1$$

avec $\mathfrak{g}^0_0 = \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}^0_1 = \mathfrak{g}_1$, $(\mathfrak{g}^1)^{\mathbb{C}}_1 = \overline{(\mathfrak{g}^1)^{\mathbb{C}}_0}$ et $(\mathfrak{g}^1)^{\mathbb{C}} = (\mathfrak{g}^1)^{\mathbb{C}}_0 \oplus (\mathfrak{g}^1)^{\mathbb{C}}_1$.

On voit que $(\mathfrak{k} + \bar{\mathfrak{k}}) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^1$. La sous-algèbre $\mathfrak{e}'$ engendrée par $\mathfrak{g}^1$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ qui est de complexifié σ-$\bar{\sigma}$-stable, puisqu'on a $[\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^1] \subseteq \mathfrak{g}^1$. On a $\mathfrak{e}' \subseteq \mathfrak{e}$ puisque $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}} \supseteq (\mathfrak{g}^1)^{\mathbb{C}}_1 = \overline{(\mathfrak{g}^1)^{\mathbb{C}}_0}$ et $\mathfrak{e}' \supseteq \mathfrak{e}$ puisque $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{e}'$. Finalement $\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ qui coïncide avec la sous-algèbre engendrée par $(\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}_0 + \overline{\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}_0}) \cap \mathfrak{e}$.

De plus, $\mathfrak{k}_r = \mathfrak{g}_0 \bigoplus (\mathfrak{g}^1)_0^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \bigoplus \mathfrak{g}^1$. On pose

$$\mathfrak{h}_{\mathrm{q}}^{\perp} = \{\ell \in \mathfrak{h}^{\perp} \mid i\ell([U,\bar{U}]) \geq 0, \quad \forall U \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}\}$$
$$\mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^{\perp} = \{\ell \in \mathfrak{h}^{\perp} \mid i\ell([U,\bar{U}]) \geq 0, \quad \forall U \in \mathfrak{k}\}$$
$$\mathfrak{h}^{\perp,\mathrm{p}} = \{\ell \in \mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^{\perp} \mid \forall U \in \mathfrak{k}, \quad i\ell([U,\bar{U}]) = 0 \Rightarrow U \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0\}\cdot$$

Dans ce contexte, on a la

Proposition 11.3.1. — *On suppose $\sigma\bar{\sigma} = \bar{\sigma}\sigma$, alors*

1) $\Theta_0 = \mathfrak{h}_{\mathrm{q}}^{\perp} = \mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^{\perp}$.

2) *On a l'équivalence* $\quad \overset{\circ}{\Theta} \neq \varnothing \iff \mathfrak{h}^{\perp,\mathrm{p}} \neq \varnothing$.

Démonstration. — 1) Nous montrons tout d'abord qu'on a $\mathfrak{h}_{\mathrm{q}}^{\perp} = \mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^{\perp}$. Il s'agit de vérifier que pour tout ℓ de $\mathfrak{h}_{\mathrm{q}}^{\perp}$ et pour tout U de $\mathfrak{k}$, on a $i\ell([U,\bar{U}]) \geq 0$. Or, $U = U_0 + U_1$ avec $U_0 \in \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ et $U_1 \in (\mathfrak{g}^1)_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$. Du fait que $[U_0, \bar{U}_0 + \bar{U}_1] \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, on déduit que $i\,\ell([U_0 + U_1, \bar{U}_0 + \bar{U}_1]) = i\,\ell([U_1, \bar{U}_1]) \geq 0$. D'où le résultat.

Rappelons maintenant qu'on a $\Theta_0 \subseteq \mathfrak{j}^{\perp}$ d'après le 1) de la proposition 7.1.1. Pour la même raison, on a également $\mathfrak{h}_{\mathrm{q}}^{\perp} \subseteq \mathfrak{j}^{\perp}$. Il suffit pour le voir de remplacer $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{e}$.

Pour prouver l'égalité $\Theta_0 = \mathfrak{h}_{\mathrm{q}}^{\perp}$, on peut donc sans perte de généralité supposer $\mathfrak{j}$ réduit à zéro et $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}$. D'après la proposition 7.3.1, on a alors l'égalité

$$\Theta_0 = \{\ell \in \mathfrak{h}^{\perp} \mid P_\ell(\mathfrak{k}_s) \text{ minoré et } i\,\ell([U,\bar{U}]) \geq 0, \quad \forall U \in \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}\}\cdot$$

Comme $\mathfrak{k}_s = \mathfrak{g}_0$ avec $P_\ell(\mathfrak{g}_0) = \{0\}$, on a bien $\Theta_0 = \mathfrak{h}_{\mathrm{q}}^{\perp}$ et le 1).

2) Nous commençons par prouver l'implication $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0 \Leftarrow \mathfrak{h}^{\perp,\mathrm{p}} \neq \varnothing$.

Soit $\ell \in \mathfrak{h}^{\perp,\mathrm{p}}$. Nous vérifions tout d'abord qu'on a $\mathfrak{e}(\ell) = \mathfrak{e}_0 \oplus \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}^0$. Le fait que $\ell \in \mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^{\perp}$ entraîne qu'on a $\ell \in \mathfrak{j}^{\perp}$. Rappelons (2) de la proposition 5.1.1) que $\mathfrak{e}(\ell)^{\mathbb{C}}$ est σ-$\bar{\sigma}$-stable. On a

$$\ell([\mathfrak{e}^0, \mathfrak{e}^0]) \subseteq \ell([[\mathfrak{e},\mathfrak{e}],[\mathfrak{e},\mathfrak{e}]]) \subseteq \ell(\mathfrak{j}) = \{0\}\cdot$$

Par ailleurs $\quad \ell([\mathfrak{e}^0, \mathfrak{e}^1]) \subseteq \ell(\mathfrak{e}^1) = \{0\}\cdot$

A priori, on a donc $\mathfrak{e}^0 \subseteq \mathfrak{e}(\ell)$ avec $\mathfrak{e}(\ell) = \mathfrak{e}^0 \oplus \mathfrak{e}(\ell)^1$.

Or, $\mathfrak{e}(\ell)^{1,\mathbb{C}} = \mathfrak{e}(\ell)_0^{1,\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathfrak{e}(\ell)_0^{1,\mathbb{C}}}$. Le fait qu'on ait $\ell \in \mathfrak{h}^{\perp,\mathrm{p}}$ entraîne $\mathfrak{e}(\ell)_0^{1,\mathbb{C}} = \{0\}\cdot$ On a donc $\mathfrak{e}(\ell)^1 = \{0\}$ et $\mathfrak{e}(\ell) = \mathfrak{e}^0$ comme prévu.

Comme $\mathfrak{e}_0 \subseteq \operatorname{Ker}\ell$ pour tout ℓ de $\mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^{\perp} = \Theta_0$. Il vient alors

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0 \bigoplus \bigcap_{\ell \in \mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^{\perp}} \mathfrak{e}_1 \cap \operatorname{Ker}\ell.$$

Nous allons montrer que dans nos hypothèses $\bigcap_{\ell \in \mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^{\perp}} \mathfrak{e}_1 \cap \operatorname{Ker}\ell = \{0\}\cdot$ ce qui entraînera $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0$ et l'implication attendue.

Pour cela, il suffit de vérifier que le cône convexe $\mathfrak{h}^{\perp,\mathrm{p}}$ est ouvert dans $\mathfrak{e}_1^* \simeq \mathfrak{h}^\perp$. Nous considérons donc la sphère unité Su de $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$, relativement à une norme quelconque et φ l'application (continue) de $\mathfrak{h}^\perp \times \mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $\varphi(\ell, U) = i\ell([U, \bar{U}])$.

Dire que l'élément ℓ de $\mathfrak{h}^\perp$ est dans $\mathfrak{h}^{\perp,\mathrm{p}}$ équivaut à dire qu'on a $\varphi(\ell, S\mathrm{u}) \subset \mathbb{R}_+^*$. Étant donné un tel ℓ, nous cherchons à construire un ouvert O de $\mathfrak{h}^\perp$ le contenant et tel que $O \subseteq \mathfrak{h}^{\perp,\mathrm{p}}$ ou, de façon équivalente tel que $\varphi(O, S\mathrm{u}) \subset \mathbb{R}_+^*$. A tout élément X de Su, on peut associer un ouvert O_X de $\mathfrak{h}^\perp$ contenant ℓ ainsi qu'un ouvert O'_X de Su contenant X de telle sorte que $\varphi(O_X, O'_X) \subset \mathbb{R}_+^*$. On peut extraire du recouvrement $\bigcup_{X \in S\mathrm{u}} O'_X$ de Su un sous-recouvrement fini $\bigcup_{i \in I} O'_{X_i}$. On voit que $O = \bigcap_{i \in I} O_{X_i}$ vérifie les conditions annoncées. D'où ce résultat.

Nous montrons maintenant l'implication réciproque $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0 \Rightarrow \mathfrak{h}^{\perp,\mathrm{p}} \neq \varnothing$.

Pour $\ell \in \mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^\perp$, on a du fait de la positivité de la forme hermitienne $U \to i\ell([U, \bar{U}])$ sur $\mathfrak{e}_0^{\mathbb{C}}$, l'équivalence

$$U \in \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} \quad \Longleftrightarrow \quad \ell([U, \bar{U}]) = \{0\}\cdot$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $\mathfrak{n} = \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{j} = \{0\}\cdot$ On a alors

$$\bigcap_{\ell \in \Theta_0 = \mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^\perp} \mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} = \{0\}\cdot$$

Pour des raisons de dimension, il existe donc une famille $\{\ell_1 \ldots \ell_m\}$ d'éléments de $\mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^\perp$ telle que $\bigcap_{1 \le i \le m} \mathfrak{e}(\ell_i)_0^{\mathbb{C}} = \{0\}\cdot$ Choisissons $\{\lambda_1 \ldots \lambda_m\} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ et posons $\ell = \sum_{1 \le i \le m} \lambda_i \ell_i$. On a $\ell \in \mathfrak{h}_{\mathrm{p}}^\perp$ et $\mathfrak{e}(\ell)_0^{\mathbb{C}} = \bigcap_{1 \le i \le m} \mathfrak{e}(\ell_i)_0^{\mathbb{C}} = \{0\}\cdot$ Par conséquent, $\ell \in \mathfrak{h}^{\perp,\mathrm{p}} \neq \varnothing$. Comme prévu.

