

Astérisque

C. BONATTI

R. LANGEVIN

Difféomorphismes de Smale des surfaces

Astérisque, tome 250 (1998)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__250__R3_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__250__R3_0)

© Société mathématique de France, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIFFÉOMORPHISMES DE SMALE DES SURFACES

C. Bonatti et R. Langevin
avec la collaboration de E. Jeandenans

Résumé. — Ce volume est consacré aux difféomorphismes C^1 -structurellement stables (appelés ici *difféomorphismes de Smale*) des surfaces compactes.

Le résultat principal montre que leur dynamique topologique globale (c'est à dire leur classe de conjugaison topologique) admet une présentation combinatoire finie. Pour cela nous considérons les *ensembles hyperboliques saturés* (c'est à dire égaux à l'intersection de leurs variétés invariantes) et nous construisons un voisinage invariant canonique (à conjugaison près) de ces ensembles (leur *domaine*). Nous montrons alors que la dynamique en restriction à un domaine est caractérisée par le *type géométrique* d'une partition de Markov de l'ensemble hyperbolique saturé : il s'agit d'une combinatoire décrivant comment (ordre, position et sens) l'image d'un rectangle de la partition coupe les rectangles de cette partition. La dynamique globale est alors obtenue en recollant les domaines le long de leur bord.

L'une des clefs de la longue démonstration du résultat principal est une analyse détaillée du *dessin des courbes invariantes* des difféomorphismes de Smale des surfaces (c'est à dire de leur position topologique dans la surface). En corollaire du résultat principal, nous montrons que le dessin des courbes invariantes caractérise en grande partie la dynamique topologique.

Certains types géométriques abstraits ne correspondent pas à des difféomorphismes de Smale de surfaces compactes. Nous définissons le *genre* d'un type géométrique abstrait, qui est un minorant du genre de toute surface compacte sur laquelle on peut réaliser le type géométrique comme partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé ; nous caractérisons alors les types géométriques de genre fini.

Abstract (Smale diffeomorphisms of surfaces). — This work is devoted to the C^1 -structurally stable diffeomorphisms (called here *Smale diffeomorphisms*) of compact surfaces.

The main result consists in a finite combinatorial presentation of the global topological dynamics (*i.e.* the class of topological conjugacy) of Smale diffeomorphisms. For that we consider *saturated hyperbolic sets* (*i.e.* hyperbolic sets which are equal to the intersection of their invariants manifolds) and we build some canonical (up to conjugacy) invariant neighbourhood (the *domain*) of these saturated sets. Then we prove

that the dynamics restricted to the domain is characterized by the *geometrical type* of some Markov partition of the hyperbolic set : it is a simple combinatorics describing in which order, position and direction the image of some rectangle of the Markov partition crosses the rectangles. Then the global dynamic is obtained by gluing the domains along their boundary.

One important step of the proof consists in a precise analysis of the topological position (the *pattern*) of the invariant curves of the Smale diffeomorphisms. As a corollary of the main result we get that the pattern of the invariant curves essentially characterizes the dynamics on the domains.

Some of the abstract geometrical types do not correspond to any Smale diffeomorphisms on compact surfaces. We define the genus of a type, as a minorant of the genus of any compact surface on which the type can be realized as the geometrical type of a Markov partition of some saturated hyperbolic set ; then we characterize the geometrical types of finite genus.

Nous dédions ce travail à
Bernadette, Arlette et Michel.

Table des matières

Introduction	1
0.1. La théorie qualitative des systèmes dynamiques	1
0.2. Le problème de classification des dynamiques hyperboliques	10
0.3. Classification des difféomorphismes de Smale des surfaces : présentation de nos principaux résultats	15
1. Pièces basiques et ensembles saturés	21
1.1. Rappels de définitions et de propriétés classiques des dynamiques « hyperboliques »	21
1.2. Ensembles saturés des difféomorphismes de Smale des surfaces	26
1.3. Voisinages invariants d'ensembles saturés en dimension 2	33
2. Géométrie des courbes invariantes	41
2.1. Points bords d'une pièce basique ou d'un ensemble hyperbolique saturé	41
2.2. s-arches, u-arches, rectangles	45
2.3. Zips et attracteurs hyperboliques	49
2.4. Où l'on utilise le fait que S est de genre fini	54
2.5. Itérés des arches dans un domaine invariant	61
2.6. Couplage de séparatrices, polygones d'arches	65
3. Domaine d'un ensemble hyperbolique saturé	71
3.1. Le domaine restreint et sa position dans un voisinage invariant	72
3.2. Domaine d'un ensemble hyperbolique saturé : définition et universalité	80
3.3. Le graphe de Smale et les domaines	85
3.4. Première réduction du problème de classification des difféomorphismes de Smale	88
4. Construction de partitions de Markov	93
4.1. Quelques définitions	94
4.2. Rails et rectangles	96
4.3. Découpage de rectangles et construction de partitions de Markov	100
4.4. Existence de familles adaptées de segments stables	105

5. Partitions de Markov géométrisées et conjugaison topologique de difféomorphismes de Smale	109
5.1. Le cas unidimensionnel	109
5.2. Partitions de Markov géométrisées	113
5.3. Feuilletages invariants	115
5.4. Conjugaison définie sur les rectangles d'une partition de Markov	118
5.5. Extension de la conjugaison au domaine	120
5.6. Présentation finie d'un difféomorphisme de Smale, et bilan du problème de classification	132
6. Les dessins et la dynamique	137
6.1. Points périodiques, pièces basiques, ordre de Smale	138
6.2. Conjugaison des dynamiques en restriction à K et L	141
6.3. Image d'une partition de Markov et extension de la conjugaison au domaine	143
6.4. Contre-exemples, généralisations, conjectures	146
7. Genre d'une partition de Markov géométrique et réalisabilité (par C. Bonatti et E. Jeandenans)	153
7.1. HV-surfaces à bord et à coins	154
7.2. Type géométrique sans double-bord et réalisation	158
7.3. Genre d'une partition de Markov géométrisée	164
7.4. Description des obstructions et énoncé du théorème	168
7.5. Lemmes topologiques	171
7.6. Domaines fondamentaux autonomes couplés	177
7.7. Sans obstruction, le type géométrique T est de genre fini	186
7.8. Les obstructions donnent à T un genre infini	196
7.9. Le cas des types géométriques à un seul rectangle	205
8. Pièces basiques et homéomorphismes pseudo-Anosov (par C. Bonatti et E. Jeandenans)	207
8.1. Rappels sur les homéomorphismes pseudo-Anosov	208
8.2. Mesures de Margulis	211
8.3. Semi-conjugaison d'une pièce basique sans impasse à un homéomorphisme pseudo-Anosov	212
8.4. Implosion des trous et des intervalles	216
8.5. Construction d'un voisinage d'un cycle	219
8.6. Implosion des trous et des intervalles au voisinage d'un cycle	225
Bibliographie	231

INTRODUCTION

0.1. La théorie qualitative des systèmes dynamiques

Les dynamiciens aiment à situer l'origine des Systèmes Dynamiques à Henri Poincaré, à la frontière entre le XIX^e et le XX^e siècle. L'objet des systèmes dynamiques était cependant étudié depuis longtemps par les physiciens et les mathématiciens : il s'agit de pouvoir prédire l'évolution à long terme d'un système quand on connaît la loi de son évolution, ce qui permet tout juste de prédire « l'instant d'après ». Si la loi d'évolution est une application f , il s'agit de comprendre le comportement, quand le temps n tend vers l'infini, des *orbites* de f , c'est-à-dire des suites $x, f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^n(x), \dots$. Si la loi d'évolution est infinitésimale, c'est-à-dire définie par une équation différentielle, un champ de vecteurs X , le théorème de Cauchy Lipschitz permet de définir les orbites $X_t(x)$ pour les petits temps t : le problème est à nouveau de comprendre le comportement de ces orbites quand le temps t tend vers l'infini. Jusqu'à la fin du siècle dernier, la solution semblait devoir passer par la résolution explicite de l'équation différentielle. Poincaré a montré que des raisonnements simples, de nature topologique, permettaient de donner une description qualitative du comportement asymptotique des orbites. Un exemple frappant est le célèbre théorème dit de Poincaré Bendixson, sur les champs de vecteurs de la sphère S^2 . Dans le cas de champs de vecteurs analytiques n'ayant qu'un nombre fini de zéros, ce théorème dit que toute orbite obéit à l'un des trois comportements suivants : soit elle « aboutit » à l'un des zéros du champ, soit elle s'enroule autour d'une orbite périodique régulière, soit enfin elle s'enroule sur un cycle singulier qui est un compact connexe formé d'un nombre fini d'orbites régulières joignant chacune deux zéros du champ.

C'est dans les années 60-70 que la théorie des systèmes dynamiques a véritablement pris son essor, autour en particulier de deux théories parallèles : la théorie hyperbolique de Smale, et celle des U -systèmes d'Anosov.

La théorie de Smale est née d'un modèle simple (le «fer à cheval») que Smale a proposé pour comprendre un phénomène découvert par Poincaré : il s'agissait d'une hypothèse géométrique en apparence anodine (une intersection transverse entre deux courbes invariantes d'un même point fixe) qui impliquait l'apparition d'une dynamique extrêmement riche et complexe.

Le paradigme de la théorie d'Anosov est le flot géodésique d'une surface de courbure négative : la théorie des U -systèmes dégage la propriété d'éloignement exponentiel des géodésiques voisines. Dans le langage de Smale, cette propriété est l'hyperbolicité.

Notre travail va consister à classer ce que l'on pourrait appeler des fers à cheval généralisés. Aussi allons nous détailler dans cette introduction le fer à cheval de Smale et la théorie hyperbolique, ainsi que l'histoire de la naissance de cette théorie.

0.1.1. Au voisinage d'un point fixe, variétés invariantes. — Les orbites les plus simples et les plus remarquables sont bien sûr les points fixes de la dynamique, et le premier pas pour structurer la dynamique d'un système a été de comprendre la dynamique, au voisinage d'un point fixe. On espère alors que la dynamique va être essentiellement donnée par la partie linéaire (de l'application ou du champ de vecteur) au point fixe. Ce sera vrai si cette partie linéaire est *hyperbolique* c'est-à-dire que ses valeurs propres sont toutes de module différent de 1 (cas des difféomorphismes) ou de partie réelle non-nulle (cas des champs de vecteurs). Le lecteur trouvera dans [PM, chapter II] un exposé élémentaire de la dynamique locale au voisinage d'un point fixe hyperbolique : la voici en quelques mots.

Une application linéaire inversible L de \mathbb{R}^n dans lui même est dite hyperbolique si toutes ses valeurs propres sont de module différent de 1. La dynamique d'une telle application est très simple, et les orbites des points de \mathbb{R}^n peuvent avoir (au plus) quatre types de comportement :

- L'origine 0, point fixe.
- Les points (différents de l'origine) du sous-espace vectoriel $E^s(L)$, somme des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de L de module inférieur à 1. Ce sous-espace est caractérisé dynamiquement comme étant l'ensemble des points dont l'orbite positive converge vers l'origine :

$$E^s(L) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} L^n(v) = 0 \right\}.$$

Cet espace s'appellera l'*espace stable* de L .

Remarquons que tout vecteur $v \in E^s(L) \setminus \{0\}$ a son orbite négative qui tend vers l'infini : $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|L^n(v)\| = +\infty$.

- Les points (différents de l'origine) du sous-espace vectoriel $E^u(L)$, somme des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de L de module supérieur à 1. Ce sous-espace est caractérisé dynamiquement comme étant l'ensemble

des points dont l'orbite négative converge vers l'origine :

$$E^u(L) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} L^n(v) = 0 \right\}.$$

Cet espace s'appellera l'*espace instable* de L .

Remarquons que tout vecteur $v \in E^u(L) \setminus \{0\}$ a son orbite positive qui tend vers l'infini : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L^n(v)\| = +\infty$.

- Les points de $\mathbb{R}^n \setminus (E^s(L) \cup E^u(L))$: leur orbite positive et leur orbite négative tendent vers l'infini.

Soit f un difféomorphisme d'une variété de dimension n , et p un point fixe de f . Notons L la différentielle de f en p . On dira que p est un *point fixe hyperbolique* si L est une application linéaire hyperbolique. La dynamique locale de f , au voisinage de p , est alors conjuguée (par un homéomorphisme) à celle de sa partie linéaire L (théorème de Hartman et Grobman, voir [PM]). Alors il existe un voisinage U du point p tel que les points de U ont quatre comportements possibles :

- Le point p est fixe.
- Tout point $x \in U$ dont tous les itérés positifs $f^n(x), n \geq 0$ restent dans U , a son orbite positive qui converge vers p . On note

$$W_{loc}^s(p) = \{x \in U \mid \forall n \geq 0, f^n(x) \in U\},$$

et on l'appelle variété stable locale de p . La variété stable locale est homéomorphe à la boule-unité de l'espace stable $E^s(L)$, est une variété différentiable de même classe que f et est tangente en p à cet espace stable. Tout point différent de p dans $W_{loc}^s(p)$ possède un itéré négatif hors de U .

- Tout point $x \in U$ dont tous les itérés négatifs $f^n(x), n \leq 0$ restent dans U , a son orbite négative qui converge vers p . On note

$$W_{loc}^u(p) = \{x \in U \mid \forall n \leq 0, f^n(x) \in U\},$$

et on l'appelle variété instable locale de p . La variété instable locale est homéomorphe à la boule-unité de l'espace stable $E^s(L)$ et est tangente en p à cet espace stable. Tout point différent de p dans $W_{loc}^u(p)$ possède un itéré positif hors de U .

- Les points de U qui ne sont ni dans la variété stable ni dans la variété instable de U ont leurs orbites positive et négative qui sortent de U .

(Nous renvoyons à [Sh] pour une présentation moderne de la construction et la régularité des variétés invariantes. La première démonstration d'existence, en dimension 2, est due à Hadamard [Ha] qui donne en trois pages l'idée fondatrice ; la généralisation en dimension plus grande semble due à Perron [Per1], [Per2], [Per3]).

Dans le cas des surfaces (qui est celui qui nous intéresse), un point fixe hyperbolique p est de trois types possibles, suivant que la dimension de sa variété stable est 2, dans

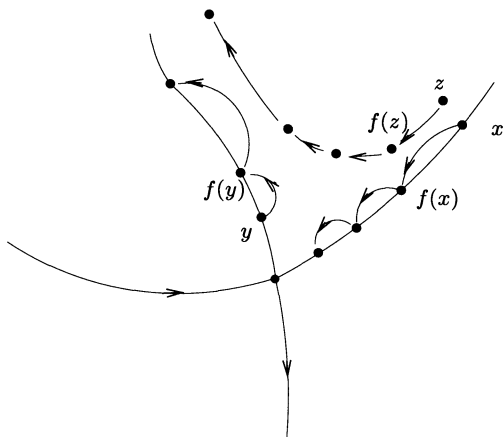


FIGURE 1. Le comportement local au voisinage d'une selle.

ce cas le point attire tout un voisinage et on dit qu'il est attracteur, 0, dans ce cas le point est répulseur, ou 1. Dans ce dernier, cas le point p est un point *selle*. Ses variétés invariantes (stable et instable) locales sont alors des courbes se coupant transversalement en p .

0.1.2. Le modèle idéal pour les dynamiques globales : le théorème de Peixoto. — Le plus simple que l'on puisse espérer pour une dynamique est que la plupart des orbites soient attirées par un nombre fini d'orbites périodiques attractrices, les bassins d'attractions de ces orbites étant limités par les variétés stables des points périodiques de type selle, eux aussi en nombre fini.

De plus, on aimerait que ce comportement simple persiste pour les dynamiques voisines. Plus précisément, en 1937 A. Andronov et L. Pontriaguine aboutissent à la notion de stabilité structurelle ; on dit qu'un difféomorphisme f d'une variété M est *C^1 -structurellement stable* si tout difféomorphisme g suffisamment C^1 -proche de f est conjugué à f par un homéomorphisme h proche de l'identité (il en résulte alors que toute la dynamique qualitative de g est exactement celle de f , vue à travers un changement de coordonnées global (seulement continu) donné par h).

C'est le cas par exemple pour les flots définis comme gradients d'une fonction de Morse d'une surface compacte, et dont les courbes invariantes des selles sont deux à deux disjointes.

Vers la fin des années 50, Smale envisageait une sorte de théorie de Morse pour les systèmes dynamiques. Cet espoir sembla confirmé par un résultat remarquable de Peixoto (1962 [Pe1]) : il montre qu'un ouvert dense (pour la topologie C^1) de l'ensemble des champs de vecteurs est formé de champs de vecteurs structurellement stables, pour lesquels toutes les orbites, sauf un nombre fini d'entre elles, convergent

vers une orbite périodique attractrice ou un zéro attracteur quand le temps tend vers $+\infty$ et vers une orbite répulsive quand le temps tend vers $-\infty$. Le lecteur trouvera dans [PM, chapitre 5] des énoncés précis et un exposé élémentaire et détaillé de la démonstration du théorème de Peixoto (signalons aussi le résultat préliminaire de 1959 [PePe]).

0.1.3. Intersection homocline transverse, le fer à cheval de Smale et le difféomorphisme de Thom-Anosov. — Espérer faire une théorie de Morse pour les systèmes dynamiques, c'était oublier un problème qu'avait rencontré Henri Poincaré dans son étude de l'évolution du système solaire.

Soit $f: S \rightarrow S$ un difféomorphisme d'une surface compacte et p un point fixe hyperbolique selle de f . Un point q d'intersection transverse des variétés stable et instable de p est appelé un *point homocline transverse*. L'orbite (positive et négative) de q converge vers p et la variété instable de p coupe transversalement la variété stable de p en tout point de cette orbite. Tout segment borné I contenant p de la courbe instable de p est alors limite d'une suite segments I_n de cette même variété instable contenant $f^n(q)$ (le « λ -lemma » (voir [PM]) formalise cette propriété). Si le segment I a été choisi contenant aussi un voisinage de q , les segments I_n finissent par recouper transversalement la variété stable de p en des points q_n proches de q , qui appartiennent à des orbites toutes distinctes.

Voici ce qu'en disait Poincaré (voir [Po, page 384]) en 1899 : « *Ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. (...) Cette remarque est encore de nature à nous faire comprendre toute la complication du problème des trois corps et combien les transcendentes qu'il faudrait imaginer pour le résoudre diffèrent de toutes celles que nous connaissons.* »

Vers 1935, G.D. Birkhoff prouve qu'un point homocline transverse est approché par une suite de points périodiques. De plus, l'existence d'un point homocline transverse persiste après toute perturbation de la dynamique assez petite dans la topologie C^1 : le théorème de Peixoto ne se généralise pas de façon directe aux difféomorphismes des surfaces !

Pour modéliser ce phénomène S. Smale construit, au début des années 60, un difféomorphisme connu sous le nom de « *fer à cheval* ». Un difféomorphisme f d'une surface possède un fer à cheval s'il existe un carré R plongé dans la surface, tel que l'action de f sur ce carré correspond à la description que l'on peut trouver dans [Sh] : *Commençons par étirer verticalement le carré R pour le transformer en une allumette, en utilisant une application linéaire, puis courbons cette allumette, heureusement souple, en fer à cheval, pour la poser, toujours à cheval, sur l'emplacement de R .*

Le lecteur trouvera une présentation rigoureuse du fer à Cheval dans de nombreux ouvrages, citons [PM], [Sh], [GuMoNe] et bien sûr [Sm]. L'ensemble des points dont

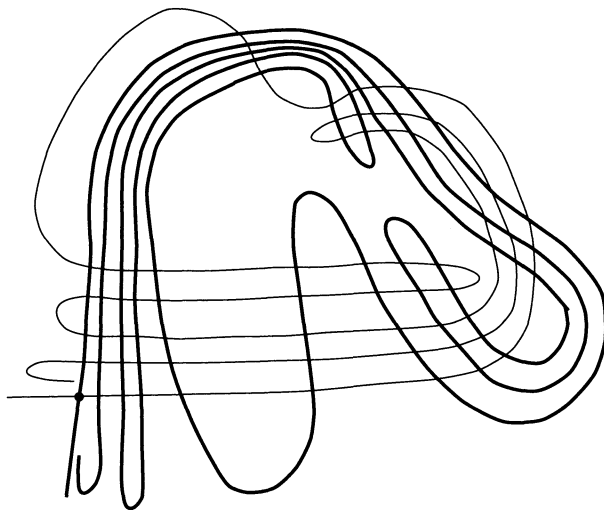


FIGURE 2. Le treillis, le tissu dessiné par les courbes invariantes.

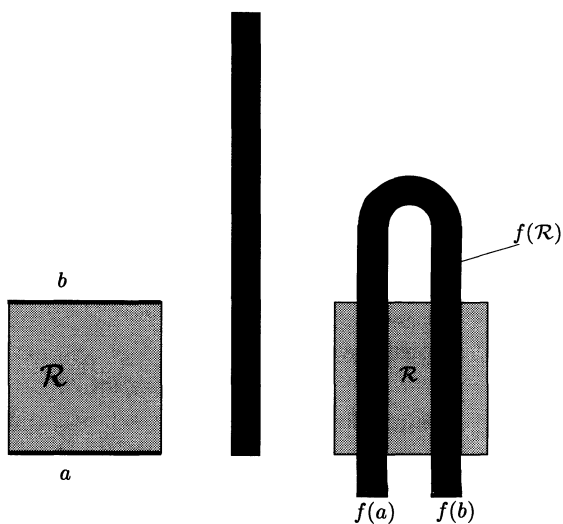


FIGURE 3. Le fer à Cheval de Smale

toute l'orbite reste dans le carré R est un ensemble de Cantor (compact métrisable totalement discontinu sans points isolés) Λ . La restriction du difféomorphisme à Λ admet une description combinatoire (décalage sur l'ensemble des suites $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ (voir par exemple [Sh])). L'ensemble des orbites périodiques hyperboliques est dense dans Λ ; de plus, Λ contient des orbites denses. De plus, cette dynamique

est C^1 -structurellement stable : tout difféomorphisme g suffisamment C^1 proche de f possède un fer à cheval et l'ensemble Λ_g des points dont l'orbite par g reste dans R est encore un Cantor, et la restriction de g à Λ_g est conjuguée à la restriction de f à Λ .

Enfin, l'existence de points homoclines transverses pour un difféomorphisme f implique l'existence d'un fer à cheval pour un itéré f^n de f (voir une exposition simple de ce résultat dans [PaTa, chapitre 2]).

Vers la même époque, D.V. Anosov prouvait la stabilité structurelle du flot géodésique sur une surface de courbure négative, en dégagant la propriété de U -système. La notion de U -système discret a permis à Anosov de répondre positivement à la question suivante posée par R.Thom en 1962 :

l'application linéaire A de \mathbb{R}^2 de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ induit par passage au quotient un difféomorphisme (encore noté A) du tore T^2 . Les points périodiques de A sont denses dans T^2 et sont hyperboliques. Ce difféomorphisme est-il structurellement stable ?

0.1.4. La théorie hyperbolique de Smale. — Durant les années 60-70 un groupe important de mathématiciens, centré autour de Smale, a cherché à caractériser les dynamiques structurellement stables. Comme la théorie de Smale est à la base de notre travail, nous rappelons au paragraphe 1.1 les définitions précises ainsi que les principaux résultats. En voici les grandes lignes, en quelques mots.

Les deux notions clés de la théorie de Smale sont *hyperbolicité* et transversalité. Un compact K , invariant par un difféomorphisme f est dit *hyperbolique*, s'il existe le long de K une décomposition du fibré tangent de la variété en somme directe de deux sous-fibrés, $TM = E^s \oplus E^u$, appelés fibrés stable et instable, si cette décomposition est invariante par la différentielle Tf , et si enfin Tf contracte uniformément les vecteurs de E^s et dilate uniformément les vecteurs de E^u . Si l'ensemble hyperbolique est égal à la variété toute entière, on dit que l'on a un système (difféomorphisme ou flot) d'Anosov. Cette seule propriété d'hyperbolicité permet de définir les variétés stables et instables locales des points de l'ensemble hyperbolique. On montre alors qu'un ensemble hyperbolique est C^1 -structurellement stable (voir [Sh]) s'il possède de plus une *structure de produit local*.

L'idée est alors d'exiger que l'ensemble contenant toute la dynamique non-triviale soit hyperbolique, le problème étant de choisir cet ensemble. Après plusieurs tâtonnements, le choix s'est porté sur *l'ensemble $\Omega(f)$ des points non-errants* (un point est dit errant s'il possède un voisinage dont les itérés sont deux-à-deux disjoints). Le C^1 -closing lemma de Pugh (voir [Pu]) affirme que tout point non-errant peut être rendu périodique par une C^1 -perturbation de la dynamique. Il permet de montrer alors que, pour un ensemble résiduel pour la C^1 -topologie dans $\text{Diff}^1(M)$, l'ensemble $\Omega(f)$ est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques de f . Cette propriété est donc

naturellement vérifiée par tout difféomorphisme structurellement-stable. Ceci rend naturelle la définition suivante : on dit qu'un difféomorphisme f vérifie l'*axiome A* si $\Omega(f)$ est hyperbolique et si $\Omega(f)$ est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques de f . Mettant le point final à de nombreux résultats partiels (voir par exemple Anosov [A1], Moser [Mo], Palis [Pa], Palis et Smale [PaSm]), Robbin (voir [Ro], 1971) puis Robinson (voir [R], 1976) montrent qu'un difféomorphisme vérifiant l'Axiome A est structurellement stable, si toute intersection entre une variété stable et une variété instable de points de $\Omega(f)$ est transverse (cette seconde hypothèse est connue sous le nom de « *transversalité forte* »). En un raccourci pratique nous appellerons *difféomorphismes de Smale* les difféomorphismes vérifiant l'Axiome A et la transversalité forte. Un raccourci analogue a déjà été employé par Franks (voir [Fr1]) qui suppose de plus que les ensembles hyperboliques sont de dimension zéro.

Un résultat analogue est vrai pour les champs de vecteurs.

L'une des clefs de la preuve est le théorème de décomposition spectrale de Smale qui scinde l'ensemble des points non-errants $\Omega(f)$ en ensembles hyperboliques transitifs (*i.e.* contenant une orbite dense) appelés *pièces basiques*. Une autre est l'ordre défini par Smale sur l'ensemble de ces pièces basiques : une pièce basique Ω_1 est supérieure à une pièce basique Ω_2 si la variété instable de Ω_1 coupe la variété stable de Ω_2 . Ceci permet de construire un graphe Γ orienté dont les points sont les pièces basiques. Deux points ω_1 et ω_2 sont joints par une arête du *graphe de Smale* si la pièce basique Ω_1 correspondant à ω_1 est supérieure à la pièce basique Ω_2 et si de plus il n'existe pas de pièce basique intermédiaire pour cet ordre (voir un exemple sur la figure 7).

La réciproque du théorème de stabilité, conjecturée pendant longtemps, n'a été démontrée qu'en 1988 par Mañé [Ma] dans le cas des difféomorphismes : tout difféomorphisme C^1 -structurellement stable vérifie l'axiome A et la condition de transversalité forte. La preuve a nécessité un raffinement du « closing lemma » (le « closing lemma » ergodique de Mañé). Dans le cas des champs de vecteurs, cette réciproque a été prouvée en 1996 par Hayashi à l'aide d'une adaptation du « closing lemma » pour les variétés invariantes : le C^1 -connecting lemma. Le problème reste par contre ouvert si l'on considère des topologies plus fines (C^r , pour $r > 1$) : la principale difficulté est que l'on ne connaît pas d'équivalent ou de substitut au C^1 -closing lemma de Pugh.

La théorie hyperbolique de Smale ne décrit pas « la plupart » des dynamiques : pendant que cette théorie s'élaborait, on découvrait des dynamiques instables qui ne pouvaient être stabilisées par de petites perturbations : citons par exemple le célèbre attracteur proposé par Lorenz en 1963 pour des champs de vecteurs en dimension 3 (voir [Lor] pour l'article initial, et [GuWi] et [ABS] pour un modèle géométrique), et l'exemple donné par Abraham et Smale en 1968 pour des difféomorphismes. Cependant, dans tous les exemples connus, c'est l'hyperbolicité d'une grosse partie de la dynamique qui est la clé de la persistance de ces dynamiques instables, la position des variétés invariantes des ensembles hyperboliques interdisant la transversalité. Dès lors,

la plus grande partie des dynamiciens se sont consacrés à l'étude de ces dynamiques instables, mais ceci nous écarte du propos de notre travail.

0.1.5. Les difféomorphismes d'Anosov et pseudo-Anosov. — La seule surface orientable admettant un difféomorphisme d'Anosov (nom actuel de U -systèmes discrets) est le tore T^2 . De plus Franks a montré qu'ils sont tous topologiquement conjugués à des difféomorphismes linéaires du tore. Le tore est alors feuilleté par les courbes stables et les courbes instables. Ces deux feuilletages sont transverses et admettent tous deux des mesures transverses invariantes (par l'holonomie des feuilletages). L'action naturelle du difféomorphisme sur ces mesures consiste en les multiplier chacune par l'une des valeurs propres de l'application linéaire associée.

Il existe cependant sur les surfaces de genre plus grand une famille d'homéomorphismes ayant presque les mêmes propriétés : les *homéomorphismes pseudo-Anosov*. Ils admettent un nombre fini de points périodiques non hyperboliques et ce sont des difféomorphismes en dehors de ces points. Hors de ces points, les courbes stables et instables définissent encore deux feuilletages transverses munis de mesures transverses invariantes par holonomie. Les feuilles aboutissant aux points singuliers sont appelées séparatrices. Au voisinage des points singuliers chaque feuilletage a comme modèle une selle à au moins trois branches.

La théorie de Thurston (voir [FLP, Exposé 1, th 5]) montre qu'une classe d'isotopie d'homéomorphisme contient un pseudo-Anosov si et seulement si son action naturelle sur les classes d'homotopie libre de lacets de la surface ne possède aucune classe périodique. De plus, deux homéomorphismes pseudo-Anosov sont conjugués dès que leurs classes d'isotopie le sont. Une information combinatoire, l'action de la classe d'isotopie sur un système fini de générateur du groupe fondamental de la surface, caractérise donc la dynamique topologique d'un tel homéomorphisme (voir [FLP, Exposé 12]). Ceci ne fournit pourtant pas encore une classification constructive : en effet le groupe fondamental possède une infinité de présentations, et la description de l'action d'un automorphisme dépend du système de générateurs considéré. De plus, étant donné un automorphisme du groupe fondamental, il n'est pas évident de décider si son action sur les classes d'homotopie libre possède une orbite périodique.

Bestvina et Handel (voir [BeHa1] et [BeHa2]) et Los (voir [Lo1]) exhibent un algorithme fini qui permet de décider si un homéomorphisme de surface, dont on connaît l'action sur un système générateur du groupe fondamental de la surface, est homotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov. Ils donnent même une construction de l'homéomorphisme pseudo-Anosov homotope à un homéomorphisme donné.

La classification serait donc complète si l'on avait un algorithme fini permettant de décider si deux homéomorphismes pseudo-Anosov, décrits chacun par son action sur un système de générateurs du groupe fondamental, sont conjugués. Après des résultats partiels de G. Hemion ([He]) L. Mosher ([Mos]) et J. Los ([Lo2]), J. Fehrenbach ([Fe]) annonce la classification complète.

Il est parfois nécessaire d'imposer à l'homéomorphisme des points fixes ou périodiques choisis à l'avance. Cela force à accepter des singularités de type épine pour les feuilletages invariants. Déjà [FLP] considère ces *pseudo-Anosov généralisés* qui sont aussi appelés *pseudo-Anosov à points marqués*.

En fait ces homéomorphismes pseudo-Anosov minimisent l'entropie dans leur classe d'homotopie (éventuellement avec points marqués). Handel donne un sens précis au fait que ces homéomorphismes réalisent la « dynamique minimale » dans leur classe d'homotopie (voir [Han]).

Enfin remarquons qu'à partir d'un difféomorphisme pseudo-Anosov, on peut obtenir un difféomorphisme de Smale en ouvrant les séparatrices des points singuliers (voir figure 0.1.5).

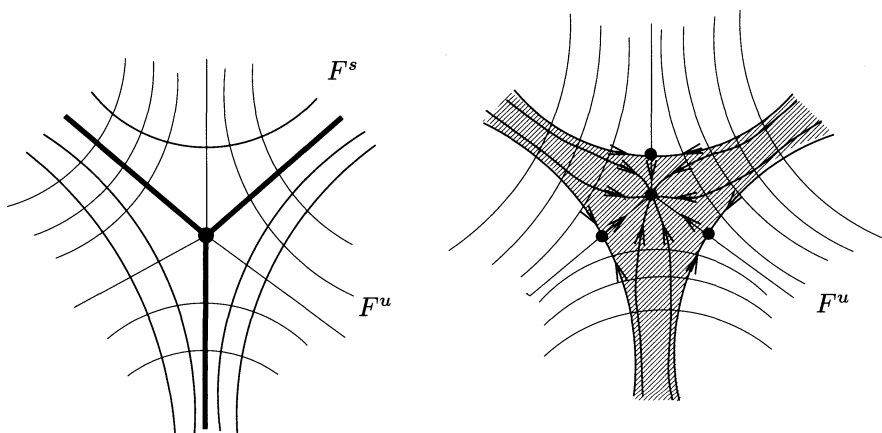


FIGURE 4. Ouverture des séparatrices.

0.2. Le problème de classification des dynamiques hyperboliques

Le difféomorphisme de Thom-Anosov et le fer à cheval de Smale sont des exemples de systèmes dynamiques apparemment compliqués, stables par C^1 -petites perturbations et qui se décrivent à l'aide d'une combinatoire finie. Ceci donne l'espoir d'une classification possible des dynamiques qualitatives, c'est-à-dire que l'on aimerait associer à un difféomorphisme un nombre fini d'objets combinatoires qui caractérisent la dynamique topologique : deux difféomorphismes seraient topologiquement conjugués si et seulement si les objets combinatoires qui leur sont associés sont identiques. Bien sûr, il est déraisonnable d'espérer classer tous les difféomorphismes d'une surface. Par contre les difféomorphismes de Smale étant structurellement stables, leurs classes d'équivalence topologique correspondent à un ensemble discret de difféomorphismes,

et sont donc des candidats naturels à une classification, et de nombreux travaux vont dans ce sens.

Le *problème de classification* se décompose en trois types de questions :

1. Peut-on associer une présentation combinatoire finie à un difféomorphisme de Smale, de sorte que, si deux difféomorphismes ont les mêmes présentations, ils sont topologiquement conjugués ? A ce stade, si les présentations sont différentes, nous ne pouvons pas comparer les difféomorphismes.
2. Existe-t-il un algorithme fini permettant de décider quand deux présentations différentes correspondent à deux difféomorphismes conjugués ?
3. Quelles présentations combinatoires correspondent à un difféomorphisme de Smale (réalisabilité) ?

Avant de présenter nos résultats, nous allons essayer de faire le point sur les connaissances actuelles. Dans les années 70, l'essentiel des efforts a porté sur la dynamique en restriction à un ensemble hyperbolique. A la même époque Peixoto [Pe2] obtenait le premier résultat global : la classification de champs de vecteurs Morse-Smale dont nous reparlerons plus loin. Les travaux de l'école russe (autour de Plykin et Grines) puis les nôtres suivent des démarches analogues.

0.2.1. Classification de la dynamique sur un ensemble hyperbolique. —

On sait depuis Bowen (voir [Bo2] ou [Fr2, Appendice A]) que la dynamique topologique en restriction à un *ensemble basique* (i.e. ensemble hyperbolique avec structure de produit local) de dimension topologique zéro est conjuguée à une dynamique symbolique appelée sous-shift de type fini, et qui est associée à une matrice carrée dont les coefficients sont égaux à 0 ou 1. Ceci résout la question (1) du **problème de classification** dans ce cadre. La clef de cette conjugaison est l'existence de *partitions de Markov* par rectangles R_i , $i = 1, \dots, k$, deux-à-deux disjoints : on associe à un point x son itinéraire $i(x) \in \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$, qui est la suite de ses passages dans les différents rectangles de la partition. La *matrice d'incidence* de la partition de Markov décrit l'ensemble des itinéraires qui correspondent effectivement à une orbite de f . L'itinéraire du point $f(x)$ est bien sûr obtenu en décalant de 1 la numérotation de l'itinéraire de x . La bijection qui à un point associe son itinéraire est donc une conjugaison entre f restreint à l'ensemble basique et le sous-shift de type fini. Si l'ensemble basique n'est pas totalement discontinu, c'est-à-dire est de dimension topologique non nulle, plusieurs itinéraires peuvent correspondre au même point de l'ensemble basique, et l'on obtient seulement une semi-conjugaison. Si deux ensembles basiques K et \tilde{K} de dimension zéro de deux difféomorphismes f et \tilde{f} possèdent des partitions de Markov par rectangles disjoints qui ont même matrice d'incidence, alors les restrictions de f et \tilde{f} aux ensembles basiques sont conjuguées. Mais K et \tilde{K} possèdent une infinité de partitions de Markov ayant différentes matrices d'incidences. Pour obtenir une classification effective, (question (2) du **problème de classification**) il faudrait savoir



décider à quelle condition les sous-shifts de type fini $S(A)$ et $S(B)$ associés à deux matrices A et B sont conjugués. Dans [Wi2] (voir également [Fr2, Appendice A]), Williams caractérise algébriquement les matrices qui correspondent à des sous-shifts conjugués : il montre que les sous-shifts $S(A)$ et $S(B)$ sont conjugués si et seulement s'il existe deux suites finies de matrices rectangulaires $R_1, S_1, \dots, R_n, S_n$ à coefficients entiers positifs telles que $A = R_1 S_1$, et que pour tout i on a $S_i R_i = R_{i+1} S_{i+1}$ et $B = S_n R_n$ (on dit que A est *fortement shift équivalente* à B). À notre connaissance, l'existence d'un algorithme fini permettant de décider si deux matrices sont fortement shift équivalentes est encore un problème ouvert. Un tel algorithme achèverait la classification topologique des difféomorphismes en restriction à un ensemble basique de dimension 0.

Enfin il paraît naturel de se demander si tout sous-shift de type fini correspond à une pièce basique (de dimension 0) d'un difféomorphisme de Smale (question (3) du **problème de classification**) : Williams (dans [Wi2, théorème E]) montre que tout sous-shift de type fini est réalisable par un ensemble basique d'un difféomorphisme de Smale de la sphère S^3 . Par contre, Blanchard et Franks (voir [BlFr]) exhibent une obstruction (non-vide) à ce qu'un sous-shift de type fini soit réalisable comme ensemble basique d'un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte. (voir également Fried [Fri] pour une caractérisation des fonctions zeta des pièces basiques).

Pour les ensembles basiques de dimension supérieure, signalons les travaux de Williams [Wi3], Plykin [Pl1], [Pl2], [Pl3] et Ruas [Ru] sur les attracteurs hyperboliques de dimension 1.

Enfin, pour le problème de classification de la dynamique topologique des champs de vecteurs sur un ensemble basique, voir [PaSu] pour les ensembles basiques de dimension 1, et voir [Ch] pour les attracteurs hyperboliques sur des variétés de dimension 3.

0.2.2. Le problème de classification de la dynamique globale. — Si la classification des dynamiques en restriction à un ensemble hyperbolique de dimension 0 est à peu près achevée, elle ne suffit pas à décrire la dynamique sur toute la variété : en général l'homéomorphisme de conjugaison de deux ensembles hyperboliques ne peut pas s'étendre à un petit voisinage de ces ensembles hyperboliques. Nous pouvons construire deux difféomorphismes du disque intuitivement différents (représentés par la figure 5), qui sont conjugués sur leurs ensembles non-errants et dont il n'est pas évident de montrer qu'ils ne sont pas globalement conjugués.

Le premier travail de classification de dynamiques des surfaces est la description combinatoire faite par M. Peixoto [Pe2] des champs de vecteurs Morse-Smale (c'est-à-dire dont l'ensemble des points non-errants est réduit à un ensemble fini de zéros et d'orbites périodiques hyperboliques dont les variétés invariantes se coupent transversalement). Dans le cas des champs quasi-gradient (c'est-à-dire sans orbites périodiques), la classification peut être décrite de la façon suivante : associons à chaque selle un

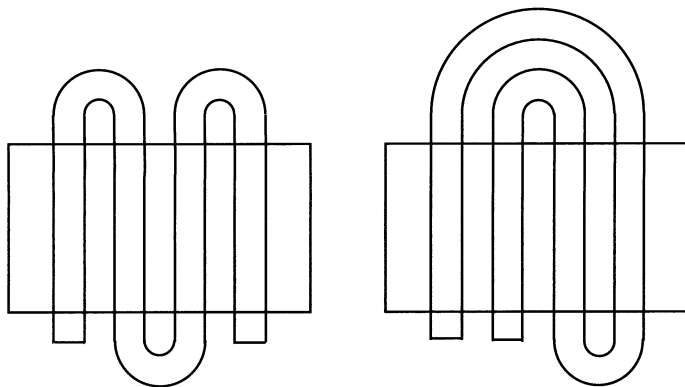


FIGURE 5. Deux difféomorphismes dont les ensembles non-errants sont conjugués

voisinage ouvert invariant « en étoile » (voir la figure 6). Une combinatoire décrivant comment recoller ces étoiles le long de leurs bords permet de reconstituer le champ à conjugaison près.

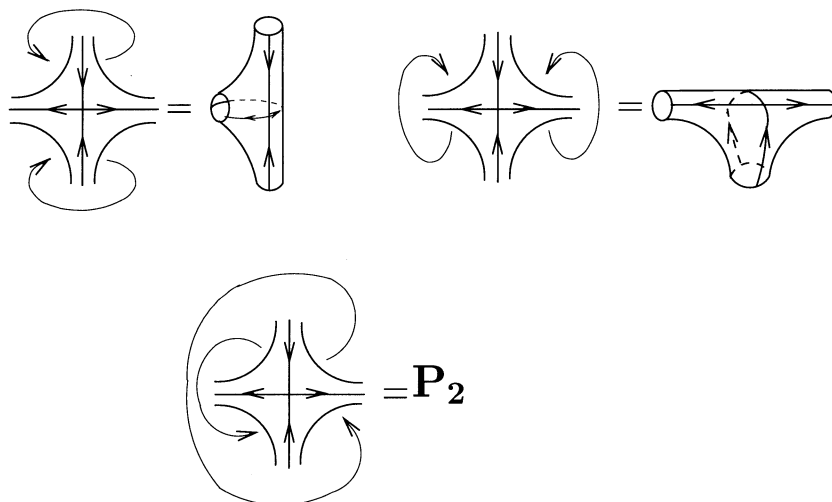


FIGURE 6. Les trois dynamiques obtenues à partir d'une étoile.

Il était alors naturel d'étudier les dynamiques discrètes qui ressemblent le plus au temps 1 de champs Morse-Smale des surfaces : les difféomorphismes *Morse-Smale* des surfaces c'est-à-dire les difféomorphismes de Smale dont l'ensemble non-errant est réduit à un nombre fini d'orbites périodiques. Cependant Birkhoff déjà ([Bi]) remarquait que la manière dont se coupent les courbes invariantes d'un difféomorphisme

contenait des invariants de conjugaison topologique. C'est pourquoi Besdenezhnykh et Grines [BezGr1] ont d'abord supposé que les courbes invariantes ne se coupaient pas (difféomorphismes quasi-gradients). L'étape suivante consiste à tenter d'introduire des orbites *hétéroclines*, intersection de variétés invariantes d'orbites périodiques différentes.

Le graphe de Smale (défini au paragraphe 0.1.4) est un invariant topologique du difféomorphisme, mais il est loin d'être suffisant pour caractériser le type topologique. On dit que deux orbites sont de *comportement* k si le plus long chemin orienté les joignant dans le graphe de Smale est formé de k arêtes. Palis [Pa] remarque que si deux orbites sont de comportement 1 (*i.e.* sont jointes par une arête), leurs variétés invariantes se coupent en un nombre fini d'orbites. Par contre l'intersection des variétés invariantes d'orbites périodiques de comportement 2 contient déjà une infinité d'orbites hétéroclines. Le dessin des courbes invariantes peut être alors très complexe.

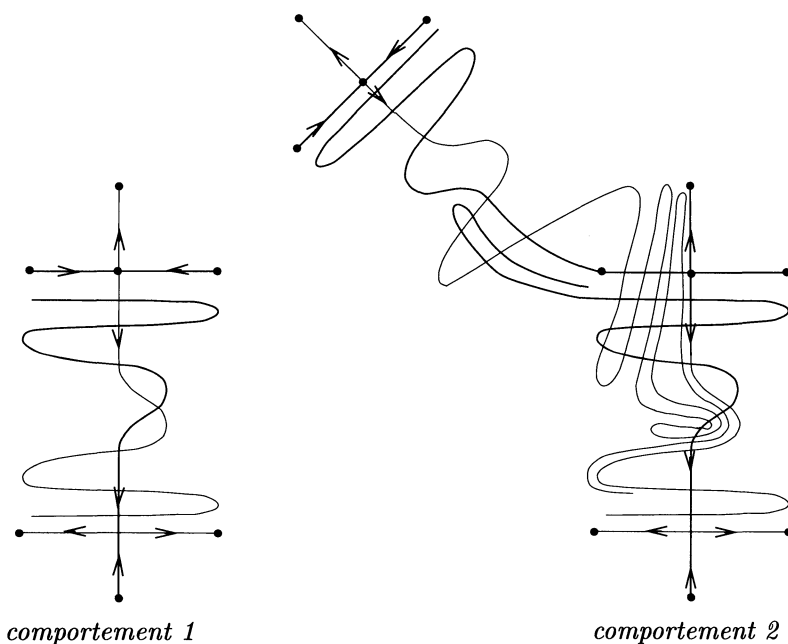


FIGURE 7. Selles en comportement 1 et 2

Bezdezhnykh et Grines [BezGr2] ont ensuite supposé que les courbes invariantes une fois orientées se coupent avec une orientation constante (ce qui implique qu'elles sont de comportement au plus 1), avant que Grines propose en 1993 (voir [Gr3]) une classification des difféomorphismes Morse-Smale dont le graphe de Smale a au plus quatre étages : sources, au plus deux étages de selles et puits. Indépendamment R.Langevin [La] introduisait une famille d'invariants topologiques associés à la position

relative des courbes invariantes d'une paire de selles de comportement un. À notre connaissance, la classification de selles en comportement deux n'était pas faite jusqu'à ce jour.

En ce qui concerne les difféomorphismes de Smale non Morse-Smale, l'école russe, autour de Plykin et Grines, a obtenu de nombreux résultats partiels en faisant des hypothèses sur le dessin des courbes invariantes (voir [ArGr1] et [ArGr2] pour une présentation complète de ces résultats). Voici un résultat typique de cette ligne de recherche. En 1988 Grines et Kalay [GrKa1] [GrKa2] caractérisent les classes de conjugaison topologiques de difféomorphismes de Smale au voisinage de pièces basiques *sans points conjugués*, c'est-à-dire telles qu'il n'existe pas de disques plongés dans la surface de bord formé par un segment de courbe stable et un segment de courbe instable.

Dans notre travail, nous ne faisons pas d'hypothèse restrictive sur le dessin des courbes invariantes. Cependant le chapitre 8 est consacré à ces difféomorphismes « sans points conjugués » que nous appelons « *sans impasse* ».

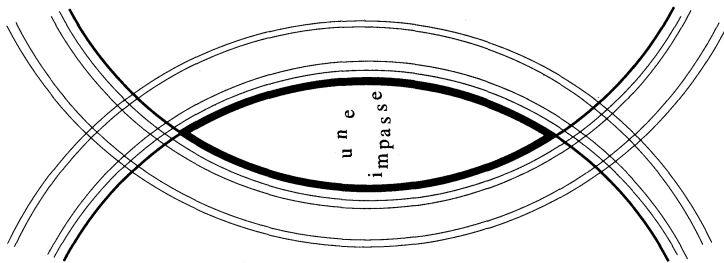


FIGURE 8. Une impasse

Le théorème 8.3.1 montre que la classification de ces difféomorphismes sans impasse se ramène à celle des difféomorphismes pseudo-Anosov généralisés.

0.3. Classification des difféomorphismes de Smale des surfaces : présentation de nos principaux résultats

Nous allons suivre une démarche analogue à celle de Peixoto pour montrer que les difféomorphismes de Smale peuvent également se reconstruire à partir de voisinages invariants d'ensembles hyperboliques « de type selle » par recollement le long de leur bord. Ici, nous devons remplacer les selles par les *ensembles hyperboliques saturés* maximaux : un compact hyperbolique invariant sera dit *saturé* s'il contient tout point d'intersection de ses variétés invariantes, stables et instables. Nous verrons que les ensembles hyperboliques saturés maximaux correspondent aux composantes connexes du diagramme de Smale privé de ses sources et de ses puits. Nous montrerons

ensuite l'existence d'un voisinage ouvert invariant de topologie finie (c'est-à-dire homéomorphe à une surface compacte à bord, privée d'un nombre fini de points) d'un ensemble hyperbolique saturé, que nous appellerons son *domaine* (Aranson et Grines parlent de support (carrier en anglais) quand ils étudient les difféomorphismes de Smale sans points conjugués [ArGr2]).

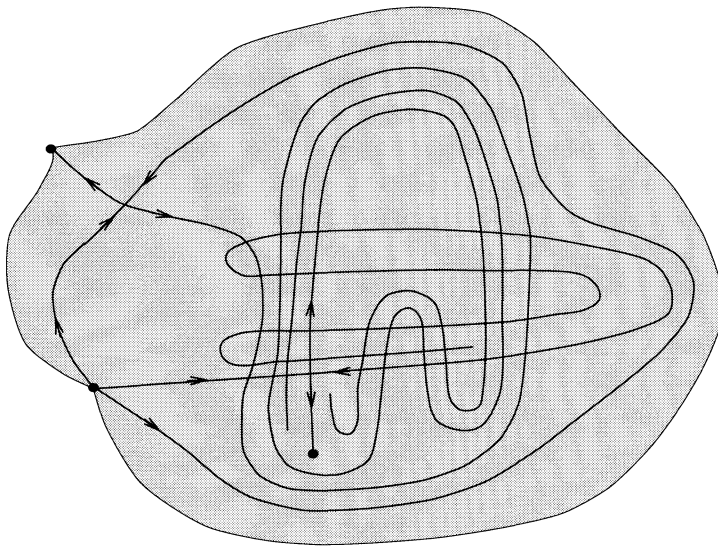


FIGURE 9. Un domaine

Plus précisément :

Proposition (Le domaine : versalité et unicité). — *Soit f un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte, et K un ensemble hyperbolique saturé de f . Alors K possède un voisinage $\Delta(K)$, invariant par f , de topologie finie, et tel que, pour tout voisinage invariant U de K de topologie finie, il existe un plongement de $\Delta(K)$ dans U commutant avec f et coïncidant avec l'identité sur l'union de K et de ses variétés invariantes.*

De plus $(\Delta(K), f)$ est unique à conjugaison près, si l'on impose au voisinage d'être « fermé modulo f » (voir la définition 3.2.4).

(Cette proposition correspond aux propositions 3.2.2 et 3.2.5).

Les domaines seront aussi maniables que les voisinages en étoile de la classification de Peixoto : nous pourrons reconstituer la variété et le difféomorphisme (à conjugaison topologique près) en recollant les domaines le long de leur bord (voir les propositions 3.4.3 et 3.4.2), le recollement étant décrit par une combinatoire finie.

Les deux difféomorphismes de la figure 5 sont conjugués en restriction à leur ensemble non-errant, par contre le dessin des courbes invariantes interdit à cette conjugaison de s'étendre globalement. Afin de comprendre les courbes invariantes de f , un outil essentiel est le théorème de Newhouse et Palis ([NePa]) qui implique que leur tracé est organisé par un nombre fini de courbes invariantes de points périodiques. Ce sont les contours du dessin, courbes sur lesquelles les autres courbes invariantes ne s'accumulent que d'un côté : nous les appellerons les variétés stables ou instables *bords*.

Le dessin des variétés invariantes est particulièrement simple si l'ensemble hyperbolique est un attracteur. On en déduira que si un difféomorphisme f possède un attracteur hyperbolique dont le bassin d'attraction rencontre la variété instable d'une pièce basique non-réduite à une orbite périodique, alors f n'est pas de Smale, et appartient à l'intérieur pour la topologie C^1 , de l'ensemble des difféomorphismes structurellement instables (voir la proposition 2.3.3 et le théorème 2.3.4). Ceci nous permettra de nous concentrer sur les difféomorphismes de Smale dont les ensembles hyperboliques sont de dimension 0 (*i.e.* ceux qui ne possèdent ni attracteurs ni répulseurs non-périodiques).

Pour analyser complètement la dynamique restreinte à un domaine, il nous faudra définir le *type géométrique* d'une partition de Markov : on complète la donnée combinatoire usuelle des rectangles R_i d'une partition de Markov de façon à décrire la position relative des images $f(R_j)$ par rapport aux R_i . Notre résultat principal résout la question (1) du **problème de classification** :

Théorème (Présentation du difféomorphisme sur un domaine)

Soient K et K' deux compacts hyperboliques saturés de deux difféomorphismes de Smale f et f' sur deux surfaces compactes S et S' . Supposons que K et K' admettent des partitions de Markov (par rectangles disjoints) M et M' de même type géométrique. Alors il existe un homéomorphisme du domaine de K sur le domaine de K' conjuguant les restrictions respectives de f et f' à ces domaines.

(Ce sera, dans le texte, le théorème 5.2.2).

Ce théorème permet de donner une classification (hélas pas encore effective) des difféomorphismes de Smale des surfaces. Les types géométriques de partitions de Markov décrivant une dynamique donnée, ne sont pas uniques, et sont en nombre infini. Cependant, en considérant l'ensemble (fini) des types géométriques de partitions de Markov ayant un nombre minimal de rectangles, on obtient un invariant presque complet des classes de conjugaison de difféomorphismes de Smale. Nous complétons cet invariant en donnant une règle de recollement des composantes du bord des domaines. Cette classification a le défaut de ne pas être constructible.

Une autre conséquence du théorème 0.3 est que la dynamique d'un difféomorphisme de Smale sur le domaine d'un ensemble saturé est presque complètement déterminée par le dessin de ses courbes invariantes.

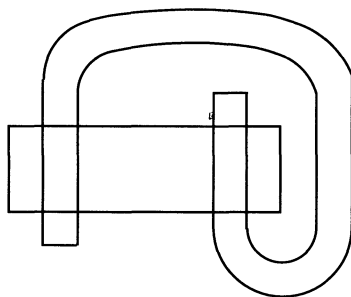


FIGURE 10. Cet ensemble hyperbolique n'est pas saturé

Théorème (Dessin et dynamique). — Soient f et g deux difféomorphismes de Smale de surfaces compactes, et soient K et L des ensembles hyperboliques saturés de f et g , de domaines connexes et sans double-bord. Supposons qu'il existe un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de K sur l'union de celles de L tel que l'image des variétés stables et instables d'un point de K soient les variétés respectivement stable et instable du point image.

Alors, il existe deux entiers p et q strictement positifs tels que les restrictions de f^p et g^q aux domaines $\Delta(K)$ et $\Delta(L)$ soient conjuguées.

Voir le théorème 6.0.6 (et la proposition 2.1.1 pour la notion de double-bord).

Pour déduire ce théorème du théorème 0.3, on vérifie que l'homéomorphisme h de l'union des variétés invariantes de K sur l'union de celles de L induit une conjugaison des restrictions à K et L de f^p et g^q . On montre alors que l'image par h du bord d'une partition de Markov pour (K, f^p) est le bord d'une partition de Markov pour (L, g^q) de même type géométrique.

Les techniques de démonstration du théorème 0.3 allient des idées venant des démonstrations des théorèmes de stabilité d'Anosov, Palis, Palis et Smale (existence de feuilletages invariants), et une analyse fine du dessin des variétés invariantes (hors des rectangles d'une partition de Markov) qui prolonge celle déjà faite par Langevin pour les difféomorphismes Morse-Smale ([La]).

Nous donnons aussi une réponse partielle (que nous espérons en fait complète) à la question (3) (réalisabilité) du **problème de classification**. Nous remarquons que certains types géométriques ne peuvent être réalisés comme partition de Markov d'un ensemble saturé d'un difféomorphisme de Smale : l'exemple le plus simple est donné par la figure 10 (voir le corollaire 2.4.4). Remarquons que la matrice d'incidence de la partition de Markov de cet exemple est aussi celle associée au fer à cheval ; ce phénomène est donc différent de celui étudié par Blanchard et Franks mentionné plus haut.

Nous dirons qu'un type géométrique de partition de Markov est réalisable s'il est associé à un ensemble hyperbolique saturé. Le type géométrique permet de définir de manière combinatoire l'union des n premiers itérés des rectangles de la partition de Markov. C'est une surface à bord, que l'on notera \mathcal{R}_n , dont le genre $g(n)$ croît avec n . Si le type géométrique est réalisable, le genre $g(n)$ tend vers une limite finie. On appellera cette limite le *genre du type géométrique*. Le chapitre 7 donne une condition nécessaire et suffisante, qui se lit sur la surface \mathcal{R}_{6N} où N est le nombre de rectangles de la partition de Markov, pour qu'un type géométrique (sans double-bord) soit de genre fini (théorème 7.4.8 (Le genre d'un type)). Le genre du type géométrique est alors égal à $g(6N)$.

En particulier, si la partition de Markov est formée d'un seul rectangle, nous montrons que le genre est nul ou infini.

Dans sa thèse ([Je, chapitre 5]) E. Jeandenans montre que tout type géométrique de genre fini est réalisable par un homéomorphisme. Pour que la réponse à la question (3) soit complète, il resterait à construire une réalisation différentiable.

Nous conjecturons que le procédé suivant permet d'obtenir une classification constructive (et donc résoudre complètement la question (2) du **problème de classification**).

Pour chaque composante connexe du complémentaire des puits et des sources dans le graphe de Smale de f , choisissons une selle s_1 , dont la pièce basique est minimale pour l'ordre de Smale, et dont la courbe stable est bord (ces selles sont en nombre fini). Choisissons un intervalle I_0 compact sur cette courbe, contenant la selle dans son intérieur. Considérons maintenant toutes les selles, dont la courbe instable est bord, des pièces basiques supérieures à celle de s_1 . Parcourons à partir des selles, leurs séparatrices instables. Si une séparatrice rencontre I_0 , on s'arrête au premier point d'intersection avec I_0 . On obtient ainsi une famille finie G_1 de segments instables qui dépend de I_0 . Remplaçons I_0 par le plus petit segment compact I_1 qui contient tous les points d'intersection des segments de G_1 avec I_0 . Les extrémités de I_1 sont alors des *points d'intersection primitifs* (ou de rang 1) au sens de Birkhoff ([Bi]). On en déduit (voir le chapitre 6) que, à itération par f près, il n'y a qu'un nombre fini de couples (I_1, G_1) .

Notons G'_2 la famille de segments stables obtenus en parcourant depuis l'orbite périodique et jusqu'à G_1 , les séparatrices stables bord (à l'exception de celles de s_1) qui rencontrent G_1 . Posons $G_2 = G'_2 \cup \{I_1\}$. On choisit de même une famille G_3 prolongeant G_1 de segments instables. Ce procédé s'arrête quand on a obtenu un segment sur chaque séparatrice bord (non-libre) d'une selle d'une pièce basique de la composante connexe du graphe de Smale privé des sources et des puits que nous avons considérée. Notons U et S les familles de segments respectivement instables et stables obtenus aux deux dernières étapes de cette construction. À itération par f près, il n'y a qu'un nombre fini de couples (U, S) . Le chapitre 4 fournit un procédé

explicite de construction d'une partition de Markov par rectangles disjoints à partir d'un couple (U, S) . En remarquant que le type géométrique d'une partition de Markov est le même que celui de tous ses itérés par f , on obtient ainsi un nombre fini de types géométriques pour chacun des ensembles hyperboliques maximaux de f .

Nous pouvons à présent énoncer la conjecture qui répond à la question (2) du **problème de classification** :

Conjecture. — *Etant donné un type géométrique de partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé, il existe un algorithme fini permettant d'obtenir tous les types géométriques donnés par la construction ci-dessus.*

Le chapitre 1 rappelle d'abord les définitions classiques et les principaux résultats de la théorie hyperbolique de Smale, puis définit la notion d'ensemble hyperbolique saturé, caractérise ces ensembles à l'aide du graphe de Smale. Le chapitre 2 structure le dessin des courbes invariantes d'un difféomorphisme de Smale d'une surface. Cela nous permettra au chapitre 3 de construire un voisinage invariant (le domaine) d'un ensemble hyperbolique saturé en bouchant de manière canonique les trous dans le dessin des courbes invariantes.

Le chapitre 4 fournit un procédé explicite de construction de partition de Markov par rectangles disjoints, pour un ensemble hyperbolique saturé. Le chapitre 5 ajoute à la matrice d'incidence d'une partition de Markov l'information géométrique permettant de caractériser la dynamique topologique sur le domaine (c'est le théorème principal de ce travail (Présentation du difféomorphisme sur un domaine)).

Le chapitre 6 revient sur le lien entre la dynamique et le dessin des variétés invariantes. Le chapitre 7 est consacré au problème de réalisabilité d'une partition de Markov géométrisée (question (3) du problème de classification). Le chapitre 8 fait le lien entre les difféomorphismes de Smale sans impasses (ou sans points conjugués) et les homéomorphismes pseudo-Anosov.

A. Cascon et S. Newhouse ont déclenché ce travail lors d'une mémorable séance de nuit avec R. Langevin à Trieste en 1987. Les auteurs remercient aussi T. Barbot, F. Béguin, P. Foulon, D. Fried, J.M. Gambaudo, E. Ghys, J. Los, J. Palis, L. Paris, M. Peixoto, D. Sullivan et G. Vago pour de fructueuses conversations et le referee pour sa lecture scrupuleuse de la première version de ce texte, et J. Troalen pour avoir réalisé sur l'ordinateur nos figures à la main.

CHAPITRE 1

PIÈCES BASIQUES ET ENSEMBLES SATURÉS

Les deux premiers paragraphes de cette partie font un rapide résumé (sans démonstration) de la théorie de Smale des dynamiques hyperboliques. Le premier paragraphe rappelle les notions d'hyperbolicité, de variétés invariantes, et le second est consacré à la « théorie spectrale », qui cloisonne la dynamique d'un difféomorphisme de Smale à l'aide de *filtrations* et met en évidence des ensembles hyperboliques particuliers : les *pièces basiques*, qui sont ordonnées par l'ordre de Smale.

Nous définirons ensuite les *ensembles saturés* qui généralisent la notion de pièce basique. Ces ensembles saturés et leurs variétés invariantes seront l'objet principal de notre étude. Enfin, nous construirons un voisinage, invariant par f , d'un ensemble saturé K d'un difféomorphisme f de Smale d'une surface compacte. Ce voisinage sera très régulier mais aura comme seul défaut de ne pas être unique : il nous servira comme point de départ pour construire le domaine de K dans les chapitres suivants.

1.1. Rappels de définitions et de propriétés classiques des dynamiques « hyperboliques »

Les rappels de cette section sont très brefs. Le lecteur souhaitant trouvera des informations plus complètes par exemple dans [PM], [GuMoNe], [Sm].

1.1.1. Premières définitions

Définition 1.1.1. — Soit f un homéomorphisme d'une variété M . On dit qu'un point $x \in M$ est errant s'il possède un voisinage dans M dont tous les itérés par f sont disjoints ; sinon on dit que x est non-errant. Classiquement, on note $\Omega(f)$ l'ensemble des points non-errants de f .

Définition 1.1.2. — Soit f un homéomorphisme d'un compact X . Il est dit

- transitif s'il possède une orbite dense

- topologiquement mélangeant si pour toute paire d'ouverts U et V de X , pour tout entier n assez grand, $f^n(U) \cap V$ est non vide.

Définition 1.1.3. — Soit f un difféomorphisme d'une variété M . On dit qu'un ensemble $K \subset M$ est hyperbolique pour f s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. K est un compact invariant par f (c'est-à-dire $f(K) = K$).
2. Il existe une décomposition de la restriction à K du fibré tangent à M en somme directe de deux sous-fibrés vectoriels continus et invariants par la différentielle Df de f :

$$TM|_K = E^s \oplus E^u$$

3. Il existe une métrique riemannienne $\|\cdot\|$ sur M , et il existe $\lambda > 1$, tels que Df (resp. $D(f^{-1})$), en restriction à E^u (resp. E^s), dilate les vecteurs d'un facteur supérieur ou égal à λ ; plus précisément on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in K, \forall v \in E_x^u, \quad \|Df(v)\| &\geq \lambda \cdot \|v\| \\ \forall x \in K, \forall w \in E_x^s, \quad \|Df^{-1}(w)\| &\geq \lambda \cdot \|w\| \end{aligned}$$

Définition 1.1.4. — Soit f un difféomorphisme d'une variété M , et soit K un ensemble hyperbolique. Soit x un point de K .

On appelle variété stable de x , notée $W^s(x, f)$, l'ensemble des points $y \in M$ tels que l'on ait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$$

(où d est la distance sur M induite par la métrique riemannienne).

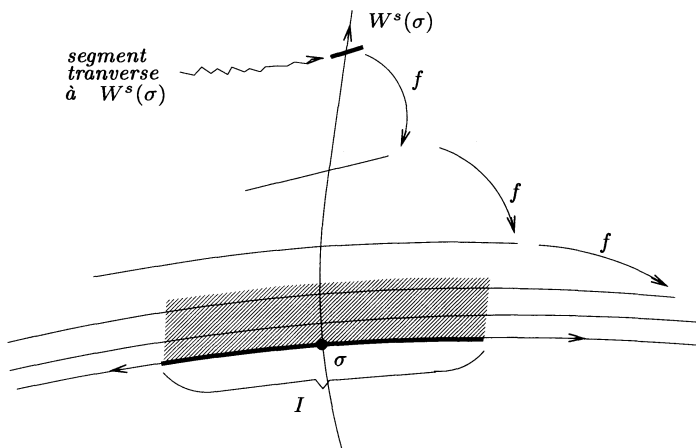
Soit $\varepsilon > 0$. On appelle variété stable locale, $W_\varepsilon^s(x, f)$, l'ensemble des points $z \in M$ tels que, pour tout $n \geq 0$, la distance $d(f^n(x), f^n(z))$ soit inférieure ou égale à ε .

On définit les variétés instable et instable locale du point x pour f , comme étant les variétés stable et stable locale de x pour f^{-1} , on les note $W^u(x, f)$ et $W_\varepsilon^u(x, f)$.

Rappelons que, pour tout ensemble hyperbolique K de f , il existe un réel $\varepsilon > 0$, tel que pour tout point x de K , sa variété stable locale $W_\varepsilon^s(x)$ soit un disque plongé, inclus dans $W^s(x, f)$, de dimension égale à celle de l'espace stable E_x^s et tangent à cet espace, aussi différentiable que f et variant continûment avec le point x . Comme nous l'avons fait dans l'introduction nous renvoyons à [Sh] pour plus de détails, et en particulier pour la démonstration du théorème d'existence (qui nécessite l'utilisation d'un théorème de point fixe).

Les variétés invariantes ont d'abord été définies seulement lorsque x est un point fixe ou périodique. J. Palis [Pa] démontre le (λ -lemma), que nous résumons (en dimension 2) en disant que l'on peut tronquer les itérés successifs d'un segment transverse à la courbe stable d'une selle de manière qu'ils convergent pour la topologie C^1 vers un segment compact I arbitraire de la courbe stable de la selle.

Ce lemme a permis de démontrer les premiers résultats de stabilité structurelle (voir ci-dessous).

FIGURE 1. Le λ -lemma

Définition 1.1.5. — On dit qu'un ensemble hyperbolique K d'un difféomorphisme f possède une structure de produit local s'il existe deux réels $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout couple (x, y) de point de K vérifiant $d(x, y) < \delta$, la variété stable locale $W_\varepsilon^s(x)$ coupe en un et un seul point, et transversalement, la variété instable locale $W_\varepsilon^u(y)$; de plus ce point d'intersection appartient à K .

Définissons la variété stable $W^s(K)$ comme l'ensemble des points dont l' ω -limite est incluse dans K . Le « shadowing lemma » (voir l'exposé de Newhouse dans [GuMoNe]) permet alors de démontrer que :

$$W^s(K) = \bigcup_{x \in K} W^s(x).$$

Définition 1.1.6. — On dit qu'un difféomorphisme f d'une variété compacte vérifie l'Axiome A si l'ensemble $\Omega(f)$ des points non errants de f est hyperbolique, et si $\Omega(f)$ est l'adhérence de l'ensemble des points périodique de f .

On dit de plus que f vérifie la condition de transversalité forte si, pour tous $x, y \in \Omega(f)$, la variété stable $W^s(x)$ est transverse (en tout point) à la variété instable $W^u(y)$.

1.1.2. Stabilité structurelle. — Pour classifier une famille de difféomorphismes il faut d'abord définir une relation d'équivalence exprimant le fait que leurs dynamiques sont « les mêmes ».

Définition 1.1.7. — Deux difféomorphismes f et g d'une variété M sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme h de M tel que

$$h \circ f = g \circ h$$

Cette définition revient à dire qu'au changement de coordonnées donné par h près, les deux difféomorphismes sont les mêmes.

Les difféomorphismes dont on ne peut changer la classe de conjugaison par une petite perturbation sont dits *structurellement stables*; plus précisément :

Définition 1.1.8. — *Un difféomorphisme f est dit C^1 -structurellement stable s'il existe un voisinage \mathcal{V} de f pour la topologie C^1 tel que tout $g \in \mathcal{V}$ est topologiquement conjugué à f*

Il pourrait paraître plus naturel d'exiger dans la définition d'une conjugaison que h soit un difféomorphisme, mais les classes d'équivalence pour cette relation plus fine sont trop petites pour qu'il existe des difféomorphismes C^1 -stables.

Le théorème principal de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques caractérise les dynamiques C^1 -structurellement stables :

Théorème 1.1.9 ([R][Ro][Ma]). — *Soit f un difféomorphisme de classe C^1 d'une variété compacte M , alors f est C^1 -structurellement-stable si et seulement si f vérifie l'Axiome A et la condition de transversalité forte.*

Définition 1.1.10. — *On appellera difféomorphismes de Smale les difféomorphismes vérifiant l'Axiome A et la condition de transversalité forte.*

La stabilité structurelle garantit que l'ensemble des classes de conjugaison de difféomorphismes de Smale est discret, ce qui est un préalable à l'existence d'une classification combinatoire : le théorème 1.1.9 est donc à la base de notre travail.

1.1.3. Pièces basiques . — Dans la démonstration de la stabilité structurelle des difféomorphismes vérifiant l'Axiome A et la condition de transversalité forte, l'un des points-clefs est la *décomposition spectrale* de l'ensemble des points non-errants, ou encore sa décomposition en *pièces basiques* séparées les unes des autres par une *filtration*. Rappelons en quelques mots cette décomposition spectrale.

Définition 1.1.11. — *Soit f un difféomorphisme vérifiant l'Axiome A. On appelle pièce basique de f tout compact $\Lambda \subset \Omega(f)$, invariant par f , transitif, et maximal (pour l'inclusion) pour ces deux propriétés.*

Rappelons qu'un compact invariant est dit *transitif* s'il possède une orbite dense. De l'existence d'orbites denses, on sait déduire que la variété stable ou instable de tout point périodique d'une pièce basique est dense dans la variété stable ou instable de cette pièce basique.

Attention de ne pas confondre la notion (pourtant classique) de pièce basique avec celle, plus courante, d'*ensemble basique* (*basic set*) (voir l'article de Newhouse dans [GuMoNe]) qui désigne un compact invariant hyperbolique transitif possédant un voisinage U dont il est l'*ensemble invariant maximal*, c'est-à-dire $\bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^n(U)$.

En effet, un ensemble basique n'est pas nécessairement maximal parmi les compacts invariants transitifs de la variété.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de décomposition spectrale :

Théorème 1.1.12. — *Soit f un difféomorphisme de Smale d'une variété compacte. L'ensemble $\Omega(f)$ est alors l'union d'un nombre fini de pièces basiques disjointes, notons-les Λ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ où n est un nombre entier. De plus les pièces basiques vérifient la propriété suivante :*

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tels que Λ_i est l'union de n_i fermés disjoints, Λ_i^j , $j \in \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$, de façon que pour tout j on ait :

$$f(\Lambda_i^j) = \Lambda_i^{j+1},$$

et que pour tout j la restriction de f^{n_i} à Λ_i^j soit topologiquement mélangeante.

Enfin, tout point de la variété M appartient à la variété stable de l'une des pièces basiques Λ_i .

Smale définit sur l'ensemble des pièces basiques une relation d'ordre (partiel). À partir d'une fonction de Morse, on peut décomposer une variété en un empilement de sous-variétés à bord, contenant chacune exactement un point critique. L'ordre sur les points critiques est simplement celui donné par la fonction. L'ordre de Smale pour le gradient de cette fonction de Morse est un ordre partiel sur les points critiques, compatible avec l'ordre donné par f . Dans le cas général, l'ordre de Smale sur les pièces basiques permet de construire une filtration de la variété qui est l'équivalent dynamique de l'empilement de Morse. Définissons à présent l'ordre de Smale et les filtrations pour les difféomorphismes de Smale.

Définition 1.1.13. — *Soient Λ_1 et Λ_2 deux pièces basiques, on dira que Λ_2 domine Λ_1 , ce que l'on notera $\Lambda_1 \prec \Lambda_2$, si la variété stable de Λ_1 coupe la variété instable de Λ_2 . Autrement dit :*

$$\Lambda_1 \prec \Lambda_2 \iff W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2) \neq \emptyset$$

On vérifie que la relation \prec ainsi définie sur l'ensemble des pièces basiques de f est bien un ordre.

À un ordre sur un ensemble fini est classiquement associé un graphe orienté qui, dans notre contexte, s'appelle *diagramme de Smale* :

Une arête part de Λ_2 vers Λ_1 si $\Lambda_1 \prec \Lambda_2$ et s'il n'existe aucune pièce basique Λ_i telle que : $\Lambda_1 \prec \Lambda_j \prec \Lambda_2$.

Pour toute relation d'ordre sur un ensemble fini, il existe une indexation de l'ensemble fini qui soit compatible (c'est-à-dire non-décroissante) avec la relation d'ordre. Les indexations, non-décroissantes pour \prec , de l'ensemble des pièces basiques d'un difféomorphisme de Smale sont fortement liées à l'existence de filtrations « séparant » les pièces basiques ([Sh, chapitre 1]) : c'est donc cette notion que nous allons définir à présent.

Définition 1.1.14. — Soit f un homéomorphisme d'une variété M . On appelle filtration de M pour f une suite finie M_1, \dots, M_k de sous-variétés compactes à bord de M de même dimension que M , telle que pour tout $i \in \{2, \dots, k\}$ on ait la suite d'inclusions suivante :

$$M_{i-1} \subset \text{Int}(f^{-1}(M_{i-1})) \subset f^{-1}(M_{i-1}) \subset \text{Int}(f(M_i)) \subset f(M_i) \subset \text{Int}(M_i)$$

Dans la pratique, toutes les filtrations que nous considérerons seront relatives à la dynamique f étudiée, si bien que nous omettrons de mentionner f : nous dirons « une filtration » pour dire « une filtration pour f ».

Définition 1.1.15. — Soient K_1, \dots, K_n une famille finie de compacts disjoints invariants d'un homéomorphisme f d'une variété M . Nous dirons qu'une filtration M_0, M_1, \dots, M_n pour f , est adaptée à la famille K_1, \dots, K_n si, pour tout $i \geq 1$, K_i est l'ensemble maximal invariant de $M_i \setminus (\text{Int}(M_{i-1}))$, c'est-à-dire

$$K_i = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^j(M_i \setminus \text{Int}(M_{i-1}))$$

Théorème 1.1.16. — Soit f un difféomorphisme de Smale d'une variété compacte M . Pour toute indexation $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ de l'ensemble des pièces basiques de f , compatible avec la relation d'ordre \prec , il existe une filtration de M , $\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ adaptée à la famille $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$.

