

# *Astérisque*

ETIENNE FOUVRY

**Sur la hauteur des points d'une certaine surface  
cubique singulière**

*Astérisque*, tome 251 (1998), p. 31-49

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1998\\_\\_251\\_\\_31\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__251__31_0)

© Société mathématique de France, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LA HAUTEUR DES POINTS D'UNE CERTAINE SURFACE CUBIQUE SINGULIÈRE

par

Etienne Fouvry

---

**Résumé.** — Par une paramétrisation des solutions de l'équation

$$x_1 x_2 x_3 = t^3, \quad (x_1, x_2, x_3, t) = 1$$

et par des méthodes élémentaires de théorie analytique des nombres, on montre que le nombre de points de coordonnées non nulles, de hauteur canonique inférieure à  $X$ , de la surface cubique projective de  $\mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$  d'équation

$$X_1 X_2 X_3 = T^3,$$

est, pour  $X \rightarrow \infty$ , équivalent à  $c_0 X \log^6 X$ , où  $c_0$  est une certaine constante  $> 0$ .

### 1. Introduction

Cet article a été motivé par le récent travail de Batyrev et Tschinkel ([B–T1], [B–T2], [B–T3]), concernant le nombre de points de hauteur inférieure à une certaine borne  $X$  tendant vers l'infini, sur des variétés toriques projectives lisses sur un corps de nombres quelconque, par rapport à des plongements projectifs arbitraires.

Nous traitons ici, le cas très particulier de la variété  $\mathcal{V}$  de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$ , d'équation

$$X_1 X_2 X_3 = T^3.$$

Soit  $V(X)$  le cardinal de l'ensemble des points de  $\mathcal{V}$  de coordonnées non nulles et de hauteur au plus égale à  $X$ .

L'étude de  $V(X)$  est un cas particulier de ([B–T2] Theorem 1.4) mais aussi de ([B–T1] Corollary 7.4). Toutefois, il faut remarquer que, dans ces deux articles, il est question de variétés toriques lisses. Le traitement de la cubique singulière  $\mathcal{V}$ , se fait par une résolution de singularités qui fournit ainsi une variété torique lisse. On utilise la fonctorialité des hauteurs pour se ramener au résultat de [B–T2]. Cette délicate réduction est développée, dans un cadre plus général, dans [B–T3].

---

*Classification mathématique par sujets (1991).* — Primaire 11D72; secondaire 14M25.

*Mots clefs.* — Surface cubique, hauteur.

L'objet de cet article est de montrer que des méthodes classiques de théorie analytique des nombres conduisent elles-aussi à un équivalent asymptotique de  $V(X)$  pour  $X \rightarrow \infty$ . Nous montrerons le

**Théorème 1.1.** — *Pour  $X \rightarrow \infty$ , on a la relation*

$$(1) \quad V(X) = (c_0 + o(1))X \log^6 X,$$

où  $c_0$  est une constante absolue, strictement positive.

Remarquons, dans un premier temps, que  $V(X)$  est aussi le cardinal des quadruplets d'entiers relatifs  $(x, y, z, t)$  vérifiant

$$(x, y, z, t) = 1; \quad 1 \leq x, |y|, |z|, |t| \leq X \quad \text{et} \quad xyz = t^3.$$

En jouant sur les signes, on voit qu'on a l'égalité

$$V(X) = 4V^+(X),$$

avec

$$V^+(X) = \#\{(x, y, z, t) \mid 1 \leq x, y, z, t \leq X, (x, y, z, t) = 1, xyz = t^3\}.$$

Il est intéressant de noter que des altérations, apparemment anodines, de la définition de  $V^+(X)$ , perturbent radicalement son ordre de grandeur asymptotique : on a d'une part

$$V_1^+(X) := \#\left\{(x, y, z, t) \left| \begin{array}{l} (x, y) = (y, z) = (z, x) = 1, \\ 1 \leq x, y, z, t \leq X \\ xyz = t^3 \end{array} \right. \right\} \sim c_1 X$$

(avec  $c_1$  constante strictement positive, en effet les restrictions précédentes donnent pour paramétrisations des solutions à  $xyz = t^3$ , les quadruplets de la forme  $(u^3, v^3, w^3, uvw)$  avec  $(u, v) = (v, w) = (w, u) = 1$  et  $1 \leq u, v, w \leq X^{\frac{1}{3}}$ ) et d'autre part

$$V_2^+(X) := \#\{(x, y, z, t) \mid 1 \leq t \leq X; (x, y, z, t) = 1 \text{ et } xyz = t^3\} \\ \sim c_2 X \log^8 X$$

(pour ce faire, on passe par la fonction arithmétique  $\alpha$ , qui sera définie au paragraphe 2.1, par le Lemme 2.1 et par un modeste théorème taubérien pour écrire

$$V_2^+(X) = \sum_{t \leq X} \alpha(t) \sim c_2 X \log^8 X,$$

où  $c_2$  est la valeur en 1 de la série de Dirichlet  $(\sum_n \alpha(n)n^{-s})\zeta^{-9}(s)$ .)

Ces variations ont le mérite de convaincre de l'importance intrinsèque des conditions de la définition de  $V^+(X)$ .

Pour revenir à la formule (1), la constante  $c_0$  peut être décrite explicitement, de même que le  $o(1)$  peut être précisé, tout au moins en théorie. En effet, les méthodes qui suivent sont absolument classiques, n'apportent rien de vraiment nouveau en

théorie analytique des nombres, mais sont extrêmement lourdes par le nombre très élevé de variables de sommation engendrées par les différentes transformations. Ce qui suit peut, en principe, être transposé à l'équation

$$X_1 X_2 X_3 X_4 = T^4,$$

mais la démarche devient totalement asphyxiante par le nombres de variables de sommation qu'il faut gérer.

Cet article a été écrit à la cordiale invite de V. Batyrev, J-L. Colliot-Thélène, E. Peyre et Y. Tschinkel et a bénéficié de conversations avec J. Brüder et H. Iwaniec. Que ces différentes personnes soient ici remerciées !

## 2. Transformations de $V^+(X)$ .

L'idée de base des fastidieuses transformations qui vont suivre, est de se ramener à une équation de la forme  $xyz = t^3$  mais avec les conditions plus fortes de coprimarité  $(x, y) = (y, z) = (z, x) = 1$ . On a alors une représentation paramétrique des solutions en  $(x, y, z, t) = (u^3, v^3, w^3, uvw)$  avec  $(u, v) = (v, w) = (w, u) = 1$ , ce qui est beaucoup plus facile à compter (voir  $V_1^+(X)$  ci-dessus).

