AST

Nombre et répartition de points de hauteur bornée

Astérisque, tome 251 (1998), p. I-XVII

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__251__R1_0>

ASTÉRISQUE 251

NOMBRE ET RÉPARTITION DE POINTS DE HAUTEUR BORNÉE

édité par

Emmanuel Peyre

Société Mathématique de France 1998

Emmanuel Peyre
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S., 7 rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France.
E-mail : `peyre@irma.u-strasbg.fr`

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — Primaire 11G35 ; secondaires 14G05, 11E76, 14M25, 14G10.

Mots clefs. — Point rationnel, hauteur, surface cubique, variété torique, mesure de Tamagawa.

NOMBRE ET RÉPARTITION DE POINTS DE HAUTEUR BORNÉE

édité par Emmanuel Peyre

Résumé. — Si les points rationnels d'une variété définie sur un corps de nombres sont denses pour la topologie de Zariski, il est naturel de munir cette variété de hauteurs qui, du point de vue de la géométrie d'Arakelov, s'interprètent comme degrés d'intersection avec des fibrés en droites munis de métriques. L'objectif est alors d'étudier de manière asymptotique l'ensemble des points dont la hauteur est inférieure à un nombre réel donné, et cela en des termes aussi géométriques que possible.

Ce volume est issu de deux séminaires qui ont eu lieu en avril et en mai 1996. Il contient des articles de Slater et Swinnerton-Dyer, de Heath-Brown, de Fouvry et de de la Bretèche centrés sur le cas des surfaces cubiques, un texte de Billard sur les modèles minimaux des surfaces rationnelles, ainsi que des contributions de Salberger, de Peyre et de Batyrev et Tschinkel dont le principal objet est l'interprétation du terme dominant dans l'étude asymptotique du nombre de points de hauteur bornée.

***Abstract* (Number and distribution of points of bounded height)**

If the rational points of a variety over a number field are Zariski dense, then it is natural to equip this variety with heights, which one can interpret as intersection degrees relative to metrized line bundles. The aim is to study the set of points of bounded height asymptotically and to relate the results to the geometry of the variety.

This volume is the outcome of two seminars held in Paris in April and May 1996. It contains articles by Slater and Swinnerton-Dyer, Heath-Brown, Fouvry, and de la Bretèche on cubic surfaces, a text by Billard on minimal models of rational surfaces and contributions of Batyrev and Tschinkel, Salberger, and Peyre on the conjectural interpretation of the dominant term in the asymptotic behaviour of the number of points with bounded height.

PRÉFACE

Si les points rationnels d'une variété algébrique définie sur un corps de nombres sont denses pour la topologie de Zariski, il est naturel de munir cette variété de hauteurs qui, du point de vue de la géométrie d'Arakelov, s'interprètent comme degré d'intersection avec un fibré en droites muni de métriques. Il s'agit donc de fonctions définies sur l'ensemble des points rationnels à valeurs réelles strictement positives. L'objectif est alors d'étudier de manière asymptotique l'ensemble des points dont la hauteur est inférieure à un nombre réel donné, et cela en des termes aussi géométriques que possible. Cette étude a connu ces dernières années un regain important dont Manin a été un des principaux instigateurs. Ce renouveau a en particulier porté sur une meilleure compréhension du terme dominant dans le nombre de points de hauteur bornée. Ceci passe par une prise en compte des problèmes de répartition tels que l'existence de fermés accumulateurs susceptibles d'occulter le reste de la variété dans l'étude asymptotique.

Ce volume est issu de deux séminaires qui ont eu lieu en avril et en mai 1996 et où furent présentés divers développements récents de ce domaine.

Une des richesses de cette théorie est la variété des points de vue et des méthodes mises en œuvre. Nous avons tenté d'en donner une palette aussi large que possible. La cas des surfaces cubiques est particulièrement révélateur à cet égard ; en effet il apparaît dans la plupart des textes présentés ici, mais avec un regard à chaque fois différent.