□

APPENDICE

A1. Propriétés asymptotiques des fonctions algébriques réelles de plusieurs variables

Les notions utilisées maintenant sont introduites par Hörmander dans [**16**] (Appendix A). On pourra aussi consulter [**12**, Gorin]. On utilise les notations de la sous-section 2.1

Rappelons qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel réel est dit semi-algébrique s'il est une union finie d'intersections finies d'ensembles définis par une inégalité ou une équation polynomiale.

On a le résultat suivant ([**16**], théorème A2.8) :

Proposition A1.1. — *Soient* $\mathfrak{m}$ *un espace vectoriel réel de dimension finie et* $\mathcal{E}$ *un sous-ensemble semi-algébrique de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathfrak{m}$. *Soit* $r \to \varphi_0(r)$ *la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *donnée par*

a) $\varphi_0(r) = +\infty$, *s'il n'existe pas d'éléments* (y,z) *dans* $\mathbb{R} \times \mathfrak{m}$ *tels qu'on ait* $(r,y,z) \in \mathcal{E}$.

b) $\varphi_0(r) = \inf\{y \mid \exists\, z,\ (r,y,z) \in \mathcal{E})\}$ *sinon.*

On suppose que pour r *assez grand, il existe un élément* $z_0(r)$ *de* $\mathfrak{m}$ *de telle sorte qu'on ait* $(r, \varphi_0(r), z_0(r)) \in \mathcal{E}$.

Alors, il existe un entier q *de* $\mathbb{N}^*$, *une fonction* $r \to \varphi(r)$ *de* $\mathbb{R}\{\{t^{1/q}\}\}$ *égale à* $\varphi_0(r)$ *pour* r *assez grand et une application* $r \to z(r)$ *de* $\mathfrak{m}\{\{t^{1/q}\}\}$ *de telle sorte qu'on ait* $(r, \varphi(r), z(r)) \in \mathcal{E}$.

Corollaire A1.2. — *Soit* $(\mathfrak{m}, |\ |)$ *un espace vectoriel euclidien réel, de dimension finie et* R *une fonction polynomiale réelle sur* $\mathfrak{m}$. *Pour* $r > 0$, *on pose* $\varphi(r) = \inf\limits_{|x|=r} R(x)$. *Alors,*

1) *Il existe un* q *dans* $\mathbb{N}^*$ *tel que* $\varphi \in \mathbb{R}\{\{r^{1/q}\}\}$.

2) *Si* φ *n'est pas identiquement nulle, il existe des éléments* M *de* $\mathbb{R}^*$ *et* p *de* $\mathbb{Z}$ *de telle sorte qu'on ait*

$$\varphi(r) = M\left(r^{p/q} + o(1)\right) \quad \textit{lorsque } r \to \infty. \tag{A1.1}$$

Démonstration. — Le sous-ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{(r, y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathfrak{m} \mid r = |x|^2,\ y = R(x)\right\}$$

est semi-algébrique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathfrak{m}$ et on peut appliquer la proposition précédente dont les conditions sont vérifiées. Le premier terme du développement de Puiseux de φ est $M\, r^{p/q}$. □

Soit $\mathfrak{m}$ un espace vectoriel réel de dimension finie et R une fonction polynomiale réelle sur $\mathfrak{m}$. Le fait que R soit minorée sur toutes les droites affines ou même sur toutes les courbes polynomiales de $\mathfrak{m}$, n'est pas suffisant pour entraîner qu'elle est minorée sur $\mathfrak{m}$. On en obtient un contre-exemple lorsque $\mathfrak{m} = \mathbb{R}^2$, en considérant la fonction $R(x, y) = x^2 y^4 + x y^3$ qui possède cette propriété et pour laquelle $\lim_{t\to\infty} R(-t^{-2}, t) = -\infty$. Cependant, on a le

Corollaire A1.3. — *Pour qu'une fonction polynomiale réelle* R *sur* $\mathfrak{m}$ *soit minorée, (il faut et) il suffit que pour tout élément* f *de* $\mathfrak{m}\{t\}$, *la fonction* $R \circ f$ *de* $\mathbb{R}\{t\}$ *soit minorée sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Reprenons les résultats et les notations de la proposition et du corollaire précédents. On a $\varphi(r) = R \circ z\,(r)$. Notons z_1 l'élément de $\mathfrak{m}\{\{t\}\}$ donné par $z_1(t) = z(t^q)$. Pour $|t|$ assez grand, on peut écrire $z_1(t)$ sous la forme $\sum_{k \leq p} A_k\, t^k$. Il nous suffit de vérifier que les hypothèses entraînent que $R \circ z_1$ est minoré sur $\mathbb{R}$.

Le résultat est évident lorsque $\deg R \circ z_1 \leq 0$. Nous supposons donc désormais $\deg R \circ z_1 > 0$. Notons δ le degré total du polynôme R. On associe à z_1 l'élément $f_1 = \sum_{-p(\delta-1) \leq k \leq p} A_k t^k$ de $\mathfrak{m}\{t\}$. On voit que $R \circ f_1$ et $R \circ z_1$ ont même terme de plus haut degré. Les hypothèses entraînant que $(R \circ f_1)(\mathbb{R})$ est minoré, ce résultat implique qu'il en est de même de $(R \circ z_1)(\mathbb{R})$ comme prévu. □

A2. Exponentielles de fonctions polynomiales et distributions tempérées

Proposition A2.1. — *Soit* P *un polynôme réel à* k *indéterminées* $(x_1 \ldots x_k) = x$. *On se donne une norme euclidienne* $|\ |$ *sur* $\mathbb{R}^k$. *Les conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(i) Il existe un m *de* $\mathbb{N}$ *tel que l'intégrale* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} \frac{e^{-P(x)}}{(1+|x|^2)^m}\, dx$ *converge.*

(ii) Il existe un ℓ *de* $\mathbb{N}$ *tel que la fonction* $x \to \dfrac{e^{-P(x)}}{(1+|x|^2)^\ell}$ *est bornée sur* $\mathbb{R}^k$.

(iii) La fonction $x \to e^{-P(x)}$ *est bornée sur* $\mathbb{R}^k$.
(iv) Le polynôme $x \to P(x)$ *est minoré sur* $\mathbb{R}^k$.
(v) La fonction $x \to e^{-P(x)}$ *est un élément de* $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^k)$.

Démonstration. — (ii) $\Rightarrow$ (i) est évident.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Posons $d^\circ P = n$ (d° désigne ici le degré total). Lorsque $n = 0$, (i) et (ii) sont vérifiés. On peut donc supposer $n > 0$. Pour ℓ dans $\mathbb{N}$, on pose

$$F_\ell(x) = \frac{e^{-P(x)}}{(1+|x|^2)^\ell}.$$

On a alors, pour $0 \le s \le k$, des polynômes q_s^ℓ caractérisés par

$$q_0^\ell = 1$$
$$\frac{\partial^s F_\ell}{\partial x_s\, \partial x_{s-1} \dots \partial x_1}(x) = q_s^\ell(x)\ \frac{F_\ell(x)}{(1+|x|^2)^s}.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^s F_\ell}{\partial x_s \partial x_{s-1} \dots \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{q_{s-1}^\ell(x)\ e^{-P(x)}}{(1+|x|^2)^{\ell+s-1}}\right)\\ &= \left[(1+|x|^2)\left(\frac{\partial q_{s-1}^\ell}{\partial x_s} - q_{s-1}^\ell \frac{\partial P}{\partial x_s}\right)(x) - 2(\ell+s-1)\, x_s\, q_{s-1}^\ell(x)\right] \frac{e^{-P(x)}}{(1+|x|^2)^{\ell+s}}\end{aligned}$$

On a donc, pour $1 \le s \le k$,

$$q_s^\ell(x) = (1+|x|^2)\left(\frac{\partial q_{s-1}^\ell}{\partial x_s} - q_{s-1}^\ell \frac{\partial P}{\partial x_s}\right)(x) - 2(\ell+s-1)x_s\, q_{s-1}^\ell(x).$$

Cette formule permet de montrer que q_s^ℓ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^k$ et que $d^\circ q_s^\ell$ est majoré par $s(n+1)$. En effet, ce résultat est évident pour $s = 0$ et si cette majoration est vérifiée pour $s - 1 \ge 0$, on a par récurrence sur s

$$\begin{aligned}d^\circ\, q_s^\ell &\le \operatorname{Sup}\left(d^\circ\, |x|^2 \frac{\partial q_{s-1}^\ell}{\partial x_s},\ d^\circ\, |x|^2 q_{s-1}^\ell \frac{\partial P}{\partial x_s},\ d^\circ\, x_s\, q_{s-1}^\ell\right)\\ &\le \operatorname{Sup}\Big((s-1)(n+1)+1,\ s(n+1),\ (s-1)(n+1)+1\Big) = s(n+1).\end{aligned}$$

L'entier m étant choisi de telle sorte que l'intégrale du (i) converge, on a pour $\ell + k \ge m$,

$$\frac{\partial^k F_\ell}{\partial x_k \dots \partial x_1}(x) = \frac{q_k^\ell(x)}{(1+|x|^2)^{\ell+k-m}}\, F_m(x),$$

avec $d^\circ q_k^\ell \le k(n+1)$, ce qui donne une majoration indépendante de ℓ. On peut donc choisir ℓ suffisamment grand pour que la fonction $\left|\dfrac{q_\ell^k(x)}{(1+|x|^2)^{\ell+k-m}}\right|$ soit majorée sur $\mathbb{R}^k$ par $C \geq 0$. On a alors

$$\left|\frac{\partial^k F_\ell}{\partial x_k \ldots \partial x_1}\right| \leq C\, F_m(x).$$

Ceci entraîne que $\dfrac{\partial^k F_\ell}{\partial x_k \ldots \partial x_1}$ est intégrable et qu'on a

$$F_\ell(x_1 \ldots x_k) = \int_{t_k=-\infty}^{x_k} \cdots \int_{t_1=-\infty}^{x_1} \frac{\partial F_\ell}{\partial t_k \ldots \partial t_1}\, dt_k \ldots dt_1.$$

On en déduit qu'on a $||F_\ell||_\infty \leq C\,||F_m||_1 < \infty$ et le (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iv) Comme dans le corollaire A1.2 que l'on utilise, on pose pour $r \geq 0$, $\varphi(r) = \operatorname*{Inf}_{|x|=r} P(x)$. Si φ n'est pas identiquement nulle, on a $\varphi(r) = M\left(r^{p/q} + o(1)\right)$ lorsque $r \to \infty$. On a une constante C telle que

$$- \;\; P(x) < \ell \ln(1+|x|^2) + C, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^k,$$
$$- \;\; \varphi(r) < \ell \ln(1+r^2) + C.$$

D'où $(-M)\, r^{p/q}\big(1+o(1)\big) \leq \ell \ln(1+r^2) + C$ pour r assez grand. Cette inégalité n'est possible que si $M > 0$ ou $p \leq 0$. Cela entraîne que P est toujours minoré.