Puisque les conditions  $1 \leq x, y, z \leq X$  entraînent  $t \leq X$  et que  $(x, y, z) = 1$  implique  $(x, y, z, t) = 1$ , le cardinal étudié s'écrit aussi, après un changement de notations, sous la forme

$$V^+(X) = \# \left\{ (x_1, x_2, x_3, t) \left| \begin{cases} 1 \leq x_1, x_2, x_3 \leq X, \\ (x_1, x_2, x_3) = 1, \\ x_1 x_2 x_3 = t^3 \end{cases} \right. \right\}.$$

Soit  $d_1 = (x_2, x_3)$ , alors on a l'égalité

$$V^+(X) = \# \left\{ (d_1, x_1, x'_2, x'_3, t) \left| \begin{cases} 1 \leq d_1, x_1 \leq X, \\ 1 \leq d_1 x'_2, d_1 x'_3 \leq X, \\ (x'_2, x'_3) = (d_1, x_1) = 1, \\ d_1^2 x_1 x'_2 x'_3 = t^3 \end{cases} \right. \right\},$$

puis posant  $d_2 = (x_1, x'_3)$ , on a

$$V^+(X) = \# \left\{ (d_1, d_2, x'_1, x'_2, x''_3, t) \left| \begin{cases} 1 \leq d_1, d_2 \leq X, \\ 1 \leq d_2 x'_1, d_1 x'_2, d_1 d_2 x''_3 \leq X, \\ (x'_1 x'_2, x''_3) = 1, \\ (d_1, d_2) = (d_1, x'_1) = (d_2, x'_2) = 1, \\ d_1^2 d_2^2 x'_1 x'_2 x''_3 = t^3 \end{cases} \right. \right\},$$

enfin, en posant  $d_3 = (x'_1, x'_2)$ , on parvient, après un changement évident de notations, à

(2)

$$V^+(X) = \# \left\{ (d_1, d_2, d_3, x_1, x_2, x_3, t) \left| \begin{cases} 1 \leq d_2 d_3 x_1, d_1 d_3 x_2, d_1 d_2 x_3 \leq X, \\ (x_2, x_3) = (x_3, x_1) = (x_1, x_2) = 1, \\ (d_1, d_2) = (d_1, d_3) = (d_2, d_3) = 1, \\ (d_1, x_1) = (d_2, x_2) = (d_3, x_3) = 1, \\ d_1^2 d_2^2 d_3^2 x_1 x_2 x_3 = t^3 \end{cases} \right. \right\}.$$

**2.1. Hypothèses sur les  $d_i$ .** — L'objet de ce qui suit est de prouver qu'on peut, pour ainsi dire, se ramener au cas où  $d_1, d_2$  et  $d_3$  sont sans facteur carré.

Notons  $\alpha(t)$  le nombre de solutions à l'équation

$$t^3 = xyz, \quad (x, y, z) = 1;$$

sans aucune contrainte de taille sur  $x, y$  et  $z$ . Nous aurons besoin du

**Lemme 2.1.** — *On a les propriétés suivantes :*

- La fonction  $\alpha$  est multiplicative.
- Pour tout entier  $a \geq 1$  et tout  $p$  premier, on a  $\alpha(p^a) = 9a$ .
- Pour tout  $m$  et  $n$  on a l'inégalité  $\alpha(mn) \leq \alpha(m)\alpha(n)$ .

*Démonstration.* — Seule la deuxième assertion mérite un peu de soin. On voit que  $\alpha(p^a)$  est aussi le nombre de solutions à l'équation  $3a = a_1 + a_2 + a_3$  avec les  $a_i$  entiers positifs ou nuls, vérifiant aussi  $a_1 a_2 a_3 = 0$ . Un dénombrement direct donne le résultat.  $\square$

Pour  $d \geq 1$ , on dissocie  $d$  en  $d = d^\circ d^\dagger$ , où  $d^\circ$  est le plus grand entier *squarefull* divisant  $d$  (rappelons qu'un entier  $n$  est *squarefull*, s'il vérifie l'implication  $p|n \Rightarrow p^2|n$ ). Ainsi  $d^\dagger$  est sans facteur carré, premier avec  $d^\circ$  et, par exemple, on a  $(600)^\circ = 200$  et  $(600)^\dagger = 3$ . On pose

$$\mathcal{L} = \log X, \quad L = \mathcal{L}^7.$$

Nous allons montrer que la contribution (notée  $A(L)$ ) à (2), des 7-uplets tels que  $d_1^\circ \geq L$  est négligeable. En effet, cette contribution vérifie

$$(3) \quad A(L) \leq \sum_{\ell \text{ squarefull} \geq L} \sum_{\substack{t \leq X \\ \Xi(\ell)|t}} \alpha(t);$$

où  $\Xi$  est la fonction multiplicative définie sur les puissances de nombres premiers par  $\Xi(p) = p$ ,  $\Xi(p^2) = p^2$ ,  $\Xi(p^3) = p^2, \dots$  et plus généralement  $\Xi(p^a) = p^b$  où  $b$  est le plus petit entier tel que  $3b \geq 2a$ . En effet, si  $p^a | d_1$ , l'égalité  $d_1^2 d_2^2 d_3^2 x_1 x_2 x_3 = t^3$  entraîne  $p^{2a} | t^3$ , donc la valuation  $p$ -adique de  $t^3$  est supérieure ou égale au plus petit multiple de 3 qui dépasse  $2a$ .

D'après le Lemme 2.1 et (3), on a l'inégalité

$$A(L) \leq \sum_{\ell \text{ squarefull} \geq L} \alpha(\Xi(\ell)) \sum_{n \leq X/\Xi(\ell)} \alpha(n),$$

puis, en sommant la fonction multiplicative  $\alpha$ , on a

$$A \ll X \mathcal{L}^8 \sum_{\ell \text{ squarefull} > L} \frac{\alpha(\Xi(\ell))}{\Xi(\ell)}.$$

Par la méthode de Rankin qui, rappelons-le, consiste à majorer la fonction caractéristique de l'intervalle  $[L, \infty[$  par  $(\frac{\ell}{L})^\varepsilon$ , on a, pour tout  $0 < \varepsilon < 1/3$ , la relation

$$\begin{aligned} A(L) &\ll X \mathcal{L}^8 \sum_{\ell \text{ squarefull}} \frac{\alpha(\Xi(\ell))}{\Xi(\ell)} \left(\frac{\ell}{L}\right)^\varepsilon \\ &\ll X \mathcal{L}^8 L^{-\varepsilon} \prod_p \left(1 + \frac{18}{p^{2-2\varepsilon}} + \frac{18}{p^{2-3\varepsilon}} + \frac{27}{p^{3-4\varepsilon}} + \dots\right) \\ &\ll X \mathcal{L}^8 L^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

On a donc la relation

$$(4) \quad A(L) = o(X \mathcal{L}^6),$$

en prenant  $\varepsilon$  très proche de  $1/3$ .

En raisonnant de même sur  $d_2$  et  $d_3$ , on peut, avec une erreur négligeable, insérer dans la définition (2) de  $V^+(X)$ , les conditions supplémentaires

$$d_1^\diamond, d_2^\diamond, d_3^\diamond < L,$$

ce qui implique que tout diviseur premier d'un  $d_i$ , supérieur à  $\mathcal{L}^{\frac{7}{2}}$  apparaît avec l'exposant 1.

**2.2. Deuxième étape de transformation.** — Cette étape peut paraître bien absconse si on n'a pas pris le temps de saisir sa motivation sur un cas particulier : Imaginons que nous soyons intéressés par la contribution dans (2) des cas où

$$d_1 = p^2 (= d_1^\diamond), \quad d_2 = d_3 = 1.$$

L'équation est donc  $x_1 \cdot (p^2 x_2) \cdot (p^2 x_3) = t^3$ . Puisque le second membre est un cube on a, pour des raisons de coprimauté, l'une ou l'autre des deux éventualités suivantes :

- $p^2$  divise  $x_2$  (alors  $v_p(x_2) \equiv 2$  modulo 3 et  $v_p(x_3) = 0$ ),
- $p^2$  divise  $x_3$  (alors  $v_p(x_3) \equiv 2$  modulo 3 et  $v_p(x_2) = 0$ ).