L'existence de la filtration « séparant » les différentes pièces basiques montre que chaque pièce basique est « isolée » du reste de la dynamique. Plus précisément :

Remarque. — Soit f un difféomorphisme de Smale et soit Λ un compact de $\Omega(f)$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. Λ est une pièce basique de f .
2. Λ est transitif et est isolé dans $\Omega(f)$, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert U tel que $U \cap \Omega(f) = \Lambda$.
3. (*saturation*) Λ est transitif et quels que soient $x, y \in \Lambda$ on a :

$$W^s(x) \cap W^u(y) \subset \Lambda.$$

1.2. Ensembles saturés des difféomorphismes de Smale des surfaces

Pour classifier les difféomorphismes de Smale d'une surface compacte, il ne suffit pas de classifier les pièces basiques : nous devons démêler l'écheveau de leurs courbes invariantes. Pour cela, nous allons considérer des ensembles hyperboliques, constitués de pièces basiques et des intersections de leurs variétés invariantes, et possédant la propriété de saturation de l'item 3 de la remarque terminant le paragraphe ci-dessus.

Ces ensembles auront des propriétés analogues à celles des pièces basiques, mais ne seront en général pas transitifs.

Définissons d'abord de façon intrinsèque les ensembles saturés :

Définition 1.2.1. — Soit f un difféomorphisme d'une surface compacte. On appellera ensemble hyperbolique saturé un compact hyperbolique K invariant par f et vérifiant la condition suivante :

$$x \in K \text{ et } y \in K \Rightarrow W^s(x) \cap W^u(y) \subset K$$

Le reste de ce paragraphe a comme but de caractériser les ensembles saturés en utilisant les pièces basiques et les points d'intersection de leurs variétés invariantes.

Soit S une surface compacte et f un difféomorphisme de Smale de S .

Définition 1.2.2. — On appelle « intervalle de pièces basiques » tout ensemble de pièces basiques E vérifiant la propriété suivante :

Pour toutes pièces basiques $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$,

$$\Lambda_1, \Lambda_3 \in E \text{ et } \Lambda_1 \prec \Lambda_2 \prec \Lambda_3 \implies \Lambda_2 \in E,$$

où \prec désigne l'ordre de Smale que nous avons défini au paragraphe 1.1.3

Remarquons qu'un intervalle ne correspond pas en général à une partie connexe du diagramme de Smale.

Exemple. — L'ensemble des pièces basiques qui ne sont ni source ni puits est un intervalle. Le diagramme de Smale restreint à cet ensemble n'est pas forcément connexe. Chacune des composantes connexes de ce nouveau diagramme correspond à un intervalle : les intervalles de ce type seront l'un des objets de notre étude.

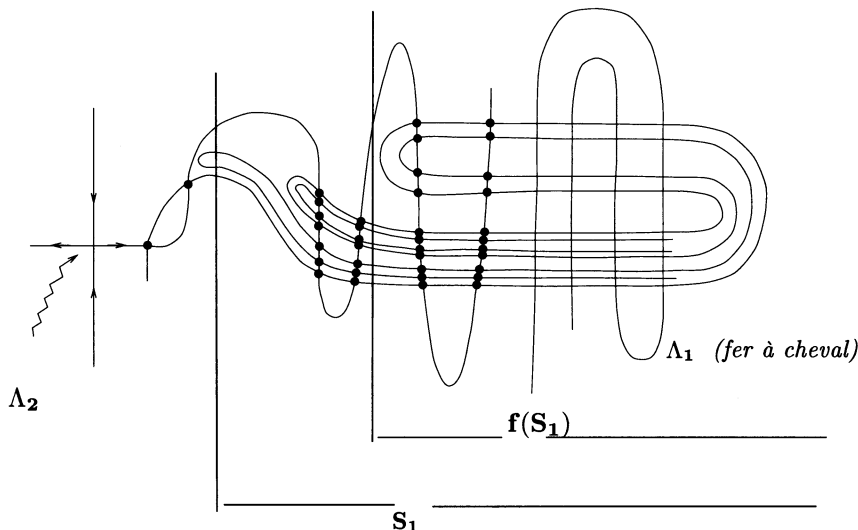
Définition 1.2.3. — Soit E un intervalle de pièces basiques de f , on appellera saturé de E l'ensemble K union des pièces basiques de E et des intersections de leurs courbes invariantes ; plus précisément :

$$K = \bigcup_{\Lambda \in E} W^s(\Lambda) \cap \bigcup_{\Lambda \in E} W^u(\Lambda).$$

Proposition 1.2.4. — Soit E un intervalle de pièces basiques ne contenant ni source ni puits. Le saturé K de E est alors un compact hyperbolique invariant.

La proposition se démontre par récurrence sur le nombre de pièces basiques que contient E . Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant, qui montre la proposition quand E ne contient que deux pièces basiques et qui sera la clef de la démonstration pour passer de n à $n + 1$ pièces basiques :

Lemme 1.2.5. — Soit f un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte, et soient Λ_1 et Λ_2 deux ensembles hyperboliques ne contenant ni source ni puits et tels qu'il existe une filtration $S_0 \subset S_1 \subset S_2$ adaptée à $\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$ (voir la définition 1.1.15). Alors $K = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup (W^u(\Lambda_2) \cap W^s(\Lambda_1))$ est un compact invariant hyperbolique.



- indique des points du saturé de $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$

FIGURE 2. Le saturé de deux pièces basiques

Démonstration du lemme. — L'ensemble $K = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup (W^u(\Lambda_2) \cap W^s(\Lambda_1))$ est bien sûr invariant par f . Nous devons montrer qu'il est compact et hyperbolique.

Pour montrer que K est compact, il suffit de vérifier que K est le maximal invariant $\bigcap_{\mathbb{Z}} f^n(S_2 \setminus \text{Int}(S_0))$ du compact $S_2 \setminus \text{Int}(S_0)$. De l'inclusion $f(S_2) \subset \text{Int}(S_2)$, on déduit que $W^u(\Lambda_2)$ est incluse dans $\bigcap_{\mathbb{N}} f^{-i}(S_2)$ et donc dans $\bigcap_{\mathbb{Z}} f^i(S_2)$. On montre de même que $W^s(\Lambda_1)$ est incluse dans $\bigcap_{\mathbb{Z}} f^i(S \setminus \text{Int}(S_0))$; on en déduit que K est inclus dans le maximal invariant de $S_2 \setminus \text{Int}(S_0)$. Réciproquement, soit z un point du maximal invariant de $S_2 \setminus \text{Int}(S_0)$. Si toute l'orbite de z est contenue dans $S_2 \setminus \text{Int}(S_1)$ ou dans $S_1 \setminus S_0$, alors z appartient à Λ_2 ou à Λ_1 . Sinon, l'orbite de z rencontre à la fois $S_2 \setminus \text{Int}(S_1)$ et $S_1 \setminus \text{Int}(S_0)$; comme $f(S_1) \subset \text{Int}(S_1)$, on en déduit que l' α -limite de z est incluse dans $S_2 \setminus \text{Int}(S_1)$, et donc dans Λ_2 , et que son ω -limite est incluse dans Λ_1 . Ceci montre que $z \in W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2)$. On a donc montré, dans tous les cas, que z appartient à K .

Il reste à montrer que K est hyperbolique. Remarquons qu'en tout point $x \in K$ passent une variété stable et une variété instable de points de $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$, et que ces

deux variétés sont transverses en x (car f vérifie la transversalité forte) : on a donc bien une décomposition de l'espace tangent $TS|_x$ en somme directe de deux droites, et ce scindement est clairement invariant par f ; par contre il n'est pas évident que ce scindement soit continu, car les variétés invariantes d'ensembles hyperboliques ne sont pas globalement des laminations. Voyons comment montrer la continuité de ce scindement :

On peut définir la variété instable locale $W_\varepsilon^u(\Lambda_2)$ de l'ensemble invariant hyperbolique Λ_2 comme l'ensemble des points dont tout itéré négatif reste à distance inférieure ou égale à un $\varepsilon > 0$ petit fixé. Nous savons (voir [Sh]) que cette variété instable locale est l'union des variétés instables locales des points de Λ_2 qui sont des disques variant continûment.

Considérons $O_n = f^n(S_2) \setminus \text{Int}(f^{-n}(S_1))$. La définition d'une filtration implique que la suite O_n est une suite décroissante de voisinages compacts de Λ_2 . En utilisant le fait que Λ_2 est le maximal invariant de $S_2 \setminus S_1$, on voit que l'intersection de la suite des O_k est égale à Λ_2 : on en déduit qu'il existe $k > 0$ tel que O_k soit inclus dans l' ε -voisinage de Λ_2 .

Le lemme suivant caractérise l'intersection de la variété instable de Λ_2 avec le domaine fondamental $S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1))$.

Lemme 1.2.6. — *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$W^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1))) = \bigcap_0^{+\infty} f^n(S_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1))).$$

Cet ensemble est en particulier compact.

Démonstration. — De la décroissance en n de la suite $f^n(S_2)$ on en déduit que la variété instable de Λ_2 est incluse dans $\bigcap_0^{+\infty} f^n(S_2)$, ce qui montre l'inclusion du terme de gauche dans celui de droite.

Montrons à présent l'inclusion inverse. Remarquons d'abord l'inclusion

$$\bigcup_2^{+\infty} f^n(S_1) \subset \text{Int}(f(S_1)).$$

Soit x un point de $\bigcap_0^{+\infty} f^n(S_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))$ et donc dans

$$\bigcap_0^{+\infty} f^n(S_2) \setminus \bigcup_2^{+\infty} f^n(S_1).$$

Remarquons que pour tout $i > 0$, le point $f^{-i}(x)$ appartient à

$$\bigcap_{-i}^{+\infty} f^n(S_2) \setminus \bigcup_{2-i}^{+\infty} f^n(S_1).$$

On en déduit que l'ensemble alpha-limite $\alpha(x)$ est inclus dans

$$\bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^n(S_2) \setminus \bigcup_{-\infty}^{+\infty} f^n(S_1)$$

et donc dans $\bigcap_{\mathbb{Z}} f^n(S_2 \setminus S_1) = \Lambda_2$. Le point x appartient donc à la variété instable de Λ_2 . \square

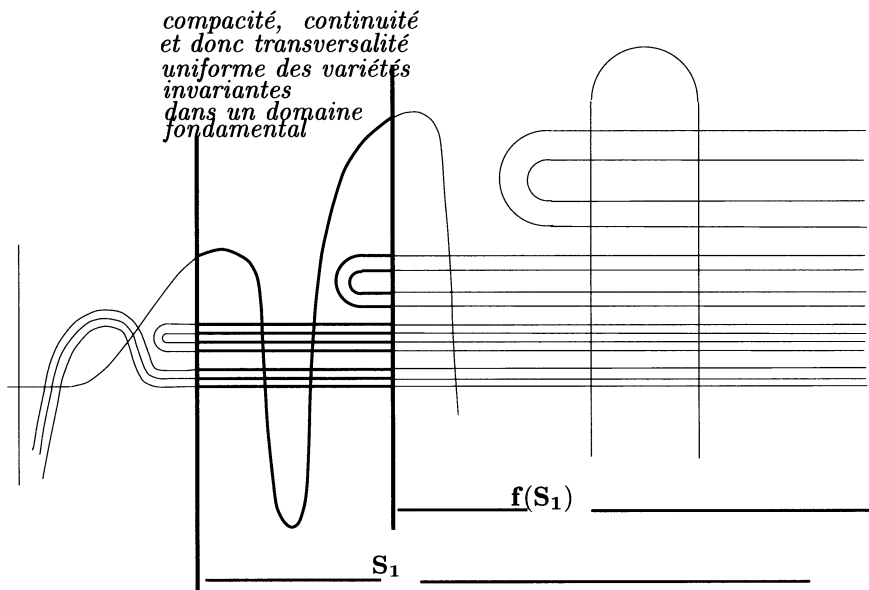


FIGURE 3. Les variétés invariantes dans le domaine fondamental $S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1))$

On en déduit de plus que, pour tout $n > k$, l'image par f^{-n} de

$$W^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))$$

est incluse dans O_{n-1} et donc dans O_k . Ceci étant vrai pour tout $n > k$, on déduit du choix de k le fait que $f^{-k-1}[W^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))]$ est inclus dans la variété instable locale $W_\varepsilon^u(\Lambda_2)$, et donc :

$$W^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1))) = f^{k+1}[W_\varepsilon^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))].$$

De l'égalité ci-dessus, et des propriétés de la variété instable locale de Λ_2 , on déduit le fait que $W^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))$ est un compact sur lequel l'espace tangent à $W^u(\Lambda_2)$ définit un fibré (en droite) continu.

Le même argument permet de montrer que $W^s(\Lambda_1) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))$ est un compact sur lequel l'espace tangent à $W^s(\Lambda_1)$ définit un fibré (en droites) continu.

Notons $W = W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2)$, $W_0 = K \cap (S_1 \setminus \text{Int}(S_1)) = W \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))$, et $W_n = \bigcup_{-n}^n f^i(W_0)$. Nous venons de montrer que les fibrés tangents aux variétés

stables de Λ_1 et instables de Λ_2 sont continus sur W_0 et l'on sait qu'ils sont transverses et donc uniformément transverses sur W_0 qui est compact. On en déduit qu'ils sont uniformément transverses sur W_n , pour tout n . De plus W est l'union croissante des W_n . Pour n assez grand, $W \setminus W_n$ se trouve contenu dans l'union d'un petit voisinage U_1 de Λ_1 et d'un petit voisinage U_2 de Λ_2 (on peut prendre $U_2 = O_n$ défini précédemment). Pour tout point de $W \cap U_1$, le fibré stable est tangent aux variétés stables locales des points de Λ_1 . Pour montrer la stabilité structurelle des difféomorphismes de Smale de classe C^2 , Robbin (voir [Ro, page 487 théorème (10.1)]) montre que le fibré tangent aux variétés instables de Λ_2 est prolongé continûment aux points de Λ_1 par le fibré instable de Λ_1 . On peut prolonger de même le scindage défini aux points de $W \cap U_2$ par les fibrés stables et instables de Λ_2 . (Le théorème de stabilité structurelle est montrée pour des difféomorphismes de classe C^1 dans [R]; pour se convaincre directement de la validité de la propriété d'extension continue des fibrés invariants, le lecteur pourra aussi utiliser une version du λ -lemma adaptée aux ensembles hyperboliques, qu'il reconstituera par exemple à l'aide des chapitres 5 et 6 du livre de M. Shub [Sh]).

L'expansion uniforme des vecteurs du fibré instable et la contraction uniforme des vecteurs du fibré stable se montrent en remarquant que, pour tous voisinages U_1, U_2 de Λ_1 et Λ_2 , il existe n tel que toute orbite de K possède au plus n points hors de U_1 et U_2 .

□

Démonstration de la proposition 1.2.4. — On vérifie facilement que si E est un intervalle de pièces basiques, alors il existe une indexation $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ (compatible avec \prec) de l'ensemble des pièces basiques et $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \leq j$, tels que :

$$E = \{\Lambda_i, \dots, \Lambda_j\}.$$

Considérons $\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n = S$ une filtration de S associée à cette indexation des pièces basiques (voir la définition 1.1.15).

On montre la proposition par récurrence sur le nombre $n = 1 + i - j$ de pièces basiques constituant E . Bien sûr la proposition est triviale quand $n = 1$.

Notons $E_1 = E \setminus \Lambda_j$. La numérotation étant compatible avec \prec , E_1 est un intervalle comportant $n - 1$ pièces basiques : notons K_1 la saturation de E_1 . Par hypothèse de récurrence, K_1 est un compact invariant hyperbolique. En outre,

$$K = K_1 \cup \Lambda_j \cup (W^u(\Lambda_j) \cap W^s(K_1)).$$

Notons $\bar{S}_0 = S_{i-1}$, $\bar{S}_1 = S_{j-1}$, et $\bar{S}_2 = S_j$. Les ensembles hyperboliques K_1 et Λ_j , munis de la filtration $\bar{S}_0 \subset \bar{S}_1 \subset \bar{S}_2$ vérifient les hypothèses du lemme 1.2.5 : le choix de la filtration implique que K_1 est le maximal invariant de $\bar{S}_1 \setminus \bar{S}_0$. D'après le lemme 1.2.5, K est donc un ensemble hyperbolique. □

Nous pouvons à présent caractériser les ensembles hyperboliques saturés des difféomorphismes de Smale des surfaces :

Proposition 1.2.7. — *Soit f un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte.*

1. *Le saturé d'un intervalle E de pièces basiques est un ensemble hyperbolique si et seulement si toute orbite périodique puits ou source de E n'est comparable pour \prec à aucune autre pièce basique de E .*
2. *Tout ensemble hyperbolique saturé de f est le saturé d'un intervalle de pièces basiques.*

Démonstration. — L'item (1) est une conséquence facile de la proposition 1.2.4 et de la remarque suivante :

Remarque. — Soit x un point non-périodique appartenant à la variété stable d'une orbite périodique puits ou à la variété instable d'une source. Il ne peut appartenir à aucun ensemble hyperbolique.

En effet, choisissons par exemple le point x dans la variété stable d'un puits p . Il existe un point y d'une pièce basique de f tel que x appartienne à la variété instable de y . Soit v un vecteur non-nul tangent en x à $W^u(y)$. Comme v est aussi tangent à la variété stable de p , les itérés positifs et négatifs de v tendent en norme vers 0 ce qui interdit à x d'appartenir à un ensemble hyperbolique.

Montrons l'item (2) :

Soient K un ensemble hyperbolique saturé et $x \in K$ qui n'est pas un point périodique puits ou source. Il existe deux pièces basiques Λ_1 et Λ_2 telles que $x \in W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2)$ (si x appartient à Λ_1 on prend $\Lambda_2 = \Lambda_1$). Nous devons montrer que toute pièce basique Λ , vérifiant $\Lambda_1 \preceq \Lambda \preceq \Lambda_2$, est incluse dans K .

Le compact invariant K contient l' ω -limite de x , donc contient un point x_1 de Λ_1 . La condition de saturation appliquée à x_1 montre que K contient l'adhérence de $W^s(x_1) \cap W^u(x_1)$, et donc contient Λ_1 . En remplaçant ω -limite par α -limite on montre que K contient Λ_2 .

Toute pièce basique $\Lambda_1 \prec \Lambda \prec \Lambda_2$ est contenue dans l'adhérence de $W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2)$ et donc dans K . De plus, la remarque ci-dessus permet de voir que Λ_1 ne peut être un puits et que Λ_2 ne peut être une source. \square

De la proposition 1.2.7 et du théorème 1.1.16, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.8. — *Soit f un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte, et soit K un ensemble hyperbolique saturé de F . Alors il existe une filtration S_0, S_1 pour f , adaptée à K (c'est-à-dire que K est le maximal invariant de $S_1 \setminus \text{Int}(S_0)$).*

Remarque. — On pourrait définir de la même manière les ensembles hyperboliques saturés et les saturés d'intervalles de pièces basiques, pour des difféomorphismes de variétés de dimension plus grande que 2. On montre alors que le saturé d'un intervalle E est hyperbolique si et seulement si deux pièces basiques de E ne sont pas comparables dès que la dimension des variétés stables de leurs points ne sont pas identiques.

1.3. Voisinages invariants d'ensembles saturés en dimension 2

Soient f un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte et K un ensemble hyperbolique saturé de f . Le but de ce paragraphe est de construire des voisinages ouverts de K , invariants par f , particulièrement simples : ils sont de *topologie finie* c'est-à-dire qu'ils sont homéomorphes à une surface compacte privée d'un nombre fini de points.

Plus précisément, nous allons montrer la proposition suivante :

Proposition 1.3.1. — *Soit f un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte S , et soit K un ensemble hyperbolique saturé de f . Alors il existe un ouvert U invariant par f , contenant K , et possédant en outre les propriétés suivantes :*

1. *K est le maximal invariant de tous ses voisinages relativement compacts dans U . C'est aussi le compact invariant maximal de U .*
2. *U est difféomorphe à une surface compacte (sans bord) \tilde{S} privée d'un ensemble fini de points p_1, \dots, p_l . De plus \tilde{S} possède un difféomorphisme de Smale \tilde{f} ayant les points p_i comme points périodiques attracteurs ou répulseurs. Enfin, la restriction de \tilde{f} à $\tilde{S} \setminus \{p_1, \dots, p_l\}$ est conjuguée à la restriction de f à U par un difféomorphisme.*

Pour montrer la proposition, nous allons considérer une filtration $\{S_0, S_1\}$ pour f adaptée à K (voir le corollaire 1.2.8), et nous montrerons que l'union des itérés de $S_1 \setminus \text{Int}(S_0)$ possède toutes les propriétés requises. Pour prouver que cet ensemble est de topologie finie, nous aurons besoin de contrôler la topologie d'une union infinie d'itérés d'une surface à bord : c'est ce que fait le lemme suivant.

Lemme 1.3.2. — *Soit S une surface compacte orientée, $\Sigma \subset S$ une surface compacte à bord et h un homéomorphisme de S , préservant l'orientation et tel que l'on ait :*

$$\Sigma \subset h(\text{Int}(\Sigma)).$$

Alors :

1. *L'union $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(h(\Sigma) \setminus \Sigma)$ est un ouvert ayant un nombre fini de composantes connexes.*
2. *Chaque composante connexe C de U est un cylindre.*
3. *Il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $h^i(C) = C$, de plus la restriction de h^i à C est conjuguée à une translation.*

Démonstration. — 1) Appellons $U_n = \bigcup_{-n}^n h^i(h(\Sigma) \setminus \text{Int}(\Sigma))$. Comme $h^j(\Sigma)$ est inclus dans $h^{j+1}(\Sigma)$, on voit que

$$U_n = h^{n+1}(\Sigma) \setminus h^{-n}(\text{Int}(\Sigma)).$$

Comme $h^{-n}(\Sigma)$ est inclus dans l'intérieur de $h^{n+1}(\Sigma)$ le bord de U_n est égal à $\partial h^{n+1}(\Sigma) \cup \partial h^{-n}(\Sigma)$ (deux copies disjointes $h^{n+1}(\partial\Sigma)$ et $h^{-n}(\partial\Sigma)$ du bord de Σ).

Chaque composante connexe de U_n étant de bord non vide (car S est connexe) le nombre de ces composantes connexes est borné indépendamment de n . On en déduit que l'ensemble des composantes connexes de U (union croissante des U_n) est fini. Comme U_n est inclus dans l'intérieur de U_{n+1} , on voit que U est ouvert.

2 et 3) Remarquons que $U_0 = h(\Sigma) \setminus \text{Int}(\Sigma)$ est un domaine fondamental de la restriction de h à U . Le quotient U/h de U par h est obtenu à partir de U_0 en identifiant par h les deux copies $\partial\Sigma$ et $h(\partial\Sigma)$ du bord de Σ qui forment le bord de U_0 . On en déduit que U/h est une surface compacte sans bord et que la projection est un revêtement.

Soit C une composante connexe de U . L'ensemble des composantes connexes de U est fini, et h induit une permutation de ces composantes; notons k la période de la composante C . Le quotient C/h^k de C par h^k est une composante connexe de U/h donc est une surface compacte orientable connexe sans bord. La projection de C sur C/h^k est un revêtement cyclique; comme h^k est d'ordre infini le revêtement est infini cyclique. Comme C est inclus dans S , C est (par définition) de genre fini.

Toute surface compacte admettant un revêtement infini cyclique de genre fini est un tore T^2 , et l'espace total du revêtement est donc un cylindre. Enfin, h^k est le générateur du groupe des automorphismes de ce revêtement donc h^k est conjugué à une translation. \square

Corollaire 1.3.3. — *Sous les hypothèses du lemme, notons U_+ l'union*

$$U_+ = \bigcup_{n \geq 0} h^n(h(\Sigma) \setminus \Sigma).$$

Alors le bord dans U de U_+ est exactement $\partial\Sigma$. De plus, il existe une surface compacte à bord \overline{U}_+ munie d'un homéomorphisme \bar{h} possédant un ensemble fini p_1, \dots, p_l de points périodiques attracteurs, telle que $\overline{U}_+ \setminus \{p_1, \dots, p_l\}$ soit homéomorphe à U_+ par un homéomorphisme conjuguant \bar{h} à h .

Démonstration. — Notons $U_n^+ = \bigcup_{i=0}^n h^i(h(\Sigma) \setminus \Sigma)$. Alors le bord de U_n^+ est égal à $\partial\Sigma \cup f^n(\partial\Sigma)$. D'après le lemme 1.3.2, l'homéomorphisme h agit proprement et librement sur U , donc $f^n(\partial\Sigma)$ sort de tout compact de U quand n tend vers l'infini. De plus, U_+ est l'union croissante des U_n^+ : on en déduit que son bord dans U est égal à $\partial\Sigma$.

Soit C une composante connexe de U et k sa période pour f . D'après le lemme 1.3.2, on peut identifier C avec $\mathbb{R} \times S^1$ et l'homéomorphisme h^k avec la translation $(t, \theta) \mapsto (t+1, \theta)$. Choisissons s tel que le cercle $c_t = \{t\} \times S^1$ rencontre U_+ . Comme $U_+ \cap C$ est invariant par h^k , pour tout $n \geq 0$, le cercle $h^n(c_t) = c_{t+n}$ rencontre U_+ . Cependant, pour n assez grand, c_{t+n} est disjoint de $\partial\Sigma$ et plus précisément $\partial\Sigma \subset]-\infty, t+n[\times S^1$. Le demi-cylindre fermé $[t+n, +\infty[\times S^1$ est d'intersection non vide avec $U_+ \cap C$ mais est disjoint de son bord (dans U), donc est contenu dans $U_+ \cap C$. Un raisonnement

analogue permet de montrer que pour n assez grand $U_+ \cap C$ est disjoint du cylindre $] -\infty, t - n] \times S^1$.

Notons \overline{C} la compactification de C par deux points N et S , telle que \overline{C} soit homéomorphe à la sphère S^2 , et que h^k soit conjugué à la dynamique « nord-sud ». Alors $U_+ \cup \{S\}$ est une partie compacte de la sphère S^2 dont le bord, qui est égal à $S \cap C$, est une union finie de courbes simples disjointes. On en déduit que $U_+ \cup \{S\}$ est une surface à bord et que h^k induit un homéomorphisme ayant S comme unique point fixe attracteur.

On obtient la surface à bord \overline{U}_+ annoncée en compactifiant comme ci-dessus les intersections de U_+ avec chaque composante connexe de U . \square

Démonstration de la proposition 1.3.1. — D'après la proposition 1.2.7, le compact hyperbolique K est le saturé d'un intervalle de pièces basiques. Le corollaire 1.2.8 permet alors de choisir deux sous-variétés compactes à bord S_0 et S_1 de S ayant les propriétés suivantes :

$$S_0 \subset \text{Int}(f(S_0)) \subset f(S_0) \subset \text{Int}(S_1) \subset S_1 \subset \text{Int}(f(S_1))$$

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(S_1 \setminus S_0).$$

Considérons $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(S_1 \setminus S_0)$. Remarquons que, puisque le bord de S_1 est contenu dans l'intérieur de $f(S_1 \setminus S_0)$, $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Int}(f^n(S_1 \setminus S_0))$.

1) Soit $O \subset U$ un voisinage compact de K . La famille $\text{Int}(f^i(S_1 \setminus S_0)), i \in \mathbb{Z}$ est un recouvrement ouvert du compact O . Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $O \subset \bigcup_{-n}^n f^i(S_1 \setminus S_0)$. Rappelons que K est le maximal invariant de $S_1 \setminus \text{Int}(S_0)$. Soit $x \in O$ un point n'appartenant pas à K . Il existe donc i tel que $f^i(x)$ soit n'est pas dans S_1 , soit est dans l'intérieur de S_0 :

- dans le premier cas, $f^{n+i}(x)$ n'appartient pas à $f^n(S_1)$ et donc n'appartient pas à O (les $f^n(S_1)$ étant croissants, on a $U_n \subset f^n(S_1)$)
- dans le second cas, $f^{-n+i}(x)$ appartient à $f^{-n}(\text{Int}(S_0))$ et donc (par un raisonnement analogue au premier cas) n'appartient pas à O .

Ceci montre que $x \in O \setminus K$ n'appartient pas au maximal invariant de O . L'inclusion réciproque est immédiate puisque $K \subset O$ est invariant par f . Ceci achève la démonstration de l'item (1).

2) Remarquons que U peut s'écrire

$$U = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(S_0 \setminus f^{-1}(\text{Int}(S_0))) \cup (S_1 \setminus \text{Int}(S_0)) \cup \bigcup_{n \geq 0} f^n(f(S_1) \setminus \text{Int}(S_1))$$

(voir la figure 4).

Le corollaire 1.3.3 dit que $\bigcup_{n \geq 0} f^n(f(S_1) \setminus \text{Int}(S_1))$ admet une compactification en une surface compacte à bord de bord ∂S_1 , en complétant f par un nombre fini d'orbites périodiques attractrices.

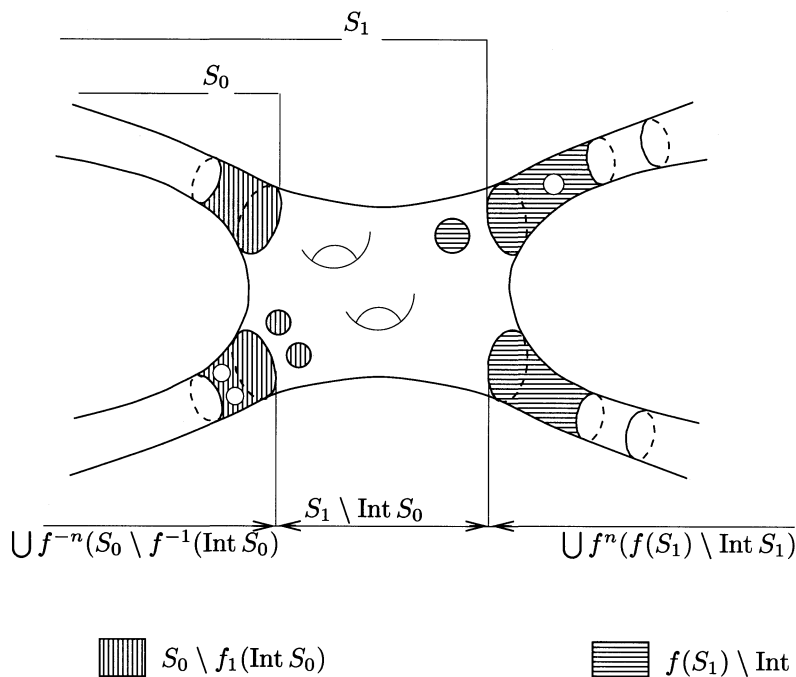


FIGURE 4. Construction d'un voisinage invariant d'un ensemble hyperbolique

Posons $S_2 = S \setminus \text{Int}(S_0)$. Remarquons que S_0 et S_2 ont même bord et que

$$S_0 \setminus \text{Int}(f^{-1}(S_0)) = f^{-1}(S_2 \setminus \text{Int}(S_2));$$

de plus, S_2 vérifie les hypothèses du lemme 1.3.2. Le corollaire 1.3.3 implique donc que $\bigcup_{n \geq 0} f^n(S_0 \setminus f^{-1}(\text{Int}(S_1)))$ se compactifie en une surface compacte de bord ∂S_0 , en complétant f par un nombre fini d'orbites périodiques répulsives. On en déduit facilement que U est un ouvert homéomorphe à une surface compacte \tilde{S} privée d'un ensemble fini de points p_i et que la restriction de f à U se complète sur \tilde{S} de façon que les p_i soient des points périodiques attracteurs ou répulseurs.

Lemme 1.3.4. — Soit D un disque et un homeomorphisme φ de D dans son intérieur ayant un unique point fixe P attracteur. Supposons de plus que l'homéomorphisme φ est un difféomorphisme sur $D \setminus P$. Il existe un difféomorphisme $\tilde{\varphi}$ de D dans son intérieur coïncidant avec φ près du bord de D et possédant comme unique point fixe le point P , qui est de plus attracteur.

Démonstration. — Considérons le tore T_φ quotient par φ de $D \setminus P$. Considérons l'homothétie de rapport $1/2$ de centre P définie sur un disque Δ centré en P contenu dans D . Le quotient par cette homothétie de $\Delta \setminus P$ est un tore $T_{1/2}$. Nous conviendrons d'appeler parallèle les images dans chacun des tores respectivement du bord de D et

du bord de Δ . Les deux tores sont munis d'une structure différentiable puisque φ est difféomorphisme hors de P . Nous pouvons choisir un difféomorphisme de T_φ sur $T_{1/2}$ qui envoie parallèle sur parallèle. En découpant le long des parallèles on obtient un difféomorphisme d'un domaine fondamental de φ sur un domaine fondamental de l'homothétie qui s'étend en un difféomorphisme h de $D \setminus P$ sur $\Delta \setminus P$ conjuguant φ et l'homothétie. Le difféomorphisme h se prolonge continûment en P . Il reste à construire un difféomorphisme \tilde{h} de $D \setminus P$ coïncidant avec l'identité près du bord de D et avec h près de P . On obtient $\tilde{\varphi}$ en conjuguant φ par \tilde{h} . \square

On se convainc maintenant facilement que l'on peut lisser comme ci-dessus \tilde{f} de façon à ce qu'il soit un difféomorphisme. Ce difféomorphisme est de Smale puisque, par l'item (1), le maximal invariant de tout compact disjoint des p_i est inclus dans K qui est un ensemble hyperbolique. \square

Remarque. — L'ouvert invariant U que nous venons de construire dépend, comme sous-ensemble de la surface S , du choix de la filtration isolant l'ensemble hyperbolique. La classe de conjugaison de la restriction de f à U aussi, et même la topologie de l'ouvert U . L'exemple le plus simple est construit à l'aide d'une dynamique sur la sphère, temps 1 d'un champ de vecteur Morse-Smale ayant deux selles s_1 et s_2 , deux puits et deux sources comme sur la figure 5.

Dans cet exemple, les deux filtrations $\{\Sigma_i\}$ et $\{\Sigma'_i\}$, $i \in \{0, 1, 2\}$, représentées définissent deux ouverts U et U' voisinages de la même selle s_1 et les restrictions de f à U et U' ne sont pas conjuguées, comme on peut le voir sur la figure 5.

On peut obtenir des ouverts non-homéomorphes à l'aide d'une dynamique sur le tore temps 1 d'un champ de vecteurs Morse-Smale ayant trois selles s_1, s_2, s_3 en prenant $\{s_1, s_2\}$ comme ensemble hyperbolique.

Etudions à présent la dynamique et la position des variétés invariantes dans cet ouvert invariant :

Proposition 1.3.5. — *Soit K un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale f d'une surface compacte S , et soit U un voisinage invariant de K construit par la proposition 1.3.1.*

1. *Si X est un compact de U disjoint de $W^s(K)$, alors pour tout compact $Y \subset U$, l'ensemble des entiers $n \geq 0$, tels que $f^n(X) \cap Y$ soit non-vide, est fini.*
2. *Soit $S_1 \subset S$ la surface à bord ayant servi pour la construction de U . Alors*

$$W^s(K) = U \cap \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(S_1).$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que U , comme tout voisinage invariant de K , contient les variétés invariantes de K .

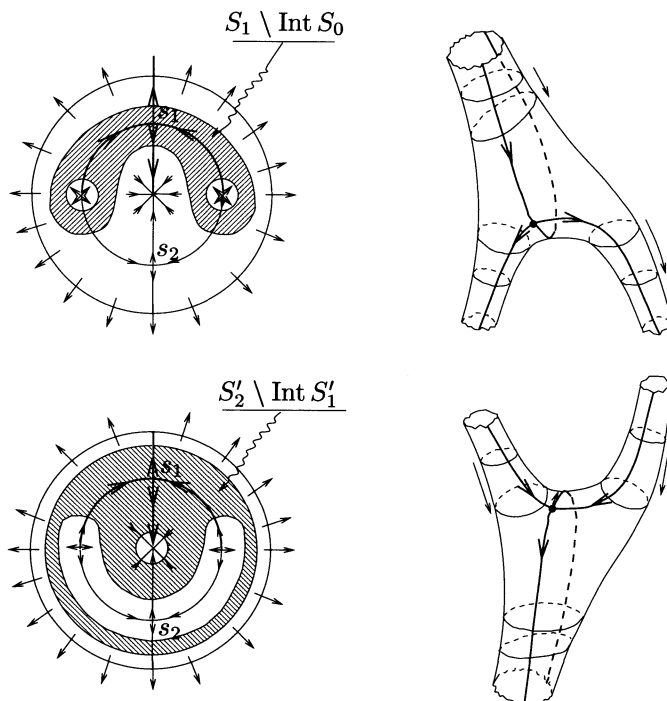


FIGURE 5. Ouverts invariants construits à l'aide de filtration

De l'hypothèse $S_1 \subset f(\text{Int}(S_1))$, on déduit que pour tout $n \geq 0$, tout point $x \notin f^{-n}(S_1)$ a son orbite positive disjointe de $f^{-n}(S_1)$. On en déduit que x n'appartient pas à la variété stable de K ; en d'autres termes, $W^s(K) \subset f^{-n}(S_1) \cap U$ donc

$$W^s(K) \subset U \cap \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(S_1).$$

Voyons la réciproque.

Soit $x \in U \cap \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(S_1)$, et soit $y \in \omega(x)$. Nous allons vérifier que l'orbite de y est contenue dans $\bar{S}_1 \setminus S_0$, ce qui implique que y appartient à K (maximal invariant de $S_1 \setminus \text{Int}(S_0)$); on en déduira que l' Ω -limite de x est contenu dans K et donc que $x \in W^s(K)$.

Remarquons que toute l'orbite positive de x est incluse, par définition, dans S_1 et que son orbite négative aussi car $f^{-1}(S_1) \subset S_1$. De la compacité de S_1 , on déduit que l'orbite de y est incluse dans S_1 .

Remarquons que $x \in U$ implique l'existence de n tel que $x \notin f^n(S_0)$, donc $f^l(x) \notin f^n(S_0)$ pour tout $l \geq 0$. On en déduit que $\omega(x)$ est disjoint de $f^n(S_0)$, et donc aussi de S_0 . L'orbite de y est donc disjointe de S_0 , ce qui conclut.

Soit $X \subset U$ un compact disjoint de $W^s(K)$. De ce qui précède, on déduit que $X \cap \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(S_1) = \emptyset$: il existe donc $n \geq 0$ tel que $f^n(X) \cap S_1 = \emptyset$, et pour tout $l \geq 0$, on a $f^{l+k}(X) \cap f^l(S_1) = \emptyset$. Il reste à remarquer que, pour tout compact $Y \subset U$, il existe $l_0 \geq 0$ tel que $Y \subset f^{l_0}(S_1)$. Alors, pour tout $l \geq l_0$, $f^{k+l}(X)$ est disjoint de Y . \square

Corollaire 1.3.6. — *Les variétés invariantes $W^s(K)$ et $W^u(K)$ sont fermées dans U .*

Démonstration. — En effet, $W^s(K)$ est le complémentaire dans U des bassins d'attraction des puits du difféomorphisme de Smale \tilde{f} que nous venons de construire. On conclut de même pour les variétés instables. \square

En ôtant de \tilde{S} des disques invariants par f autour des points périodiques attracteurs, et invariants par f^{-1} autour des points périodiques répulseurs, on déduit de la proposition 1.3.1 le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.7. — *Soit f un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte, et soit K un ensemble hyperbolique saturé de f . Alors il existe une filtration $S_0 \subset S_1$ telle que K soit le maximal invariant dans $S_1 \setminus S_0$ et que, pour tout i , l'adhérence de $S_i \setminus f(S_i)$ soit l'union d'un ensemble fini de couronnes disjointes (voir la figure 6).*

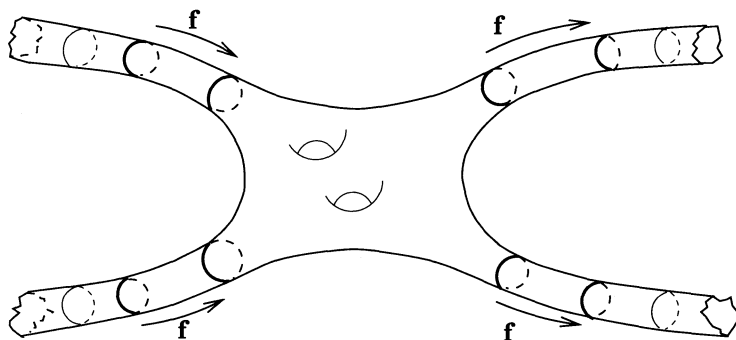


FIGURE 6. Voisinage d'un ensemble saturé, avec entrée et sortie

CHAPITRE 2

GÉOMÉTRIE DES COURBES INVARIANTES

Notons S une surface connexe compacte (sans bord) et $f: S \rightarrow S$ un difféomorphisme de Smale. On supposera désormais que S est orientée et que f préserve l'orientation. Soit K un ensemble hyperbolique saturé de f , ne contenant ni puits ni source.

La structure de produit local de K dit que les variétés stables et instables forment localement un quadrillage ; nous exploiterons dans cette partie l'invariance par f de ce quadrillage et la compacité de S .

2.1. Points bords d'une pièce basique ou d'un ensemble hyperbolique saturé

Soit x un point de $W^s(K)$, il existe un point $y \in K$ tel que $x \in W^s(y)$; nous noterons $W^s(x) = W^s(y)$ la courbe stable passant par le point x . Nous appellerons *séparatrice stable* de x une composante connexe de $W^s(x) \setminus \{x\}$ (cette notation est classique pour les points périodiques). On parlera de même de la variété instable $W^u(x)$ et des séparatrices instables de $x \in W^u(K)$.

Soit x un point de la variété stable de K . Il existe un homéomorphisme h du carré $Q =]-1, 1[^2$ dans S , tel que $h(0, 0) = x$ et tel que $h(Q) \cap W^s(K) = h(]-1, 1[\times F)$, où F est un fermé de $]-1, 1[$. En d'autres termes, $W^s(K)$ est une lamination au voisinage de chacun de ses points (en fait les variétés invariantes sont les feuilles d'un feuilletage invariant par le difféomorphisme f , défini au voisinage de K et dont on trouvera la construction dans [Mo1]). On dira que le point x est *de type s-bord* s'il appartient à un arc $h(]-1, 1[\times y)$ où y est l'extrémité d'une composante du complémentaire de F dans $]-1, 1[$. En remplaçant stable par instable, on définit de même les points *de type u-bord*.

Remarque. — Un point $x \in K$ est de type s-bord (resp. u-bord), si et seulement s'il existe un intervalle borné de sa variété instable (resp. stable) admettant x dans son adhérence et disjoint de K (voir la figure 1).

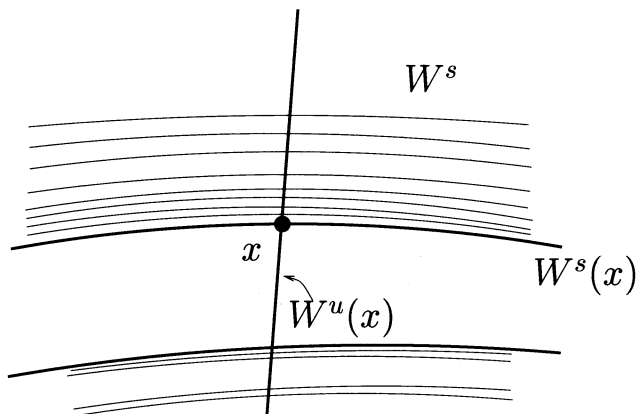


FIGURE 1. Un point de type s-bord

On dira qu'un point $x \in W^s(K)$ est un *double s-bord* s'il existe un intervalle ouvert d'une courbe transverse en x à $W^s(K)$, contenant le point x et tel que x soit l'unique point d'intersection de $W^s(K)$ avec cet intervalle.

Un point s-bord et u-bord sera dit *un coin*.

La proposition suivante est, pour l'essentiel, due à J. Palis et S. Newhouse (voir [NePa])

Proposition 2.1.1

1. Si x est un s-bord, alors tout point de son orbite par f est un s-bord, et tout point de $W^s(x)$ est un s-bord.
2. Si x est un point périodique et est un s-bord, alors l'une des séparatrices de $W^u(x)$ est disjointe de K .
3. L'ensemble des orbites périodiques s-bord est fini.
4. Si $x \in K$ est un point tel que l'une des séparatrices de $W^u(x)$ ne rencontre pas K , alors x est un point périodique.
5. Si x est un s-bord alors x est sur la variété stable d'un point périodique s-bord.
6. Si K ne possède aucun bord, f est Anosov.

Si K possède des u-bords mais pas de s-bord, alors K est un attracteur hyperbolique (éventuellement non-transitif).

(S'il possède des s-bords et des u-bords, on dira que K est de type selle).

7. Un point $x \in W^s(K)$ est un double s-bord si et seulement s'il appartient à la variété stable d'un point périodique dont l'orbite est une pièce basique qui est minimale pour \prec parmi les pièces basiques contenues dans K .

Démonstration. — L'item (1) est une conséquence facile de l'invariance de $W^u(K)$ et $W^s(K)$ par f , ainsi que de la structure de produit local. Pour montrer l'item (2), il suffit de remarquer que, si une séparatrice instable d'un point périodique x contient un point de K autre que x , alors elle contient une suite de points convergeant vers x .

Montrons l'item (3) par l'absurde : supposons qu'il existe une suite infinie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points périodiques de type s-bord ; puisque K est compact, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que cette suite converge vers un point $y \in K$, et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les x_i sont tous dans un petit voisinage de y , sur lequel K a une structure produit. On peut donc projeter les x_i sur la variété instable locale $W_{loc}^u(y)$ le long de leur variété stable : notons \tilde{x}_i cette projection. Choisissons trois indices i, j, k tels que le point \tilde{x}_j appartienne au segment de $W_{loc}^u(y)$ joignant \tilde{x}_i à \tilde{x}_k . Alors chacune des séparatrices instables issues de x_j rencontre la variété stable de x_i ou de x_k , en un point de K , ce qui contredit (d'après (2)) le fait que x_j soit s-bord (voir la figure 2).

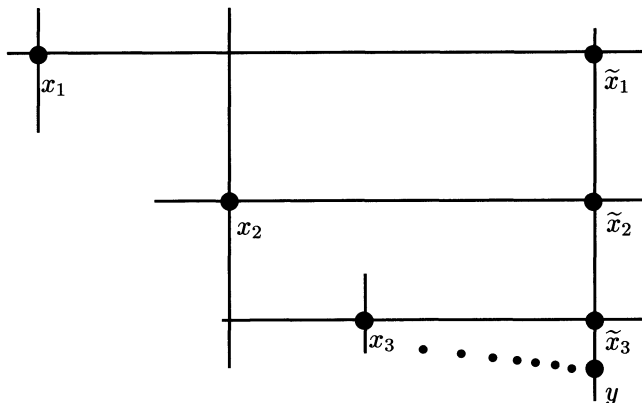


FIGURE 2. Accumulation de points périodiques s-bord

Montrons l'item (4) : soit $x \in K$ tel que l'une des séparatrices instables issues de x soit disjointe de K . Notons $W_+^u(x)$ cette séparatrice. Notons y un point d'accumulation de la suite $(f^{-n}(x)), n \in \mathbb{N}$, et soit $(n_i), i \in \mathbb{N}$ une suite strictement croissante telle que les $f^{-n_i}(x)$ convergent vers y et soient tous dans un petit voisinage de y dans lequel K a une structure de produit. Chaque $f^{-n_i}(x)$ a une séparatrice disjointe de K : la preuve de l'item (3) montre déjà que trois points $f^{-n_i}(x)$, $f^{-n_k}(x)$ et $f^{-n_l}(x)$ ne peuvent avoir des projections différentes sur la variété instable locale de y (le long de leurs variétés stables locales). L'ensemble des projections des points $f^{-n_i}(x)$, pour n_i assez grand, sur la variété instable locale de y se réduit donc à deux points au plus. La convergence de la suite de ces projections vers y implique que pour n_i encore plus grand, cette projection est le point y lui-même. (voir la figure 3). On en déduit que la variété stable du point y est périodique ; notons n sa période. Comme $f^n|_{W^s(y)}$ est

une contraction, $W^s(y)$ est la variété stable d'un point périodique. La dynamique de f^{-n} en restriction à cette variété invariante est une dilatation : en particulier, tout point a un nombre fini d'itérés négatifs par f qui appartiennent à un segment compact fixé de cette variété stable. Or, pour une infinité de valeurs de i , $f^{-n_i}(x)$ appartient à la variété stable locale de y : cette suite de points est donc finie (et en fait constante), c'est-à-dire que x est un point périodique de type s-bord.

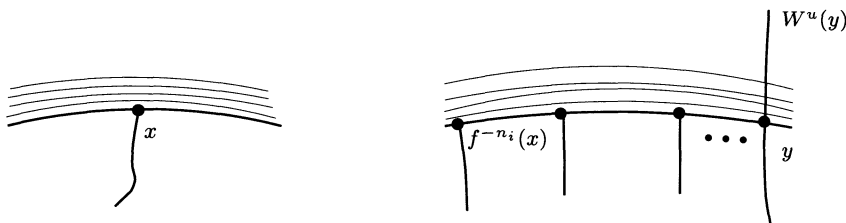


FIGURE 3. Accumulation d'itérés négatifs d'un point s-bord

Prouvons l'item (5). Soit $x_0 \in W^s(K)$ un point s-bord, il existe un point $x \in K$ tel que $x_0 \in W^s(x)$. Nous avons remarqué qu'il existe un intervalle \mathcal{I} d'extrémité x , contenu dans $W^u(x)$ et disjoint de K . Les intervalles $f^n(\mathcal{I})$, $n \geq 0$ restent disjoints de K , et leur longueur reste supérieure à un nombre $\varepsilon > 0$. En effet, la variété instable locale de K est dilatée par f : il suffit de prendre ε plus petit qu'un minorant de la longueur de \mathcal{I} et de la longueur des séparatrices instables locales.

Montrons par l'absurde que tout point appartenant à l' ω -limite de x possède une séparatrice ne rencontrant pas K . Soit $y \in \omega(x)$ appartenant à l'intérieur d'un segment instable $[y_1, y_2]^u$ dont les extrémités appartiennent à K . Il existe $k > 0$ tel que le segment $[f^{-k}(y_1), f^{-k}(y_2)]^u$ est de longueur inférieure à ε ; le point $f^{-k}(y)$ appartient aussi à $\omega(x)$. Soit (n_i) une suite tendant vers $+\infty$ telle que $f^{n_i}(x)$ converge vers $f^{-k}(y)$. En utilisant la structure de produit local au voisinage de $f^{-k}(y)$, on obtient une contradiction puisque la longueur des $f^{n_i}(\mathcal{I})$ reste supérieure à ε .

De l'item précédent, on déduit que tout point de $\omega(x)$ est un point périodique s-bord : on en déduit que x appartient à la variété stable d'une orbite périodique de type s-bord.

Voyons à présent l'item (6). Si K n'a pas de point s-bord, la structure de lamination locale de $W^s(K)$ implique que $W^s(K)$ contient un voisinage de chacun de ses points, donc est un ouvert : K est donc un attracteur hyperbolique.

Si de plus K n'a pas de point u-bord, $W^u(K)$ est ouvert, ce qui implique que $K = W^s(K) \cap W^u(K)$ est lui aussi ouvert : $K = S$ et f est un difféomorphisme d'Anosov.

Enfin démontrons l'item (7). D'après l'item (5), tout point double s-bord est sur la variété stable d'un point périodique double s-bord, dont les deux séparatrices instables

(d'après (2)) sont disjointes de K . L'orbite de ce point périodique n'a pas d'intersection homoclinique. On en déduit que cette orbite périodique est une pièce basique de f , qui est minimale dans K pour la hiérarchie de Smale. \square

Définition 2.1.2. — On appellera *séparatrice stable libre* une séparatrice d'un point périodique u-bord de K qui est stable et disjointe de K . On définit de même une *séparatrice instable libre*.

2.2. s-arches, u-arches, rectangles

La structure de produit local de K va nous permettre de distinguer certains rectangles de S et certains intervalles des courbes invariantes.

Définition 2.2.1 (Rectangles). — Soit R une partie de la surface S . On dira que R est un rectangle pour K , s'il existe deux segments $I, J \subset \mathbb{R}$ et un homéomorphisme $h: I \times J \rightarrow R$ ayant les propriétés suivantes :

Notons ∂I l'ensemble des extrémités du segment I (En particulier si I est réduit à un point, alors $\partial I = I$). Alors on a : $h((\partial I) \times J) \subset W^u(K)$ et $h(I \times \partial J) \subset W^s(K)$.

Pour tout $t \in J$, $h(I \times \{t\})$ est soit disjoint de $W^s(K)$ soit inclus dans $W^s(K)$, et de même, pour tout $s \in I$, $h(\{s\} \times J)$ est soit disjoint de $W^u(K)$ soit inclus dans $W^u(K)$.

On notera $\partial^s(R) = h(I \times \partial J)$ et on l'appellera le bord stable de R , et de même $\partial^u(R) = h(\partial I \times J)$ sera le bord instable de R .

Remarquons que R peut être réduit à un intervalle ou même à un point ; on dira dans ce cas que R est un rectangle dégénéré.

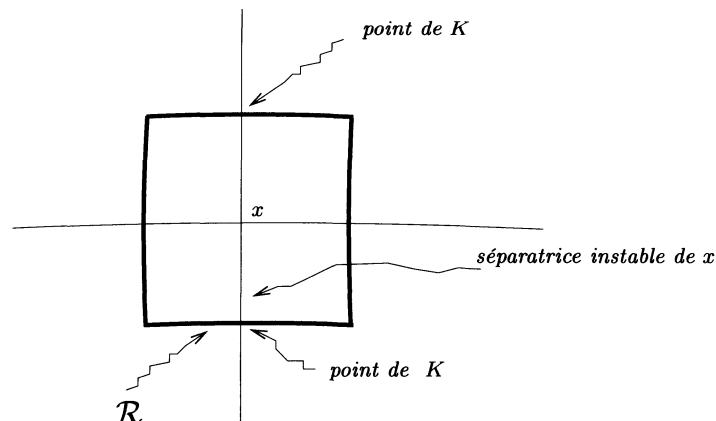


FIGURE 4. Situation interdite

Remarque. — Avec la définition ci-dessus, si x est un point périodique de type s -bord contenu dans un rectangle R , alors x est sur le bord stable de R : en effet, d'après la proposition 2.1.1, l'une de ses séparatrices instable est libre (c'est-à-dire disjointe de K) (voir figure 4).

On utilisera parfois la notion de *rectangle immergé*, que l'on définit de façon identique à la définition ci-dessus, à ceci près que h est un homéomorphisme local, et non pas un homéomorphisme.

Définition 2.2.2 (Arches). — On appellera *u-arche* tout segment de variété instable d'un point de K , d'extrémités sur K et ne rencontrant K qu'en ses extrémités.

Définition 2.2.3 (Arches équivalentes). — On dira que deux *u-arches* différentes sont équivalentes s'il existe un rectangle non-dégénéré, éventuellement immergé, dont le bord instable est l'union des deux arches.

On définit de façon analogue la notion de *s-arches équivalentes*.

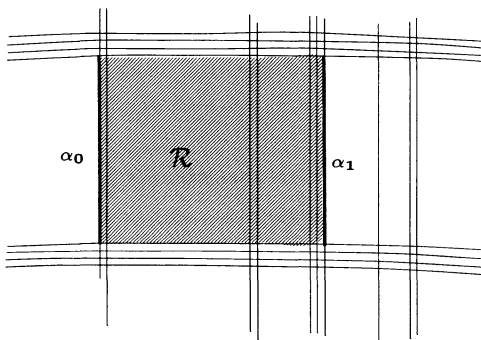


FIGURE 5. Arches équivalentes

Remarques

0. Dans la définition ci-dessus nous avons imposé aux rectangles d'être non dégénérés pour éviter la pathologie représentée sur la figure 6
1. L'«équivalence» d'arches définie ci-dessus est bien une relation d'équivalence si l'on impose de plus qu'une arche est équivalente à elle-même. La réunion de deux rectangles ayant un côté commun est encore un rectangle qui peut cependant être seulement immergé même si les deux rectangles initiaux sont plongés. Ceci garantit la transitivité de la relation.
2. Si α_0 et α_1 sont deux *u-arches* équivalentes, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f^n(\alpha_0)$ et $f^n(\alpha_1)$ sont équivalentes : il suffit de considérer l'image par f^n du rectangle réalisant l'équivalence entre α_0 et α_1 .

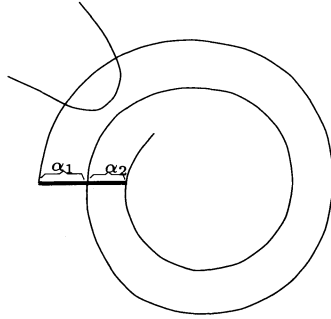


FIGURE 6. Deux arches α_1 et α_2 non équivalentes, dont l'union forme un rectangle dégénéré

3. D'après la remarque ci-dessus, f agit sur les classes d'équivalence d'arches : on pourra donc parler de *l'orbite pour f d'une classe d'équivalence d'arches*.
4. Soient α_0 et α_1 deux u-arches équivalentes et soit R le rectangle réalisant l'équivalence. L'intersection $W^s(K) \cap R$ est réduite au bord stable $\partial^s(R)$ de R (voir la figure 7).

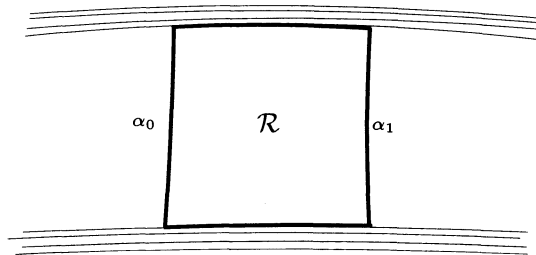


FIGURE 7. L'intérieur d'un rectangle réalisant l'équivalence de deux u-arches ne rencontre pas $W^s(K)$

5. Dans la définition d'arches équivalentes, nous sommes obligés d'accepter des rectangles non-plongés quand K admet des points double-bord. En effet, la configuration suivante (voir figure 8) est possible :

Plus précisément, on peut montrer que si le rectangle réalisant l'équivalence entre deux arches α_1 et α_2 n'est pas plongé, ces deux arches ont leurs deux extrémités sur la même séparatrice. De plus, cette séparatrice est un double-bord. Enfin chacune des arches α_i joint les deux côtés de la séparatrice.

6. Il existe exactement un rectangle définissant l'équivalence entre deux arches différentes.

Le but de ce paragraphe est de prouver :

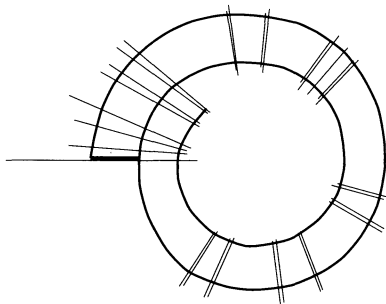


FIGURE 8. Un rectangle non-plongé

Proposition 2.2.4. — *L'ensemble des orbites (pour f) de classes d'équivalence de u -arches est fini.*

Démonstration

Lemme 2.2.5. — *Fixons I un segment compact inclus dans une variété stable d'un point périodique de type s -bord, et ne contenant pas le point périodique. Alors l'ensemble des classes d'équivalence d'arches ayant au moins une extrémité sur I est fini.*

Démonstration du lemme. — Le segment I pouvant *a priori* être un double-bord, fixons un des côtés où I est un bord et considérons les segments de variétés instables d'origine sur I et partant de ce côté. Soit x un point de $I \cap K$. On sait que x n'est pas périodique, donc d'après l'item (4) de la proposition 2.1.1, la séparatrice instable issue de x (et partant du côté fixé) rencontre K en d'autres points. Par compacité de K , il existe un premier point y d'intersection de cette séparatrice avec K , et le segment instable $[x, y]^u$ est une u -arche. Inversement, toute extrémité dans I d'une u -arche est un point de $I \cap K$: $K \cap I$ est donc égal à l'ensemble des extrémités dans I de u -arches partant du côté fixé.

D'autre part, quitte à considérer l'image de la u -arche $[x, y]^u$ par une puissance négative de f , on peut la supposer contenue dans un ouvert ayant une structure de produit local. On en déduit que, pour tout $x \in K \cap I$, il existe un voisinage U_x de x dans I tel que, pour tout $z \in U_x \cap K$, les u -arches issues de x et de z sont équivalentes : on en déduit le lemme par compacité de $I \cap K$. \square

La proposition se déduit du lemme en considérant un domaine fondamental (compact) sur chaque séparatrice de type bord : chaque u -arche possède alors un itéré par f ayant l'une de ses extrémités sur les segments fixés, ce qui prouve la finitude de l'ensemble des orbites de classes d'équivalence d'arches. \square

Définition 2.2.6. — *On appellera domaine d'une classe d'arche l'union des rectangles réalisant l'équivalence entre deux éléments de cette classe.*

On dira qu'une arche est extrémale si elle est incluse dans le bord du domaine de sa classe (on voit facilement qu'une classe d'équivalence possède au plus 2 arches extrémales).

2.3. Zips et attracteurs hyperboliques

Définissons un type de classe d'équivalence d'arches très particulier :

Lemme 2.3.1. — *Soit α une u -arche et A sa classe d'équivalence. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *A possède au plus une arche extrémale, et n'est pas réduite à α ,*
2. *A ne possède pas d'arche extrémale,*
3. *il existe $n \neq 0$ tel que $f^n(A) = A$,*
4. *il existe $n \neq 0$ tel que $f^n(\alpha)$ soit équivalente à α ,*
5. *soit W une séparatrice stable sur laquelle α possède une extrémité. Alors α est équivalente à toute s -arche ayant une extrémité sur W (et partant du même côté de W que α , si W est un double s -bord).*

Indiquons brièvement la démarche à suivre. L'équivalence entre (3) et (4) vient directement de la définition d'équivalence d'arches. On montrera que (4) implique (5) en remarquant que les arches ayant une extrémité sur W entre α et $f^n(\alpha)$ (et du même côté) sont alors équivalentes à α ; cet intervalle contient un domaine fondamental de W , et l'on couvre alors W par les itérés de cet intervalle. Le fait que (5) implique (3) se déduit de la périodicité de la séparatrice W . Le fait que (1) ou (2) implique (5) peut se voir de la façon suivante : le choix d'une orientation de α permet (unicité du rectangle définissant l'équivalence) d'orienter toutes les arches de la classe A de α ; l'ensemble des origines (ou des extrémités) des arches de la classe A est l'intersection d'un intervalle de W avec K ; les extrémités, si elles existent, de cet ensemble doivent correspondre à des arches extrémales. (Nous laissons au lecteur le soin d'achever la démonstration de ce lemme.)

Définition 2.3.2. — *Si une classe d'équivalence de u -arches vérifie l'une des propositions du lemme 2.3.1, on dit que la classe d'équivalence A est un zip. On définit de même les zips pour les classes d'équivalence de s -arches.*

Un zip A sera dit *dégénéré* si une arche $\alpha \in A$ a ses deux extrémités sur la même séparatrice stable (qui est dans ce cas un double s -bord) (voir la figure 10).

Exemple. — Si K est un attracteur hyperbolique transitif, non réduit à une orbite périodique, alors toute classe d'équivalence de s -arches est un zip non dégénéré : en effet toute séparatrice instable d'un point de K est incluse dans K , ce qui interdit l'existence de s -arche extrémale.

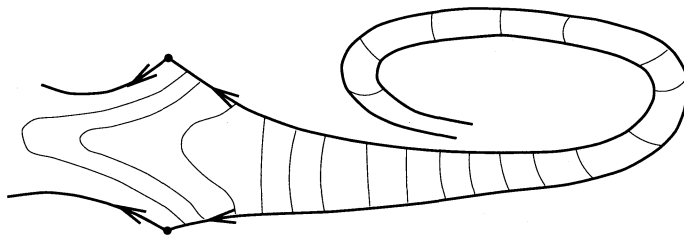


FIGURE 9. Un zip

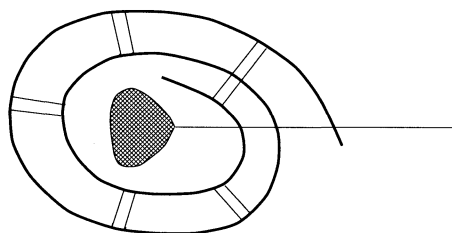


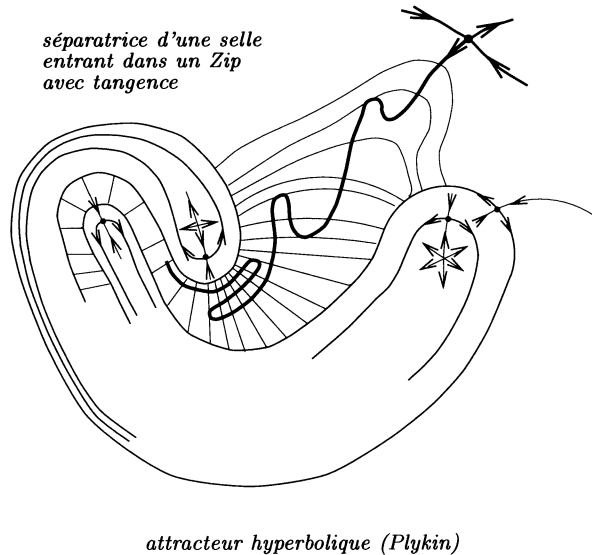
FIGURE 10. Un zip dégénéré

Le bassin d'attraction d'un attracteur hyperbolique non-périodique est feuilleté par les variétés stables des points de l'attracteur. L'hypothèse de transversalité forte des difféomorphismes de Smale entraîne alors d'importantes restrictions sur les variétés instables des autres pièces basiques qui rencontrent ce bassin d'attraction. Ces conditions sont si restrictives que, très souvent, un difféomorphisme f d'une surface compacte vérifiant l'Axiome A mais possédant un attracteur hyperbolique ne peut vérifier la transversalité forte : ceci fournit les seuls exemples (connus à ce jour) d'ouverts, pour la C^1 -topologie, de difféomorphismes structurellement instables de surfaces compactes. Plus précisément :

Parenthèse heuristique sur les ouverts d'instabilité :

Proposition 2.3.3. — *Soit f un difféomorphisme d'une surface compacte, possédant un attracteur hyperbolique non-périodique transitif A et un point périodique p . On suppose que la variété instable de p rencontre le bassin d'attraction $W^s(A)$ mais n'est pas topologiquement transverse au feuilletage défini sur $W^s(A)$ par les variétés stables des points de A . Alors f appartient à l'intérieur, pour la C^1 -topologie, de l'ensemble des difféomorphismes C^1 -structurellement instables.*

La proposition se montre aisément en utilisant le fait que l'attracteur A , sa variété stable locale $W_{loc}^s(A)$, le point périodique p et sa variété instable locale dépendent

FIGURE 11. C^1 -ouvert de difféomorphismes instables

continûment (C^0) de la dynamique f , et le fait qu'une courbe ne soit pas topologiquement transverse à un feuilletage persiste par C^0 -perturbations de la courbe et du feuilletage.

Questions :

1. Tout difféomorphisme f , appartenant à l'intérieur, pour la C^1 -topologie, de l'ensemble des difféomorphismes C^1 -instables, possède-t-il (quitte à remplacer f par f^{-1}) un attracteur hyperbolique A et une selle dont la variété instable n'est pas topologiquement transverse au feuilletage stable de $W^s(A)$?
2. Soit S une surface compacte. Les difféomorphismes vérifiant l'axiome A (mais pas forcément la transversalité forte) sont-ils denses dans $\text{Diff}^1(S)$ pour la C^1 -topologie ? (Rappelons que les difféomorphismes des surfaces vérifiant l'Axiome A ne sont pas denses pour la C^2 -topologie (voir par exemple [PaTa]) et qu'en dimension ≥ 3 ils ne sont pas denses pour la C^1 -topologie.

Fermons à présent cette parenthèse sur les ouverts d'instabilité, et voyons les conséquences de l'hypothèse de transversalité forte, pour un difféomorphisme de Smale possédant un attracteur non périodique :

Théorème 2.3.4. — *Soit f un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte sans bord, possédant un attracteur hyperbolique transitif K non-périodique. Toute pièce basique Λ , dont la variété instable $W^u(\Lambda)$ rencontre le bassin d'attraction $W^s(K)$, est réduite à une orbite périodique. De plus, Λ est soit une orbite périodique répulsive,*

soit une selle dont chaque séparatrice stable est incluse dans le bassin de répulsion d'une orbite périodique répulsive.

Lemme 2.3.5. — *Soit $x \in \Lambda$ ayant une séparatrice c qui rencontre le bassin d'attraction de K . Alors x est périodique, et c est entièrement contenue dans le bassin d'attraction de K . En particulier, la variété instable de Λ ne contient aucune u -arche qui rencontre le bassin d'attraction de K .*

Démonstration. — La séparatrice c rencontre transversalement une variété stable d'un point de K en un point y . Ce point y appartient soit à une s -arche, soit à une séparatrice stable libre. Comme un attracteur hyperbolique ne contient pas de s -bord, toute séparatrice stable libre issue d'un point de K est accumulée par des s -arches. La séparatrice instable c rencontre donc au moins une s -arche α à extrémités sur K . La classe d'équivalence de α est un zip Z . Le domaine du zip est l'image d'une immersion injective de $\mathbb{R} \times [0, 1]$, où l'image de $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ est l'union des séparatrices instables bordant Z et où l'image des segments $\{t\} \times [0, 1]$ sont les arches équivalentes à α . On peut choisir cette immersion de telle façon que lorsque t tend vers $+\infty$, la longueur de l'arche $\{t\} \times [0, 1]$ tende vers 0.

La courbe c étant transverse aux s -arches de K et disjointe des séparatrices instables, elle « traverse entièrement Z » c'est-à-dire coupe toutes les s -arches de Z . Donc toute composante connexe de l'intersection c avec le domaine du zip Z contient l'attracteur dans son adhérence (comme les séparatrices du bord du zip). Cette composante connexe est donc de longueur infinie, et n'est contenue dans aucun segment compact de c . En particulier cette composante connexe n'est pas incluse dans une u -arche, ce qui implique (d'après la proposition 2.1.1) que c est une séparatrice d'un point x périodique, et est incluse dans le domaine de Z . \square

Remarque. — Avec les hypothèses du lemme, la séparatrice instable c ne peut couper aucune séparatrice libre de K : en effet nous venons de montrer qu'elle est entièrement incluse dans le domaine d'un zip.

Démonstration du théorème. — Soit Λ une pièce basique dont la variété instable rencontre $W^s(K)$. On suppose que Λ n'est pas une orbite périodique répulsive. Rappelons que, pour tout point périodique $x \in \Lambda$, sa variété instable $W^u(x)$ est dense dans $W^u(\Lambda)$ donc rencontre $W^s(K)$. Le lemme 2.3.5 implique donc que tout point périodique de Λ est s -bord. Par ailleurs, une pièce basique ne possède qu'un nombre fini de points périodiques s -bords. Donc Λ est réduite à une orbite périodique de type selle.

Soit W^s l'une des séparatrices stables de Λ , et soit Λ_2 une pièce basique dont la variété instable rencontre W^s . Pour achever la démonstration du théorème, nous devons montrer que Λ_2 est une orbite périodique répulsive : montrons-le par l'absurde. Si Λ_2 est de type selle, alors sa variété instable contient une séparatrice qui coupe transversalement $W^s(\Lambda)$ donc s'accumule sur $W^u(\Lambda)$ (d'après le λ -lemma). On en

déduit que cette séparatrice rencontre le bassin d'attraction de K , et nous avons vu que Λ_2 est donc réduite à une selle périodique. Cependant, cette séparatrice n'est pas incluse dans $W^s(K)$ (car rencontre $W^s(\Lambda)$), ce qui contredit le lemme 2.3.5. \square

Remarque. — Le théorème implique que les points du graphe de Smale au-dessus de K forment au plus deux étages : (éventuellement) un de selles, et un de sources, voir figure 12 :

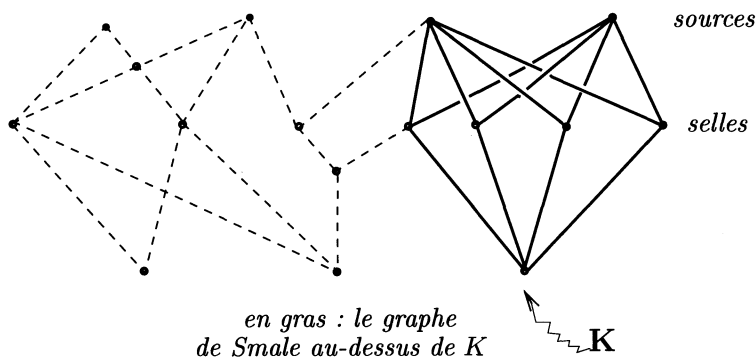


FIGURE 12. Le graphe de Smale au-dessus d'un attracteur non-périodique

Remarque. — Dans tout ce travail, nous avons introduit la notion d'ensemble hyperbolique saturé afin de classifier non seulement les pièces basiques mais aussi la façon dont s'intersectent les variétés stables et instables de pièces basiques différentes. Le théorème 2.3.4 nous dit que les intersections des variétés stables d'un attracteur hyperbolique et des variétés instables des autres pièces basiques sont très simples, et ne poseront aucun problème de classification.

Plus précisément, nous avons vu que toute séparatrice instable située au-dessus de l'attracteur A pour la hiérarchie de Smale est incluse dans un zip. Comme elle est transverse aux variétés stables, elle coupe toutes les arches du zip exactement une fois. Orientons les s-arches d'un zip de la façon suivante : l'orientation dynamique des séparatrices instables du zip (fuyant le point périodique) suivie de l'orientation de l'arche donne l'orientation de la surface. Ceci ordonne les points d'intersection des séparatrices instables situées au-dessus de l'attracteur et coupant une arche donnée. Cet ordre ne dépend pas de l'arche choisie dans un zip donné. Pour décrire complètement l'intersection du bassin d'attraction de A avec les variétés instables de pièces basiques (de type selle) situées au-dessus de A , il suffit de donner pour chaque zip de A la liste ordonnée des séparatrices incluses dans ce zip.

Par ailleurs, pour classifier les ensembles saturés, nous considérerons au chapitre 5 des partitions de Markov par rectangles disjoints, ce qui nous amènera à restreindre

notre étude aux ensembles saturés ne possédant ni attracteur ni répulseur hyperbolique non-périodique. Le théorème 2.3.4 nous dit d'une part que cette hypothèse n'est pas trop restrictive (puisque les difféomorphismes de Smale possédant des attracteurs ou des répulseurs non-périodiques sont très particuliers), et d'autre part qu'il sera aisé de compléter la classification en classifiant les attracteurs hyperboliques (sans trop s'occuper des intersections des variétés invariantes).

Pour voir la classification des attracteurs hyperboliques comme un cas particulier de celle des ensembles saturés de type selle, indiquons comment associer canoniquement un ensemble saturé, de type selle, à tout attracteur hyperbolique non-périodique. Il suffit, comme le fait Smale pour obtenir les difféomorphismes «DA» («dérivés d'Anosov») (voir [Sm] page 789 et [Wi1]), de «gonfler» les variétés instables de tous les points périodiques de plus petite période de l'attracteur. Ceci se fait par une bifurcation générique au voisinage de chacune de ces orbites périodiques, cette bifurcation étant de type selle-nœud ou de type doublement de période, suivant que les valeurs propres associées à cette orbite périodique sont positives ou négatives. C'est pourquoi nous allons nous concentrer (aux chapitres 5 et 6) sur l'étude des difféomorphismes n'ayant ni attracteur ni répulseur hyperbolique non-trivial.