(iv) $\iff$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) sont évidents.

(v) $\iff$ (i) Cela est une conséquence immédiate du résultat classique suivant (voir **[27]**, théorème VII du chapitre VII) :

Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^k$, pour qu'elle soit dans $\mathcal{S}^*$, il faut et il suffit qu'il existe un entier m tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} \frac{d\mu(x)}{(1+|x|^2)^m} < \infty$. □

Corollaire A2.2. — *L'exponentielle d'une fonction polynomiale réelle ou complexe sur $\mathbb{R}^k$ est une distribution tempérée si et seulement si elle est bornée.*

Démonstration. — La fonction s'écrit sous la forme $x \to e^{iQ(x)}\, e^{-P(x)}$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[x]$. L'application $T \to e^{iQ}\, T$ définit un isomorphisme de $\mathcal{S}^*$. On est alors ramené à la proposition A2.1. □

A3. Résultats concernant la formule de Campbell-Hausdorff

Dans les trois propositions qui suivent, si $E(A,T)$ (resp. $E(A,B,T)$) est une série formelle de Lie à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'indéterminées (A,T) (resp. d'indéterminées (A,B,T)) alors pour $n \geq 0$ (resp. $n, m \geq 0$), $E_n(A,T)$ désigne la série formelle de Lie formée par les monômes de degré n en A de $E(A,T)$ (resp. $E_{n,m}(A,B,T)$ désigne la série formelle de Lie formée par les monômes de degré n en A et m en B de $E(A,B,T)$). On utilise les conventions de la sous-section 2.1.

Proposition A3.1. — *On considère les séries formelles de Lie obtenues par la formule de Campbell-Hausdorff et données par*

1) $E(A,T) = \log\exp(T+A)\exp -T$ *alors*

$$E_0(A,T) = 0 \quad et \quad E_1(A,T) = \operatorname{Ad}\varpi T \cdot A$$

2) $F(A,T) = \log\exp A \exp T$ *alors*

$$(F_0 + F_1)(A,T) = T + \operatorname{Ad}\varpi^{-1}T \cdot A$$

3) $G(A,T) = \log\exp T \exp A$ *alors*

$$(G_0 + G_1)(A,T) = T + \operatorname{Ad}\varpi^{-1}(-T) \cdot A$$

4) $H(A,T) = \dfrac{1}{2}\log\exp(T+A)\exp(-T+A)$ *alors pour* $p \geq 0$

$$H_{2p}(A,T) = 0 \quad et \quad H_1(A,T) = \operatorname{Ad}\varpi T \cdot A$$

5) $I(A,T) = \dfrac{1}{2}\log\exp(T-A)\exp(T+A)$ *alors*

$$(I_0 + I_1)(A,T) = T + \operatorname{Ad}\tanh\frac{T}{2} \cdot A$$

Démonstration. — Le 1) est démontré dans **[6]**, ch. II, § 6, n° 5.

Dans la suite de la démonstration, la notation $F \simeq F'$ utilisée pour deux séries formelles de Lie signifie qu'elles sont égales modulo l'idéal formé par les séries formelles de Lie dont les composantes contiennent au moins deux fois A.

2) Utilisant le 1), on a $\log\exp(T + \operatorname{Ad}\varpi^{-1}T \cdot A)\exp -T \simeq A$. D'où le résultat.

3) Découle du 2), en remarquant que $G(A,T) = -F(-A,-T)$.

4) Les H_{2p} sont nuls du fait que $H(-A,T) = -H(A,T)$. L'expression de H_1 découle du 1).

5) A priori, il existe une série formelle de Lie α dont toutes les composantes contiennent au moins une fois A et telle que

$$\log\exp(T-A)\exp(T+A) = 2\,(T+\alpha).$$

On a donc $\log\exp(-T+A)\ \exp(T+\alpha)\ \exp(T+\alpha)\ \exp(-T-A) = 0$ et en utilisant le 1)

$$\operatorname{Ad}\varpi(-T)\cdot(A+\alpha) + \operatorname{Ad}\varpi T \cdot (-A+\alpha) \simeq 0$$

$$\operatorname{Ad}\left(\frac{e^{-T}-1}{-T}\right)\cdot(A+\alpha) + \operatorname{Ad}\left(\frac{e^{T}-1}{T}\right)\cdot(-A+\alpha) \simeq 0.$$

L'application $\operatorname{ad} T$ est injective dans l'algèbre de Lie des séries formelles de Lie, on a donc

$$-\operatorname{Ad}(e^{-T}-1)\cdot(A+\alpha)+\operatorname{Ad}(e^{T}-1)\cdot(-A+\alpha)\simeq 0$$
$$\operatorname{Ad}(e^{T}-e^{-T})\cdot\alpha-\operatorname{Ad}(e^{T}-2+e^{-T})\cdot A\simeq 0$$
$$\operatorname{Ad}(e^{T/2}+e^{-T/2})(e^{T/2}-e^{-T/2})\cdot\alpha-\operatorname{Ad}\big(e^{T/2}-e^{-T/2}\big)^2\cdot A\simeq 0$$

et
$$\alpha\simeq\operatorname{Ad}\left(\frac{e^{T/2}-e^{-T/2}}{e^{T/2}+e^{-T/2}}\right)\cdot A\simeq\operatorname{Ad}\tanh\frac{T}{2}\cdot A.$$

D'où le résultat. □

Proposition A3.2. — *On considère les séries formelles de Lie obtenues par la formule de Campbell-Hausdorff et données par*

1) $J(A,B,T)=\dfrac{1}{2}\log\exp(T+A)\exp 2B\exp(-T+A)$ *alors la condition* $p+q=2n$ *pour* $p,q\in\mathbb{N}$ *entraîne* $J_{p,q}(A,B,T)=0$ *et on a*

$$\sum_{\substack{p,q\geq 0\\ p+q\leq 2}} J_{p,q}(A,B,T)=\operatorname{Ad}\varpi T\cdot A+\operatorname{Ad}\exp T\cdot B$$

2) $K(A,B,T)=\dfrac{1}{2}\log\exp(T-A)\exp 2B\exp(T+A)$ *alors*

$$(K_{0,0}+K_{1,0}+K_{0,1})(A,B,T)=T+\operatorname{Ad}\tanh\frac{T}{2}\cdot A+\operatorname{Ad}\frac{T}{\sinh T}\cdot B$$

Démonstration. — Dans cette démonstration, la notation $F\simeq F'$ utilisée pour deux séries formelles de Lie signifie qu'elles sont égales modulo l'idéal formé par les séries formelles de Lie dont les composantes contiennent au moins deux fois une des variables A ou B.

1) On a $J(-A,-B,T)=-J(A,B,T)$. D'où $J_{p,q}(A,B,T)=0$ pour $p+q$ pair.

En utilisant le 4) de la proposition précédente, il vient

$$\begin{aligned}J(A,B,T)&=\frac{1}{2}\log\big(\exp(T+A)\exp(-T+A)\exp(T-A)\exp 2B\exp(-T+A)\big)\\&\simeq\operatorname{Ad}\varpi T\cdot A+\operatorname{Ad}\exp T\cdot B\end{aligned}$$

D'où le 1).

2) On a en utilisant le 5) puis le 3) de la proposition précédente

$$\begin{aligned}2\,K(A,B,T)&=\log\big(\exp(T-A)\exp(T+A)\exp-(T+A)\exp 2B\exp(T+A)\big)\\&\simeq\log\big(\exp 2(T+\operatorname{Ad}\tanh\frac{T}{2}\cdot A)\ \exp 2(\operatorname{Ad}\exp-T\cdot B)\big)\\K(A,B,T)&\simeq T+\operatorname{Ad}\tanh\frac{T}{2}\cdot A+\operatorname{Ad}\varpi^{-1}(-2T)\cdot\operatorname{Ad}\exp-T\cdot B\end{aligned}$$

Or, on a

$$\varpi^{-1}(-2T)\,\exp -T = \frac{-2T\,e^{-T}}{e^{-2T}-1} = \frac{T}{\sinh T}$$

d'où la proposition. □

Nous nous proposons maintenant d'étudier la série $\log \exp A \exp T \exp B$. Pour énoncer le résultat qui suit, on définit la fonction analytique sur $\mathbb{R}^2$ et donnée par

$$F(u,x) = \frac{1}{\dfrac{1}{1-e^{-x}} - u} \qquad \text{pour } x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad F(u,0) = 0.$$

Proposition A3.3. — *On considère la série formelle de Lie obtenue par la formule de Campbell-Hausdorff et donnée par*

$$L(A,T,B) = \log\,\exp A \exp T \exp B$$

alors on a

$$(L_{0,0} + L_{1,0} + L_{0,1})(A,T,B) = T + \operatorname{Ad}\varpi^{-1}T \cdot A + \operatorname{Ad}\varpi^{-1}(-T)\cdot B \quad et$$

$$L_{1,1}(A,T,B) = \sum_{p,q\geq 0} S(p,q)\;[\operatorname{Ad}T^p \cdot A, \operatorname{Ad}(-T)^q \cdot B]\,. \tag{A3.1}$$

avec $S(p,q) = \dfrac{1}{p!}\,\dfrac{1}{q!}\,\dfrac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\,\partial x'^q}\ell(0,0)$, i.e. $\ell(x,x') = \sum_{p,q\geq 0} S(p,q)\;x^p\,x'^q$. *Ici ℓ est la fonction analytique sur $\mathbb{R}^2$ telle que*

(A3.2)

$$\ell(x,x') = \begin{cases} \dfrac{\varpi^{-1}(-x') - \varpi^{-1}(-x)}{e^{x'}-e^{x}} = \\ \qquad \displaystyle\int_0^1 \frac{F(u,x)}{e^{x}-1}\cdot\frac{F(u,x')}{e^{x'}-1}\,udu & \textit{lorsque} \quad x' \neq x, \\ \dfrac{e^{x}-x-1}{(e^{x}-1)^2} & \textit{lorsque} \quad x' = x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2} & \textit{lorsque} \quad x' = x = 0. \end{cases}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice symétrique $S_k = \big(S(p,q)\big)_{0\leq p,q\leq k}$ est réelle, symétrique et définie positive.