Par contre si

$$d_1 = p^3 (= d_1^\diamond), \quad d_2 = d_3 = 1,$$

l'équation est  $x_1 \cdot (p^3 x_2) \cdot (p^3 x_3) = t^3$  qui conduit alors à trois éventualités qui s'excluent mutuellement :

- $p$  ne divise pas  $x_2 x_3$  (alors  $v_p(x_1) = v_p(x_2) = v_p(x_3) = 0$ ) ;

- $p^3$  divise  $x_2$  (alors  $v_p(x_1) = v_p(x_3) = 0$ ,  $v_p(x_2) \equiv 0$  modulo 3 et  $v_p(x_2 p^{-3}) \geq 0$ );
- $p^3$  divise  $x_3$  (alors  $v_p(x_1) = v_p(x_2) = 0$ ,  $v_p(x_3) \equiv 0$  modulo 3 et  $v_p(x_3 p^{-3}) \geq 0$ ).

Il reste à mettre dans un cadre formel toutes ces éventualités lorsque les  $d_i^\circ$  ont un nombre quelconque de facteurs premiers. Soient  $\ell_1, \ell_2$  et  $\ell_3$  les parties *squarefull* de  $d_1, d_2$  et  $d_3$ , les  $\ell_i$  sont donc premiers deux à deux, d'après (2). Nous sommes en présence de l'équation

$$(5) \quad (\ell_2 \ell_3 x_1) \cdot (\ell_1 \ell_3 x_2) \cdot (\ell_1 \ell_2 x_3) = t^3,$$

avec  $(x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_2)$  sans facteur carré,

$$\begin{aligned} (\ell_1, x_2, x_3) &= (x_1, \ell_2, x_3) = (x_1, x_2, \ell_3) = 1 \\ (\ell_1, x_1) &= (\ell_2, x_2) = (\ell_3, x_3) = 1 \\ (x_1, x_2, x_3) &= 1. \end{aligned}$$

Dans la formule (5), chaque terme à l'intérieur des parenthèses  $(\dots)$  est inférieur à  $X$ .

Soit  $\lambda(n)$  le plus petit entier tel que  $n\lambda(n)$  soit le cube d'un entier. On décompose  $\lambda(\ell_1^2)$  sous la forme

$$\lambda(\ell_1^2) = \mu_1^{(2)} \mu_1^{(3)} \text{ avec } (\mu_1^{(2)}, \mu_1^{(3)}) = 1.$$

On désigne par  $\mathfrak{P}_1$  l'ensemble des nombres premiers divisant  $\ell_1^2$  mais pas  $\lambda(\ell_1^2)$ . On désigne par  $(\mathfrak{P}_1^{(2)}, \mathfrak{P}_1^{(3)})$  un couple quelconque de sous-ensembles de  $\mathfrak{P}_1$  dont la réunion est  $\mathfrak{P}_1$ . On note par  $P_1^{(2)}$  le produit des éléments de  $\mathfrak{P}_1^{(2)}$  et par  $\overline{\mathfrak{P}_1^{(2)}}$  le complémentaire de  $\mathfrak{P}_1^{(2)}$  dans  $\mathfrak{P}_1$ .

Grâce à (4), on voit qu'on a l'égalité

$$(6) \quad V^+(X) = \sum_{\ell_i} \sum_{\mu_i^{(j)}} \sum_{\mathfrak{P}_i^{(j)}} V(\ell_i, \mu_i^{(j)}, \mathfrak{P}_i^{(j)}) + o(X\mathcal{L}^6),$$

où

- $V(\ell_i, \mu_i^{(j)}, \mathfrak{P}_i^{(j)})$  désigne le nombre de  $(y_1, y_2, y_3, t)$  vérifiant les équations :

$$(7) \quad \begin{aligned} t^3 &= (\ell_2 \ell_3 \mu_2^{(1)} \mu_3^{(1)} \overline{P_2^{(1)}}^3 \overline{P_3^{(1)}}^3 y_1) \cdot (\ell_1 \ell_3 \mu_1^{(2)} \mu_3^{(2)} \overline{P_1^{(2)}}^3 \overline{P_3^{(2)}}^3 y_2) \\ &\quad \cdot (\ell_1 \ell_2 \mu_1^{(3)} \mu_2^{(3)} \overline{P_1^{(3)}}^3 \overline{P_2^{(3)}}^3 y_3) \end{aligned}$$

avec  $(y_1, y_2, y_3) = 1, (y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_1)$  sans facteur carré,

$$(\ell_1, y_2, y_3) = (y_1, \ell_2, y_3) = (y_1, y_2, \ell_3) = 1$$

et

$$\begin{aligned} (y_1, \ell_1 \mu_2^{(3)} \mu_3^{(2)} P_2^{(1)} P_3^{(1)}) &= (y_2, \ell_2 \mu_1^{(3)} \mu_3^{(1)} P_1^{(2)} P_3^{(2)}) \\ &= (y_3, \ell_3 \mu_1^{(2)} \mu_2^{(1)} P_1^{(3)} P_2^{(3)}) = 1, \end{aligned}$$

chaque terme à gauche de (7), situé à l'intérieur d'une parenthèse  $(\dots)$  étant inférieur à  $X$ .

• la somme est faite sur les  $\ell_1, \ell_2$  et  $\ell_3$  entiers *squarefull* inférieurs à  $L$ , premiers entre eux deux à deux, les  $\mu_i^{(j)}$  et  $\mathfrak{P}_i^{(j)}$  parcourant toutes les décompositions possibles de  $\lambda(\ell_i^2)$  et  $\mathfrak{P}_i$ , comme ci-dessus.

Puisque le nombre

$$(\ell_2 \ell_3 \mu_2^{(1)} \mu_3^{(1)} \overline{P_2^{(1)}}^3 \overline{P_3^{(1)}}^3) \cdot (\ell_1 \ell_3 \mu_1^{(2)} \mu_3^{(2)} \overline{P_1^{(2)}}^3 \overline{P_3^{(2)}}^3) \cdot (\ell_1 \ell_2 \mu_1^{(3)} \mu_2^{(3)} \overline{P_1^{(3)}}^3 \overline{P_2^{(3)}}^3)$$

est un cube parfait, on voit que chaque  $V(\ell_i, \mu_i^{(j)}, \mathfrak{P}_i^{(j)})$  est en fait de la forme

$$\mathcal{K}(X; \mathbf{b}; \mathbf{c}) = \mathcal{K}(X_1, X_2, X_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3),$$

qui désigne le nombre de solutions à l'équation

$$x_1 x_2 x_3 = t^3,$$

avec  $x_i \leq X_i$ ,  $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, b_1) = (x_2, b_2) = (x_3, b_3) = 1$  et  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_3)$  et  $(x_1, x_3)$  sans facteur carré et respectivement premiers avec  $c_3$ ,  $c_1$  et  $c_2$ , les  $b_i$  et  $c_i$  étant des entiers donnés tels que les  $c_i$  soient premiers entre eux deux à deux.

Signalons que dans notre application, les  $X_i$  seront égaux à  $X$  à une puissance de  $\mathcal{L}$  près, puisque chacun des  $\ell_i$  est inférieur à  $L$ . Pour des raisons évidentes de sobriété dans les notations, nous nous sommes restreints à l'étude soignée de

$$\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X, X; 1, 1, 1; 1, 1, 1).$$

Au paragraphe 6, sera ébauchée la façon de passer au cas général, pour pouvoir effectuer la sommation (6).

### 3. Étude de $\mathcal{K}(X)$ .

Rappelons que  $\mathcal{K}(X)$  est le nombre de solutions à l'équation

$$x_1 x_2 x_3 = t^3,$$

avec  $d_1 = (x_2, x_3)$ ,  $d_2 = (x_1, x_3)$  et  $d_3 = (x_1, x_2)$  sans facteur carré,  $x_1, x_2, x_3$  premiers entre eux et chaque  $x_i$  inférieur à  $X$ . On est ramené à une équation apparaissant déjà dans (2).