2.4. Où l'on utilise le fait que S est de genre fini

Ce paragraphe présente, à plusieurs reprises, un argument géométrique simple qui va être la clef de deux théorèmes principaux de notre travail. La version la plus simple de cet argument est la remarque suivante :

Remarque. — Si D est un domaine dont les itérés par f sont deux-à-deux disjoints, alors D est homéomorphe à un domaine plan.

Une version plus élaborée est le résultat classique suivant :

Théorème 2.4.1. — *Etant donnée une surface compacte, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout N -uplet de courbes simples disjointes, il en existe deux dans la même classe d'homotopie libre.*

Faute d'avoir trouvée une référence où ce résultat est explicitement démontré, voici en deux mots l'argument de la preuve :

Démonstration. — une surface connexe compacte de caractéristique d'Euler $\chi < 0$, et dont le bord est formé de r courbes, se découpe en pantalons (disque à deux trous) (voir [FLP, exposé 4, appendice]) ; un calcul de caractéristique d'Euler montre qu'une telle décomposition est formée de $-\chi$ pantalons, dont les bords forment un système de $r/2 - 3\chi/2$ courbes simples disjointes non-homotopes. Toute autre courbe simple, disjointe des précédentes, soit borde un disque, soit est homotope à l'une des courbes précédentes.

Soit à présent un système Γ de courbes simples disjointes non-homotopes entre elles. Découpons la surface le long de ces courbes. On obtient des surfaces à bord dont aucune composante n'est une sphère, un disque, un tore ou un anneau, donc chacune est de caractéristique d'Euler strictement négative. Ceci montre que l'on peut compléter le système de courbes Γ de façon à obtenir un découpage en pantalons ; l'argument précédent montre que Γ contient au plus $r/2 - 3\chi/2$ courbes. \square

Voyons à présent une conséquence dynamique de cet argument topologique.

Lemme 2.4.2. — *Soit K un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale f . Soit γ une u -arche dont les extrémités x et y appartiennent à deux séparatrices stables (s -bords) distinctes W_1^s et W_2^s respectivement. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f^n laisse invariantes les séparatrices W_1^s et W_2^s , et que la courbe fermée δ formée des 2 arches γ et $f^n(\gamma)$, et des segments stables joignant x à $f^n(x)$ et y à $f^n(y)$ borde un disque D d'intérieur disjoint de K .*

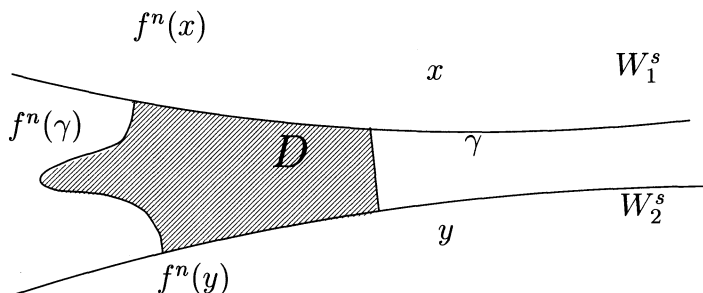


FIGURE 13. Pas de genre entre les arches

Démonstration. — Choisissons d'abord $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f^n laisse globalement invariante chacune des séparatrices W_i^s . On remarque que, même si les deux séparatrices sont des double-bords, $f^n(\gamma)$ est une u -arche partant et arrivant des mêmes côtés de W_1^s et W_2^s que γ : en effet, par hypothèse, f préserve l'orientation.

Appelons δ la courbe fermée, formée des deux arches γ et $f^n(\gamma)$, et des segments stables joignant x à $f^n(x)$ et y à $f^n(y)$. C'est une courbe fermée simple : en effet γ et $f^n(\gamma)$ sont des u -arches, donc ne peuvent rencontrer les segments stables qu'en leurs extrémités, et les deux segments stables contenus dans δ sont sur deux séparatrices distinctes.

Les itérés $f^{2n \cdot i}(\delta)$ sont tous disjoints, puisque les segments instables sont des u -arches distinctes, et on vérifie facilement que les segments stables sont deux-à-deux disjoints. On utilise alors le théorème 2.4.1 pour en déduire qu'il existe i, j tels que $f^{2n \cdot i}(\delta)$ et $f^{2n \cdot j}(\delta)$ soient dans la même classe d'homotopie : en conséquence, ils bordent soit des disques disjoints, soit une couronne.

Montrons par l'absurde qu'ils ne peuvent pas border une couronne C .

La variété stable W_1^s ne traverse aucune courbe $f^{n \cdot p}(\delta)$, puisque les deux arches instables de δ sont du même côté de W_1^s (voir la figure 14).

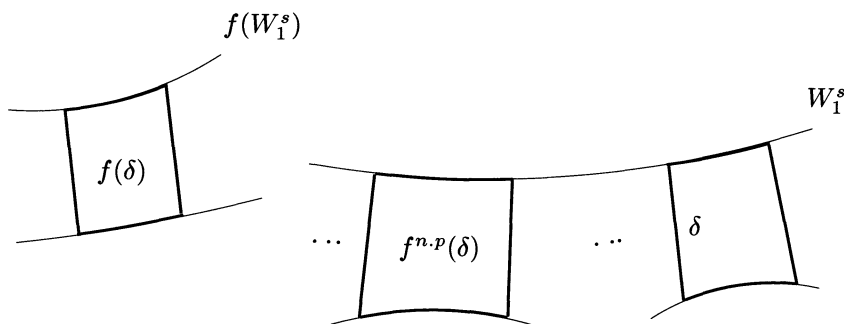


FIGURE 14. La variété stable W_1^s ne traverse pas la courbe $f^{n \cdot p}(\delta)$

Par ailleurs $f^{(2i-2j) \cdot n}(C)$ est une couronne dont le bord a une composante connexe et une seule en commun avec le bord de C : ces deux couronnes sont donc soit adjacentes soit incluses l'une dans l'autre. La réunion $C \cup f^{(2i-2j) \cdot n}(C)$ est encore une couronne \mathcal{A} . La réunion des bords $\partial C \cup \partial f^{(2i-2j) \cdot n}(C)$ est formée de trois courbes simples disjointes a , b et c , telles que a et c bordent \mathcal{A} et que b est une courbe essentielle contenue dans l'intérieur de \mathcal{A} . Remarquons que W_s^1 a un segment en commun avec b mais ne traverse ni a ni b ni c , et donc se trouve entièrement contenue dans une couronne bordée soit par a et b , soit par b et c . Ceci contredit le fait que W_1^s rencontre a et c .

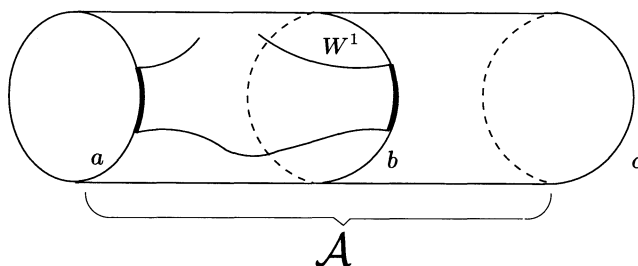


FIGURE 15. La variété stable et les couronnes

Il existe donc un itéré par f de δ qui borde un disque donc tous les itérés de δ bordent des disques : notons D celui qui est bordé par δ . La non-existence de couronnes implique que ces disques sont deux-à-deux disjoints. Remarquons que les seules variétés stables de K qui rencontrent le bord de D sont W_1^s et W_2^s , et qu'elles ne traversent pas ce bord : toute variété stable de K rencontrant l'intérieur de D est

donc entièrement contenue dans D . La pièce basique dont elle provient est donc elle aussi entièrement contenue dans D . Chaque itéré $f^{2 \cdot n \cdot p}(D)$ contiendrait au moins une pièce basique ce qui est impossible. On a bien montré que D est d'intérieur disjoint de K . \square

Corollaire 2.4.3

1. Avec les hypothèses du lemme ci-dessus, si $p > 0$ est le plus petit entier tel que $f^p(W_1^s) = W_1^s$, alors $f^p(W_2^s) = W_2^s$, et la courbe δ peut être construite à l'aide des arches γ et $f^p(\gamma)$.
2. Soit γ une u -arche dont les extrémités sont sur deux séparatrices différentes, W_1^s et W_2^s . Alors toute arche γ' ayant une extrémité sur W_1^s a son autre extrémité sur W_2^s ou sur W_1^s .
3. De plus, si l'autre extrémité de γ' est sur W_2^s alors le quadrilatère obtenu en joignant les deux arches γ et γ' par les segments stables des W_i^s qui joignent leurs extrémités borde un disque d'intérieur disjoint de K .
4. Enfin, orientons les séparatrices stables W_i^s vers le point périodique ; alors γ coupe W_1^s et W_2^s suivant la même orientation.

Démonstration. — Pour prouver l'item 1 il faut montrer que les deux séparatrices stables ont même période. Soit n un entier défini dans le lemme ci-dessus et soit $0 < p \leq n$ tel que f^p laisse globalement invariante W_1^s . Alors $f^p(\gamma)$ est une u -arche ayant une extrémité $f^p(x)$ dans l'intervalle stable $[x, f^n(x)]^s$, qui part du même côté de W_1^s que γ (car f préserve l'orientation). Cette arche entre donc dans D au point $f^p(x)$. On en déduit que $f^p(\gamma)$ est incluse dans D , et donc que $f^p(y)$ appartient à $W_1^s \cup W_2^s$, et donc que $f^p(W_2^s) = W_2^s$.

Montrons l'item 2. Il existe m tel que γ' soit incluse dans le disque, d'intérieur disjoint de la pièce basique, qui est bordé par γ , $f^m(\gamma)$ et les segments stables qui les joignent, dont l'existence est assurée par le lemme ci-dessus. Les deux cas de l'item 2 sont obtenus par le fait qu'un segment instable, qui entre dans ce disque par l'un des deux bords stables, ne peut en ressortir que par l'un de ces bords stables. Si l'autre extrémité de γ' est sur W_2^s , alors il suffit de découper le disque précédent le long de γ' , pour obtenir le disque annoncé dans l'item 3.

Pour montrer l'item 4, il suffit de constater que l'orientation « vers le point périodique » des variétés stables, induit sur les côtés stables $[x, f^p(x)]^s$ et $[y, f^p(y)]^s$ de D l'orientation allant de x vers $f^p(x)$ et de y à $f^p(y)$. \square

De l'item (4) du corollaire 2.4.3, on déduit facilement le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.4. — *Le « fer à cheval » représenté par la figure 16 n'est pas une pièce basique d'un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte.*

Démonstration. — (voir figure 16) L'arche stable α coupe les variétés instables des points fixes p et q suivant des orientations différentes. \square

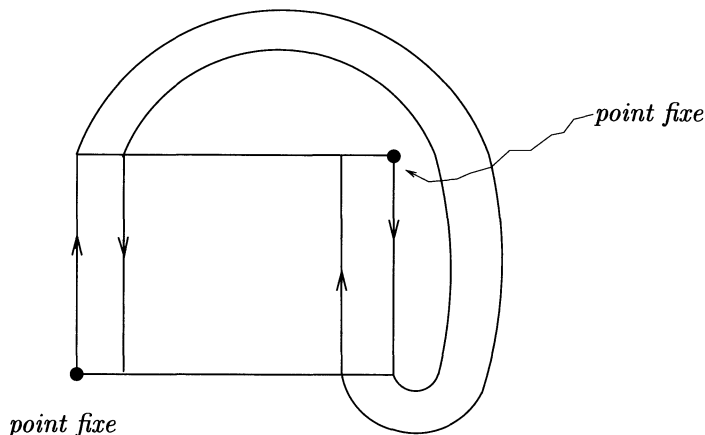


FIGURE 16. Cet ensemble hyperbolique n'est pas saturé

Par un raisonnement analogue à celui du lemme 2.4.2 on montre :

Lemme 2.4.5. — Soit γ une u -arche dont les extrémités sont situées sur la même séparatrice stable W^s , (et partant du même côté, si cette séparatrice est un double-bord). Alors la courbe fermée obtenue en joignant les extrémités de γ par le segment stable qui les joint est une courbe simple fermée qui borde un disque D d'intérieur disjoint de K . De plus, les itérés $f^n(D)$, $n \in \mathbb{Z}$ sont deux-à-deux disjoints.

En conséquence, tout segment instable entrant dans ce disque est une u -arche dont les extrémités sont contenues dans le segment de W^s joignant les extrémités de γ .

Démonstration. — Notons I le segment de variété stable joignant les extrémités de γ , et notons $\delta = I \cup \gamma$. Comme I et γ ne se touchent qu'en leurs extrémités, il est clair que δ est une courbe fermée simple. Notons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que tous les itérés de I par f^n soient deux-à-deux disjoints. Alors les itérés de δ par f^n sont deux-à-deux disjoints : ceci permet de recommencer l'argument de la démonstration du lemme 2.4.2, et donc de montrer que δ est le bord d'un disque D dont l'intérieur est disjoint de K , et dont tous les itérés par f^n sont deux-à-deux disjoints.

Montrons à présent que tous les itérés de D sont deux-à-deux disjoints. Il suffit bien sûr de montrer que tout itéré de D est disjoint de D . Soit i tel que $f^i(D) \cap D \neq \emptyset$. On sait que le bord d'un de ces deux disques n'est pas inclus dans l'intérieur de l'autre (puisque l'intérieur des disques est disjoint de K). On en déduit que les deux bords se rencontrent, et donc soit $\gamma = f^i(\gamma)$ (c'est-à-dire $i = 0$), soit $I \cap f^i(I) \neq \emptyset$. Donc l'une des extrémités de ces intervalles appartient à l'autre. Comme γ et $f^i(\gamma)$ partent

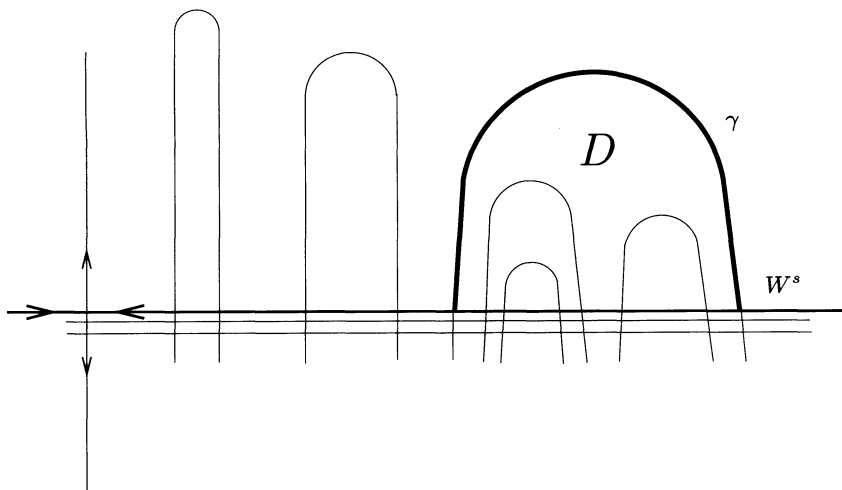


FIGURE 17. Disque associé à une arche dont les deux extrémités sont sur la même séparatrice

du même côté de la séparatrice, on en déduit que $\gamma \subset f^i(D)$ ou $f^i(\gamma) \subset D$. Dans le premier de ces cas, on en déduit $D \subset f^i(D)$ et donc $I \subset f^i(I)$ ce qui implique l'existence d'un point fixe de f^i dans I si $i \neq 0$. On raisonne de même si $f^i(\gamma) \subset D$. On a donc montré :

$$D \cap f^i(D) \neq \emptyset \Rightarrow i = 0$$

□

Lemme 2.4.6. — Soit γ une u -arche joignant les deux côtés d'une même séparatrice double s -bord, W^s . Notons δ la courbe fermée simple obtenue en joignant les extrémités de γ par le segment stable de W^s . Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n(\delta) \cup \delta$ soit le bord d'une couronne dont l'intersection avec $W^s(K)$ est un segment contenu dans W^s .

On en déduit que toute u -arche ayant une extrémité sur W^s a ses deux extrémités sur W^s .

La démonstration est tout à fait dans le même esprit que celles des deux lemmes précédents, elle sera donc laissée au lecteur.

Définition 2.4.7. — On appelle *impasse* tout disque, d'intérieur disjoint de la pièce basique et dont le bord se réduit à une u -arche et une s -arche.

De la proposition 2.2.4 on déduit :

Corollaire 2.4.8. — Les deux arches formant le bord d'une impasse sont extrémales (dans leurs classes d'équivalence d'arches). En conséquence, l'ensemble des orbites des impasses est fini.

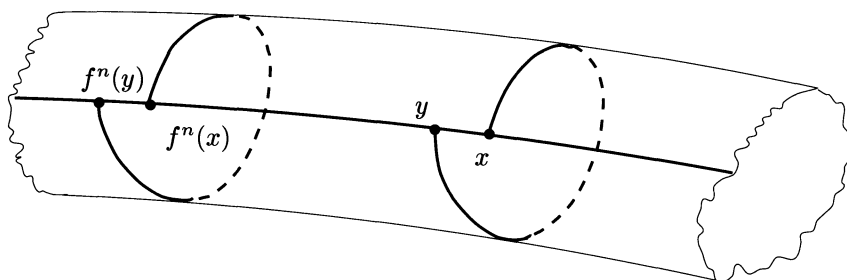


FIGURE 18. Arche joignant les deux côtés d'une séparatrice double-bord

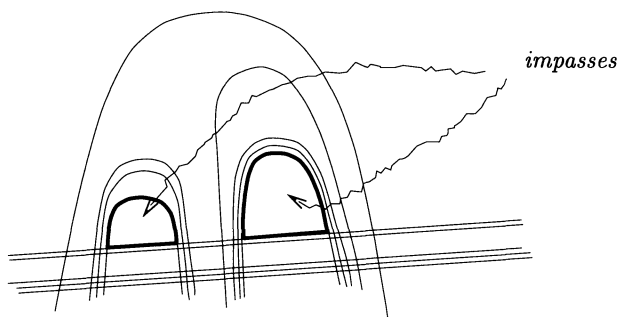


FIGURE 19. Une impasse

Nous avons défini un zip, comme étant une classe d'équivalence d'arches infinie (sans arches extrémales). Les deux séparatrices sur lesquelles s'appuient les arches du zip sont alors, en quelque sorte, asymptotes, se rapprochant indéfiniment l'une de l'autre : nous pourrions d'ailleurs, au chapitre 8 de ce travail, refermer le zip, tout le support du zip s'identifiant à une séparatrice. À l'opposé des zips, les impasses compliquent le dessin des variétés invariantes, celles-ci tournant autour des impasses. Il est naturel de penser que moins il existe d'orbites d'impasses et plus il y a de zips : c'est ce qu'exprime la proposition suivante.

Proposition 2.4.9. — *Si K ne possède aucune impasse, alors toutes les séparatrices stables ou instables de type bord des points de K portent des zips (en d'autres termes, toute classe d'équivalence d'arches est un zip).*

Démonstration. — La proposition découle des deux remarques suivantes :

Remarquons d'une part que le lemme 2.4.5 permet de montrer que l'existence d'une u -arche γ , dont les extrémités sont situées sur la même séparatrice stable (et partant du même côté), implique l'existence d'une impasse incluse dans le disque associé D à γ (il suffit en effet de considérer un disque minimal pour l'inclusion parmi les disques inclus dans D et bordés par l'union d'un segment stable et d'un segment instable).

D'autre part, soit α une u -arche ayant ses deux extrémités sur deux séparatrices distinctes, soit p une période de ces séparatrices, et soit Δ le disque associé par le lemme 2.4.2 à α et $f^p(\alpha)$. Si Δ ne contient pas de u -arche ayant ses extrémités sur la même séparatrice, alors Δ est un rectangle (voir la définition 2.2.1) réalisant une équivalence entre les arches α et $f^p(\alpha)$, et la classe d'équivalence de α est donc un zip. \square

Le chapitre 8 est consacré à l'étude des pièces basiques sans impasses : nous y montrons qu'en refermant tous les zips, on obtient un homéomorphisme de type pseudo-Anosov.

2.5. Itérés des arches dans un domaine invariant

La proposition 1.3.1 a construit un voisinage ouvert invariant U d'un ensemble hyperbolique saturé K , en saturant par f un voisinage de K de la forme $\Sigma_1 \setminus \Sigma_0$, où Σ_0, Σ_1 forme une filtration adaptée à K .

Nous allons étudier dans ce paragraphe l'ensemble des points de U sur lesquels s'accumulent les itérés $f^n(\alpha)$, où α est une arche de K .

Lemme 2.5.1. — *Soient K un ensemble hyperbolique saturé et U un voisinage invariant de K construit à partir d'une filtration par la proposition 1.3.1. Alors l'union d'un point périodique bord p de K et de l'une de ses séparatrices libres est fermé dans U .*

Démonstration. — Notons W^u une séparatrice instable libre d'un point périodique s -bord p . L'ensemble des séparatrices libres est fini, donc W^u est périodique : notons k sa période.

Soit q un point de W^u , et notons I le segment $[q, f^k(q)]^u$ de W^u . Remarquons que W^u est l'union $\bigcup_{\mathbb{Z}} f^n(I)$. De plus l'union $\{p\} \cup \bigcup_{-\infty}^{-1} f^n(I)$ est le segment compact $[p, q]^u$. Il suffit donc de montrer que $\bigcup_0^{+\infty} f^n(I)$ est fermé dans U . Ceci est une conséquence facile de la proposition 1.3.5 : comme I est un compact disjoint de $W^s(K)$, seul un nombre fini de ses itérés positifs rencontre un compact donné de U . L'intersection de $\{p\} \cup W^u$ avec tout compact de U est compacte, ce qui conclut. \square

Nous allons à présent considérer l'ensemble des points de U sur lesquels s'accumulent les itérés d'une arche, instable pour se fixer les idées.

Remarque. — Soient α une arche instable et (x_i) une suite de points de α telle qu'il existe une suite (n_i) convergeant vers $+\infty$ telle que $(f^{n_i}(x_i))$ converge vers un point y de U . Alors les valeurs d'adhérence de la suite (x_i) sont réduites aux extrémités de α : en effet, si une sous-suite de (x_i) converge vers un point x de α (qui est compacte), alors tout voisinage compact de x possède une infinité d'itérés positifs rencontrant un voisinage compact de y inclus dans U . La proposition 1.3.5 implique alors que tout

voisinage compact de x rencontre $W^s(K)$ qui est fermé d'après le corollaire 1.3.6 : x appartient donc à $\alpha \cap W^s(K)$, donc est l'une des extrémités de α .

Considérons α une arche instable de K , et une suite (x_i) de points de α telle qu'il existe une suite (n_i) d'entiers, convergeant vers $+\infty$ et telle que $(f^{n_i}(x_i))$ converge vers un point y de U . D'après la remarque ci-dessus, quitte à prendre une sous-suite, nous supposons que la suite (x_i) converge vers une extrémité x de α . Notons p le point périodique dont la variété stable contient x , et W^s la séparatrice stable de p contenant x . Notons W^u la séparatrice libre instable de p partant du même côté de W^s que α . Notons k la période de la séparatrice W^s . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite (n_i) s'écrit de la forme $n_i = (k \cdot m_i) + l$ où l est un entier indépendant de i et compris entre 0 et $k - 1$. Remarquons qu'alors la suite $(f^{k \cdot m_i}(x_i))$ converge vers le point $f^{-l}(y) \in U$ (voir la figure 20).

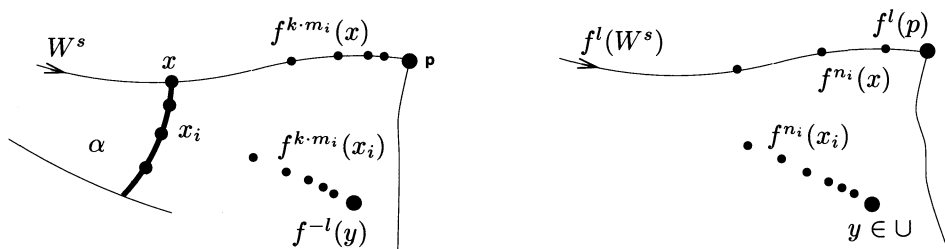


FIGURE 20. Où s'accumulent les arches

Proposition 2.5.2. — Avec les notations ci-dessus, le point $f^{-l}(y)$ appartient à la séparatrice libre W^u , ou est le point périodique p .

Démonstration. — La démonstration étant triviale si la suite (x_i) contient une infinité de fois le point x , nous supposons que tous les x_i appartiennent à l'intérieur de l'arche α .

Pour alléger les notations, nous supposons que $l = 0$, c'est-à-dire que les entiers n_i sont des multiples de la période k .

Le corollaire 1.3.6 dit que $W^u(K)$ est fermé dans U , ce qui implique que y appartient à $W^u(K)$. On peut donc considérer la variété instable de y , ainsi que les deux séparatrices instables issues de y . Remarquons enfin que $W^u(y)$ contient au moins un point de K .

Lemme 2.5.3. — Le point y n'appartient à l'intérieur d'aucun segment instable ayant ses extrémités sur K . En conséquence, (d'après la proposition 2.1.1), le point y ou bien est un point périodique s -bord, ou bien appartient à une séparatrice libre instable d'un point périodique s -bord.

Démonstration du lemme. — Supposons d'abord, par l'absurde, qu'il existe deux points $y_1, y_2 \in W^u(y) \cap K$ tels que y appartienne à l'intervalle ouvert $]y_1, y_2[^u$. Fixons I un segment compact de $W^u(y)$ contenant y_1 et y_2 dans son intérieur. Pour i assez grand, $f^{n_i}(x_i)$ est très proche de y , et la dépendance continue des variétés instables implique l'existence d'un segment I_i proche de I contenu dans la variété instable $W^u(f^{n_i}(x_i))$, et contenant $f^{n_i}(x_i)$ dans son intérieur. Pour i assez grand, la variété stable locale de y_1 et celle de y_2 coupent le segment I_i en un et un seul point, noté respectivement a_i et b_i , et $f^{n_i}(x_i)$ appartient à l'intérieur du segment $[a_i, b_i]^u$. De plus, la longueur des segments $[a_i, b_i]^u$ est uniformément bornée (par exemple, par la longueur de I). Remarquons que a_i et b_i sont points d'intersection de $W^s(K)$ et de $W^u(K)$, donc appartiennent à K (voir la figure 21).

Considérons à présent la suite des segments $J_i = f^{-n_i}([a_i, b_i]^u)$. C'est une suite de segments de la variété instable de x , ayant leurs extrémités sur des points de K , et J_i contient x_i dans son intérieur.

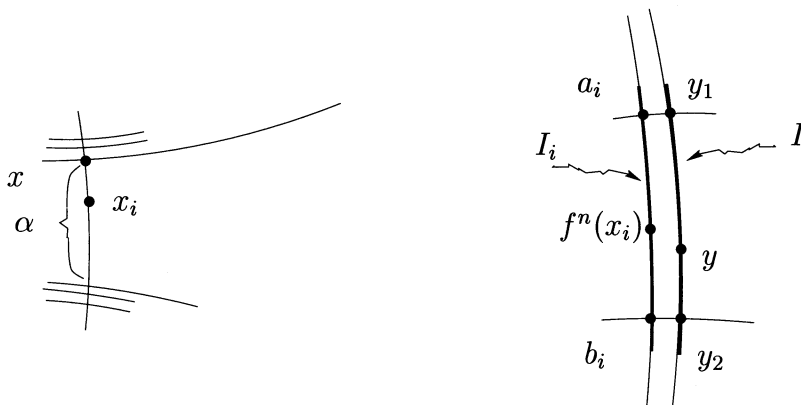


FIGURE 21

Montrons à présent que la longueur de J_i tend vers 0. Pour cela, considérons $m > 0$ tel que $f^{-m}(I)$ soit de longueur strictement inférieure à la taille δ d'un voisinage O de K (i.e. la distance de K à $S \setminus O$) sur lequel f^{-1} contracte uniformément les vecteurs tangents à $W^u(K)$. On écrit alors $J_i = f^{-n_i+m}(f^{-m}([a_i, b_i]^u))$ et pour i assez grand $f^{-m}([a_i, b_i]^u)$ est de longueur inférieure à δ et a ses extrémités sur K : on montre par récurrence qu'à chaque itération par f^{-1} , un tel intervalle a sa longueur qui décroît d'un rapport uniforme, ce qui assure que l'intervalle itéré reste inclus dans O , et montre donc que l'itéré suivant a de nouveau sa longueur qui décroît d'un rapport uniforme.

Les segments J_i rencontrent l'intérieur de l'arche α en x_i , et leur longueur tend vers 0 ; pour i assez grand, l'une des extrémités de J_i est donc incluse dans l'intérieur de α , ce qui contredit le fait que J_i a ses extrémités dans K .

Nous avons donc montré que y n'est dans l'intérieur d'aucun segment instable à extrémités dans K , ce qui est équivalent d'après la proposition 2.1.1 à ce que y ou bien est un point périodique s-bord, ou bien appartient à une séparatrice libre instable d'un point périodique s-bord. \square

Fin de la démonstration de la proposition

Notons y' le point périodique s-bord de $W^u(y)$ (éventuellement y et y' peuvent être confondus). Montrons que $y' = p$. La démonstration est presque identique à celle du lemme ci-dessus, et nous réutiliserons donc les mêmes notations.

Soit I un segment de $W^u(y)$ contenant y et y' dans son intérieur. Pour i assez grand, $W^u(f^{n_i}(x_i))$ contient un segment I_i contenant $f^{n_i}(x_i)$ dans son intérieur, et aussi proche que l'on veut de I . En particulier la variété stable locale de y' coupe I_i en un point a_i qui appartient donc à K (voir la figure 22). Notons $J_i = f^{-n_i}([a_i, f^{n_i}(x_i)]^u)$; c'est un segment de variété instable, ayant une extrémité en x_i et l'autre en un point de K . De plus, un raisonnement identique à celui déjà utilisé pour le lemme permet de montrer que la longueur de J_i tend vers 0. On en déduit que, pour i assez grand, J_i contient le point x .

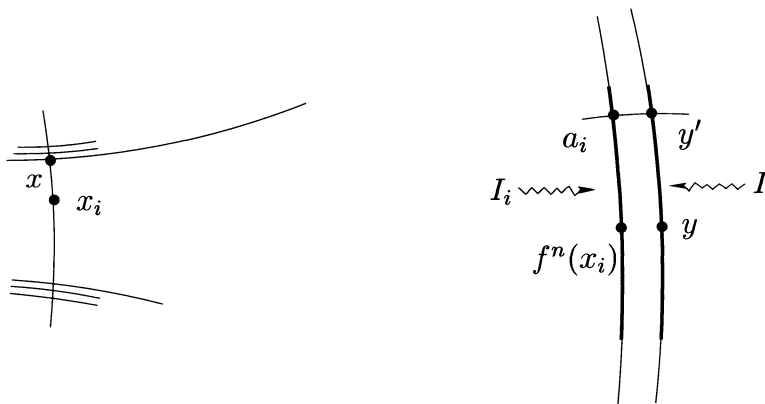


FIGURE 22

Donc pour i assez grand le segment $[a_i, f^{n_i}(x_i)]^u$ contient le point $f^{n_i}(x)$. Or la suite $f^{n_i}(x)$ converge vers p , puisque les n_i ont été supposés multiples de la période k . Donc p appartient au segment I et donc $p = y'$ (une variété instable ne contient qu'un point périodique!).

On a donc déjà montré la proposition dans le cas où W^s n'est pas double s-bord. Pour conclure la démonstration dans le cas où p est un double s-bord, il reste à remarquer que les segments $f^{n_i}([x, x_i]^u)$ convergent vers le segment $[y', y]^u$: comme f^{n_i} laisse la séparatrice W^s invariante et préserve l'orientation de S , on en déduit

que, dans le cas où $y \neq y'$, le point y est sur la séparatrice libre de y qui part du même côté de W^s que α . \square

Corollaire 2.5.4. — *Soit D un rectangle plongé dans U , dont le bord instable est formé de deux arches instables et dont les côtés stables sont portés par deux séparatrices stables W_1^s et W_2^s de points périodiques s -bords p_1 et p_2 (qui ont même période k d'après le lemme 2.4.3).*

Alors, toute valeur d'adhérence dans U de la suite $(f^{k \cdot n}(D))$, $n \in \mathbb{N}$, ou bien est l'un des points périodiques p_i , ou bien appartient à l'une des séparatrices instables libres issues d'un des p_i et partant du même côté de W_i^s que les u -arches du bord de D .

Démonstration. — Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(f^{k \cdot n}(D))$. Il existe donc une suite (n_i) de multiples de k , tendant vers l'infini et telle que tout voisinage de y rencontre $f^{n_i}(D)$. Pour pouvoir appliquer la proposition 2.5.2, il suffit de montrer que tout voisinage assez petit de y rencontre $f^{n_i}(\partial^u(D))$.

Remarquons d'abord que les $f^{n_i}(D)$ ont un diamètre qui reste loin de 0, car les itérés positifs des arches instables sont dilatés par f . Un petit voisinage V de y ne peut donc pas contenir $f^{n_i}(D)$. Si V est disjoint de $\partial f^{n_i}(D)$ alors $V \subset f^{n_i}(D)$. Cependant, il existe m tel que $\partial^s(D) \cap \partial^s(f^n(D)) = \emptyset$, pour tout $n \geq m$: en effet, le bord stable de D étant formé de deux segments sur des séparatrices stables de points périodiques, il suffit d'itérer assez pour que ces segments soient inclus dans un tout petit voisinage des points périodiques. Les côtés instables de D étant des arches, il ne peuvent couper le bord stable de $f^n(D)$. On en déduit que pour n assez grand, D et $f^n(D)$ sont disjoints, car de bords disjoints.

On en déduit que V n'est pas inclus dans les $f^{n_i}(D)$ qui le rencontrent. Il existe donc des entiers i aussi grands que l'on veut tels que V rencontre le bord de $f^{n_i}(D)$. Si V rencontre le bord stable de $f^{n_i}(D)$ pour une infinité de valeurs de i , alors V contient dans son adhérence l'un des deux points p_i . Si y n'est pas l'un des deux points p_i , et si V a été choisi assez petit, pour i assez grand V est disjoint du bord stable de $f^{n_i}(D)$ et rencontre donc son bord instable. On conclut alors grâce à la proposition 2.5.2. \square

2.6. Couplage de séparatrices, polygones d'arches

Ce paragraphe développe les conséquences des lemmes 2.4.2, 2.4.5 et du corollaire 2.4.3 :

Nous verrons que les séparatrices bords (plus précisément, s'il existe des double-bords, les côtés isolés des séparatrices bords), sont associées par paires de façon naturelle. Nous verrons de plus que les chaînes d'arches (courbes obtenues comme union d'arches, successivement stables et instables) sont de deux sortes : sauf un nombre fini

d'entre elles, ce sont des polygones finis, qui bordent des disques errants, les autres sont des chaînes infinies qui s'accumulent sur deux séparatrices libres.

Définition 2.6.1. — On appellera chaîne d'arches toute courbe connexe γ , formée alternativement de s -arches et de u -arches, et vérifiant l'hypothèse suivante :

si α est une s -arche (resp. u -arche) contenue dans γ et qui est un double-bord, alors les deux u -arches (resp. s -arches) contenues dans γ et ayant une extrémité commune avec α , partent du même côté de la séparatrice portant α .

Une chaîne fermée s'appellera un polygone d'arches.

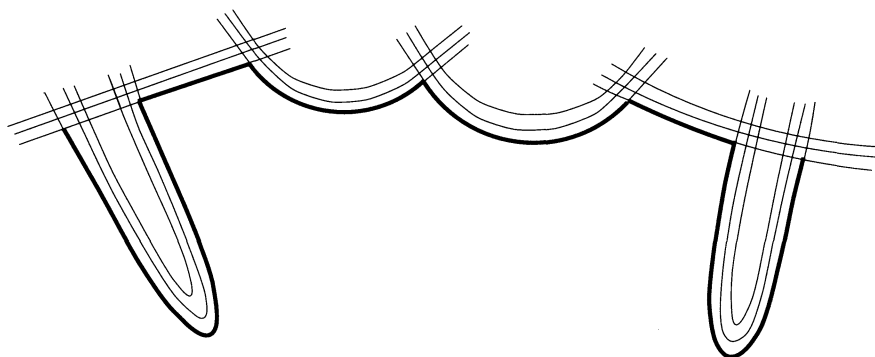


FIGURE 23. Une chaîne d'arches

Remarques. — L'hypothèse, imposant que les deux arches d'une chaîne ayant une extrémité commune avec une arche α de cette chaîne en partent du même côté, entraîne facilement les propriétés suivantes :

1. Toute arche α qui est contenue dans une séparatrice de type bord simple (pas double) est contenue dans exactement une chaîne d'arches maximale. Si α est sur une séparatrice double-bord, chacun des côtés où elle est bord correspond à exactement une chaîne maximale contenant α .
2. Toute arche d'une chaîne formée de plus de quatre arches est une arche extrême : en effet toute arche non-extrême de type bord est bordée (de chaque côté où elle est bord) par un disque dont le bord est formé de quatre arches, qui réalise l'équivalence entre cette arche et ses voisines.

Lemme 2.6.2. — Toute chaîne d'arches, contenue dans une partie compacte du complémentaire (dans la surface S) de l'ensemble des points périodiques bord de K , est finie.

Démonstration. — Si la chaîne est infinie, elle contient une infinité d'arches extrêmes (d'après l'item 2 de la remarque ci-dessus). Comme il n'y a qu'un nombre fini

d'orbites d'arches extrémales (voir proposition 2.2.4), on en déduit qu'elle contient un nombre infini d'itérés de la même arche. Elle contient donc dans son adhérence un point périodique bord. \square

Corollaire 2.6.3. — *Toute chaîne, contenant deux s-arches (ou deux u-arches) incluses dans des séparatrices différentes, est finie.*

Démonstration. — Soit C une chaîne possédant deux s-arches sur des séparatrices différentes. On peut choisir deux telles s-arches a_1 et a_2 reliées par une u-arche b de C . D'après le lemme 2.4.2, il existe $n \in \mathbb{Z}$ et un disque D bordé par b , $f^n(b)$ et deux segments stables contenant l'un a_1 l'autre a_2 . Le fait que C soit une chaîne d'arches implique que C ne peut pas sortir du disque D : elle doit « rebondir » du bon côté chaque fois qu'elle rencontre le bord (voir la figure 24). Comme D ne contient pas de point périodique bord, nous pouvons appliquer le lemme 2.6.2. \square

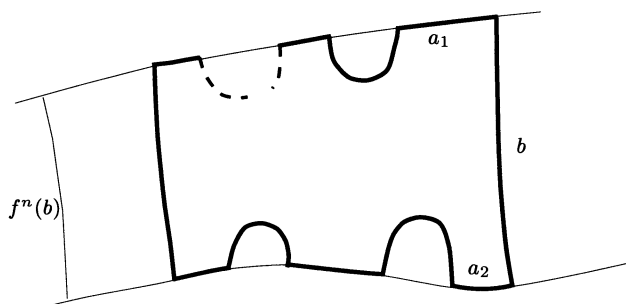


FIGURE 24

Voyons à présent le résultat principal de ce paragraphe :

Proposition 2.6.4. — *Soit W^s une séparatrice stable de type s-bord qui n'est pas disjointe de K , et qui n'est pas un double s-bord. Alors l'une des deux propriétés suivantes est réalisée (et une seule) :*

1. *Il existe une unique séparatrice stable W_1^s telle qu'il existe une arche instable ayant une extrémité sur W^s et une autre sur W_1^s . De plus W_1^s est de même période que W^s .*
2. *Il existe une séparatrice instable W^u et une courbe simple γ qui est une chaîne infinie d'arches contenues alternativement dans W^s et dans W^u . La séparatrice W^u et la courbe γ sont alors uniques. De plus, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(W^s) = W^s$. Alors $f^n(W^u) = W^u$ et $f^n(\gamma) = \gamma$.*

Démonstration. — S'il existe une u-arche ayant une seule extrémité sur W^s , le corollaire 2.4.3 montre directement que W^s vérifie l'item 1. Seul le second cas est à

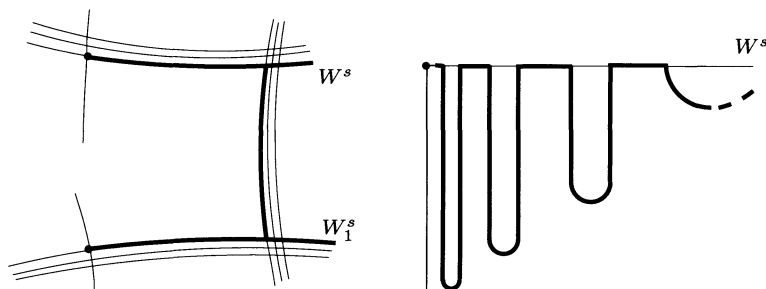
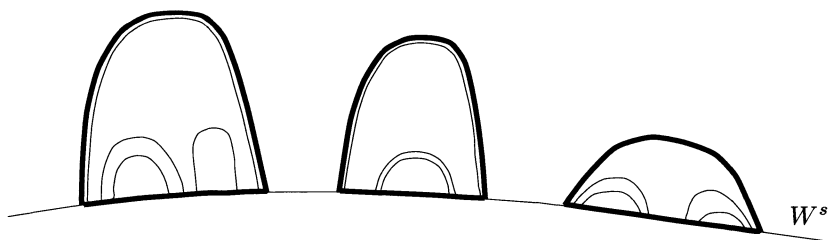


FIGURE 25. Séparatrices couplées ou chaîne infinie d'arches

démontrer. On suppose donc que toute u-arche ayant une extrémité sur W^s a ses deux extrémités sur W^s .

Le lemme 2.4.5 montre que, pour toute arche ayant ses extrémités sur W^s , la courbe simple fermée obtenue en joignant les extrémités de cette arche par un segment de W^s est le bord d'un disque d'intérieur disjoint de K . On a ainsi une famille de disques s'appuyant sur W^s le long d'un segment de leur bord. Si l'on considère deux disques ainsi définis, ils vérifient l'une des deux possibilités suivantes : ou bien ils sont disjoints, ou bien l'un d'eux est inclus dans l'autre. On peut donc les ordonner par l'inclusion. Nous allons désormais considérer les disques maximaux pour l'inclusion, le raisonnement ci-dessus montrant que toute arche ayant ses extrémités sur W^s est contenue dans un tel disque (voir figure 26).

FIGURE 26. Disques maximaux associés aux u-arches à extrémités sur W^s

Le bord instable d'un disque maximal est une u-arche extrême pour sa classe d'équivalence. La proposition 2.2.4 implique donc que l'ensemble des orbites de tels disques est fini.

Les côtés stables de ces disques maximaux sont ordonnés par l'orientation dynamique (vers le point périodique) de W^s : on peut ainsi parler de disques maximaux successifs. Remarquons que tout point de $W^s \cap K$ est l'extrémité d'une u-arche, donc appartient à un disque maximal. On en déduit que tout segment de W^s joignant deux disques maximaux successifs est d'intérieur disjoint de K , c'est-à-dire est une s-arche.

La courbe γ annoncée est obtenue en joignant les arches instables contenues dans le bord de ces disques maximaux, par les arches stables de W^s joignant deux disques successifs. La courbe γ est bien constituée de segments qui sont alternativement des s-arches ou des u-arches. On vérifie facilement que γ est invariante par f^n .

Le corollaire 2.6.3 montre que les u-arches incluses dans γ sont portées par la même séparatrice W^u . La courbe γ vérifie bien les propriétés annoncées.

Pour conclure la démonstration de la proposition, il reste à montrer que γ est unique. De même que dans la preuve du corollaire 2.6.3 on voit qu'une chaîne rencontrant l'intérieur d'un disque maximal est contenue dans ce disque et est finie d'après le lemme 2.6.2. De plus, une chaîne rencontrant le bord stable d'un disque maximal ou bien rencontre l'intérieur de ce disque (donc est finie), ou bien est un polygone à deux côtés formant le bord de ce disque. On en déduit que toute chaîne infinie d'arches d'intersection non-vide avec W^s est la courbe γ construite ci-dessus, ce qui conclut. \square

Remarque. — Dans le cas où la séparatrice W^s est un double-bord stable, la proposition s'applique à chacun des côtés isolés de la séparatrice.

Définition 2.6.5. — *On dira que deux séparatrices distinctes de même nature (stable ou instable) W_1 et W_2 sont couplées s'il existe une arche ayant une extrémité sur chacune d'elles. Si la séparatrice W_1 est double-bord, il faudra préciser de quel côté elle est couplée à W_2 (chacun des côtés pouvant donner lieu à un couplage).*

On montre alors :

Lemme 2.6.6. — *Tout polygone (fini) d'arches borde un disque dont tous les itérés sont d'intérieurs deux-à-deux disjoints. De plus, l'ensemble des orbites de polygones d'arches qui ne sont pas des quadrilatères est fini.*

Idée de démonstration. — Dans le cas où le polygone contient deux s-arches (ou deux u-arches) sur deux séparatrices distinctes, le résultat est conséquence du lemme 2.4.2. En utilisant le lemme 2.4.6 on conclut de même quand une arche joint les deux côtés d'une même séparatrice.

Dans le cas restant, la séparatrice stable W^s portant les arches stables du polygone vérifie l'item 2 de la proposition 2.6.4. Remarquons qu'un polygone ne peut contenir une arche stable joignant deux disques maximaux (utilisés dans la démonstration de la proposition 2.6.4) : en effet une arche joignant deux disques maximaux fait partie d'une chaîne infinie. Le polygone est donc inclus dans l'un des disques maximaux.

Pour montrer la seconde partie du lemme, il suffit de remarquer que les arches formant un polygone qui n'est pas un quadrilatère sont extrémales, et que l'ensemble des orbites d'arches extrémales est fini. \square

Lemme 2.6.7. — *Toute chaîne infinie d'arches est la courbe associée par la proposition 2.6.4 à une séparatrice s-bord non couplée, (ou à un côté non-couplé de séparatrice double s-bord).*

Idée de démonstration. — Soit c une chaîne infinie d'arches. D'après le corollaire 2.6.3 on montre que les s-arches de c sont toutes sur la même séparatrice W^s , et que les u-arches sont sur la même séparatrice W^u .

Supposons, pour simplifier, que W^s n'est pas double-bord et voyons par l'absurde que W^s n'est pas couplée. Soit α une u-arche de c , et soit β une u-arche couplant W^s à une séparatrice W_0^s . On montre alors qu'il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que l'intérieur de α soit inclus dans l'intérieur du disque (construit par le lemme 2.4.2) bordé par $f^n(\beta), f^m(\beta)$, et deux segments stables de W^s et W_0^s . De même que pour le corollaire 2.6.3 on montre alors que c est entièrement contenue dans ce disque, et le lemme 2.6.2 assure alors que c est finie, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La fin de la démonstration de la proposition 2.6.4 assure alors que c est la courbe γ associée à W^s . \square

Voyons enfin la position d'une chaîne infinie d'arches γ dans le voisinage invariant U de K , homéomorphe à une surface privée d'un ensemble fini de points, et qui a été construit par la proposition 1.3.1. Le lemme 2.6.7 ci-dessus montre que γ est la chaîne associée, par la proposition 2.6.4, à une séparatrice stable W_1^s et une séparatrice instable W_2^u non-couplées (ou à un côté non-couplé de séparatrice double-bord). De plus, les arches formant γ sont toutes extrémales, donc leurs orbites sont en nombre fini : pour comprendre l'adhérence de γ , il suffit donc de comprendre l'adhérence dans U d'une suite d'itérés d'une même arche. De la proposition 2.5.2 on déduit alors facilement :

Lemme 2.6.8. — *Soit γ une chaîne infinie d'arches. Soient p_1 et p_2 les points périodiques tels qu'une séparatrice stable W_1^s de p_1 et une séparatrice instable W_2^u de p_2 portent les arches de γ .*

Notons W_1^u la séparatrice instable issue de p_1 partant du même côté de W_1^s que les arches instables de γ . De même, W_2^s sera la séparatrice stable issue de p_2 partant du même côté que les arches stables de γ .

Alors, $\gamma \cup \{p_1, p_2\} \cup W_1^u \cup W_2^s$ est un fermé dans le voisinage U de K construit par la proposition 1.3.1.

CHAPITRE 3

DOMAINE D'UN ENSEMBLE HYPERBOLIQUE SATURÉ

Dans toute cette partie, S désigne une surface compacte orientée, f un difféomorphisme de Smale de S préservant l'orientation, et K un ensemble hyperbolique saturé de f ne comportant pas d'orbite périodique source ou puits.

Le but de cette partie est de construire un voisinage invariant $\Delta(K)$ de l'ensemble hyperbolique saturé K , qui soit de *topologie finie* (c'est-à-dire homéomorphe à une surface compacte privée d'un nombre fini de points), et minimal en un sens que l'on définira.

Remarquons qu'un tel ensemble doit contenir les courbes invariantes, stables et instables, de K . Le lemme 2.6.6, fournit des disques, bordés par des polygones d'arches de K , dont les itérés par f sont deux-à-deux disjoints. Si un point de l'intérieur d'un tel disque n'appartenait pas à $\Delta(K)$, ce voisinage ne pourrait pas être de topologie finie. Une première étape pour construire $\Delta(K)$ consiste donc à « boucher les trous » de l'union des variétés invariantes de K .

L'ensemble (que l'on appellera *domaine restreint* de K et notera $\delta(K)$), construit en bouchant tous les trous, n'est pas un voisinage de K , et a un bord souvent très irrégulier (son bord contient en général des chaînes infinies d'arches), que nous allons noyer de façon quasi-canonique dans un domaine de bord lisse (le *domaine* de K), et nous verrons que notre construction est unique à conjugaison près.

Nous verrons alors que l'on peut reconstruire f à partir de sa restriction aux domaines d'ensembles hyperboliques saturés, en recollant ces domaines le long de leur bord : les différents recollements possibles sont décrits par une combinatoire finie, de façon analogue au raisonnement de Fleitas et Peixoto [Pe2] pour classer les champs de vecteurs de type Morse-Smale des surfaces.

3.1. Le domaine restreint et sa position dans un voisinage invariant

Définition 3.1.1. — On appellera *domaine restreint* de K et on notera $\delta(K)$ l'union des variétés invariantes de K et de tous les disques bordés par un polygone (fini) d'arches des variétés invariantes de K

Remarque. — Tout ouvert de topologie finie, invariant par f et contenant K contient $\delta(K)$: en effet tout ouvert invariant contenant K contient $W^s(K) \cup W^u(K)$. De plus, si un ouvert invariant O contenant K ne contient pas un point x d'un disque D bordé par un polygone d'arches, alors il contient une courbe simple fermée $\gamma \subset D \cap O$ faisant le tour de x dans D . Les $f^i(\gamma)$ forment alors une famille infinie de courbes simples disjointes non-homotopes entre elles dans O , ce qui n'est pas compatible avec l'hypothèse « O de topologie finie ».

Nous avons vu que le théorème 1.1.16 assure l'existence d'une filtration Σ_0, Σ_1 pour f adaptée à K (K étant l'ensemble invariant maximal de $\Sigma_1 \setminus \Sigma_0$). De plus, la proposition 1.3.1 et le corollaire 1.3.6 montrent que l'union $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\Sigma_1 \setminus \Sigma_0)$ est un voisinage ouvert U de K qui possède pratiquement toutes les propriétés désirées. En effet :

1. U est invariant par f ;
2. U contient K , et toute partie compacte de U a son maximal invariant inclus dans K ;
3. U se compactifie en une surface compacte, en complétant la restriction de f à U par un nombre fini de points périodiques attracteurs ou répulseurs ;
4. $W^u(K) \cup W^s(K)$ est fermée dans U ;
5. quitte à ôter de U l'union de ses composantes connexes disjointes de K , on peut supposer que toute composante connexe de U rencontre K .

Le seul défaut de l'ouvert U ci-dessus est de ne pas être canoniquement associé à K : il dépend du choix de la filtration. D'après la remarque ci-dessus, U contient $\delta(K)$, puisque l'item (3) assure qu'il est de topologie finie. Pour construire le domaine de K , nous allons découper dans U un voisinage de $\delta(K)$. Pour cela, nous avons besoin de comprendre la position de $\delta(K)$ dans U , et en particulier de comprendre la topologie du complémentaire $U \setminus \delta(K)$ de $\delta(K)$ dans U .

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante qui décrit les composantes connexes de $U \setminus \delta(K)$.

Proposition 3.1.2. — Les composantes connexes de $U \setminus \delta(K)$ sont en nombre fini.

Chacune de ces composantes connexes est homéomorphe au plan \mathbb{R}^2 et est périodique ; la restriction de f^n à cette composante est conjuguée à une translation et laisse invariant chacune des feuilles d'un feuilletage trivial en droites proprement plongées dans U .

Le bord dans U de chaque composante connexe de $U \setminus \delta(K)$ est l'union de deux connexes. Chacun de ces connexes est égal, soit à l'union des deux séparatrices libres d'un point périodique coin, soit à une chaîne infinie d'arches et son adhérence (une séparatrice stable et une instable toutes deux libres).

La démonstration de cette proposition est décomposée en une succession de lemmes.

Lemme 3.1.3. — *Le domaine restreint $\delta(K)$ est fermé dans U . De plus, le bord dans U de $\delta(K)$ est contenu dans $W^s(K) \cup W^u(K)$ qui est fermé dans U .*

Démonstration. — Soit (x_i) une suite de points de K convergeant vers un point x de $U \setminus \text{Int}(\delta(K))$. Nous devons montrer que x appartient à l'union des variétés invariantes de K . Si, pour une infinité de valeurs de i , x_i appartient à $W^s(K) \cup W^u(K)$, on conclut par le fait que l'union des variétés invariantes de K est fermée dans U (corollaire 1.3.6). Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que chaque x_i appartient à l'intérieur O_i d'un disque bordé par un polygone d'arches P_i de K . Si, pour une infinité de valeurs de i , le disque ouvert O_i est le même, alors x appartient au disque fermé qui est inclus dans $\delta(K)$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut donc supposer que les O_i sont deux-à-deux disjoints.

Tout voisinage O de x rencontre les ouverts O_i , pour i assez grand, mais n'est pas inclus dans O_i (car ceux-ci sont disjoints). En choisissant O connexe, ceci implique que O rencontre le bord de O_i , c'est-à-dire le polygone P_i . On vient de montrer que tout voisinage de x rencontre $W^s(K) \cup W^u(K)$, ce qui conclut. \square

Soit C une composante connexe de $U \setminus \delta(K)$. Comme l'ensemble $\delta(K)$ est fermé dans U , il contient la frontière dans U de C . De plus, C est un ouvert de U . Notons $\text{Att}(C)$ la *frontière atteignable* de C , i.e. l'ensemble des points du bord de C qui sont extrémités de chemins continus dont l'intérieur est dans C (on parle aussi, classiquement, de frontière accessible). Remarquons que, pour tout ouvert O d'une surface, $\text{Att}(O)$ est dense dans le bord ∂O (en effet, pour tout $x \in \partial O$, il existe $y \in O$ aussi voisin que l'on veut de x ; parcourons depuis y un petit chemin géodésique joignant y à x : le premier point de ∂O que l'on rencontre est un point de $\text{Att}(O)$ proche de x). Pour comprendre le bord dans U de C , il nous suffit donc de comprendre l'adhérence dans U de $\text{Att}(C)$.

Lemme 3.1.4. — *Le bord atteignable $\text{Att}(C)$ est une union de chaînes infinies d'arches, et de courbes formées d'un point périodique coin et de ses deux séparatrices libres.*

Démonstration du lemme 3.1.4. — Soit $x \in \text{Att}(C) \cap W^s(K)$ et soit σ un chemin dans C atteignant x .

La variété stable portant x est s-bord (σ étant du côté isolé, ou de l'un des côtés isolés si x est un double s-bord). De plus, si x appartient à $W^u(K)$, il est de type coin (σ étant alors dans le secteur isolé).

Si x appartient à $W^s(K) \setminus W^u(K)$, il appartient soit à une s -arche de type bord, soit à une séparatrice libre de type bord (σ étant du côté isolé). Remarquons que cette arche ou cette séparatrice est alors toute entière contenue dans $\text{Att}(C)$.

Supposons que x appartienne à une arche. On a vu qu'un côté isolé d'une arche de type bord détermine une unique chaîne d'arches maximales γ et cette chaîne γ est contenue dans $\text{Att}(C)$. Si cette chaîne était finie, γ serait un polygone d'arches et C serait le disque bordé par ce polygone, or $\delta(K)$ contient tous les disques de cette forme. La chaîne γ est donc infinie.

On fait un raisonnement symétrique quand $x \in W^u(K) \cap \text{Att}(C)$, ce qui conclut la démonstration du lemme. \square

Remarquons que le bord de C contient toujours une séparatrice libre : en effet ou bien $\text{Att}(C)$ en contient une, ou bien $\text{Att}(C)$ contient une chaîne infinie dont l'adhérence contient une séparatrice libre stable et une séparatrice instable libre qui sont incluses dans l'adhérence de C : en particulier C ne peut être relativement compacte dans U .

Corollaire 3.1.5. — *L'ensemble des composantes connexes de $U \setminus \delta(K)$ est fini.*

Démonstration. — Chaque séparatrice libre peut être dans le bord atteignable d'au plus deux composantes connexes, et les chaînes infinies d'arches contenues dans U sont dans le bord atteignable d'exactement une. Comme les chaînes infinies et les séparatrices libres sont en nombre fini, le lemme 3.1.4 assure que l'ensemble des composantes connexes de $U \setminus W^s(K) \cup W^u(K)$ est lui aussi fini. \square

Chacune des composantes connexes de $U \setminus \delta(K)$ est donc périodique pour f . Quitte à remplacer f par l'un de ses itérés, nous supposons désormais que f laisse C globalement invariante.

Lemme 3.1.6. — *Soit C une composante connexe de $U \setminus \delta(K)$. Pour tout compact $X \subset C$ et tout compact $Y \subset U$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $|n| \geq n_0$ alors $f^n(X) \cap Y = \emptyset$.*

En particulier, f agit sur C de façon propre et libre.

Démonstration. — Nous montrerons seulement que pour $n > 0$ assez grand $f^n(X) \cap Y = \emptyset$, le cas $n < 0$ s'obtenant en renversant la flèche du temps.

Rappelons que, par construction de U , il existe une filtration pour f , $\{\Sigma_0, \Sigma_1\}$ ayant les propriétés suivantes :

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Sigma_1 \setminus \Sigma_0)$$

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Sigma_1 \setminus \Sigma_0).$$

Remarquons qu'il existe k tel que Y soit inclus dans $f^k(\Sigma_1)$. Nous allons donc montrer que pour $n > 0$ assez grand $X \cap f^{-n}(\Sigma_1)$ est vide. Comme $X \cap f^{-n}(\Sigma_1)$ est une suite décroissante de compacts, il suffit de montrer que $X \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(\Sigma_1)$ est vide. Si tel n'était pas le cas, X contiendrait un point de la variété stable de K (d'après le lemme 1.3.5), ce qui contredirait la définition de \tilde{C} . \square

Corollaire 3.1.7. — *Toute composante connexe C de $U \setminus \delta(K)$ est homéomorphe au plan \mathbb{R}^2 . De plus, la restriction de f à C est conjuguée à une translation.*

Démonstration. — Soit $\gamma \subset C$ une courbe fermée simple : nous devons montrer que γ est le bord d'un disque inclus dans C .

Montrons d'abord, par l'absurde, que si γ borde un disque D dans U , ce disque est inclus dans C . En effet, dans le cas contraire, D contient des points de C et des points de $\delta(K)$, donc contient des points de $\text{Att}(C)$ (car $\text{Att}(C)$ est dense dans le bord de C). Du lemme 3.1.4, on déduit alors que le disque D rencontre une variété invariante W de K de type bord. Toute variété invariante rencontrant D est incluse dans D (car est disjointe de γ). Le point périodique contenu dans W appartient donc au disque D . Une séparatrice libre issue de ce point est donc incluse dans D , partie compacte de U . Ceci contredit le fait que le maximal invariant de toute partie compacte de U est inclus dans K .

Il reste donc à montrer que γ borde un disque dans U .

D'après le lemme 3.1.6, il existe n tel que tous les itérés $f^{n \cdot k}(\gamma)$ sont deux-à-deux disjoints. Comme U est une surface compacte privée d'un nombre fini de points, il existe une couronne bordée par deux de ces itérés. Remarquons que cette couronne est entièrement incluse dans C , sinon (par le même argument que ci-dessus) elle contiendrait une séparatrice libre.

L'union des itérés de cette couronne est une immersion propre de $S^1 \times \mathbb{R}$ dans U (d'après le lemme 3.1.6), d'image incluse dans C . Ceci implique que C est un cylindre et est une composante connexe de U disjointe de K , ce qui est contraire aux hypothèses sur U .

On a bien montré que C est simplement connexe, et est donc homéomorphe au plan \mathbb{R}^2 .

L'action de f sur C étant propre et libre, le quotient de C par f est une surface (séparée), la projection étant le revêtement universel (et un revêtement cyclique). Le quotient est donc une surface de groupe fondamental égal à \mathbb{Z} , c'est-à-dire un cylindre. La restriction f à C est un automorphisme du revêtement du cylindre, donc est conjuguée à une translation. \square

Corollaire 3.1.8. — *Soit C une composante connexe de $U \setminus \delta(K)$ et soit k sa période pour f . Alors il existe un feuilletage de C dont chaque feuille est un plongement propre de \mathbb{R} dans U invariant par f^k . De plus si l_1 et l_2 sont deux feuilles disjointes de ce feuilletage, alors il existe un plongement propre de la bande $\mathbb{R} \times [0, 1]$ dans U ,*

à valeurs dans C , envoyant les horizontales $\mathbb{R} \times \{t\}$ sur les feuilles de ce feuilletage, l'image de $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ étant $l_1 \cup l_2$. De plus, ce plongement conjugue f^k à la translation $(s, t) \mapsto (s + 1, t)$.

Démonstration. — On a vu dans la démonstration du corollaire 3.1.7 ci-dessus que le quotient de C par f^k est homéomorphe à un cylindre. On obtient le feuilletage annoncé en relevant sur C un feuilletage par cercles du cylindre. La propriété de l'immersion dans U des feuilles et des bandes est une conséquence facile du lemme 3.1.6.

□

Le lemme 3.1.4 a montré que $\text{Att}(C)$ était l'union de courbes qui sont chacune soit une chaîne infinie, soit une séparatrice d'un coin. Pour avoir démontré la proposition 3.1.2, il reste à voir que $\text{Att}(C)$ est constitué exactement de deux de ces courbes. La démonstration de ce point est assez technique, mais l'idée est relativement simple ; la voici en quelques mots :

Le corollaire 3.1.7 assure que le quotient de C par f est un cylindre C/f . Un cylindre a deux bouts, et nous allons voir que chaque courbe γ composant $\text{Att}(C)$ est naturellement associée à l'un des bouts de C/f . Pour cela, le lemme 3.1.11 va nous permettre de construire, pour chacune des courbes γ_i composant le bord atteignable de C , un segment σ_i « atteignant » γ_i : nous considérerons alors la projection du segment σ_i sur le cylindre C/f et nous verrons que l'on peut choisir σ_i de façon que sa projection soit une demi-droite proprement plongée dans C/f , c'est-à-dire de façon à ce qu'elle aille vers l'un des deux bouts de C/f . Le lemme 3.1.11 permet de plus de choisir la famille de segments σ_i de façon que leurs projections soient deux-à-deux disjointes. Si les courbes γ_i sont en nombre strictement supérieur à deux, il y en a deux, par exemple γ_1 et γ_2 , dont les demi-droites associées se dirigent vers le même bout de C/f . Nous piègerons alors le segment σ_2 entre deux itérés de σ_1 , lui interdisant ainsi d'atteindre γ_2 , ce qui donnera une contradiction.

La principale difficulté de cette preuve est le lemme 3.1.11 (construisant la famille de segments σ_i). La démonstration de ce lemme a nécessité de définir la notion de *voisinages colliers linéarisants*, et de prouver l'existence de tels voisinages (lemme 3.1.10).

Remarque. — Le nombre des courbes composant $\text{Att}(C)$ reste inchangé si l'on remplace f par l'un de ses itérés. On pourra donc supposer que f laisse invariante chaque séparatrice bord et chaque composante connexe de $U \setminus \delta(K)$. Nous ferons cette hypothèse dans les lemmes de la fin de ce paragraphe.

Définition 3.1.9 (Voisinage collier linéarisant). — Soit W^s une variété stable bord de K (avec un côté bord fixé si elle est double-bord). On appelle *voisinage collier* de W^s une immersion injective de $\mathbb{R} \times [0, 1[$ dans S telle que W^s soit l'image de $\mathbb{R} \times \{0\}$. On dira que ce voisinage collier est *linéarisant* s'il est invariant par f et si la restriction de f à ce voisinage est conjuguée à la restriction d'une application linéaire hyperbolique à un demi-plan fermé bordé par l'une des droites propres.

Remarques

1. On peut choisir arbitrairement les valeurs propres de l'application linéaire hyperbolique.
2. La restriction d'une application linéaire hyperbolique au secteur compris entre deux branches d'hyperboles invariantes et une droite propre (voir la figure 1) est conjuguée à la restriction de cette application linéaire au demi-plan considéré plus haut.

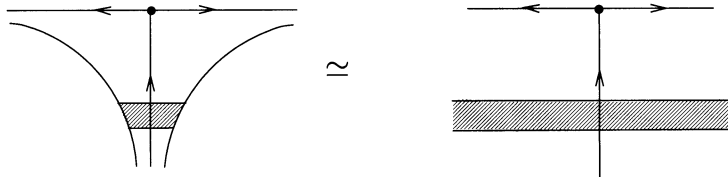


FIGURE 1

Lemme 3.1.10. — Pour tout point périodique s -bord p de K , notons (p, ε) , $\varepsilon \in \{+, -\}$, le point p muni d'un côté de sa variété stable où celle-ci est bord. Soit $\{(p_1, \varepsilon_1), \dots, (p_k, \varepsilon_k)\}$ la famille de tous les points périodiques (ici fixes) s -bords de f munis d'un choix de côté s -bord : les points fixes doubles s -bords sont de ce fait représentés deux fois. Alors il existe une famille $V_i \subset U$ de voisinages colliers linéarisants de f , telle que l'intersection $V_i \cap V_j$ soit vide si $p_i \neq p_j$, ou réduite à $W^s(p_i)$ si $p_i = p_j$ (cas double-bord).

Démonstration. — Par souci de clarté, nous ne traiterons que le cas où K ne contient pas de double-bord.

Commençons par construire un voisinage collier linéarisant pour un point fixe p de f de type s -bord.

Notons $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $\mathcal{A}(x, y) = (x/2, 2y)$. Remarquons que \mathcal{A} laisse invariante chaque hyperbole Γ_t d'équation $x \cdot y = t$. Pour tout $t > 0$ on notera $B_t = \{(x, y), y > 0 \text{ et } |x \cdot y| \leq t\}$.

Pour tout point fixe p de type s -bord notons $h: O \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme conjuguant f à \mathcal{A} sur un petit voisinage O de p . On choisit h de façon que l'image de la séparatrice instable libre issue de p ait son image dans la demi-droite $\{0\} \times [0, +\infty[$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que le segment $\{0\} \times [\varepsilon, 8\varepsilon]$ de la variété instable de $(0, 0)$ pour \mathcal{A} soit inclus dans l'image de O par h . Notons A_t le disque topologique de \mathbb{R}^2 bordé par la courbe fermée simple obtenue en joignant les extrémités des segments $[-t/\varepsilon, t/\varepsilon] \times \{\varepsilon\}$ et $[-t/2\varepsilon, t/2\varepsilon] \times \{2\varepsilon\}$ par des segments des hyperboles Γ_t et Γ_{-t} (voir la figure 2). Remarquons que l'intersection de A_t avec son image $\mathcal{A}(A_t)$ est réduite au segment $[-\frac{t}{2\varepsilon}, \frac{t}{2\varepsilon}] \times \{2\varepsilon\}$ et que, pour tout $i \geq 2$, A_t est disjoint de ses itérés $\mathcal{A}^i(A_t)$. De plus

l'union de tous les itérés, $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}^i(A_t)$, est égale à B_t (en d'autre termes, A_t est un domaine fondamental de B_t pour \mathcal{A}).

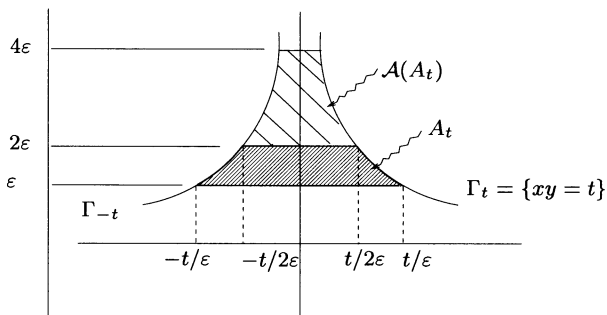


FIGURE 2. Choix d'un domaine fondamental d'un voisinage collier

Pour t assez petit, A_t et $\mathcal{A}(A_t)$ sont inclus dans l'image de O . Notons $C_t = h^{-1}(A_t)$. Pour t petit, C_t est inclus dans un petit voisinage d'un domaine fondamental I de la séparatrice instable libre de p : en particulier C_t est disjoint de $W^s(K)$. On en déduit qu'il existe $n_0 > 0$ tel que $f^{n_0}(C_t) \cap \Sigma_1 = \emptyset$ (où Σ_1 est la surface à bord ayant servi à construire U). Comme le complémentaire de Σ_1 est invariant par f , on obtient que, pour tout $n \geq n_0$, C_t est disjoint de $f^n(C_t)$. De plus, pour $t > 0$ assez petit et pour tout $2 \leq n \leq n_0$, $f^n(C_t)$ est contenu dans un petit voisinage du domaine fondamental $f^n(I)$ de la séparatrice libre donc est disjoint de C_t . On en déduit que les itérés $f^n(C_t)$ sont disjoints de C_t dès que $|n| \geq 2$.

Notons $D_t = W^s(p) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(C_t)$. Alors D_t est un voisinage collier linéarisant : en effet la restriction de h^{-1} à A_t se prolonge de façon unique en une immersion injective de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}^n(A_t)$ sur $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(C_t)$ conjuguant les restrictions \mathcal{A} et de f à ces ensembles et cette immersion se prolonge par continuité, de $\mathbb{R} \times \{0\}$ sur $W^s(P)$, par un homéomorphisme coïncidant avec h^{-1} au voisinage de $(0, 0)$.

Pour conclure la démonstration du lemme il reste à montrer que l'on peut choisir ces voisinages colliers linéarisants disjoints deux-à-deux. Soit p_1, \dots, p_k la famille des points s-bords fixes de f (supposé sans double-bord). Pour tout i , et tout $t > 0$ petit, notons $D_{i,t}$ le voisinage collier linéarisant construit ci-dessus. Alors pour t assez petit les $D_{i,t}$ sont deux-à-deux disjoints : en effet, il suffit de vérifier que tout itéré de $C_{i,t}$ est disjoint de tout itéré de $C_{j,t}$ dès que $i \neq j$, ce que l'on montre par un raisonnement analogue à ci-dessus en utilisant que chaque $C_{j,t}$ possède un itéré disjoint de Σ_0 . \square

Lemme 3.1.11. — *Supposons K sans double-bord.*

Soit $x_1, \dots, x_k \in K$ une famille finie de points de type coin et d'orbites distinctes. Alors il existe $\sigma_1, \dots, \sigma_k \subset U$, k segments plongés dans U , ayant les propriétés suivantes :

1. pour tout i , les itérés de $\sigma_i \setminus \{x_i\}$ sont deux-à-deux disjoints,
2. pour tous $i \neq j$, les orbites de σ_i et de σ_j sont disjointes,
3. pour tout i , σ_i admet x_i comme extrémité, et σ_i est transverse en x_i aux deux variétés (stable et instable) passant par x_i ,
4. pour tout i , $\sigma_i \setminus \{x_i\}$ est disjoint de $W^s(K) \cup W^u(K)$.

Démonstration. — Rappelons que l'on a supposé que les séparatrices bords sont toutes fixes pour f .

D'après le lemme 3.1.10 ci-dessus, on peut choisir un voisinage collier linéarisant D_p^s pour chaque point fixe p s-bord, de façon que les D_p^s soient deux-à-deux disjoints. De même on choisit des voisinages colliers linéarisants D_q^u pour les points fixes q u-bords.

Tout point coin x_i appartient à l'intersection $E_i = D_{p_i}^s \cap D_{q_i}^u$ où p_i et q_i sont les points fixes des variétés stable et instable de x_i . En utilisant l'expression linéaire de la restriction de f à $D_{p_i}^s$, on choisit alors un segment σ_i d'extrémité x_i tel que $\sigma_i \setminus x_i \subset \text{Int}(E_i)$, et dont tous les itérés sont d'intérieurs disjoints (si $x_i \neq p_i$, x_i est errant pour la dynamique linéarisée : il suffit donc de prendre σ_i assez petit ; si $x_i = p_i$, on choisit pour σ_i un petit segment radial situé dans le secteur bordé par les deux séparatrices libres).

Les items (1) et (3) sont déjà vérifiés. L'item (4) provient de ce que $D_{p_i}^s$ et $D_{q_i}^u$ ont été choisis d'intérieur disjoint de $W^s(K)$ et de $W^u(K)$ respectivement.

Montrons l'item (2).

Si $p_i \neq p_j$, $D_{p_i}^s$ et $D_{p_j}^u$ sont alors deux voisinages colliers invariants et disjoints, ce qui assure que les itérés de σ_i et de σ_j sont disjoints.

Si x_i et x_j sont deux points non périodiques de la même variété stable, alors l'expression linéaire de f dans $D_{p_i}^s$ montre qu'ils possèdent des voisinages dans $D_{p_i}^s$ dont toutes les orbites par f sont disjointes : il suffit donc de choisir σ_i et σ_j assez petits.

Si x_i et x_j sont sur la même variété stable et que x_i est le point fixe, σ_i a été choisi dans le secteur libre (bordé par les séparatrices libres de $x_i = p_i$), et ses itérés sont donc disjoints de σ_j (qui est inclus dans un autre secteur). \square

Remarque. — Le lemme 3.1.11 admet bien sûr une version dans le cas où K possède des double-bords. Dans ce cas, il faut munir les points coins x_i d'un choix de secteurs où ces points sont coins. Dans chaque orbite d'un point coin, on peut alors choisir autant de x_i que de secteurs coins. Il faut alors remplacer l'item 2 du lemme, dans le cas où x_i et x_j correspondent à deux secteurs de la même orbite coin x , par la propriété : l'intersection de l'orbite de σ_i et de l'orbite de σ_j est réduite à l'orbite du point x .

La démonstration est pratiquement identique à celle du cas « sans double-bord », et est laissée au lecteur.

On peut maintenant conclure la démonstration de la proposition 3.1.2.

Fin de la démonstration de la proposition 3.1.2. — (Afin de simplifier l'exposition nous supposons que K est sans double-bord, ce qui nous permettra d'utiliser le lemme 3.1.11; la démonstration dans le cas «avec double-bord» est pratiquement identique, en utilisant la remarque ci-dessus).

On sait que $\text{Att}(C)$ est une union finie de courbes qui sont soit des chaînes infinies, soit l'union d'un point fixe coin et de ses séparatrices libres. On choisit un point coin x_i sur chacune de ces courbes. Le lemme 3.1.11 permet de choisir pour tout i un segment σ_i d'extrémité x_i , tel que $\sigma_i \setminus \{x_i\}$ soit inclus dans C , et que les chemins $f^n(\sigma_i \setminus \{x_i\})$ soient deux-à-deux disjoints.