Démonstration. — Dans le 1) de cette démonstration, nous utilisons tout d'abord une méthode directe que nous avions déjà présentée dans [**23**, pp. 95-97] pour prouver le fait que

$$\sum S(p,q)\,x^p\,x'^q = \frac{\varpi^{-1}(-x') - \varpi^{-1}(-x)}{e^{x'}-e^{x}}. \tag{A3.3}$$

Une autre preuve de cette formule ainsi que le reste de la démonstration de la proposition seront alors données à partir de notes de J. Helmstetter dans les parties 2) à 6).

1) Dans cette démonstration, la notation $F \simeq F'$ utilisée pour deux séries formelles de Lie signifie qu'elles sont égales modulo l'idéal formé par les séries formelles de Lie dont les composantes contiennent au moins deux fois A ou au moins deux fois B.

Utilisant le 2) et le 3) de la proposition A3.1, il vient

$$\begin{aligned} L(A,T,B) &\simeq \log\exp A \exp(T + \operatorname{Ad}\varpi^{-1}(-T)\cdot B) \\ &\simeq T + \operatorname{Ad}\varpi^{-1}(-T)\cdot B + \operatorname{Ad}\varpi^{-1}\big(T + \operatorname{Ad}\varpi^{-1}(-T)\cdot B\big)\cdot A \end{aligned} \tag{A3.4}$$

d'où l'on déduit l'expression de $L_{0,0} + L_{1,0} + L_{0,1}$.

Pour calculer $L_{1,1}$, nous remarquons maintenant que les monômes

$$[\operatorname{Ad}T^p\cdot A, \operatorname{Ad}(-T)^q\cdot B] \qquad \text{pour} \qquad p,q \geq 0$$

forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de Lie de degré 1 en A et 1 en B. Par conséquent, l'application $\mathbb{Q}$-linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}[[x,x']]$ des séries formelles à 2 variables dans l'espace vectoriel des séries formelles de Lie en A, B et T de degré 1 en A et 1 en B qui à $g(x,x') = \sum U(p,q)\; x^p x'^q$ fait correspondre

$$G(A,T,B) = \sum U(p,q)\,[\operatorname{Ad}T^p\cdot A, \operatorname{Ad}(-T)^q\cdot B]$$

est une bijection. Étant données φ et ψ dans $\mathbb{Q}[[x]]$, cette bijection fait correspondre

$$G(\operatorname{Ad}\varphi(T)\cdot A, T, \operatorname{Ad}\psi(-T)\cdot B) \qquad \text{à} \qquad \varphi(x)\,\psi(x')\; g(x,x').$$

En particulier, elle fait correspondre

$$L_{1,1}(\operatorname{Ad}\exp T\cdot A, T, B) - L_{1,1}(A,T,\operatorname{Ad}\exp(-T)\cdot B) \text{ à } (\exp x - \exp x')\;\ell(x,x')$$

et $\quad [\operatorname{Ad}\varpi^{-1}(-T)\cdot A, B] - [A, \operatorname{Ad}\varpi^{-1}T\cdot B] \qquad$ à $\qquad \varpi^{-1}(-x) - \varpi^{-1}(-x')$.

Pour prouver la formule (A3.3), nous sommes donc ramenés à vérifier l'égalité

$$\begin{aligned} L_{1,1}(\operatorname{Ad}\exp T\cdot A, T, B) &- L_{1,1}(A,T,\operatorname{Ad}\exp(-T)\cdot B) \\ &= [\operatorname{Ad}\varpi^{-1}(-T)\cdot A, B] - [A, \operatorname{Ad}\varpi^{-1}T\cdot B]. \end{aligned} \tag{A3.5}$$

Posons $\qquad M(T,A,B) = L(\operatorname{Ad}\exp T\cdot A, T, B) = \log\exp T\exp A\exp B$

On a

$$\begin{aligned} -L(A,T,\operatorname{Ad}\exp(-T)\cdot B) &= -\log\exp A\exp B\exp T \\ &= \log\exp -T\exp -B\exp -A = M(-T,-B,-A). \end{aligned}$$

Prouver la formule (A3.5) revient donc à vérifier qu'on a

$$M_{1,1}(T,A,B) + M_{1,1}(-T,-B,-A) = [\operatorname{Ad}\varpi^{-1}(-T)\cdot A, B] - [A, \operatorname{Ad}\varpi^{-1}T\cdot B].$$

Nous utiliserons pour cela le fait évident que $L(A,T,B) + L(-B,-T,-A) = 0$.

Nous cherchons alors à expliciter l'expression $M_{1,1}(T, A, B) - L_{1,1}(A, T, B)$. En utilisant la proposition A3.1, il vient

$$\begin{aligned} M(T, A, B) &= \log(\exp T \exp B \exp \mathrm{Ad} \exp -B \cdot A) \\ &\simeq \log\big(\exp(T + \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot B)\ \exp(A + [A, B])\big) \\ &\simeq T + \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot B + \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}\big(-T - \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot B\big) \cdot A \\ &\qquad + \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot [A, B]. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant la relation $\varpi^{-1}(-x) = x + \varpi^{-1}(x)$. Il vient :

$$\begin{aligned} M(T, A, B) \simeq T &+ \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot B + \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}\big(T + \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot B\big) \cdot A \\ &+ [T + \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot B, A] + \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot [A, B]. \end{aligned}$$

D'où compte tenu de (A3.4)

$$M_{1,1}(T, A, B) = L_{1,1}(A, T, B) - [A, \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot B] + \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot [A, B].$$

Finalement

$$\begin{aligned} M_{1,1}&(T, A, B) + M_{1,1}(-T, -B, -A) \\ &= [\mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}T \cdot A,\ B] - [A,\ \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot B] \\ &\qquad + \big(\mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) - \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}T\big) \cdot [A, B] \\ &= [\mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}T \cdot A,\ B] - [A,\ \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot B] \\ &\qquad + [[T, A], B] + [A, [T, B]] \\ &= [\mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}(-T) \cdot A,\ B] - [A,\ \mathrm{Ad}\,\varpi^{-1}T \cdot B] \end{aligned}$$

comme prévu.

2) Reprenons quelques conventions de notations et rappelons quelques résultats donnés par J. Helmstetter dans [**15**, pp. 173-174]. Le développement de Taylor

$$F(u, x) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p!}\ F_p(u)\ x^p$$

de la fonction $x \to F(u, x)$ à l'origine nous conduit à définir les fonctions $u \to F_p(u)$ qui sont des polynômes de degré $p - 1$ comme on le voit en considérant les égalités

$$F(u, x) = \sum_{q \geq 1} u^{q-1}\,(1 - e^{-x})^q = \sum_{q \geq 1} (u - 1)^{q-1}\,(e^x - 1)^q$$

dont la première montre que le monôme dominant de F_p est $p!\,u^{p-1}$ et le monôme constant $(-1)^{p-1}$. En particulier on a $F_1(u) = 1$. Notons en passant qu'on peut prévoir l'apparition des nombres de Stirling $s(p, q)$ dans l'expression explicite des F_p du fait de l'identité

$$(1 - e^{-x})^q = \sum_{p \geq q} (-1)^{p-q}\,\frac{q!}{p!}\,s(p, q)\,x^p.$$

Par ailleurs, soient $\alpha, \beta;\ q_1 \dots q_m$ des entiers positifs. On note $\lambda(\alpha, \beta;\ q_1 \dots q_m)$ le coefficient de $x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_m^{q_m}$ dans le développement de Taylor de la fonction analytique

$$x_1, x_2 \dots, x_m \to \int_0^1 u^\alpha (u-1)^\beta F(u, x_1) \dots F(u, x_m)\, du.$$

i.e.

$$\text{(A3.6)} \qquad \lambda(\alpha, \beta;\ q_1 \dots q_m) = \int_0^1 u^\alpha (u-1)^\beta \frac{F_{q_1}(u)}{q_1!} \cdots \frac{F_{q_m}(u)}{q_m!}\, du.$$

Enfin, soit $(i_1, i_2 \dots i_m)$ une suite d'entiers ≥ 1 tels que $i_k \neq i_{k+1}$ pour $1 \leq k < m$, on note $\alpha(i_1, i_2 \dots i_m)$ (resp. $\beta(i_1, i_2 \dots i_m)$) le nombre de *montées* (resp. de *descentes*) de la suite, i.e. le nombre de couples (i_k, i_{k+1}) tels que $i_k < i_{k+1}$ (resp. $i_k > i_{k+1}$). On a évidemment $m = \alpha(i_1, i_2 \dots i_m) + \beta(i_1, i_2 \dots i_m) + 1$.

Nous nous intéressons maintenant à la formule de Campbell-Hausdorff dans l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie des séries formelles librement engendrée par les indéterminées non commutatives $A_1 \dots A_n$. A priori, on peut écrire de façon unique :

$$\text{(A3.7)} \qquad \begin{aligned} &\log \exp A_1 \exp A_2 \dots \exp A_n \\ &\qquad = \sum_{\substack{m>0 \\ 1 \leq i_1 \dots i_m \leq n \\ i_k \neq i_{k+1},\ 1 \leq k < m \\ q_1 \dots q_m > 0}} \mu(i_1, q_1;\ i_2, q_2;\ \dots;\ i_m, q_m)\ A_{i_1}^{q_1} A_{i_2}^{q_2} \dots A_{i_m}^{q_m} \end{aligned}$$

puisque les monômes de droite sont linéairement indépendants et qu'ils engendrent cette algèbre enveloppante.

On a alors le résultat suivant ([**15**, théorèmes (3) et (6)]) :

$$\mu(i_1, q_1;\ i_2, q_2;\ \dots;\ i_m, q_m) = \lambda\big(\alpha(i_i, i_2 \dots i_m), \beta(i_1, i_2 \dots i_m);\ q_1 \dots q_m\big).$$

En particulier, le coefficient μ ne dépend que du nombre m, de la suite non ordonnée $q_1, q_2 \dots q_m$ et du nombre de montées de la suite $i_1, i_2 \dots i_m$. Par exemple, dans le développement de $\log \exp A_1 \exp A_2 \exp A_3$, les deux monômes $A_2^2 A_1 A_2^3$ et $A_1^3 A_3^2 A_2$ apparaissent avec le même coefficient $\lambda(1, 1;\ 1, 2, 3)$.