Pour parfaire le travail de coprimauté, on extrait de  $x_1/d_2$ , le produit  $\delta_1^{(2)}$  des facteurs premiers apparaissant aussi dans  $d_2$  et aussi le produit  $\delta_1^{(3)}$  des facteurs premiers de  $x_1/d_3$  apparaissant aussi dans  $d_3$ . On opère de même pour les autres variables. Finalement, après un nouveau changement de notations, on voit que  $\mathcal{K}(X)$  est le cardinal de l'ensemble des 13-uplets

$$(d_1, d_2, d_3, \delta_1^{(2)}, \delta_1^{(3)}, \delta_2^{(1)}, \delta_2^{(3)}, \delta_3^{(1)}, \delta_3^{(2)}, x_1, x_2, x_3, t)$$



d'entiers compris entre 1 et  $X$  vérifiant

$$(8) \quad (d_1, d_2) = (d_2, d_3) = (d_3, d_1) = 1, \quad d_1, d_2 \text{ et } d_3 \text{ sans facteur carré},$$

$$(9) \quad \delta_2^{(1)} \delta_3^{(1)} | d_1^\infty, \quad \delta_1^{(2)} \delta_3^{(2)} | d_2^\infty, \quad \delta_1^{(3)} \delta_2^{(3)} | d_3^\infty,$$

$$(10) \quad (\delta_2^{(1)}, \delta_3^{(1)}) = (\delta_1^{(2)}, \delta_3^{(2)}) = (\delta_1^{(3)}, \delta_2^{(3)}) = 1;$$

et une autre liste de conditions où apparaissent  $x_1, x_2$  et  $x_3$  :

$$(x_1 x_2 x_3, d_1 d_2 d_3) = (x_1, x_2) = (x_1, x_3) = (x_2, x_3) = 1,$$

$$\delta_1^{(2)} \delta_1^{(3)} d_2 d_3 x_1, d_1 \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} d_3 x_2, d_1 d_2 \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)} x_3 \leq X;$$

$$d_1^2 d_2^2 d_3^2 \delta_1^{(2)} \delta_1^{(3)} \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)} x_1 x_2 x_3 = t^3.$$

Les conditions de coprimauté entraînent que tous les entiers

$$x_1, x_2, x_3 \text{ et } d_1^2 d_2^2 d_3^2 \delta_1^{(2)} \delta_1^{(3)} \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)}$$

sont les cubes d'entiers, notés respectivement  $u_1, u_2, u_3$  et  $w$ , premiers entre eux deux à deux.

Le problème de l'évaluation de  $\mathcal{K}(X)$  est ainsi réduit à celui du nombre des 13-uplets

$$(d_1, d_2, d_3, \delta_1^{(2)}, \delta_1^{(3)}, \delta_2^{(1)}, \delta_2^{(3)}, \delta_3^{(1)}, \delta_3^{(2)}, x_1, x_2, x_3, t),$$

vérifiant les conditions (8), (9), (10) et les autres conditions

$$(11) \quad (u_1 u_2 u_3, d_1 d_2 d_3) = (u_1, u_2) = (u_3, u_1) = (u_2, u_3) = 1,$$

$$(12) \quad d_1^2 d_2^2 d_3^2 \delta_1^{(2)} \delta_1^{(3)} \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)} = w^3,$$

$$(13) \quad \begin{cases} 1 \leq u_1 \leq (X / (\delta_1^{(2)} \delta_1^{(3)} d_2 d_3))^{1/3}, \\ 1 \leq u_2 \leq (X / (d_1 \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} d_3))^{1/3}, \\ 1 \leq u_3 \leq (X / (d_1 d_2 \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)}))^{1/3}. \end{cases}$$

Le nombre de  $u_3$  vérifiant les conditions précédentes, lorsque les 12 autres variables sont fixées, est

$$(14)$$

$$\sum_{\substack{1 \leq u_3 \leq (X / (d_1 d_2 \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)}))^{1/3} \\ (u_3, u_1 u_2 d_1 d_2 d_3) = 1}} 1 = \psi_3(u_1 u_2 d_1 d_2 d_3) \left( \frac{X}{d_1 d_2 \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ + O\left(\min\{\tau(u_1 u_2 d_1 d_2 d_3), \left( \frac{X}{d_1 d_2 \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)}} \right)^{\frac{1}{3}}\}\right),$$

en utilisant le résultat classique :

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ (n,q)=1}} 1 = \psi_3(q)y + O(\min(\tau(q), y)),$$

avec  $\tau(q)$  nombre de diviseurs de l'entier  $q$  et  $\psi_3(q) = \varphi(q)/q$ . Rappelons aussi la majoration

$$(15) \quad \tau(q) = O\left(\exp\left(\frac{\log q}{\log \log q}\right)\right).$$

#### 4. Minoration de $\mathcal{K}(X)$ .

Il nous a semblé plus clair de séparer minoration et majoration de  $\mathcal{K}(X)$  pour accéder à l'équivalent asymptotique de cette quantité.

Soit

$$Z = \exp\left(\frac{\log X}{\sqrt{\log \log X}}\right).$$

Pour minorer  $\mathcal{K}(X)$  nous ajoutons à la liste de conditions (8), ..., (13) la condition

$$(16) \quad \delta_1^{(2)} \delta_1^{(3)} d_2 d_3, d_1 \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} d_3, d_1 d_2 \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)} \leq Y := XZ^{-1},$$

qui implique donc, que dans les inégalités (13), chaque variable  $u_i$  se déplace dans un intervalle assez long, à savoir de longueur au moins égal à  $Z^{\frac{1}{3}}$ .

La relation (14) et la remarque (15) conduisent donc à la minoration

$$(17) \quad \sum_{\substack{1 \leq u_3 \leq \left(X/(d_1 d_2 \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)})\right)^{1/3} \\ (u_3, u_1 u_2 d_1 d_2 d_3)=1}} 1 \geq (1 - o(1)) \cdot \psi_3(d_1 d_2 d_3) \cdot \psi_3(u_1) \cdot \psi_3(u_2) \\ \cdot \left(\frac{X}{d_1 d_2 \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

uniformément sous la condition (16).

Pour sommer sur  $u_2$ , nous utilisons la formule

$$(18) \quad \sum_{\substack{n \leq y \\ (n,q)=1}} \psi_3(n) = \frac{6}{\pi^2} \psi_2(q)y + O_\varepsilon\left(\min(y^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tau(q), y)\right),$$

où  $\psi_2(q)$  est définie par

$$\psi_2(q) = \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

La formule précédente s'obtient, par exemple, par la théorie des séries de Dirichlet et un peu d'analyse complexe, qui consiste à intégrer

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left( \sum_{(n,q)=1} \psi_3(n) n^{-s} \right) \frac{y^s}{s} ds$$

et à déformer le parcours d'intégration pour récupérer le résidu en  $s = 1$ .