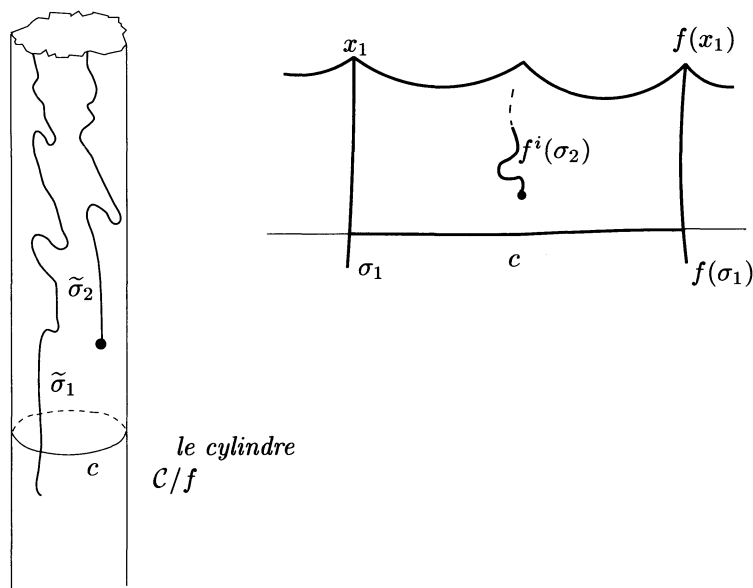
Alors les σ_i se projettent sur le cylindre en des courbes simples disjointes, proprement plongées $\tilde{\sigma}_i$. Si deux de ces courbes $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ vont vers le même bout du cylindre alors considérons un cercle c coupant $\tilde{\sigma}_1$ en un et un seul point. Quitte à restreindre σ_2 on peut supposer que $\tilde{\sigma}_2$ est disjoint de c .

Considérons les deux relevés successifs σ_1 et $f(\sigma_1)$ et le segment relevé de c et joignant ces deux segments (voir la figure 3), ainsi que la courbe simple fermée construite en mettant bout à bout la courbe de $\text{Att}(C)$ joignant l'extrémité de σ_1 à son image, les segments σ_1 et son image, et le segment relevé du cercle qui les joint. Cette courbe borde un disque d'intérieur contenu dans C . L'un des itérés de $\sigma_2 \setminus x_2$ est inclus dans l'intérieur de ce disque, ce qui contredit le fait que σ_2 a son extrémité sur une autre des courbes composant $\text{Att}(C)$ \square

3.2. Domaine d'un ensemble hyperbolique saturé : définition et universalité

Dans ce paragraphe, nous reprenons les notations du paragraphe précédent : K est un ensemble hyperbolique saturé, $\delta(K)$ est le domaine restreint de K , et U est l'ouvert invariant construit par la proposition 1.3.1. D'après la proposition 3.1.2, les composantes connexes de $U \setminus \delta(K)$ sont en nombre fini, périodiques, homéomorphes au plan; de plus, chaque composante est munie d'un feuilletage produit dont les feuilles sont des droites invariantes par l'itéré de f correspondant à la période de la composante. Bien sûr, si C_0 est une composante de $U \setminus \delta(K)$ munie d'un feuilletage F , on pourra supposer que $f(F)$ est le feuilletage dont est munie la composante $f(C_0)$. En d'autres termes, $U \setminus \delta(K)$ est muni d'un feuilletage F invariant par f dont les feuilles sont des droites proprement plongées dans U et sont périodiques pour f , leur période coïncidant avec celle de la composante connexe qui les contient.

Pour toute orbite $C = \{C_0, \dots, C_{k-1} = f^{k-1}(C_0)\}$ de composantes connexes de $U \setminus \delta(K)$, on choisit (σ_0, γ_0) deux feuilles distinctes de F contenues dans la composante C_0 , et on note $B_0 \subset C_0$ l'intérieur de la bande bordée par $\sigma_0 \cup \gamma_0$. Par construction du

FIGURE 3. Un itéré de σ_2 est piégé entre σ_1 et $f(\sigma_1)$

feuilletage F les feuilles σ_0 et γ_0 sont invariantes par f^k ; on en déduit que $f^k(B_0) = B_0$. On note $B_i = f^i(B_0)$ et $B(C) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (B_i) = \bigcup_0^{k-1} (B_i)$.

Notons

$$\Delta(K) = U \setminus \bigcup_C (B(C)).$$

Remarquons que $\Delta(K)$ est homéomorphe à une surface compacte à bord privée d'un ensemble fini de points. Nous dirons que $\Delta(K)$ est une *surface à bord de topologie finie*.

Définition 3.2.1. — Nous appellerons *domaine de K* tout voisinage O de K homéomorphe à $\Delta(K)$ par un homéomorphisme coïncidant avec l'identité sur K , et conjuguant les restrictions de f à O et $\Delta(K)$.

Notre construction du domaine semble dépendre de nombreux choix : choix de l'ouvert U , du feuilletage F , etc.. Le but de ce paragraphe est de montrer que le domaine de K est le « plus petit » voisinage invariant qui est une surface à bord de topologie finie, et qu'il est unique, à conjugaison près par des homéomorphismes égaux à l'identité sur $\delta(K)$.

La proposition suivante formalise le fait que $\Delta(K)$ est le plus petit voisinage invariant de topologie finie : cette propriété s'appellera *versalité*

Proposition 3.2.2 (Le domaine : versalité). — *Pour tout voisinage D de K invariant par f et contenant $\delta(K)$, il existe un plongement de $\Delta(K)$ dans D coïncidant avec l'identité sur le domaine restreint $\delta(K)$ et commutant avec f .*

Définition 3.2.3. — *On appellera voisinage versel de K un voisinage D , invariant et de topologie finie, de K vérifiant la propriété de minimalité de la proposition 3.2.2 : pour tout voisinage invariant de topologie finie \tilde{D} de K , il existe un plongement de D dans \tilde{D} commutant avec f et coïncidant avec l'identité sur $\delta(K)$.*

Démonstration

0) Montrons d'abord que la classe de conjugaison de $(\Delta(K), f)$ ne dépend pas du choix des feuilles σ, γ du feuilletage F .

Soit C une composante connexe de $U \setminus \delta(K)$, et par souci d'alléger les notations, supposons que cette composante soit fixe par f . Remarquons d'abord que l'espace des feuilles de la restriction du feuilletage F à C est \mathbb{R} (voir le corollaire 3.1.8). Choisissons donc 6 feuilles de façon ordonnée $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$, et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ notons $B_i \subset C$ la bande bordée par σ_i et γ_i .

Alors, en utilisant le fait que la restriction de f à B_3 est conjuguée à une translation, on construit facilement un homéomorphisme h de U commutant avec f , égal à l'identité hors de la bande B_3 et tel que $h(B_2) = B_1$.

1) Soit D un voisinage de K , invariant par f et contenant $\delta(K)$. Remarquons que $D \cap U$ est un voisinage invariant de K contenant $\delta(K)$. Nous pouvons donc supposer $D \subset U$. Considérons C une composante connexe de $U \setminus \delta(K)$, et notons $\sigma < \gamma$ les feuilles de F qui sont les composantes du bord dans C de $\Delta(K)$.

Nous avons vu, dans la démonstration du corollaire 3.1.7, que le quotient de C par l'itéré de f correspondant à sa période est un cylindre Γ . De plus, le feuilletage F induit sur Γ un feuilletage produit en cercles.

Considérons la projection \overline{D} de $D \cap C$ sur Γ . Montrons par l'absurde que $\Gamma \setminus \overline{D}$ est relativement compact dans Γ . Supposons donc qu'il existe une suite de points $(x_i) \subset \Gamma \setminus \overline{D}$ sortant de tout compact de Γ (voir la figure 4). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite (x_i) converge vers l'un des deux bouts du cylindre Γ . Par un argument tout à fait analogue à celui de la fin de la démonstration de la proposition 3.1.2, on montre alors que l'on peut extraire une sous-suite (x_{n_i}) et pour tout i un relevé $\tilde{x}_{n_i} \in C$ de x_{n_i} , de façon que la suite (\tilde{x}_{n_i}) converge vers un point de $\text{Att}(C) \subset W^s(K) \cup W^u(K)$. Ceci contredit le fait que D est un voisinage invariant de K , et donc de ses variétés invariantes.

De l'argument ci-dessus, on déduit l'existence de feuilles $\sigma_1 < \gamma_1$, telles que toute feuille de C inférieure à σ_1 ou supérieure à γ_1 est incluse dans D .

D'après le point 0) de cette démonstration, D contient donc un voisinage de K homéomorphe à $\Delta(K)$ par un homéomorphisme commutant avec f et égal à l'identité au voisinage de $\delta(K)$: la proposition est donc démontrée. \square

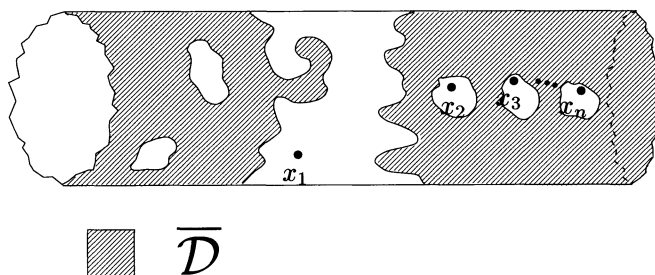


FIGURE 4. Suite de points hors de \overline{D} , convergeant vers l'un des bouts du cylindre Γ

Le reste de ce paragraphe a pour but de formaliser et de montrer l'unicité du domaine. L'une des difficultés est que le domaine que nous avons défini n'est ni ouvert, ni fermé (nous compléterons le domaine au paragraphe 3.4, où les composantes du bord du domaine serviront à recoller entre eux les domaines des ensembles saturés et à reconstruire ainsi la dynamique globale). Remarquons que si l'on ôte au domaine $\Delta(K)$ une des composantes connexes de son bord, on obtient un nouveau voisinage invariant de K homéomorphe à une surface compacte à bord privée d'un ensemble fini de points (on a remplacé une composante du bord joignant deux points enlevés par un point enlevé). Pour caractériser le domaine parmi ces divers voisinages, nous introduisons la notion de fermeture modulo f :

Définition 3.2.4. — *On dira qu'un ensemble E invariant par f est fermé modulo f si pour toute suite $(x_i) \subset E, i \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(n_i) \subset \mathbb{Z}$ telle que la suite de points $(f^{n_i}(x_i))$ admette une sous-suite convergeant vers un point de E .*

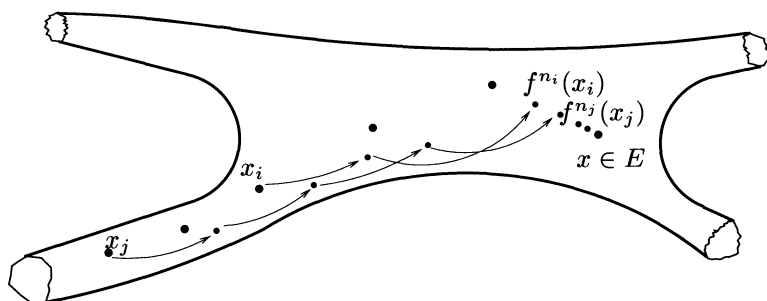


FIGURE 5. Un ensemble E , fermé modulo f

Remarque. — L'ouvert U est fermé modulo f , car il est le saturé d'une partie compacte. Le domaine $\Delta(K)$ est fermé modulo f car il est fermé dans U .

Remarquons que, pour caractériser $\Delta(K)$ parmi les voisinages versels D de K , il suffit de considérer les voisinages D inclus dans l'intérieur de $\Delta(K)$: en effet, la propriété de versalité entraîne qu'ils sont conjugués à une partie de $\Delta(K)$, et le point 0 de la démonstration de la proposition 3.2.2 montre que $\Delta(K)$ peut être plongé dans son intérieur.

Proposition 3.2.5 (Le domaine : unicité). — *Soit D un voisinage de K , inclus dans l'intérieur de $\Delta(K)$, invariant par f , et qui est une surface à bord de topologie finie. On suppose de plus que D est fermé modulo f , et que toute composante connexe de D contient au moins un point de K . Alors il existe un homéomorphisme h de D sur $\Delta(K)$, tel que h coïncide avec l'identité sur $\delta(K)$ et conjugue la restriction de f à D et la restriction de f à $\Delta(K)$.*

Lemme 3.2.6. — *D est fermé dans $\Delta(K)$.*

Démonstration. — Soit (x_i) une suite de points de D convergeant vers un point x de $\Delta(K)$. Si x appartient à $\delta(K)$ alors $x \in D$: il n'y a rien à faire. Supposons désormais $x \notin \delta(K)$. Remarquons que, quitte à extraire une sous-suite, l'ensemble $X = \{x\} \cup \{x_1, \dots, x_n \dots\}$ est une partie compacte d'une composante connexe de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$. Comme D est fermé modulo f , quitte à extraire une sous-suite, il existe une suite $(n_i) \subset \mathbb{Z}$ telle que la suite $(f^{n_i}(x_i))$ converge vers un point $y \in D$. Cependant, étant donné un voisinage compact de y dans $\Delta(K)$, le lemme 3.1.6 implique que seul un nombre fini d'itérés du compact X rencontre ce voisinage : on en déduit que la suite (n_i) est bornée, et donc que y est un itéré de x . Comme D est invariant par f et $y \in D$, le point x appartient à D , c'est ce que nous devons montrer. \square

Démonstration de la proposition. — Soit C une composante connexe de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$; quitte à remplacer f par un de ses itérés on supposera C invariante par f . Remarquons que C est homéomorphe à un demi-plan fermé sur lequel f agit comme une translation. Notons γ_1 le bord de C .

Comme D est fermé dans $\Delta(K)$, $D \cap C$ est fermé dans C . Remarquons que le bord de $D \cap C$ dans C est l'intersection avec C du bord de D : en effet, D étant inclus dans l'intérieur de $\Delta(K)$ le bord de C est disjoint du bord de D . De plus, toute composante connexe du bord de D est disjointe de $\delta(K)$: toute composante du bord de D rencontrant C est donc incluse dans l'intérieur de C . On en déduit que le bord de $D \cap C$ dans C est une union finie de courbes, et que $D \cap C$ est une surface fermée à bord du demi-plan C , invariante par la translation f . Chaque composante du bord de $D \cap C$ est invariante par une puissance de f .

Le quotient C/f de C par f est un cylindre $[0, +\infty[\times S^1$. Le quotient $(D \cap C)/f$ a pour bord le quotient du bord de $D \cap C$, c'est-à-dire un nombre fini de courbes fermées simples disjointes. Remarquons que toutes ces courbes sont essentielles (c'est-à-dire

non homotopes à zéro); en effet une courbe homotope à zéro a pour image inverse dans C une infinité de courbes fermées.

Si le nombre de ces courbes est plus grand que 1, alors le quotient $(D \cap C)/f$ contient un anneau (homéomorphe à $[0, 1] \times S^1$). Dans ce cas, $D \cap C$ contient une bande $[0, 1] \times \mathbb{R}$ proprement plongée dans C et invariante par f . Une telle bande est une composante connexe de D qui ne rencontre pas K , ce qui contredit la définition de D .

Le bord de $(D \cap C)/f$ est donc réduit à une unique courbe fermée simple. Donc $(D \cap C)/f$ est un demi-cylindre fermé contenu dans C . Il existe un homéomorphisme h_C de C/f sur $(D \cap C)/f$, égal à l'identité au voisinage du bout de C/f . L'homéomorphisme h_C se relève en un homéomorphisme \tilde{h}_C de C sur $D \cap C$, commutant avec f et égal à l'identité près de $\delta(K)$ (c'est-à-dire sur l'intersection avec C d'un voisinage de $\delta(K)$). En recollant les homéomorphismes \tilde{h}_C obtenus pour toutes les composantes de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ avec l'identité sur $\delta(K)$ on obtient l'homéomorphisme annoncé. \square

De la proposition et de la définition de la versalité, on déduit une définition intrinsèque du domaine :

Corollaire 3.2.7. — *Tout voisinage f -invariant et de topologie finie de K qui est versel, fermé modulo f , et dont toute composante connexe contient un point de K , est conjugué à $\Delta(K)$ par un homéomorphisme coïncidant avec l'identité sur $\delta(K)$.*

3.3. Le graphe de Smale et les domaines

Lemme 3.3.1. — *Soient K et L deux ensembles hyperboliques saturés qui correspondent à des intervalles I et J de pièces basiques. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Toute pièce basique de I est non-comparable pour \prec à toute pièce basique de J .*
2. *Les domaines $\Delta(K)$ et $\Delta(L)$ peuvent être choisis disjoints.*

Démonstration. — Si $\Delta(K) \cap \Delta(L) = \emptyset$, alors les variétés invariantes de toute pièce basique de I sont disjointes des variétés invariantes des pièces basiques contenues dans J , ce qui entraîne que ces pièces basiques sont non-comparables. Il reste à montrer la réciproque :

Remarquons d'abord que $I \cup J$ est un intervalle de pièces basiques. Notons U l'ouvert invariant homéomorphe à une surface compacte \tilde{S} privée d'un ensemble fini de points, construit par la proposition 1.3.1, et correspondant à l'intervalle $I \cup J$. Quitte à remplacer S et f par la surface \tilde{S} et le difféomorphisme de Smale \tilde{f} de cette proposition, on pourra supposer que $S \setminus U$ se réduit à un ensemble fini de points périodiques attracteurs ou répulseurs.

Rappelons d'abord que la variété stable $W^s(K)$ est l'union des variétés stables des pièces basiques contenues dans K . L'adhérence de cette variété stable est l'union des

variétés stables des pièces basiques supérieures ou égales à I . En particulier, c'est un compact disjoint de l'union des variétés invariantes de L . De plus les pièces basiques supérieures strictement à I sont des points répulseurs contenus dans $S \setminus U$: on en déduit que $W^s(K)$ est un fermé de U disjoint des variétés invariantes de L . Il en va bien sûr de même de la variété instable de K , et des variétés invariantes de L : $W^s(K) \cup W^u(K)$ et $W^s(L) \cup W^u(L)$ sont deux fermés de U qui sont disjoints.

Notons $M = K \cup L$; c'est un ensemble hyperbolique saturé (associé à l'intervalle $I \cup J$). On considère son domaine $\Delta(M)$. Remarquons que $\Delta(M)$ est localement connexe par arcs (car c'est une surface à bord), et que $W^s(K) \cup W^u(K)$ et $W^s(L) \cup W^u(L)$ sont des fermés de $\Delta(M)$. Supposons qu'il existe une composante connexe de $\Delta(M)$ qui contienne à la fois des points de K et des points de L : il existe alors un chemin σ dans $\Delta(M)$ d'intérieur disjoint des variétés invariantes de K et de L , ayant son origine dans $W^s(K) \cup W^u(K)$ et son extrémité dans $W^s(L) \cup W^u(L)$.

Remarquons que σ est d'intérieur disjoint de $\delta(M)$: dans le cas contraire, l'intérieur de σ serait inclus dans l'intérieur d'un disque bordé par un polygone d'arches de L : ceci implique l'existence d'un polygone d'arches possédant des arches de K et des arches de L , ce qui contredit que leurs variétés invariantes soient disjointes.

L'intérieur de σ est donc contenu dans une composante connexe C de $\Delta(M) \setminus \delta(M)$, et a ses extrémités sur $\delta(M)$. Les extrémités de σ sont donc des points de $\text{Att}(C)$. Remarquons que, par construction du domaine, la frontière (dans $\Delta(M)$) atteignable de toute composante connexe de $\Delta(M) \setminus \delta(M)$ est exactement une courbe qui est ou bien une chaîne infinie d'arches, ou bien l'union d'un point périodique coin, d'une séparatrice libre stable et une séparatrice libre instable (en effet, la proposition 3.1.2 dit que les composantes connexes de $U \setminus \delta(M)$ ont comme bord atteignable deux de ces courbes, et C a été obtenue en découpant une telle composante suivant une bande séparant ces deux courbes). Une telle courbe ne peut porter à la fois des points des variétés invariantes de K et des points des variétés invariantes de L , ce qui contredit la définition de σ .

Nous pouvons à présent conclure la démonstration du lemme. En effet l'union des composantes connexes de $\Delta(M)$ non-disjointes de K est un voisinage invariant de topologie finie de K : d'après la proposition 3.2.2, on peut donc choisir $\Delta(K)$ dans cette union. De même, on peut choisir $\Delta(L)$ dans l'union des composantes connexes de $\Delta(M)$ non-disjointes de L . Ces choix de domaines de K et L sont alors disjoints. \square

Corollaire 3.3.2. — *Soient K et L deux ensembles hyperboliques saturés tels que toute pièce basique composant K soit non-comparable pour \prec à toute pièce basique composant L . Alors $K \cup L$ est un ensemble hyperbolique saturé dont le domaine $\Delta(K \cup L)$ est homéomorphe à l'union disjointe $\Delta(K) \amalg \Delta(L)$ par un homéomorphisme commutant avec f et coïncidant avec l'identité sur $\delta(K) \cup \delta(L)$.*

Démonstration. — On a vu dans la démonstration du lemme 3.3.1 que l'on peut choisir les domaines $\Delta(K)$ et $\delta(L)$ de façon qu'ils soient disjoints et inclus dans $\Delta(K \cup L)$

L). L'union $\Delta(K) \cup \Delta(L)$ est alors un voisinage invariant de $K \cup L$ de topologie finie, fermé modulo f et inclus dans $\Delta(K \cup L)$. La proposition 3.2.5 permet alors de conclure. \square

Voici à présent une reformulation du corollaire 3.3.2 :

Corollaire 3.3.3. — *Soit I un intervalle de pièces basiques, et K l'ensemble hyperbolique saturé qui lui est associé. Soit G_I le sous-graphe du diagramme de Smale correspondant à I . Soient J_1, \dots, J_k les intervalles correspondant aux composantes connexes de G_I , et L_1, \dots, L_k les ensembles hyperboliques saturés qui leur sont associés.*

Alors $(\Delta(K), f)$ est conjugué à $(\coprod_i (\Delta(L_i)), f)$ par un homéomorphisme égal à l'identité sur $\delta(K)$.

Le but de cette fin de paragraphe est de montrer que, pour étudier la dynamique sur les domaines d'ensembles hyperboliques saturés, il suffit de considérer les ensembles hyperboliques saturés dont le domaine est connexe.

Soit (K, f) un ensemble hyperbolique saturé et $\Delta(K)$ son domaine. Remarquons que $\Delta(K)$ possède un nombre fini de composantes connexes, et que f induit une permutation sur l'ensemble de ces composantes connexes. Soit C_0 l'une de ces composantes, k sa période pour f , et $\Delta_0 = \bigcup_0^{k-1} f^i(C_0)$ l'union des composantes de l'orbite de C_0 . L'ensemble $K_0 = K \cap \Delta_0$ est alors un ensemble hyperbolique saturé, qui correspond à l'une des composantes connexes du diagramme de Smale de K ; son domaine est Δ_0 . On a donc déjà montré :

Corollaire 3.3.4. — *Pour tout ensemble hyperbolique saturé (K, f) , il existe une famille finie $\{(K_i, f), 1 \leq i \leq l\}$ d'ensembles hyperboliques saturés tels que l'on ait :*

1. *Pour tout i , le domaine $\Delta(K_i)$ possède une unique orbite de composantes connexes.*
2. *$(\Delta(K), f)$ est l'union disjointe des $(\Delta(K_i), f)$*

Le lemme 3.2.5 et le corollaire 3.2.7 permettent de montrer :

Corollaire 3.3.5. — *Soit (K, f) un ensemble hyperbolique saturé, et $\Delta(K)$ son domaine.*

Pour tout $n \neq 0$, K est un ensemble hyperbolique saturé de f^n et son domaine pour f^n est $\Delta(K)$.

Considérons à présent un ensemble hyperbolique saturé (K, f) dont le domaine $\Delta(K)$ ne contient qu'une seule orbite de composantes connexes, et notons p la période de cette orbite. Alors le domaine de K pour f^p est encore $\Delta(K)$ (d'après le corollaire 3.3.5) et possède donc p composantes connexes invariantes par f^p . Il est de plus clair que les restrictions de f^p à ces composantes connexes de $\Delta(K)$ sont conjuguées deux-à-deux. On en déduit donc :

Corollaire 3.3.6. — Soit (K, f) un ensemble hyperbolique saturé dont le domaine ne contient qu'une orbite de composantes connexes et soit p sa période. Soit C une composante connexe de $\Delta(K)$ et soit $L = K \cap C$. Alors :

1. L est un ensemble hyperbolique saturé de f^p , dont le domaine est C (donc est connexe).
2. $(\Delta(K), f)$ est topologiquement conjugué à $L \times \{1, \dots, p\}$ muni du difféomorphisme ϕ défini par $(\phi(x, i) = (x, i + 1)$ si $i \neq p$, et $\phi(x, p) = (f^p(x), 1)$.

Voici, pour finir ce paragraphe, une caractérisation des ensembles hyperboliques saturés dont le domaine est connexe.

Lemme 3.3.7. — Soit (K, f) un ensemble hyperbolique saturé. Alors $\Delta(K)$ est connexe si et seulement si $W^s(K) \cup W^u(K)$ est connexe.

Démonstration. — Si l'union des variétés invariantes de K est connexe, le domaine est lui aussi connexe car chacune de ses composantes connexes contient, par construction, un point de K . C'est la réciproque qu'il faut montrer.

Remarquons d'abord que, pour tout ensemble hyperbolique saturé, l'union de ses variétés invariantes possède un nombre fini de composantes connexes. En effet, le théorème spectral assure que toute pièce basique Λ est l'union d'un nombre fini de compacts Λ_i permutés par f , et tels que pour tous $x, y \in \Lambda_i$, la variété stable de x rencontre transversalement la variété instable de y : en particulier l'union des variétés stables et instables de Λ_i est connexe. On en déduit que $W^s(\Lambda) \cup W^u(\Lambda)$ contient un nombre fini de composantes connexes ; il en est de même de $W^s(K) \cup W^u(K)$, qui est l'union des variétés invariantes des pièces basiques contenues dans K .

Les composantes connexes W^i de $W^s(K) \cup W^u(K)$ sont permutées par f , et sont périodiques : notons p un multiple commun aux périodes de ces composantes connexes. Alors l'intersection K_i de K avec chacune des composantes connexes W^i de $W^s(K) \cup W^u(K)$ est invariante par f^p , et est donc un ensemble hyperbolique saturé de f^p . De plus, pour $i \neq j$, les variétés invariantes de K_i sont disjointes de celles de K_j donc les pièces basiques de f^p contenues dans K_i sont non-comparables à celles contenues dans K_j . D'après le lemme 3.3.1, le domaine de K pour f^p contient au moins autant de composantes connexes que de K_i (et donc de W^i). Or, le domaine de K pour f^p est égal au domaine $\Delta(K)$ pour f . On a donc montré que si $\Delta(K)$ est connexe, $W^s(K) \cup W^u(K)$ aussi. \square

3.4. Première réduction du problème de classification des difféomorphismes de Smale

Dans ce paragraphe, nous allons définir des règles de recollement des domaines d'une famille finie d'ensembles hyperboliques saturés K_i de difféomorphismes de Smale f_i sur différentes surfaces. Nous verrons que chaque règle de recollement des

domaines $\Delta(K_i, f_i)$ construit une surface compacte munie d'une classe d'équivalence topologique de difféomorphismes de Smale. De plus, pour toute famille finie de domaines $\Delta(K_i, f_i)$, l'ensemble des règles de recollement est finie. Nous remarquerons de plus que chaque difféomorphisme peut être reconstruit par recollement des domaines de ses propres ensembles hyperboliques saturés.

Nous aurons ainsi montré que, pour classifier les difféomorphismes des surfaces compactes à conjugaison topologique près, il suffit de classifier (à conjugaison topologique près) les restrictions des difféomorphismes de Smale aux domaines des ensembles hyperboliques saturés.

Les domaines n'étant ni ouverts ni fermés, il sera plus commode de les compactifier.

Soit Δ le domaine d'un ensemble hyperbolique saturé K d'un difféomorphisme f d'une surface S . Nous avons construit (voir la proposition 1.3.1) un difféomorphisme \tilde{f} d'une surface \tilde{S} , de sorte que Δ soit obtenu à partir de l'ouvert $U = \tilde{S} \setminus \{\text{sources, puits}\}$, en coupant suivant des bandes disjointes, dont l'union est invariante par \tilde{f} , chaque bande joignant une source à un puits.

Dans \tilde{D} les sources et puits ont des voisinages divisés en secteurs alternativement dans une bande et dans Δ (voir figure 6).

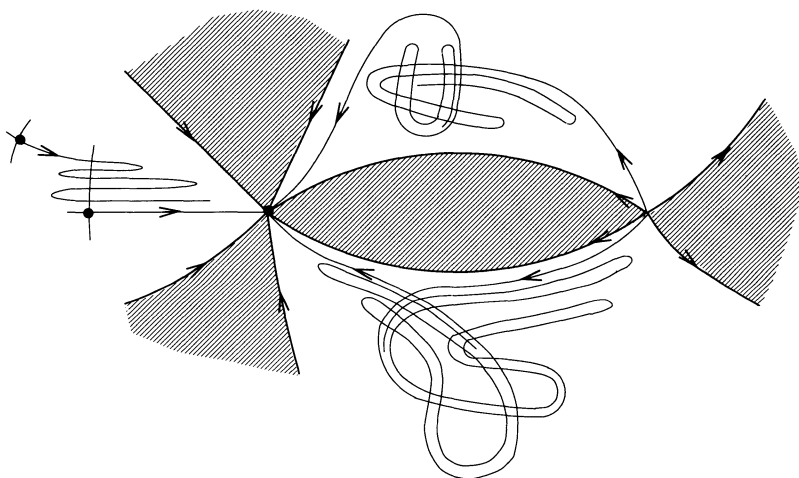


FIGURE 6. Les secteurs alternativement dans une bande ou dans Δ , au voisinage d'un puits (à gauche)

Nous pouvons maintenant compléter Δ en ajoutant un point à l'extrémité de chaque secteur de Δ contenu dans un voisinage découpé comme ci-dessus d'une source ou d'un puits. Si la source ou le puits admet un voisinage qui n'est pas découpé, il suffit de rajouter ce point. Le résultat est une surface compacte à bord $\overline{\Delta}$. Par construction, $\overline{\Delta} \setminus \Delta$ est un ensemble fini de points qui sont des sources ou des puits (pour la dynamique obtenue en complétant par continuité la restriction de f à Δ). Remarquons

que chaque composante du bord de $\overline{\Delta}$ contient au moins une source et un puits, ces sources et puits étant alternés sur chacune des composantes du bord de D . Il sera commode de la visualiser comme une surface à bords et coins, les coins étant les sources et puits contenus dans le bord.

En souvenir des « *diamonds* » (carreaux) qu'utilise Peixoto pour classifier les champs de vecteurs Morse-Smale quasi-gradients, nous appellerons « *carreaux* » ces domaines complétés.

Petite remarque sémantique. — Nos carreaux généralisent les voisinages en étoile dont nous avons parlé dans l'introduction, et ne coïncident hélas pas avec les « *diamonds* » de Peixoto.

A chaque droite du bord de Δ correspond un côté du carreau, c'est-à-dire un segment joignant un coin source à un coin puits. On appellera *orientation dynamique* d'un côté d'un carreau l'orientation qui va du coin source vers le coin puits.

Voyons à présent comment assembler les carreaux, et pour cela nous allons définir ce qu'est une règle de recollement.

Soient $(\Delta_1, f_1), \dots, (\Delta_k, f_k)$ les restrictions de k difféomorphismes de Smale f_i (définis chacun sur une surface S_i orientée, f_i respectant l'orientation), aux domaines $\Delta_i \subset S_i$ d'ensembles hyperboliques saturés K_i . On notera $(\overline{\Delta}_i, f_i)$ les carreaux obtenus en complétant comme ci-dessus les domaines Δ_i .

Soit γ un côté de $\overline{\Delta}_i$. On associe à γ un signe $\varepsilon(\gamma) \in \{-1, 1\}$, suivant que l'orientation de γ comme bord de $\overline{\Delta}_i$ coïncide ou non avec l'orientation dynamique.

Remarquons que les côtés positifs et les côtés négatifs sont en même nombre puisqu'ils sont alternés sur chaque composante du bord. Notons Γ^+ et Γ^- les ensembles de tous les côtés positifs et négatifs. Remarquons que les f^i induisent des permutations σ^+ et σ^- sur les ensembles Γ^+ , Γ^- .

Définition 3.4.1. — Avec les notations ci-dessus, on appellera *règle de recollement* de la famille de carreaux (Δ_i, f_i) , une bijection ϕ de Γ^+ sur Γ^- conjuguant les permutations σ^+ et σ^- .

Proposition 3.4.2 (Les carrelages). — Soit $\{(\overline{\Delta}_i, f_i), 1 \leq i \leq k\}$ une famille finie de carreaux, et soient Γ^+ et Γ^- les ensembles des côtés positifs et négatifs de ces carreaux. Soit $\phi: \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^-$ une règle de recollement.

Il existe une famille d'homéomorphismes h_γ envoyant chaque côté positif γ sur son image $\phi(\gamma)$, de façon qu'en recollant les carreaux le long de leurs côtés par les homéomorphismes h_γ , on obtienne une surface compacte orientable sans bord munie d'un homéomorphisme préservant l'orientation, conjugué à un difféomorphisme de Smale.

De plus la classe de conjugaison de ce difféomorphisme ne dépend que des carreaux et de ϕ .

Idée de démonstration. — Si γ est un côté fixe pour σ^+ alors $\phi(\gamma)$ est fixe pour σ^- et les restrictions des f_i correspondants sur l'intérieur de ces deux côtés sont des translations. On peut donc choisir un homéomorphisme $h_\gamma: \gamma \rightarrow \phi(\gamma)$ qui conjugue ces deux translations. Si γ est périodique de période p , $\phi(\gamma)$ aussi. On choisit un homéomorphisme h_γ conjuguant les restrictions des itérés f_i^p aux côtés γ et $\phi(\gamma)$. Sur l'itéré $f_i^j(\gamma)$, on obtiendra alors $h_{f_i^j(\gamma)}$ en conjuguant h_γ par la $j^{\text{ième}}$ puissance des f_i convenables.

On se convainc facilement qu'en recollant les $\overline{\Delta}_i$ le long de leurs côtés par les homéomorphismes h_γ , on obtient une surface S compacte sans bord. Le fait que chaque côté positif soit recollé à un côté négatif assure que cette surface est orientée. De plus, les difféomorphismes f_i se recollent sur S en un homéomorphisme f qui préserve l'orientation de S .

Remarquons qu'en chaque point obtenu par recollement de puits (resp. des sources) des carreaux, cet homéomorphisme f est topologiquement contractant (resp. dilatant).

Soit σ une cicatrice, c'est-à-dire un segment de S obtenu par recollement de deux côtés. Remarquons que σ joint un puits à une source, et que σ privé de ses extrémités possède un voisinage qui est une bande invariante (par une puissance de f) et que la dynamique sur cette bande invariante est conjuguée à une translation.

Les deux observations ci-dessus permettent de lisser la dynamique en un difféomorphisme de Smale (encore noté f), et montrent que la classe de conjugaison topologique de ce difféomorphisme de Smale ne dépend pas du choix des homéomorphismes h_γ . \square

Voyons à présent que tout difféomorphisme de Smale est obtenu par recollement de tels carreaux.

Soit f un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte orientable S . Notons U la surface S privée de ses points attracteurs ou répulseurs. Notons I l'ensemble des pièces basiques qui ne sont pas des points périodiques attracteurs ou répulseurs : c'est un intervalle de pièce basiques. Notons K l'ensemble hyperbolique saturé associé à l'intervalle I . Le domaine $\Delta(K)$ est obtenu en ôtant à U l'intérieur d'un nombre fini de bandes disjointes proprement plongées dans U ; remarquons que l'union de ces bandes est invariante par f , et que chaque composante de leur bord joint un point attracteur à un point répulseur ; de plus, chacune de ces bandes B est périodique pour f , et la restriction de f^p à B (où p est la période de B) est conjuguée à une translation.

Voyons que les bandes définissent une règle de recollement de l'ensemble des composantes connexes du bord de $\Delta(K)$. En effet, si B est une bande, on constate que l'orientation des composantes connexes du bord de B comme bord de $\Delta(K)$ est compatible avec l'orientation dynamique sur l'une des deux composantes (notée γ_B) et contraire à l'orientation dynamique sur l'autre (notée $\phi(\gamma_B)$). La composante γ_B correspond donc à un côté positif et $\phi(\gamma_B)$ à un côté négatif, et on vérifie que ϕ définit une bijection de Γ^+ sur Γ^- conjuguant les permutations induites par f .

La proposition suivante est alors immédiate :

Proposition 3.4.3 (Le carrelage). — *Avec les notations ci-dessus, en recollant le carreau $\overline{\Delta}(K)$ par la règle de recollement ϕ , on obtient la surface S munie de la classe de conjugaison du difféomorphisme f .*

En conclusion, une description combinatoire de la classe de conjugaison topologique d'un difféomorphisme de Smale sera donnée par une description combinatoire de sa restriction au domaine de l'ensemble hyperbolique saturé K associé à son diagramme de Smale privé des sources et des puits, et par une règle de recollement des côtés du carreau correspondant. De plus, d'après les corollaires 3.3.4 et 3.3.6, $(\Delta(K), f)$ se reconstruit de façon simple à partir de domaines $(\Delta(K_i), f^i)$ connexes.

Il nous suffit à présent de classer les restrictions de difféomorphismes de Smale aux domaines connexes d'ensembles hyperboliques saturés.

CHAPITRE 4

CONSTRUCTION DE PARTITIONS DE MARKOV

Le but de cette partie est de donner un procédé de construction de partitions de Markov par des rectangles disjoints (éventuellement dégénérés, voir définition 2.2.1), pour tout un ensemble hyperbolique saturé K qui ne contient pas d'attracteur ni de répulseur.

Cette partie ne contient pas de résultats vraiment originaux : le fait que les ensembles hyperboliques de difféomorphismes de surfaces admettent des partitions de Markov par des rectangles est déjà connu. L'existence de ces partitions de Markov (par rectangles disjoints) est le seul résultat nécessaire aux parties suivantes de ce travail, et le lecteur peut donc lire les parties suivantes de façon indépendante, en admettant ce résultat.

Notre motivation pour écrire cette partie est double :

1. En général les auteurs demandent aux rectangles d'être d'intérieurs disjoints, alors que nous aurons besoin de rectangles disjoints. De plus, nous considérons des ensembles hyperboliques non transitifs, et l'existence de double-bords nous oblige à admettre des rectangles dégénérés (c'est-à-dire réduits à un segment ou à un point) : nous ne pouvons donc pas appliquer tels quels les résultats de la littérature.
2. Nous pensons qu'il sera prochainement possible d'exhiber, pour tout ensemble hyperbolique saturé dont le domaine est connexe, une famille finie de partitions de Markov (à conjugaison près par la dynamique). De plus, nous espérons que cette famille finie sera obtenue de façon algorithmique à partir d'une partition de Markov quelconque, ce qui permettra de décider si deux partitions de Markov décrivent ou pas le même ensemble hyperbolique. Il faudra pour cela disposer d'un procédé explicite de construction.

Remarque. — Le fait que nous demandons aux rectangles des partitions de Markov d'être disjoints nous a obligés à ne considérer, dans cette partie, que des ensembles

hyperboliques saturés ne possédant pas d'attracteur ou de répulseur hyperbolique (qu'il soit périodique ou non périodique).

4.1. Quelques définitions

Définition 4.1.1 (bonne partition de Markov). — On appellera bonne partition de Markov pour K une famille finie $M = \{R_i\}$ de rectangles disjoints recouvrant K telle que :

1. pour tout (i, j) , toute composante connexe de l'intersection $R_i \cap f(R_j)$ est un rectangle dont le bord stable (resp. le bord instable) est inclus dans $\partial^s(R_i)$ (resp. dans $\partial^u(f(R_j))$), et rencontre chacune des composantes connexes de $\partial^s(R_i)$ (resp. $\partial^u(f(R_j))$).
2. Pour toute suite $\{i_n\}, n \in \mathbb{Z}$ chaque composante connexe de l'intersection

$$\bigcap_{\mathbb{Z}} f^n(R_{i_n})$$

contient au plus un point qui appartient alors à K .

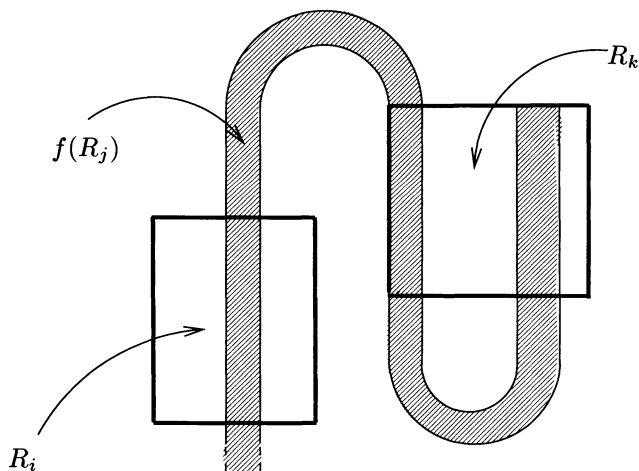


FIGURE 1. Comment l'image d'un rectangle traverse les rectangles

Nous allons chercher, dans la réunion des courbes s-bords et u-bords, les familles de segments qui formeront le bord des rectangles d'une bonne partition de Markov.

Définition 4.1.2 (segment isolé). — Un segment σ d'une variété stable W^s d'un point de K sera dit isolé si ses extrémités sont dans K et qu'il existe un intervalle ouvert γ de W^s contenant σ et tel que $\gamma \cap K \subset \sigma$.

On définit de façon analogue les segments instables isolés.

Définition 4.1.3 (famille adaptée de segments stables). — On dira que δ^s est une famille adaptée de segments stables si :

1. Chaque composante connexe de δ^s est un segment de variété stable de type s -bord isolé.
2. Tout point périodique de type s -bord appartient à δ^s .
3. $f(\delta^s) \subset \delta^s$.
4. Pour tout $x \in \delta^s \cap K$ non-périodique, il existe une u -arche ayant ses deux extrémités dans δ^s , l'une d'elles étant x .

On définit de façon analogue les familles adaptées de segments instables.

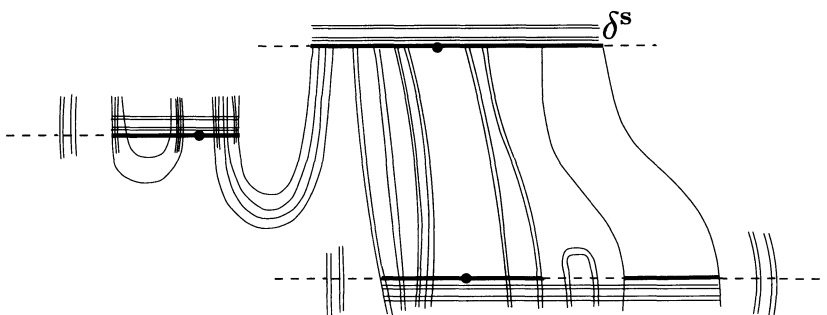


FIGURE 2. Une famille adaptée de segments stables

Exemple. — Soit $\{R_i\}$ une famille finie de rectangles deux-à-deux disjoints recouvrant K . Si $M = \{R_i\}$ est une bonne partition de Markov pour K alors $\partial^s(M)$ et $\partial^u(M)$ sont des familles adaptées de segments stables et instables respectivement.

En effet les items (1) et (3) sont conséquences directes de la définition de bonne partition de Markov ; l'item (2) se déduit de la remarque qui suit la définition 2.2.1 (définition d'un rectangle). Montrons l'item (4) : soit $x \in \partial^s(M)$ non périodique, d'après l'item (4) de la proposition 2.1.1 la séparatrice instable de x sortant de M rencontre de nouveau K . Soit y le premier point appartenant à K de cette séparatrice ; l'arc $[x, y]^u$ de cette séparatrice est l'arche cherchée.

Définition 4.1.4 (Rails). — Soit δ^s une famille de segments stables s -bords. On appellera rail non-trivial s'appuyant sur δ^s tout segment de variété instable de K non égal à une u -arche ni à un point, d'intérieur disjoint de δ^s et ayant ses extrémités sur δ^s . Un rail trivial est un point de $\delta^s \cap K$ qui n'est l'extrémité d'aucun rail non trivial.

Deux rails γ_1 et γ_2 seront dit équivalents s'il existe un rectangle (éventuellement seulement immergé ou dégénéré) dont le bord stable est inclus dans δ^s et tel que les rails γ_i sont chacun une composante de son bord instable.

Exemple. — Si δ^s est le bord stable d'une partition de Markov, les rails sont les segments instables des rectangles, sauf dans un cas particulier : si les segments instables d'un rectangle sont des arches, alors les rails correspondants sont les extrémités de ces segments.

4.2. Rails et rectangles

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante :

Proposition 4.2.1. — *Soit δ^s une famille adaptée de segments stables. Alors il existe une (unique) famille finie de rectangles plongés deux-à-deux disjoints R_i , recouvrant K et vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\partial^s(R_i) = R_i \cap \delta^s$
2. Toute composante connexe de $W^u(K) \cap R_i$ est un rail s'appuyant sur δ^s .
3. Tout rail est inclus dans l'un des R_i .
4. Deux rails sont équivalents si et seulement s'ils sont inclus dans le même R_i .

On appellera les R_i les domaines des classes d'équivalence de rails, (et dans la pratique on confondra souvent les R_i avec les classes d'équivalence).

Démonstration. — Montrons d'abord :

Lemme 4.2.2. — *Tout point de K appartient à un rail.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(\delta^s)$ est l'union des points périodiques s-bord et de toutes les séparatrices s-bord rencontrant K . Cette union est dense dans K .

Par définition des rails (éventuellement triviaux) tout point de $K \cap \delta^s$ appartient à un rail. Considérons donc un point $x \in K \setminus \delta^s$.

Montrons, par l'absurde, que toute séparatrice $W_+^u(x)$ issue de x rencontre δ^s . On suppose donc $W_+^u(x)$ disjointe de δ^s , ce qui implique que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f^{-j}(W_+^u(x) \cap f^{-j}(\delta^s)) = \emptyset$. Soit y un point de l' α -limite de x . Alors il existe une sous-suite $(n_i) \subset \mathbb{N}$ tendant vers l'infini et telle que $f^{-n_i}(W_+^u(x))$ converge vers une séparatrice $W_+^u(y)$.

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.3. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la séparatrice $W_+^u(y)$ est disjointe de $f^{-n}(\delta^s)$.*

Démonstration. — Supposons que $W_+^u(y) \cap f^{-n}(\delta^s) \neq \emptyset$. Si cette intersection contient un point intérieur à $f^{-n}(\delta^s)$, les séparatrices $f^{-n_i}(W_+^u(x))$ qui s'accumulent sur $W_+^u(y)$ finiront par couper $f^{-n}(\delta^s)$, ce qui contredit notre hypothèse, pour $n_i > n$. Cette intersection contient donc un point bord z de $f^{-n}(\delta^s)$. Le point z est un point u-bord (car les segments de δ^s sont isolés). Les séparatrices $f^{-n_i}W_+^u(x)$ ne peuvent

pas s'accumuler sur $W_+^u(y)$ par un côté où z est isolé dans sa séparatrice stable. Ce qui contredit le fait que ces séparatrices ne rencontrent pas $f^{-n}(\delta^s)$. \square

Nous pouvons à présent achever la démonstration du lemme 4.2.2 :

De la densité de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(\delta^s)$ et du lemme ci-dessus on déduit que $W_+^u(y)$ est une séparatrice libre, donc que y est un point périodique s-bord et que $y \in \delta^s$. Pour terminer la démonstration, il y a trois cas à considérer (voir figure 3).

1. La suite $(f^{-n_i}(x))$ contient une sous-suite qui s'accumule sur y du côté de la variété stable locale $W_{loc}^s(y)$ qui contient la séparatrice $W_+^u(y)$: ceci n'est pas possible car les $f^{-n_i}(x)$ sont des points de K ce qui contredirait le fait que le côté d'où part la séparatrice libre est bord.
2. La suite $(f^{-n_i}(x))$ contient une sous-suite contenue dans la variété stable locale de y et qui s'accumule sur y . Ceci n'est pas possible car tout point possède un nombre fini d'itérés négatifs sur la variété stable locale d'un point périodique.
3. La suite $(f^{-n_i}(x))$ contient une sous-suite qui s'accumule sur y du côté de $W_{loc}^s(y)$ opposé à $W_+^u(y)$. Si y est un point intérieur à δ^s , alors $W_+^u(f^{n_i}(x))$ coupera δ^s , ce qui contredit l'hypothèse. Si y est un point extrémal de δ^s , on conclut de même, car les $f^{n_i}(x)$ ne peuvent s'accumuler sur y du côté libre de $W^u(y)$.

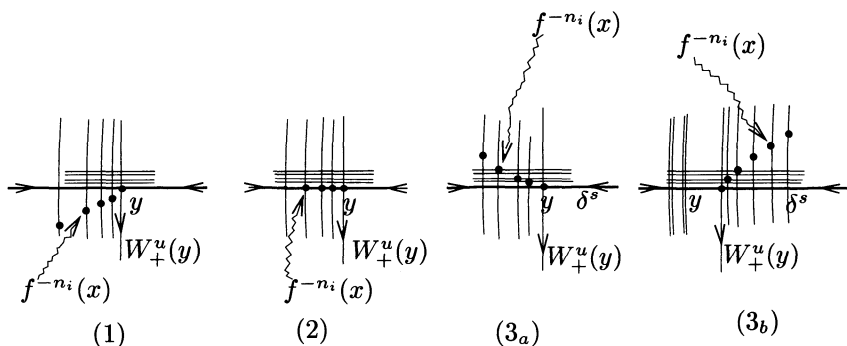


FIGURE 3. Trois cas pour la suite $f^{-n_i}(x)$ qui converge vers y

On a donc montré que toute séparatrice de x rencontrait δ^s . On en déduit facilement que tout point de $K \setminus \delta^s$ est sur un rail non-trivial. Pour le voir, il suffit de suivre chacune de ses séparatrices jusqu'au premier point où elle rencontre δ^s . \square

Remarques. — Le point $x \in \delta^s$ est un rail trivial, si et seulement s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

1. soit le point x est un double-bord périodique ;

2. soit x est un double-bord et les deux arches issues de x sont à extrémités sur δ^s . En effet, si tel n'était pas le cas, l'une des séparatrices instables issues de x rencontrerait K en un point $y \notin \delta^s$ avant de rencontrer δ^s ; x serait donc sur un rail non trivial.

Lemme 4.2.4. — *les rails sont deux-à-deux disjoints.*

Démonstration. — Si deux rails distincts γ et σ sont d'intersection non-vide, ils sont sur la même variété instable, qui est une droite immergée injectivement. Quand deux segments d'une même droite sont d'intersection non-vide, une extrémité d'un des segments appartient à l'autre segment. Cependant, par définition des rails, γ et σ ne contiennent pas de points de δ^s dans leur intérieur, donc l'intérieur d'un rail ne peut contenir l'extrémité d'un autre rail : on en déduit que $\gamma \cap \sigma$ est réduit à une extrémité x de ces intervalles. Cette extrémité appartient à δ^s donc, par définition des familles adaptées, il existe une u -arche α issue de x dont l'autre extrémité y appartient à δ^s . Cependant α est incluse dans l'un des deux rails γ ou σ . Ce rail contenant $y \in \delta^s$ doit avoir y comme extrémité; d'autre part il a x comme extrémité, donc il est égal à l'arche α , ce qui est en contradiction avec la définition des rails. \square

On a donc montré que tout point $x \in K \cap \delta^s$ est l'extrémité d'un unique rail, notons-le γ_x .

Lemme 4.2.5. — *Pour tout $x \in K \cap \delta^s$, il existe un voisinage $U_x \subset \delta^s$ tel que, pour tout $y \in K \cap U_x$, le rail γ_y est équivalent au rail γ_x .*

Démonstration. — Ceci est une conséquence facile de la structure de produit local, et du fait que les segments composant δ^s sont isolés. \square

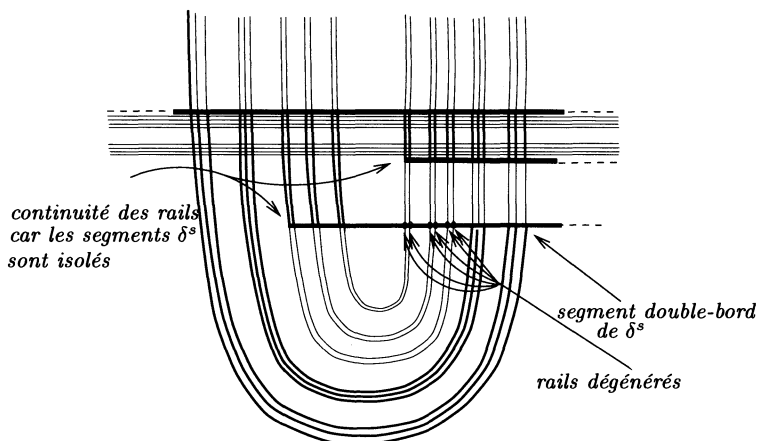


FIGURE 4. Les rails varient continûment

Du lemme 4.2.5 ci-dessus et de la compacité de K , on déduit que les classes d'équivalence de rails sont en nombre fini.

Lemme 4.2.6. — *Si deux rails γ_1 et γ_2 sont équivalents, il existe un rectangle plongé dont les γ_i sont les côtés instables et dont les côtés stables sont dans δ^s .*

Démonstration. — Par définition de l'équivalence de rails, il existe un rectangle R dont les côtés instables sont les γ_i et dont les côtés stables sont dans δ^s . Il reste à montrer que R est plongé (un rectangle dégénéré étant trivialement plongé, on supposera R non dégénéré). Pour cela il suffit de montrer que le bord de R est une courbe fermée simple. Or les côtés instables de R sont des rails (disjoints d'après le lemme 4.2.4), et les côtés stables sont inclus dans δ^s donc sont, par définition d'un rail, disjoints de l'intérieur des côtés instables. On en déduit que, si R n'est pas plongé, alors les deux côtés stables de R sont d'intersection non-vide, donc une extrémité d'un des côtés stables est contenue dans l'autre côté stable. Par ce point passent alors deux rails distincts (contenus dans R), ce qui est contraire au fait que les rails sont deux-à-deux disjoints (voir figure 5). Cette contradiction conclut la démonstration du lemme. \square

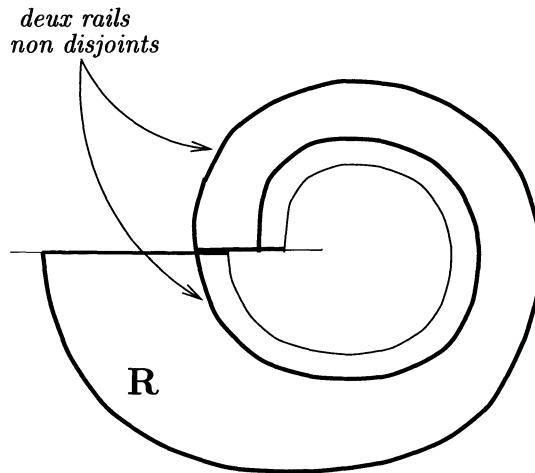


FIGURE 5. Situation impossible

Les rectangles R_i sont alors les rectangles, maximaux pour l'inclusion, parmi les rectangles définis par le lemme ci-dessus. Nous venons de terminer la démonstration de la proposition 4.2.1. \square

4.3. Découpage de rectangles et construction de partitions de Markov

Lemme et définition 4.3.1. — Soit δ^s une famille adaptée de segments stables et δ^u une famille de segments instables, stable par f^{-1} . Alors δ^s , privée de l'intérieur des s -arches ayant leurs deux extrémités sur δ^u , est encore une famille adaptée. On dira que c'est la famille obtenue en découpant δ^s le long de δ^u , et on notera $D_{\delta^u}(\delta^s)$.

On découpera de façon analogue une famille adaptée instable par une famille de segments stables.

Démonstration. — Les items 1,2,4 de la définition des familles adaptées ne concernent que les points de $\delta^s \cap K$, et ces points sont inchangés par découpage. Seul l'item 3 est donc à démontrer :

Il faut démontrer que la nouvelle famille est encore f -invariante. Pour cela il suffit de remarquer que, si $x \in \delta^s$ est tel que $f(x)$ appartienne à l'intérieur d'une s -arche ayant ses extrémités sur δ^u , alors x appartient à l'intérieur d'une s -arche à extrémités sur δ^u : ceci est une conséquence facile du fait que δ^s est invariant par f^{-1} .

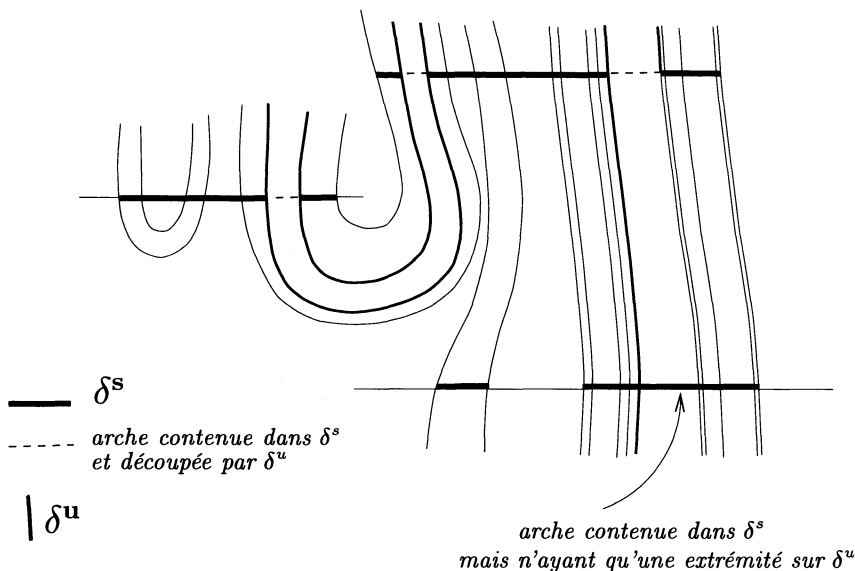


FIGURE 6. La famille obtenue en découpant δ^s le long de δ^u

□

Lemme 4.3.2. — Soit δ^s et δ^u des familles adaptées de segments stables et instables, et soit $\{R_i\}$ la famille de classes d'équivalence de rails d'extrémités sur δ^s . Alors la famille des composantes connexes des intersections $\delta^u \cap R_i$ est exactement $D_{\delta^s}(\delta^u)$.

Démonstration. — En effet, rappelons que $\delta^u \setminus D_{\delta^s}(\delta^u)$ est l'union de l'intérieur des u-arches contenues dans δ^u dont les extrémités sont sur δ^s . Or, par définition des classes d'équivalence de rails, une telle u-arche n'est pas incluse dans un des R_i , mais a ses extrémités sur le bord stable des R_i . Réciproquement, tout segment de δ^u d'intérieur disjoint des R_i mais ayant ses extrémités sur les R_i est une u-arche (car l'union des R_i contient K) joignant deux points de δ^s . \square

Théorème 4.3.3. — *Soient δ^s et δ^u deux familles adaptées de segments stables et instables, vérifiant l'hypothèse suivante :*

le bord stable (resp instable) des rectangles domaines des classes d'équivalence de rails associés à δ^u (resp. δ^s) est contenu dans δ^s (resp. δ^u).

Alors il existe une partition de Markov M génératrice de K par rectangles disjoints, dont le bord stable (resp. instable) soit $D_{\delta^u}(\delta^s)$ (resp. $D_{\delta^s}(\delta^u)$).

De plus cette partition est donnée comme l'ensemble des classes d'équivalence de rails associées à chacune des familles « découpées » ci-dessus.

Définition 4.3.4. — *Sous les hypothèses du théorème (le bord stable (resp instable) des rectangles domaines des classes d'équivalence de rails associés à δ^u (resp. δ^s) est contenu dans δ^s (resp. δ^u)), on dira que les familles δ^s et δ^u induisent la partition de Markov M .*

Démonstration. — Nous allons d'abord montrer que $D_{\delta^s}(\delta^u) \cup D_{\delta^u}(\delta^s)$ est le bord d'une famille de rectangles. Nous montrerons alors que cette famille de rectangles est une partition de Markov.

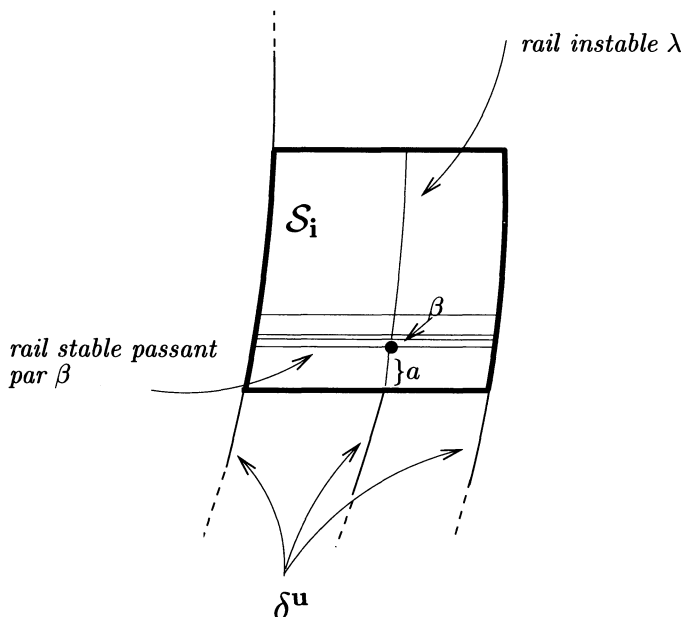
Notons $S = \{S_i\}$ la famille de classes d'équivalence de u-rails s'appuyant sur δ^s : on a vu que S est une famille de rectangles disjoints.

Montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.3.5. — *Toute composante connexe de l'intersection d'un rectangle S_i avec δ^u est un rail.*

Démonstration. — Par hypothèse, δ^s contient les bords stables des classes d'équivalence de rails s'appuyant sur δ^u : en particulier, δ^s contient les extrémités de δ^u . On en déduit qu'une composante connexe γ de $S_i \cap \delta^u$ est soit réduite à une extrémité de δ^u contenue dans le bord de S_i , soit est un rail. Supposons donc que γ n'est pas un rail, ceci implique que S_i n'est pas un segment stable (classe de rails dégénérés).

Alors, le point γ est une extrémité d'un rail non trivial $\lambda \subset S_i$, et est aussi une extrémité de δ^u . Les segments composant δ^u sont isolés donc il existe une u-arche $a \subset \lambda$ ayant γ comme extrémité. Notons β l'autre extrémité de a (voir figure 7. Le rail stable passant par β et s'appuyant sur δ^u est un rail extrémal, en effet le rail stable passant par γ est extrémal. L'arche a n'est pas contenue dans le rectangle défini par la classe du rail stable passant par γ , et donc joint le bord stable de ce rectangle au bord stable du rectangle correspondant à la classe du rail stable passant par β .

FIGURE 7. Si une composante de $\delta^i \cap S_i$ n'est pas un rail

Donc, par hypothèse, β appartient à δ^s . On en déduit que λ est réduit à la u -arche a , ce qui est contraire à la définition d'un rail. \square

Nous allons à présent découper les rectangles S_i entre deux rails successifs (dans S_i) et contenus dans δ^u . Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.3.6. — *Si γ est un rail inclus dans $S_i \cap \delta^u$, qui n'est pas contenu dans le u -bord de S_i , alors il existe un autre rail $\tilde{\gamma} \subset (S_i \cap \delta^u)$ dont les points dans K sont reliés à ceux de γ par des s -arches contenues dans S_i .*

Démonstration. — Soit x l'une des extrémités de γ . Par définition de famille adaptée, il existe une s -arche a d'extrémité x et dont l'autre extrémité y appartient à δ^u . De plus, γ n'étant pas dans le s -bord de S_i , l'arche a est incluse dans S_i . $\tilde{\gamma}$ est alors le rail de S_i issu de y . \square

Remarque. — Soit S_i un rectangle contenant un rail $\gamma \subset \delta^u$ non contenu dans le bord instable de S_i , et $\tilde{\gamma} \subset \delta^u \cap S_i$ un rail u -voisin de γ dont lemme ci-dessus assure l'existence. On considère le rectangle bordé par γ , $\tilde{\gamma}$ et par les arches contenues dans le bord stable de S_i joignant γ à $\tilde{\gamma}$. Notons $O(\gamma, \tilde{\gamma})$ la partie obtenue en ôtant $\gamma \cup \tilde{\gamma}$ au rectangle ci-dessus. Considérons l'union $U = \bigcup_{(\gamma, \tilde{\gamma})} O(\gamma, \tilde{\gamma})$.

Alors toute composante connexe de $S_i \setminus U$ est un rectangle (éventuellement dégénéré).

Définition 4.3.7. — La famille $M = \{R_j\}$ des rectangles construits à la remarque ci-dessus est appelée la famille découpée de $S = \{S_i\}$ le long de δ^u .

Remarque. — L'ensemble invariant K est inclus dans $\bigcup_i (R_i)$. En effet, nous avons démontré dans la proposition 4.2.1 que K est inclus dans $\bigcup_i (R_i)$ et $U = \bigcup_{(\gamma, \tilde{\gamma})} O(\gamma, \tilde{\gamma})$ ne contient aucun point de K .

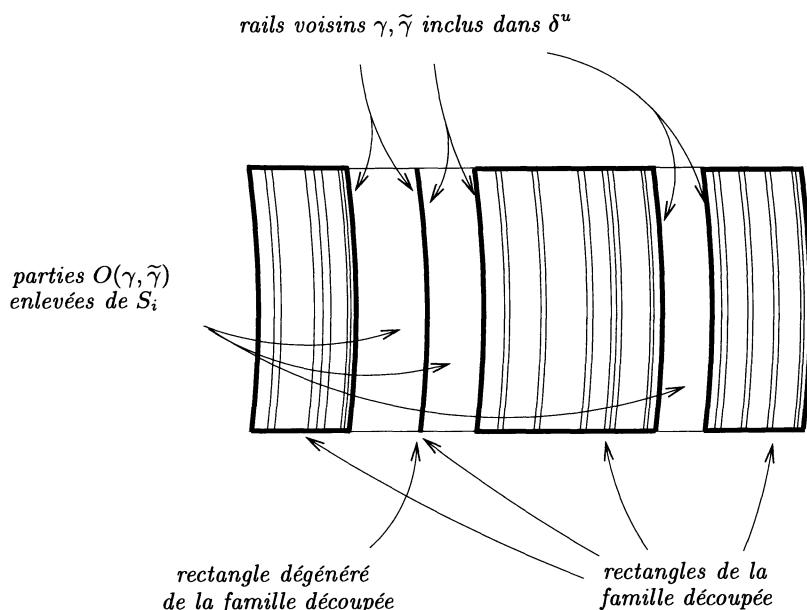


FIGURE 8. Découpage des rectangles S_i le long de δ^u

Lemme 4.3.8. — Le bord stable de la famille M définie ci-dessus par découpage est $D_{\delta^u}(\delta^s)$ et son bord instable est $D_{\delta^s}(\delta^u)$.

Démonstration. — Voyons d'abord le bord instable de M :

Par définition des rectangles découpés R_j , leur bord instable est formé de segments qui sont des composantes connexes d'intersection de δ^u avec les S_i ; en effet, un tel segment est soit un côté instable de S_i soit une composante connexe de l'intersection de δ^u avec l'intérieur d'un rectangle S_i . Le lemme 4.3.2 démontre que ces composantes sont des composantes de $D_{\delta^s}(\delta^u)$, ce qui montre que $\partial^s(M) \subset D_{\delta^s}(\delta^u)$.

Réciproquement, le lemme 4.3.5 montre que toute composante connexe γ de $D_{\delta^s}(\delta^u)$ est un rail inclus dans un S_i . Dans le cas où γ était un côté instable de S_i , alors γ sera encore un côté du rectangle R_j qui le contient. Dans le cas contraire, le lemme 4.3.6 assure que γ possède un rail voisin $\tilde{\gamma} \subset \delta^s \cap S_i$. Par l'opération de découpage entre

les rails γ et $\tilde{\gamma}$, γ devient un côté instable d'un des rectangles R_j ce qui montre que $\partial^s(M) = D_{\delta^s}(\delta^u)$

Voyons à présent le bord stable de M : il est clair que l'on a $\partial^s(M) \subset \delta^s$. La différence $\delta^s \setminus \partial^s(M)$ est formée de l'intérieur de segments joignant les R_i : il s'agit donc de s-arches, puisque $\partial^s(M)$ contient $\delta^s \cap K$ (voir la remarque ci-dessus). Ces s-arches ont leurs extrémités sur δ^u puisqu'elles joignent des R_i . Nous venons de montrer l'inclusion $D_{\delta^u}(\delta^s) \subset \partial^s(M)$.

Réciproquement, soit $a \subset \delta^s$ une s-arche ayant ses extrémités sur δ^u . Si a n'était pas incluse dans un S_i , donc *a fortiori* pas dans un R_i , alors l'intérieur de a serait inclus dans $\delta^s \setminus \partial^s(M)$. Si a est incluse dans l'un des S_i alors les rails passant par ses extrémités sont des rails voisins contenus dans δ^u , et donc l'arche a n'est pas incluse dans un R_i , et donc l'intérieur de a est inclus dans $\delta^s \setminus \partial^s(M)$.

On a maintenant montré que $\partial^s(M)$ est obtenu à partir de δ^s en ôtant l'intérieur de toute s-arche ayant ses extrémités sur δ^u , ce qui conclut. \square

Il reste à montrer que la famille M ainsi définie est bien une partition de Markov. Soient R_i et R_j deux rectangles de la famille M . Le fait que chaque composante connexe C de $R_i \cap f(R_j)$ est un rectangle dont le bord stable est dans $\partial^s(R_i)$ et le bord instable dans $\partial^u(f(R_j))$ est une conséquence de l'invariance par f de $D_{\delta^u}(\delta^s)$ et de l'invariance par f^{-1} de $D_{\delta^s}(\delta^u)$. Les deux cas à écarter (voir figure 9) sont :

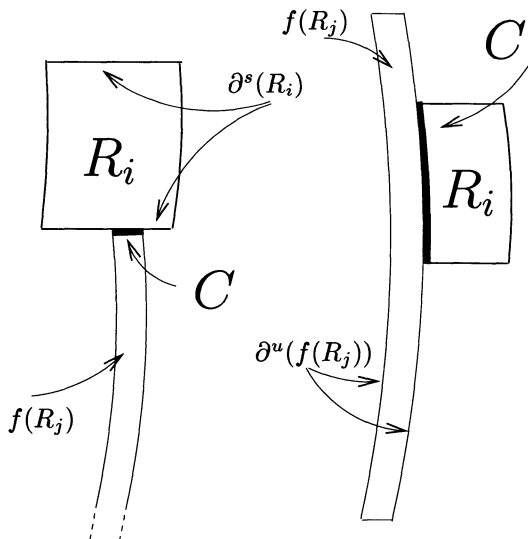


FIGURE 9. Situations interdites.

1. le bord stable de R_i a deux composantes connexes et C est un segment inclus dans l'une de ces composantes connexes,

2. le bord instable de $f(R_j)$ a deux composantes connexes, et C est un segment contenu dans l'une de ces composantes connexes.

Ecartons le premier cas. Montrons par l'absurde que, pour tout rail instable $\gamma \subset R_j$, une composante connexe c de $f(\gamma) \cap R_i$ ne peut pas être réduite à une extrémité d'un rail non trivial. Supposons donc que c est l'extrémité du rail non trivial λ . Notons $a \subset \lambda$ la u -arche d'extrémité c . Notons β l'autre extrémité de a .

Alors $f^{-1}(a)$ est une arche ayant une extrémité sur le bord stable de R_j et d'intérieur disjoint de R_j . L'autre extrémité $f^{-1}(\beta)$ de cette arche appartient au bord stable d'un autre rectangle. De l'invariance par f de $\partial^s(M)$, on déduit que β appartient à $\partial^s(M)$, et donc au bord stable de R_i . Le rail λ est exactement l'arche a , ce qui est interdit par la définition d'un rail.

On en déduit le fait que C rencontre les deux composantes connexes de $\partial^s(R_i)$. On montre de façon identique le fait que C rencontre chaque composante connexe de $\partial^u(f(R_j))$. La démonstration du théorème est maintenant complète. \square

On déduit du théorème le corollaire suivant :

Corollaire 4.3.9. — *Soient δ^s et δ^u des familles adaptées de segments stables et instables respectivement. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que δ^s et $f^n(\delta^u)$ induisent (voir la définition 4.3.4) une partition de Markov génératrice de K .*

Démonstration. — Le bord instable des classes de rails associés à δ^s est formé d'un nombre fini de segments compacts des séparatrices non-libres des points périodiques u -bords. De plus δ^u contient un segment non dégénéré, d'extrémité le point périodique, sur chacune de ces séparatrices. On en déduit que, pour n assez grand, $f^n(\delta^u)$ contient le bord instable de toutes les classes de rails.

On montre de même que, pour n assez grand, $f^{-n}(\delta^s)$ contient le bord stable des classes de rails associées à δ^u , ce qui implique que δ^s contient le bord stable des classes de rails associées à $f^n(\delta^u)$.

Les hypothèses du théorème sont alors vérifiées, ce qui conclut. \square

4.4. Existence de familles adaptées de segments stables

Une conséquence directe du corollaire est que pour prouver l'existence de partition de Markov génératrice de K , il suffit désormais de prouver l'existence d'une famille adaptée de segments stables.

Lemme 4.4.1. — *Soit δ^s une famille de segments stables s -bords, isolés extérieurement, contenant tous les points périodiques s -bords, et telle que tout segment contient un point périodique.*

1. Notons δ_1^s l'union de tous les segments de variétés stables s -bords joignant un point périodique à un point qui est une extrémité d'une u -arche ayant au moins une extrémité sur δ^s .

Alors δ_1^s est une famille de segments isolés extérieurement, contenant tous les points périodiques s -bords, telle que pour tout point $x \in K \cap \delta_1^s$ il existe une u -arche ayant x comme extrémité et ayant son autre extrémité sur δ_1^s .

2. Notons $\delta_2^s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\delta_1^s)$. Alors δ_2^s est une famille adaptée.

Démonstration. — Montrons l'item (1). Remarquons d'abord que δ_1^s contient δ^s .

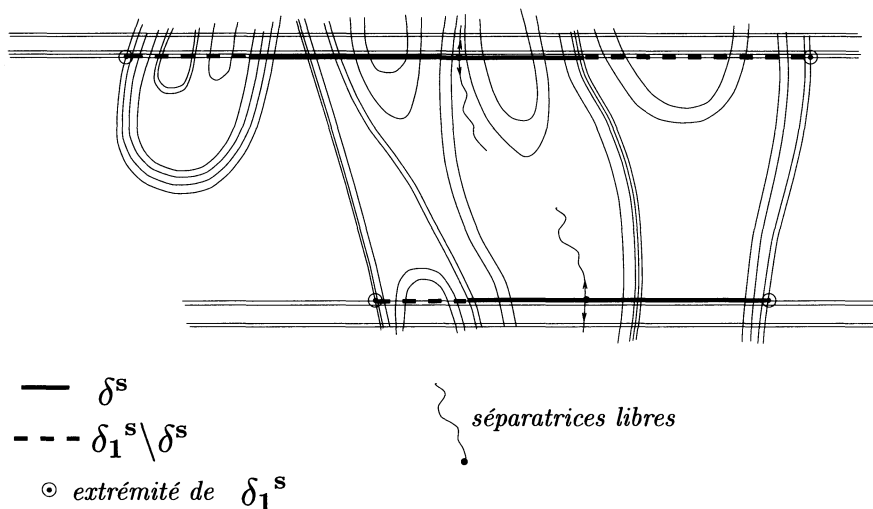


FIGURE 10. Construction de δ_1^s

Voyons à présent que chaque composante connexe de δ_1^s est un segment isolé extérieurement : supposons par l'absurde qu'il existe une composante connexe σ de δ_1^s qui est un segment stable non-isolé. Soit x une extrémité de σ , choisie d'un des côtés non-isolés de σ : il existe une suite (x_n) de points de K sur $W^s(x) \setminus \sigma$, convergeant vers x .