3) La formule $\sum S(p,q)\, x^p x'^p = \int_0^1 \dfrac{F(u,x)}{e^x - 1} \cdot \dfrac{F(u,x')}{e^{x'} - 1}\, udu$ va apparaître maintenant comme un corollaire du 2). En effet, on s'intéresse aux termes de degré 1 en A et B de $\log \exp A \exp T \exp B$ qu'on écrit sous la forme

$$\sum_{p,q \geq 0} S(p,q)\ [\mathrm{Ad}\, T^p \cdot A, \mathrm{Ad}(-T)^q \cdot B].$$

Décomposons par ailleurs les monômes de Lie en monômes associatifs (on remplace par exemple $[A, [-T, B]]$ par $ABT + TBA - ATB - BTA$). Choisissant $n = 3$, $A_1 = A$, $A_2 = T$ et $A_3 = B$ dans la décomposition (A3.7), on voit que $S(p,q)$ est le coefficient de T^pABT^q. On obtient donc

$$S(p,q) = \begin{cases} \lambda(1,2;\,p,q,1,1) & \text{si} \quad p \geq 1 \quad \text{et} \quad q \geq 1, \\ \lambda(1,1;\,p,1,1) & \text{si} \quad p \geq 1 \quad \text{et} \quad q = 0, \\ \lambda(1,1;\,q,1,1) & \text{si} \quad p = 0 \quad \text{et} \quad q \geq 1, \\ \lambda(1,0;\,1,1) & \text{si} \quad p = 0 \quad \text{et} \quad q = 0. \end{cases}$$

La formule (A3.6) donne

$$\sum_{p,q\geq 1} \lambda(1,2;\,p,q,1,1)\, x^p x'^q = \int_0^1 u(u-1)^2\ F(u,x)\, F(u,x')\, F_1(u)^2\, du.$$

ce qui, compte tenu du fait que $F_1(u) = 1$ devient simplement :

$$\sum_{p,q\geq 1} S(p,q)\, x^p x'^q = \sum_{p,q\geq 1} \lambda(1,2;\,p,q,1,1)\, x^p x'^q = \int_0^1 u(u-1)^2\ F(u,x)\, F(u,x')\ du.$$

De même

$$\sum_{p\geq 1} S(p,0)\, x^p = \int_0^1 u(u-1)\, F(u,x)\, du$$

$$\sum_{q\geq 1} S(0,q)\, x'^q = \int_0^1 u(u-1)\, F(u,x')\, du$$

et

$$S(0,0) = \int_0^1 u\, du = \frac{1}{2}\cdot$$

En observant que

(A3.8)
$$(u-1) + \frac{1}{F(u,x)} = \frac{1}{e^x - 1},$$

on obtient bien

(A3.9)
$$\begin{aligned} \sum_{p,q\geq 0} S(p,q)\, x^p x'^q &= \\ &= \int_0^1 F(u,x)\, F(u,x') \left(u - 1 + \frac{1}{F(u,x)}\right) \left(u - 1 + \frac{1}{F(u,x')}\right) udu \\ &= \int_0^1 \frac{F(u,x)}{e^x - 1} \cdot \frac{F(u,x')}{e^{x'} - 1}\ udu. \end{aligned}$$

4) Un calcul élémentaire nous conduit à l'égalité

$$I = \int_0^1 \frac{F(u,x)}{e^x - 1} \cdot \frac{F(u,x')}{e^{x'} - 1}\ udu = \frac{\varpi^{-1}(-x') - \varpi^{-1}(-x)}{e^{x'} - e^x}\cdot$$

En effet par décomposition en éléments simples par rapport à u, on a

$$I = \frac{1}{e^{x'} - e^x} \left[\int_0^1 \frac{F(u,x')}{1 - e^{-x'}}\, du - \int_0^1 \frac{F(u,x)}{1 - e^{-x}}\, du\right]$$

Notant alors que $\displaystyle\int_0^1 F(u,x)\,du = x$, on obtient bien

$$I = \frac{1}{e^{x'} - e^{x}} \left(\frac{x'}{1-e^{-x'}} - \frac{x}{1-e^{-x}} \right).$$

5) Afin de prouver la positivité de S, nous utilisons l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) dans le résultat suivant :

Lemme A3.4. — *Soit $S = \big(S(p,q)\big)$ une matrice symétrique réelle d'ordre infini. Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ avec $a < b$ et φ une fonction continue > 0 sur $]a,b[$ telle que pour tout $n \geq 0$ on ait $\displaystyle\int_a^b |u|^n\, \varphi(u)du < \infty$. Les conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(i) Les matrices d'ordre $k+1$, $S_k = \big(S(p,q)\big)_{0\leq p,q\leq k}$ sont définies positives pour tout $k \geq 0$.

(ii) Il existe une suite $(G_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de polynômes de degré p, de coefficient dominant strictement positif telle que

$$S(p,q) = \int_a^b G_p(u)\, G_q(u)\; \varphi(u)du, \qquad \forall p,q \geq 0. \tag{A3.10}$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées, la suite $(G_p)_{p\geq 0}$ est unique.

Preuve (du lemme). — (ii) $\Rightarrow$ (i). Soient $s_0, s_1 \ldots s_k$ une suite de nombres réels non tous nuls, on a

$$\sum_{0\leq p,q\leq k} S(p,q)\, s_p s_q = \int_a^b \Big(\sum_{0\leq p\leq k} s_p\, G_p(u) \Big)^2 \varphi(u)du > 0$$

du fait que les G_p sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}[u]$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Fixons nous $k \geq 0$. Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt permet de construire une unique base $(P_p)_{p\in[0,1\ldots k]}$ de $\mathbb{R}^k[u]$ formée par les polynômes de degré p à coefficients dominants > 0 telle que

$$\int_a^b P_p(u)\, P_q(u)\; \varphi(u)du = \delta_{pq} \qquad (0 \leq p,q \leq k).$$

Les polynômes G_q s'ils existent s'écrivent nécessairement sous la forme

$$G_q = \sum_{0\leq p\leq k} v_{pq}\; P_p = \sum_{0\leq p\leq q} v_{pq}\; P_p$$

puisque pour des raisons de degrés on a $v_{pq} = 0$ dès que $p > q$. On a alors nécessairement $v_{pp} > 0$ pour tous les p. On voit ainsi que l'existence des G_p est équivalente à celle d'une matrice $V_k = (v_{pq})_{0\leq p,q\leq k}$ triangulaire supérieure, à termes diagonaux > 0 et telle que ${}^tV_kV_k = S_k$ ou encore à celle d'une matrice $U_k = V_k^{-1}$ triangulaire supérieure et à termes diagonaux > 0 telle que ${}^tU_kS_kU_k = \mathrm{Id}_k$. Les vecteurs colonnes de U_k s'obtiennent en utilisant une nouvelle fois le procédé d'orthonormalisation de Schmidt appliqué cette fois-ci à la suite $(\mathbb{R}^{\ell+1})_{0\leq \ell\leq k}$ des sous-espaces de $\mathbb{R}^{k+1}$ munis de la structure euclidienne associée à la matrice S_k. $\square$

Achevons maintenant la démonstration de la proposition A3.3 en prouvant la stricte positivité de S. Dans l'énoncé du lemme, on choisit $\varphi(u) = u$, $a = 0$, $b = 1$ et les $(G_p)_{p\geq 0}$ tels que $\displaystyle\sum_{p\geq 0} G_p(u)\, x^p = \frac{F(u,x)}{e^x - 1}\cdot$ La formule (A3.9) entraîne alors qu'on a $\displaystyle S(p,q) = \int_0^1 G_p(u)\, G_q(u)\, u du$. De plus d'après la formule (A3.8), on a

$$\frac{F(u,x)}{e^x - 1} = 1 + \sum_{p\geq 1} \frac{(u-1)}{p!}\, F_p(u)\, x^p.$$

Par conséquent pour tous les p, on a $\mathrm{d}^\circ G_p = \mathrm{d}^\circ F_p + 1 = p$ et les coefficients dominants des G_p comme ceux des F_p sont strictement positifs. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) du lemme entraîne alors le résultat. $\square$

Remarque. — Définissons la suite $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels telle que

$$\varpi^{-1}(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha\, x^\alpha \quad \text{au voisinage de } 0.$$

en rappelant que chaque a_α est égal à $\alpha!$ fois le $\alpha^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli et qu'on a $a_{2p+1} = 0$ dès que $p \geq 1$. En développant directement (A3.4), on obtient

$$\sum_{o\leq r\leq q} (-1)^{r+1}\, C_{p+r+1}^{r+1}\, a_{p+r+1} a_{q-r} = S(p,q).$$

ce qui montre la symétrie de l'expression de gauche et permet son calcul.

A4. Développement en série de $x \tan \frac{x}{2}$ et de $\frac{x}{\sin x}$ et polynômes minorés

Dans cette sous-section, X désigne un élément courant d'un espace vectoriel réel $\mathfrak{l}$ de dimension finie et $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{l}$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_j[X]$ le sous-espace des polynômes homogènes de degré total j de $\mathbb{R}[X]$ et on considère l'idéal $\mathbb{R}^i[X] = \bigoplus_{j\geq i} \mathbb{R}_j[X]$.

Les endomorphismes $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^i[X]$ pour lesquels les $(\mathbb{R}_j[X])_{j\geq i}$ sont des sous-espaces propres avec des valeurs propres positives, ne laissent pas nécessairement stable le cône des polynômes minorés sur $\mathfrak{l}$. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de remarquer que le polynôme $P(x,y) = x^2 + 2xy^2 + y^4$ est ≥ 0 donc minoré sur $\mathbb{R}^2$ tandis que $Q(x,y) = x^2 + 3xy^2 + y^4$ ne l'est pas puisque $\lim\limits_{t\to\infty} Q(-t^2, t) = -\infty$. Cependant on a la

Proposition A4.1. — *Soit φ une fonction mesurable > 0 presque-partout sur $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe un i de $\mathbb{N}$ avec $\int_{-\infty}^{\infty} |u|^j \varphi(u)\,du < \infty$ pour $j \geq i$.*

1) *On a un endomorphisme $\mathcal{T}_\varphi$ de $\mathbb{R}^i[X]$ donné par*

$$\mathcal{T}_\varphi Q\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(uX)\,\varphi(u)\,du.$$

Il est diagonalisable, les $(\mathbb{R}_j[X])_{j\geq i}$ sont des sous-espaces propres de valeurs propres $\int_{-\infty}^{\infty} u^j\,\varphi(u)\,du$.