Nous appliquons (18) avec  $y = (X/(d_1 \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} d_3))^{1/3}$ ,  $q = u_1 d_1 d_2 d_3$ . Les restrictions (16) permettent de transformer (18) en une inégalité en introduisant un nouveau facteur  $(1 - o(1))$ . Nous sommes ainsi parvenus à

$$(19) \quad \sum_{\substack{1 \leq u_2 \leq \left( X/(d_1 \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} d_3) \right)^{1/3} \\ (u_2, u_1 d_1 d_2 d_3) = 1}} \sum_{\substack{1 \leq u_3 \leq \left( X/(d_1 d_2 \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)}) \right)^{1/3} \\ (u_3, u_1 u_2 d_1 d_2 d_3) = 1}} 1 \\ \geq \frac{6}{\pi^2} (1 - o(1)) \cdot (\psi_2 \cdot \psi_3)(d_1 d_2 d_3) (\psi_2 \cdot \psi_3)(u_1) \frac{X^{\frac{2}{3}}}{(d_1^2 d_2 d_3 \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)})^{\frac{1}{3}}}.$$

On somme maintenant sur  $u_1$ , en utilisant la formule

$$(20) \quad \sum_{\substack{n \leq y \\ (n,q)=1}} (\psi_2 \cdot \psi_3)(n) = \alpha_0 \psi_1(q) y + O_\varepsilon \left( \min(y^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tau(q), y) \right),$$

avec  $\alpha_0$  constante absolue définie par

$$\alpha_0 = \prod_p \left( 1 - \frac{2}{p(p+1)} \right),$$

et

$$\psi_1(q) = \prod_{p|q} \left( 1 + \frac{1}{p+1} \right)^{-1}.$$

Ici aussi, on utilise (20) sous forme d'une minoration uniforme, toujours grâce à (16) et la formule (19) fournit la minoration

$$(21) \quad \mathcal{K}(X) \geq (1 - o(1)) \cdot \frac{6}{\pi^2} \cdot \alpha_0 \cdot X \\ \cdot \sum_{(d_1, d_2, d_3, \delta_1^{(2)}, \delta_1^{(3)}, \delta_2^{(1)}, \delta_2^{(3)}, \delta_3^{(1)}, \delta_3^{(2)})} \psi(d_1) \psi(d_2) \psi(d_3) \left( \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2 \delta_1^{(2)} \delta_1^{(3)} \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \geq (1 - o(1)) \frac{6}{\pi^2} \cdot \alpha_0 \cdot X \cdot \mathcal{B}(Y);$$

par définition, la somme étant faite sous les conditions (8), (9), (10), (12) et (16) et  $\psi$  est le produit  $\psi = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3$ . Signalons que, dans  $\mathcal{B}(Y)$ , les variables apparaissent

au dénominateur, ce qui laisse supposer que cette expression a un comportement plus docile.

**4.1. Exploitation de la condition (12).** — Nous utilisons les conditions de coprimauté qui lient les  $d_i$  et les  $\delta_i^{(j)}$  pour écrire que (12) est équivalente aux trois équations

$$(22) \quad \delta_2^{(1)} \delta_3^{(1)} d_1^2 = w_1^3, \quad \delta_1^{(2)} \delta_3^{(2)} d_2^2 = w_2^3, \quad \delta_1^{(3)} \delta_2^{(3)} d_3^2 = w_3^3.$$

C'est ici que nous utilisons le fait que  $d_1, d_2$  et  $d_3$  sont sans facteur carré (ce qui entraîne, avec les notations du paragraphe 2, que  $\lambda(d_i^2) = d_i$ ). Écrivons  $d_1 = \nu_2^{(1)} \nu_3^{(1)}$ ,  $\nu_2^{(1)}$  et  $\nu_3^{(1)}$  sont premiers entre eux, sans facteur carré. L'équation

$$\delta_2^{(1)} \delta_3^{(1)} d_1^2 = w_1^3$$

de (22) admet pour uniques solutions les

$$\delta_2^{(1)} = \nu_2^{(1)} (v_2^{(1)})^3, \quad \delta_3^{(1)} = \nu_3^{(1)} (v_3^{(1)})^3,$$

où  $v_2^{(1)}$  et  $v_3^{(1)}$  sont des entiers premiers entre eux, divisant  $d_1^\infty$ . On opère de même sur les autres variables. La somme  $\mathcal{B}(Y)$  est ainsi remaniée en

$$(23) \quad \mathcal{B}(Y) = \sum_{\nu} \frac{\psi(\nu_2^{(1)}) \psi(\nu_3^{(1)}) \psi(\nu_1^{(2)}) \psi(\nu_3^{(2)}) \psi(\nu_1^{(3)}) \psi(\nu_2^{(3)})}{\nu_2^{(1)} \nu_3^{(1)} \nu_1^{(2)} \nu_3^{(2)} \nu_1^{(3)} \nu_2^{(3)}} \Lambda(\nu, Y),$$

la somme étant faite sur les  $\nu = (\nu_i^{(j)})$  ( $1 \leq i \neq j \leq 3$ ), où les  $\nu_i^{(j)}$  sont premiers entre eux deux à deux, sans facteur carré.

Dans (23), la quantité  $\Lambda(\nu, Y)$  est définie par

$$\Lambda(\nu, Y) = \sum_{\mathbf{v}} \frac{1}{v_2^{(1)} v_3^{(1)} v_1^{(2)} v_3^{(2)} v_1^{(3)} v_2^{(3)}};$$

où les  $\mathbf{v} = (v_i^{(j)})$  ( $1 \leq i \neq j \leq 3$ ), sont tels que les  $v_i^{(j)}$  sont premiers entre eux deux à deux, sont tels que

$$(24) \quad v_2^{(1)} v_3^{(1)} | (\nu_2^{(1)} \nu_3^{(1)})^\infty, \quad v_1^{(2)} v_3^{(2)} | (\nu_1^{(2)} \nu_3^{(2)})^\infty, \quad v_1^{(3)} v_2^{(3)} | (\nu_1^{(3)} \nu_2^{(3)})^\infty;$$

et sont tels que les inégalités suivantes (qui sont des réécritures de (16))

$$(25) \quad (\nu_1^{(2)})^2 (\nu_1^{(3)})^2 \nu_3^{(2)} \nu_2^{(3)} (v_1^{(2)})^3 (v_1^{(3)})^3 \leq Y;$$

$$(26) \quad (\nu_2^{(1)})^2 (\nu_2^{(3)})^2 \nu_3^{(1)} \nu_1^{(3)} (v_2^{(1)})^3 (v_2^{(3)})^3 \leq Y;$$

$$(27) \quad (\nu_3^{(1)})^2 (\nu_3^{(2)})^2 \nu_1^{(2)} \nu_2^{(1)} (v_3^{(1)})^3 (v_3^{(2)})^3 \leq Y$$

soient satisfaites.

**4.2. Minoration de  $\Lambda(\nu, Y)$ .** — Maintenant, on pose  $Y_1 = YZ^{-1}$  et  $Y_2 = YZ^{-2}$  et soient les six autres conditions sur les variables de sommation :

$$(28) \quad (\nu_1^{(2)})^2 (\nu_1^{(3)})^2 \nu_3^{(2)} \nu_2^{(3)} (v_1^{(2)})^3 \leq Y_1;$$

$$(29) \quad (\nu_2^{(1)})^2 (\nu_2^{(3)})^2 \nu_3^{(1)} \nu_1^{(3)} (v_2^{(1)})^3 \leq Y_1;$$

$$(30) \quad (\nu_3^{(1)})^2 (\nu_3^{(2)})^2 \nu_1^{(2)} \nu_2^{(1)} (v_3^{(1)})^3 \leq Y_1;$$

et

$$(31) \quad (\nu_1^{(2)})^2 (\nu_1^{(3)})^2 \nu_3^{(2)} \nu_2^{(3)} \leq Y_2;$$

$$(32) \quad (\nu_2^{(1)})^2 (\nu_2^{(3)})^2 \nu_3^{(1)} \nu_1^{(3)} \leq Y_2;$$

$$(33) \quad (\nu_3^{(1)})^2 (\nu_3^{(2)})^2 \nu_1^{(2)} \nu_2^{(1)} \leq Y_2.$$

Soit  $\Lambda(\nu, Y, Y_1, Y_2)$  défini de façon semblable à  $\Lambda(\nu, Y)$  mais avec les conditions de sommation (24), ..., (33). Puisque  $\Lambda(\nu, Y)$  est à termes positifs, on a l'inégalité

$$\Lambda(\nu, Y) \geq \Lambda(\nu, Y, Y_1, Y_2);$$

l'introduction des conditions supplémentaires (28), ..., (33), assure que, si on somme dans l'ordre  $v_1^{(3)}, v_2^{(3)}, v_3^{(2)}, v_1^{(2)}, v_2^{(1)}$  et  $v_3^{(1)}$ , chacune des variables  $v_i^{(j)}$  a un intervalle de variation au moins égal à  $Z^{\frac{1}{3}}$ , ce qui permet de faire apparaître une minoration uniforme grâce au