Remarquons d'abord que x ne peut être une extrémité de δ^s , donc $x \notin \delta^s$.

On en déduit que x est l'autre extrémité d'une u -arche a ayant une extrémité y sur δ^s . Notons y_n l'extrémité de la u -arche d'origine x_n , et partant du même côté que a . Pour n assez grand, y_n appartient à la même séparatrice que y et tend vers y . Comme les segments de δ^s sont isolés, ceci implique que pour n assez grand, y_n appartient à δ^s : il aurait donc fallu prolonger σ jusqu'aux x_n .

Montrons que, pour tout point $x \in K \cap \delta_1^s$, il existe une u -arche a ayant x comme extrémité et ayant une autre extrémité sur δ_1^s :

Si x appartient à δ^s ou si x est une extrémité d'une composante de δ_1^s , il n'y a rien à faire. Soit donc $x \in \delta_1^s \setminus \delta^s$ un point intérieur de δ_1^s . Notons p le point périodique dont la variété stable contient x . Alors par définition de δ_1^s , il existe $y \in \delta_1^s$ tel que

$x \in [p, y]^s$ et il existe une arche α ayant une extrémité en y et l'autre extrémité z sur δ^s .

Si z est sur la même séparatrice que x et que y , alors $x \in [z, y]^s$. Le lemme 2.4.5 force l'arche issue de x et partant du même côté que α à être contenue dans le disque bordé par $[z, y]^s \cup [z, y]^u$. Cette arche a donc son autre extrémité dans $[y, z]^s \subset \delta_1^s$, et c'est ce que l'on voulait montrer.

Si z est sur une autre séparatrice, notons q le point périodique dont est issue la séparatrice contenant z . Notons β l'arche partant de x du même côté que α ; alors en utilisant cette fois le lemme 2.4.2 et le corollaire 2.4.3, on voit que l'autre extrémité de β appartient à $[p, y]^s \cup [q, z]^s \subset \delta_1^s$, ce qui conclut la preuve de l'item (1).

Montrons l'item (2).

Il se peut que δ_1^s ne soit pas stable par f (seulement si les séparatrices des points s-bords ne sont pas fixes).

Remarquons d'abord que δ_1^s est formé d'un nombre fini de segments compacts de séparatrices s-bords, et que δ_1^s contient un voisinage du point périodique de chaque séparatrice qu'il rencontre : on en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand $f^n(\delta_1^s) \subset \delta_1^s$. En particulier, δ_2^s est une union finie d'itérés de δ_1^s . On vérifie facilement que les items (1) (2) et (4) de la définition de familles adaptées persistent par unions finies, enfin $f(\delta_2^s) \subset \delta_2^s$, par construction, ce qui conclut. \square

CHAPITRE 5

PARTITIONS DE MARKOV GÉOMÉTRISÉES ET CONJUGAISON TOPOLOGIQUE DE DIFFÉOMORPHISMES DE SMALE

Nous allons voir dans cette partie que la dynamique topologique d'un difféomorphisme de Smale, restreinte au domaine d'un ensemble saturé, est caractérisée par la donnée d'une partition de Markov, à laquelle on ajoute une information combinatoire finie qui décrit comment les images des rectangles de la partition coupent ces rectangles. Cette information combinatoire correspond, dans le cas unidimensionnel, à préciser la croissance ou la décroissance d'une application dilatante, sur chacun de ses intervalles de définition. Nous présentons d'abord le cas unidimensionnel, très simple, qui donne l'idée que nous utiliserons pour les difféomorphismes des surfaces, et qui sera aussi l'une des clefs de la démonstration. Nous montrerons que la combinatoire associée à une partition de Markov génératrice d'un ensemble hyperbolique (saturé ou non) caractérise la classe de conjugaison topologique de la restriction du difféomorphisme aux rectangles de la partition. Dans le cas où la partition de Markov définit un ensemble hyperbolique saturé, nous pourrions étendre la conjugaison au domaine de cet ensemble hyperbolique.

5.1. Le cas unidimensionnel

Soient I_1, \dots, I_n n segments orientés (on peut les voir comme des segments disjoints de \mathbb{R} , la numérotation étant indépendante de la position de ces segments). Notons I la réunion disjointe de ces segments.

Nous allons étudier des fonctions de I dans I , que nous appellerons *markoviennes* : une telle application est définie partiellement sur I et son domaine de définition est une union finie de sous-segments de I , et contient les extrémités de chacun des segments de I ; sa restriction à chacune des composantes connexes du domaine de définition est différentiable et strictement monotone ; l'image de chaque composante connexe du domaine de définition est égale à l'un des intervalles I_j ; enfin elle est dilatante, c'est à dire que l'un de ses itérés a sa dérivée de module plus grand que 2 partout où cette dérivée est définie.

Nous allons montrer que la classe de conjugaison de ces applications ne dépend que d'un type combinatoire que nous allons définir.

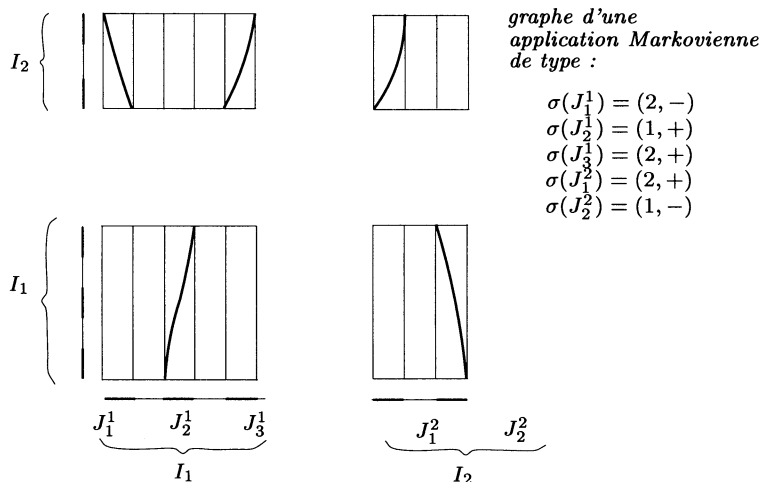


FIGURE 1. Une application markovienne et son type combinatoire

Définissons le type combinatoire d'une application f markovienne.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ notons $n_i > 0$ le nombre de sous-segments du domaine de définition de f contenus dans I_i , et appelons les J_j^i , $j \in \{1, \dots, n_i\}$, la numérotation étant compatible avec l'orientation de I_i : J_1^i a même extrémité inférieure que I_i et $J_{n_i}^i$ à même extrémité supérieure que I_i . On notera J la réunion des intervalles J_j^i .

Appelons $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des segments de I , et \mathcal{J} l'ensemble des sous-segments J_j^i de J .

Définition 5.1.1. — *Le type de l'application markovienne f , est l'application σ de \mathcal{J} dans $\mathcal{I} \times \{-1, 1\}$ définie par : $\sigma(J_j^i) = (k, \varepsilon)$ si $f(J_j^i) = I_k$, et $\varepsilon = +1$ si la restriction de f à J_j^i est croissante et $\varepsilon = -1$ sinon.*

Remarque. — Le type σ de f permet de construire la *matrice de Markov* $(a_{s,t})$ de f . C'est une matrice (n, n) à coefficients entiers positifs, $a_{s,t}$ étant le nombre de sous-intervalles de I_s dont l'image est I_t . Cette matrice donne la classe de conjugaison de la restriction de f à l'ensemble maximal invariant $\bigcap_0^{+\infty} f^{-n}(I)$. En effet, si les coefficients $a_{s,t}$ de cette matrice sont tous égaux à 0 ou 1, l'*itinéraire* d'un point (suite des passages de ses itérés positifs dans les intervalles) le détermine. L'application « itinéraire » est alors une conjugaison entre la restriction de f à l'ensemble maximal invariant et le sous-shift (positif) de type fini correspondant à la matrice. Si certains coefficients de la matrice sont supérieurs à deux, on remarque que les segments J_j^i forment encore une partition de Markov de f et que la matrice associée a tous ses

coefficients égaux à 0 ou 1 ; cette nouvelle matrice est déterminée (à permutation près) par la précédente.

Cependant l'homéomorphisme de conjugaison entre deux applications markoviennes de même matrice ne peut en général pas s'étendre en un homéomorphisme de I , puisqu'il n'est pas *a priori* localement monotone.

Proposition 5.1.2. — *Soit $f: I \rightarrow I$ et $g: \tilde{I} \rightarrow \tilde{I}$ deux applications markoviennes de même type.*

1. *Il existe un homéomorphisme h croissant de I dans \tilde{I} envoyant I_i sur \tilde{I}_i , tel que l'image du domaine J de f soit le domaine de définition \tilde{J} de g et que*

$$g \circ h = h \circ f.$$

2. *On peut de plus se donner a priori la restriction de h à $I \setminus J$ pourvu qu'elle induise pour tout i un homéomorphisme croissant de $I_i \setminus J$ sur $\tilde{I}_i \setminus \tilde{J}$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que, pour tout i , $I_i \setminus J$ et $\tilde{I}_i \setminus \tilde{J}$ ont le même nombre de composantes connexes, chacune de ces composantes connexes étant un intervalle ouvert. On peut donc choisir un homéomorphisme h_0 croissant de $I_i \setminus J$ sur $\tilde{I}_i \setminus \tilde{J}$. Notons h_0 l'homéomorphisme de $I \setminus J$ sur $\tilde{I} \setminus \tilde{J}$ obtenu comme union de ces homéomorphismes.

Notons $O_0 = I \setminus J$. Remarquons que $f^{-1}(O_0)$ est disjoint de O_0 , et donc les $f^{-i}(O_0)$ sont des ouverts deux-à-deux disjoints. On notera $O_k = \bigcup_0^k (f^{-i}(O_0))$. Remarquons que O_k est l'union disjointe de O_0 et de $f^{-1}(O_{k-1})$. On définit de même \tilde{O}_k .

Nous allons construire par induction sur k un homéomorphisme h_k de O_k sur \tilde{O}_k , coïncidant avec h_{k-1} sur O_{k-1} , et tel que, pour tout point x de $O_k \cap J$ on ait $h(f(x)) = g(h(x))$; de plus h_k induira un homéomorphisme croissant de $O_k \cap I_i$ sur $\tilde{O}_k \cap \tilde{I}_i$.

Supposons donc h_{k-1} construit. On définit h_k de la façon suivante :

1. si x est un point de $I \setminus J$ alors $h_k(x) = h_0(x)$.
2. si x est un point d'un intervalle $O_k \cap J_j^i$, alors $f(x) \in O_{k-1}$. D'autre part, notons l l'indice tel que $f(x) \in I_l$. Comme f et g ont même type, g induit un homéomorphisme de \tilde{J}_j^i sur \tilde{I}_l .

Le point $h_k(x)$ est l'unique point de \tilde{J}_j^i dont l'image par g est $h_{k-1}(f(x))$.

On vérifie facilement que h_k est un homéomorphisme de O_k sur \tilde{O}_k qui prolonge h_{k-1} et qui conjugue f à g . Pour vérifier que la restriction de h_k à I_i est croissante, il faut juste rappeler que :

1. la numérotation des sous-intervalles J_j^i de I_i , et des sous-intervalles \tilde{J}_j^i de \tilde{I}_i est compatible avec les orientations respectives de I_i et de \tilde{I}_i .
2. La restriction de h_{k-1} à I_l est croissante (par l'hypothèse de récurrence)

3. Les restrictions de f et g à J_j^i et à \tilde{J}_j^i sont des homéomorphismes simultanément croissants ou décroissants sur respectivement I_l et \tilde{I}_l .

Voyons à présent comment construire h : remarquons d'abord que le fait que f soit dilatante permet de vérifier que $\bigcap_0^{+\infty} f^{-k}(J)$ est d'intérieur vide, ou d'une façon équivalente que l'union croissante O_∞ des O_k forme un ouvert dense dans I . De même, l'union croissante \tilde{O}_∞ des \tilde{O}_k est un ouvert dense dans \tilde{I} . La suite des homéomorphismes h_k induit un homéomorphisme h_∞ de O_∞ sur \tilde{O}_∞ , conjuguant f à g , et dont les restrictions aux segments I_i sont strictement croissantes. Il reste à rappeler que toute bijection croissante d'une partie dense d'un intervalle sur une partie dense d'un autre intervalle se prolonge (de façon unique) par continuité en un homéomorphisme entre les intervalles : on en déduit que h_∞ se prolonge par continuité en un homéomorphisme h de I sur \tilde{I} , conjuguant f à g . \square

Remarque. — Dans la proposition 5.1.2, le fait que f soit différentiable et dilatante a été utilisé uniquement pour prouver que le maximal invariant $\bigcap_0^{+\infty} f^{-k}(I)$ est totalement discontinu. La proposition 5.1.2 pourra s'appliquer en remplaçant l'hypothèse de dilatation par l'hypothèse que le maximal invariant est totalement discontinu.

Définition 5.1.3. — Soient I_1, \dots, I_n n segments orientés et I la réunion disjointe de ces segments.

Nous appellerons *application continue markovienne* une application f définie partiellement sur I et vérifiant :

1. le domaine de définition de f est une union finie de sous-segments de I qui contient les extrémités de chacun des segments de I ;
2. la restriction de f à chaque composante connexe du domaine de définition est un homéomorphisme sur l'un des intervalles I_j
3. elle est topologiquement dilatante, c'est-à-dire que le maximal invariant

$$\bigcap_0^{+\infty} f^{-n}(I)$$

est totalement discontinu.

Remarques

1. On a vu que l'homéomorphisme de conjugaison h construit à la proposition 5.4.1 dépend du choix d'un homéomorphisme h_0 défini sur $I \setminus J$. Cependant la restriction de h au maximal invariant $\bigcap_0^{+\infty} f^{-n}(I)$ ne dépend pas du choix de h_0 , et est donc complètement déterminée par le type combinatoire de f .
2. Dans la définition d'application markovienne, certains des segments I_i peuvent être réduits à un point. Chacune des images successives par f de ce segment réduit à un point est encore un segment de \mathcal{I} réduit à un point. Il faut donner un sens à la monotonie (croissance ou décroissance) de la restriction de f à un

de ces segments dégénérés : pour cela on attache à ces points un signe (que l'on peut voir comme une orientation transverse). Pour définir le type combinatoire de f , il faut se fixer l'action de f sur ces signes (si f est définie et monotone au voisinage d'un de ces points, l'action de f est naturellement définie).

En utilisant le fait que f est dilatante (ou l'hypothèse ci-dessus que le maximal invariant est totalement discontinu) on montre facilement qu'un tel intervalle I_i est caractérisé par le fait que pour tout $n \geq 0$ tout segment I_i inclus dans $f^n(I_i)$ ne contient qu'un seul sous-segment J_j^l . Les segments réduits à des points sont donc caractérisés par le type combinatoire. La proposition 5.1.2 s'applique sans modification dans le cas où certains des I_i sont réduits à un point.

5.2. Partitions de Markov géométrisées

Le but de ce paragraphe est de formaliser de façon combinatoire une information géométrique ou topologique.

Soit K un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale f , d'une surface compacte S . On supposera que S est orientée, et que f préserve l'orientation de S .

On suppose que K est de type selle, c'est-à-dire qu'il ne contient aucun attracteur ni aucun répulseur. On a vu alors que (f, K) admet une partition de Markov (R_i) dont les rectangles sont deux-à-deux disjoints, et dont les bords sont formés de deux segments de variétés stables s-bords et de deux segments instables u-bords.

Appelons « verticale » la direction instable et « horizontale » la direction stable. Alors, S étant orientée, une orientation des verticales donne une orientation des horizontales. Pour tout i , on fixe donc un choix d'orientation des verticales, ce qui induit une orientation des horizontales (on parlera parfois d'orientation « du bas vers le haut » pour les verticales et « de gauche à droite » pour les horizontales).

Remarquons que, pour tout rectangle R_i de la partition de Markov, chaque composante connexe des intersections $R_i \cap f(R_j)$ est un rectangle dont les bords instables sont des segments verticaux joignant les côtés stables de R_i et dont les côtés stables sont des segments inclus dans les côtés stables de R_i . On appellera ces rectangles des sous-rectangles verticaux de R_i . Notons v_i le nombre de sous-rectangles verticaux de R_i . En particulier, tout segment horizontal coupe chacune de ces intersections en exactement un segment. L'orientation du segment horizontal induit donc une numérotation canonique des sous-rectangles verticaux de R_i . On les notera donc $V_i^1, \dots, V_i^{v_i}$, V_i^1 étant le sous-rectangle vertical le plus à gauche.

De même chaque composante connexe des intersections $R_i \cap f^{-1}(R_j)$ est un rectangle dont les bords stables sont des segments horizontaux joignant les côtés instables de R_i et dont les côtés instables sont des segments inclus dans les côtés instables de R_i . On appellera ces rectangles des sous-rectangles horizontaux de R_i . Notons h_i le nombre de sous-rectangles horizontaux de R_i . En particulier, tout segment vertical

coupe chacun des sous-rectangles horizontaux en exactement un segment. L'orientation du segment vertical induit donc une numérotation canonique des sous-rectangles horizontaux de R_i . On les notera donc $H_i^1, \dots, H_i^{h_i}, H_i^1$ étant le sous-rectangle horizontal le plus bas.

L'image par f d'un sous-rectangle horizontal est un sous-rectangle vertical. Donc f induit une bijection de l'ensemble $\{H_i^j\}$ des sous-rectangles horizontaux sur l'ensemble $\{V_i^k\}$ des sous-rectangles verticaux : en particulier ces deux ensembles ont même cardinal, ce qui s'exprime par :

$$\sum_i h_i = \sum_i v_i$$

Notons ϕ l'application de $\{H_i^j\}$ dans $\{V_k^l\} \times \{-, +\}$ définie par $\phi(H_i^j) = (V_k^l, +)$ (resp. $\phi(H_i^j) = (V_k^l, -)$) si et seulement si l'image par f du sous-rectangle horizontal H_i^j est le sous-rectangle vertical V_k^l et que la restriction à H_i^j de f préserve (resp. inverse) les orientations des verticales fixées sur R_i et sur R_k .

Ces remarques justifient la définition suivante :

Définition 5.2.1. — On appellera « type géométrique » d'une partition de Markov, ou « partition de Markov géométrisée » la donnée de :

1. Un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (moralement, le nombre de rectangles)
2. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ deux entiers $h_i, v_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, de façon que l'on ait :

$$\sum_i h_i = \sum_i v_i$$

3. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ deux ensembles finis

$$\{H_i^j, j \in \{1, \dots, h_i\}\} \quad \text{et} \quad \{V_i^k, k \in \{1, \dots, v_i\}\}$$

(moralement, les ensembles de sous-rectangles horizontaux et verticaux du rectangle R_i)

4. Une application ϕ de l'ensemble $\{H_i^j, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, h_i\}\}$ dans l'ensemble $\{V_k^l, k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, v_k\}\} \times \{-, +\}$, induisant une bijection par « oubli des signes ».

Remarque. — Un type géométrique de partition de Markov (ou une partition de Markov géométrisée) est la donnée abstraite d'une application entre des ensembles finis, *a priori* sans rapport avec une partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte ; c'est pourquoi dans la définition ci-dessus nous avons indiqué ce que représentent *moralement* les éléments composant le type géométrique. Nous verrons d'ailleurs au chapitre 7 une condition nécessaire à ce qu'un type géométrique abstrait soit le type géométrique d'une partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte.

Le but de toute cette partie est alors de prouver le théorème suivant qui montre la pertinence de la notion de type géométrique d'une partition de Markov.

Théorème 5.2.2 (Présentation du difféomorphisme sur un domaine)

Soient f et g deux difféomorphismes de Smale de deux surfaces compactes, soient K et L deux ensembles hyperboliques saturés pour f et g respectivement, et notons $\Delta(K, f)$ et $\Delta(L, g)$ leurs domaines respectifs. Supposons que K et L admettent des partitions de Markov ayant même type géométrique.

Alors, il existe un homéomorphisme de $\Delta(K, f)$ sur $\Delta(L, g)$ conjuguant f et g .

En d'autres termes, ce théorème signifie qu'une partition de Markov géométrisée détermine (à conjugaison topologique près) la dynamique d'un difféomorphisme sur le domaine d'un ensemble hyperbolique saturé.

5.3. Feuilletages invariants

Le but de ce paragraphe est la construction de feuilletages invariants, stables et instables, qui serviront dans les prochains paragraphes à la construction d'un homéomorphisme de conjugaison des restrictions de deux difféomorphismes de Smale f et g aux domaines de deux ensembles hyperboliques saturés admettant des partitions de Markov de même type géométrique. En général, l'existence de polygones d'arches qui ne sont pas des rectangles (bordés par quatre arches) interdit l'existence de tels feuilletages sur tout le domaine d'un ensemble hyperbolique saturé (en effet le feuilletage stable étant tangent aux arches stables et transverse aux arches instables, son indice sur un tel polygone serait égal à $2 - \frac{k}{2}$, où k est le nombre de côtés du polygone; l'indice étant non nul, le feuilletage doit contenir des singularités dans le polygone). Bien que le voisinage feuilleté ne puisse pas être pris égal au domaine, nous aurons besoin qu'il soit assez grand pour contenir les rectangles de la partition de Markov; c'est ce qu'assure la proposition suivante :

Proposition 5.3.1. — *Soit K un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale f . Il existe un voisinage U de K , invariant par f , et possédant les propriétés suivantes :*

1. *Il existe deux feuilletages transverses F^s et F^u , définis sur U , invariants par f , et tels que $W^s(K)$ soit une union de feuilles de F^s et $W^u(K)$ soit une union de feuilles de F^u .*
2. *Pour toute partition de Markov M de K , l'union des rectangles de M est incluse dans U .*

La démonstration de la proposition 5.3.1 est l'objet de tout ce paragraphe.

Lemme 5.3.2. — *Si U est un voisinage invariant de K alors tous les disques bordés par des polygones d'arches sont inclus dans U , sauf éventuellement un nombre fini d'orbites de disques.*

Démonstration. — Rappelons que (d'après le lemme 2.6.6) toutes les orbites de polygones d'arches sauf un nombre fini sont des quadrilatères, qui bordent des rectangles.

Soit V et \tilde{V} deux voisinages compacts de K contenus dans U , tels que \tilde{V} contient V dans son intérieur.

La compacité de \tilde{V} et l'uniforme transversalité sur \tilde{V} des variétés stables et instables permet de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ avec la propriété suivante : Tout disque $D \subset \tilde{V}$, bordé par deux segments de feuilles stables et deux segments de feuilles instables, et tel qu'un côté stable et un côté instable sont de longueur supérieure à ε , est d'aire plus grande que δ .

Quitte à diminuer δ , on en déduit qu'un rectangle ayant un côté stable inclus dans V et de longueur supérieure à ε , et un côté instable de longueur plus grande que ε est d'aire plus grande que δ : en effet, en utilisant la distance (> 0) entre le bord de \tilde{V} et V , on montre qu'il existe $\bar{\varepsilon}$ tel que tout rectangle du type précédent contient un disque bordé par quatre segments de feuilles stables et instables, contenu dans \tilde{V} et dont un côté stable et un côté instable sont de longueur plus grande que $\bar{\varepsilon}$. Il suffit alors de choisir la constante d'aire δ associée à $\bar{\varepsilon}$.

Choisissons $\varepsilon_2 > 0$ inférieur à la moitié de la distance de K au bord de V . Il existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ tel que, dans toute orbite de segment stable, il en existe un dont la longueur est comprise entre ε_1 et ε_2 (il suffit de choisir ε_1 plus petit que le quotient de ε_2 par un majorant, sur la surface S , de la norme de la différentielle de f^{-1}). Notons δ_1 la constante associée à ε_1 .

Soit C un rectangle bordé par quatre arches, non contenu dans l'ouvert invariant U . Un de ses itérés a sa plus grande arche stable de longueur comprise entre ε_1 et ε_2 : il suffit de considérer la plus petite (dans \mathbb{Z}) puissance ρ de f telle que l'une des arches stables du rectangle $f^\rho(C)$ soit de longueur plus grande que ε_1 . Comme le rectangle $f^\rho(C)$ n'est pas inclus dans $V \subset U$, l'une de ses arches instables est de longueur supérieure à ε_2 . L'aire de $f^\rho(C)$ est donc supérieure à δ_1 . L'aire de S étant finie, il ne peut y avoir plus d'un nombre fini de rectangles d'aire supérieure à δ_1 , ce qui conclut. \square

Le lemme suivant assure l'existence de petits voisinages de K tels que « toute orbite qui en sort n'y rentre plus jamais ».

Lemme 5.3.3. — *Soit K un ensemble hyperbolique saturé pour f . Alors K possède une base de voisinages U_a , tels que tout point $x \in K$, l'ensemble des entiers $i \in \mathbb{Z}$ tels que $f^i(x)$ appartienne à U_a soit un intervalle de \mathbb{Z} .*

Démonstration. — L'existence d'une filtration pour f montre (voir la démonstration de la proposition 1.3.1) que l'on peut trouver deux surfaces compactes à bord S_0 et

\overline{S}_0 contenant K dans leur intérieur, telles que K est le maximal invariant de $S_0 \cap \overline{S}_0$, et que $f(S_0)$ est contenu dans l'intérieur de S_0 et $f^{-1}(\overline{S}_0)$ est contenu dans l'intérieur de \overline{S}_0 . Alors la famille $f^a(S_0) \cap f^{-a}(\overline{S}_0)$ est la base de voisinage de K annoncée. \square

Lemme 5.3.4. — *Tout ensemble hyperbolique saturé K possède un voisinage invariant U muni de deux feuilletages invariants F^s et F^u uniformément transverses sur les compacts de U et tels que $W^s(K)$ et $W^u(K)$ soient des unions de feuilles respectivement de F^s et F^u .*

Démonstration. — On sait l'existence de feuilletages invariants sur un voisinage O de K : Le lecteur trouvera dans [PaTa, pages 26,27] la construction (très simplement exposée) de ces feuilletages dans le cas particulier du fer à cheval de Smale ; la construction générale suit la même idée ; dans [PaTa, appendix 1, page 162], il trouvera un rapide survol de ce sujet ainsi que des références, en particulier [Mo1] et [HPPS]. Il reste à voir que l'on peut choisir un voisinage invariant.

Pour cela on choisit a tel que l'ouvert U_a construit ci-dessus soit inclus dans $f^{-1}(O) \cap O \cap f(O)$. On étend par f à $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_a)$ la restriction à U_a des deux feuilletages invariants. \square

Corollaire 5.3.5. — *On peut choisir l'ouvert feuilleté ci-dessus de façon qu'il contienne tout rectangle bordé par quatre arches.*

Démonstration. — Notons U l'ouvert feuilleté invariant donné par le lemme 5.3.4. D'après le lemme 5.3.2 il contient tous les rectangles bordés par quatre arches sauf ceux d'un nombre fini d'orbites. Choisissons, pour chacune de ces orbites, un rectangle C . Les feuilletages F^s et F^u sont définis au voisinage du bord de C . De plus les côtés stables de C sont des segments de feuilles de F^s , et F^s est transverse aux côtés instables de C . Il n'y a donc pas d'obstruction à prolonger à C la restriction du feuilletage F^s à un petit voisinage compact contenu dans U du bord de C (le feuilletage F^s ne tourne pas quand on parcourt le bord de C). On peut de même prolonger F^u à C , en restant transverse à F^s . Appelons $c \subset C$ le complémentaire dans C du petit voisinage de ∂C sur lequel nous n'avons pas modifié les feuilletages F^s et F^u . Le compact c étant disjoint de $W^s(K) \cup W^u(K)$, n'a qu'un nombre fini d'itérés contenus dans un compact fixé de U . On en déduit que $U \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(c)$ est ouvert. On définit F^s et F^u sur $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(c)$ en prenant l'image par les itérés de f des feuilletages que nous venons de construire sur c . Nous obtenons ainsi deux feuilletages transverses invariants sur $U \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(C)$. On procède de même pour chaque orbite de rectangle non contenu dans U . \square

On conclut la démonstration de la proposition par le lemme suivant :

Lemme 5.3.6. — *Soit U un voisinage de K , invariant par f et contenant tout rectangle bordé par quatre arches. Soit M une partition de Markov pour K .*

Les rectangles de la partition de Markov M sont alors inclus dans U .

Démonstration. — Il suffit de remarquer que U contient $W^s(K) \cup W^u(K)$ et que tout point d'un rectangle de M qui n'est pas sur une variété invariante de K appartient à un rectangle bordé par quatre arches. \square

5.4. Conjugaison définie sur les rectangles d'une partition de Markov

Le but de ce paragraphe est de prouver la proposition suivante.

Proposition 5.4.1. — *Soient f et g deux difféomorphismes de Smale de deux surfaces compactes, et soient K et L des ensembles hyperboliques saturés respectivement de f et g . Soit U_f le voisinage de K invariant par f et muni de deux feuilletages transverses F_f^u et F_f^s invariants par f , dont la proposition 5.3.1 assure l'existence. Soit U_g le voisinage correspondant pour L . On suppose que K et L admettent des partitions de Markov M et \tilde{M} de même type géométrique; rappelons que les rectangles de ces partitions sont inclus dans U_f et U_g .*

Alors il existe un homéomorphisme h de l'union R des rectangles de M sur l'union \tilde{R} des rectangles de \tilde{M} , préservant les restrictions des feuilletages stables et instables, préservant les orientations des verticales et des horizontales, et tel que, pour tout $x \in R \cap f^{-1}(R)$ on ait $h(f(x)) = g(h(x))$.

Démonstration. — Pour tout rectangle R_i notons I_i^u l'espace des feuilles de la restriction de F^s à R_i ; en d'autres termes, I_i^u est le quotient de R_i par F^s . Remarquons que I_i^u est un segment orienté par le choix d'orientation des verticales de R_i . On notera I^u l'union disjointe de ces segments orientés.

Remarquons que f induit naturellement une fonction f^u sur I^u dont le domaine de définition est l'union des segments J_j^i obtenus par passage au quotient des sous-rectangles horizontaux H_j^i par F^s : en effet l'image d'un segment de feuille de F^s contenue dans H_j^i est un segment de feuille d'un sous-rectangle vertical V_l^k . De plus la projection de V_l^k sur I_k^u est une surjection. On en déduit que la restriction de f^u à J_j^i est une bijection sur I_k^u : il manque juste à f^u d'être dilatante pour qu'elle soit markovienne. Cependant, le feuilletage F^s n'est pas *a priori* différentiable : les segments I^u n'ont donc pas de structure différentiable naturelle. En utilisant le fait que le difféomorphisme de Smale f dilate uniformément les vecteurs tangents au feuilletage instable F^u , on vérifie que le maximal invariant de f^u est totalement discontinu. La fonction f^u est donc une application continue markovienne (voir la définition 5.1.3).

Remarquons enfin que le type combinatoire σ^u de f^u est déterminé par le type géométrique de la partition ϕ de Markov M : $\sigma^u(J_j^i) = (I_k^u, \varepsilon)$ si $\phi(H_j^i) = (V_l^k, \varepsilon)$.

Définissons de même l'application continue markovienne g^u , par passage au quotient des rectangles \tilde{R}_i par le feuilletage \tilde{F}^s . Les applications f^u et g^u ont même type combinatoire, donc d'après la proposition 5.1.2 et la remarque qui la suit, il existe un homéomorphisme $h^u : I^u \rightarrow \tilde{I}^u$ induisant un homéomorphisme croissant de I_i^u sur \tilde{I}_i^u , et conjuguant f^u à g^u .

On définit de même l'application continue markovienne $(f^{-1})^s$ définie sur I^s , union des quotients des rectangles R_i par F^u . Les fonctions $(f^{-1})^s$ et $(g^{-1})^s$ étant de même type, il existe un homéomorphisme h^s de I^s sur \tilde{I}^s qui les conjugue.

Pour tout point $x \in R_i$ on note x^u et x^s les projections de x sur I^u et I^s suivant les feuilletages F^s et F^u . On note $h(x)$ l'unique point de \tilde{R}_i dont les projections sont $h^u(x^u)$ et $h^s(x^s)$. L'application h ainsi définie est un homéomorphisme de l'union des R_i sur l'union des \tilde{R}_i , préservant l'orientation des verticales et des horizontales. De plus, pour tout i, j, k, l l'image par h du sous-rectangle H_j^i est le sous-rectangle \tilde{H}_j^i , et $h(V_l^k) = \tilde{V}_l^k$.

Il reste à présent à vérifier que h est bien une conjugaison des restrictions de f et g aux rectangles. En d'autres termes, nous devons montrer que, si x est un point d'un rectangle R_i tel que $f(x)$ appartient à un rectangle R_k alors $h(f(x)) = g(h(x))$. Un tel point x appartient à un sous-rectangle horizontal H_j^i , et son image $y = f(x)$ appartient à un sous-rectangle vertical V_l^k . Notons $\tilde{x} = h(x) \in \tilde{H}_j^i$ et $\tilde{y} = h(y) \in \tilde{V}_l^k$. Comme la partition de Markov $\{\tilde{R}_i\}$ a même type géométrique que $\{R_i\}$, l'image $g(\tilde{x})$ appartient à \tilde{V}_l^k .

L'égalité $\tilde{y}^u = h^u(f^u(x^u)) = g^u(h^u(x^u))$ implique que \tilde{y} et $g(\tilde{x})$ appartiennent au même segment horizontal de \tilde{R}_k .

Notons $v(\tilde{x})$ le segment vertical passant par \tilde{x} du rectangle \tilde{R}_i . L'image par g de ce segment peut contenir plusieurs segments verticaux de \tilde{R}_k . Cependant $g(v(\tilde{x})) \cap \tilde{R}_k$ contient une unique composante v_l dans \tilde{V}_l^k .

De l'égalité $\tilde{x}^s = h^s((f^{-1})^s(y^s)) = (g^{-1})^s(h^s(y^s))$ on déduit que l'image par g^{-1} du segment vertical de \tilde{R}_k passant par \tilde{y} est incluse dans le segment vertical $v(\tilde{x})$. De plus le point \tilde{y} appartient au sous-rectangle vertical V_l^k , il appartient donc à v_l . L'image par g^{-1} du segment vertical de \tilde{R}_k passant par $g(\tilde{x})$ est elle aussi incluse dans $v(\tilde{x})$. Comme $g(\tilde{x})$ appartient aussi à V_l^k , on en déduit de même qu'il appartient à v_l . On vient de vérifier que \tilde{y} et $g(\tilde{x})$ appartiennent au même segment vertical de R_k ; comme ils appartiennent également au même segment horizontal, ils sont égaux. \square

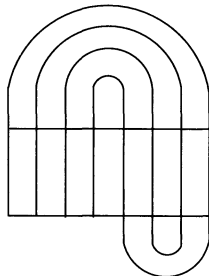
Remarques

1. La figure 2 exhibe deux partitions de Markov d'ensembles hyperboliques saturés (K, f) et (L, g) qui n'ont pas même type géométrique bien que les dynamiques unidimensionnelles f^u et $(f^{-1})^s$ utilisées dans la preuve de la proposition 5.4.1 soient de même type combinatoire que g^u et $(g^{-1})^s$. Dans un pareil cas, l'homéomorphisme $h = (h^s, h^u)$ défini sur les rectangles n'est pas une conjugaison des restrictions de f et g aux rectangles.

On ne peut pas construire un tel contre-exemple si la matrice d'incidence de la partition de Markov a tous ses coefficients égaux à 0 ou 1.

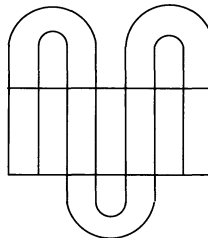
f de type géométrique :

$$\begin{array}{ll} H^1 \rightarrow (V^1, +) & H^3 \rightarrow (V^3, +) \\ H^2 \rightarrow (V^4, -) & H^4 \rightarrow (V^2, -) \end{array}$$



g de type géométrique :

$$\begin{array}{ll} H^1 \rightarrow (V^1, +) & H^3 \rightarrow (V^3, +) \\ H^2 \rightarrow (V^2, -) & H^4 \rightarrow (V^4, -) \end{array}$$



$f^u, g^u, (f^{-1})^s, (g^{-1})^s$ ont même type combinatoire :
 $(J^1 \rightarrow +, J^2 \rightarrow -, J^3 \rightarrow +, J^4 \rightarrow -)$

FIGURE 2. Partitions de Markov induisant des mêmes dynamiques verticales et horizontales

2. La proposition 5.4.1 montre que le fait qu'un rectangle R_i d'une partition de Markov soit réduit à un segment stable, ou instable, ou à un point, est déterminé par le type géométrique de la partition de Markov.
3. L'homéomorphisme h construit ci-dessus n'est pas unique : il dépend des feuilletages F^s et F^u . De plus, d'après la remarque suivant la proposition 5.1.2, les homéomorphismes h^u et h^s peuvent être choisis arbitrairement sur les intervalles correspondant à l'espace séparant deux sous-rectangles horizontaux ou verticaux successifs.
4. La restriction de h à K ne dépend pas du choix de h .
5. La proposition 5.4.1 est valable pour des partitions de Markov génératrices d'ensembles hyperboliques qui ne sont pas saturés.

5.5. Extension de la conjugaison au domaine

Soit K et \tilde{K} deux ensembles hyperboliques saturés de deux difféomorphismes de Smale f et \tilde{f} sur deux surfaces S et \tilde{S} . On suppose que K et \tilde{K} admettent des partitions de Markov $\{R_i\}$ et $\{\tilde{R}_i\}$, $i = 1, \dots, k$, ayant même type géométrique $(\{h_i\}, \{v_i\}, \phi)$. Le paragraphe précédent a montré l'existence d'un homéomorphisme conjuguant les restrictions de f et \tilde{f} à l'union des rectangles. Dans ce paragraphe, nous allons chercher à étendre cette conjugaison à tout le domaine de K et \tilde{K} . Un premier pas sera de l'étendre à l'union des itérés par f des rectangles R_i . Pour pouvoir

ainsi pousser la conjugaison par f , il faut assurer « qu'une orbite qui sort de l'union des rectangles n'y rentre jamais » : c'est ce qu'assure la proposition suivante.

Proposition 5.5.1. — *Soit R l'union des rectangles d'une partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé K . Soit $x \in R$ tel que $f(x)$ n'appartient pas à R alors, pour tout $n > 0$, $f^n(x)$ n'appartient pas à R .*

Démonstration. — Soit $x_0 \in R$ tel que $f(x_0) \notin R$. Notons C l'adhérence de la composante connexe de $R \setminus f^{-1}(R)$ qui contient x_0 : c'est un rectangle (dégénéré si et seulement si le rectangle contenant x_0 est réduit à un segment instable), dont le bord instable est formé de deux u -arches a_1 et a_2 (éventuellement confondues dans le cas dégénéré) ayant leurs extrémités sur deux sous-rectangles H_j^i et H_{j+1}^i successifs, et dont le bord stable $\partial^s(C)$ est formé d'un des côtés stables de H_j^i et d'un des côtés stables de H_{j+1}^i . Nous allons vérifier que pour tout $n > 0$, $f^n(C) \cap R$ est égal à $f^n(\partial^s(C))$ (voir la figure 3).

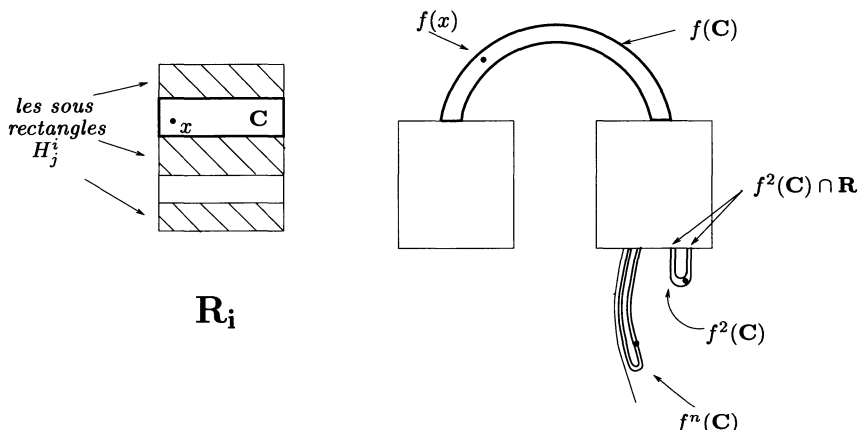


FIGURE 3. Itérés d'un « trou » entre deux sous-rectangles horizontaux

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.5.2. — *Soit a une u -arche d'intérieur disjoint de R , alors $f(a)$ est une u -arche d'intérieur disjoint de R .*

Démonstration du lemme 5.5.2. — Remarquons que a a ses extrémités x et y sur le bord stable de R qui est invariant par f , donc $f(a)$ est une arche ayant ses extrémités sur le bord stable de R . De plus l'intérieur d'une arche est soit inclus dans R soit disjoint de R .

Si l'intérieur de $f(a)$ n'est pas disjoint de R alors $f(a)$ est un rail contenu dans un rectangle R_i , joignant $f(x)$ à $f(y)$. Remarquons que x et donc $f(x)$ sont éléments de $K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R)$. En particulier il existe un sous-rectangle vertical V_j^i qui contient

$f(x)$. Ce sous rectangle vertical contient le rail instable de R_i qui passe par $f(x)$, en d'autres termes, $f(a) \subset V_j^i$. En conséquence, a est incluse dans $f^{-1}(V_j^i)$ qui est un sous-rectangle horizontal inclus dans un R_j , ce qui contredit le fait que a est d'intérieur disjoint de R . \square

Voyons à présent comment conclure la démonstration de la proposition 5.5.1.

Remarquons que $C \cap W^s(K) = \partial^s(C)$. En effet, comme C est un rectangle, tout segment stable qui le rencontre est un rail d'extrémités deux points de K . Or $C \setminus \partial^s(C)$ est disjoint de K (maximal invariant de R) car son image est par construction disjointe de R .

De plus tout itéré positif de $\partial^s(C)$ par f est inclus dans $\partial^s(R)$ et donc dans R .

En outre, $W^u(K) \cap C$ est une union d'u-arches joignant les deux composantes de $\partial^s(C)$. L'image par f d'une telle u-arche est une u-arche ayant ses extrémités dans R , mais d'intérieur disjoint de R . D'après le lemme 5.5.2, les itérés positifs d'une telle arche sont tous d'intérieur disjoint de R .

Tout point $x \in C \setminus (\partial^s(C) \cup W^u(K))$ appartient à l'intérieur d'un rectangle r bordé par deux arches stables contenues dans $\partial^s(C)$ et deux arches instables a_1 et a_2 joignant leurs extrémités. Supposons par l'absurde qu'il existe un itéré positif $f^n(x)$ appartenant à un R_i . Comme x (et donc $f^n(x)$) n'appartient pas à $W^s(K) \cup W^u(K)$, il existe un rectangle r' , inclus dans R_i , bordé par quatre arches, et contenant $f^n(x)$ dans son intérieur. Remarquons que deux rectangles bordés par quatre arches sont confondus dès que leurs intérieurs sont non-disjoints. On en déduit que $f^n(r)$ (et donc $f^n(a_1)$) est inclus dans R_i , ce qui est en contradiction avec le fait que $f^n(a_1)$ est d'intérieur disjoint de R . \square

Corollaire 5.5.3. — *Soit K et \tilde{K} deux ensembles hyperboliques saturés de deux difféomorphismes de Smale f et \tilde{f} sur deux surfaces S et \tilde{S} . On suppose que K et \tilde{K} admettent des partitions de Markov $\{R_i\}$ et $\{\tilde{R}_i\}$, $i = 1, \dots, k$, ayant même type géométrique. Notons $R = \bigcup_i (R_i)$ et $\tilde{R} = \bigcup_i (\tilde{R}_i)$. Pour tout $n > 0$ on notera $R^n = \bigcup_{-n}^n (f^i(R))$ et $\tilde{R}^n = \bigcup_{-n}^n (\tilde{f}^i(\tilde{R}))$.*

Soit $h: R \rightarrow \tilde{R}$ un homéomorphisme conjuguant les restrictions à R et \tilde{R} de f et \tilde{f} . Pour tout $n > 0$, il existe un unique homéomorphisme $h_n: R^n \rightarrow \tilde{R}^n$ conjuguant les restrictions à R^n et \tilde{R}^n de f et \tilde{f} et coïncidant avec h sur R .

Démonstration. — Pour tout $x \in R^n$ il existe i tel que $f^i(x) \in R$. Comme h conjugue les restrictions de f et \tilde{f} à R et \tilde{R} , si $f^{i+1}(x)$ appartient aussi à R , on a

$$\tilde{f}^{-i}(h(f^i(x))) = \tilde{f}^{-i-1}(h(f^{i+1}(x))).$$

D'après la proposition 5.5.1, pour tout $x \in R^n$ l'ensemble des entiers $i \in \mathbb{Z}$ tels que $f^i(x) \in R$ forme un intervalle de \mathbb{Z} : on en déduit que le point $\tilde{f}^{-i}(h(f^i(x)))$ ne dépend pas du choix de i dans cet intervalle, et on note donc ce point $h_n(x)$. On vérifie que h_n est un homéomorphisme prolongeant h_{n-1} , et conjuguant f et \tilde{f} . \square

Nous allons à présent chercher à étendre à l'adhérence de l'union croissante des R^n l'homéomorphisme de conjugaison h . Nous verrons que l'extension par continuité des homéomorphismes h_n nécessite de choisir de façon particulière l'homéomorphisme h . Pour comprendre cela nous devons d'abord analyser en quels points de $\Delta(K)$ il peut y avoir des problèmes pour étendre la suite h_n par continuité.

Lemme 5.5.4. — *Soit $x_i \in R, i \in \mathbb{N}$ une suite de points vérifiant $f(x_i) \notin R$, et soit $n_i > 0$ une suite d'entiers convergeant vers l'infini. On suppose que la suite $f^{n_i}(x_i)$ converge vers un point $y \in \Delta(K)$. Alors y appartient à l'une des séparatrices libres instables d'un point périodique s -bord p de K , ou est égal à ce point périodique s -bord.*

Si de plus la suite x_i converge vers un point x , alors $x \in W^s(p)$

Démonstration. — Remarquons que les points x_i appartiennent à une union finie de rectangles dont l'intersection avec $W^s(K)$ est incluse dans leurs côtés stables, et que ces côtés stables sont contenus dans des séparatrices stables de points périodiques bord. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les x_i appartiennent au même rectangle r . D'après le corollaire 2.5.4, le point y ou bien est égal à l'un des points périodiques s -bord p dont la variété stable porte un côté stable de r , ou bien appartient à l'une des séparatrices instables libres issues de p . Ceci montre la première partie du lemme.

Notons σ_i le segment de feuille de F^s passant par x_i et inclus dans r . Il coupe le bord instable de r en deux points x'_i et x''_i qui sont sur des u -arches. Remarquons que f contracte uniformément les vecteurs tangents à F^s , sur toute partie compacte de l'ouvert où F^s est défini. Or la suite $f^{n_i}(x_i)$ converge vers y qui appartient à cet ouvert. On en déduit que la longueur des segments $f^{n_i}(\sigma_i)$ tend vers 0 : pour conclure le lemme 5.5.4 il suffit à présent d'appliquer la proposition 2.5.2 à l'une des deux suites x'_i et x''_i . \square

On en déduit que l'union de $\bigcup_0^\infty R^n$ et des séparatrices libres est fermée dans $\Delta(K)$; on note R^∞ cette union.

Nous avons vu que l'homéomorphisme h_{n+1} , défini sur R^{n+1} , prolonge h_n ; ceci permet de définir une unique application sur l'union croissante des R^n , que nous pourrions étendre à R^∞ par un choix d'homéomorphisme de conjugaison sur les séparatrices libres. L'ensemble des points où une telle application peut n'être pas continue, est réduit à l'union des séparatrices libres : c'est pourquoi nous allons d'abord fixer l'homéomorphisme de conjugaison h_{libre} sur l'union des séparatrices libres, puis nous choisirons l'homéomorphisme $h: R \rightarrow \tilde{R}$ de façon compatible avec h_{libre} , et nous vérifierons alors que cet homéomorphisme s'étend continûment à l'adhérence dans $\Delta(K)$ de l'union des R^n .

Remarque. — Soit K et \tilde{K} deux ensembles hyperboliques saturés, de f et de \tilde{f} , admettant des partitions de Markov géométriques $\{R_i\}$ et $\{\tilde{R}_i\}$ qui sont de même type géométrique ϕ . Alors le type géométrique ϕ induit une bijection naturelle entre

les ensembles de séparatrices libres de K et de \tilde{K} . Nous la noterons ϕ_{libre} . De plus ϕ_{libre} conjugue les permutations induites par f et \tilde{f} sur leur ensemble respectif de séparatrices libres.

En effet, d'après la proposition 5.4.1, il existe un homéomorphisme h de l'union des rectangles R_i sur l'union des \tilde{R}_i qui conjugue les restrictions de f et \tilde{f} à ces unions de rectangles. Soit x un point périodique de f , alors $h(x)$ est un point périodique de \tilde{f} . De plus x et $h(x)$ sont de même type (s-bord, u-bord, double s-bord, coin...). La restriction de $h = (h^s, h^u)$ à K ne dépend pas du choix de h^s et de h^u sur les intervalles qui correspondent aux sous-rectangles (verticaux ou horizontaux) successifs. On en déduit que le type géométrique ϕ de la partition de Markov induit une bijection naturelle ϕ_{per} de l'ensemble des points périodiques bord de f sur ceux de \tilde{f} . Pour en déduire une bijection de leurs ensembles de séparatrices libres stables, il reste à considérer le cas des points double u-bord (qui possèdent deux séparatrices stables). Dans ce cas, le choix de l'orientation des horizontales des rectangles revient à fixer une orientation transverse du rectangle dégénéré et permet de distinguer les deux séparatrices. La bijection annoncée associera à la séparatrice droite ou gauche de x la séparatrice respectivement droite ou gauche de $h(x)$.

Le fait que les partitions de Markov ont même type géométrique, assure que ce choix commute avec l'itération par f et par \tilde{f} .

Lemme 5.5.5. — *Il existe un homéomorphisme h_{rmlibre} de l'union des séparatrices libres de (K, f) sur l'union de celles de (\tilde{K}, \tilde{f}) qui conjugue les restrictions de f et de \tilde{f} à ces ensembles, et qui induit la bijection ϕ_{libre} sur les ensembles des séparatrices libres.*

Démonstration. — La démonstration est sans surprise : pour chaque orbite de séparatrices stables (pour se fixer les idées) on choisit une séparatrice W . Alors W et $\phi_{\text{libre}}(W)$ ont même période n et les restrictions de f^n et \tilde{f}^n à ces séparatrices sont deux contractions, qui sont donc conjuguées par un homéomorphisme de W sur $\phi_{\text{libre}}(W)$; il reste juste à propager par f et \tilde{f} cet homéomorphisme sur toute l'orbite de W . \square

La proposition 5.4.1 a construit un homéomorphisme de conjugaison h de R dans \tilde{R} , produit de deux homéomorphismes h^s et h^u définis sur les quotients des rectangles I_i^s et I_i^u . Les homéomorphismes h^s et h^u dépendent du choix de ces homéomorphismes sur $I_i^s \setminus \bigcup_j J_j^i$. Nous allons à présent fixer ce choix de façon que h_{libre} soit le prolongement par continuité de h . Pour cela nous aurons besoin de définir les homéomorphismes d'holonomie des feuilletages F^s et F^u .

Reprenons donc précisément ces notations. On note I^u le quotient de R par la restriction à cet ensemble du feuilletage F^s . On note $J^u \subset I^u$ les segments correspondant au quotient des sous-rectangles horizontaux H_j^i . Enfin, notons \mathcal{A}^u l'union disjointe des

adhérences des composantes connexes de $I^u \setminus J^u$: c'est une union finie de segments. On définit de même \tilde{I}^u , \tilde{J}^u et $\tilde{\mathcal{A}}^u$.

Rappelons que le difféomorphisme f induit une application markovienne f^u de J^u sur I^u .

Rappelons enfin que le type topologique de f^u et de \tilde{f}^u induit une bijection de l'ensemble des extrémités de J^u sur celles de \tilde{J}^u , et donc de l'ensemble des extrémités de \mathcal{A}^u sur celles de $\tilde{\mathcal{A}}^u$, et que cette bijection naturelle induit une bijection sur les ensembles de composantes connexes de \mathcal{A}^u et de $\tilde{\mathcal{A}}^u$.

Soit $A \subset \mathcal{A}^u$ l'adhérence d'une composante connexe de $I^u \setminus J^u$. Rappelons qu'elle est naturellement orientée. Notons a^- et a^+ ses extrémités inférieure et supérieure. Remarquons que A s'identifie à un segment transverse à F^s . On peut donc parler d'homéomorphisme d'holonomie de F^s défini sur des intervalles de A . Remarquons que a^- est un point s-bord, donc appartient à la variété stable d'un point périodique $p(a^-)$. Remarquons que les feuilles de F^s correspondant à un point x proche de a^- coupent une séparatrice libre $W(a^-)$ du point périodique $p(a^-)$, en un point $H(x)$ proche de $p(a^-)$. On définit de même H au voisinage de a^+ .

On définit ainsi l'application d'holonomie H , au voisinage de chaque extrémité des composantes de \mathcal{A}^u .

Lemme 5.5.6. — *Notons \tilde{a}^- l'extrémité de $\tilde{\mathcal{A}}^u$ correspondant à a^- . Alors, la séparatrice $\tilde{W}(\tilde{a}^-)$ est $h_{\text{libre}}(W(a^-))$.*

Démonstration. — En effet a^- est l'extrémité supérieure d'un segment J_j^i , et par définition \tilde{a}^- est l'extrémité de \tilde{J}_j^i . Alors f^u et \tilde{f}^u sont de même type combinatoire σ , et $\sigma(J_j^i) = \sigma(\tilde{J}_j^i)$ implique que $f(a^-)$ et $\tilde{f}(\tilde{a}^-)$ sont simultanément extrémité supérieure ou inférieure des segments I_k et \tilde{I}_k . En itérant ce procédé, $(f^u)^n(a^-)$ et $(\tilde{f}^u)^n(\tilde{a}^-)$ sont extrémités simultanément supérieure ou inférieure de segments de même indice. Voyons que l'orbite par f^u de a^- détermine le point périodique dont la variété stable contient a^- . L'orbite de a^- est prépériodique (l'ensemble des extrémités de I est fini) et soit p la période. Pour n assez grand, $(f^u)^{n-p}(a^-)$ est un point fixe de $(f^u)^p$ indépendant de n . Ce point correspond à un côté stable d'un rectangle R_l , dont l'image par f^p est incluse dans lui-même : il contient donc un unique point périodique qui est $p(a^-)$. Ce point ayant été déterminé par le type combinatoire de f^u , le point $p(\tilde{a}^-)$ (obtenu par la même construction) est le point périodique $\phi_{\text{per}}(p(a^-))$. Ceci détermine la séparatrice instable libre $W(a^-)$ si le point $p(a^-)$ n'est pas double-bord. Dans le cas double bord le type combinatoire de f^u permet de suivre les signes tout au long de la construction et donc encore de déterminer $W(a^-)$. \square

Définition 5.5.7. — *On dira qu'un homéomorphisme $h^u : I^u \rightarrow \tilde{I}^u$, qui conjugue f^u et \tilde{f}^u , est compatible avec l'homéomorphisme h_{libre} s'il vérifie la relation $h_{\text{libre}} \circ H = \tilde{H} \circ h^u$ sur un voisinage dans \mathcal{A}^u de chacune des extrémités de \mathcal{A}^u .*

On définit de façon analogue la notion d'homéomorphisme h^s compatible avec h_{libre} .

(cette notion dépend bien sûr du choix des feuilletages F^s et F^u).

Lemme 5.5.8. — *Il existe des homéomorphismes h^u , compatibles avec h_{libre} .*

Démonstration. — Il suffit de définir h^u sur chaque composante A de \mathcal{A}^u . Notons \tilde{A} la composante correspondante de $\tilde{\mathcal{A}}^u$. Le lemme 5.5.6 permet de construire un homéomorphisme croissant h_A d'un voisinage des extrémités de A sur un voisinage des extrémités de \tilde{A} vérifiant la relation $h_{\text{libre}} \circ H = \tilde{H} \circ h_A$. Il suffit alors de prolonger h_A à A . \square

Lemme 5.5.9. — *Soit $h = (h^s, h^u): R \rightarrow \tilde{R}$ un homéomorphisme de conjugaison de f et \tilde{f} . Si les homéomorphismes h^s et h^u sont compatibles avec h_{libre} , alors h se prolonge de façon unique en un homéomorphisme h_∞ de l'adhérence dans $\Delta(K)$ de $\bigcup_n R^n$ sur l'adhérence de $\bigcup_n \tilde{R}^n$ conjuguant f à \tilde{f} . De plus, h coïncide avec h_{libre} sur l'union des séparatrices libres.*

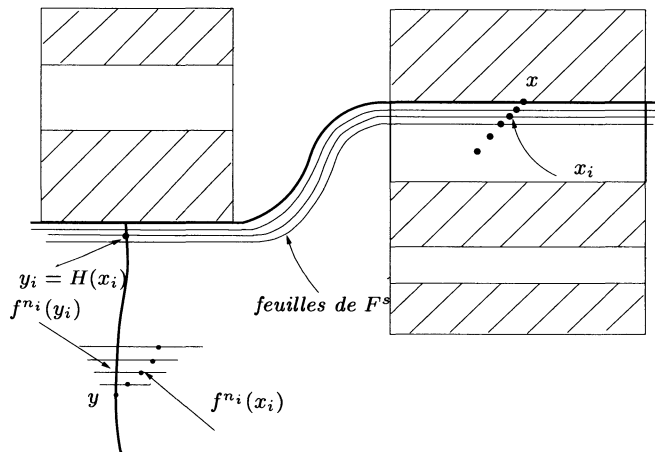


FIGURE 4. Continuité de h_∞ près d'une séparatrice libre

Démonstration. — Il faut montrer que si x_i est une suite de points de R telle que $f(x_i) \notin R$ est si n_i est une suite convergente vers $+\infty$ telle que la suite $f^{n_i}(x_i)$ converge vers un point y de $\Delta(K)$ (on a vu que y appartient à l'union des séparatrices libres instables), alors $\tilde{f}^{n_i}(h(x_i))$ converge vers le point $h_{\text{libre}}(y)$. Quitte à choisir une sous-suite on peut supposer que les x_i convergent vers un point x . D'après le lemme 5.5.4, x appartient à la variété stable du point périodique dont est issue la séparatrice libre qui porte y .

Notons $y_i = H(x_i)$. Remarquons que $f^{n_i}(y_i) = H(f^{n_i}(x_i))$ car le feuilletage F^s est invariant par f . On en déduit que la suite $f^{n_i}(y_i)$ converge vers y (voir la figure 4).

Notons $\tilde{y}_i = h_{\text{libre}}(y_i)$. Alors la suite $\tilde{f}^{n_i}(\tilde{y}_i) = h_{\text{libre}}(f^{n_i}(y_i))$ (puisque h_{libre} conjugue f à \tilde{f}) converge vers $\tilde{y} = h_{\text{libre}}(y)$. D'autre part, comme h^u est compatible avec h_{libre} on a : $\tilde{H}(h(x_i)) = h_{\text{libre}}(H(x_i)) = \tilde{y}_i$. De plus, par invariance du feuilletage \tilde{F}^s , on a $\tilde{H}(\tilde{f}^{n_i}(h(x_i))) = \tilde{f}^{n_i}(\tilde{y}_i)$, et converge donc vers $h_{\text{libre}}(y)$. Il reste à remarquer que les segments de feuilles stables $[\tilde{f}^{n_i}(h(x_i)), \tilde{f}^{n_i}(\tilde{y}_i)]^s$ sont les images par \tilde{f}^{n_i} des segments $[h(x_i), \tilde{y}_i]^s$. Or ces derniers sont de longueur bornée puisqu'ils convergent vers le segment de feuille stable joignant $h(x)$ au point périodique. Comme \tilde{f} contracte uniformément les vecteurs tangents à \tilde{F}^s et que n_i tend vers l'infini, on en déduit que les longueurs des segments $[\tilde{f}^{n_i}(h(x_i)), \tilde{f}^{n_i}(\tilde{y}_i)]^s$ convergent vers 0 ce qui implique que la suite $\tilde{f}^{n_i}(h(x_i))$ converge vers \tilde{y} . \square

La construction de h_∞ et l'invariance par f et \tilde{f} des feuilletages F^u, F^s et \tilde{F}^u, \tilde{F}^s impliquent de façon directe le corollaire suivant

Corollaire 5.5.10. — *Soit β une arche instable et x l'une de ses extrémités. Notons $S(x)$ la séparatrice instable libre issue du point périodique de $W^s(x)$ (et partant du même côté que β). Notons $\tilde{\beta}$ l'arche $h_\infty(\beta)$ et $\tilde{x} = h_\infty(x)$, et $S(\tilde{x})$ la séparatrice correspondante. Notons H_x et $\tilde{H}_{\tilde{x}}$ les holonomies des feuilletages H^s et \tilde{H}^s définies d'un voisinage de x et \tilde{x} sur les séparatrices instables libres $S(x)$ et $S(\tilde{x})$. Alors il existe un voisinage de x dans β tel que pour tout point y de ce voisinage on ait :*

$$h_{\text{libre}}(H_x(y)) = \tilde{H}_{\tilde{x}}(h_\infty(y))$$

(Il suffit en effet de ramener par une puissance de f l'arche β dans un des rectangles de la partition de Markov).

Rappelons que l'on a noté R^∞ l'union de $\bigcup_n R^n$ et des séparatrices libres de K , nous avons vu que R^∞ est fermé dans $\Delta(K)$. Remarquons qu'il faut peut-être ajouter un nombre fini de séparatrices libres double-bord à l'adhérence dans $\Delta(K)$ de $\bigcup_n R^n$ pour obtenir R^∞ . On complète donc h_∞ sur R^∞ par h_{libre} sur ces séparatrices double-bord. On obtient ainsi un homéomorphisme de R^∞ que l'on appelle encore h_∞ .

Lemme 5.5.11. — *$\delta(K) \setminus R^\infty$ est une union d'intérieurs de polygones d'arches dont les orbites pour f sont en nombre fini.*

Démonstration. — Le fermé invariant R^∞ contient $W^s(K) \cup W^u(K)$. Donc $\delta(K) \setminus R^\infty$ est une union d'intérieurs de polygones d'arches : il reste à montrer que les orbites de ces polygones sont en nombre fini. Nous avons déjà vu que les orbites des polygones d'arches qui ne sont pas des rectangles sont en nombre fini : il nous reste donc à montrer que l'ensemble des orbites des rectangles d'arches non-inclus dans R^∞ sont en nombre fini. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 5.5.12. — *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout rectangle bordé par des arches et possédant un côté stable et un côté instable de longueur inférieure à ε est inclus dans un rectangle R_i .*

Démonstration. — Pour cela, rappelons que nous avons choisi les rectangles de la partition de Markov deux à deux disjoints : on en déduit que toute arche assez petite a ses deux extrémités sur le même rectangle. De la structure de produit local de K on déduit que toute arche assez petite, ayant ses extrémités sur un rectangle R_i , est incluse dans R_i (voir la figure 5). Il reste juste à constater qu'un rectangle d'arches ayant un côté stable et un côté instable inclus dans R_i est lui-même inclus dans R_i . \square

*situation impossible :
une suite d'arches de longueur
tendant vers 0, non-incluses dans R_i*

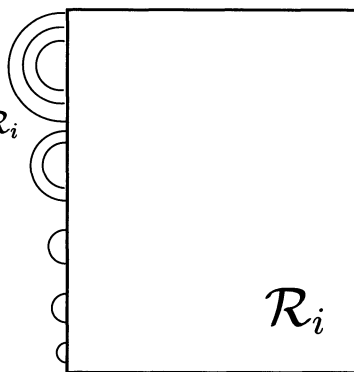


FIGURE 5. Les petites arches sont incluses dans les rectangles

Fin de la démonstration du lemme 5.5.11. — On choisit $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$ de façon que le rapport $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ soit supérieur à la constante d'expansivité de f ; ainsi, toute arche instable possède un itéré par f dont la longueur est comprise entre ε_1 et ε_2 . On a montré dans la démonstration du lemme 5.3.2 que l'ensemble des rectangles d'arches possédant un côté stable et un côté instable de longueur supérieure à ε_1 est fini. On en déduit que les orbites de rectangles d'arches, sauf éventuellement pour un nombre fini d'entre elles, possèdent un itéré ayant un côté stable et un instable de longueur inférieure à ε : cet itéré est donc inclus dans un rectangle R_i d'après le lemme 5.5.12. \square

Nous sommes désormais prêts à montrer :

Lemme 5.5.13. — *L'homéomorphisme h_∞ se prolonge en un homéomorphisme h_δ de $\delta(K)$ sur $\delta(\tilde{K})$ conjuguant f et \tilde{f} .*

Démonstration. — D'après le lemme 5.5.11, il suffit de compléter h_∞ sur l'intérieur de polygones dont les orbites sont en nombre fini : on peut donc compléter h_∞ orbite par orbite (de polygones).

Soit P un polygone d'arches de K , bordant un disque (encore noté P) non-inclus dans R^∞ . Remarquons que ∂P est inclus dans R^∞ , et que $h_\infty(\partial P)$ est un polygone d'arches de \tilde{K} qui borde un disque \tilde{P} . De plus P et \tilde{P} ont même nombre de côtés stables. Rappelons enfin que les feuilletages F^s et F^u sont définis au voisinage de ∂P , et de même \tilde{F}^s et \tilde{F}^u sont définis au voisinage de $\partial \tilde{P}$.

Définition 5.5.14. — On dira qu'un homéomorphisme $h_P: P \rightarrow \tilde{P}$ est compatible avec h_∞ s'il coïncide avec h_∞ sur ∂P et s'il existe un voisinage de ∂P et de $\partial \tilde{P}$ tel que la restriction de h_∞ à ces voisinages conjugue les feuilletages F^s et F^u aux feuilletages \tilde{F}^s et \tilde{F}^u .

Lemme 5.5.15. — Il existe un homéomorphisme $h_P: P \rightarrow \tilde{P}$ compatible avec h_∞ .

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'au voisinage d'un coin x du polygone d'arches, h_P est uniquement déterminé par sa restriction aux arches issues de ce point et par l'hypothèse de conjugaison des feuilletages : tout point y proche de x se projette le long des feuilles de F^u et F^s sur les arches stable et instable issues de x ; notons y^s et y^u ses projections. Alors $h_P(x)$ est le point d'intersection proche de \tilde{P} des feuilles instables et stables passant par $h_\infty(y^s)$ et $h_\infty(y^u)$.

Voyons comment définir h_P au voisinage d'un de ses côtés, stable pour se fixer les idées. Soit α un côté stable de P joignant les coins x et x' . Notons β et β' les arches instables issues de x et de x' . Soit y un point proche de α . Sa projection y^s sur α le long de F^u est bien définie, par contre il a deux projections naturelles le long de F^s sur le bord instable de P : une (notée y^u) sur β et une (notée $(y^u)'$) sur β' (voir la figure 6). Pour définir $h_P(y)$ il suffit de vérifier que $h_\infty(y^u)$ et $h_\infty((y^u)')$ sont sur

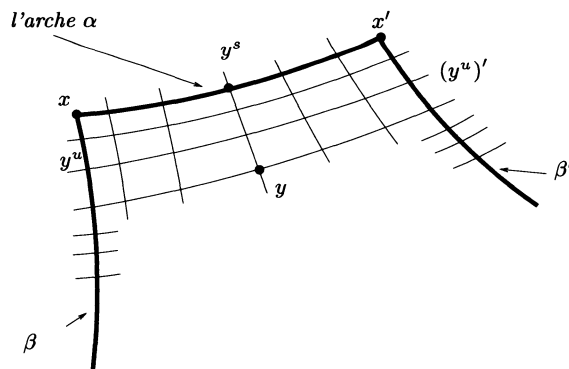


FIGURE 6. Au voisinage d'un côté stable : les deux projections sur les côtés instables

la même feuille de \tilde{F}^s : Notons H et H' les holonomies du feuilletage F^s définies au voisinage de x et x' , et à valeurs sur la séparatrice instable libre $S(x) = S(x')$. La

notion même d'holonomie implique que $H(y^u) = H'((y^u)')$. On définit de même les holonomies \tilde{H} et \tilde{H}' et le corollaire 5.5.10 nous assure que

$$\tilde{H}(h_\infty(y^u)) = h_{\text{libre}}(H(y^u)) = h_{\text{libre}}(H'((y^u)')) = \tilde{H}'(h_\infty((y^u)'))$$

Ceci montre que $h_\infty(y^u)$ et $h_\infty((y^u)')$ sont sur la même feuille de \tilde{H}^s : on peut donc bien définir h_P au voisinage de α . On définit ainsi h_P sur un voisinage de ∂P , et on l'étend de façon quelconque à l'intérieur de P , quitte à restreindre d'abord le voisinage de ∂P où on vient de définir h_P . \square

Le lemme suivant termine la démonstration du lemme 5.5.13. \square

Lemme 5.5.16. — *Soit P un disque non-inclus dans R^∞ et bordé par un polygone d'arches de K , et \tilde{P} le polygone de \tilde{K} bordé par $h_\infty(\partial P)$. Soit $h_P : P \rightarrow \tilde{P}$ un homéomorphisme compatible avec h_∞ . Alors il existe un unique homéomorphisme de $R^\infty \cup \bigcup_{\mathbb{Z}}(f^n(P))$ sur $\tilde{R}^\infty \cup \bigcup_{\mathbb{Z}}(\tilde{f}(\tilde{P}))$, conjuguant les restrictions respectives de f et \tilde{f} et coïncidant avec h_∞ sur R^∞ et avec h_P sur P .*

Démonstration. — Rappelons que les séparatrices stables contenant les côtés stables de P sont couplées et ont donc même période p . Soit x_i une suite de points de P et n_i une suite d'entiers tendant vers $+\infty$, telle que la suite $f^{p \cdot n_i}(x_i)$ converge vers un point $y \in \delta(K)$. Quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que la suite x_i converge vers un point x . La même démonstration que celle du lemme 5.5.4 montre que le point y appartient à l'union d'une séparatrice instable libre et du point périodique p dont elle est issue, et que le point x appartient à la variété stable de p .

La suite des segments stables $[x_i, H(x_i)]^s$ converge alors vers le segment $[x, p]^s$. Ces segments sont donc de longueur bornée.

Alors $f^{p \cdot n_i}(H(x_i))$ converge vers y comme $f^{p \cdot n_i}(x_i)$ puisque la longueur des segments stables $f^{p \cdot n_i}([x_i, H(x_i)]^s)$ tend vers 0. La fin de la démonstration est identique à celle du lemme 5.5.9. \square

Pour conclure la démonstration du théorème, il reste à prolonger h_δ sur $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ en un homéomorphisme conjuguant f et \tilde{f} . Rappelons que $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ possède un nombre fini de composantes connexes qui sont des demi-plans dont l'adhérence dans $\Delta(K)$ est soit la réunion d'un point périodique et de deux de ses séparatrices libres (une stable une instable), soit l'union d'une chaîne infinie d'arches et des deux séparatrices libres (munies de leur point périodique) sur lesquelles s'accumule la chaîne.

Chaque composante C de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ est périodique pour f ; soit k sa période. De plus h_δ est défini sur le bord de C dans $\Delta(K)$, et l'image $h_\delta(\partial C)$ est de même nature (soit deux séparatrices libres et leur point périodique, soit l'adhérence d'une chaîne infinie), donc est le bord dans $\Delta(\tilde{K})$ d'une composante connexe \tilde{C} de $\Delta(\tilde{K}) \setminus \delta(\tilde{K})$. On a ainsi une bijection naturelle de l'ensemble des composantes connexes de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ sur l'ensemble de celles de $\Delta(\tilde{K}) \setminus \delta(\tilde{K})$ qui commute avec les permutations induites respectivement par f et \tilde{f} .

Pour étendre h_δ à toute l'orbite de C , il suffit d'étendre h_δ à C en un homéomorphisme de l'adhérence de C (dans $\Delta(K)$) sur celle de \tilde{C} , qui conjugue les restrictions de f^k et \tilde{f}^k à C et \tilde{C} : il suffira alors de pousser par f et par \tilde{f} , l'homéomorphisme ainsi construit sur l'orbite de C . Nous pourrions donc désormais (quitte à remplacer f par f^k) ne considérer que des composantes C fixées par f .

Remarque. — L'union de $\delta(K)$ et, pour toute composante connexe C de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$, d'un voisinage invariant par f de ∂C dans l'adhérence de C , forme un voisinage invariant par f de $\delta(K)$ dans $\Delta(K)$: la proposition 3.2.2 certifie que ce voisinage contient un plongement de $\Delta(K)$, qui prolonge l'identité sur $\delta(K)$.

La remarque ci-dessus montre que pour conclure le théorème, il suffit de savoir étendre l'homéomorphisme de conjugaison h_δ à un voisinage invariant de ∂C dans l'adhérence de C , pour toute composante C de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ invariante par f .

Dans le cas où ∂C est l'union d'un point fixe p et de deux séparatrices libres issues de p , on considère un petit voisinage de p dans $C \cup \partial C$ qui est un « rectangle » pour les feuilletages F^s et F^u : on étend alors h_δ à ce voisinage grâce aux deux projections sur les séparatrices, le long des feuilletages. Il reste alors juste à saturer par f ce voisinage de p .

Il reste donc à considérer le cas où ∂C est l'adhérence d'une chaîne infinie d'arches γ . Soit x une extrémité d'une des arches composant γ . Notons σ la chaîne finie d'arches joignant x à $f(x)$. On considère des voisinages V_σ de σ dans $C \cup \partial C$, construits de la façon suivante : un voisinage V_σ est l'union, sur l'ensemble des arches α qui composent σ , de « rectangles pour les feuilletages F^s et F^u » admettant α comme côté (voir la figure 7).

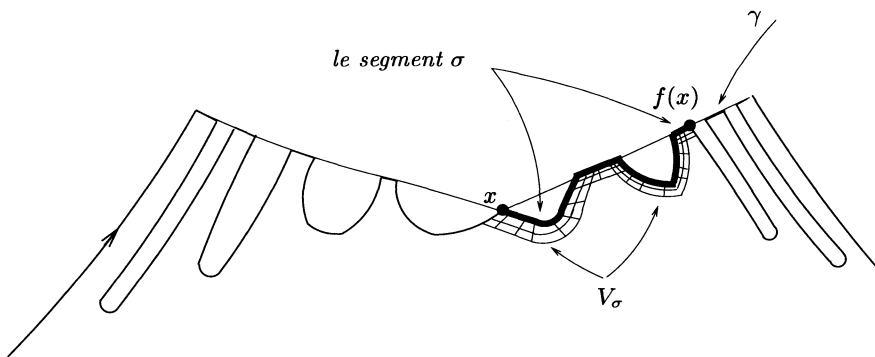


FIGURE 7. Un voisinage d'un intervalle fondamental σ d'une chaîne infinie

Tout voisinage de σ dans l'adhérence de C contient un voisinage de type V_σ . Notons $\tilde{\sigma} = h_\delta(\sigma)$. C'est un domaine fondamental de la chaîne infinie $\tilde{\gamma} = h_\delta(\gamma)$, et l'on peut de même définir les voisinages $V_{\tilde{\sigma}}$. On dira qu'un homéomorphisme h_σ d'un voisinage

V_σ sur un voisinage $V_{\tilde{\sigma}}$ est *compatible avec* h_δ s'il coïncide avec h_δ sur $V_\sigma \cap \gamma$, et s'il conjugue les restrictions à V_σ des feuilletages F^s et F^u aux restrictions à $V_{\tilde{\sigma}}$ de \tilde{F}^s et \tilde{F}^u . Un argument analogue à la démonstration du lemme 5.5.15 montre l'existence d'un homéomorphisme h_σ compatible avec h_δ , et on peut alors recopier la démonstration du lemme 5.5.16 pour vérifier que h_δ et h_σ se prolongent de façon unique en un homéomorphisme de conjugaison de $\delta(K) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V_\sigma)$ sur $\delta(\tilde{K}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}^n(V_{\tilde{\sigma}})$.