2) *On suppose $i = 0$. Si le nombre réel m minore $Q(\mathfrak{l})$, alors*

$$\mathcal{T}_\varphi m = m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\,du$$

minore $\mathcal{T}_\varphi Q\,(\mathfrak{l})$.

3) *On suppose i quelconque et $\mathfrak{l} = \mathbb{R}$ de dimension 1. Si Q est un polynôme non identiquement nul de $\mathbb{R}[u]$ tel que $Q(u) \geq 0$ pour tout u de $\mathbb{R}$, alors il existe une constante $m > 0$ qui minore $\mathcal{T}_\varphi Q\,(\mathbb{R})$.*

4) *On suppose i et $\mathfrak{l}$ quelconques. Si Q est minoré sur $\mathfrak{l}$, il en est de même de $\mathcal{T}_\varphi Q$.*

Remarque. — On peut remplacer les bornes d'intégration par des nombres a et b tels que $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Démonstration. — Le 1) est évident. Dans le 2) on a alors $\mathcal{T}_\varphi(Q-m)\,(X) \geq 0$ pour tout X, comme intégrale d'une fonction positive. Le 3) découle du fait que $u \to Q(uv)$ est > 0 presque partout sur $\mathbb{R}$.

Nous prouvons maintenant le 4). D'après le corollaire A1.3, pour vérifier que $\mathcal{T}_\varphi Q$ est minoré, il suffit de prouver que pour toute fonction f de $\mathfrak{l}\{t\}$, la fonction $t \to \mathcal{T}_\varphi Q\,\big(f(t)\big)$ est minorée sur $\mathbb{R}$.

Pour u et t réels tels que $|t|$ soit assez grand, on trouve que

$$Q\big(u\,f(t)\big) = \sum_{s'\leq r\leq s} \mathrm{q}_r(u)\,t^r$$

$$\mathcal{T}_\varphi Q\,\big(f(t)\big) = \sum_{s'\leq r\leq s} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{q}_r(u)\,\varphi(u)\,du\Big)\,t^r.$$

Où s' et s sont des éléments de $\mathbb{Z}$ et les q_r des éléments convenables de $\mathbb{R}^i[u]$.

Si $u, t \to Q\,\big(uf(t)\big)$ est identiquement nul, $t \to \mathcal{T}_\varphi Q\,\big(f(t)\big)$ est nul et donc minoré. Sinon, on peut supposer que q_s n'est pas identiquement nul. Comme $t \to Q\,\big(uf(t)\big)$ est minoré pour tout u, on a $\mathrm{q}_s(u) \geq 0$ pour tout u réel et $s = 2p$ est pair. On en déduit comme dans le 3), qu'on a $A = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{q}_s(u)\,\varphi(u)\,du > 0$. Finalement, $\mathcal{T}_\varphi Q\,\big(f(t)\big) = At^{2p}\,\big(1 + o(t^{2p})\big)$ avec $A > 0$. Cette fonction est bien minorée.

La proposition et le 4) sont démontrés. □

Lemme A4.2. — *Soient $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 1}$ les suites des coefficients de x^{2n} dans les développements de Taylor à l'origine des fonctions analytiques $\dfrac{x}{\sin x}$ et $x\tan\dfrac{x}{2}$ (i.e. $\dfrac{x}{\sin x} = \sum_{n\geq 0} b_n x^{2n}$ et $x\tan\dfrac{x}{2} = \sum_{n\geq 1} c_n x^{2n}$). Alors*

$$\textit{1)}\quad (2n)!\,b_n = \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n}\,\frac{(\cosh \pi u - 1)}{2\sinh^2 \pi u}\,\pi du \quad \textit{pour } n \geq 0$$

et

$$\textit{2)}\quad (2n)!\,c_n = \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n}\,\frac{\cosh \pi u}{\sinh^2 \pi u}\,\pi du \quad \textit{pour } n \geq 1.$$

Démonstration. — 1) On remarque que $\dfrac{x}{\sinh x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et on calcule sa transformée de Fourier inverse

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\,\frac{x}{\sinh x}\,dx.$$

Comme g est paire, on peut supposer $u > 0$.

En calculant par la méthode des résidus l'expression

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_n} e^{iuz}\,\frac{z}{\sinh z}\,dz$$

où Γ_n est le rectangle orienté correspondant aux droites $x = -n$, $y = 0$, $x = n$ et $y = (n + \frac{1}{2})\,\pi$, on obtient

$$g(u) = 2\pi \sum_{n>0} (-1)^{n+1}\, n\pi e^{-n\pi u}.$$

Or $\sum_{n\geq 0} (-1)^n\, e^{-n\pi u} = \dfrac{1}{1+e^{-\pi u}}\cdot$ D'où par dérivation

$$g(u) = \frac{\pi^2}{2\cosh^2 \frac{\pi u}{2}} \tag{A4.1}$$

Par transformation de Fourier, on a donc

$$\frac{x}{\sinh x} = \frac{-ix}{\sin(-ix)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}\, g(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}\,\frac{\pi\, du}{4\cosh^2 \frac{\pi u}{2}}$$

et

$$\sum_{n\geq 0} b_n\,(-ix)^{2n} = \sum_{n\geq 0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u^{2n}\,\frac{\pi\, du}{4\cosh^2\frac{\pi u}{2}}\right)\frac{(-ix)^{2n}}{(2n)!}\cdot$$

Ce qui par identification donne la formule de l'énoncé.

2) La formule (A4.1) donne

$$\frac{\pi^2}{2\cosh^2\frac{\pi u}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\,\frac{x}{\sinh x}\,dx$$

ce qui peut s'écrire

$$(\tanh \frac{x}{2})' = \frac{1}{2\cosh^2 \frac{x}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \frac{u}{\sinh \pi u}\, du.$$

Par ailleurs $\tanh \frac{x}{2} = -i \sum_{n>0} c_n\, (ix)^{2n-1}$ et

$$\begin{aligned}(\tanh \frac{x}{2})' &= \sum_{n>0} (2n-1)\, c_n\, (ix)^{2n-2} \\ &= \sum_{n>0} \frac{(ix)^{2n-2}}{(2n-2)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2n-1}}{\sinh \pi u}\, du.\end{aligned}$$

Ce qui par identification donne bien la formule

$$c_n = \frac{1}{(2n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2n-1}}{\sinh \pi u}\, du = \frac{1}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n} \frac{\cosh \pi u}{\sinh^2 \pi u}\, \pi du.$$

□

Proposition A4.3. — *Notons $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) l'endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{R}^1[X]$) ayant pour noyau $\bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ et tel que les $\mathbb{R}_{2n}[X]$ pour $n \geq 0$ (resp. $n > 0$) soient des sous-espaces propres de valeur propre $(2n)!\, b_n$ (resp. $(2n)!\,(c_n - b_n)$) alors*

1) Le cône des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ (resp. de $\mathbb{R}^1[X]$) minorés sur $\mathfrak{l}$ est stable par $\mathcal{T}_1$ (resp. par $\mathcal{T}_2$).

2) Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ est minoré sur $\mathfrak{l}$ par le nombre réel m, alors $\mathcal{T}_1 Q$ est aussi minoré par m.

3) On suppose $\mathfrak{l} = \mathbb{R}$ de dimension 1. Si Q est un polynôme non identiquement nul de $\mathbb{R}[u]$ (resp. $\mathbb{R}^1[u]$) tel que $Q(u) \geq 0$ pour tout u de $\mathbb{R}$ alors on a $\mathcal{T}_1 Q\,(u) > 0$ (resp. $\mathcal{T}_2 Q\,(u) > 0$) pour tout u de $\mathbb{R}$.

Démonstration. — La fonction $u \to \varphi_1(u) = \pi \frac{\cosh \pi u - 1}{2\sinh^2 \pi u}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^j\, \varphi_1(u)\, du < \infty$$

pour tout j de $\mathbb{N}$.

Utilisant le 1) de la proposition A4.1 et le lemme A4.2, on voit qu'on a $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{\varphi_1}$. Les propriétés de $\mathcal{T}_1$ sont alors une conséquence du 2) et du 3) de la proposition A4.1 et du fait que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(u)\, du = 1$.

De même $\varphi_2(u) = \pi \frac{\cosh \pi u + 1}{2\sinh^2 \pi u}$ est positive et on a $\int_{-\infty}^{\infty} |u|^j\, \varphi_2(u)\; du < \infty$ dès que $j \geq 2$.

Le polynôme $R : X \to R(X) = \dfrac{Q(X)+Q(-X)}{2}$ est un élément minoré de $\mathbb{R}^2[X]$ et on a $\mathcal{T}_2 Q = \mathcal{T}_{\varphi_2} R$. Les propriétés de $\mathcal{T}_2$ sont alors une conséquence du 3) et du 4) de la proposition A4.1. □

A5. Variable complexe et distributions concentrées sur des sous-espaces vectoriels

On se fixe $k \geq 2$ dans $\mathbb{N}$. On identifie $\mathbb{R}^k$ avec $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{k-2}$. On associe à (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, $z = x+iy$ dans $\mathbb{C}$. On désigne par $x' = (x_{k-2} \dots x_1)$ un élément courant de $\mathbb{R}^{k-2}$. On note δ la mesure de Dirac dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. On pose $\mathcal{D}^{(*)}(\mathbb{R}^k) = \mathcal{D}^{(*)}$ et $\mathcal{D}^{(*)}(\mathbb{R}^{k-2}) = \mathcal{D}'^{(*)}$.

Pour p et r dans $\mathbb{N}$, on définit les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathcal{D}^*$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{pr}(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{k-2}) &= \mathcal{B}_{pr}\\ &= \left\{ T \mid \exists S \in \mathcal{D}'^*,\ T = \frac{\partial^p}{\partial z^p}\frac{\partial^r}{\partial \bar{z}^r}\,\delta \otimes S \right\}\\ \mathcal{A}_p(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{k-2}) &= \mathcal{A}_p = \mathcal{B}_{p0}.\end{aligned}$$

On pose $\mathcal{B} = \sum\limits_{p,r\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{pr}$, $\mathcal{A}^p = \sum\limits_{p'\leq p} \mathcal{A}_{p'}$ et $\mathcal{A} = \sum\limits_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_p = \sum\limits_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^p$.