**Lemme 4.1.** — *Soit  $a$  un entier au moins égal à 1,  $y \geq 1$  et  $f$  une fonction fortement multiplicative (c'est-à-dire vérifiant  $f(p^k) = f(p)$  pour tout  $k \geq 1$ ), vérifiant l'inégalité  $0 \leq f(p) \leq 1$ . Uniformément sous les conditions précédentes, on a l'égalité*

$$\sum_{\substack{k|a^\infty \\ k \leq y}} \frac{f(k)}{k} = \prod_{p|a} \left(1 + \frac{f(p)}{p-1}\right) + O(y^{-\frac{1}{2}} \tau(a)).$$

*Démonstration.* — C'est une illustration de la méthode de Rankin ; on a l'égalité

$$\sum_{\substack{k|a^\infty \\ k \leq y}} \frac{f(k)}{k} = \prod_{p|a} \left(1 + \frac{f(p)}{p-1}\right) - \sum_{\substack{k|a^\infty \\ k > y}} \frac{f(k)}{k},$$

la dernière somme est inférieure à

$$\sum_{k|a^\infty} \frac{f(k)}{k} \left(\frac{k}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = y^{-\frac{1}{2}} \prod_{p|a} \left(1 + \frac{f(p)}{\sqrt{p}-1}\right) = O(y^{-\frac{1}{2}} \tau(a)). \quad \square$$

Ainsi, pour minorer  $\Lambda(\nu, Y, Y_1, Y_2)$ , nous commençons par sommer sur  $v_1^{(3)}$ , on applique le Lemme 4.1 avec un  $y$  défini par l'inégalité (25) – mais en tout état de

cause, vérifiant  $y \geq Z^{\frac{1}{3}}$ , d'après (28) – et avec  $a = \nu_1^{(3)} \nu_2^{(3)} / (v_2^{(3)}, \nu_1^{(3)} \nu_2^{(3)})$ , d'où la minoration uniforme

$$\sum_{v_1^{(3)}} \frac{1}{v_1^{(3)}} \geq (1 - o(1)) \prod_{p|\nu_1^{(3)} \nu_2^{(3)}} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{p|v_2^{(3)}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

puis en appliquant de nouveau le Lemme 4.1, on a la minoration

$$\sum_{v_2^{(3)}} \sum_{v_1^{(3)}} \frac{1}{v_1^{(3)} v_2^{(3)}} \geq (1 - o(1)) \prod_{p|\nu_1^{(3)} \nu_2^{(3)}} \left(1 + \frac{2}{p-1}\right).$$

Par un raisonnement identique sur les quatre autres variables  $v_3^{(2)}, v_1^{(2)}, v_2^{(1)}$  et  $v_3^{(1)}$ , nous accédons à la minoration

$$\Lambda(\nu, Y, Y_1, Y_2) \geq (1 - o(1)) \frac{1}{(\psi_2, \psi_3)(\nu_2^{(1)} \nu_3^{(1)} \nu_1^{(2)} \nu_3^{(2)} \nu_1^{(3)} \nu_2^{(3)})},$$

où les  $\psi_i$  sont définis aux paragraphes 3 et 4, puis en reportant dans (23) on a

$$\mathcal{B}(Y) \geq (1 - o(1)) \sum_{\nu} \frac{\psi_1(\nu_2^{(1)}) \psi_1(\nu_3^{(1)}) \psi_1(\nu_1^{(2)}) \psi_1(\nu_3^{(2)}) \psi_1(\nu_1^{(3)}) \psi_1(\nu_2^{(3)})}{\nu_2^{(1)} \nu_3^{(1)} \nu_1^{(2)} \nu_3^{(2)} \nu_1^{(3)} \nu_2^{(3)}};$$

les  $\nu_i^{(j)}$  étant sans facteur carrés, premiers entre eux deux à deux et vérifiant les relations (31), (32) et (33).

**4.3. Minoration de  $\mathcal{B}(Y)$ .** — La fin de la minoration de  $\mathcal{B}(Y)$  est une application itérée de la formule suivante

**Lemme 4.2.** — Soit  $f$  une fonction multiplicative vérifiant  $f(p) \geq 0$ ,  $1 - \frac{A}{p} \leq f(p) \leq 1$  (pour une certaine constante  $A > 0$ ) et  $f(p^k) = 0$  pour  $k \geq 2$ . On a alors, pour  $y \rightarrow \infty$ , l'égalité

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ (n,a)=1}} \frac{f(n)}{n} = \frac{\varphi(a)}{a} \prod_{p \nmid a} \left(1 + \frac{f(p)-1}{p} - \frac{f(p)}{p^2}\right) \log y + O_A \left( (\log y)^{\frac{9}{10}} \log \log a + \exp \left( (\log a)^{\frac{1}{2}} - (\log y)^{\frac{9}{10}} \right) \right).$$

**Remarque 4.3.** — Les exposants proposés n'ont aucun caractère d'optimalité, mais sont suffisants pour notre application. Les méthodes d'analyse complexe évoquées pour (18) et (20) donnent un développement asymptotique pour

$$\sum_{n \leq y, (n,a)=1} f(n).$$

Une intégration par parties fournit une formule plus précise pour  $\sum \frac{f(n)}{n}$ . Les méthodes employées seraient alors un peu plus profondes que celles qui suivent.

*Démonstration.* — Soit  $\tilde{f}$  la fonction multiplicative définie par  $\tilde{f}(n) = f(n)$  si  $(n, a) = 1$  et  $\tilde{f}(n) = 0$  autrement. En utilisant la convolution  $*$  de Möbius, la somme étudiée s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq y} \frac{(\tilde{f} * \mu * \mathbf{1})(n)}{n} &= \sum_{k \leq y} \frac{(\tilde{f} * \mu)(k)}{k} \sum_{m \leq y/k} \frac{1}{m} \\ &= \log y \sum_{k \leq y} \frac{(\tilde{f} * \mu)(k)}{k} + O\left(\sum_{k \leq y} \frac{|(\tilde{f} * \mu)(k)|}{k} \log k\right). \end{aligned}$$

Le terme principal provient de la série complète

$$\sum_k \frac{(\tilde{f} * \mu)(k)}{k}.$$

Pour contrôler l'erreur, nous utilisons la majoration

$$|(\tilde{f} * \mu)(k)| \leq \prod_{\substack{p \parallel k \\ p \nmid a}} \frac{A}{p},$$

qu'il est facile de vérifier. En utilisant la méthode de Rankin et en posant  $y_0 = \exp(4(\log y)^{\frac{9}{10}})$ , on majore chacun des trois termes d'erreur comme suit :

$$\begin{aligned} \log y \sum_{k > y} \frac{|(\tilde{f} * \mu)(k)|}{k} &\leq \log y \sum_k \frac{|(\tilde{f} * \mu)(k)|}{k} \left(\frac{k}{y}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\ll_A \log y \, y^{-\frac{1}{3}} \prod_{p|a} \left(1 + \frac{1}{p^{\frac{2}{3}}}\right) \\ &\ll_A y^{-\frac{1}{4}} \exp((\log a)^{\frac{1}{2}}); \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq y_0} \frac{|(\tilde{f} * \mu)(k)|}{k} \log k &\ll \log y_0 \prod_{p \leq y_0} \left(1 + \frac{A}{p^2}\right) \prod_{p|a} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ &\ll_A \log y_0 \log \log a \end{aligned}$$

enfin

$$\sum_{y_0 < k < y} \frac{|(\tilde{f} * \mu)(k)|}{k} \log k \leq \log y \sum_{k > y_0} \frac{|(\tilde{f} * \mu)(k)|}{k} \ll_A y_0^{-\frac{1}{4}} \exp((\log a)^{\frac{1}{2}}).$$