On conclut la démonstration du théorème par le lemme suivant :

Lemme 5.5.17. — *Notons $\bar{\gamma}$ l'adhérence dans $\Delta(K)$ de la chaîne infinie γ .*

Alors $\bar{\gamma} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V_\sigma)$ est un voisinage de $\bar{\gamma}$ dans \bar{C} (adhérence dans $\Delta(K)$ de la composante C).

Démonstration. — Soit p l'un des points fixes contenus dans $\bar{\gamma}$. Il suffit de vérifier que $\bar{\gamma} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V_\sigma)$ contient un voisinage de p dans \bar{C} . \square

5.6. Présentation finie d'un difféomorphisme de Smale, et bilan du problème de classification

Le but de ce paragraphe est de convaincre le lecteur que le théorème 5.2.2 joint aux propositions du paragraphe 3.4 donne une classification des difféomorphismes de Smale des surfaces compactes : à tout difféomorphisme de Smale on associe un nombre fini d'invariants qui caractérisent la classe de conjugaison de ce difféomorphisme. Ces invariants auront comme principal défaut de ne pas être définis de façon constructible.

Rappelons que les difféomorphismes d'Anosov du tore T^2 sont classifiés par l'application linéaire qu'ils induisent sur l'homologie du tore. Le paragraphe 2.3 a montré comment associer à tout difféomorphisme de Smale une classe de conjugaison de difféomorphisme de Smale sans attracteur ni répulseur hyperbolique non réduit à une orbite périodique. Appelons difféomorphisme de Smale *à selles* un difféomorphisme de Smale dont tout attracteur ou répulseur est une orbite périodique. Nous allons classifier ces difféomorphismes de Smale à selles.

Le théorème 5.2.2 affirme que la donnée d'une partition de Markov géométrisée d'un ensemble hyperbolique saturé K caractérise à conjugaison près la restriction du difféomorphisme au domaine $\Delta(K)$. Cependant, on peut associer une infinité de partitions de Markov géométrisées différentes à un triplet $(f, K, \Delta(K))$. Une façon immédiate d'en obtenir est de considérer l'intersection d'une partition de Markov avec un nombre fini de ses itérés. Malheureusement il n'est pas vrai que toutes les partitions de Markov associées à $(f, K, \Delta(K))$ soient engendrées de cette façon par une partition de Markov « minimale ». Toutefois toute manière d'associer canoniquement un nombre fini de partitions de Markov géométrisées à la classe de conjugaison d'un triplet $(f, K, \Delta(K))$ donne une classification combinatoire de ces triplets.

Soit M une partition de Markov associée à un ensemble hyperbolique K . Appelons *complexité* de M le nombre $c(M) = \sum h_i = \sum v_i$, nombre total des sous-rectangles horizontaux ou verticaux des rectangles de M .

Remarquons que l'image $f(M)$ d'une partition de Markov est une partition de Markov de même complexité $c(M)$ et de même type géométrique. C'est pourquoi nous parlerons d'orbites de partitions de Markov géométrisées.

Proposition 5.6.1. — *Soit $(f, K, \Delta(K))$ un triplet formé d'un difféomorphisme de Smale à selles, d'un ensemble hyperbolique saturé K de f et de son domaine $\Delta(K)$. Les types géométriques de partitions de Markov de K de complexité minimale sont en nombre fini.*

Démonstration. — Les types géométriques abstraits (non nécessairement associés à une dynamique) de complexité donnée c sont en nombre fini. \square

Cette proposition montre l'existence d'une classification (à conjugaison près) des triplets $(f, K, \Delta(K))$. Cependant nous n'avons pas d'algorithme permettant de construire les partitions de Markov de complexité minimale à partir d'une partition de Markov donnée. Pire, nous ne savons pas décider en général si une partition de Markov donnée est de complexité minimale. Nous espérons prochainement fournir une famille finie de partitions de Markov géométrisées canoniquement associée à un triplet $(f, K, \Delta(k))$ construite à l'aide du dessin des courbes invariantes, et donner un algorithme permettant de les construire à partir d'une partition de Markov quelconque.

Soit f un difféomorphisme de Smale à selles, et K l'ensemble hyperbolique saturé associé au diagramme de Smale privé des sources et des puits. Le domaine $\Delta(K)$ est une variété à bord orientée, ce bord est un nombre fini de copies de \mathbb{R} . La dynamique permute ces courbes. On a associé (voir paragraphe 3.4) un signe à chacune de ces courbes suivant que son orientation comme bord de $\Delta(K)$ coïncide ou non avec son orientation dynamique. On note Γ^+ et Γ^- les ensembles de ces courbes de signe respectivement positif ou négatif. Nous avons défini au paragraphe 3.4 une règle de recollement de $\Delta(K)$ comme étant une bijection $\Phi: \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^-$ commutant avec la permutation de $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ induite par f . Nous avons vu qu'une règle de recollement permet de construire une surface compacte munie d'un difféomorphisme de Smale. Il n'y a qu'un nombre fini de règles. En choisissant bien la règle Φ le difféomorphisme obtenu est conjugué à f .

Soit M l'ensemble des rectangles R_i d'une partition de Markov de K , les rectangles R_i étant munis d'une orientation des verticales et des horizontales. On note T le type géométrique de la partition. Nous allons compléter l'information combinatoire donnée par T de façon à déterminer la règle de recollement Φ . La difficulté essentielle consiste à déterminer Γ^+ et Γ^- .

Rappelons d'abord que l'ensemble Γ est en bijection avec l'ensemble des composantes connexes de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$. Le bord dans $\Delta(K)$ de chacune de ces composantes connexes contient exactement une séparatrice libre instable. En examinant les deux cas possibles (composante dont le bord est l'union d'un point périodique coin et de deux de ses séparatrices libres, composante dont le bord contient une chaîne infinie d'arches) on constate qu'une composante connexe se trouve d'un seul côté de la séparatrice libre instable qui lui est associée. Chaque côté de séparatrice instable libre correspond à au plus une de ces composantes.

Chaque côté de séparatrice instable libre est déterminé sans ambiguïté par la donnée d'un rectangle R_i de M (celui où elle s'attache), de la direction h ou b (haut ou bas) dans laquelle elle s'éloigne du rectangle, et d'un côté d ou g (droite ou gauche) du rectangle. Nous avons ainsi une injection de Γ dans $\{R_i\} \times \{h, b\} \times \{d, g\}$. Notons C^+ et C^- les images respectives par cette injection de Γ^+ et de Γ^- . La règle de recollement Φ induit une bijection $\psi: C^+ \rightarrow C^-$.

Définition 5.6.2. — *On appellera procédé de collage la donnée de parties disjointes C^+ et C^- de $\{R_i\} \times \{h, b\} \times \{g, d\}$ et d'une bijection $\psi: C^+ \rightarrow C^-$.*

Nous savions déjà que la donnée du difféomorphisme f , d'une partition de Markov M associée à son ensemble hyperbolique saturé maximal et d'un choix d'orientation des verticales et horizontales des rectangles détermine le type géométrique T de M ; nous venons de voir qu'elle détermine aussi le procédé de collage $\psi: C^+ \rightarrow C^-$.

Définition 5.6.3. — *Soit f un difféomorphisme de Smale à selles, préservant l'orientation, d'une surface compacte orientée, et soit K l'ensemble hyperbolique saturé maximal de f . On appellera présentation finie de f la donnée d'une partition de Markov $M = \{R_i\}$ de K munie de son type géométrique T et du procédé de collage $\psi: C^+ \rightarrow C^-$.*

Le théorème 5.2.2 et la proposition 3.4.2 impliquent alors :

Proposition 5.6.4. — *Soient f et \tilde{f} deux difféomorphismes de Smale préservant l'orientation de surfaces compactes orientables S et \tilde{S} . Si f et \tilde{f} admettent une même présentation finie $(M, T, \psi: C^+ \rightarrow C^-)$, il existe un homéomorphisme de S sur \tilde{S} conjuguant f et \tilde{f} .*

Remarquons que, pour tout type géométrique T de partition de Markov, il existe un nombre fini de procédés de collage. Toute manière d'associer à un difféomorphisme de Smale f préservant l'orientation un nombre fini de types géométriques de son ensemble hyperbolique saturé maximal permet d'associer à f un nombre fini de présentations finies, ce qui donne une classification, à conjugaison topologique près, des difféomorphismes de Smale à selles.

Nous venons d'associer à un difféomorphisme de Smale des invariants combinatoires. Il est maintenant naturel de se demander quelles « présentations finies » abstraites correspondent à des difféomorphismes de Smale.

Pour cela il faut d'abord savoir quelles partitions de Markov géométrisées correspondent à des ensembles hyperboliques saturés :

Exemple. — On a vu que la partition de Markov géométrisée ayant un seul rectangle, deux sous-rectangles horizontaux, et décrite par :

$$\phi(H^1) = (V^1, +), \quad \phi(H^2) = (V^2, +)$$

ne correspond pas à un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme d'une surface compacte (voir le corollaire 2.4.4).

Définition 5.6.5. — On dira qu'un type géométrique $(n, \{h_i\}, \{v_i\}, \phi)$ de partition de Markov est réalisable s'il existe un difféomorphisme de Smale f d'une surface compacte, et K un ensemble hyperbolique saturé pour f admettant une partition de Markov dont le type géométrique soit $(n, \{h_i\}, \{v_i\}, \phi)$.

Le chapitre 7 définit le genre d'un type géométrique qui est un minorant du genre des surfaces sur lesquels le type est réalisable. Ce chapitre caractérise alors les types géométriques (sans double-bord) de genre fini. Le cas avec double-bord ne nous semble pas conceptuellement différent mais présente de nouvelles difficultés techniques.

Ensuite, il reste à comprendre quels procédés de collage sont réalisables. Le lecteur qui le désire pourra vérifier que la donnée d'un type géométrique T de partition de Markov réalisable détermine les parties C^+ et C^- ainsi qu'une permutation de chacune de ces parties, induite par la combinatoire de T . Bien sûr, cette permutation coïncidera avec celle induite par tout difféomorphisme f réalisant T . Un procédé de collage $\psi: C^+ \rightarrow C^-$ sera réalisable si ψ commute avec ces permutations.

Voici quelques indications succinctes :

1. Dans le cas sans double bord (ce qui est déterminé par T voir la proposition 7.2.2) le lecteur trouvera des indications utiles dans le chapitre 7 : dans ce chapitre, nous vérifions que le type géométrique T permet de déterminer les points périodiques bords ainsi que leurs séparatrices libres et non-libres, la permutation de ces séparatrices, les couplages entre les séparatrices non-libres, et enfin les points périodiques coins. On remarque alors que tout point de $C = C^+ \cup C^-$ est associé soit à un coin, soit au côté d'une séparatrice instable libre correspondant à une séparatrice stable non-libre non-couplée.
2. Une fois la partie $C \subset \{R_i\} \times \{b, h\} \times \{g, d\}$ déterminée, le signe de chaque élément de C est donné par la règle suivante : il est $+$ pour (h, d) et (b, g) et $-$ sinon.

CHAPITRE 6

LES DESSINS ET LA DYNAMIQUE

Le mathématicien qui présente à la craie sur le tableau un difféomorphisme de Smale du plan se contente souvent d'esquisser les variétés invariantes. Ce dessin représente-t-il vraiment une dynamique (à un choix d'itéré près) ? Le théorème 5.2.2 permet de répondre :

« *Oui, dans la mesure où le dessin détermine une partition de Markov géométrisée.* »

Plus formellement, notre but est de prouver :

Théorème 6.0.6 (Dessin et dynamique). — *Soient f et g deux difféomorphismes de Smale de surfaces compactes, et soient K et L des ensembles hyperboliques saturés de f et g , sans double-bord, et de domaines connexes. Supposons qu'il existe un homéomorphisme*

$$h: W^s(K) \cup W^u(K) \rightarrow W^s(L) \cup W^u(L),$$

tel que pour tout point x de K les variétés stable et instable de $h(x)$ soient les images par h des variétés stable et instable (respectivement) de x .

Alors, il existe deux entiers p et q strictement positifs, tels que la restriction de f^p au domaine $\Delta(K)$ soit conjuguée à la restriction de g^q à $\Delta(L)$, par un homéomorphisme (qui coïncide avec h sur K sauf dans le cas où f est un difféomorphisme d'Anosov du tore T^2).

Remarques

1. Le théorème 6.0.6 est déjà connu dans le cas où f est un difféomorphisme d'Anosov : en effet, d'après [Fr1] et [Man] tout difféomorphisme d'Anosov d'une surface compacte est conjugué à un difféomorphisme d'Anosov linéaire du tore T^2 . C'est alors un exercice d'algèbre de vérifier que deux difféomorphismes linéaires dont les feuilletages stables et instables sont conjugués possèdent des itérés conjugués. Cependant l'homéomorphisme conjuguant les feuilletages n'est

pas a priori une conjugaison : en effet, toute translation sur le tore préserve les feuilletages, mais l'image du point fixe 0 peut être un point non-périodique.

2. Si K contient une pièce basique Λ qui est un attracteur hyperbolique alors les hypothèses « sans double-bord » et « domaine connexe » impliquent que K est réduit à Λ et que $\Delta(K)$ est le bassin d'attraction de Λ (voir le théorème 2.3.4). Le théorème dans ce cas peut s'obtenir de la façon suivante : le chapitre 8 (voir aussi [Ru]) montre que la dynamique restreinte au bassin d'attraction d'un attracteur hyperbolique est semi-conjuguée à celle d'un homéomorphisme pseudo-Anosov, la semi-conjugaison consistant pour l'essentiel à écraser chaque s-arche en un point. On peut alors utiliser le résultat connu suivant : deux homéomorphismes pseudo-Anosov dont les feuilletages stable et instable sont conjugués par un homéomorphisme h possèdent des itérés qui sont conjugués par h .

Dans ce texte, nous nous consacrerons à la preuve du théorème pour le cas plus difficile des ensembles hyperboliques saturés ne contenant ni attracteur ni répulseur : le lecteur pourra en déduire une démonstration dans le cas d'un attracteur ou d'un répulseur hyperbolique.

La démonstration du théorème 6.0.6 se décompose en deux étapes. Dans un premier temps nous montrerons :

Proposition 6.0.7. — *Sous les hypothèses du théorème il existe p et q telle que h conjugue les restrictions de f^p et g^q à K et L respectivement.*

Nous concluons alors par la proposition suivante :

Proposition 6.0.8. — *Soient K et L deux ensembles saturés de f et g sans double-bord. On suppose qu'il existe un homéomorphisme*

$$h: W^s(K) \cup W^u(K) \rightarrow W^s(L) \cup W^u(L),$$

conjuguant les restrictions de f et de g à K et L respectivement. Alors, les restrictions de f et g aux domaines de K et de L sont conjuguées, par un homéomorphisme coïncidant avec h sur K .

Ensuite nous analyserons ce qui se passe lorsqu'on supprime les hypothèses « $\Delta(K)$ connexe » et « K sans-double-bord ».

6.1. Points périodiques, pièces basiques, ordre de Smale

Soient (K, f) et (L, g) deux ensembles hyperboliques saturés, dont l'union des variétés invariantes est connexe, et sans double-bord. Soit h un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de K sur l'union de celles de L , l'image de la variété stable (resp. instable) d'un point étant la variété stable (resp. instable) du point image.

Notre but est de montrer que l'homéomorphisme h respecte la dynamique. Dans ce paragraphe nous allons voir les premiers lemmes élémentaires dans ce sens : l'homéomorphisme h respecte les points périodiques bords, les pièces basiques de ces points, et les pièces basiques extrémales pour l'ordre de Smale. Remarquons que le théorème 2.3.4 implique que si K possède un attracteur hyperbolique, alors K est réduit à cet attracteur ; les lemmes de ce paragraphe seront triviaux dans ce cas, et nous supposons donc que K et L ne possèdent ni attracteur ni répulseur.

Rappelons que les points périodiques bords de K et de L sont en nombre fini, et qu'ils sont caractérisés par le fait de posséder au moins une séparatrice libre. On en déduit immédiatement :

Lemme 6.1.1. — *L'image par h d'un point périodique s -bord, u -bord, ou coin de K est un point respectivement s -bord, u -bord ou coin de L*

Les points périodiques bord de K étant en nombre fini, il existe un itéré positif de f pour lequel tout point périodique bord est fixe. Désormais, quitte à remplacer f et g par un de leurs itérés positifs, nous supposons que tout point périodique bord est fixe, ainsi que chacune des séparatrices qui en sont issues.

Lemme 6.1.2. — *Soit Λ une pièce basique d'un difféomorphisme de Smale f , et soit $x \in \Lambda$ un point périodique. Soit I une séparatrice non-libre (comme séparatrice de Λ et pas seulement de K) du point x , alors $W^u(\Lambda)$ est contenue dans l'adhérence de I .*

Démonstration. — Rappelons que toute pièce basique Λ possède une orbite dense (par itération positive et par itération négative) dans Λ . Soit y_0 un point de Λ sur la séparatrice non-libre I . Soit z un point d'orbite positive dense, suffisamment proche de y_0 pour que sa variété stable locale coupe I en un point y (voir figure 1). Les ensembles ω -limite de y et de z coïncident puisque les itérés positifs de $[y, z]^s$ sont de longueur tendant vers 0. L'orbite de y (incluse dans I) est donc comme celle de z dense dans Λ . La continuité des variétés invariantes prouve alors que I est dense dans $W^u(\Lambda)$. \square

Le lemme 6.1.2 assure que, pour tout point fixe $x \in \Lambda$, sa variété stable et sa variété instable sont denses dans $W^s(\Lambda)$ et $W^u(\Lambda)$ respectivement. La structure de produit local au voisinage des points de Λ permet alors de montrer que Λ est l'adhérence de $W^s(x) \cap W^u(x)$. On en déduit donc :

Lemme 6.1.3. — *Soit x un point fixe de type bord de (K, f) , et soit Λ la pièce basique à laquelle il appartient. Alors $h(\Lambda)$ est la pièce basique de (L, g) contenant $h(x)$.*

Soit A une pièce basique de (K, f) , maximale pour l'ordre de Smale. Ceci équivaut à ce que $W^s(A) \cap K = A$. On en déduit qu'un point périodique qui est u -bord en tant que point de A (c'est-à-dire qu'il possède une séparatrice stable disjointe de A) est u -bord en tant que point de K . Comme A n'est pas (par hypothèse) un répulseur elle possède au moins un point périodique u -bord. Du lemme ci-dessus on déduit donc :

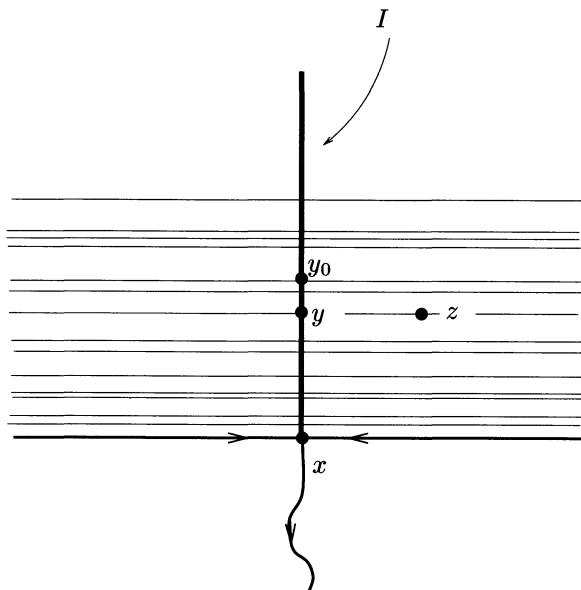


FIGURE 1

Corollaire 6.1.4. — *L'image par h d'une pièce basique de K maximale ou minimale pour \prec est une pièce basique de L (maximale ou minimale, respectivement).*

Du fait que K ne possède pas de double-bord on déduit qu'une pièce basique A de K , maximale pour \prec , n'est pas réduite à une orbite périodique (une telle orbite périodique serait double u-bord). D'autre part l'hypothèse « K sans répulseur » implique que A possède un point fixe x u-bord. Le point x possède au moins une séparatrice instable I_x non-libre. Le lemme 6.1.2 nous dit que I_x contient $W^u(A)$ dans son adhérence.

Nous venons de montrer :

Lemme 6.1.5. — *Soit (K, f) un ensemble hyperbolique saturé sans double-bord, et tel que tout point périodique bord soit fixe.*

Pour toute pièce basique A de K maximale pour \prec , il existe un point fixe u-bord $x \in A$ de K , et une séparatrice instable I_x de x qui est dense dans $W^u(A)$.

Rappelons que, pour toute pièce basique A de K , la variété instable $W^u(A)$ contient dans son adhérence l'union des variétés instables des pièces basiques qui lui sont inférieures pour \prec . De la structure de produit local au voisinage des points de K on déduit alors :

Lemme 6.1.6. — Soient $B \preceq A$ deux pièces basiques d'un ensemble hyperbolique saturé K . Soit I une séparatrice instable d'un point périodique de A , dense dans $W^u(A)$, et soit S une séparatrice stable d'un point fixe de B dense dans $W^s(B)$.

Alors, $S \cap I$ contient dans son adhérence l'union des pièces basiques Λ vérifiant $B \preceq \Lambda \preceq A$.

Corollaire 6.1.7. — Soient A_1, \dots, A_i les pièces basiques maximales de K , et soient B_1, \dots, B_j les pièces basiques minimales. Pour tout $k \leq i$, on choisit une séparatrice instable I_k d'un point u-bord de A_k , telle que I_k soit dense dans $W^u(A_i)$. De même, pour tout $l \leq j$ on choisit une séparatrice S_l d'un point fixe s-bord contenu dans B_l , telle que S_l soit dense dans $W^s(B_l)$.

Alors K est l'adhérence de l'union sur tous les couples (k, l) de l'intersection $A_k \cap B_l$.

Il reste une hypothèse sur K que nous n'avons pas encore utilisée : c'est la connexité de l'union de ses variétés invariantes. On en déduit

Corollaire 6.1.8. — Soient I_1, \dots, I_i et S_1, \dots, S_j les familles de séparatrices respectivement instables et stables associées aux pièces basiques respectivement maximales et minimales de K .

Alors, pour tout couple (k, l) il existe une suite $k_1 = k, \dots, k_m$ et une suite $l_1, \dots, l_m = l$ telles que pour tout $s < m$, les intersections $I_{k_s} \cap S_{l_s}$ et $S_{l_s} \cap I_{k_{s+1}}$ ne sont pas vides.

6.2. Conjugaison des dynamiques en restriction à K et L

Nous allons à présent démontrer la proposition 6.0.7. Pour cela nous choisirons des itérés de f et g de façon à ce que h induise une conjugaison sur une orbite non-périodique d'une séparatrice d'un point bord. Nous propagerons alors à tout K cette conjugaison, le long des intersections des séparatrices des points périodiques bord. L'argument essentiel de cette preuve est la proposition suivante :

Proposition 6.2.1. — Soient I et S deux séparatrices (stable et instable) de deux points périodiques d'un ensemble hyperbolique saturé, et soit ϕ un homéomorphisme de $I \cup S$ possédant un point fixe, et induisant sur I et sur S un homéomorphisme préservant l'orientation. Alors, ϕ coïncide avec l'identité sur $I \cap S$.

Définition 6.2.2. — Soit x un point d'intersection de deux séparatrices I et S issue de deux points périodiques y et z . Alors $[x, y]^u \cap [x, z]^s$ est de cardinal fini. On appellera rang de x ce cardinal, et on le notera $rg(x)$

On notera $R_n(I, S)$ l'ensemble des points de $I \cap S$ de rang inférieur ou égal à n

(La notion de points de rang 1 est déjà utilisée par Birkhoff dans [Bi]).

Bien sûr, $I \cap S$ est l'union croissante des $R_n(I, S)$.

Lemme 6.2.3. — *Pour tout n , l'ensemble des orbites de points de $R_n(I, S)$ est fini.*

Démonstration. — Quitte à remplacer f par un itéré, on supposera que I et S sont invariantes par f . Soit x_0 un point d'intersection de rang n de I et S . Toute orbite de points de $I \cap S$ contient un point sur le segment $[x_0, f(x_0)]^u \subset I$. Remarquons que tout point de rang inférieur ou égal à n , contenu dans $[x_0, f(x_0)]^u$ appartient à $[z, x_0]^s$ (où z est le point périodique dont est issue S). L'intersection de deux segments compacts de variétés invariantes est un ensemble fini, ce qui conclut. \square

Démonstration de la proposition 6.2.1. — Quitte à remplacer f par un itéré positif, on suppose que f laisse invariante chacune des séparatrices I et S . Par hypothèse, ϕ possède un point fixe. Nous supposons que ce point fixe x_0 appartient à I (le raisonnement étant analogue dans le cas où ce point fixe appartient à S). Nous allons montrer que pour tout n , ϕ coïncide avec l'identité sur $R_n(I, S)$.

Considérons $\{x_0\} \cup R_n(I, S)$. C'est un ensemble dont l'intersection avec tout segment compact de I est fini : on peut donc l'indexer par \mathbb{Z} de façon croissante pour l'orientation de I « fuyant le point fixe ». En outre, ϕ laisse invariant cet ensemble (en effet, pour tout $x \in I \cap S$ le rang de $\phi(x)$ est le rang de x , et x_0 est par hypothèse un point fixe de ϕ). On en déduit que ϕ induit une bijection croissante de cet ensemble, ayant un point fixe, donc égale à l'identité (une bijection croissante de \mathbb{Z} fixant 0 est l'identité!). C'est ce que nous avons annoncé. \square

Démonstration de la proposition 6.0.7. — Soient A_i les pièces basiques maximales de K , B_j les pièces basiques minimales, et I_i et S_j des séparatrices instables et stables des A_i et B_j , denses dans $W^u(A_i)$ et $W^s(B_j)$, respectivement. Soit p_1 le point fixe s-bord dont I_1 est issue, et soit W_1^s la séparatrice stable non-libre de p_1 .

D'après le lemme 6.1.4, $h(A_1)$ est une pièce basique maximale de L , $h(p_1)$ est un point périodique bord de $h(A_1)$, et $h(I_1)$ et $h(W_1^s)$ sont deux séparatrices de $h(p_1)$ fixées par g .

On considère l'ensemble $R_1 = R_1(h(I_1), h(W_1^s))$ des points d'intersection de rang 1 de ces deux séparatrices. Cet ensemble est infini mais rencontre tout segment compact de $h(I_1)$ en un nombre fini de points. On peut donc l'indexer par \mathbb{Z} de façon croissante pour l'orientation de $h(I_1)$ « fuyant le point périodique ». On vérifie que g et $h \circ f \circ h^{-1}$ induisent deux bijections croissantes de cet ensemble : ces bijections correspondent donc chacune à une translation sur \mathbb{Z} , et on se convainc facilement que cette translation est d'un nombre positif. Il existe donc p et q tels que $h \circ f^p \circ h^{-1}$ et g^q coïncident sur R_1 . On considère alors $\phi = g^{-q} \circ h \circ f^p \circ h^{-1}$. D'après la proposition 6.2.1, ϕ coïncide avec l'identité sur l'ensemble non vide $h(I_1) \cap h(W_1^s)$.

La proposition 6.2.1 montre alors que, pour tout j tel que $S_j \cap I_1 \neq \emptyset$, ϕ coïncide avec l'identité sur $h(S_j \cap I_1)$. On montre alors facilement, grâce au corollaire 6.1.8, que ϕ vaut l'identité sur $h(S_j \cap I_i)$ pour tout (i, j) , et donc sur $h(K) = L$, par densité. \square

6.3. Image d'une partition de Markov et extension de la conjugaison au domaine

Soient (K, f) et (L, g) deux ensembles hyperboliques saturés sans double-bords. Soit h un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de K sur l'union de celles de L , qui induit une conjugaison des restrictions de f et g à K et L . Nous allons montrer que l'image par h d'une partition de Markov de K est une partition de Markov de L et que ces deux partitions de Markov ont même type géométrique : le théorème 5.2.2 permettra alors de montrer que les restrictions de f et g aux domaines de K et L sont conjuguées.

La première étape consiste à voir que les classes d'équivalence d'arches se lisent sur le dessin.

Remarquons d'abord que, comme K est sans double-bord, les s -arches ayant une extrémité sur une variété instable partent toujours du même côté (le côté isolé).

Lemme 6.3.1. — *Soient λ_1 et λ_2 deux segments disjoints de $W^u(L)$ tels que toute s -arche ayant son origine sur l'un de ces segments a son extrémité sur l'autre segment. Supposons de plus que l'holonomie (application de λ_1 dans λ_2 qui à l'origine d'une s -arche associe son extrémité) soit monotone. Alors, toutes les s -arches ayant une extrémité sur l'un des λ_i sont équivalentes.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que deux arches d'extrémités assez voisines sont équivalentes (puisqu'elles partent du même côté des segments λ_i).

Il reste à montrer que deux s -arches s -bords issues de deux points successifs de $\lambda_1 \cap K$ sont équivalentes. Remarquons d'abord que leurs extrémités sont des points successifs de $\lambda_2 \cap K$ puisque l'holonomie est monotone. Le quadrilatère formé des deux s -arches et des u -arches contenues dans λ_1 et λ_2 joignant les extrémités de ces deux s -arches est un polygone d'arches puisque l'absence de double-bord force une arche à partir du côté libre d'une courbe invariante. Le lemme 2.6.6 assure que ce polygone borde un disque qui est le rectangle réalisant l'équivalence entre nos deux s -arches. \square

Corollaire 6.3.2. — *Les images par h de deux s -arches équivalentes de K sont deux s -arches équivalentes de L .*

Lemme 6.3.3. — *Soit R un rectangle pour K , dont les côtés sont des segments isolés. Alors l'image par h du bord $\partial(R)$ est le bord d'un rectangle S de L . De plus,*

$$h((W^s(K) \cup W^u(K)) \cap R) = (W^s(L) \cup W^u(L)) \cap S.$$

Démonstration. — Considérons le bord stable ∂^s du rectangle R , et notons δ^s son image par h . On oriente les horizontales de R , et chaque composante de ∂^s hérite de cette orientation. On munit les segments composant δ^s de l'orientation induite. On

appellera *rail* de δ^s tout segment de variété instable de L d'intérieur disjoint de δ^s et ayant ses deux extrémités sur δ^s .

Soit $\sigma \subset W^u(K)$ un segment vertical de R . Le segment $h(\sigma)$ est un rail de δ^s qui part du côté non-isolé de chacune des composantes de δ^s . Remarquons que tout point x de $L \cap \delta^s$ est l'extrémité d'un et un seul segment de type $h(\sigma)$; ce segment est un rail, ce qui montre qu'il existe un unique rail partant de x du côté non-isolé de δ^s , et que ce rail arrive sur l'autre composante de δ^s également du côté non-isolé. Remarquons de plus que l'holonomie obtenue en suivant ces rails (l'application qui à l'origine associe l'extrémité) est croissante pour l'orientation.

Soit σ_0 l'un des côtés instables de S . Pour montrer le lemme, il nous suffit de montrer que tout rail $h(\sigma)$ est équivalent à $h(\sigma_0)$. Remarquons d'abord que la continuité des variétés instables et le fait que la restriction de h à chaque segment de ∂^s soit un homéomorphisme assure que tout rail ayant une extrémité assez proche d'un rail donné est équivalent à celui-ci. Les classes d'équivalence de rails induisent donc une partition de $L \cap \delta^s$ par des ouverts disjoints qui sont donc en nombre fini par compacité de $L \cap \delta^s$. Ces ouverts sont donc des intersections avec L de segments compacts disjoints.

Soit λ_2 le dernier (pour l'orientation de δ^s) rail équivalent à $h(\sigma_0)$. Nous allons montrer par l'absurde que λ_2 est l'autre segment (noté $h(\sigma_1)$) composant δ^u , ce qui conclura.

Si λ_2 n'est pas $h(\sigma_1)$, il existe un rail λ_3 dont les extrémités suivent celles de λ_2 (pour l'orientation de δ^s) (voir figure 2). Il nous reste juste à montrer que λ_2 et

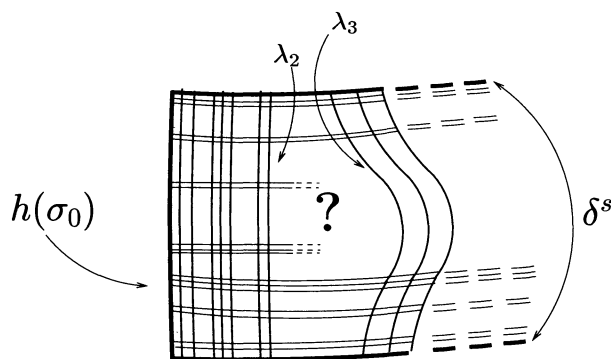


FIGURE 2. Le rail suivant λ_2

λ_3 sont équivalents. Notons σ_2 et σ_3 les images réciproques par h de λ_2 et λ_3 . Ce sont deux segments verticaux successifs de R : en particulier, toute s-arche ayant son origine sur σ_2 (resp. σ_3) a son extrémité sur σ_3 (resp. σ_2), et l'holonomie est croissante pour un choix d'orientation des verticales de R . On en déduit que toute s-arche ayant son origine sur l'un des λ_i a son extrémité sur l'autre. De plus les arches partant

des extrémités des λ_i sont contenues dans δ^s . Le lemme 6.3.1 montre que toutes les s-arches ayant une extrémité sur l'un des λ_i sont équivalentes. On déduit que λ_2 et λ_3 sont les côtés instables d'un rectangle dont le bord stable est contenu dans δ^s .

Ce rectangle réalise une équivalence entre les rails λ_2 et λ_3 , et c'est précisément ce que nous voulions. \square

Nous pouvons à présent supprimer l'hypothèse imposant que les côtés de R soient des segments isolés, puisque tout rectangle est inclus dans un rectangle vérifiant les hypothèses du lemme 6.3.3 :

Corollaire 6.3.4. — *Si R est un rectangle de K , alors $h(\partial R)$ borde un rectangle S de L .*

Soit $\mathcal{R} = \{R_i\}$ une partition de Markov de K par rectangles disjoints. Le lemme 6.3.3 assure que pour tout i , $h(\partial R_i)$ borde un rectangle S_i de L . Alors :

Corollaire 6.3.5. — *Les rectangles S_i définis ci-dessus recouvrent L et sont deux-à-deux disjoints.*

Démonstration. — C'est une conséquence directe de ce que $h(K \cap R_i) = L \cap S_i$ (lemme 6.3.3). \square

Pour montrer le théorème 6.0.6 ou la proposition 6.0.8 il faut à présent montrer que la famille de rectangles $\{S_i\}$ est une partition de Markov de (L, g) de même type géométrique que $\{R_i\}$.

Fin de la démonstration de la proposition 6.0.8. — Notons $\{H_i^j, V_k^l, \phi\}$ le type géométrique de la partition de Markov $\{R_i\}$.

Pour tout i, j, k, l notons $\overline{H}_i^j, \overline{V}_j^k$ les rectangles de L bordés par l'image par h du bord de H_i^j et de V_k^l , respectivement.

Pour tout i , \overline{H}_i^j est un sous rectangle horizontal de S_i : en effet, le bord instable de \overline{H}_i^j est contenu dans celui de S_i , et le bord stable de \overline{H}_i^j est l'union de deux rails stables de S_i (car image par h de rails du rectangle R_i).

De plus ces rectangles sont deux-à-deux disjoints, et leur numérotation est compatible avec l'orientation du bord instable de S_i obtenue comme image par h de l'orientation des verticales de R_i : il suffit de vérifier cette compatibilité sur les côtés instables, et elle se déduit alors de la numérotation des H_i^j . Enfin, la famille des \overline{H}_i^j recouvre $L \cap S_i$.

De même, pour tout k , les \overline{V}_k^l forment une famille de sous-rectangles verticaux de S_k , deux-à-deux disjoints, recouvrant $L \cap S_k$ et leur numérotation est compatible avec l'orientation du bord stable de S_k héritée par h de celle des horizontales de R_k .

Remarquons que pour connaître l'image d'un rectangle, il suffit de connaître l'image de ses quatre sommets. Les sommets a, b, c, d de H_i^j sont des points de K dont les images $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ sont les sommets de \overline{H}_i^j et appartiennent à L .

Soit $V_k^l = f(H_i^j)$, ses sommets sont $f(a), f(b), f(c), f(d)$. Par hypothèse, h est une conjugaison des restrictions de f et g à K et L , donc $g(\bar{a}), g(\bar{b}), g(\bar{c}), g(\bar{d})$ sont les sommets du rectangle \bar{V}_k^l . Donc $g(\bar{H}_i^j) = \bar{V}_k^l$. On en déduit que \bar{H}_i^j est une composante connexe de $S_i \cap g^{-1}(S_k)$, dont l'image \bar{V}_k^l est une composante connexe de $S_k \cap g(S_i)$.

De plus, toute composante connexe de $S_k \cap g(S_i)$ contient un point de L : en effet le bord d'une telle composante connexe est formé de segments stables et instables, dont les extrémités sont dans L . Comme les \bar{V}_k^l recouvrent L , cette composante connexe est l'un de ces rectangles verticaux. Ceci prouve que la famille $\{S_i\}$ est une partition de Markov de (L, g) . Pour montrer que son type géométrique est le même que celui de $\{R_i\}$, il reste à vérifier que les restrictions de f et g à H_i^j et \bar{H}_i^j respectent ou inversent simultanément les orientations des verticales : comme aucun des rectangles (et sous-rectangles) n'est dégénéré (hypothèse sans double-bord), placer les sommets des images d'un rectangle \bar{H}_i^j détermine l'action de g sur l'orientation de ses verticales. \square

6.4. Contre-exemples, généralisations, conjectures

Dans ce paragraphe nous verrons pourquoi les hypothèses « $\Delta(K)$ connexe» et « K sans double-bord» sont nécessaires pour le théorème 6.0.6 : sans ces hypothèses la dynamique restreinte au domaine de K peut posséder des régions où la «vitesse» de la dynamique peut être choisie de façon indépendante. Puis, pour analyser ce phénomène, nous définirons un *graphe de Smale enrichi* noté $\tilde{\Gamma}$, et nous esquisserons une généralisation du théorème 6.0.6 avec une hypothèse plus faible qui se lit sur $\tilde{\Gamma}$. Enfin nous proposerons quelques conjectures et problèmes qui comparent les dynamiques de deux ensembles hyperboliques dont les variétés invariantes sont homéomorphes, sans autres hypothèses.

Supposons d'abord que le domaine de K ne soit pas connexe : le difféomorphisme f induit une permutation de l'ensemble $\{C_1, \dots, C_k\}$ des composantes connexes de $\Delta(K)$. Il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que f^q laisse invariante chacune des composantes C_i . Pour tout i choisissons un entier $\alpha_i \in \mathbb{Z}^*$ et considérons sur chaque C_i la restriction de $f^{\alpha_i \cdot q}$. La proposition 3.4.2 permet de construire une surface compacte \tilde{S} munie d'un difféomorphisme de Smale \tilde{f} possédant un ensemble hyperbolique saturé \tilde{K} dont le domaine est homéomorphe à $\Delta(K)$ (on notera donc \tilde{C}_i les composantes connexes de $\Delta(\tilde{K})$) et tel que la restriction de \tilde{f} à \tilde{C}_i soit conjuguée à la restriction de $f^{\alpha_i \cdot q}$ à C_i (voir la figure 3).

Supposons à présent qu'il existe $i \neq j$ tels que les restrictions de f^q à C_i et à C_j contiennent chacune une pièce basique non réduite à une orbite périodique. Choisissons alors α_i différent de α_j . On vérifie que f et \tilde{f} ne possèdent pas d'itérés f^n et \tilde{f}^m dont les restrictions à $\Delta(K)$ et $\Delta(\tilde{K})$ soient conjuguées.

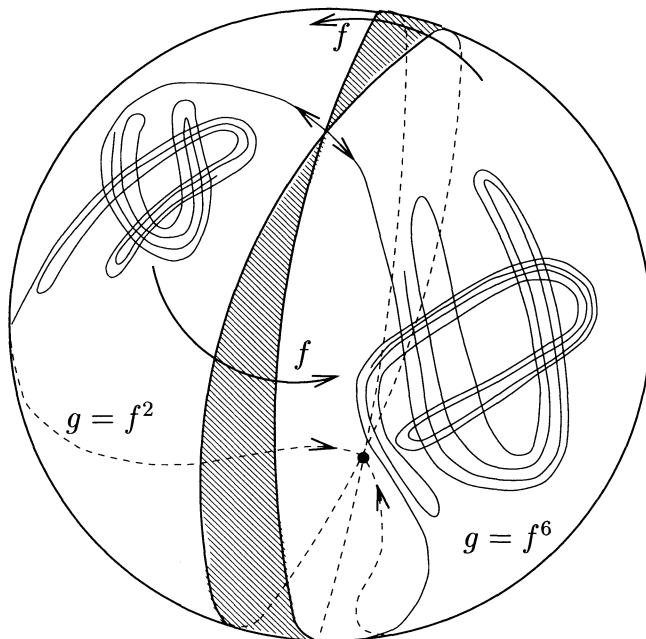


FIGURE 3. Quand $\Delta(K)$ n'est pas connexe, les « vitesses » de la dynamique sur chaque composante peuvent être ajustées indépendamment

Voyons à présent un exemple de problème causé par la présence de double-bords. La figure 4 ci-dessous montre un ensemble hyperbolique saturé de domaine connexe, où le dessin ne détermine pas f à une puissance près.

Pour rendre compte de ces deux phénomènes, nous allons enrichir le diagramme de Smale de la façon suivante (une idée analogue a déjà été utilisée dans [La] et [Fl]) :

Rappelons que le diagramme de Smale Γ d'un ensemble hyperbolique saturé K avait pour sommets l'ensemble des pièces basiques de K , et utilisait l'ordre \prec pour définir les arêtes (voir la définition 1.1.13 et la remarque qui suit). Rappelons encore que toute pièce basique Λ_i est l'union d'un nombre fini de compacts disjoints Λ_i^j , permutés par f et transitifs pour toute puissance de f les laissant invariants (voir le théorème 1.1.12). Les points de notre diagramme enrichi $\tilde{\Gamma}$ sont

1. d'une part les Λ_i^j ,
2. d'autre part les quatre séparatrices des Λ_i^j qui sont des points périodiques selles.

On décrit une relation d'ordre (encore notée \prec) qui généralise à $\tilde{\Gamma}$ l'ordre de Smale. Voici la description précise de cet ordre :

1. $\Lambda_i^j \prec \Lambda_k^l \iff W^s(\Lambda_i^j) \cap W^u(\Lambda_k^l) \neq \emptyset$

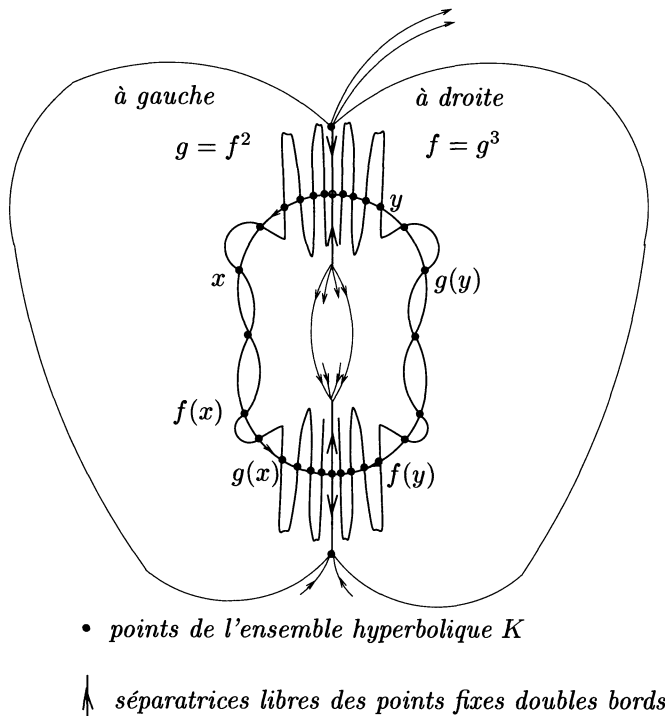


FIGURE 4. Un domaine découpé par les séparatrices libres des points fixes double-bords; les dynamiques à droite et à gauche sont de vitesses indépendantes

2. Les séparatrices instables d'un point périodique selle sont inférieures pour \prec au point périodique selle, lui-même inférieur à ses séparatrices stables
3. une séparatrice instable est supérieure à toute séparatrice stable qu'elle coupe.
4. une séparatrice instable (resp. stable) est supérieure (resp. inférieure) à tout Λ_i^j dont elle coupe la variété stable (resp. instable).

On vérifie que \prec ainsi défini sur $\tilde{\Gamma}$ est bien une relation d'ordre. On définit alors l'ensemble des arêtes orientées de $\tilde{\Gamma}$ de la façon classique suivante :

Une arête joint deux sommets distincts p_1, p_2 de $\tilde{\Gamma}$ si $p_2 \prec p_1$ et s'il n'existe aucun sommet p_3 distinct de p_1 et p_2 , tel que $p_2 \prec p_3 \prec p_1$.

Remarque. — L'ensemble $\tilde{\Gamma}$ se projette naturellement sur l'ensemble des points du graphe de Smale Γ de K : à chaque Λ_i^j on associe la pièce basique Λ_i correspondante; à chaque selle et à ses séparatrices on associe l'orbite périodique de la selle. L'ordre \prec défini sur $\tilde{\Gamma}$ passe au quotient par la projection en l'ordre \prec sur Γ .

Appelons graphe de Smale modifié et notons Γ^* le graphe $\tilde{\Gamma}$ privé des points périodiques double-bord et de leurs séparatrices libres.

Proposition 6.4.1. — *La proposition 6.0.7 reste vraie si l'on remplace l'hypothèse « K sans double-bord et $\Delta(K)$ connexe » par l'hypothèse suivante*

« Le graphe de Smale modifié Γ^ est connexe. »*

Idée de la démonstration. — Elle est identique à celle de la proposition 6.0.7 en remarquant que les corollaires 6.1.7 et 6.1.8 sont encore vrais avec la nouvelle hypothèse. \square

Conjecture 1. — *Le théorème 6.0.6 reste vrai si l'on remplace l'hypothèse « K sans double-bord et $\Delta(K)$ connexe » par l'hypothèse « le graphe de Smale modifié Γ^* est connexe ».*

Si Γ^* n'est pas connexe, alors la proposition 6.0.7 reste vraie sur chacune des composantes connexes. Voyons brièvement comment donner un sens précis à cette affirmation.

Soient Γ_i les composantes connexes de Γ^* . Notons \tilde{K}_i l'ensemble des points de K qui sont points d'intersection de variétés stables et instables correspondant à des sommets de Γ_i . L'ensemble \tilde{K}_i n'est pas *a priori* compact. Cependant, l'union de \tilde{K}_i et de l'ensemble des points périodiques double-bord possédant au moins une séparatrice qui est un point de Γ_i forme un compact que nous noterons K_i . Remarquons que f induit une permutation de l'ensemble des Γ_i et donc aussi des K_i . Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que f^p laisse fixe chacun des K_i . On vérifie alors que K_i est un compact hyperbolique de f^p , *a priori* non-saturé. De plus K est l'union des K_i , et l'intersection $K_i \cap K_j, i \neq j$ est réduite à un ensemble fini de points périodiques double-bord. On peut alors montrer :

Proposition 6.4.2. — *Soient (K, f) et (L, g) deux ensembles hyperboliques saturés de difféomorphismes de Smale de surfaces compactes, et soit h un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de K sur celles de L , préservant variétés stables et variétés instables.*

Soit K_i un compact associé à l'une des composantes connexes de $\Gamma^(K)$. Alors $h(K_i) = L_i$ est un compact associé à l'une des composantes connexes de $\Gamma^*(L)$. De plus, il existe $p_i, q_i \in \mathbb{N}^*$ tels que f^{p_i} et g^{q_i} laissent invariants respectivement K_i et L_i et tels que h induise une conjugaison des restrictions de f^{p_i} et g^{q_i} à K_i et L_i respectivement.*

Nous pensons de plus que l'on peut découper le domaine $\Delta(K)$ suivant l'union des variétés stables des points double u-bord et des variétés instables des points double s-bord et que le théorème 6.0.6 est alors vrai sur chacune des composantes connexes du domaine ainsi découpé. Voici, sans démonstration, quelques énoncés qui nous semblent vrais, et qui donnent la généralisation complète du théorème 6.0.6.

Pour chaque point périodique $x \in K$ de type double s-bord, les deux séparatrices instables de x sont libres, et l'on en déduit que la variété instable de x est un fermé de $\Delta(K)$. L'union des variétés instables des points périodiques double s-bord et des variétés stables des points périodiques double u-bord est alors un fermé de $\Delta(K)$, invariant par f . Notons le $DB(K)$. Découpons $\Delta(K)$ suivant cet ensemble de courbes.

Conjecture 2

1. À chaque composante connexe Γ_i de Γ^* correspond une composante connexe de $\Delta(K) \setminus DB(K)$; notons C_i l'adhérence dans $\Delta(K)$ de cette composante connexe. Alors K_i est égal à $K \cap C_i$.
2. Soient (K, f) et (L, g) deux ensembles hyperboliques saturés de difféomorphismes de Smale de surfaces compactes, et soit h un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de K sur l'union de celles de L , préservant les variétés stables et instables. Alors pour tout i il existe $p_i, q_i > 0$ et un homéomorphisme h_i de C_i sur $\overline{C_i}$ conjuguant les restrictions de f^{p_i} et g^{q_i} à C_i et $\overline{C_i}$.

On peut encore chercher à affaiblir les hypothèses du théorème 6.0.6, en ne supposant pas que l'homéomorphisme h préserve les variétés stables ou instables. Cette hypothèse est bien sûr nécessaire dans le cas où (K, f) est un difféomorphisme d'Anosov du tore T^2 ou plus généralement un attracteur hyperbolique : dans ce cas l'union des variétés invariantes de K est homéomorphe à une surface compacte privée d'un ensemble fini, et la seule donnée de cette surface ne suffit pas à caractériser la dynamique à itération près.

Considérons donc (K, f) , un ensemble hyperbolique saturé sans attracteur ni répulseur, et supposons K sans double-bord. La structure de produit local nous dit que chacune des laminations stable ou instable est localement de la forme « ensemble de Cantor $\times \mathbb{R}$ », et qu'elles se coupent transversalement, formant ainsi un grillage. On peut montrer le lemme suivant :

Lemme 6.4.3. — Soit C_1, C_2, C_3, C_4 quatre compacts de \mathbb{R} homéomorphes à des ensembles de Cantor. Soit h un homéomorphisme du grillage plan $C_1 \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times C_2$ sur le grillage plan $C_3 \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times C_4$. Alors h vérifie l'une des deux affirmations suivantes :

1. L'image de toute droite verticale est une droite verticale et l'image de toute droite horizontale est une droite horizontale.
2. L'image de toute droite verticale est une droite horizontale et l'image de toute droite horizontale est une droite verticale.

Nous pensons qu'une version locale de ce lemme permet de montrer l'affirmation suivante :

Conjecture 3. — Soient (K, f) et (L, g) deux compacts hyperboliques saturés de difféomorphismes de Smale, sans double-bord et de domaines connexes, et sans attracteurs ni répulseurs. Soit h un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de K

sur celles de L . Alors il existe un homéomorphisme de $\Delta(K)$ sur $\Delta(L)$, conjuguant f et g et coïncidant avec h sur K .

Les ébauches de raisonnement qui nous permettent de croire en la conjecture ci-dessus sont mis en défaut par la présence de double-bord. Cependant, même dans le cadre de difféomorphisme de type Morse Smale nous n'avons pas trouvé d'autre type de contre-exemple que ceux présentés au début de ce paragraphe.

Problème 6.4.4. — *Que reste-t-il de la conjecture ci-dessus en présence de double-bord ?*

Rappelons enfin que pour les difféomorphismes d'Anosov du tore T^2 , deux difféomorphismes possédant des feuilletages stables qui sont conjugués (mais pas *a priori* leurs feuilletages instables) possèdent des itérés qui sont conjugués. Ceci amène à se poser la question suivante

Problème 6.4.5. — *Soient (K, f) et (K', f') deux ensembles hyperboliques saturés tels qu'il existe un homéomorphisme $h: W^s(K) \rightarrow W^s(K')$. Cette seule information permet-elle de comparer les dynamiques de f et f' ?*

CHAPITRE 7

GENRE D'UNE PARTITION DE MARKOV GÉOMÉTRIQUE ET RÉALISABILITÉ (PAR C. BONATTI ET E. JEANDENANS)

Nous avons introduit, au paragraphe 5.6, la notion de type géométrique réalisable, nous en rappelons ici la définition :

Définition 7.0.6. — *Nous dirons que le type géométrique $T = (n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi)$ est réalisable s'il existe un difféomorphisme de Smale f d'une surface compacte et un ensemble hyperbolique saturé de f admettant une partition de Markov M dont le type géométrique est précisément T .*

Nous allons établir, dans ce chapitre, une condition nécessaire à la réalisabilité, du moins sous l'hypothèse que T ne possède pas de double-bord (cf. la définition 7.2.1 et la relation avec les double-bords d'un ensemble hyperbolique saturé au début du paragraphe 7.2).

Pour cela, nous définissons, au paragraphe 7.3, le genre $g(T)$ du type géométrique T sans double-bord : aux paragraphes 7.1, 7.2 et 7.3, nous construisons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, une surface à bord \mathcal{R}_m obtenue par recollement des $m^{\text{ièmes}}$ -itérés des rectangles par une dynamique symbolisée par T . Cette construction est indépendante de la «réalisation» de T que l'on aura choisie. En particulier, si T est réalisable par un difféomorphisme de Smale f et un ensemble hyperbolique saturé K de f qui admet $\{R_i\}$ comme partition de Markov, la surface \mathcal{R}_m est homéomorphe à l'union des $j^{\text{ièmes}}$ -itérés des rectangles R_i , pour $0 \leq j \leq m$. La suite des \mathcal{R}_m est croissante pour l'inclusion ; la suite $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$, où g_m est le genre de \mathcal{R}_m , est donc croissante. Le genre de T sera la borne supérieure de $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

Une condition nécessaire à la réalisabilité est que le genre de T soit fini. Nous pensons savoir montrer que cette condition est également suffisante, ceci sera l'objet d'un travail ultérieur.

La suite du chapitre consiste alors à caractériser les types géométriques de genre fini. Pour ce faire, nous mettons en évidence au paragraphe 7.4 trois types de positions

géométriques d'itérés des rectangles R_i qui forcent le genre de T à être infini : nous les appelons obstructions.

Nous montrons ensuite le théorème 7.4.8 qui donne l'équivalence entre la finitude de $g(T)$ et le fait que la surface \mathcal{R}_{6n} (où n est le nombre de rectangles de T) ne présente aucune des trois obstructions. La preuve de ce théorème occupe les paragraphes 7.5, 7.6, 7.7 (où l'on démontre la finitude du genre en l'absence d'obstruction) et 7.8 (qui donne la preuve de la réciproque).

Enfin, au paragraphe 7.9, nous montrons que si T ne possède qu'un unique rectangle, le genre $g(T)$ est soit nul, soit infini. Nous donnons également, en conjecture, un majorant du genre d'un type géométrique sans double-bord et de genre fini.

7.1. HV-surfaces à bord et à coins

Dans ce paragraphe, nous allons construire des surfaces à bord et coins et munies de deux feuilletages transverses. Ces surfaces seront obtenues par recollement de rectangles le long de sous-rectangles. Afin de vérifier que le résultat est bien une surface, nous allons d'abord introduire la notion de HV-surface et montrer un lemme de construction par itération de ces surfaces.

Définition 7.1.1. — *Une HV-surface à bord et à coins est une surface topologique compacte S à bord, non nécessairement connexe, avec un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ où les ϕ_i sont des homéomorphismes tels que $\phi_i(U_i)$ soit inclus soit dans*

$$Q = \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

soit dans

$$\tilde{Q} = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Int}(Q) = \{x \leq 0\} \cup \{y \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

où les changements de cartes $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sont des éléments du groupe produit $\text{Homeo}(\mathbb{R}) \times \text{Homeo}(\mathbb{R})$.

Définition 7.1.2. — *Soit m un point d'une HV-surface à bord et à coins. On dira que m est :*

1. *un point intérieur s'il existe une carte en m (U_i, ϕ_i) telle que $\phi_i(m)$ appartienne à l'intérieur de Q ou à l'intérieur de \tilde{Q} ,*
2. *un bord vertical s'il existe une carte en m (U_i, ϕ_i) telle que $\phi_i(m)$ ait pour coordonnées $(0, y)$ avec $y \geq 0$ ($\phi_i(m)$ appartient au bord vertical $\{0\} \times [0, +\infty[$ de Q ou de \tilde{Q}),*
3. *un bord horizontal s'il existe une carte en m (U_i, ϕ_i) telle que $\phi_i(m)$ ait pour coordonnées $(x, 0)$ avec $x \geq 0$ ($\phi_i(m)$ appartient au bord horizontal $[0, +\infty[\times \{0\}$ de Q ou de \tilde{Q}),*

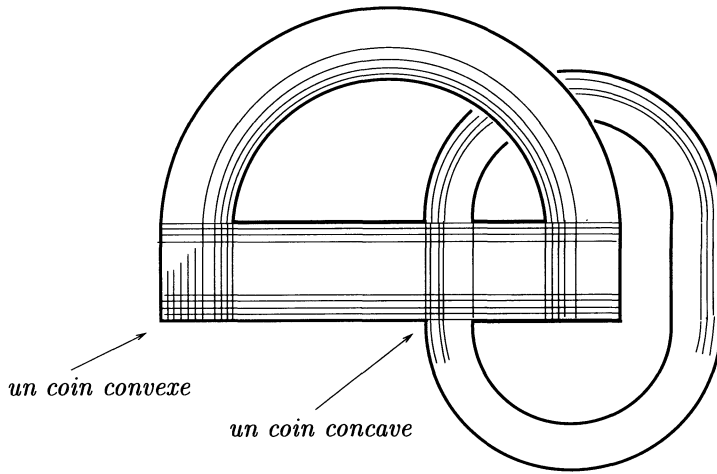


FIGURE 1. Une HV-surface à bord et à coins

4. un coin convexe s'il existe une carte (U_i, ϕ_i) centrée en m telle que $\phi_i(U_i)$ soit inclus dans Q et $\phi_i(m) = (0, 0)$,
5. un coin concave s'il existe une carte (U_i, ϕ_i) centrée en m telle que $\phi_i(U_i)$ soit inclus dans \tilde{Q} et $\phi_i(m) = (0, 0)$.

Remarque. — L'ensemble des coins (concaves et convexes) de S est l'intersection du bord vertical et du bord horizontal de S .

Remarque-notation. — Toute HV-surface à bord et à coins S est munie de deux feuilletages transverses, que nous appellerons *feuilletage horizontal* et *feuilletage vertical*. Le premier est l'image réciproque par les ϕ_i du feuilletage par les horizontales de Q ou \tilde{Q} , le second de leur feuilletage par les verticales. Nous qualifierons d'*horizontal* (resp. *vertical*) un segment de la surface S inclus dans son feuilletage horizontal (resp. vertical). Nous noterons $\partial^h S$ le bord horizontal de S et $\partial^v S$ son bord vertical. Le bord de S est l'union d'un nombre fini de segments horizontaux et de segments verticaux.

Définition 7.1.3

1. Nous appellerons *sous-rectangle* tout disque topologique D tel qu'il existe (U, ϕ) compatible avec l'atlas de la HV-surface S avec $\phi(D) = [0, 1]^2$.
2. Un sous-rectangle horizontal d'une HV-surface S est un sous-rectangle de S dont le bord vertical est inclus dans le bord vertical de S . Un sous-rectangle V de S est vertical si son bord horizontal $\partial^h V$ est inclus dans $\partial^h S$.

Lemme 7.1.4. — Soit Λ une HV-surface à bord et à coins. Soit Γ une HV-surface à bord et à coins, qui est une union disjointe de rectangles.

Soient H_1, H_2, \dots, H_μ μ sous-rectangles horizontaux de Γ deux-à-deux disjoints.

Soient V_1, V_2, \dots, V_μ μ sous-rectangles verticaux de Λ deux-à-deux disjoints tels que, pour tout i , le bord horizontal de V_i soit disjoint des coins concaves de Λ .

Soit Φ un homéomorphisme de l'union des H_i dans l'union des V_i tel que, pour tout i , $\Phi|_{H_i}$ soit un élément du groupe $\text{Homeo}(\mathbb{R}) \times \text{Homeo}(\mathbb{R})$.

Alors l'espace topologique S obtenu en recollant Λ et Γ par l'homéomorphisme Φ est une HV-surface à bord et à coins.

Démonstration. — Remarquons que S est séparée car on a recollé deux ensembles compacts par un homéomorphisme le long de sous-ensembles compacts donc la relation d'équivalence par laquelle on quotient est fermée (cf. [Go] p.25).

Dans S , la carte en un point $m \in S$ n'appartenant pas à l'union des H_i (qui est égale à l'union des V_i) est la même que la carte en m pour Λ ou Γ .

Soit m un point de S correspondant à un point m_Λ du sous-rectangle vertical V_i et à un point $m_\Gamma = \Phi^{-1}(m_S)$ du sous-rectangle horizontal H_j .

Supposons que m_Γ soit un point de $H_j \setminus \partial^h(H_j)$ ou de $\partial^h\Gamma$; autrement dit, que m_Γ possède un voisinage U_Γ inclus dans H_j . Alors $\Phi(U_\Gamma)$ est l'intersection avec V_i d'un voisinage U_Λ de m_Λ dans Λ . L'injection de U_Λ dans S définit alors un voisinage de m dans S , et donc une carte en ce point.

De même, si $m_\Lambda \in V_i$ possède un voisinage dans Λ qui est inclus dans V_i , alors une carte en m_Γ donne une carte de S en m . En utilisant le fait que $\partial^h(V_i)$ est inclus dans $\partial^h(\Lambda)$, on vérifie que si m_Λ ne possède pas cette propriété, alors il appartient à $\partial^v(V_i)$. De plus, soit m_Λ n'appartient pas à $\partial^v(\Lambda)$, soit m_Λ est un coin concave de Λ .

Les seuls points m de S au voisinage desquels nous n'avons pas encore défini de carte sont ceux tels que m_Γ appartient à un côté horizontal de H_j inclus dans $\Gamma \setminus \partial^h(\Gamma)$ et où m_Λ est un point de $\partial^v(V_i)$ qui soit est un coin concave de Λ soit n'appartient pas à $\partial^v(\Lambda)$.

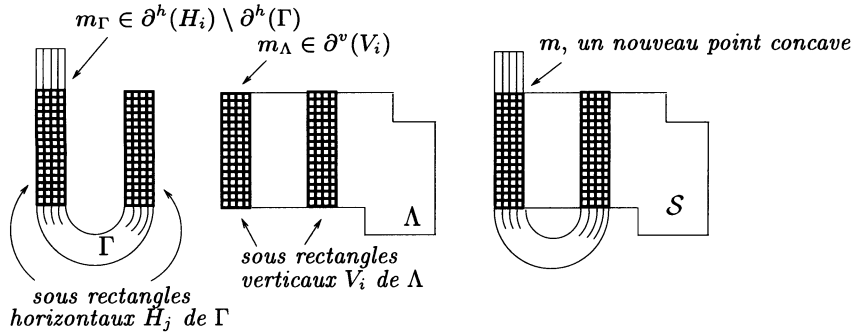
Comme m_Γ appartient à $\partial^h(H_j)$, le point m_Λ appartient à $\partial^h(V_i)$ (donc est l'un des coins de V_i) qui est disjoint des coins concaves de Λ par hypothèse. Il faut donc que m_Λ soit un point de $\partial^v(V_i) \setminus \partial^v(\Lambda)$: on se convainc facilement qu'en recollant un voisinage de m_Γ dans Γ à un voisinage de m_Λ dans Λ on obtient un voisinage de m qui en fait un coin concave de S (cf. la figure 2).

L'application Φ de recollement est définie par morceaux par des éléments du groupe $\text{Homeo}(\mathbb{R}) \times \text{Homeo}(\mathbb{R})$ donc les nouveaux changements de carte sont encore dans ce groupe. \square

Remarques. — Soient Λ et Γ vérifiant les hypothèses du lemme 7.1.4 et soit

$$S = (\Lambda \amalg \Gamma) / \Phi$$

la HV-surface obtenue par recollement.

FIGURE 2. Les coins de S

1. Le bord horizontal de S est l'union du bord horizontal de Λ privé de l'intérieur des côtés horizontaux des sous-rectangles V_i et du bord horizontal de Γ :

$$\partial^h S = ((\partial^h \Lambda) \setminus (\cup_i \partial^h V_i)) \cup \partial^h \Gamma.$$

2. Les coins concaves de S sont de deux sortes.

D'une part, les coins concaves de Λ sont encore des coins concaves de S . En effet, soit c un coin concave de Λ . Si c appartient à un sous-rectangle V_i , il est dans son bord vertical par hypothèse. Il existe alors un segment $\sigma(c)$ dans le bord horizontal de Λ , issu de c et disjoint des côtés horizontaux de tous les sous-rectangles V_j (sur lesquels on fait les recollements). Par conséquent, $\sigma(c)$ est encore un segment dans le bord horizontal de S , ce qui assure que c est un coin concave de S .

D'autre part, m est un nouveau coin concave de S si et seulement si le point m_Γ est dans le bord vertical de H_i sans être un coin de Γ et le point m_Λ est dans le bord horizontal de $V_j = \Phi(H_i)$ sans être un coin (convexe) de Λ . Autrement dit, m_Λ est un coin d'un sous-rectangle vertical sans être un coin convexe de Λ et m_Γ est un coin d'un sous-rectangle horizontal de Γ sans être un coin de Γ (cf. la figure 2).

3. La projection canonique de Λ et celle de Γ dans S sont des plongements.

Soient Λ et Γ deux HV-surfaces vérifiant les hypothèses du lemme 7.1.4. Nous allons à présent analyser plus précisément le cas particulier suivant où l'on impose à $\partial^h \Gamma$ d'être inclus dans l'union des côtés horizontaux des sous-rectangles horizontaux H_i . Cette nouvelle hypothèse équivaut au fait que, dans chaque rectangle R composante connexe de Γ , les sous-rectangles horizontaux extrémaux ont un côté horizontal qui coïncide avec un côté horizontal de R . Pour illustrer les deux lemmes que voici, cf. la figure 3.

Lemme 7.1.5 *Soient Λ et Γ deux HV-surfaces vérifiant les hypothèses du lemme 7.1.4. Supposons que $\partial^h \Gamma$ soit inclus dans $\partial^h(\cup_i H_i)$. Appelons S la HV-surface à bord et à coins obtenue en quotientant l'union disjointe de Λ et de Γ par l'homéomorphisme Φ .*

Alors le bord horizontal de S est inclus dans le bord horizontal de Λ . Plus précisément, $\partial^h S$ est égal à $\partial^h \Lambda$ privé des côtés horizontaux de sous-rectangles verticaux V_i qui, dans S , ne sont pas identifiés par Φ avec des segments de $\partial^h \Gamma$.

De plus, le bord horizontal de Γ est disjoint des coins concaves de la surface S .

Démonstration. — Montrons d'abord que le bord horizontal de Γ est dans $(\cup_i \partial^h V_i) \subset \partial^h S$. Chaque composante connexe de $\partial^h \Gamma$ coïncide par hypothèse avec un côté horizontal de sous-rectangle horizontal. Ce côté s'identifie par Φ dans S à un côté horizontal de sous-rectangle vertical de Λ , i.e. à un segment inclus dans $\partial^h \Lambda$. Comme on a :

$$\partial^h S = ((\partial^h \Lambda) \setminus (\cup_i \partial^h V_i)) \cup \partial^h \Gamma,$$

et qu'on vient de montrer que $\partial^h \Gamma$ est dans $\partial^h \Lambda$, on a le premier point du lemme.

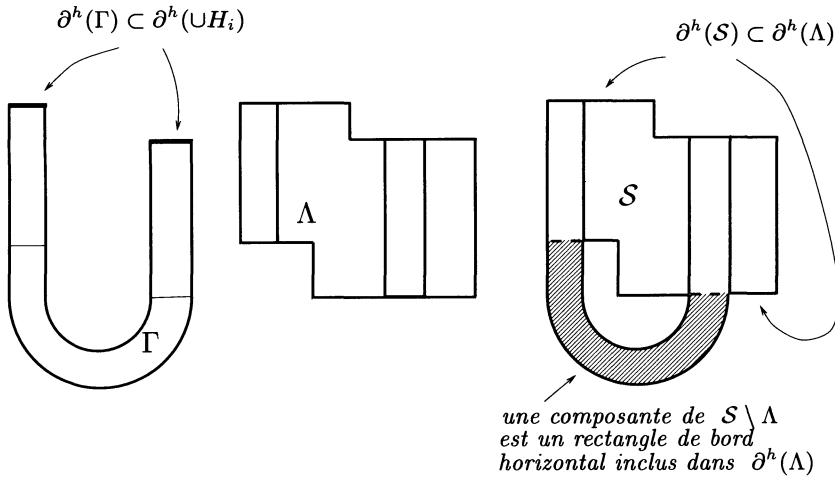
Le bord horizontal des sous-rectangles verticaux V_i est, par hypothèse, disjoint des coins concaves de Λ . Le bord horizontal de Γ est donc disjoint dans S des coins concaves de S qui proviennent des coins concaves de Λ . La remarque faite après le lemme 7.1.4 nous assure de plus que les nouveaux coins concaves de S proviennent d'un point m_Γ de Γ appartenant à $\partial \Gamma \setminus \partial^h \Gamma$ et d'un point m_Λ de Λ qui est un coin de sous-rectangle vertical mais pas un coin de Λ . Le point m_Λ est donc une extrémité d'un côté horizontal de sous-rectangle vertical. Comme les côtés horizontaux des sous-rectangles verticaux V_i sont deux-à-deux disjoints dans le bord de Λ et que $\partial^h \Gamma$ s'envoie par Φ dans certains de ces segments, $\partial^h \Gamma$ est également disjoint des nouveaux coins concaves de S . \square

Lemme 7.1.6. — *Sous les hypothèses du lemme 7.1.5, l'adhérence de toute composante connexe de $S \setminus \Lambda$ est un rectangle dont les côtés horizontaux sont inclus dans le bord horizontal des sous-rectangles verticaux de $\Lambda \subset S$. De plus, ces rectangles sont deux à deux disjoints.*

Démonstration. — On a vu, dans les remarques précédant le lemme 7.1.5, que Λ et Γ se plongeaient dans S . L'adhérence de $S \setminus \Lambda$ est donc l'adhérence de Γ privée de son intersection avec Λ . Le résultat découle du fait que l'on recolle ces deux surfaces Γ et Λ le long de sous-rectangles deux-à-deux disjoints. \square

7.2. Type géométrique sans double-bord et réalisation

Comme annoncé dans l'introduction de ce chapitre, nous voulons construire des surfaces compactes qui réaliseront T . La première étape de cette construction est de choisir des rectangles non dégénérés (i.e. non réduits à un segment voire à un point), munis d'une dynamique que symbolise l'application Φ de T . Nous appellerons

FIGURE 3. $\partial^h \Gamma \subset \partial^h S$ et $\text{Adh}(S \setminus \Lambda)$ est une union disjointe de rectangles

concrétisation une telle famille de rectangles munis de leur dynamique. Supposons que le type géométrique T d'une partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé possède des double-bords. Toute concrétisation de T est soit non-hyperbolique, soit avec des rectangles dégénérés. Nous ne pouvons donc pas espérer construire une surface en recollant les rectangles d'une telle concrétisation et leurs itérés. Dans ce paragraphe, nous allons donc introduire et caractériser les types géométriques de partition de Markov sans double-bord. Nous vérifierons que cette notion correspond bien, si le type géométrique est réalisable, à la notion de double-bord introduite pour un ensemble hyperbolique saturé. Après avoir donné une caractérisation matricielle simple des types géométriques sans double-bord, nous montrerons qu'ils admettent une concrétisation hyperbolique, que nous appellerons réalisation.

Rappelons que T est la donnée de :

1. un entier non-nul $n \in \mathbb{N}$,
2. pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, deux entiers non-nuls $h_i, v_i \in \mathbb{N}$, de façon que l'on ait :

$$\sum_i h_i = \sum_i v_i,$$

3. pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, deux ensembles finis $\{h_i^j, \text{ pour } j \in \{1, \dots, h_i\}\}$ et $\{v_i^k, \text{ pour } k \in \{1, \dots, v_i\}\}$,
4. et une application Φ de l'ensemble $\{h_i^j, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, h_i\}\}$ dans l'ensemble $\{v_k^l, k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, v_k\}\} \times \{-, +\}$, induisant une bijection par « oubli des signes ».

Définition 7.2.1. — Nous dirons que T est un type géométrique avec double-bord(s) stable(s) s'il existe un cycle d'indices compris entre 1 et n :

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \cdots \rightarrow i_k \rightarrow i_{k+1} = i_1$$

tel que pour tout $t \in \{1, 2, \dots, k\}$, on ait l'entier h_{i_t} égal à 1 (donc le sous-ensemble $\{h_{i_t}^j, j = 1, 2, \dots, h_{i_t}\}$ est réduit au singleton $\{h_{i_t}^1\}$) et $\Phi(h_{i_t}^1)$ égal à $(v_{i_{t+1}}^l, \varepsilon)$ pour un certain l compris entre 1 et $v_{i_{t+1}}$ et ε indifféremment égal à ± 1 .

On définit de même un type géométrique avec double-bord(s) instable(s) s'il existe un cycle d'indices tels que l'entier v_j correspondant soit égal à 1 et tels que l'antécédent par Φ , quand on oublie le signe de v_j^1 , soit un h_{j+1}^l pour l entre 1 et h_{j+1} .

Cette notion est compatible avec la notion de double-bord introduite précédemment, comme l'explique la proposition suivante :

Proposition 7.2.2. — Soit K un ensemble hyperbolique saturé de partition de Markov M de type géométrique T . On a équivalence entre :

1. K possède des double-bords stables (resp. instables),
2. T possède des double-bords stables (resp. instables).

Démonstration. — Supposons que K possède un double-bord stable. Il a alors un point périodique p double-bord stable. Les deux séparatrices instables issues de p sont libres donc sortent du rectangle de la partition de Markov contenant p sans rencontrer K . Par conséquent, le rectangle de la partition contenant p est réduit à un segment stable contenant p . Le sous-rectangle vertical image de ce segment est également un segment donc le rectangle de la partition de Markov qui le contient est lui aussi réduit à un segment. On construit ainsi facilement un cycle de rectangles réduits à des segments stables correspondant à l'orbite de p , ce qui prouve que le type géométrique T admet des double-bords stables.

Réciproquement, supposons que T possède des double-bords stables. Le choix du cycle $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ montre que l'image par f^k d'un segment vertical de R_{i_1} est exactement un segment vertical de R_{i_1} . L'application f^k envoie donc les côtés horizontaux de R_i dans eux-mêmes par une stricte contraction. Chacun des côtés horizontaux de R_i possède par conséquent un point périodique p_i . Le segment vertical instable passant par le point périodique p_i est donc fixe par f^k , et donc réduit au point p_i . On en déduit que le rectangle de la partition de Markov de K contenant p_i est réduit à un segment stable contenant p_i , ce qui équivaut à dire que p_i est un double-bord stable de K . \square

Voyons à présent une autre caractérisation simple des types géométriques sans double-bord.