Les premiers articles leur sont entièrement consacrés : Slater et Swinnerton-Dyer donnent une minoration du nombre des points de hauteur bornée sur le complémentaire des 27 droites pour une vaste classe de surfaces cubiques, tandis que Heath-Brown en présente une majoration. Les deux textes suivants étudient de manière fine le cas particulier de la surface cubique singulière d'équation

$$X_1X_2X_3 = T^3,$$

mais avec des procédés de théorie analytique des nombres « élémentaire » dans celui de Fouvry et d'analyse complexe dans celui de de la Bretèche. Cet exemple qui a fait l'objet de plusieurs discussions informelles lors des rencontres de 1996 apparaît également dans les textes de Salberger et de Batyrev et Tschinkel. La contribution de Billard porte sur la conjecture de Batyrev et Manin pour les modèles minimaux des surfaces rationnelles. Les trois derniers articles mettent plutôt l'accent sur l'interprétation conjecturale du terme dominant dans l'estimation asymptotique. Salberger exprime la constante apparaissant dans ce terme à l'aide des torseurs universels. Cette approche lui permet en outre de redémontrer un résultat de Batyrev et Tschinkel sur les variétés toriques projectives, lisses et déployées. Ce relèvement aux torseurs universels est également l'objet du texte qui le suit. Batyrev et Tschinkel quant à eux considèrent ces interprétations conjecturales à la lumière de travaux récents de Fujita concernant le programme des modèles minimaux pour les variétés algébriques polarisées. Ils développent également une généralisation de la notion de nombre de Tamagawa associé à une hauteur.

Nous tenons à remercier les organisateurs du séminaire sur les variétés rationnelles, le responsable des lundis arithmétiques ainsi que le réseau européen sur les formes automorphes pour les séminaires à l'origine de ce livre.

Emmanuel Peyre

Table des matières

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Counting points on cubic surfaces, I
JOHN B. SLATER & SIR PETER SWINNERTON-DYER 1

Soient V une surface cubique non singulière définie sur $\mathbb{Q}$ et U le complémentaire des 27 droites de V. On note $N(U, H)$ le nombre de points rationnels de U de hauteur plus petite que H. Manin a conjecturé que, si $V(\mathbb{Q})$ n'est pas vide, alors

$$N(U,H) = C_1 H (\log H)^{r-1}(1 + o(1)) \tag{1}$$

où C_1 est une constante strictement positive et r le rang du groupe de Néron-Severi $NS(V/\mathbb{Q})$ de V sur $\mathbb{Q}$. Dans cet article nous considérons le cas particulier où V contient deux droites rationnelles disjointes ; et nous prouvons qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout réel H assez grand on ait

$$N(U,H) > C_2 H (\log H)^{r-1}.$$

Ceci donne la minoration dans l'estimation asymptotique (1). Il est probable que les arguments de ce texte puissent être modifiés pour montrer le résultat correspondant quand V contient deux droites disjointes conjuguées sur $\mathbb{Q}$ de sorte que chacune soit définie sur une extension quadratique de $\mathbb{Q}$. Mais nous n'avons pas entrepris de rédiger les détails.

Counting Rational Points on Cubic Surfaces
ROGER HEATH-BROWN 13

Soient $F[W, X, Y, Z]$ une forme cubique rationnelle et $N^{(0)}(R)$ le nombre de zéros rationnels de F de hauteur inférieure ou égale à R, qui ne sont sur aucune des droites rationnelles de la surface $F = 0$. Nous montrons que

$$N^{(0)}(R) \ll_{\varepsilon,F} R^{4/3+\varepsilon}$$

pour tout réel fixé $\epsilon > 0$, sous une hypothèse sur la taille du rang des courbes elliptiques. Pour la démonstration on compte les points sur les courbes cubiques obtenues comme sections hyperplanes de la surface $F = 0$.

Par une paramétrisation des solutions de l'équation

$$x_1 x_2 x_3 = t^3, \qquad (x_1, x_2, x_3, t) = 1$$

et par des méthodes élémentaires de théorie analytique des nombres, on montre que le nombre de points de coordonnées non nulles, de hauteur canonique inférieure à X, de la surface cubique projective de $\mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$ d'équation

$$X_1 X_2 X_3 = T^3,$$

est, pour $X \longrightarrow \infty$, équivalent à $c_0 X \log^6 X$, où c_0 est une certaine constante > 0.

En développant des méthodes d'intégration complexe, nous établissons une formule asymptotique très précise sur le nombre de points de hauteur inférieure à X d'une certaine variété torique. Nous estimons le cardinal

$$V(X) := \mathrm{card}\{(x, y, z, t) \in (\mathbb{N} \cap [1, X])^4 \ : \ (x, y, z, t) = 1, \ xyz = t^3\}.$$

Soit $N(X) := (\log X)^{3/5} (\log_2 X)^{-1/5}$. Alors il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ de degré 6 et une constante $c > 0$ tels que l'on ait, pour X tendant vers l'infini, l'estimation

$$V(X) = XQ(\log X) + O\big(X^{1-1/8} \exp\{-cN(X)\}\big)$$

De plus, le coefficient dominant de Q est égal à

$$\frac{1}{4 \times 6!} \prod_p \Big\{ \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^7 \Big(1 + \frac{7}{p} + \frac{1}{p^2}\Big) \Big\}.$$