□

On applique ce lemme six fois, avec des choix à chaque fois différents pour la fonction  $f$ , l'entier  $a$  et le nombre  $y$  défini par (31), (32) et (33). On opère en outre

une sommation par partie pour tenir compte des lentes variations des facteurs  $\log$ ,  $\log^2, \dots, \log^5$ , d'où la minoration

$$\mathcal{B}(Y) \geq (1 - o(1))\alpha_1 \log^6 Y_2 = (1 - o(1))\alpha_1 \log^6 X,$$

avec  $\alpha_1$  constante qu'il est tout à fait possible d'évaluer avec du soin. En reportant dans (21), on obtient finalement

$$(34) \quad \mathcal{K}(X) \geq (1 - o(1)) \frac{6}{\pi^2} \alpha_0 \alpha_1 X \log^6 X.$$

### 5. Majoration de $\mathcal{K}(X)$ .

Il faut reprendre les calculs de minoration de  $\mathcal{K}(X)$  et évaluer chacune des pertes.

L'introduction des conditions restrictives (16) sur les  $d_i$  et les  $\delta_i^{(j)}$  entraîne au niveau de  $\mathcal{K}(X)$ , une erreur  $\mathcal{E}(X, Y)$  en

$$(35) \quad \mathcal{E}(X, Y) = O\left(\sum_{\substack{d_1, d_2, d_3, \\ \delta_1^{(2)}, \delta_1^{(3)}, \delta_2^{(1)}, \delta_2^{(3)}, \delta_3^{(1)}, \delta_3^{(2)}}} \left(\frac{X}{d_1^2 d_2^2 d_3^2 \delta_1^{(2)} \delta_1^{(3)} \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)}}\right)^{\frac{1}{3}}\right),$$

la somme étant faite sur les  $d_i$  et  $\delta_i^{(j)}$  vérifiant

$$(36) \quad Y < \delta_1^{(2)} \delta_1^{(3)} d_2 d_3 \leq X, \quad d_1 \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} d_3 \leq X, \quad d_1 d_2 \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)} \leq X,$$

et les conditions (8), (9), (10), (12) et chacun des  $d_i$  sans facteur carré. Pour établir cette majoration, on a utilisé la majoration triviale contenue dans (14), on a tiré avantage de la symétrie des variables et du fait que chaque fonction  $\psi_i$  est comprise entre 0 et 1. Autrement dit, on a la majoration

$$(37) \quad \mathcal{K}(X) \leq (1 + o(1)) \cdot \frac{6}{\pi^2} \cdot \alpha_0 \cdot X \cdot \mathcal{B}(Y) + O(\mathcal{E}(X, Y)).$$

À partir de (35), on a facilement la relation

$$(38) \quad \mathcal{E}(X, Y) = O\left(X\mathcal{F}(X) - X\mathcal{F}(Y)\right);$$

avec

$$\mathcal{F}(X) = \sum_{(d_1, d_2, d_3, \delta_1^{(2)}, \delta_1^{(3)}, \delta_2^{(1)}, \delta_2^{(3)}, \delta_3^{(1)}, \delta_3^{(2)})} \left(\frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2 \delta_1^{(2)} \delta_1^{(3)} \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)}}\right)^{\frac{1}{3}};$$

les intervalles de sommation (36) étant maintenant remplacés par

$$\delta_1^{(2)} \delta_1^{(3)} d_2 d_3 \leq X, \quad d_1 \delta_2^{(1)} \delta_2^{(3)} d_3 \leq X, \quad d_1 d_2 \delta_3^{(1)} \delta_3^{(2)} \leq X.$$



La quantité  $\mathcal{F}(Y)$  ressemble beaucoup à la quantité  $\mathcal{B}(Y)$ , introduite en (21), à la différence près que les fonctions multiplicatives  $\psi_i$  ont été remplacées par 1. Par une méthode identique, nous pouvons énoncer la minoration

$$(39) \quad \mathcal{F}(Y) \geq (1 - o(1))\alpha_2 \log^6 Y_2 = (1 - o(1))\alpha_2 \log^6 X,$$

où  $\alpha_2$  est une constante absolue positive.

La quantité  $\mathcal{F}(X)$  doit être majorée et c'est en quelque sorte plus facile que de la minorer. Nous écrivons, par similitude avec (23), l'égalité

$$\mathcal{F}(X) = \sum_{\nu} \frac{1}{\nu_2^{(1)} \nu_3^{(1)} \nu_1^{(2)} \nu_3^{(2)} \nu_1^{(3)} \nu_2^{(3)}} \Lambda(\nu, X),$$

où  $\Lambda(\nu, X)$  est défini au paragraphe 4, mais en remplaçant, naturellement, dans (25), (26) et (27), le paramètre  $Y$  par  $X$ . La série  $\Lambda(\nu, X)$  est à termes positifs, donc on a l'inégalité

$$\Lambda(\nu, X) \leq \tilde{\Lambda}(\nu, X),$$

où  $\tilde{\Lambda}(\nu, X)$  est défini comme  $\Lambda(\nu, X)$  à la différence près que les inégalités (25), (26) et (27) sont remplacées par

$$\begin{aligned} (\nu_1^{(2)})^2 (\nu_1^{(3)})^2 \nu_3^{(2)} \nu_2^{(3)} &\leq X; \\ (\nu_2^{(1)})^2 (\nu_2^{(3)})^2 \nu_3^{(1)} \nu_1^{(3)} &\leq X; \\ (\nu_3^{(1)})^2 (\nu_3^{(2)})^2 \nu_1^{(2)} \nu_2^{(1)} &\leq X. \end{aligned}$$

Il n'y a donc plus aucune contrainte sur la taille des  $v_i^{(j)}$ . Les sommes sur les  $v_i^{(j)}$  sont des séries complètes, le Lemme 4.1 est donc inutile. Par une méthode absolument identique, on parvient à majoration

$$\mathcal{F}(X) \leq (1 + o(1))\alpha_2 \log^6 X,$$

qui, reportée dans (38), donne grâce à (39), la relation

$$(40) \quad \mathcal{E}(X, Y) = o(X \log^6 X).$$

Pour terminer la majoration de  $\mathcal{K}(X)$ , il reste à majorer  $\mathcal{B}(Y)$  (voir (37)). Par l'argument précédent on a l'inégalité

$$\Lambda(\nu, Y) \leq \tilde{\Lambda}(\nu, Y),$$

la série sur les  $v_i^{(j)}$  est complète, on a donc l'égalité

$$\tilde{\Lambda}(\nu, Y) = \frac{1}{(\psi_2 \cdot \psi_3)(\nu_2^{(1)} \nu_3^{(1)} \nu_1^{(2)} \nu_3^{(2)} \nu_1^{(3)} \nu_2^{(3)})},$$

d'où

$$\mathcal{B}(Y) \leq (1 + o(1))\alpha_1 \log^6 Y \leq (1 + o(1))\alpha_1 \log^6 X,$$

et, finalement, grâce à (37) et (40), on a l'inégalité

$$(41) \quad \mathcal{K}(X) \leq (1 + o(1)) \frac{6}{\pi^2} \alpha_0 \alpha_1 X \log^6 X.$$