Etant donné un type géométrique $T = (n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi)$, on définit sa *matrice d'incidence (avec multiplicité)* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}(n, \mathbb{N})$ de la façon suivante : le coefficient $a_{i,j}$ est le nombre de h_i^k dont l'image par Φ (après oubli du signe) est de la forme v_j^l .

Dans le cas où T est le type géométrique d'une partition de Markov $\{R_i\}$, le coefficient $a_{i,j}$ est le nombre de composantes connexes de $f(R_i) \cap R_j$.

Remarque. — Avec les notations ci-dessus, le terme h_i de T est la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A , c'est-à-dire $h_i = \sum_j a_{i,j}$. De même, v_j est la somme $\sum_i a_{i,j}$ des coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Nous allons voir que l'existence de double-bord se lit sur la somme des coefficients des lignes et des colonnes des itérés de la matrice A . Voici d'abord un lemme qui nous permettra de contrôler ces sommes.

Lemme 7.2.3. — Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice à coefficients dans \mathbb{N} , telle que la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne quelconque est non-nulle. Pour tout $k \geq 1$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$, notons λ_i^k (resp. γ_i^k) la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. colonne) de la matrice A^k .

Alors, pour tout i , les suites $(\lambda_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont croissantes.

Démonstration. — En effet, on vérifie que $\lambda_i^{k+1} = \sum_l a_{i,l}^k \cdot \lambda_l$ et on conclut en remarquant que tous les λ_l sont plus grands que 1 et que $\lambda_i^k = \sum_l a_{i,l}^k$. On a les mêmes formules en remplaçant λ par γ . \square

Lemme 7.2.4. — Le type géométrique T est sans double-bord si et seulement si, pour tout $m > n$ et pour tout i , la somme λ_i^m (resp. γ_i^m) des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. colonne) de A^m est supérieure ou égale à 2.

Démonstration. — Il est facile de montrer par récurrence sur k que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. il existe une suite finie d'indices $i = i_1, i_2, \dots, i_k = j$ telle que, pour tout $t \in \{1, 2, \dots, k\}$, l'entier h_{i_t} soit égal à 1 et que $\Phi(h_{i_t}^1)$ soit égal (en oubliant le signe) à $v_{i_{t+1}}^l$ pour un certain l compris entre 1 et $v_{i_{t+1}}$;
2. le coefficient $a_{i,j}^k$ de la matrice A^k est égal à 1 et pour tout $l \neq j$ le coefficient $a_{i,l}^k$ est nul.

On en déduit que l'existence d'un double-bord stable est équivalente à l'existence d'un entier $k > 0$ et d'un indice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tels que la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A^k ait tous ses coefficients nuls excepté $a_{i,i}^k$. Ceci implique que pour tout $m > 0$, la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de l'itéré A^m sera égal à 1.

Réciproquement, soit $k > n$ et $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tels que $\lambda_i^k = 1$; alors d'après le lemme 7.2.3, pour tout $l \leq k$, la somme λ_i^l est égale à 1. Notons j tel que $a_{i,j}^k$ soit l'unique coefficient non-nul de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A^k . Comme la suite finie $i = i_1, \dots, i_k = j$ décrite dans la première propriété ci-dessus est de longueur supérieure à n , on en déduit l'existence d'un cycle définissant un double-bord stable pour T (cf. la définition 7.2.1).

On montre de même que l'existence d'un double-bord stable pour T est équivalente à ce que A^{n+1} possède une colonne dont la somme des coefficients est égale à 1. \square

Maintenant que nous avons caractérisé les types géométriques sans double-bord, nous allons pouvoir donner la première étape de la construction des surfaces à bord \mathcal{R}_m annoncées en introduction de ce chapitre.

Définition 7.2.5. — Une concrétisation $(\{R_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \phi)$ du type géométrique T sans double-bord sera la donnée de :

1. n rectangles orientés R_i munis de leur feuilletage par les verticales, de leur feuilletage par les horizontales et d'une orientation des horizontales, les verticales étant orientées de telle sorte qu'un couple formé par une horizontale et une verticale munisse R_i de l'orientation directe,
2. pour tout i compris entre 1 et n et tout j entre 1 et h_i , un sous-rectangle horizontal H_i^j de R_i , les sous-rectangles H_i^j étant deux-à-deux disjoints, H_i^1 (resp. $H_i^{h_i}$) ayant son côté horizontal inférieur (resp. supérieur) coïncidant avec le côté horizontal inférieur (resp. supérieur) du rectangle R_i et la numérotation des H_i^j étant compatible avec l'orientation des verticales de R_i ,
3. pour tout i de 1 à n et tout j de 1 à v_i , un sous-rectangle vertical V_i^j de R_i , ces sous-rectangles étant deux-à-deux disjoints, V_i^1 (resp. $V_i^{v_i}$) ayant son côté vertical gauche (resp. droit) égal au côté vertical gauche (resp. droit) de R_i et la numérotation des V_i^j étant compatible avec l'orientation des horizontales de R_i ,
4. un homéomorphisme ϕ de l'union $\bigcup_{i,j} H_i^j$ dans l'union $\bigcup_{k,l} V_k^l$ vérifiant la propriété suivante : pour tous i, j, k, l tels que $\Phi(h_i^j) = (v_k^l, \varepsilon)$ avec $\varepsilon = \pm 1$, la restriction de ϕ à H_i^j est un homéomorphisme dans V_k^l préservant l'orientation, conjuguant les feuilletages horizontaux et les feuilletages verticaux des sous-rectangles et préservant ou inversant l'orientation des verticales suivant que ε vaut 1 ou -1 respectivement.

Définition 7.2.6. — On dira d'une concrétisation qu'elle est affine si pour tout (i, j) , la restriction de ϕ au sous-rectangle H_i^j est une application affine sur le sous-rectangle vertical correspondant.

Les concrétisations ont comme essentiel défaut de ne pas être *a priori* hyperboliques. Nous allons à présent définir des concrétisations ayant une propriété topologique remplaçant l'hyperbolicité, nous les appellerons réalisations et ce sont elles qui nous serviront dans la suite à construire les HV-surfaces à bord et à coins \mathcal{R}_m .

Notons I_i^u , pour tout i , le quotient, par les horizontales, du rectangle R_i d'une concrétisation ; c'est un segment (non réduit à un point) orienté par l'orientation des verticales de R_i . L'image des h_i sous-rectangles horizontaux H_i^j de R_i est une famille de sous-segments J_i^j de I_i^u deux-à-deux disjoints et d'indexation croissante pour

l'ordre de R_i . Les extrémités de I_i^u sont extrémités de $J_i^{h_i}$ et de J_i^l . L'homéomorphisme ϕ a été choisi préservant les feuilles du feuilletage horizontal, il passe donc au quotient en une application ϕ^u . Si $\phi(H_i^j)$ est égal à V_k^l , la restriction de ϕ^u à J_i^j est un homéomorphisme de J_i^j dans I_k^u .

De même, le passage au quotient par les verticales définit des segments I_i^s et ϕ^{-1} passe au quotient en une application $(\phi^{-1})^s$.

Définition 7.2.7. — Nous appellerons réalisation toute concrétisation du type géométrique T telle que les applications ϕ^u et $(\phi^{-1})^s$ définies ci-dessus sont continues markoviennes (cf. la définition 5.1.3).

Proposition 7.2.8. — Pour tout type géométrique sans double-bord, il existe au moins une réalisation.

Tout type géométrique admet une concrétisation affine. La preuve de la proposition est donc une conséquence directe du lemme que voici :

Lemme 7.2.9. — Soit T un type géométrique sans double-bord. Alors toute concrétisation affine de T est une réalisation.

Démonstration. — Soit $(\{R_i\}, \phi)$ une concrétisation affine de T . Nous allons montrer que ϕ^{n+1} est hyperbolique, c'est-à-dire qu'en tout point de son domaine de définition sa différentielle dilate les vecteurs verticaux et contracte les vecteurs horizontaux : ainsi les applications $(\phi^u)^{n+1}$ et $((\phi^{-1})^s)^{n+1}$ seront-elles dilatantes donc markoviennes. Les arguments étant identiques pour ϕ^u et $(\phi^{-1})^s$, nous ne donnons que la démonstration du caractère dilatant de ϕ^u .

Le domaine de définition de l'application ϕ^{n+1} est formé d'une union de sous-rectangles horizontaux deux-à-deux disjoints et inclus dans les H_i^j et l'image de chacun de ces sous-rectangles horizontaux est un sous-rectangle vertical inclus dans un V_k^l . La restriction de ϕ^{n+1} à une composante connexe de son domaine de définition est affine et préserve le feuilletage horizontal et le feuilletage vertical. Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice d'incidence de T . Alors le coefficient $a_{i,j}^{n+1}$ de la matrice A^{n+1} est égal au nombre de composantes connexes du domaine de définition de ϕ^{n+1} incluses dans R_i dont l'image par ϕ^{n+1} est incluse dans R_j (en d'autres termes, a_i^{n+1} est le nombre de composantes connexes de $\phi^{n+1}(R_i) \cap R_j$).

D'après le lemme 7.2.4, la somme des coefficients d'une ligne quelconque de A^{n+1} est supérieure à 2, on en déduit que pour tout i , R_i contient au moins deux composantes connexes du domaine de définition de ϕ^{n+1} . Munissons chaque rectangle R_i d'une métrique euclidienne de telle sorte que la longueur des côtés verticaux et horizontaux soit égale à 1. Toute composante connexe ρ du domaine de définition de ϕ^{n+1} est alors un sous-rectangle horizontal dont la longueur du côté vertical est strictement inférieure à 1 ; notons $\varepsilon \in]0, 1[$ la borne supérieure de ces longueurs. De plus, la composante connexe ρ s'envoie par une application affine sur un sous-rectangle vertical

dont, par définition, le côté vertical est de longueur 1. L'application ϕ^{n+1} dilate donc strictement les vecteurs verticaux d'un facteur supérieur à $1/\varepsilon$. On en déduit que la différentielle de $(\phi^u)^{n+1}$ est supérieure à $1/\varepsilon$, ce qui montre que ϕ^u est dilatante. \square

7.3. Genre d'une partition de Markov géométrisée

Soit T un type géométrique de partition de Markov sans double-bord. Dans ce paragraphe, nous allons construire, à partir d'une réalisation (dont la définition et l'existence ont été données dans le paragraphe 7.2), des HV-surfaces à bord et à coins \mathcal{R}_m munies d'une dynamique (nous les appellerons $m^{\text{ièmes}}$ -réalisantes) qui caractériseront le type géométrique T . Ces surfaces compactes nous permettront de définir le genre d'un type géométrique de partition de Markov et, dans les paragraphes suivants, d'étudier la finitude éventuelle de ce genre. Rappelons que nous pouvons construire ces \mathcal{R}_m car les rectangles d'une réalisation de T sans double-bord ne sont pas dégénérés (*i.e.* non réduits à un segment voire à un point).

Définition 7.3.1. — Soit $(\{R_i\}, \phi)$ une réalisation du type géométrique T sans double-bord. Nous appellerons trou horizontal de R_i et noterons \tilde{H}_i^j pour tout $j = 1, 2, \dots, h_i - 1$ le sous-rectangle horizontal de R_i séparant les sous-rectangles horizontaux successifs H_i^j et H_i^{j+1} .

De même, nous appellerons trou vertical et noterons \tilde{V}_i^j le sous-rectangle vertical de R_i qui sépare les sous-rectangles verticaux successifs V_i^j et V_i^{j+1} .

Définition 7.3.2. — Soit $(\{R_i\}, \phi)$ une réalisation du type géométrique T sans double-bord. Nous noterons \mathcal{R} l'union disjointe des n rectangles R_i . $\mathcal{R} \times \{0\}$ sera notée \mathcal{R}_0 et pour tout $m > 0$, nous noterons \mathcal{R}_m l'union disjointe de $m + 1$ copies $\mathcal{R} \times \{i\}$ de \mathcal{R} quotientée par la relation :

$$\forall i = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (x, i) = (\phi^{-1}(x), i + 1)$$

partout où celle-ci a un sens. Nous appellerons \mathcal{R}_m la $m^{\text{ième}}$ -réalisante de T relative à $(\{R_i\}, \phi)$.

Lemme 7.3.3. — Soit T un type géométrique sans double-bord. Soient $(\{R_i\}, \phi)$ une réalisation et \mathcal{R}_m les réalisantes relatives à cette réalisation. Pour tout $m \geq 0$, \mathcal{R}_m est une HV-surface à bord et à coins orientée.

Démonstration. — Montrons par récurrence sur k que \mathcal{R}_k est une HV-surface à bord et à coins orientée telle que les sous-rectangles $V_i^j \times \{k\}$ soient verticaux et qu'ils aient leur bord horizontal disjoint des coins concaves de \mathcal{R}_k (*cf.* la figure 5).

- La surface \mathcal{R}_0 vérifie clairement l'hypothèse : en tant qu'union disjointe de n rectangles du plan, c'est une HV-surface à bord et à coins orientée sans coin concave et les sous-rectangles $V_i^j \times \{0\}$ sont verticaux par définition.

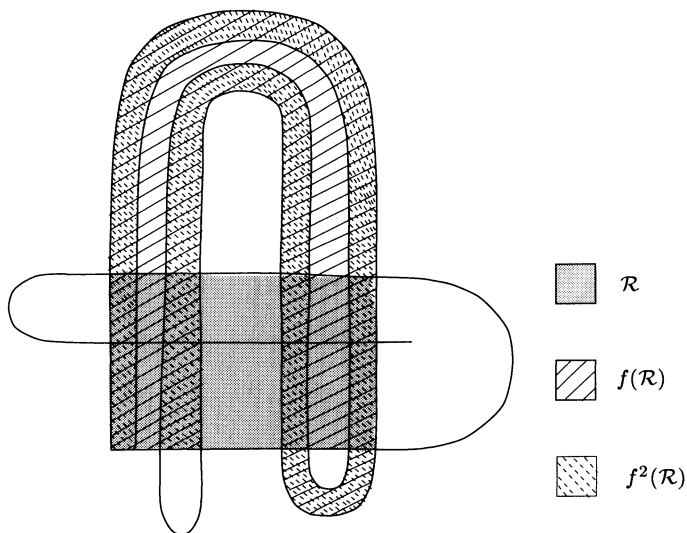


FIGURE 4. Les surfaces $\mathcal{R}_0 = R$, $\mathcal{R}_1 = R \cup f(R)$ et $\mathcal{R}_2 = R \cup f(R) \cup f^2(R)$ du fer à cheval

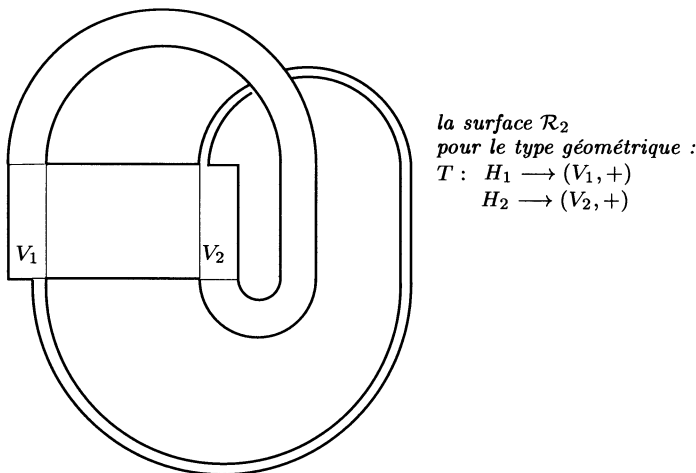
- Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée pour \mathcal{R}_k , $k \leq r-1$, et montrons que \mathcal{R}_r la vérifie aussi. \mathcal{R}_r est obtenue de \mathcal{R}_{r-1} en collant par ϕ , sur les sous-rectangles verticaux $V_i^j \times \{r-1\}$, les sous-rectangles horizontaux $H_i^j \times \{r\}$ de la surface $\mathcal{R} \times \{r\}$ qui est une union d'un nombre fini de rectangles disjoints. Les surfaces \mathcal{R}_{r-1} et $\mathcal{R} \times \{r\}$ vérifient les hypothèses du lemme 7.1.4 donc \mathcal{R}_r est une HV-surface à bord et à coins. L'application ϕ préserve l'orientation donc \mathcal{R}_r est une surface orientée. De plus, $\partial^h(\mathcal{R} \times \{r\})$ est une union finie de côtés horizontaux de sous-rectangles horizontaux donc le lemme 7.1.5 s'applique et nous donne :

1. Le bord horizontal de tout sous-rectangle $V_i^j \times \{r\}$ est inclus (par ϕ) dans le bord horizontal d'un sous-rectangle vertical $V_k^l \times \{r-1\}$. Les sous-rectangles $V_i^j \times \{r\}$ sont donc bien des sous-rectangles verticaux de la surface \mathcal{R}_r .
2. Le bord horizontal de $\mathcal{R} \times \{r\}$ est disjoint des coins concaves de \mathcal{R}_r . Par conséquent, les sous-rectangles verticaux $V_i^j \times \{r\}$ ont leurs côtés horizontaux disjoints des coins concaves de \mathcal{R}_r .

□

Définition 7.3.4. — On appellera HV-homéomorphisme un homéomorphisme ψ d'une HV-surface à bord et à coins S dans une HV-surface à bord et à coins S' tel que ψ conjugue le feuilletage horizontal de S et celui de S' d'une part et le feuilletage vertical de S et celui de S' d'autre part.

Remarques

FIGURE 5. \mathcal{R}_m est une HV-surface à bord et à coins

1. Il existe un plongement π de $\mathcal{R} \times \{i\}$ dans \mathcal{R}_m pour tout $i \leq m$ et ce plongement π est un HV-homéomorphisme. C'est en particulier vrai pour $i = 0$, i.e. l'union disjointe $\mathcal{R} = \coprod_i R_i$ se plonge dans \mathcal{R}_m pour tout $m \geq 0$; nous noterons encore R_i l'image par π de $R_i \times \{0\}$.
2. Pour tout $m' > m$, il existe un HV-homéomorphisme de \mathcal{R}_m dans l'union $\bigcup_{i=0}^m \pi(\mathcal{R} \times \{i\}) \subset \mathcal{R}_{m'}$ et un HV-homéomorphisme de \mathcal{R}_m dans $\bigcup_{i=1}^{m+1} \pi(\mathcal{R} \times \{i\})$.

Ces remarques nous permettent de considérer une dynamique sur \mathcal{R}_m : munissons \mathcal{R}_m de l'application ϕ_m définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \phi_m : \bigcup_{i=0}^{m-1} \pi(\mathcal{R} \times \{i\}) &\longrightarrow \bigcup_{i=1}^m \pi(\mathcal{R} \times \{i\}) \\ (x, i) &\longmapsto (x, i+1) \end{aligned}$$

L'application ϕ_m est clairement un HV-homéomorphisme sur son image.

Remarque. — Dans \mathcal{R}_m , pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ et tout $0 \leq k \leq m$, l'image par π de $R_i \times \{k\}$ est égale à $\phi_m^k(R_i)$.

Proposition 7.3.5. — Soient \mathcal{R}_m et \mathcal{R}'_m les $m^{\text{ième}}$ -réalisantes respectives de deux réalisations $(\{R_i\}, \phi)$ et $(\{R'_i\}, \phi')$ d'un type géométrique $T = (n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi)$ sans double-bord. Alors il existe un HV-homéomorphisme θ de \mathcal{R}_m dans \mathcal{R}'_m qui conjugue ϕ_m et ϕ'_m . De plus, l'image par θ de R_i est R'_i pour tout i de 1 à n et θ préserve l'orientation de gauche à droite des horizontales et l'orientation de bas en haut des verticales des rectangles R_i et R'_i .

Démonstration. — Nous avons obtenu précédemment (cf. la proposition 5.4.1) le résultat suivant : soient f et g deux difféomorphismes de Smale qui ont chacun un ensemble hyperbolique saturé de partition de Markov M_f et M_g respectivement, supposons que le type géométrique de M_f soit égal à celui de M_g . L'union des rectangles de M_f est alors homéomorphe à l'union des rectangles de M_g par un homéomorphisme qui préserve le feuilletage horizontal orienté et le feuilletage vertical orienté et qui conjugue f et g .

La clef de la démonstration de ce résultat est que les applications f^u et g^u (respectivement $(f^{-1})^s$ et $(g^{-1})^s$), obtenues par passage au quotient par le feuilletage stable (respectivement instable) de f et g (respectivement f^{-1} et g^{-1}), sont des applications continues markoviennes de même type combinatoire. D'après la définition 7.2.7 de réalisation, les applications ϕ^u, ϕ'^u et $(\phi^{-1})^s, (\phi'^{-1})^s$ sont continues markoviennes et de même type combinatoire car ϕ et ϕ' sont toutes les deux de type T . La preuve de la proposition 5.4.1 nous donne donc sans modification la conjugaison sur les rectangles avec les bonnes propriétés.

L'extension du résultat aux surfaces \mathcal{R}_m est obtenue en reprenant l'argument de la démonstration du corollaire 5.5.3. En effet, la preuve de ce corollaire repose sur le fait qu'un point qui sort de l'union des rectangles de la partition de Markov n'y revient jamais (cf. la proposition 5.5.1) et cette propriété est trivialement vérifiée par les surfaces \mathcal{R}_m car elle est à la base de leur construction. \square

Avant de parler de genre d'une partition de Markov géométrisée, rappelons la définition du genre d'une surface compacte à bord :

Définition 7.3.6. — Si X est une surface compacte à bord, on appelle genre de X et on note $g(X)$ la borne inférieure du genre des surfaces compactes sans bord qui contiennent une partie homéomorphe à X .

Voici une définition équivalente :

Définition 7.3.7. — Le genre $g(X)$ d'une surface compacte à bord X est la borne supérieure des entiers g tels qu'il existe une famille de couples $\{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_g, \beta_g)\}$ où, pour tout i , α_i et β_i sont des courbes fermées simples sur X , se coupant transversalement en un et un seul point, et telles que les unions $\alpha_i \cup \beta_i$ sont deux-à-deux disjointes.

Remarque. — D'après l'inclusion naturelle de \mathcal{R}_m dans \mathcal{R}_{m+1} , la suite (g_m) , où g_m est le genre de \mathcal{R}_m , est croissante. De deux choses l'une : soit elle est stationnaire, soit elle tend vers $+\infty$.

Définition 7.3.8. — On appellera genre du type géométrique T sans double-bord la borne supérieure de la suite $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

Proposition 7.3.9. — *Si T est le type géométrique sans double-bord d'une partition de Markov $M = \{R_i\}$ d'un ensemble saturé K d'un difféomorphisme de Smale f sur S et si \mathcal{R}_m est une réalisante de T relative à une réalisation quelconque de T , alors $\bigcup_{j=0}^m (\bigcup_i f^j(R_i))$ est une HV-surface HV-homéomorphe à \mathcal{R}_m .*

Démonstration. — Comme dans la démonstration de la proposition 7.3.5, la preuve est la même que celle du corollaire 5.5.3. \square

Corollaire 7.3.10. — *Si un type géométrique T sans double-bord est réalisable, alors son genre est fini.*

7.4. Description des obstructions et énoncé du théorème

Dans ce paragraphe, nous allons établir un critère qui permet de savoir si le genre d'un type géométrique sans double-bord est fini ou non. Ce critère se définit grâce aux réalisantes \mathcal{R}_m introduites au paragraphe 7.3. Nous sommes donc amenés à les étudier plus finement.

Soit $(\{R_i\}, \phi)$ une réalisation du type géométrique $T = (n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi)$ sans double-bord.

Définition 7.4.1. — *Le côté A du rectangle R est périodique s'il existe un entier k tel que $\phi^k(A)$ soit inclus dans A .*

Définition 7.4.2. — *Soit A un côté p -périodique d'un rectangle d'une réalisation de T . Nous appellerons séparatrice embryonnaire de A tout segment obtenu comme composante connexe de $A \setminus \phi^{kp}(A)$ pour k positif.*

Définition 7.4.3. — *Pour tout $k = 1, 2, \dots, m$, nous appellerons ruban de $k^{\text{ième}}$ -génération de \mathcal{R}_m l'adhérence d'une composante connexe de $\mathcal{R}_k \setminus \mathcal{R}_{k-1}$.*

Remarque. — Par le lemme 7.1.6, les rubans de $k^{\text{ième}}$ -génération sont des rectangles deux-à-deux disjoints et leurs côtés horizontaux sont inclus dans $\partial^h \mathcal{R}_m$ et donc dans $\partial^h \mathcal{R}_0 = \partial^h (\bigsqcup R_i)$ par le lemme 7.1.5. Ils sont l'image par ϕ_m^k des trous horizontaux de \mathcal{R}_0 ou de façon équivalente l'image par le plongement π des trous horizontaux $\tilde{H}_i^j \times \{k\}$, pour $0 < k \leq m$ (cf. la définition 7.3.1).

Pour tout $k > 0$ et tout $m \geq k$, les rubans de $k^{\text{ième}}$ -génération de \mathcal{R}_m sont au nombre de $\sum_{i=1}^n h_i - n$.

Nous avons vu au paragraphe 7.3 que les rectangles $R_i \times \{0\}$ étaient plongés dans toutes les réalisantes \mathcal{R}_m de la réalisation $(\{R_i\}, \phi)$ de T (nous avons noté R_i le rectangle de \mathcal{R}_m égal à $R_i \times \{0\}$). Ceci nous invite au lemme suivant :

Lemme 7.4.4. — *Quel que soit $m > 0$, l'adhérence de toute composante connexe de $\mathcal{R}_m \setminus \bigsqcup_{i=1}^n R_i$ est un ruban de $k^{\text{ième}}$ -génération pour un certain $k \leq m$.*

Démonstration. — Par le lemme 7.1.5, le bord horizontal de \mathcal{R}_m est strictement inclus dans celui de \mathcal{R}_0 qui n'est autre que l'union des côtés horizontaux des rectangles R_i :

$$\partial^h \mathcal{R}_m \subset \partial^h \mathcal{R}_{m-1} \subset \cdots \subset \partial^h \mathcal{R}_0.$$

Par construction, on a l'égalité $\mathcal{R}_m \setminus \mathcal{R}_0 = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{R}_i \setminus \mathcal{R}_{i-1}$. L'adhérence de $\mathcal{R}_m \setminus \mathcal{R}_0$ est donc l'union, pour i variant de 1 à m , des rubans de $i^{\text{ième}}$ -génération de \mathcal{R}_m . Pour prouver le lemme, il nous reste à montrer que les rubans sont deux-à-deux disjoints. Deux rubans de même génération sont disjoints par le lemme 7.1.6. Montrons donc que deux rubans de générations différentes sont disjoints. Soit r un ruban de $k^{\text{ième}}$ -génération et r' un ruban de $l^{\text{ième}}$ -génération, pour $l > k$. Comme $k < l$, le ruban de $k^{\text{ième}}$ -génération r est inclus dans la surface \mathcal{R}_{l-1} . Par le lemme 7.1.6, l'intersection du ruban de $l^{\text{ième}}$ -génération r' et de la surface \mathcal{R}_{l-1} est réduite aux côtés horizontaux de r' , qui sont inclus dans le bord horizontal de \mathcal{R}_0 . Par ailleurs, \mathcal{R}_0 ne rencontre r que suivant ses côtés horizontaux car $r \cap \mathcal{R}_{k-1} = \partial^h r$. Reste à voir que $\partial^h r \cap \partial^h r' = \emptyset$. Comme, dans \mathcal{R}_k , r est recollé suivant son bord horizontal sur $\partial^h \mathcal{R}_{k-1}$, l'intérieur des côtés horizontaux de r est disjoint du bord horizontal de \mathcal{R}_k . On en déduit que l'intersection de r avec le bord horizontal de \mathcal{R}_k est réduite à des coins concaves de \mathcal{R}_k (cf. la remarque après le lemme 7.1.4). Ces coins concaves sont aussi des coins concaves de \mathcal{R}_{l-1} d'après la même remarque. Dans \mathcal{R}_{l-1} , les côtés horizontaux de r' sont inclus dans les côtés horizontaux des sous-rectangles de $\mathcal{R} \times \{l-1\}$ et ces segments sont inclus dans $\partial^h \mathcal{R}_{l-1}$ et disjoints des coins concaves de \mathcal{R}_{l-1} d'après la démonstration du lemme 7.3.3. Ceci achève de montrer que r est disjoint de r' . \square

Ce lemme nous autorise la définition suivante :

Définition 7.4.5. — Nous appellerons *ruban de \mathcal{R}_m l'adhérence d'une composante connexe du complémentaire dans \mathcal{R}_m de $\coprod R_i$* ; c'est un ruban de $k^{\text{ième}}$ -génération pour un certain k inférieur ou égal à m .

Lemme 7.4.6. — Appelons \mathcal{B} le complémentaire, dans le bord horizontal de $\coprod R_i$, de l'intérieur des côtés horizontaux des trous verticaux et de leurs itérés positifs par ϕ . Quel que soit $m > 0$, tous les rubans de \mathcal{R}_m ont leurs côtés horizontaux dans \mathcal{B} .

Démonstration. — Démontrons ce lemme par récurrence.

Tout ruban de $1^{\text{ière}}$ -génération prolonge hors de $\coprod R_i$ un sous-rectangle vertical de $\coprod R_i$. De plus, $\partial^h(\coprod R_i)$ a pour image par ϕ l'union des côtés horizontaux des sous-rectangles verticaux de $\coprod R_i$ non prolongés par un ruban de $1^{\text{ière}}$ -génération et cette union est invariante par itération positive. Les rubans de $1^{\text{ière}}$ -génération sont donc disjoints de l'intérieur des itérés positifs des côtés horizontaux des trous verticaux.

Supposons que ce soit vrai pour les rubans de $k^{\text{ième}}$ -génération pour tout $k \leq l-1$ et montrons-le pour les rubans de $l^{\text{ième}}$ -génération. Tout ruban r de $l^{\text{ième}}$ -génération est l'itéré par ϕ_m d'un ruban r' de $(l-1)^{\text{ième}}$ -génération. Supposons que r ait un côté

horizontal c non disjoint de l'intérieur d'un itéré positif d'un côté horizontal de trou vertical, intervalle que nous notons τ . L'intervalle τ est un itéré strictement positif de l'intérieur d'un côté horizontal d'un trou vertical. En effet, les côtés horizontaux de trous verticaux sont d'intérieur disjoint des rubans de $1^{\text{ième}}$ -génération et les rubans de génération plus grande ont leurs côtés horizontaux tous inclus dans l'union des côtés horizontaux des sous-rectangles verticaux de $\coprod R_i$ non prolongés par un ruban de $1^{\text{ième}}$ -génération. On peut donc considérer $\phi_m^{-1}(\tau)$. Son intérieur est non disjoint de $\phi_m^{-1}(c)$ qui est un côté horizontal du ruban de $(l-1)^{\text{ième}}$ -génération $\phi_m^{-1}(r) = r'$. Ceci contredit l'hypothèse de récurrence et achève la preuve. \square

Afin d'énoncer le théorème donnant le critère que l'on cherche, décrivons maintenant quelques positions topologiques que peuvent prendre les rubans dans les réalisantes \mathcal{R}_m . Nous montrerons dans la suite que ces situations topologiques empêchent un type géométrique d'être de genre fini, et donc d'être réalisable. C'est pour cette raison que nous les nommons obstructions (cf. la figure 6).

Définition 7.4.7. — Soit \mathcal{R}_m une réalisante d'une réalisation $(\{R_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \phi)$ d'un type géométrique T .

1. Soit A un côté d'un rectangle R de la partition de Markov et soit r un ruban dont les deux côtés horizontaux sont inclus dans A . Nous dirons que la partition de Markov présente dans \mathcal{R}_m une obstruction (1) s'il existe un ruban r' dont un côté horizontal et un seul est inclus dans A entre les côtés horizontaux de r .
2. Soient A et A' deux côtés distincts parmi les $2n$ côtés horizontaux des rectangles de la partition de Markov. Soit r un ruban dont un côté horizontal est inclus dans A et dont l'autre est dans A' . Les côtés horizontaux de r sont orientés en tant qu'horizontales de sous-rectangles horizontaux inclus dans un rectangle $\pi(R_j \times \{k\})$ collé par ϕ aux rectangles contenant A et A' dans leur bord.

Munissons A et A' de l'orientation compatible avec l'orientation des côtés horizontaux de r . Nous dirons que la partition de Markov présente dans \mathcal{R}_m une obstruction (2) s'il existe un ruban r' dont un côté horizontal α est inclus dans A et l'autre α' est inclus dans A' , l'ordre dans A (pour l'orientation fixée ci-dessus) de α et de $r \cap A$ étant l'inverse de l'ordre dans A' de α' et de $r \cap A'$.

3. Soient S_1, S_2 et S_3 trois séparatrices embryonnaires distinctes et soit r un ruban dont les côtés horizontaux sont inclus l'un dans S_1 et l'autre dans S_2 . Nous dirons que la partition de Markov présente dans \mathcal{R}_m une obstruction (3) s'il existe un ruban r' dont un côté horizontal est dans S_1 et l'autre est dans S_3 .

Théorème 7.4.8 (Le genre d'un type). — Soit T un type géométrique sans double-bord, soient $(\{R_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \phi)$ une réalisation de T et \mathcal{R}_{6n} sa $6n^{\text{ième}}$ -réalisante. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

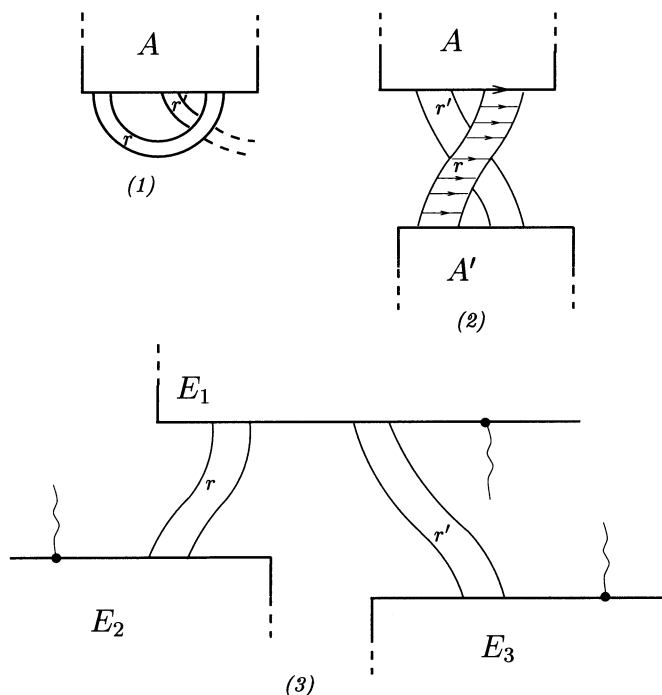


FIGURE 6. Les trois obstructions

1. La partition de Markov ne présente aucune des trois obstructions (1),(2),(3) dans \mathcal{R}_{6n} .
2. Le genre $g(T)$ du type géométrique est fini.

7.5. Lemmes topologiques

Nous avons vu que les surfaces \mathcal{R}_m sont obtenues à partir de $\coprod R_i$ en recollant le bord horizontal de rubans sur le bord de $\coprod R_i$. Ce qui nous intéresse est de contrôler le genre de la surface obtenue. Nous donnons, dans ce paragraphe, un lemme très simple et ses corollaires, qui vont permettre, suivant le cas, de majorer ou de minorer ce genre. Rappelons que deux définitions équivalentes du genre d'une surface compacte à bord ont été données à la fin du paragraphe 7.3.

Définition 7.5.1. — On dira qu'une surface compacte à bord \mathcal{D} est obtenue en attachant sans twist les anses A_i , pour $i \in \{1, \dots, n\}$, sur le disque D le long de segments a_i, b_i si :

1. D est un disque inclus dans \mathcal{D} ;
2. $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ est une famille de $2n$ segments de ∂D deux-à-deux disjoints ;

3. $\{A_1, \dots, A_n\}$ est une famille de disques de \mathcal{D} deux-à-deux disjoints, telle que $A_i \cap D$ est l'union $a_i \cup b_i$ pour tout i ;
4. \mathcal{D} est l'union de D et des A_i ;
5. La surface \mathcal{D} est orientable.

Lemme 7.5.2. — Soit \mathcal{D} une surface compacte à bord obtenue en recollant sans twist des anses A_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, sur un disque D le long de segments a_i, b_i . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La surface \mathcal{D} est de genre 0 (c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme de S sur une partie compacte de la sphère S^2).
2. Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $i \neq j$, il existe un intervalle $I \subset \partial D$ contenant $a_i \cup b_i$ et disjoint de $a_j \cup b_j$.

Démonstration. — 1) Supposons \mathcal{D} plongée dans S^2 . Soient i et j deux indices distincts. Considérons une courbe simple fermée γ obtenue comme union d'un segment dans D joignant un point $x \in a_i$ à un point $y \in b_i$ et d'un segment dans A_i joignant x à y . Alors la courbe simple fermée γ est disjointe de A_j , et disconnecte S^2 en deux disques ouverts. De plus, l'intersection du bord de D avec chacun de ces disques est un intervalle ouvert : notons I_0 celui de ces deux intervalles qui est inclus dans la composante connexe de $S^2 \setminus \gamma$ qui contient A_j . Remarquons que les extrémités x et y de I_0 appartiennent à a_i et b_i : on en déduit que $I_0 \setminus (a_i \cup b_i)$ est un intervalle I de ∂D contenant a_j et b_j mais disjoint de $a_i \cup b_i$ (cf. la figure 7). On a donc montré que la famille des segments $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ vérifie bien la propriété de l'item 2).

2) Supposons à présent la propriété de l'item 2) vérifiée par la famille

$$\{a_i, b_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}.$$

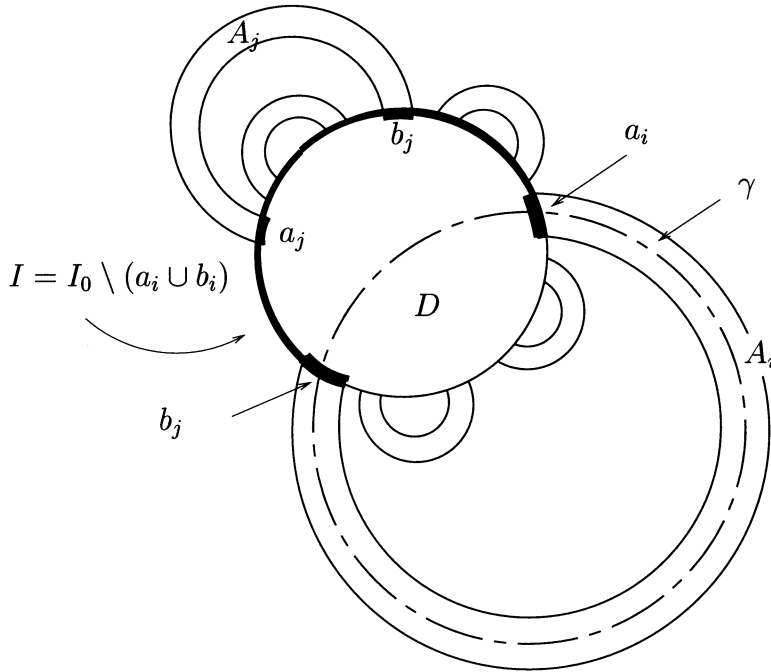
Nous allons montrer par récurrence sur n que la surface \mathcal{D} est plongeable dans la sphère.

Quand $n = 0$, il n'y a rien à faire, et quand $n = 1$ l'hypothèse d'orientation sur l'homéomorphisme de recollement assure que \mathcal{D} est une couronne, donc est de genre 0.

Supposons que la propriété 2) \Rightarrow 1) est vérifiée pour $n \leq p-1$ et montrons-la pour $n = p$. Pour tout couple (i, j) d'indices différents, l'une des composantes connexes de $\partial D \setminus a_i \cup b_i$ est disjointe de $a_j \cup b_j$; notons-la $J_{i,j}$. Notons $I_{i,j} = a_i \cup J_{i,j} \cup b_i$: c'est le plus petit segment de ∂D contenant $a_i \cup b_i$ et disjoint de $a_j \cup b_j$. Remarquons que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$a_k \subset I_{i,j} \iff b_k \subset I_{i,j}$$

En effet, si $k \neq i$, $a_k \cup b_k$ est inclus dans l'une des composantes de $\partial D \setminus (a_i \cup b_i)$. On en déduit que si a_k n'est pas disjoint de $I_{i,j}$ alors $I_{k,j}$ est inclus dans $I_{i,j}$. Considérons la famille des segments $I_{k,1}$. Cette famille étant finie, il existe un indice k tel que $I_{k,1}$

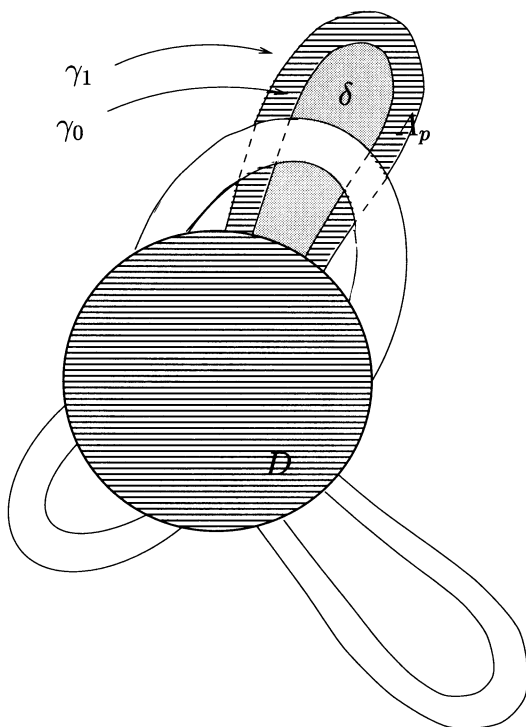
FIGURE 7. I isole $a_i \cup b_i$ de $a_j \cup b_j$

ne contient aucun $I_{l,1}$, $l \neq k$, et donc $I_{k,1}$ est disjoint de $a_l \cup b_l$. Quitte à changer l'indexation, on supposera que $I_{p,1}$ est disjoint de tous les $a_i \cup b_i$, $1 < i < p$.

La surface à bord $C_p = D \cup A_p \subset \mathcal{D}$ est homéomorphe à une couronne. Notons γ_0 la composante de son bord qui contient l'intervalle $J_{p,1}$, et γ_1 l'autre composante. La courbe γ_1 contient $a_i \cup b_i$ pour tout $i \neq p$. Notons D_1 le disque obtenu en recollant à la couronne C_p un disque δ par un homéomorphisme de γ_0 sur le bord de δ (cf. la figure 8). Remarquons que le bord ∂D_1 contient les segments $\{a_1, b_1, \dots, a_{p-1}, b_{p-1}\}$.

Il reste à montrer que D_1 muni de cette famille de segments vérifie la propriété de l'item 2), ce qui permettra alors d'utiliser l'hypothèse de récurrence. Remarquons d'abord que le bord ∂D_1 est l'union de l'intervalle $\partial D \setminus I_{p,1}$ (qui contient tous les $a_i \cup b_i$, $i \leq p-1$) et d'un segment σ contenu dans le bord de l'anse A_p . Soient $i, j \in \{1, \dots, p-1\}$, deux indices distincts. Remarquons que le segment $I_{i,j}$ ou bien contient $I_{p,1}$, ou bien est disjoint de $I_{p,1}$. Si le segment $I_{i,j}$ est disjoint de $I_{p,1}$, il est donc inclus dans le bord de D_1 , il n'y a donc rien à faire. Si $I_{i,j}$ contient $I_{p,1}$ alors il suffit de remplacer $I_{i,j}$ par le segment $\tilde{I}_{i,j} = (I_{i,j} \setminus I_{p,1}) \cup \sigma$: c'est un segment de ∂D_1 contenant $a_i \cup b_i$ et disjoint de $a_j \cup b_j$.

□

FIGURE 8. La couronne C_p et le disque $D_1 = C_p \cup \delta$

Lemme 7.5.3. — Soit $D \subset S^2$ une surface compacte obtenue en attachant sans twist des anses A_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ sur un disque D le long de segments a_i et b_i .

1. Soit $\sigma \subset \partial D$ un segment disjoint des a_i et b_i pour tout i . Notons ν le segment de ∂D , adhérence de $\partial D \setminus \sigma$. Alors il existe un disque $\Delta \subset S^2$ contenant toute anse A_i et tel que $\Delta \cap D = \nu$.
2. Soient σ et $\tilde{\sigma}$ deux segments disjoints de $\partial D \setminus \bigcup_i (a_i \cup b_i)$. Notons μ et $\tilde{\mu}$ les deux segments qui sont les adhérences des composantes connexes de $\partial D \setminus (\sigma \cup \tilde{\sigma})$. Alors il existe une anse $A \subset S^2$ contenant toutes les anses A_i , et telle que son intersection avec D est exactement $\mu \cup \tilde{\mu}$.

Démonstration. — 1) On choisit un segment $\sigma' \subset S^2$ de mêmes extrémités que σ (et ν), et dont l'intersection avec D est réduite à ses extrémités. La courbe $\sigma' \cup \sigma$ est alors une courbe simple fermée. Elle borde deux disques dans S^2 dont l'un est d'intérieur disjoint de D . L'autre disque contient D ; en coupant ce disque le long de ν on voit qu'il est l'union de D et d'un disque Δ bordé par la courbe simple fermée $\sigma' \cup \nu$. Le disque Δ est le disque annoncé.

2) La démonstration est presque identique :

Choisissons σ' et $\tilde{\sigma}'$ deux segments disjoints inclus dans S^2 de mêmes extrémités que σ et $\tilde{\sigma}$ respectivement, et dont l'intersection avec \mathcal{D} est réduite à leurs extrémités. Les courbes fermées simples disjointes $\sigma \cup \sigma'$ et $\tilde{\sigma} \cup \tilde{\sigma}'$ bordent des disques d et \tilde{d} disjoints et d'intérieur disjoint de \mathcal{D} . En ôtant à la sphère S^2 l'intérieur des disques d et \tilde{d} , on obtient une couronne contenant \mathcal{D} et qui est l'union de D et de l'anse annoncée (voir figure 9).

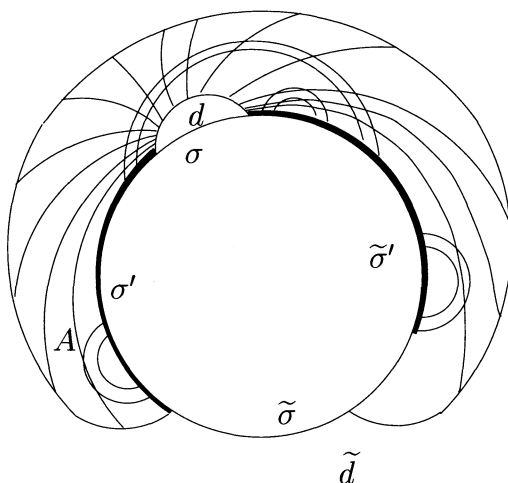


FIGURE 9. L'anse A contient toutes les anses A_i

□

Corollaire 7.5.4. — Soit \mathcal{D} une surface obtenue en attachant sans twist une famille finie A d'anses sur un disque D . Soient $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n$ des segments emboîtés inclus dans ∂D tels que :

1. Toute anse attachée sur D est non-disjointe de I_n .
2. Pour tout i , toute anse A d'intersection non-vide avec $I_{i+1} \setminus I_i$ vérifie

$$A \cap D \subset I_{i+1} \setminus I_i.$$

On dira alors que A est attachée sur $I_{i+1} \setminus I_i$, et on notera \mathcal{A}_{i+1} la famille des anses attachées sur cet intervalle.

3. Pour tout i , l'union de D et de toutes les anses attachées sur $I_{i+1} \setminus I_i$ est une surface C_i de genre 0.

La surface \mathcal{D} est alors de genre 0.

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur n .

Si $n = 1$, il suffit d'appliquer le lemme 7.5.2.

Supposons donc la propriété vraie pour $n \leq p-1$ et montrons le résultat pour $n = p$. Notons \mathcal{D}_0 la surface à bord obtenue en attachant sur D les anses attachées sur I_{p-1} (c'est à dire les anses appartenant à $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_p$). Par hypothèse de récurrence, \mathcal{D}_0 est une surface de genre 0.

D'après le lemme 7.5.3, on peut plonger \mathcal{D}_0 dans un disque $D_1 = D \cup \Delta$ où Δ est un disque dont l'intersection avec D est égale au segment I_{p-1} .

Remarquons que $I_p \setminus I_{p-1}$ est naturellement inclus dans le bord de D_1 . On en déduit que \mathcal{D} est naturellement incluse dans la surface à bord \mathcal{D}_1 obtenue en attachant à D_1 les anses de \mathcal{A}_p sur $I_p \setminus I_{p-1}$. Remarquons que \mathcal{D}_1 est obtenue en recollant le disque Δ sur la surface C_p le long du segment I_{p-1} . En recollant un disque sur une surface à bord, le long d'un segment de leur bord, on ne change pas le genre de la surface (la nouvelle surface se rétractant par déformation sur l'ancienne) : la surface \mathcal{D}_1 est de genre 0 et donc *a fortiori* \mathcal{D} est de genre 0, ce qui conclut. \square

Les lemmes précédents donnent des conditions pour qu'une surface à bord construite en attachant des anses sur un disque soit de genre 0. Nous aurons aussi besoin, au contraire, de minorer le genre d'une telle surface. C'est le rôle du lemme suivant :

Lemme 7.5.5. — *Soit \mathcal{D} une surface à bord obtenue en attachant sans twist une famille finie \mathcal{A} d'anses sur une disque D . Soient $I_1 \subset \dots \subset I_n$ n segments emboîtés du bord de D . On suppose :*

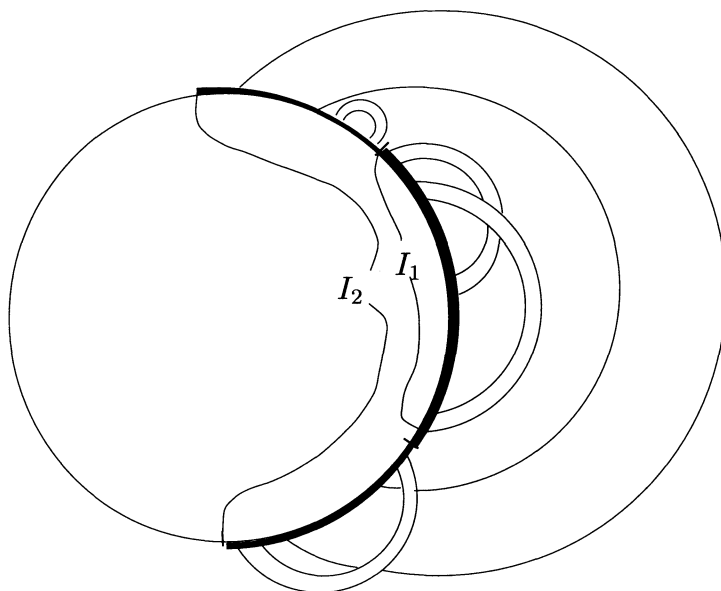
1. *Pour toute anse $A \in \mathcal{A}$, $A \cap D \subset I_n$.*
2. *Pour tout i , toute anse A d'intersection non-vide avec $I_{i+1} \setminus I_i$ vérifie $A \cap D \subset I_{i+1} \setminus I_i$. On dira alors que A est attachée sur $I_{i+1} \setminus I_i$, et on notera \mathcal{A}_{i+1} la famille des anses attachées sur cet intervalle.*
3. *Pour tout i , l'union de D et de toutes les anses attachées sur $I_{i+1} \setminus I_i$ est une surface C_i de genre $g(C_i) \geq 1$.*

La surface \mathcal{D} est alors de genre supérieur à n .

Démonstration. — La preuve se fait par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant donné par l'hypothèse.

Supposons le lemme vrai pour $n \leq p-1$ et montrons-le pour $n = p$. Par hypothèse de récurrence, la surface \mathcal{D}_{p-1} , union de D et des anses de \mathcal{A} attachées sur I_{p-1} , est de genre au moins $p-1$ (cf. la figure 10).

Soit c un segment plongé dans D , de mêmes extrémités que I_{p-1} , et tel que $c \cap \partial D$ soit réduit aux extrémités de c . Un tel segment coupe D en deux disques fermés : D_1 bordé par $I_{p-1} \cup c$ et D_2 bordé par $(\partial D \setminus I_{p-1}) \cup c$. Notons E_1 la surface obtenue en attachant à D_1 les anses de \mathcal{A} attachées à I_{p-1} , et E_2 la surface obtenue en attachant à D_2 les anses de la famille \mathcal{A}_p . Remarquons que E_1 a le même genre que \mathcal{D}_{p-1} (car \mathcal{D}_{p-1} se rétracte par déformation sur E_1), en particulier $g(E_1) \geq p-1$. De même E_2 a le même genre que la surface C_p , donc est de genre supérieur à 1. Enfin, E_1 et E_2

FIGURE 10. Le genre de \mathcal{D} est supérieur à 2

sont naturellement incluses dans \mathcal{D} et sont d'intérieurs disjoints : le genre de \mathcal{D} est donc supérieur à $g(E_1) + g(E_2)$ et donc à p . \square

7.6. Domaines fondamentaux autonomes couplés

En vue de démontrer le théorème 7.4.8, nous allons construire, pour chaque séparatrice embryonnaire, un domaine fondamental avec de bonnes propriétés (nous les précisons bientôt). Comme au paragraphe 7.4, soit $T = (n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi)$ un type géométrique sans double-bord. Soient $(\{R_i\}, \phi)$ une réalisation de T et pour tout $m \geq 0$, \mathcal{R}_m sa $m^{\text{ième}}$ -réalisante.

Définition 7.6.1. — Nous dirons qu'un intervalle I de \mathcal{R}_m est compatible (avec les rubans) s'il est dans le bord horizontal de $\coprod R_i \subset \mathcal{R}_m$ et si ses extrémités sont des points périodiques coins ou des extrémités de côtés horizontaux de rubans de \mathcal{R}_l pour l quelconque dans \mathbb{N} . Ceci est équivalent à dire que chaque extrémité de I a un itéré négatif par ϕ qui est un coin d'un sous-rectangle horizontal d'un rectangle R_i de la partition de Markov.

Tous les intervalles du bord horizontal de $\coprod R_i$ (plongée dans \mathcal{R}_m) que nous considérerons dans la suite seront des intervalles compatibles avec les rubans.

Remarque. — Soit I un intervalle compatible de \mathcal{R}_m . Pour tout entier l et pour tout ruban r de \mathcal{R}_l , l'intérieur de chacun des côtés horizontaux de r est soit disjoint de I , soit inclus dans I car on a montré que les rubans sont deux-à-deux disjoints et disjoints des points périodiques.

Définition 7.6.2. — On dira que l'intervalle I de $\partial^h \coprod R_i \subset \mathcal{R}_m$ porte le ruban r de \mathcal{R}_m si r a au moins un côté horizontal inclus dans I .

Définition 7.6.3. — Soit I un intervalle de $\partial^h \coprod R_i \subset \mathcal{R}_m$ compatible avec les rubans. On dira que I est saturé dans \mathcal{R}_s , pour $s \leq m$, si tout intervalle σ inclus dans I et disjoint des rubans portés par I vérifie qu'il existe $j \leq s$ tel que l'intervalle itéré de σ par ϕ_m^{-j} soit inclus dans un côté horizontal d'un trou vertical d'un rectangle R_k (cf. la définition 7.3.1).

Lemme 7.6.4. — Soit I un intervalle de \mathcal{R}_m saturé dans \mathcal{R}_s , pour $s \leq m$. Alors, pour tout entier $l \geq s$, aucun ruban de $\mathcal{R}_l \setminus \mathcal{R}_s$ n'est porté par I . Autrement dit, tous les rubans que porte I dans la surface \mathcal{R}_l sont de génération au plus s .

Démonstration. — Par définition de saturation, les rubans portés par I sont inclus dans \mathcal{R}_s et I privé des côtés horizontaux des rubans qu'il porte est une union (finie) d'intervalles qui sont tous des itérés positifs par ϕ_m de l'intérieur de côtés horizontaux de trous verticaux. Le lemme 7.4.6 assure alors qu'aucun ruban de \mathcal{R}_m ne peut rencontrer ces intervalles, ce qui conclut. \square

Remarques

1. Un intervalle I de \mathcal{R}_m saturé dans \mathcal{R}_k , $k < m$, est saturé dans \mathcal{R}_l pour tout $l \geq k$.
2. L'image par ϕ d'un intervalle de \mathcal{R}_m saturé dans \mathcal{R}_k est un intervalle saturé dans \mathcal{R}_{k+1} , pour tout $k < m$.
3. Soit σ un intervalle de $\partial^h \mathcal{R}_m$ tel que $\phi(\sigma)$ soit saturé de \mathcal{R}_k . Alors σ est un intervalle saturé de \mathcal{R}_k , pour $k < m$.

Définition 7.6.5. — On dira qu'un intervalle I de \mathcal{R}_m est autonome dans \mathcal{R}_k s'il est saturé dans \mathcal{R}_k et si tout ruban qui a un côté horizontal dans I a en fait ses deux côtés horizontaux dans I .

Définition 7.6.6. — On dira que deux intervalles I_1 et I_2 de \mathcal{R}_m sont autonomes couplés dans \mathcal{R}_k s'ils sont saturés dans \mathcal{R}_k et si tout ruban qui a un côté horizontal dans $I_1 \cup I_2$ a ses deux côtés horizontaux dans $I_1 \cup I_2$.

Définition 7.6.7. — Soient E_1, E_2, \dots, E_m les séparatrices embryonnaires stables de \mathcal{R}_s . Nous dirons que l'ensemble d'intervalles $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ est un système de domaines fondamentaux si, pour tout i , C_i est inclus dans E_i et est un domaine fondamental pour ϕ^{q_i} , où q_i est la période de E_i .

Le but de ce paragraphe est de chercher sous quelles conditions existe un système de domaines fondamentaux autonomes ou autonomes couplés :

Proposition 7.6.8. — *Si les obstructions (1),(2) et (3) sont écartées dans \mathcal{R}_{6n} , il existe un système de domaines fondamentaux autonomes ou autonomes couplés $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$, chaque C_i étant inclus dans la séparatrice embryonnaire stable E_i de \mathcal{R}_{6n} .*

Pour prouver cette proposition, nous allons introduire le graphe G suivant : Notons A_j , pour $j = 1, 2, \dots, 2n$, les côtés horizontaux des n rectangles R_i . Le graphe G a $2n$ sommets qui sont les A_j et présente une arête orientée de A_k à A_l si $\phi(A_k)$ est un segment inclus dans A_l (G a donc $2n$ arêtes). Ce graphe va nous permettre de déterminer l'indice k de la surface \mathcal{R}_k pour laquelle les domaines fondamentaux $[x, \phi^q(x)]^s$ sont saturés, où x désigne une extrémité d'un côté horizontal périodique de rectangle de la partition et où q désigne la période de ce côté. Il nous faudra ensuite chercher à coupler des domaines fondamentaux définis grâce aux $[x, \phi^q(x)]^s$ et à les rendre autonomes.

Rappelons que si A_j , pour $j = 1, 2, \dots, 2n$, désigne un des $2n$ côtés horizontaux des rectangles R_i de la partition de Markov, le graphe G a pour sommets les A_j et présente une arête orientée de A à A' si $\phi(A) \subset A'$ (G a donc $2n$ arêtes).

Définition 7.6.9. — *Nous qualifierons d'extrémal un sommet de G auquel n'arrive aucune flèche. Le bord de G est l'ensemble des sommets extrémaux de G .*

Propriétés du graphe G :

1. Plusieurs flèches peuvent aboutir en un même sommet et d'un sommet ne part qu'une seule flèche.
2. Une orbite périodique de ϕ sur le bord stable de $\coprod_{i=1}^n R_i$ correspond à une boucle dans le graphe G . Réciproquement, toute boucle $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_p \rightarrow A_1$ de G décrit une orbite périodique de ϕ .
3. Chaque composante connexe du graphe G comporte une unique boucle, éventuellement réduite à un point et une flèche de ce point à lui-même. La période de l'orbite périodique correspondante, si elle existe, est égale au nombre de sommets de cette boucle.
4. Soit A un sommet du graphe G . Notons $l(A)$ le nombre maximal de flèches dans un chemin orienté aboutissant à A , sans passer deux fois par le même sommet si A est dans une boucle périodique. Désignons par $q(A)$ la période de la boucle périodique de la composante connexe de G contenant A . Alors, pour tout A non périodique appartenant à G , $l(A)$ est strictement inférieur à $2n - q(A)$ (où n est le nombre de rectangles de la partition de Markov), et pour tout A périodique, $l(A)$ est strictement inférieur à $2n$.

Lemme 7.6.10. — *Tout sommet extrémal A de G correspond à un côté A de rectangle R_i saturé dans \mathcal{R}_1 (ce côté est un segment de \mathcal{R}_m , pour $m \geq 0$).*

Démonstration. — Soit R_i le rectangle de la partition dont A est un côté horizontal. Notons c_1, c_2, \dots, c_{v_i} les côtés horizontaux inclus dans A des sous-rectangles verticaux V_i^j de R_i et $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_{v_i-1}$ les côtés horizontaux des trous verticaux \tilde{V}_i^j de R_i . Comme A est extrémal, tout segment c_i est l'image d'un côté horizontal d'un sous-rectangle horizontal H_k^l qui n'est pas dans $\partial^h R_k$ et c_i porte donc un ruban dans \mathcal{R}_1 . □

Lemme 7.6.11. — *Soit A un sommet du graphe G qui n'est pas dans une boucle. Le sommet A correspond alors à un côté horizontal de rectangle R_i non périodique de \mathcal{R}_m qui est saturé dans \mathcal{R}_k , pour $m \geq k \geq l(A) + 1$.*

Démonstration. — Raisonnons par récurrence.

- Si A est extrémal, le lemme précédent donne le résultat.
- Supposons la propriété vraie pour $l(A) \leq l - 1$ et montrons le résultat pour $l(A) = l$. Appelons c_1, c_2, \dots, c_{v_i} la trace dans A des sous-rectangles verticaux du rectangle R_i contenant A . Étudions $\phi^{-1}(c_j)$. Soit c est un segment de \mathcal{R}_m qui n'est pas dans le bord horizontal de $\coprod_{i=1}^n R_i$ (c'est vrai pour tout $j \in \{1, 2, \dots, v_i\}$ lorsque A est extrémal), auquel cas c_j supporte un ruban dans \mathcal{R}_k pour $k \geq 1$. Soit il existe une flèche de $\phi^{-1}(A)$ vers A dans G . On a alors $l(\phi^{-1}(c_j)) = l - 1$ donc, par hypothèse de récurrence, $\phi^{-1}(c_j)$ est saturé dans \mathcal{R}_k avec $k \geq l$. Le segment c_j est donc saturé dans \mathcal{R}_k avec $k \geq l + 1$, d'après l'item 2) de la remarque faite au début de ce chapitre. Comme $A \setminus \cup_{j=1}^{v_i} c_j$ est exactement l'union des côtés horizontaux inclus dans A des trous verticaux de R_i et qu'on vient de montrer que tout c_j est saturé dans \mathcal{R}_{l+1} , le segment A est saturé dans \mathcal{R}_{l+1} . □

Lemme 7.6.12. — *Soit $A \times \{0\}$ inclus dans \mathcal{R}_{2n} un côté horizontal d'un rectangle de la partition de Markov. Supposons A périodique de période q . La (ou les deux) séparatrice(s) embryonnaire(s) de $A \times \{0\}$ comporte(nt) (chacune) un domaine fondamental pour ϕ^q qui est saturé dans \mathcal{R}_m , $m \geq 2n$.*

Démonstration. — Soit $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_j \rightarrow A_1$ une boucle de G . Chaque séparatrice embryonnaire de A_k est de période j car ϕ préserve l'orientation donc ϕ^j l'orientation du segment A_k . Notons x_k et x'_k les extrémités non périodiques de A_k , de telle sorte que $\phi(x_k)$ appartienne à $[x_{k+1}, \phi^j(x_{k+1})]$. (Si le point périodique de A_k est de type coin, seul x_k intervient.) Nous allons montrer que les domaines fondamentaux $[x_k, \phi^j(x_k)[$ (idem $[x'_k, \phi^j(x'_k)[$) sont saturés dans \mathcal{R}_{2n} . Pour tout k , x_k est une extrémité d'un côté horizontal périodique de rectangle donc $\phi(x_k)$ est une extrémité d'un côté horizontal périodique de sous-rectangle vertical. Par conséquent, $[x_{k+1}, \phi(x_k)[$ est un intervalle qui contient un nombre entier de côtés horizontaux c_l de sous-rectangles verticaux (successifs). Cet intervalle est donc compatible avec les

rubans. L'image par ϕ^{-1} de chacun de ces côtés c_l correspond à un sommet de G non périodique et appartenant à la composante connexe de G contenant la boucle $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_j \rightarrow A_1$. Le côté $\phi^{-1}(c_l)$ est donc saturé dans \mathcal{R}_{2n-j} par le lemme précédent. Le segment c_l est donc saturé dans \mathcal{R}_{2n-j+1} par le second item de la remarque faite au début de ce chapitre sur les intervalles saturés, donc $[x_{k+1}, \phi(x_k)[$ a la même propriété. L'intervalle $[x_{k+2}, \phi^2(x_k)[$ est l'union de $[x_{k+2}, \phi(x_{k+1})[$, qui est saturé dans \mathcal{R}_{2n-j+1} , et de $[\phi(x_{k+1}), \phi^2(x_k)[$, qui est saturé dans \mathcal{R}_{2n-j+2} en tant qu'image par ϕ d'un intervalle saturé de \mathcal{R}_{2n-j+1} , donc $[x_{k+2}, \phi^2(x_k)[$ est saturé dans \mathcal{R}_{2n-j+2} , etc. On obtient ainsi que $[x_{k+j} = x_k, \phi^j(x_k)[$ est un intervalle saturé de \mathcal{R}_{2n-j+j} , ce qui achève la démonstration. \square

Lemme 7.6.13. — *Soit r un ruban de \mathcal{R}_k , pour $k \in \mathbb{N}$, tel qu'une composante connexe c de $\partial^h r$ soit incluse dans une séparatrice embryonnaire E . Si D est un domaine fondamental de E qui est saturé dans \mathcal{R}_m , alors le ruban r possède un itéré dans \mathcal{R}_m dont le segment de bord horizontal itéré de c est inclus dans D .*

Démonstration. — En tant que segment de E , c a un itéré $c' = \phi^q(c)$ qui rencontre le domaine fondamental D (dans la surface \mathcal{R}_k pour tout k). Comme c est un côté horizontal de ruban et que D est compatible, c' est inclus dans D . Le ruban $\phi^q(r)$ de \mathcal{R}_{k+q} admet c' comme côté horizontal. Comme D est saturé dans \mathcal{R}_m , le ruban $\phi^q(r)$ est un ruban de \mathcal{R}_m . \square

Définition 7.6.14. — *Appelons domaines fondamentaux extrémaux les domaines fondamentaux saturés dans \mathcal{R}_{2n} construits dans la démonstration du lemme 7.6.12 (ils sont de la forme $D = [x, \phi^q(x)]$ où x est une extrémité d'un côté horizontal q -périodique d'un rectangle de la partition de Markov).*

Les domaines fondamentaux extrémaux sont saturés dans \mathcal{R}_{2n} , mais on ne peut pas affirmer qu'un ruban qui part de l'un d'eux, D , va à un côté périodique. Soit r un ruban de \mathcal{R}_{2n} qui joint D à un côté non périodique A . Le domaine fondamental D est saturé dans la surface \mathcal{R}_{2n} donc, par la remarque 2) sur les intervalles saturés, le domaine fondamental $\phi^{2n}(D)$ est saturé dans \mathcal{R}_{4n} . Le ruban $\phi^{2n}(r)$ est alors un ruban de la surface \mathcal{R}_{4n} qui joint $\phi^{2n}(D)$ à $\phi^{2n}(A)$. Les propriétés 3) et 4) du graphe G (disant que $l(A) < 2n - q(A)$ et que $q(A) \geq 1$) nous donnent que $\phi^{2n}(A)$ est inclus dans un côté périodique.

On a ainsi prouvé le lemme suivant :

Lemme 7.6.15. — *Soit D un domaine fondamental extrémal. Alors le domaine fondamental $\phi^{2n}(D)$ est saturé dans la surface \mathcal{R}_{4n} et tout ruban qui part de $\phi^{2n}(D)$ arrive dans un côté périodique.*

Remarque. — Soit E une séparatrice embryonnaire. Il existe alors un domaine fondamental extrémal D , inclus dans une séparatrice embryonnaire qui est dans l'orbite

par ϕ de E , tel que le domaine fondamental $\phi^{2n}(D)$ soit inclus dans E . Ce domaine fondamental $\phi^{2n}(D)$, saturé dans \mathcal{R}_{4n} , va jouer dans la suite un rôle non trivial.

Le lemme 7.6.15 nous fournit des domaines fondamentaux saturés inclus dans les côtés périodiques, mais il ne nous permet pas d'en déduire directement des domaines fondamentaux autonomes couplés. L'un des problèmes est décrit par la situation suivante : Soient E et E' deux séparatrices embryonnaires. Soit D_1 le domaine fondamental extrémal inclus dans E et soit $\phi^{2n}(D_2) \subset E$ le domaine fondamental inclus dans E et signalé dans la remarque ci-dessus. Soient D'_1 et $\phi^{2n}(D'_2)$ les domaines fondamentaux analogues inclus dans E' . Appelons γ' l'union de D'_1 et de l'intervalle de E' situé entre D'_1 et $\phi^{2n}(D'_2)$. Il peut exister un ruban r de \mathcal{R}_{4n} joignant $\phi^{2n}(D_2)$ à γ' . Le problème est qu'il peut aussi exister un ruban r' partant de γ' entre $r \cap \gamma'$ et $\phi^{2n}(D'_2)$ et aboutissant dans un côté non périodique (cf. la figure 11).

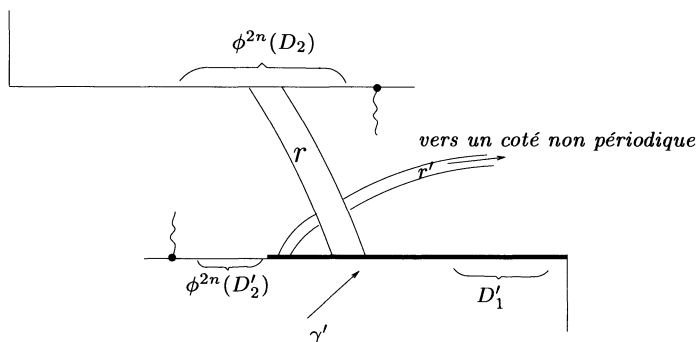


FIGURE 11. Une situation délicate

Lemme 7.6.16. — Soit E une séparatrice embryonnaire de période q contenant les domaines fondamentaux $D = [x, \phi^q(x)[$ (extrémal) et $\phi^{2n}(D') = [\phi^{2n}(x'), \phi^{2n+q}(x')[$, où D' est extrémal. Alors le segment $\gamma = [x, \phi^{2n+q}(x')[$ de E est saturé dans \mathcal{R}_{4n} donc dans \mathcal{R}_{6n} . De plus, pour tout entier naturel α tel que $0 \leq \alpha q \leq 2n$, le domaine fondamental $\phi^{2n+\alpha q}(D')$ de E est saturé dans \mathcal{R}_{6n} et tout ruban qui part de $\phi^{2n+\alpha q}(D')$ arrive dans un côté périodique.

Démonstration. — Soit a tel que $2n = b + qa$ avec $0 \leq b < q$. Le point $\phi^b(x')$ appartient à D . L'intervalle γ est l'union de D et de $\cup_{t=0}^a \phi^{b+ tq}(D')$, donc est saturé car D et $\phi^{b+ tq}(D')$ sont saturés dans \mathcal{R}_{4n} .

Pour tout entier $0 \leq \alpha \leq 2n/q$, le domaine fondamental $\phi^{2n+\alpha q}(D')$ est saturé dans la surface $\mathcal{R}_{4n+\alpha q}$ par la seconde remarque sur les intervalles saturés. Tout ruban de \mathcal{R}_{6n} qui part du domaine fondamental $\phi^{2n+\alpha q}(D')$ a son itéré par $\phi^{-\alpha q}$ qui part de $\phi^{2n}(D')$. Le lemme 7.6.15 permet alors de conclure. \square

Lemme 7.6.17. — Soient r un ruban de \mathcal{R}_m et c un de ses côtés horizontaux. On suppose qu'il existe $s > 0$ tel que $\phi^{-s}(c)$ soit un segment c' inclus dans le bord horizontal de $\coprod R_i$. Alors il existe un ruban r' de \mathcal{R}_{m-s} tel que $\phi^s(r') = r$.

Démonstration. — Comme r est un ruban, il existe un trou horizontal \tilde{H}_i^j et $t > 0$ tels que $\phi^{-t}(c)$ soit un côté horizontal c_0 de \tilde{H}_i^j (cf. le lemme 7.4.4). L'invariance par ϕ de $\partial^h \coprod R_i$ nous assure que tout itéré négatif ou nul de c_0 est disjoint de $\partial^h \coprod R_i$. Remarquons que c' est égal à $\phi^{t-s}(c_0)$. Il est par hypothèse inclus dans le bord horizontal de $\coprod R_i$ donc $t - s$ est strictement positif. Le ruban $\phi^{t-s}(\tilde{H}_i^j) = r'$ est le ruban annoncé. \square

Lemme 7.6.18. — Soit E une séparatrice embryonnaire de période q .

1. Dans \mathcal{R}_{6n} , tout ruban qui part de E a un itéré joignant E à un côté périodique.
2. Soit r un ruban de \mathcal{R}_{6n} qui a un côté horizontal c dans E et l'autre c' dans un côté périodique. L'itéré par ϕ^q ou ϕ^{-q} de r est alors un ruban de la surface \mathcal{R}_{6n} dont le côté horizontal itéré de c est inclus dans E et dont l'autre côté horizontal (itéré de c') est inclus dans un côté périodique.

Démonstration. — Soient D le domaine fondamental extrémal de E et D' le domaine fondamental extrémal tel que $\phi^{2n}(D')$ soit inclus dans E . L'intervalle $\phi^{2n}(D')$ est saturé dans \mathcal{R}_{4n} par le lemme 7.6.15 donc dans \mathcal{R}_{6n} . Tout ruban de \mathcal{R}_{6n} qui part de E a alors un itéré qui part de $\phi^{2n}(D')$ par le lemme 7.6.13 et aboutit dans un côté périodique par le lemme 7.6.15.

Soit r un ruban de \mathcal{R}_{6n} avec une composante connexe c de $\partial^h r$ incluse dans E et l'autre c' incluse dans un côté périodique. La séparatrice embryonnaire E est un intervalle de la forme $[x, \phi^{6n}(\tilde{x})[$ où x est l'extrémité de E qui est un coin du rectangle de la partition et \tilde{x} est une extrémité d'un côté périodique. Écrivons maintenant $2n$ comme $2n = b + aq$, avec $0 \leq b < q$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $b + \alpha q \leq 6n < b + (\alpha + 1)q$. La séparatrice embryonnaire E est alors l'union de D , des intervalles $\phi^{b+aq}(D')$ où $t \in \{0, 1, \dots, \alpha\}$ et de $\phi^{6n}(\tilde{D})$. Si c est inclus dans $D \cup (\cup_{t=0}^{\alpha} \phi^{b+aq} D')$, le ruban $\phi^q(r)$ convient. En effet, $\phi^{2n} D'$ est saturé dans \mathcal{R}_{4n} et $q < 2n$ donc $\phi^{2n+q} D'$ est saturé dans \mathcal{R}_{6n} donc $\phi^q(r)$ est un ruban de \mathcal{R}_{6n} . De plus, il a ses deux côtés horizontaux dans des côtés périodiques puisqu'il est un itéré positif de r .