Proposition A5.1. — *On a* $\mathcal{B} = \bigoplus\limits_{p,r\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{pr}$, $\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_p$ *et* $\mathcal{A}^p = \bigoplus\limits_{p'\leq p} \mathcal{A}_{p'}$. *En particulier, pour tout* T *de* $\mathcal{A} \setminus \{0\}$, *il existe un unique élément* S *de* $\mathcal{D}'^* \setminus \{0\}$ *et un unique élément* p *de* $\mathbb{N}$ *tels que* $T = \dfrac{\partial^p \delta}{\partial z^p} \otimes S \pmod{\mathcal{A}^{p-1}}$.

Démonstration. — Nous prouvons l'égalité concernant $\mathcal{B}$. Les résultats concernant $\mathcal{A}$ s'en déduisent immédiatement. Donnons-nous une famille $(T_j)_{1\leq j\leq m}$ d'éléments de la forme $T_j = \dfrac{\partial^{p_j}}{\partial z^{p_j}}\dfrac{\partial^{r_j}}{\partial \bar{z}^{r_j}}\,\delta \otimes S_j$ où les S_j sont des éléments de $\mathcal{D}'^* \setminus \{0\}$ et les couples (p_j, r_j) sont des éléments de $\mathbb{N}^2$, tous différents, puis une relation de dépendance linéaire $\sum\limits_{1\leq j\leq m} \lambda_j T_j = 0$. Montrons que $\lambda_1 = 0$. Le même calcul nous donnerait $\lambda_j = 0$ pour tous les j. Cela entraînera que les T_j forment un système libre et la proposition. Choisissons φ dans $\mathcal{D}$ de la forme $\varphi_0 \otimes \varphi_1$ avec $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ qui coïncide sur un voisinage de l'origine avec $(-\bar{z})^{p_1}(-z)^{r_1}$, et $\varphi_1 \in \mathcal{D}'$ telle que $\langle S_1, \varphi_1\rangle = 1$. Alors, on a $\langle \sum \lambda_j T_j, \varphi\rangle = \lambda_1 = 0$, comme prévu. □

On a $z\delta = 0$. La formule de Leibniz nous donne pour $r \geq 1$,

$$\frac{\partial^r}{\partial z^r}(z\delta) = z\,\frac{\partial^r}{\partial z^r}\delta + r\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}}\delta = 0. \qquad \text{D'où}$$

$$\text{(A5.1)} \qquad z\,\frac{\partial^r}{\partial z^r}\,\delta = -r\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}}\delta \qquad \text{et} \qquad \bar{z}\,\frac{\partial^r}{\partial \bar{z}^r}\,\delta = -r\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial \bar{z}^{r-1}}\delta.$$

Proposition A5.2. — *Soit $T \in \mathcal{D}^*$, on a* $\quad \bar{z}T = 0 \iff T \in \mathcal{A}.$

Démonstration. — Montrons l'implication $\Leftarrow$. Par linéarité, il suffit de prouver qu'on a $\bar{z}T = 0$ dès que T est de la forme $\dfrac{\partial^p}{\partial z^p}\,\delta \otimes S$ avec $S \in \mathcal{D}'^*$, ce qui est évident.

Montrons l'implication réciproque $\Rightarrow$. L'égalité $\bar{z}T = 0$ implique que le support de T est contenu dans le sous-espace vectoriel $x = 0$, $y = 0$. D'après un résultat classique ([**27**], théorème XXXVI, p.101), cela entraîne qu'on a $T \in \mathcal{B}$. Montrons qu'on aboutit à une contradiction si l'on suppose qu'on a $T \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. En effet, dans ce cas, il existe des éléments $p \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ et $S \in \mathcal{D}'^* \setminus \{0\}$ tels que

$$T = \frac{\partial^p}{\partial z^p}\,\frac{\partial^r}{\partial \bar{z}^r}\,\delta \otimes S \quad (\mathrm{mod} \sum_{p' \in \mathbb{N},\ r' < r} \mathcal{B}_{p',r'} + \sum_{p' < p} \mathcal{B}_{p',r}).$$

Utilisant la formule (A5.1), il vient

$$\bar{z}T = -r\,\frac{\partial^p}{\partial z^p}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial \bar{z}^{r-1}}\delta \otimes S \quad (\mathrm{mod} \sum_{p' \in \mathbb{N},\ 0 \leq r' < r-1} \mathcal{B}_{p',r'} + \sum_{0 \leq p' < p} \mathcal{B}_{p',r-1}) = 0.$$

D'où $S = 0$ et une contradiction. Finalement, $T \in \mathcal{A}$, comme prévu. □

Proposition A5.3. — *On a $z\,\mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}_{p-1}$, $\bar{z}\,\mathcal{A} = 0$ et pour $k - 2 \geq j \geq 1$, $x_j\,\mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}_p$ et $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\,\mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}_p$.*

Démonstration. — Ces inclusions sont évidentes. En particulier, la première découle de la première égalité (A5.1). □

A6. Désintégration de certaines distributions tempérées

Dans ce qui suit, on se fixe k dans $\mathbb{N}^*$. On note $x' = (x_{k-1} \dots x_1)$, $x = (t, x') = (t, x_{k-1} \dots x_1)$, $p' = (p_{k-1} \dots p_1)$ et $p = (q, p_{k-1} \dots p_1) = (q, p')$ des éléments courants de $\mathbb{R}^{k-1}$, $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{N}^{k-1}$ et $\mathbb{N}^k$. On munit $\mathbb{N}^k$ de la relation d'ordre partiel

$$\bar{p} = (\bar{q}, \overline{p_{k-1}} \dots \overline{p_1}) \leq (q, p_{k-1} \dots p_1) = p \iff \bar{q} \leq q,\ \overline{p_{k-1}} \leq p_{k-1}, \dots, \overline{p_1} \leq p_1.$$

On désigne par $\mathcal{S}^*_{(0)}(\mathbb{R}^k) = \mathcal{S}^*_{(0)}$ le sous-espace des *fonctions continues à croissance lente sur* $\mathbb{R}^k$. C'est-à-dire le $\mathbb{C}[x]$-module pour la multiplication, engendré dans l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^k)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^k$, par le sous-espace $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^k)$ des fonctions continues bornées. Étant donné p dans $\mathbb{N}^k$, on note $\mathcal{S}^*_{(p)}(\mathbb{R}^k) = \mathcal{S}^*_{(p)}$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^k)$ formé par les dérivées d'ordre $r = (s, r_{k-1} \dots r_1)$ d'éléments de $\mathcal{S}^*_{(0)}$ avec $r \leq p$. On a le résultat suivant ([**27**], th. VI, ch. VIII)

$$\mathcal{S}^* = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^k} \mathcal{S}^*_{(p)}.$$

Les $\mathcal{S}^*_{(p)}$ sont des $\mathbb{C}[x]$-modules pour la multiplication. Il suffit pour le voir de vérifier par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$, qu'étant donné $T = \dfrac{\partial^q}{\partial t^q}\dfrac{\partial^{p'}}{\partial x'^{p'}} F$ dans $\mathcal{S}^*_{(p)}$, avec $(q, p') \leq p$ et F dans $\mathcal{S}^*_{(0)}$, on a $tT \in \mathcal{S}^*_{(p)}$.

Cela est évident pour $q = 0$. Pour $q > 0$, on obtient le résultat en utilisant la formule de Leibniz, qui nous donne

$$t\frac{\partial^q}{\partial t^q} = \frac{\partial^q}{\partial t^q}t - q\frac{\partial^{q-1}}{\partial t^{q-1}}.$$

Définissons maintenant le sous-espace $\mathcal{S}^{*,s}(\mathbb{R}^k) = \mathcal{S}^{*,s} = \bigcup_{p' \in \mathbb{N}^{k-1}} \mathcal{S}^*_{(s,p')}$ pour tout s de $\mathbb{N}$. On a évidemment $\mathcal{S}^* = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^{*,s}$.

Pour $s \geq 1$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{S}^{*,s-1} = \mathcal{S}^{*,s}. \tag{A6.1}$$

En effet, l'inclusion $\mathcal{S}^{*,s} \subseteq \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{S}^{*,s-1}$ est évidente. Pour démontrer l'inclusion inverse, il suffit par linéarité de remarquer que si l'élément T de $\mathcal{S}^*$ est de la forme $T = \dfrac{\partial^s}{\partial t^s}\dfrac{\partial^p}{\partial x'^p} F$ avec F dans $\mathcal{S}^{*,(0)}$, on a $T = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^{s-1}}{\partial t^{s-1}}\dfrac{\partial^p}{\partial x'^p} F\right) \in \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{S}^{*,s-1}$.

Par ailleurs, posant $\mathcal{S}'^* = \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^{k-1})$, il est connu que (voir **[27]**, chap. IV, formule (IV. 5. 6))

$$\operatorname{Ker}\frac{\partial}{\partial t} = 1_t \otimes \mathcal{S}'^* \subseteq \mathcal{S}^{*,0}. \tag{A6.2}$$

Soit T dans $\mathcal{S}^*$, la notation

$$T = \int_{\mathbb{R}} T_t\, dt \tag{A6.3}$$

signifie qu'on a une application continue $t \to T_t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}'^*$ muni de sa topologie forte telle que pour $\varphi = \varphi_0 \otimes \varphi_1 \in \mathcal{S}$ avec φ_0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et φ_1 dans $\mathcal{S}'$, on ait

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(t)\langle T_t, \varphi_1\rangle\, dt.$$

Tout élément T de $\mathcal{S}^{*,0}$ peut s'écrire sous la forme $T = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} T_t\, dt$. Il suffit de le vérifier pour $T = \dfrac{\partial^{(0,p')} F}{\partial x^{(0,p')}} = \dfrac{\partial^{p'} F}{\partial x'^{p'}}$ avec F dans $\mathcal{S}^*_{(0)}$ et p' dans $\mathbb{N}^{k-1}$. Dans ce cas, pour tout t de $\mathbb{R}$, $F_t : x' \to F(t, x')$ est un élément de $\mathcal{S}'^*_{(0)}$ et l'application $t \to F_t$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}'^*$. En prenant $T_t = \dfrac{\partial^{p'} F_t}{\partial x'^{p'}}$, on a bien $T = \displaystyle\int T_t\, dt$ avec $T_t \in \mathcal{S}'^*$.