## 6. Fin de la démonstration du théorème.

En combinant (34) et (41), nous avons donc démontré

$$\mathcal{K}(X, X, X; 1, 1, 1; 1, 1, 1) = (1 + o(1)) \alpha_3 X \log^6 X.$$

Une étude de la démonstration indique que la formule précédente s'étend à

$$\mathcal{K}\left(\frac{X}{a_1}, \frac{X}{a_2}, \frac{X}{a_3}; 1, 1, 1; 1, 1, 1\right) = (1 + o(1)) \alpha_3 \frac{X}{\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}} \cdot \log^6 X,$$

uniformément pour  $a_i \leq \mathcal{L}^A$ , avec  $A$  constante positive fixée –il suffit de remplacer  $X$  dans les parties droites des formules (17), (19) et (21) respectivement par  $\frac{X}{a_3}$ ,

$$\frac{X}{\sqrt{a_2 a_3}} \text{ et } \frac{X}{\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}.$$

Plus généralement, on a l'égalité

$$\mathcal{K} : \left( \frac{X}{a_1}, \frac{X}{a_2}, \frac{X}{a_3}; \mathbf{b}; \mathbf{c} \right) = (1 + o(1)) \alpha_3 \cdot \Theta(\mathbf{b}; \mathbf{c}) \frac{X}{\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}} \cdot \log^6 X,$$

uniformément pour les  $a_i$ , les  $b_i$  et les  $c_i$  inférieurs à  $\mathcal{L}^A$ . C'est ici qu'apparaît l'obstacle à un calcul explicite et assez aisé de la constante  $c_0$  apparaissant en (1). En effet la constante  $\Theta(\mathbf{b}; \mathbf{c})$  est produit de facteurs locaux sur les diviseurs premiers des  $b_i$ , des  $c_j$  et de leurs p.g.c.d. Pour se rendre compte de la difficulté d'écriture –mais non de théorie– il est bon de voir ce que donne le début du calcul de  $\Theta(\mathbf{b}; \mathbf{c})$ , par exemple, lors de la démonstration d'un analogue de (21) pour  $\mathcal{K}(\frac{X}{a_1}, \frac{X}{a_2}, \frac{X}{a_3}; \mathbf{b}; \mathbf{c})$ . La minoration (21) reste valable pour la quantité précédente à condition de

- remplacer  $X$  par  $\frac{X}{\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}$  (déjà signalé plus haut);
- sommer sur les  $d_i$  et les  $\delta_i^{(j)}$  non seulement sous les contraintes (8), (9), (10), (12) et (16) mais aussi sous la condition

$$(d_1, c_1 b_2 b_3) = (d_2, b_1 c_2 b_3) = (d_3, b_1 b_2 c_3) = 1;$$

- remplacer le facteur  $\psi(d_1 d_2 d_3)$  par

$$\psi(d_1 d_2 d_3) \cdot \frac{\psi_1(b_1 b_2 b_3) \psi_2((b_1, b_2)) \psi_2((b_1, b_3)) \psi_2((b_2, b_3)) \psi_3((b_1, b_2, b_3))}{\psi_1((d_1, b_1)) \psi_1((d_2, b_2)) \psi_1((d_3, b_3)) \psi_2^2((b_1, b_2, b_3))}.$$

Ce calcul et tous ceux qui conduisent à la valeur de  $\Theta(\mathbf{b}; \mathbf{c})$ , utilisent des estimations de sommes de la forme

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ (n, u)=1}} f(vn),$$

(pour  $u$  et  $v$  entiers et pour  $f$  fonction complètement multiplicative telle que  $1 - \frac{A}{p} \leq f(p) \leq 1$ ) et des généralisations de telles sommes.

On retiendra uniquement la propriété que  $\Theta(\mathbf{b}; \mathbf{c})$  est compris entre 0 et 1 : c'est une conséquence directe de l'inégalité triviale

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}; \mathbf{b}; \mathbf{c}) \leq \mathcal{K}(\mathbf{X}; 1, 1, 1; 1, 1, 1)$$

Par retour à la formule (6), on voit que, lorsque le triplet de nombres *square-full*  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$  premiers entre eux inférieurs à  $L$  est fixé, il y a, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $O((\ell_1 \ell_2 \ell_3)^\varepsilon)$  12-uplets de  $(\mu_i^{(j)}, \mathfrak{P}_i^{(j)})$  associés et qu'on a, avec les notations précédentes  $a_1 = \ell_2 \ell_3 \mu_2^{(1)} \mu_3^{(1)} \overline{P_2^{(1)}}^3 \overline{P_3^{(1)}}^3$ ,  $a_2$  et  $a_3$  définis de façon similaire (voir (7)), l'égalité

$$V^+(X) = \alpha_3 \cdot X \cdot \log^6 X \sum_{\ell_i} \sum_{\mu_i^{(j)}} \sum_{\mathfrak{P}_i^{(j)}} \frac{\Gamma(\ell_i, \mu_i^{(j)}, \mathfrak{P}_i^{(j)})}{\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}} (1 + o(1)) + o(X \mathcal{L}^6),$$

avec  $\Gamma(\dots)$  coefficient vérifiant  $0 < \Gamma(\dots) \leq 1$  et avec, pour conditions de sommation, celles de (6).

La série sur les  $\ell_i$  est alors convergente puisqu'elle est

$$\ll \sum_{\ell_i} \frac{(\ell_1 \ell_2 \ell_3)^\varepsilon}{\sqrt[3]{\ell_1^2 \ell_2^2 \ell_3^2}} \ll \prod_p \left( 1 + \frac{p^\varepsilon}{p^{\frac{4}{3}}} + \frac{p^{2\varepsilon}}{p^2} + \dots \right)^3 \ll 1,$$

ce qui termine la preuve du Théorème.

**Remarque 6.1.** — On voit que l'analyse complexe ne fait qu'une timide apparition dans ce travail. Un usage plus important des séries de Dirichlet ne peut qu'améliorer les résultats ci-dessus, tant en précision qu'en généralité. C'est l'objet d'un article, actuellement en préparation, de R. de la Bretèche. Il sera alors intéressant de confronter ses méthodes et ses résultats avec ceux de Batyrev et Tschinkel.

**Note ajoutée lors de la correction des épreuves :** Quelques mois après l'acceptation de cet article, nous avons reçu un preprint de D.R.Heath-Brown et B.Z.Moroz, dans lequel les auteurs donnent, par une démarche différente mais toujours élémentaire, un équivalent asymptotique de la quantité  $V(X)$  étudiée ici. Ils donnent même, explicitement, la valeur de la constante  $c_0$ . Le travail de R. de la Bretèche, évoqué ci-dessus, est publié dans le présent ouvrage.

### Références

- [B–T1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel : Manin's Conjecture for Toric Varieties ; J. of Algebraic Geometry (à paraître).
- [B–T2] ——— : Height Zeta functions of Toric Varieties ; Preprint de l'Ecole Normale Supérieure, Mars 1996, (à paraître dans Manin's Festschrift).
- [B–T3] ——— : Tamagawa Numbers of Polarized Algebraic Varieties (ce volume).

---

*reçu le 14 octobre 1996*

ETIENNE FOUVRY, Mathématique, Bâtiment 425, Université de Paris–Sud, F–91405 ORSAY Cedex,  
France • *E-mail* : Etienne.Fouvry@math.u-psud.fr