Nous étudions la répartition des points rationnels des modèles minimaux des surfaces rationnelles et vérifions que ces surfaces satisfont les conjectures de Batyrev-Manin sur le corps des rationnels. Pour ce faire, nous rappelons d'abord quelques propriétés et descriptions géométriques de telles surfaces. Ensuite, pour chaque plongement considéré, une hauteur naturelle apparaissant, nous établissons directement le comportement asymptotique des points rationnels de hauteur bornée. Finalement, nous regardons les sous-variétés accumulatrices.

Soit X une variété de Fano sur un corps de nombres. Un système d'Arakelov de métriques v-adiques sur le faisceau anticanonique de X définit une hauteur et une nouvelle sorte de mesures sur les torseurs universels sur X.

Le but de cet article est d'établir un lien entre la croissance asymptotique du nombre de points rationels de hauteur bornée sur X et certains volumes adéliques des torseurs universels sur X.

Soient V une variété de Fano et $\mathbf{H}$ un système de hauteurs d'Arakelov définissant un accouplement entre le groupe de Picard $\operatorname{Pic} V$ et les points rationnels de V à valeur dans $\mathbf{R}$. Soit $\zeta_{\mathbf{H}}$ la fonction zêta associée sur $\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{C}$. Batyrev, Manin et Tschinkel ont conjecturé que cette fonction est holomorphe sur un cône de sommet le faisceau anticanonique ω_V^{-1}. Il est en outre possible de donner une expression conjecturale du terme principal de cette fonction $\zeta_{\mathbf{H}}$ au voisinage de ce sommet. Le but de ce texte est de montrer comment cette expression conjecturale peut s'écrire naturellement en passant aux torseurs universels au-dessus de V.

Soit $\mathcal{L} = (L, \|\cdot\|_v)$ un faisceau inversible ample muni de métriques au-dessus d'une variété algébrique lisse quasi-projective V sur un corps de nombres F. Notons $N(V, \mathcal{L}, B)$ le nombre de points rationnels de V ayant une $\mathcal{L}$-hauteur $\leqslant B$. Dans ce texte nous considérons le problème de l'interprétation géométrique et arithmétique du comportement asymptotique de $N(V, \mathcal{L}, B)$ lorsque $B \to \infty$ à la lumière de conjectures récentes de Fujita concernant le programme des modèles minimaux pour les variétés algébriques polarisées.

Nous introduisons également des notions de *variétés $\mathcal{L}$-primitives* et de *fibrations $\mathcal{L}$-primitives*. Pour toute variété $\mathcal{L}$-primitive V sur F nous proposons une méthode pour définir un nombre de Tamagawa adélique $\tau_{\mathcal{L}}(V)$ qui est une généralisation du nombre de Tamagawa $\tau(V)$ défini par Peyre pour des variétés de Fano lisses. Notre méthode nous permet de construire des nombres de Tamagawa pour des $\mathbf{Q}$-variétés de Fano ayant au plus des singularités canoniques.

Dans une série d'exemples de variétés polarisées lisses et de variétés de Fano singulières nous montrons que nos nombres de Tamagawa rendent compte de la dépendance du comportement asymptotique de $N(V, \mathcal{L}, B)$ en fonction du choix des métriques v-adiques sur $\mathcal{L}$.

ABSTRACTS

Counting points on cubic surfaces, I
JOHN B. SLATER & SIR PETER SWINNERTON-DYER 1

Let V be a nonsingular cubic surface defined over $\mathbb{Q}$, let U be the open subset of V obtained by deleting the 27 lines, and denote by $N(U, H)$ the number of rational points in U of height less than H. Manin has conjectured that if $V(\mathbb{Q})$ is not empty then

$$N(U, H) = C_1 H (\log H)^{r-1}(1 + o(1)) \tag{1}$$

for some $C_1 > 0$, where r is the rank of $NS(V/\mathbb{Q})$, the Néron-Severi group of V over $\mathbb{Q}$. In this note we consider the special case when V contains two rational skew lines; and we prove that for some $C_2 > 0$ and all large enough H,

$$N(U, H) > C_2 H (\log H)^{r-1}.$$

This is the one-sided estimate corresponding to (1). It seems probable that the arguments in this paper could be modified to prove the corresponding result when V contains two skew lines conjugate over $\mathbb{Q}$ and each defined over a quadratic extension of $\mathbb{Q}$; but we have not attempted to write out the details.