Le résultat qui suit pourrait être énoncé comme un corollaire de la théorie des fronts d'ondes. Comme nous ne considérons ici que des distributions tempérées, une vérification élémentaire nous paraît préférable.

Proposition A6.1. — *On utilise les notations et les conventions précédentes. Soit T dans $\mathcal{S}^*$ tel que $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{p}\right) T = 0$ où $\mathrm{p} = \mathrm{p}(t, x', \frac{\partial}{\partial x'})$ est une expression polynomiale en t, x' et $\frac{\partial}{\partial x'}$ qui ne comprend pas l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$, alors nécessairement $T \in \mathcal{S}^{*,0}$ et on peut donc écrire T sous la forme $\int T_t \, dt$.*

Démonstration. — Soit s le plus petit entier tel que $T \in \mathcal{S}^{*,s}$. Montrons qu'on aboutit à une contradiction si on suppose $s > 0$. Comme $\mathcal{S}^{*,s}$ est un $\mathbb{C}[x]$-module et comme les $\frac{\partial}{\partial x'}$ laissent $\mathcal{S}^{*,s}$ stable, on a $\mathrm{p}T \in \mathcal{S}^{*,s}$. D'après l'égalité (A6.1), il existe S dans $\mathcal{S}^{*,s-1}$ tel qu'on ait $\frac{\partial}{\partial t} S = \mathrm{p}T$. La formule (A6.2) entraîne alors qu'on a $T - S \in \mathcal{S}^{*,0}$. D'où $T \in \mathcal{S}^{*,s-1}(\mathbb{R}^k)$, en contradiction avec l'hypothèse de départ. □

A7. Suites centrales ascendantes et centres

Proposition A7.1. — *On suppose* $\dim \mathfrak{z} = 1$. *Pour qu'on ait $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})$, (il faut et) il suffit qu'on ait $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}))$.*

Démonstration. — Posons $\mathfrak{z} = \mathbb{C}Z$ et fixons-nous un élément ℓ de $\mathfrak{g}^*$ tel que $\ell(Z) \neq 0$. Notons B la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ donnée par $X, Y \to \ell([X,Y])$. Dans cette démonstration, on note $\mathfrak{g}'$ l'orthogonal de $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})$ relativement à B. Nous supposons désormais qu'on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})) = \mathfrak{z}$. La forme bilinéaire induite par B sur $\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})/\mathfrak{z}$ est alors non dégénérée, on en déduit qu'on a

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{z} = (\mathfrak{g}'/\mathfrak{z}) \oplus (\mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})/\mathfrak{z})$$
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}), \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}).$$

Montrons que, pour X dans $\mathfrak{g}'$, on a l'implication $[\mathfrak{g}', X] \subseteq \mathfrak{z} \Rightarrow X \in \mathfrak{z}$. Pour cela, on remarque qu'on a

$$[\mathfrak{g}, X] = [\mathfrak{g}' + \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}), X] = [\mathfrak{g}', X] \subseteq \mathfrak{z}.$$

On a donc $X \in \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{z}$.

Le théorème d'Engel et l'implication ci-dessus entraînent qu'on a $\mathfrak{g}' = \mathfrak{z}$ puis qu'on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g}) + \mathfrak{g}' = \mathfrak{z}^2(\mathfrak{g})$. D'où la proposition. □

A8. Fidélité des sous-représentations des représentations monomiales

Proposition A8.1. — 1) *Soit P un sous-groupe fermé de G, $(\rho_0, \mathcal{H}_0)$ une sous-représentation* non nulle *de la représentation quasi-régulière $\rho(G,P,1) = \rho(G,P)$ avec*

$$M = \{g \in G \mid \rho_0(g) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_0}\} \quad \textit{et} \quad M' = \bigcap_{g \in G} g\, P\, g^{-1}.$$

Alors, on a $M = M'$. En particulier, les sous-représentations non nulles de $\rho(G,P)$ sont simultanément toutes fidèles et elles le sont si et seulement si $M' = \{e\}$.

2) *Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ avec $P = \exp \mathfrak{p}$, alors les sous-représentations non nulles de $\rho(G,P)$ sont fidèles si et seulement si*

$$\mathfrak{m} = \bigcap_{g \in G} g\, \mathfrak{p} = \{0\}.$$

Remarque. — Si, dans le 1), on remplace $\rho(G,P)$ par $\rho(G,P,\chi)$ où χ est un caractère unitaire de P, on peut démontrer qu'on obtient

$$M = \bigcap_{g \in G} g\left(P \cap \chi^{-1}(1)\right) g^{-1}.$$

Démonstration. — 1) Dans ce qui suit, Φ désigne une fonction continue, non nulle de $\mathcal{H}_0$.

On vérifie très facilement qu'on a $M' \subseteq M$. Afin d'établir l'inclusion inverse, nous montrons tout d'abord qu'on a $M \subseteq P$. On pose $P' = MP$. On note qu'on a $P'/P \simeq M/(M \cap P)$. Du fait que G est simplement connexe $M/(M \cap P)$ possède une infinité d'éléments dès que $M \neq M \cap P$. Or, on a

$$\int_{G/P} |\Phi(g)|^2\, d\dot{g} = \int_{G/P'} \Big(\int_{M/(M \cap P)} |\Phi(gh)|^2\, d\dot{h} \Big)\, d\dot{g} < \infty.$$

Pour tout g de G, la fonction $h \to \Phi(gh)$ est constante sur $M \cap P$. Comme Φ n'est pas nulle, l'intégrale ci-dessus ne peut converger que si l'on a $M = M \cap P$. On a donc $M \subseteq P$.

Comme M est distingué, on a bien $M \subseteq M'$ puis $M = M'$.

2) Le résultat est évident pour $\dim \mathfrak{g} = 0$. Lorsque $\dim \mathfrak{g} > 0$, toutes les représentations fidèles sont non nulles. Comme $P = \exp \mathfrak{p}$, le 1) donne

$$M = \bigcap_{g \in G} \exp g\mathfrak{p} = \exp\Big(\bigcap_{g \in G} g\mathfrak{p}\Big) = \exp \mathfrak{m}.$$

D'où $M = \{e\} \Longleftrightarrow \mathfrak{m} = \{0\}$ et le résultat. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AUSLANDER and B. KOSTANT. Polarization and unitary representations of solvable Lie groups. *Invent. Math.*, **14** (1971), 255–354.

[2] Y. BENOIST. *Espaces symétriques exponentiels.* Thèse de 3ième cycle, Université Paris 7, 1984.

[3] Y. BENOIST. Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels. *Mem. Soc. Math. France*, **15** (1984), 1–37.

[4] Y. BENOIST. Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents. *J. Func. Anal.*, **59** (1984), 211–253.

[5] P. BONNET. Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire. *J. Func. Anal.*, **55** (1984), 220–246.

[6] N. BOURBAKI. *Groupes et algèbres de Lie.* Chapitres 2 et 3. Masson, Paris. 1972.

[7] L. CORWIN and F. GREENLEAF. *Representations of nilpotent Lie groups and their Applications.* Camb. Studies in adv. Maths. 18. 1989.

[8] L. CORWIN, F. GREENLEAF and G. GRÉLAUD. Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups. *Trans. Am. Math. Soc.*, **304** (1987), 549–583.

[9] H. FUJIWARA. On holomorphically induced representations of exponential groups. *Japan J. Math.*, **4** (1978), 106–169.

[10] H. FUJIWARA. Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents. *Pacific J. Math.*, **127** (1987), 329–352.

[11] H. FUJIWARA. *Représentations monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels*, dans " The Orbit Method in Representation Theory ", Birkhäuser (1990), 61–84.

[12] E. A. GORIN. Asymptotic properties of polynomials and algebraic functions of several variables (in Russian). *Usp. Mat. -Nauk.*, **16** (1961), 91–118.

[13] G. GRÉLAUD. Désintégration de représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **277** (1973), 327–330.

[14] G. GRÉLAUD. *Sur les représentations des groupes de Lie résolubles.* Thèse, Univ. de Poitiers, 1984.

[15] J. HELMSTETTER. Série de Hausdorff d'une algèbre de Lie et projections canoniques dans l'algèbre enveloppante. *J. Algebra*, **120** (1989), 170–199.

[16] L. HÖRMANDER *The Analysis of linear differential Operators II.*, Grundl. d. Math. Wiss. 257. Springer Verlag. New York, Heidelberg, Berlin. 1983.

[17] J. INOUE. *Holomorphically induced representations of some solvable Lie groups.* Preprint, Kyushu University, 1997.

[18] B. KOSTANT. Lie algebra cohomology and generalized Schubert cells. *Ann. of Math.*, **77** (1963), 72–144.

[19] G. LION. *Intégrales d'entrelacement sur des groupes de Lie nilpotents et indices de Maslov.* Colloque de Marseille-Luminy. Lecture Notes **587** (1976), Springer Verlag, 160–176.

[20] R. LIPSMAN. Orbital parameters for induced and restricted representations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **313** (1989), 433–473.

[21] B. MAGNERON. Spineurs symplectiques purs et indice de Maslov de plans lagrangiens positifs. *J. Func. Anal.*, **59** (1984), 90–122.

[22] B. MAGNERON. Représentations induites holomorphes des groupes de Lie nilpotents et involutions complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.*, **317** (1993), 37–42.

[23] B. MAGNERON. *Involutions complexes et vecteurs sphériques associés pour les groupes de Lie nilpotents réels.* Prépublication de l'Université Paris-Nord, **96–31**, 1996.

[24] R. PENNEY. Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem. *J. Func. Anal.*, **18** (1975), 177–190.

[25] R. PENNEY. Holomorphically induced representations of exponential Lie groups. *J. Func. Anal.*, **64** (1985), 1–18.

[26] H. ROSSI AND M. VERGNE. Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and applications to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group. *J. Func. Anal.*, **13** (1973), 324–389.

[27] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions.* Hermann, Paris. 1973.

[28] A. ZAÏCEV. Nontriviality of the space of holomorphically induced representations of a solvable Lie group. *Funct. Anal. Appl.*, **11** (1977), 78–79.

INDEX

LISTE DES NOTATIONS