Counting Rational Points on Cubic Surfaces
ROGER HEATH-BROWN 13

Let $F[W, X, Y, Z]$ be a rational cubic form, and let $N^{(0)}(R)$ be the number of rational zeros of F of height at most R, which do not lie on any rational line in the surface $F = 0$. We show that

$$N^{(0)}(R) \ll_{\varepsilon,F} R^{4/3+\varepsilon}$$

for any fixed $\varepsilon > 0$, subject to a suitable hypothesis on the size of the rank of elliptic curves. For the proof one counts points on the cubic curves obtained from hyperplane sections of the surface $F = 0$.

By a parametrisation of the solutions of the equation

$$x_1x_2x_3 = t^3, \qquad (x_1, x_2, x_3, t) = 1$$

and by elementary methods of analytic number theory, we show that the number of points, with non–zero coordinates, with canonical height less than X, of the cubic projective surface of $\mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$ defined by the equation

$$X_1X_2X_3 = T^3,$$

is, for $X \longrightarrow \infty$, asymptotically equivalent to $c_0X\log^6 X$,where c_0 is some positive constant.

By complex integration methods, we prove a very precise asymptotic formula about the number of rational points of height at most X on a certain toric variety. We estimate the cardinality

$$V(X) := \text{card}\{(x, y, z, t) \in (\mathbb{N} \cap [1, X])^4 \,:\, (x, y, z, t) = 1 : xyz = t^3\}.$$

Let $N(X) := (\log X)^{3/5}(\log_2 X)^{-1/5}$. Then there exists a polynomial $Q \in \mathbb{R}[X]$ of degree 6 and a constant $c > 0$ such that, for $X \to +\infty$, we have

$$V(X) = XQ(\log X) + O\big(X^{1-1/8}\exp\{-cN(X)\}\big).$$

Futhermore, the leading coefficient of Q is

$$\frac{1}{4\times 6!}\prod_p\Big\{\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^7\Big(1+\frac{7}{p}+\frac{1}{p^2}\Big)\Big\}.$$

We verify that the minimal models of rational surfaces satisfy the Batyrev-Manin conjecture for a family of ample divisors on the field of rationals.

Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties

PER SALBERGER 91

Let ***X*** be a Fano variety over a number field. An Arakelov system of f-adic metrics on the anticanonical line bundle on ***X*** gives rise to a height function on the set of rational points and to a new kind of adelic measures on the universal torsors over ***X.***

The aim of the paper is to relate the asymptotic growth of the number of rational points of bounded height on ***X*** to volumes of adelic spaces corresponding to the universal torsors over ***X.***

Terme principal de la fonction zeta des hauteurs et torseurs universels

EMMANUEL PEYRE 259

Let ***V*** be a Fano variety and H a system of Arakelov's heights which defines a pairing between the Picard group Pic ***V*** and the set of rational points of *V* with values in R. Let £H be the corresponding zeta function on Pic ***V*** ® C. Batyrev, Manin and Tschinkel conjectured that this function is holomorphic on a cone with appex at the anticanonical sheaf ***Uy1.*** Moreover it is possible to give a conjectural formula for the principal term of this function in a neighbourhood of this point. The aim of this paper is to give new evidence for this formula by lifting it to the universal torsors over ***V.***

Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties

VICTOR V. BATYREV & YURI TSCHINKEL 299

Let £ = (L,||-||v) be an ample metrized invertible sheaf on a smooth quasi-projective algebraic variety ***V*** over a number field ***F.*** Denote by ***N(V, C, B)*** the number of rational points in ***V*** having £-height < ***B.*** In this paper we consider the problem of a geometric and arithmetic interpretation of the asymptotic for iV(V, £, ***B)*** as ***B*** —> oc in connection with recent conjectures of Fujita concerning the Minimal Model Program for polarized algebraic varieties.

We introduce the notions of ***C-primitive varieties*** and ***C-primitive fibrations.*** For ^-primitive varieties ***V*** over ***F*** we propose a method to define an adelic Tamagawa number ***TC(V)*** which is a generalization of the Tamagawa number ***T(V)*** introduced by Peyre for smooth Fano varieties. Our method allows us to construct Tamagawa numbers for Q-Fano varieties with at worst canonical singularities.

In a series of examples of smooth polarized varieties and singular Fano varieties we show that our Tamagawa numbers express the dependence of the asymptotic of iV(V, £, ***B)*** on the choice of f-adic metrics on ***C.***