Si c est inclus dans $(\cup_{i=a+1}^{\alpha} \phi^{b+iq} D') \cup \phi^{6n} \tilde{D}$, le segment $\phi^{-q}(c)$ est inclus dans un domaine fondamental $\phi^{2n+sq} D'$, avec $0 \leq sq \leq 4n$. Considérons $\phi^{-(s+1)q}(c)$. C'est un segment de $\phi^{2n} D'$. En particulier, ce segment est inclus dans $\partial^h \coprod R_i$ et porte donc un ruban de \mathcal{R}_{6n} qui est $\phi^{-(s+1)q}(r)$ par le lemme 7.6.17. De plus, le lemme 7.6.16 implique que ce ruban a son autre côté horizontal dans un côté périodique. Le ruban $\phi^{sq}(\phi^{-(s+1)q}(r)) = \phi^{-q}(r)$ est un ruban de \mathcal{R}_{6n} et a ses deux côtés horizontaux dans des séparatrices embryonnaires. \square

Lemme 7.6.19. — Soient E et E' deux séparatrices embryonnaires. Sous l'hypothèse que l'obstruction (3) est évitée dans \mathcal{R}_{6n} , si r est un ruban avec un côté horizontal dans E et l'autre dans E' , alors E et E' ont même période.

Démonstration. — Soit r un ruban joignant E à E' . Quitte à inverser les rôles de E et E' , on peut supposer la période q de E strictement inférieure à la période de E' . Par le lemme 7.6.18, l'un des rubans $\phi^q(r)$ ou $\phi^{-q}(r)$ est un ruban de \mathcal{R}_{6n} qui a une composante de bord horizontal dans E et l'autre dans un côté périodique mais pas dans E' par hypothèse sur les périodes. Ce ruban crée avec r une obstruction (3) dans \mathcal{R}_{6n} , ce qui donne une contradiction. \square

Nous sommes à présent en mesure de construire le système de domaines fondamentaux autonomes couplés annoncé pour \mathcal{R}_{6n} et d'achever ainsi la preuve de la proposition 7.6.8.

Soient E une séparatrice embryonnaire de période q , D le domaine fondamental extrémal tel que $\phi^{2n}(D)$ soit inclus dans E (cf. la remarque après le lemme 7.6.15), E' une autre séparatrice embryonnaire de période q' et $\phi^{2n}(D')$ comme pour E .

Étudions d'abord le cas où la séparatrice embryonnaire E' est différente de E et où la surface \mathcal{R}_{6n} admet un ruban r dont une composante connexe de bord horizontal est dans E et l'autre dans E' .

Lemme 7.6.20. — Si r est un ruban avec un côté horizontal dans E et l'autre dans E' , il existe un itéré de r joignant soit les domaines fondamentaux $\phi^{2n}(D) \subset E$ et $\phi^{2n-\alpha q}(D')$ de E' pour $\alpha \geq 0$, soit les domaines fondamentaux analogues en inversant les rôles de E et E' .

Démonstration. — En effet, par le lemme 7.6.19, E et E' ont même période q car on a supposé que l'obstruction (3) était écartée dans \mathcal{R}_{6n} . Par le lemme 7.6.15, le ruban r a un itéré $\phi^{mq}(r)$ dans \mathcal{R}_{6n} qui part de $\phi^{2n}(D)$ et arrive dans E' et un itéré $\phi^{m'q}(r)$ (également dans \mathcal{R}_{6n}) qui part de $\phi^{2n}(D')$ et arrive dans E , car $\phi^{2n}(D)$ et $\phi^{2n}(D')$ sont saturés dans \mathcal{R}_{6n} . Quitte à inverser les rôles de E et E' , l'entier m est inférieur à l'entier m' et $\phi^{mq}(r)$ joint $\phi^{2n}(D)$ à $\phi^{2n-\alpha q}(D') \cap S'$ pour un certain $\alpha \geq 0$. \square

Soit r un ruban donné par le lemme précédent, dont un côté horizontal est dans $\phi^{2n}(D) \cup \phi^{2n}(D')$ et dont l'autre côté horizontal est plus éloigné du point périodique de la séparatrice embryonnaire qui le contient que le domaine fondamental $\phi^{2n}(D)$ ou $\phi^{2n}(D')$ correspondant. Appelons x le point de $r \cap E$ le plus éloigné sur E du point périodique associé à E et x' le point analogue sur E' (cf. la figure 12).

Lemme 7.6.21. — Les domaines fondamentaux $C = [x, \phi^q(x)]^h$ et $C' = [x', \phi^q(x')]^h$ sont saturés, autonomes et couplés.

Démonstration. — Les intervalles C et C' sont compatibles avec les rubans et sont inclus dans les segments saturés γ et γ' donnés par le lemme 7.6.16, ils sont donc saturés dans \mathcal{R}_{6n} . L'obstruction (1) est écartée dans la surface \mathcal{R}_{6n} donc tout ruban

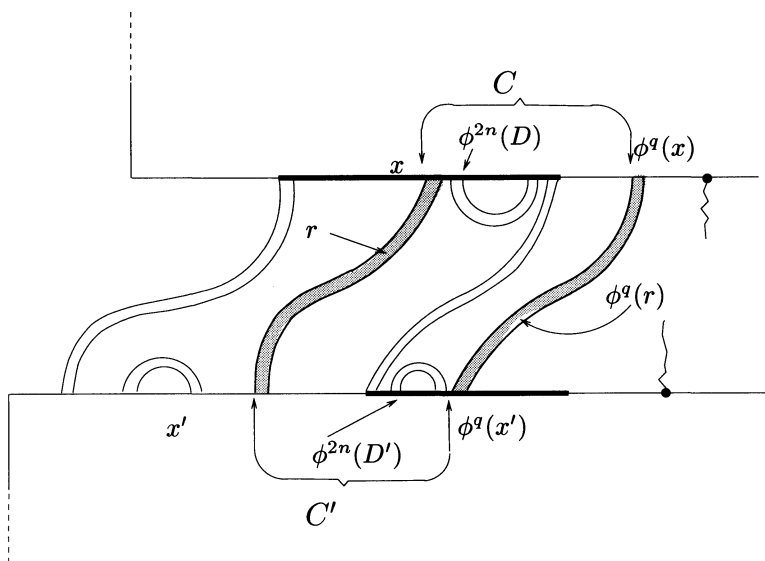


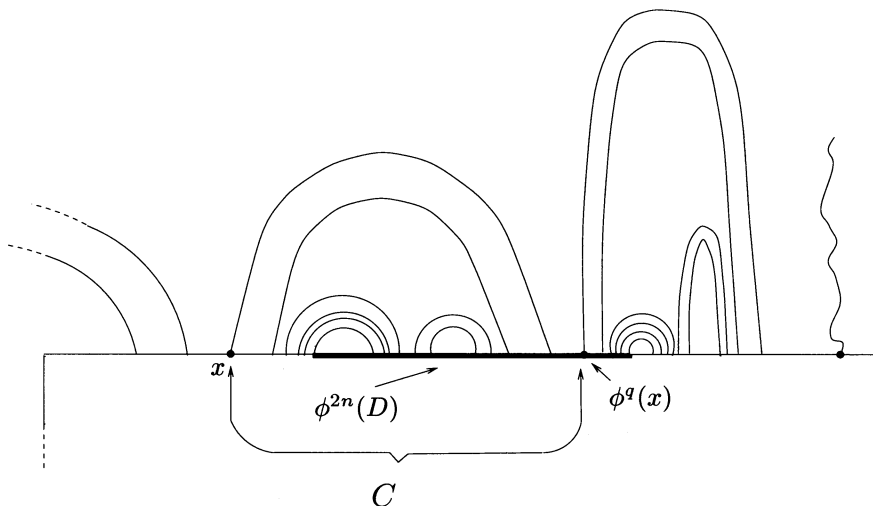
FIGURE 12. Domaines fondamentaux autonomes couplés

qui joint C à E (resp. C' à E') joint en fait C à C (resp. C' à C') ; comme l'obstruction (3) est écartée, E et E' sont couplées et comme l'obstruction (2) est écartée, tout ruban de C à E' aboutit en fait dans C' . \square

Traitions enfin le cas d'une séparatrice embryonnaire E telle que tout ruban qui part de $\phi^{2n}(D)$ aboutisse sur E . Soit \tilde{D} le domaine fondamental extrémal de E (donné par la définition 7.6.14). Soit γ le plus petit intervalle de E contenant \tilde{D} et $\phi^{2n}(D)$. Considérons tous les rubans de \mathcal{R}_{6n} ayant un côté horizontal dans $\phi^{2n}(D)$ et l'autre dans γ . On note r celui d'entre eux qui aboutit dans γ le plus loin possible du point périodique de E , c'est un ruban de \mathcal{R}_{4n} . Soit x le point de $\partial^h r$ le plus éloigné du point périodique de E et y l'autre extrémité du côté vertical de r passant par x (cf. la figure 13).

Lemme 7.6.22. — *Le domaine fondamental $C = [x, \Phi^q(x)]^h$ est saturé et autonome.*

Démonstration. — Le domaine fondamental C est saturé dans \mathcal{R}_{6n} . En effet, C est inclus dans l'intervalle γ introduit juste avant l'énoncé du lemme et cet intervalle est celui qui apparaît dans le lemme 7.6.16. Le ruban $\phi^q(r)$ est donc aussi un ruban de \mathcal{R}_{6n} . Vérifions que tout ruban qui part de C arrive dans C . Le point $\phi^q(x)$ ne peut pas être entre x et y sur E car sinon, les rubans r et $\phi^q(r)$ donneraient une obstruction (1) dans la surface \mathcal{R}_{6n} . Le point $\phi^q(x)$ ne peut pas être entre $\phi^{2n}(D)$ et le point périodique relatif à E , il se situe donc dans $\phi^{2n}(D) \setminus ([x, y]^h \cap \phi^{2n}(D))$. Un ruban qui part de C entre x et y , pour ne pas créer d'obstruction (1) avec r , arrive nécessairement dans C . Soit r' un ruban qui part de C entre y et $\phi^q(x)$. Par définition

FIGURE 13. Choix de C si E est non couplée

de x , le segment de E entre les deux composantes de $\partial^h r'$ ne peut pas contenir x . Il ne peut pas plus contenir y , sinon il créerait avec r une obstruction (1) dans \mathcal{R}_{6n} . Supposons que r' n'ait pas ses deux composantes de bord horizontal dans l'intervalle $[y, \phi^q(x)]^h$ de C , soit c celle des deux qui n'est pas dans C . Par le lemme 7.6.13, r' a un itéré par ϕ^{-q} qui joint C à E tel que l'itéré de c soit dans C . Comme cet itéré de ruban ne doit pas contredire la définition de x ni créer d'obstruction (1) dans \mathcal{R}_{6n} avec r , il joint nécessairement $]y, \phi^q(x)]^h$ à $]y, \phi^q(x)]^h$. Ceci contredit l'hypothèse sur r' et montre que C est autonome. \square

7.7. Sans obstruction, le type géométrique T est de genre fini

Soient $(\{R_i\}, \phi)$ une réalisation du type géométrique T sans double-bord et \mathcal{R}_{6n} sa $6n^{\text{ième}}$ -réalisante. Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que si la partition de Markov de T ne présente pas les obstructions (1),(2) et (3) dans la surface \mathcal{R}_{6n} , le genre du type géométrique T est fini. Cette affirmation démontre le sens direct du théorème 7.4.8 qui est le résultat principal de ce chapitre :

Proposition 7.7.1. — *Si les obstructions sont écartées dans la surface \mathcal{R}_{6n} , le type géométrique T (sans double-bord) a un genre fini, qui est égal au genre g_{6n} de la surface \mathcal{R}_{6n} .*

Par la proposition 7.6.8 et puisque les obstructions sont écartées dans \mathcal{R}_{6n} , il existe un système Σ de domaines fondamentaux autonomes couplés dans \mathcal{R}_{6n} .

Lemme 7.7.2. — *Supposons que la surface \mathcal{R}_{6n} ne présente aucune des trois obstructions. Toute paire (C, C') de domaines fondamentaux couplés du système Σ vérifie la propriété suivante : Orientons C et C' vers leur point périodique. Soit r un ruban avec un côté horizontal dans C et l'autre dans C' , ses côtés horizontaux sont orientés en tant qu'images d'horizontales d'un certain rectangle. Si l'orientation du côté horizontal de r inclus dans C coïncide avec l'orientation de C , alors il en est de même de l'orientation de $\partial^h r \cap C'$ et de l'orientation de C' .*

Démonstration. — Raisonons par l'absurde. Soient C et C' deux domaines fondamentaux couplés du système Σ et r un ruban avec un côté horizontal dans C et l'autre dans C' . Supposons que le ruban r ait un côté horizontal orienté comme l'un des domaines fondamentaux et l'autre avec l'orientation contraire à celle de l'autre domaine fondamental. Cette propriété est stable par itération. Considérons, dans l'orbite de r , le premier ruban \tilde{r} dont les deux côtés horizontaux soient dans des côtés périodiques de rectangles de la partition de Markov. Ce ruban \tilde{r} est dans la surface \mathcal{R}_{2n} . (En effet, la longueur, dans le graphe G , des chemins disjoints des boucles est strictement inférieure à $2n$, cf. les propriétés du graphe G au paragraphe 7.6). L'obstruction (3) est évitée dans \mathcal{R}_{6n} donc les séparatrices embryonnaires E et E' contenant les côtés horizontaux de \tilde{r} ont même période q par le lemme 7.6.19. L'itéré $\phi^q(\tilde{r})$ est un ruban de \mathcal{R}_{4n} car $q \leq 2n$, il a un côté horizontal dans E et l'autre dans E' et la propriété d'orientation vérifiée par \tilde{r} assure que \tilde{r} et son itéré $\phi^q(\tilde{r})$ créent une obstruction (2). Ceci contredit l'hypothèse donc le lemme est prouvé. \square

Pour démontrer la proposition 7.7.1, nous allons d'abord étudier le « genre local » de la surface \mathcal{R}_{6n} au voisinage des points périodiques bords. Moralement, les rubans portés par les domaines fondamentaux éléments de Σ ne doivent pas contribuer au genre de \mathcal{R}_{6n} car sinon, leurs itérés positifs vont également apporter du genre et le type géométrique T ne pourra pas avoir un genre fini.

Définition 7.7.3. — *Soit E une séparatrice embryonnaire non couplée. Si R est le rectangle de la partition de Markov contenant E , nous appellerons E -surface et noterons $d(E)$ l'union du rectangle R et des rubans de \mathcal{R}_{6n} ayant leurs côtés horizontaux dans le domaine fondamental C élément de Σ et inclus dans E .*

Définition 7.7.4. — *Soient E et E' deux séparatrices embryonnaires distinctes couplées et C et C' les domaines fondamentaux éléments de Σ inclus respectivement dans E et E' .*

1. *Si E et E' sont dans le bord horizontal d'un même rectangle R de la partition de Markov, nous appellerons (E, E') -surface et noterons $d(E, E')$ l'union du rectangle R et des rubans de la surface \mathcal{R}_{6n} ayant leurs côtés horizontaux dans $C \cup C'$.*

2. Supposons que E et E' soient dans le bord de deux rectangles différents, R et R' respectivement, de la partition de Markov. Nous appellerons alors (E, E') -surface et noterons $d(E, E')$ l'union de R , de R' et des rubans de la surface \mathcal{R}_{6n} qui ont leurs côtés horizontaux dans $C \cup C'$.

Proposition 7.7.5. — Sous l'hypothèse que les obstructions (1), (2) et (3) n'existent pas dans la surface \mathcal{R}_{6n} , pour toute séparatrice embryonnaire \tilde{E} non couplée et pour toute paire de séparatrices embryonnaires couplées (E, E') , la \tilde{E} -surface $d(\tilde{E})$ et la (E, E') -surface $d(E, E')$ sont des surfaces planaires.

Remarque-notation. — Toute \tilde{E} -surface est un disque à anses au sens de la définition 7.5.1 : la surface $d(\tilde{E})$ est le disque R sur le bord duquel sont attachées les anses obtenues comme l'adhérence des composantes connexes de $d(\tilde{E}) \setminus R$.

De même, toute (E, E') -surface peut se voir comme un disque $\Delta(E, E')$ sur le bord duquel sont attachées les anses obtenues comme l'adhérence des composantes connexes de $d(E, E') \setminus \Delta(E, E')$. En effet, si E et E' sont couplées et incluses dans le bord horizontal d'un même rectangle R de la partition de Markov, le disque $\Delta(E, E')$ est simplement R . Si E est dans le bord d'un rectangle R et E' dans le bord de $R' \neq R$, le lemme 7.7.2 et l'absence d'obstruction (2) dans \mathcal{R}_{6n} nous permettent de dire qu'il existe un ruban $r_{(E, E')}$ avec un côté horizontal dans C et l'autre dans C' tel que tout autre ruban joignant C à C' a ses côtés horizontaux entre ceux de $r_{(E, E')}$ et les points périodiques de E et E' . Dans ce cas, on définit le disque $\Delta(E, E')$ comme l'union des deux rectangles R et R' et du ruban $r_{(E, E')}$.

D'après le lemme 7.5.2, la proposition 7.7.5 ci-dessus est alors équivalente à la proposition suivante, que nous allons démontrer :

Proposition 7.7.6. — Si les trois obstructions sont écartées dans la surface \mathcal{R}_{6n} , on a les propriétés suivantes :

1. Pour toute séparatrice embryonnaire \tilde{E} non couplée, quels que soient les rubans r et r' appartenant à $d(\tilde{E})$, il existe un intervalle I inclus dans ∂R (où R est le rectangle de la partition de Markov contenant \tilde{E}) tel que les côtés horizontaux du ruban r sont tous deux inclus dans I et ceux du ruban r' sont tous deux inclus dans $\partial R \setminus I$.
2. Pour toutes séparatrices embryonnaires E et E' couplées, quels que soient les rubans r et r' de $d(E, E')$, il existe un intervalle I inclus dans le bord du disque $\Delta(E, E')$ tel que I contienne les deux côtés horizontaux du ruban r et que $\partial \Delta(E, E') \setminus I$ contienne les deux côtés horizontaux du ruban r' .

La démonstration de cette proposition se fait grâce aux deux lemmes suivants :

Lemme 7.7.7. — Soient, dans \mathcal{R}_{6n} , deux rubans r et r' dont les côtés horizontaux sont dans le bord du rectangle R de la partition de Markov. Supposons que tout intervalle

inclus dans le bord de R qui contient $r \cap \partial R$ contienne aussi au moins une composante de $r' \cap \partial R$, alors la surface \mathcal{R}_{6n} présente une obstruction.

Démonstration. — Si l'un des rubans r ou r' a ses deux côtés horizontaux dans un même côté horizontal de R , alors r et r' donnent une obstruction (1).

Supposons donc que les rubans r et r' joignent un côté horizontal A de R à l'autre, que nous notons A' . Les segments A et A' sont tous deux orientés de gauche à droite en tant qu'horizontales du rectangle R . L'une des composantes connexes de $\partial R \setminus \partial^h r$ contient le côté vertical gauche de R . Nous appellerons G cette composante connexe et D celle qui contient le côté vertical droit du rectangle R .

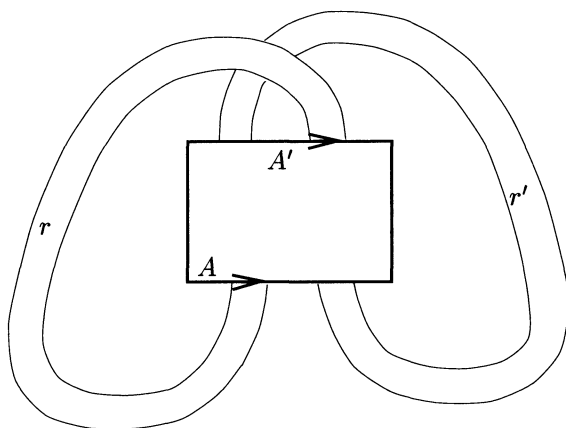


FIGURE 14. Les deux rubans donnent à \mathcal{R}_{6n} une obstruction (2)

Si $r' \cap A$ précède $r \cap A$ pour l'orientation de A , $r' \cap A$ est nécessairement inclus dans G . L'hypothèse implique alors que $r' \cap A'$ est dans D . Ce segment $r' \cap A'$ est donc après $r \cap A'$ pour l'orientation de A' , ce qui décrit exactement une obstruction (2) (cf. la figure 14). En effet, le ruban r est un itéré positif par ϕ_{6n} d'un trou horizontal d'un rectangle de la partition de Markov (cf. le lemme 7.4.4) donc ses côtés horizontaux sont orientés en tant qu'horizontales de rectangle. Comme la surface \mathcal{R}_{6n} est orientée (cf. le lemme 7.3.3), le bord horizontal de r induit une orientation sur A et A' compatible avec leur orientation en tant qu'horizontales de R (i.e. l'orientation naturelle et l'orientation induite sont soit les mêmes, soit inverses l'une de l'autre). Le lemme est donc démontré. \square

Lemme 7.7.8. — *Soit, dans la surface \mathcal{R}_{6n} , un ruban γ qui joint deux côtés périodiques A et B , A étant inclus dans le bord d'un rectangle R et B dans le bord d'un rectangle $R' \neq R$. Appelons D_γ le disque topologique égal à l'union des rectangles R et R' et du ruban γ . Supposons qu'il existe deux rubans r et r' de \mathcal{R}_{6n} tels que les côtés horizontaux de r et ceux de r' sont inclus dans $A \cup B$ et tels que r' ait un et un*

seul côté horizontal dans chaque composante de $\partial D_\gamma \setminus \partial^h r$. La surface \mathcal{R}_{6n} présente alors une obstruction.

Démonstration. — Orientons A et B par l'orientation des côtés horizontaux du ruban γ (rappelons que γ est en fait un itéré par ϕ_{6n} d'un trou horizontal de rectangle et à ce titre, ses horizontales sont orientées comme toute horizontale de rectangle).

Si r a ses deux côtés horizontaux dans A , de part et d'autre de $\gamma \cap A$, la surface \mathcal{R}_{6n} présente une obstruction (1). Si $\partial^h r$ est inclus dans une composante de $A \setminus (\gamma \cap A)$, \mathcal{R}_{6n} présente aussi une obstruction (1) car, dans cette composante connexe, r' a un et un seul côté horizontal entre ceux de r .

Si r part de A à gauche de $\gamma \cap A$ et arrive dans B à droite de $\gamma \cap B$, ou réciproquement, les rubans r et γ présentent une obstruction (2).

Sinon, comme D_γ est orienté (car la surface \mathcal{R}_{6n} l'est), $\partial D_\gamma \setminus \partial^h r$ a deux composantes connexes, appelons L celle qui contient l'intervalle de A situé entre $\gamma \cap A$ et $r \cap A$. Remarquons que l'intervalle σ de B situé entre $\gamma \cap B$ et $r \cap B$ est dans L .

Le ruban r' n'a qu'un côté horizontal dans L par hypothèse. Posons, pour fixer les idées, que $r' \cap L$ est inclus dans A . Si son autre côté horizontal est aussi dans A , r' crée avec γ ou r une obstruction (1). Si son autre côté horizontal est dans B , il n'est pas dans σ donc il crée avec γ ou r une obstruction (2). \square

Démonstration de la proposition 7.7.6. — D'une part, le lemme 7.7.7 démontre par contraposée la première propriété qu'affirme la proposition 7.7.6, d'autre part le lemme 7.7.8, avec $D_\gamma = \Delta(E, E')$, démontre la deuxième. \square

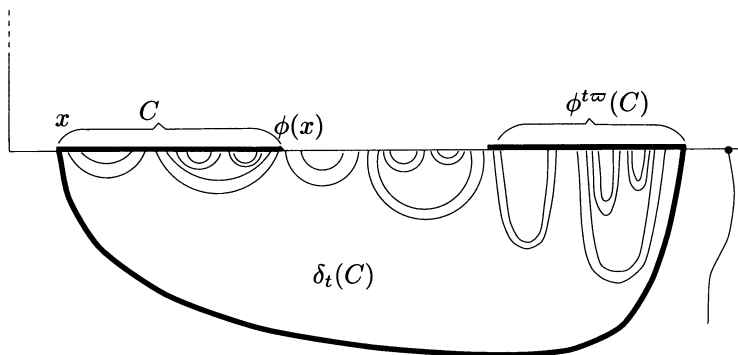
Si les obstructions sont écartées dans \mathcal{R}_{6n} , rappelons que la proposition 7.6.8 nous donne l'existence d'un système Σ de domaines fondamentaux autonomes couplés et que la proposition 7.7.5 implique que, pour toute séparatrice embryonnaire E , la E -surface $d(E)$ ou la (E, E') -surface $d(E, E')$, suivant que le domaine $C \in \Sigma$ inclus dans E est couplé ou non, est planaire. Appelons ϖ le *ppcm* des périodes des séparatrices embryonnaires.

Lemme 7.7.9. — *Soit C un domaine fondamental non couplé élément de Σ . Soit q la période de la séparatrice embryonnaire E . Soient $\pi = \varpi/q$ et R le rectangle de la partition de Markov contenant C dans son bord.*

Alors, pour tout $t \geq 0$, l'union du rectangle R et des rubans qui, dans \mathcal{R}_s pour tout $s \geq 6n + t\varpi$, sont portés par l'intervalle C_t égal à

$$C \cup \phi^q(C) \cup \phi^{2q}(C) \cup \dots \cup \phi^{t\varpi}(C) = \phi^{t\pi q}(C)$$

est une surface planaire, que nous notons $d^{t\varpi}(E)$. Cette surface se plonge dans l'union de R et d'un disque $\delta_t(C)$ qui contient tous les rubans portés par $\partial d^{t\varpi}(E)$ et dont l'intersection avec R est réduite au segment $\text{Adh}(C_t)$.

FIGURE 15. Pour C non couplé, le « genre local » est nul

Démonstration. — Appelons x l'extrémité de C la plus éloignée du point périodique p de la séparatrice embryonnaire E . Les segments suivants, inclus dans le bord de R , sont emboîtés :

$$I_0 = [x, p] \supset I_1 = [\phi^q(x), p] \supset \cdots \supset I_{t\pi} = [\phi^{t\pi q}(x), p] = [\phi^{t\varpi}(x), p].$$

Pour tout j , $I_j \setminus I_{j+1} = \phi^{jq}(C)$. On déduit de la proposition 7.7.5 que l'union du rectangle R et des rubans attachés sur $I_j \setminus I_{j+1}$ est une surface planeaire pour tout j . Donc le corollaire 7.5.4 nous donne que la surface $d^{t\varpi}(E)$ est planeaire (cf. la figure 15). On peut par conséquent appliquer le premier item du lemme 7.5.3 à $d^{t\varpi}(E)$ pour obtenir un disque contenant tous ses rubans et recollé à R le long de $\text{Adh}(C)$. \square

Lemme 7.7.10. — Soient C et C' deux domaines fondamentaux couplés éléments de Σ et inclus respectivement dans les séparatrices embryonnaires E et E' . Supposons que E et E' soient toutes deux dans le bord d'un même rectangle R de la partition de Markov. Soient q la période de E et $\pi = \varpi/q$. Soit $\Delta(E, E')$ le disque relatif à E et E' introduit dans la remarque juste avant la proposition 7.7.6.

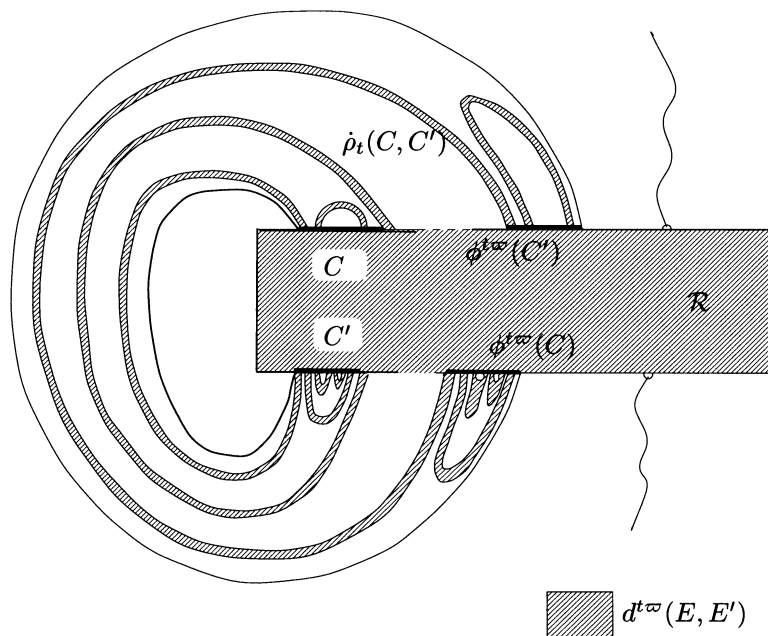
Alors, pour tout $t \geq 0$, l'union du disque $\Delta(E, E')$ et des rubans de \mathcal{R}_s , pour tout $s \geq 6n + t\varpi$, qui ont leurs côtés horizontaux dans

$$(C \cup C') \cup (\phi^q(C \cup C')) \cup \cdots \cup (\phi^{t\varpi}(C \cup C'))$$

est une surface planeaire, que nous appellerons $d^{t\varpi}(E, E')$. Cette surface se plonge dans une couronne formée par l'union de R et d'une anse $\hat{\rho}_t(C, C')$ recollée sur ∂R le long de $(C \cup C') \cup \cdots \cup (\phi^{t\varpi}(C \cup C'))$.

Démonstration. — Soient p le point périodique de E et p' celui de E' . Rappelons que par le lemme 7.6.19, les points périodiques p et p' , s'ils sont différents, ont même période q .

Montrons d'abord que l'une des deux composantes connexes de $\partial R \setminus (C \cup C')$ contient les deux points périodiques p et p' . C'est clair si $p = p'$. Sinon, le lemme 7.7.2

FIGURE 16. La couronne formée par R et l'anse $\dot{\rho}_t(C, C')$

nous donne que les séparatrices embryonnaires E et E' , orientées vers leur point périodique, sont orientées toutes deux dans le même sens (de gauche à droite ou de droite à gauche). On en déduit le résultat (cf. la figure 16). Appelons I_0 l'union de cette composante connexe contenant p et p' et des domaines fondamentaux C et C' et notons x et y les extrémités de I_0 .

Définissons les segments emboîtés

$$I_1 = [\phi^q(x), \phi^q(y)] \subset I_0$$

$$I_2 = [\phi^{2q}(x), \phi^{2q}(y)] \subset I_1$$

...

$$I_{t\pi} = [\phi^{t\pi q}(x), \phi^{t\pi q}(y)] = [\phi^{t\varpi}(x), \phi^{t\varpi}(y)] \subset I_{t\pi-1}.$$

On déduit de la proposition 7.7.5 que, pour tout k , l'union de $\Delta(E, E')$ et des rubans portés par $I_k \setminus I_{k+1}$ est une surface plane (en remplaçant, dans $d(E, E')$, les rubans ayant leurs côtés horizontaux dans $C \cup C'$ par les rubans ayant leurs côtés horizontaux dans $I_k \setminus I_{k+1} = \phi^{kq}(C \cup C')$). Le corollaire 7.5.4 affirme alors que $d^{t\varpi}(E, E')$ est plane. Le lemme 7.5.3, appliqué en prenant $\mu = C \cup \phi^q(C) \cup \dots \cup \phi^{t\varpi}(C)$ et $\mu' = C' \cup \phi^q(C') \cup \dots \cup \phi^{t\varpi}(C')$, termine la preuve. \square

Lemme 7.7.11. — Soient C et C' deux domaines fondamentaux couplés éléments de Σ et inclus respectivement dans les séparatrices embryonnaires E et E' . Supposons que E

et E' soient incluses dans le bord de deux rectangles différents, R et R' respectivement. Soit q la période de E . Soient p et p' les points périodiques associés respectivement à E et E' . Notons π l'entier ϖ/q . Soit $\Delta(E, E')$ le disque relatif à E et E' introduit dans la remarque juste avant la proposition 7.7.6.

Alors, pour tout $t \geq 0$, l'union du disque $\Delta(E, E')$ et des rubans de \mathcal{R}_s , pour tout $s \geq 6n + t\varpi$, qui ont leurs côtés horizontaux dans

$$(C \cup C') \cup (\phi^q(C \cup C')) \cup \dots \cup (\phi^{t\varpi}(C \cup C'))$$

est une surface planeaire, que nous appellerons $d^{t\varpi}(E, E')$. Cette surface se plonge dans un disque formé par l'union de R , de R' et d'un rectangle $\check{p}_t(C, C')$ dont un côté est recollé sur ∂R le long de $C \cup \dots \cup (\phi^{t\varpi}(C))$ et l'autre sur $\partial R'$ le long de $C' \cup \dots \cup (\phi^{t\varpi}(C'))$.

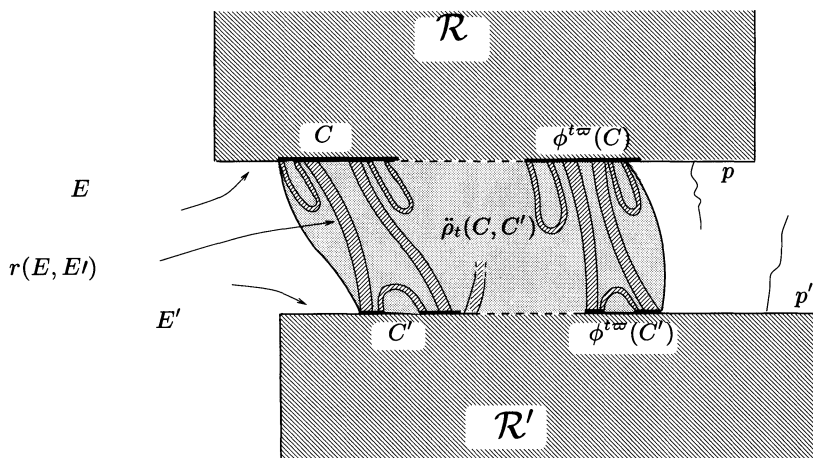


FIGURE 17. La surface $d^{t\varpi}(E, E')$ est planeaire

Démonstration. — D'après le lemme 7.6.19, les points périodiques p et p' ont même période, égale à q .

Appelons A le côté horizontal de R qui contient C , a le côté horizontal inclus dans C du ruban $r_{(E, E')}$, A' et a' les segments analogues dans $\partial R'$. Le lemme 7.7.2 montre que les points périodiques p et p' sont tous les deux soit à droite, soit à gauche de a ou a' dans $A \cup A'$ muni de l'orientation induite par celle des horizontales de $r_{(E, E')}$. Appelons x l'extrémité de C la plus proche de p et y celle de C' la plus proche de p' . Appelons I_0 le segment de $\partial\Delta(E, E')$ d'extrémités x et y qui contient les points périodiques p et p' (I_0 est le complémentaire dans $\partial\Delta(E, E')$ de l'intervalle union des intervalles entre a et p dans A et entre a' et p' dans A' et du côté vertical de $r_{(E, E')}$ qui joint les extrémités de a et de a' concernées). Afin de bien considérer tous

les rubans portés par $C \cup C'$ et autres que $r_{(E,E')}$, soit I_{-1} le plus petit segment de $\partial\Delta(E, E')$ contenant I_0 et les deux côtés horizontaux de tout ruban porté par l'union de l'intervalle de C entre a et x et de l'intervalle analogue de C' .

On peut, comme dans la preuve du lemme 7.7.10, définir des segments emboîtés de $\partial\Delta(E, E')$ (cf. la figure 18) :

$$\begin{aligned} I_0 &\subset I_{-1} \\ I_1 &= [\phi^q(x), \phi^q(y)] \subset I_0 \\ I_2 &= [\phi^{2q}(x), \phi^{2q}(y)] \subset I_1 \\ &\dots \\ I_{t\pi} &= [\phi^{t\pi q}(x), \phi^{t\pi q}(y)] = [\phi^{t\varpi}(x), \phi^{t\varpi}(y)] \subset I_{t\pi-1}. \end{aligned}$$

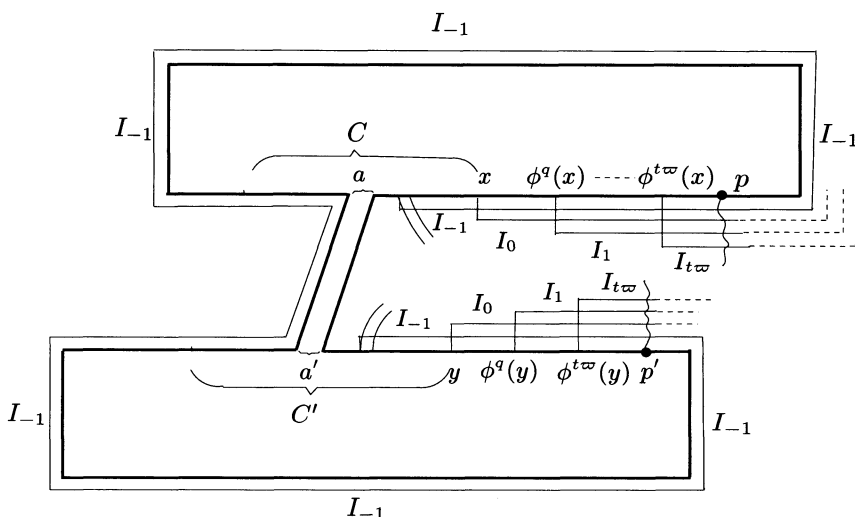


FIGURE 18. Les segments emboîtés

Soient z l'extrémité de C la plus éloignée du point périodique p et z' l'extrémité de C' la plus éloignée de p' . Le ruban $r_{(E,E')}$ a été choisi de telle sorte que les rubans qui ont un côté horizontal inclus dans C entre z et a ont tous leurs deux côtés horizontaux dans C (entre z et a). De même, les rubans qui ont un côté dans C' entre z' et a' ont tout leur bord horizontal entre z' et a' . Considérons l'union $\tilde{\Delta}(E, E')$ de $\Delta(E, E')$ et des rubans portés par $I_{-1} \setminus I_{t\pi}$: dans $\tilde{\Delta}(E, E')$, il n'y a donc pas de ruban porté par les sous-segments de I_{-1} situés entre z et a et entre z' et a' . Ici aussi, la proposition 7.7.5 et le corollaire 7.5.4 montrent que $\tilde{\Delta}(E, E')$ est une surface plane. L'item 2 du lemme 7.5.3 nous donne alors une anse $\alpha(E, E')$ contenant tous les rubans portés par $I_{-1} \setminus I_{t\pi}$ et recollée sur $\partial\tilde{\Delta}(E, E')$ le long de $I_{-1} \setminus I_{t\pi}$.

Considérons alors le disque $D = R \cup \alpha(E, E') \cup R'$. Sur son bord sont attachées l'anse $r_{(E,E')}$ et les rubans qu'on a ignorés pour former $\tilde{\Delta}(E, E')$ (cf. la figure 19).

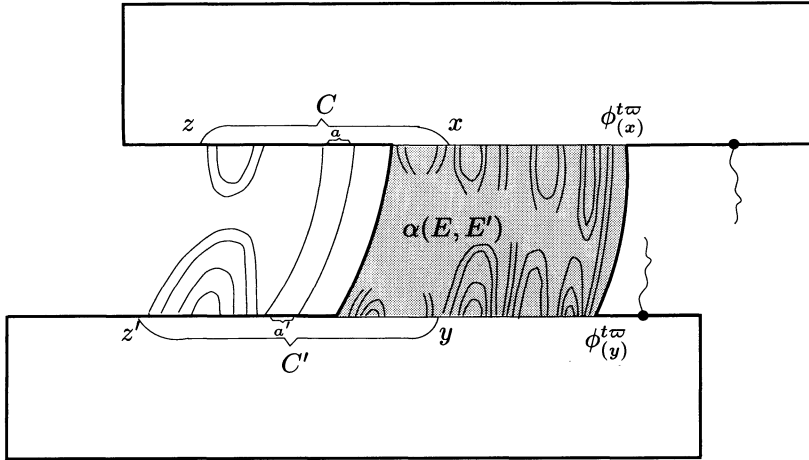


FIGURE 19. Le disque $D = R \cup R' \cup \alpha(E, E')$ et les anses attachées sur son bord

Une des composantes connexes de $\partial D \setminus \{z, z'\}$ contient les deux points périodiques, l'autre, que nous notons J , contient les côtés horizontaux de toutes les anses attachées sur le bord de D . En appliquant le lemme 7.5.3, on obtient un disque \tilde{D} qui contient toutes ces anses et dont l'intersection avec D est réduite au segment J .

Le rectangle $\check{p}_t(C, C')$ annoncé est l'union de l'anse $\alpha(E, E')$ et du disque \tilde{D} . \square

Démonstration de la proposition 7.7.1. — Soit $\tilde{\mathcal{R}}_t$ la surface obtenue de $\mathcal{R}_{6n+t\varpi}$ en la privant de l'intérieur et des côtés verticaux de tout ruban ayant un côté horizontal entre un domaine fondamental $\phi^{t\varpi}(C_i)$ et le point périodique p_i qui lui est associé. Pour tout $m \geq 6n$, il existe $t_0 \geq m$ tel que \mathcal{R}_m soit incluse dans $\tilde{\mathcal{R}}_t$ pour tout $t \geq t_0$. Il suffit donc de montrer que $g(\tilde{\mathcal{R}}_t)$ est égal à g_{6n} .

Pour tout domaine fondamental $C \in \Sigma$ non couplé, le lemme 7.7.9 nous donne un disque $\delta_0(C)$. De même, on associe à toute paire de domaines fondamentaux couplés éléments de Σ une anse $\dot{\rho}_0(C, C')$ ou un rectangle $\check{\rho}_0(C, C')$ par les lemmes 7.7.10 et 7.7.11. Soit $\hat{\mathcal{R}}_0$ la surface obtenue comme union de $\tilde{\mathcal{R}}_0$, des disques $\delta_0(C)$ pour tous les $C \in \Sigma$ non couplés, des anses $\dot{\rho}_0(C, C')$ et des rectangles $\check{\rho}_0(C, C')$ pour toutes les paires (C, C') de domaines fondamentaux couplés. Appelons $\hat{\mathcal{R}}_t$ l'union de $\hat{\mathcal{R}}_0$, des disques $\delta_t(C)$, des anses $\dot{\rho}_t(C, C')$ et des rectangles $\check{\rho}_t(C, C')$.

Par les lemmes 7.7.9, 7.7.10 et 7.7.11, la surface $\tilde{\mathcal{R}}_t$ se plonge dans $\hat{\mathcal{R}}_t$. De plus, chaque disque $\delta_t(C)$ se rétracte par déformation sur $\delta_0(C) \cup \text{Adh}(\mathcal{C}_t)$, chaque anse $\dot{\rho}_t(C, C')$ sur $\dot{\rho}_0(C, C') \cup (\phi^q(C \cup C')) \cup \dots \cup (\phi^{t\varpi}(C \cup C'))$ et chaque rectangle $\check{\rho}_t(C, C')$ sur $\check{\rho}_0(C, C') \cup (\phi^q(C \cup C')) \cup \dots \cup (\phi^{t\varpi}(C \cup C'))$.

La surface $\tilde{\mathcal{R}}_t$ se rétracte donc par déformation sur $\hat{\mathcal{R}}_0$. Ceci implique que \mathcal{R}_{6n} et $\tilde{\mathcal{R}}_t$ ont toutes les deux même genre que $\hat{\mathcal{R}}_0$, ce qui achève la preuve. \square

7.8. Les obstructions donnent à T un genre infini

Nous allons montrer ici que si la surface \mathcal{R}_m présente l'une des obstructions (1), (2), (3) définies au paragraphe 7.4, le genre du type géométrique T sans double-bord est infini :

Proposition 7.8.1. — *S'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que la surface \mathcal{R}_m présente l'une des trois obstructions (1), (2) ou (3) (cf. la définition 7.4.7), le genre du type géométrique T est infini.*

Cette proposition est la réciproque de la proposition 7.7.1. Elle donne la fin de la démonstration du théorème 7.4.8 qui est l'objet principal de ce chapitre.

Dans tout ce paragraphe, ψ désignera la plus petite puissance de ϕ laissant fixes toutes les séparatrices de l'homéomorphisme choisi pour la réalisation du type géométrique T .

Voici une série de lemmes dont les cinq premiers servent à montrer les trois derniers qui, eux, donnent la preuve de la proposition 7.8.1.

Lemme 7.8.2. — *Supposons qu'il existe, dans \mathcal{R}_m , une séparatrice embryonnaire E et un ruban r avec ses deux côtés horizontaux inclus dans E . S'il existe un ruban r' avec un côté horizontal dans E entre les deux composantes connexes de $\partial^h r$ et l'autre dans E mais disjoint du plus petit segment contenant $\partial^h r$, alors la suite $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini quand l tend vers l'infini.*

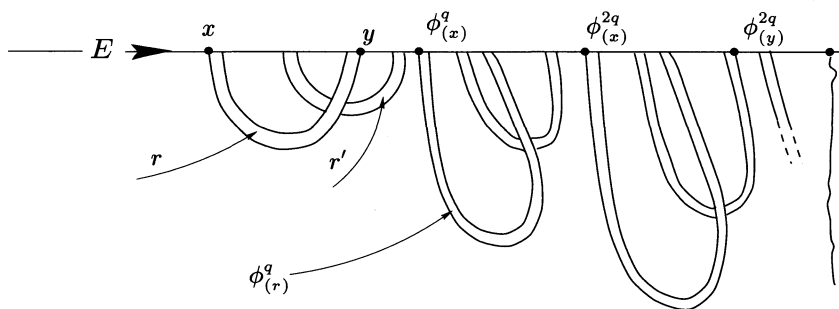


FIGURE 20. Les itérés de r et r' donnent du genre infini

Démonstration. — Soit $[x, y] \subset E$ le plus petit segment contenant les côtés horizontaux de r et de r' , le point y étant entre x et le point périodique p de E . Soit q un entier tel que $\psi^q([x, y])$ soit disjoint de $[x, y]$ (il suffit que $\psi^q(x)$ soit entre y et p). Considérons R , le rectangle de la partition contenant E dans son bord. La surface $R \cup r \cup r'$ est de genre 1 (cf. la définition à la fin du paragraphe 7.3) par le lemme 7.5.2. Les segments $[x, p], [\psi^q(x), p], \dots, [\psi^{lq}(x), p]$ sont emboîtés donc le lemme 7.5.5 nous assure que la surface $R \cup (r \cup r') \cup \dots \cup (\psi^{lq}(r) \cup \psi^{lq}(r'))$ est de genre au moins l (cf. la

figure 20). Le genre de toute surface \mathcal{R}_m contenant $R \cup (r \cup r') \cup \dots \cup (\psi^{lq}(r) \cup \psi^{lq}(r'))$ est par conséquent supérieur ou égal à l . Comme dans ce cas la surface \mathcal{R}_{m+q} contient $\psi^{(l+1)q}(r) \cup \psi^{(l+1)q}(r')$, on a le résultat. \square

Lemme 7.8.3. — *Supposons qu'il existe, dans \mathcal{R}_m , deux séparatrices embryonnaires E_1 et E_2 et deux rubans r_1 et r_2 joignant E_1 à E_2 . Supposons de plus qu'il existe un ruban r avec un côté horizontal dans E_1 entre $r_1 \cap E_1$ et $r_2 \cap E_1$ tel que son autre côté horizontal soit dans E_2 mais disjoint du plus petit segment a de E_2 contenant $(r_1 \cap E_2) \cup (r_2 \cap E_2)$. Alors la suite $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini quand l tend vers l'infini.*

Démonstration. — Soit R le rectangle de la partition de Markov contenant E_2 dans son bord, \tilde{R} celui contenant E_1 dans son bord. Soit r' un itéré positif de r par ψ (laissant fixes toutes les séparatrices) tel que :

1. le côté horizontal $r' \cap E_2$ soit disjoint du segment a ,
2. le côté horizontal $r' \cap E_1$ ne soit pas situé entre $r_1 \cap E_1$ et $r_2 \cap E_1$ (il est donc entre le point périodique p_1 de E_1 et $(r_1 \cup r_2) \cap E_1$).

Appelons a' le plus petit segment de E_2 contenant a et dont une extrémité est le point périodique p_2 de E_2 et b le plus petit segment de E_2 contenant $r \cap E_2$ et $r' \cap E_2$.

Étudions, dans un premier temps, le cas où les segments a et b sont disjoints, autrement dit où les côtés horizontaux $r \cap E_2$ et $r' \cap E_2$ sont tous deux inclus dans a' ou tous deux inclus dans $E_2 \setminus a'$. Considérons une horizontale \mathcal{H} du rectangle R . Les verticales de R issues des extrémités de a coupent \mathcal{H} chacune en un point, déterminant ainsi dans R un sous-rectangle R_a dont l'union avec les rubans r_1 et r_2 forme une anse A_a attachée sur E_1 . On définit de même, grâce à \mathcal{H} et aux verticales de R issues des extrémités de b , un rectangle R_b dont l'union avec les rubans r et r' est une anse A_b , attachée elle aussi sur E_1 (cf. la figure 21).

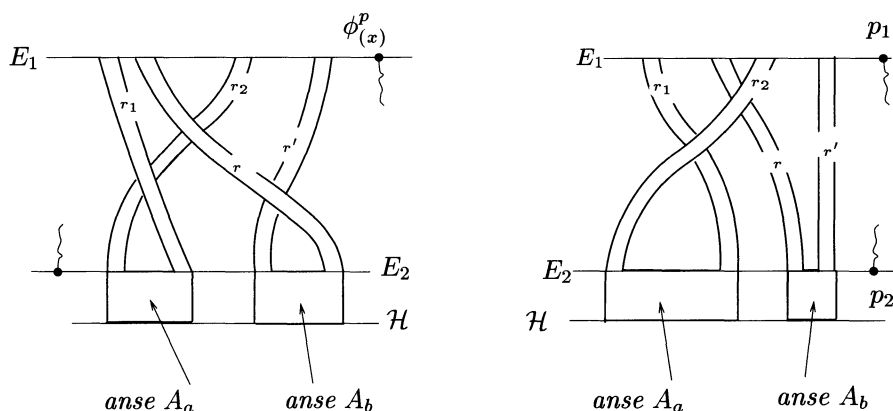


FIGURE 21. Les anses A_a et A_b : deux exemples

Nous allons utiliser A_a et A_b pour répéter l'argument de la preuve du lemme 7.8.2. Par le choix de r' , les anses A_a et A_b sont telles que leur union avec le rectangle \tilde{R} est une surface de genre 1 par le lemme 7.5.2. Soit x le point de $E_1 \cap (r_1 \cup r_2)$ le plus éloigné du point périodique p_1 de E_1 . Le segment $[x, p_1]$ de E_1 contient les côtés horizontaux inclus dans E_1 des quatre rubans r_1 , r_2 , r et r' . Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $[\psi^q(x), p_1]$ soit disjoint de ces quatre côtés horizontaux. Nous pouvons alors définir des segments emboîtés en vue d'appliquer le lemme 7.5.5 qui va minorer le genre de l'union du rectangle \tilde{R} et des anses attachées sur son bord : soient

$$I_0 = [x, p_1] \supset I_1 = [\psi^q(x), p_1] \supset \cdots \supset I_l = [\psi^{lq}(x), p_1].$$

Pour $j = 1, 2, \dots, l$, prolongeons les rubans

$$\psi^{jq}(r_1), \psi^{jq}(r_2) \quad \text{d'une part et} \quad \psi^{jq}(r), \psi^{jq}(r') \quad \text{d'autre part}$$

par un rectangle inclus dans R comme nous l'avons fait avec r_1, r_2 et r, r' pour former les anses A_a et A_b . Nous obtenons ainsi deux nouvelles anses, notées respectivement A_a^{jq} et A_b^{jq} . Le lemme 7.5.5 affirme alors que la surface

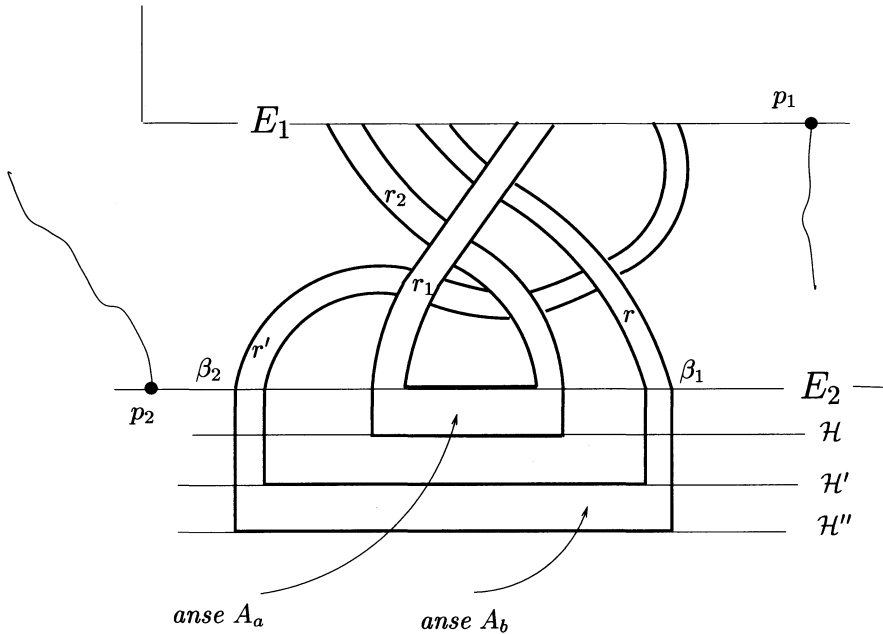
$$\tilde{R} \cup (A_a \cup A_b) \cup \cdots \cup (A_a^{lq} \cup A_b^{lq})$$

est de genre au moins l . Le genre de toute surface $\mathcal{R}_{l'}$ contenant les rubans $\psi^{lq}(r_1)$, $\psi^{lq}(r_2)$, $\psi^{lq}(r)$ et $\psi^{lq}(r')$ (donc les anses A_a^{lq} et A_b^{lq}) est par conséquent au moins l . Comme les anses $A_a^{(l+1)q}$ et $A_b^{(l+1)q}$ sont alors dans la surface $\mathcal{R}_{l'+q}$, on a le résultat.

Traisons maintenant le cas où le segment a est inclus dans le segment b , autrement dit, d'après le choix de r' , où $r \cap E_2$ est inclus dans $E_2 \setminus a'$ et $r' \cap E_2$ est inclus dans a' (en fait, dans $a' \setminus a$). On reprend l'horizontale \mathcal{H} du cas précédent, en la choisissant suffisamment proche du côté horizontal de R contenant E_2 . Reprenons aussi l'anse A_a construite grâce à \mathcal{H} et aux rubans r_1 et r_2 , ainsi que les anses A_a^{jq} contenant les itérés positifs par ψ de r_1 et r_2 . Comme $a \subset b$, la manière de construire l'anse A_b est légèrement différente. Soient β_1 l'extrémité de b la plus éloignée du point périodique p_2 et β_2 son autre extrémité. Soient \mathcal{H}' et \mathcal{H}'' deux horizontales de R plus éloignées de E_2 que \mathcal{H} , \mathcal{H}' étant entre \mathcal{H} et \mathcal{H}'' . Les verticales de R issues de β_1 et β_2 coupent \mathcal{H}' et \mathcal{H}'' et définissent ainsi un rectangle R_b inclus dans R et disjoint de l'anse A_a . Les segments verticaux de R joignant les extrémités de $(r \cup r') \cap E_2$ autres que β_1 et β_2 au côté de R_b inclus dans \mathcal{H}' permettent, avec les verticales issues de β_1 et β_2 , de prolonger dans R les rubans r et r' par deux rectangles. L'union de ces deux rectangles, de R_b et des rubans r et r' forme l'anse A_b (cf. la figure 22). La surface $\tilde{R} \cup A_a \cup A_b$ est de genre 1. La fin de la démonstration est la même que dans le premier cas.

□

Lemme 7.8.4. — *Supposons qu'il existe, dans \mathcal{R}_m , deux séparatrices embryonnaires E_1 et E_2 et deux rubans r_1 et r_2 joignant E_1 à E_2 . Supposons de plus qu'il existe un ruban r avec un côté horizontal dans E_1 entre $r_1 \cap E_1$ et $r_2 \cap E_1$ et l'autre côté*

FIGURE 22. Les anses A_a et A_b lorsque $a \subset b$

horizontal dans E_1 mais hors du plus petit segment contenant $(r_1 \cup r_2) \cap E_1$. Alors la suite $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini quand l tend vers l'infini.

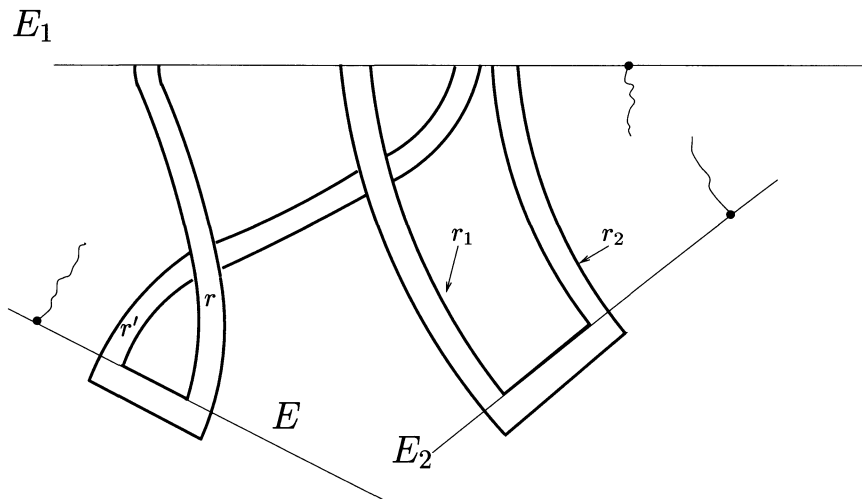
Démonstration. — C'est la même que la preuve du lemme précédent, à ceci près qu'ici, l'anse B est simplement le ruban r . \square

Lemme 7.8.5. — Supposons qu'il existe, dans \mathcal{R}_m , deux séparatrices embryonnaires E_1 et E_2 et deux rubans r_1 et r_2 joignant E_1 à E_2 . Supposons de plus qu'il existe un ruban r avec un côté horizontal dans E_1 entre $r_1 \cap E_1$ et $r_2 \cap E_1$ tel que son autre côté horizontal soit dans une séparatrice embryonnaire E différente de E_1 et de E_2 . Alors la suite $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini quand l tend vers l'infini.

Démonstration. — Elle est identique à la preuve du lemme 7.8.3 (cf. la figure 23). \square

Lemme 7.8.6. — Supposons qu'il existe, dans \mathcal{R}_m , deux séparatrices embryonnaires E et $E' \neq E$ et un ruban r avec un côté horizontal dans E et l'autre dans E' . Orientons E et E' vers leur point périodique. Si cette orientation induit deux orientations opposées sur les côtés horizontaux de r , alors la suite $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini quand l tend vers l'infini.

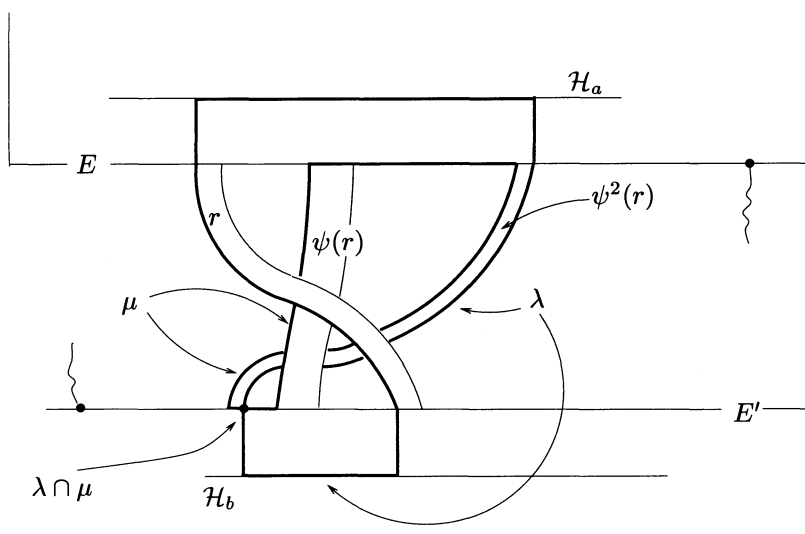
Démonstration. — Considérons le triplet de rubans $(r, \psi(r), \psi^2(r))$, a le plus petit segment inclus dans E et contenant $(r \cup \psi^2(r)) \cap E$ et b le segment analogue dans

FIGURE 23. Le ruban r a un côté horizontal dans une troisième séparatrice

E' . Les itérés par ψ^3 de a et b sont deux-à-deux disjoints. Notons a_j et b_j respectivement les segments $\psi^{3j}(a)$ et $\psi^{3j}(b)$. Soit \mathcal{H}_a une horizontale du rectangle contenant a dans son bord assez proche du côté contenant a et \mathcal{H}_b une horizontale du rectangle contenant b dans son bord assez proche du côté contenant b . Si a et b sont dans le bord d'un même rectangle R , les séparatrices embryonnaires E et E' ne peuvent pas être issues d'un même point périodique. En effet, comme \mathcal{R}_m est orientée, les côtés horizontaux de r munis de l'orientation induite par celle des séparatrices orientées vers leur point périodique ne peuvent pas, dans ce cas, être orientés en sens inverse. Le ruban r joint donc nécessairement les deux côtés horizontaux de R , ce qui assure qu'il n'y a pas d'ambiguïté pour choisir \mathcal{H}_a et \mathcal{H}_b .

Prolongeons les verticales issues des extrémités de a jusqu'à ce qu'elles coupent \mathcal{H}_a et appelons α l'union des deux segments verticaux et du segment de \mathcal{H}_a joignant leurs extrémités. Soient x' et x'' les points de b tels que x' et une extrémité de a soient dans un même côté du ruban r et x'' et l'autre extrémité de a soient dans un même côté de $\psi^2(r)$. Prolongeons les verticales issues de x' et de x'' jusqu'à ce qu'elles coupent l'horizontale \mathcal{H}_b et appelons β l'union des deux segments verticaux et du segment de \mathcal{H}_b joignant leurs extrémités. Nous pouvons alors considérer le lacet λ union de α , β et des côtés des rubans r et $\psi^2(r)$ qui joignent leurs extrémités (cf. la figure 24). Les lacets analogues λ_j construits grâce aux segments $\psi^{3j}(a)$ et $\psi^{3j}(b)$, aux rubans qui ont leurs côtés horizontaux dedans et aux segments α_j et β_j sont deux-à-deux disjoints.

Considérons un autre lacet, μ , construit de la manière suivante : μ contient une extrémité (quelconque) de b ainsi que les deux côtés de ruban issus de ce point. Le

FIGURE 24. Les lacets λ et μ

segment $\mu \cap b$ ne rencontre $\psi(r)$ qu'en un de ses sommets et se prolonge à partir de ce sommet par le côté vertical de $\psi(r)$ qui en est issu. Enfin, l'intersection de μ et de a est le segment dont les extrémités sont celles des côtés verticaux de rubans inclus dans μ . De même que pour λ , les lacets μ_j sont deux-à-deux disjoints.

Les lacets λ_j et μ_j sont ainsi construits qu'ils se coupent transversalement en un et un seul point (itéré de x' si $x' \in \mu$, itéré de x'' si $x'' \in \mu$) et que les unions $\lambda_j \cup \mu_j$ sont deux-à-deux disjointes.

Soit Y la surface union des (ou du) rectangles contenant $E \cup E'$ et des rubans $\psi^k(r)$ ayant leurs côtés horizontaux dans $(a \cup a_1 \cup \dots \cup a_l) \cup (b \cup b_1 \cup \dots \cup b_l)$. L'existence des l paires (λ_j, μ_j) nous assure que le genre de Y est supérieur ou égal à l (cf. la définition du genre d'une surface compacte rappelée à la fin du paragraphe 7.3). Par conséquent, toute surface \mathcal{R}_m contenant $\psi^{5l}(r)$ est de genre au moins égal à l . \square

Lemme 7.8.7. — *Supposons que \mathcal{R}_{6n} présente une obstruction (3). Alors la suite $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$, où g_l est le genre de la surface \mathcal{R}_l , tend vers l'infini quand l tend vers l'infini.*

Démonstration. — Notons r et r_1 les deux rubans créant une obstruction (3) et E la séparatrice embryonnaire qui contient un côté horizontal de r et un de r_1 . Quitte à intervertir r et r_1 , supposons que $r \cap E$ est plus proche du point périodique p de E que $r_1 \cap E$. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $\psi^q(r_1 \cap E)$ soit situé dans E entre $r \cap E$ et le point p (cf. la figure 25). On peut alors appliquer le lemme 7.8.5 pour achever la preuve de ce lemme-ci.

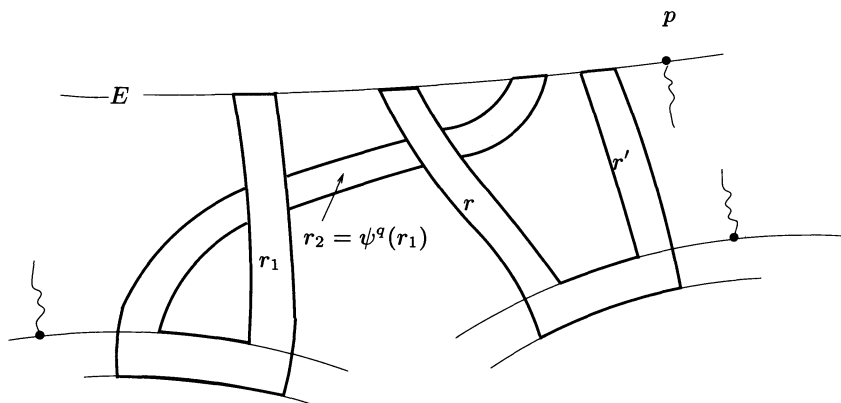


FIGURE 25. Les anses impliquées par l'obstruction (3)

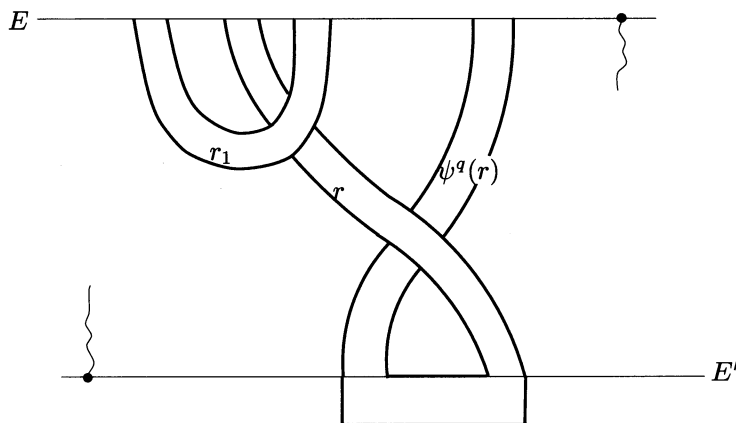
□

Lemme 7.8.8. — *Supposons que \mathcal{R}_{6n} présente une obstruction (1). Alors la suite $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$, où g_l est le genre de la surface \mathcal{R}_l , tend vers l'infini quand l tend vers l'infini.*

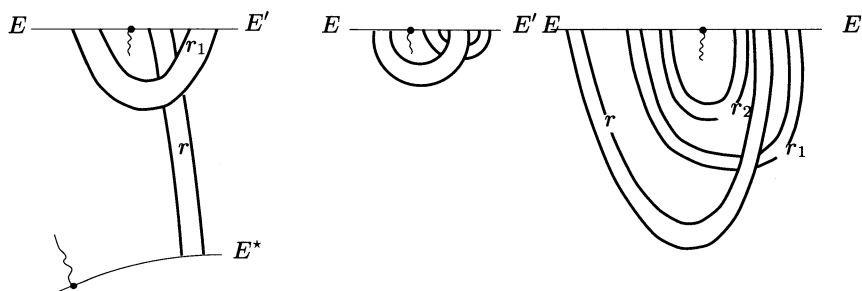
Démonstration. — Appelons C le côté de rectangle dont parle l'obstruction (1), r_1 le ruban qui joint C à lui-même et qui n'a entre ses deux côtés horizontaux qu'un et un seul côté horizontal du ruban r . Nous allons étudier successivement le cas où il n'y a pas de point périodique entre les deux composantes connexes de $C \cap r_1$ et le cas où il y en a un.

Si C n'est pas périodique, r_1 a un itéré positif par ψ dont les deux côtés horizontaux sont dans une séparatrice embryonnaire E et tel que l'itéré de r correspondant ait un côté horizontal dans E entre ceux de l'itéré de r_1 et l'autre côté horizontal dans une séparatrice embryonnaire E' . Par ailleurs, si $C \cap r_1$ est inclus dans une séparatrice embryonnaire E , le ruban r_1 a un itéré positif par ψ tel que les côtés horizontaux de l'itéré correspondant de r soient inclus tous deux dans des séparatrices embryonnaires (dont l'une au moins est E). Quitte à prendre des itérés de r_1 et r , il suffit donc d'étudier le cas où $C \cap r_1$ est inclus dans E et où r a un côté horizontal dans E entre ceux de r_1 et l'autre dans E' . Si E' est égale à E , le lemme 7.8.2 donne le résultat. Supposons que les séparatrices embryonnaires E et E' soient distinctes (cf. la figure 26). Considérons, en plus des rubans r_1 et r , l'itéré $\psi^q(r)$ où $q \in \mathbb{N}$ est tel que $\psi^q(r) \cap E$ ne soit pas entre les côtés horizontaux de r_1 . On applique alors le lemme 7.8.4 pour conclure.

Supposons enfin qu'il existe un point périodique p entre les composantes connexes de $r_1 \cap C$. Appelons E et E' les séparatrices embryonnaires issues de p , en posant que E' contient $r \cap C$. Quitte à prendre un itéré de r , on peut supposer que le côté

FIGURE 26. L'obstruction (1) avec $E \neq E'$ et $(r_1 \cap C) \subset E$

horizontal de r qui n'est pas entre les côtés horizontaux de r_1 est dans une séparatrice embryonnaire E^* (cf. la figure 27).

FIGURE 27. L'obstruction (1) avec un point périodique entre les côtés horizontaux de r_1

Si cette séparatrice embryonnaire E^* est différente de E et E' , le lemme 7.8.5 donne le résultat. Si r a ses deux côtés horizontaux dans $E' = E^*$, on retombe dans le premier cas traité ici car il n'y a pas de point périodique entre les deux composantes connexes de $r \cap E'$. Si le ruban r a un côté horizontal dans E' et l'autre dans E , considérons l'itéré $\psi^q(r_1) = r_2$, où q est un entier tel que $r_2 \cap E'$ est plus proche du point périodique p que $r \cap E'$. Le lemme 7.8.3 permet alors de conclure, ce qui termine la démonstration. \square

Lemme 7.8.9. — *Supposons que \mathcal{R}_{6n} présente une obstruction (2). Alors la suite $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$, où g_l est le genre de la surface \mathcal{R}_l , tend vers l'infini quand l tend vers l'infini.*

Démonstration. — Soient A et A' les deux côtés horizontaux de rectangles et r et r' les deux rubans qui apparaissent dans l'obstruction (2).

Étudions d'abord le cas où il n'y a pas de point périodique ni entre $r \cap A$ et $r' \cap A$, ni entre $r \cap A'$ et $r' \cap A'$. Quitte à prendre des itérés de r et r' , on peut supposer que leurs côtés horizontaux sont en fait dans deux séparatrices embryonnaires E et E' (non nécessairement incluses dans deux côtés horizontaux différents de la partition de Markov). Supposons que $r \cap E$ est plus proche du point périodique de E que $r' \cap E$. On a alors deux situations possibles :

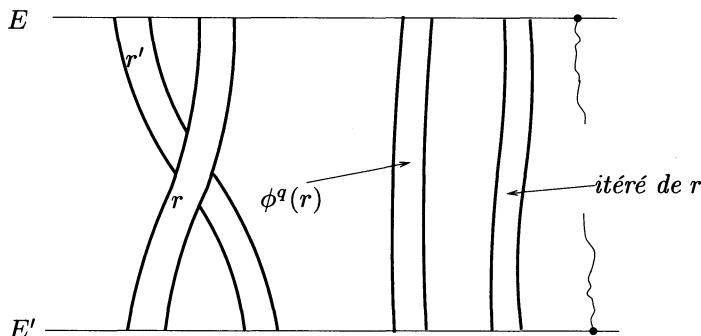


FIGURE 28. L'obstruction (2) avec r et r' joignant E à $E' \neq E$

- Si $E' = E$, on a une obstruction (1) donc le lemme 7.8.8 donne le résultat.
- Si $E \neq E'$ et si l'orientation de E et E' vers leur point périodique induit sur le côté horizontal de r et sur celui de r' inclus dans E la même orientation que sur leur côté horizontal inclus dans E' , soit $q \in \mathbb{N}$ tel que l'itéré $\psi^q(r)$ ait son côté horizontal dans E' plus proche du point périodique que $r' \cap E'$ (cf. la figure 28). Le lemme 7.8.3 nous donne, dans ce cas, le résultat.
- Si $E \neq E'$ et si les côtés horizontaux de r orientés par l'orientation induite par celle de E et E' vers leur point périodique sont opposées, on utilise le lemme 7.8.6.

Traisons maintenant le cas où il existe un point périodique p entre $r \cap A$ et $r' \cap A$. Deux sous-cas se présentent (cf. la figure 29) :

- S'il y a aussi un point périodique p' entre $r \cap A'$ et $r' \cap A'$, orientons les quatre séparatrices embryonnaires vers leur point périodique. Chacun des deux rubans r et r' vérifie les hypothèses du lemme 7.8.6, ce qui donne le résultat.
- S'il n'existe pas de point périodique entre $r \cap A'$ et $r' \cap A'$, quitte à prendre des itérés de r et r' , on peut supposer que A' est périodique. Les rubans r et r' créent dans ce cas une obstruction (3), on applique le lemme 7.8.7 pour conclure. \square

Démonstration de la proposition 7.8.1. — Les trois lemmes 7.8.7, 7.8.8 et 7.8.9 montrent successivement que chacune des trois obstructions correspond à une suite de genres $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini. Ils constituent donc la preuve de la proposition 7.8.1. \square

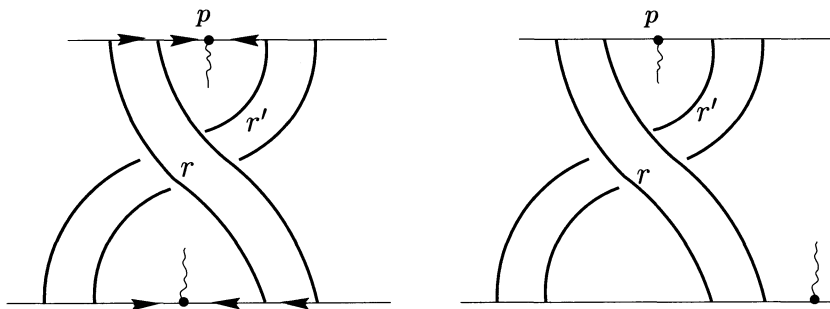


FIGURE 29. L'obstruction (2) avec un point périodique entre $r \cap A$ et $r' \cap A$

7.9. Le cas des types géométriques à un seul rectangle

Si l'on sait d'un type géométrique sans double-bord de partition de Markov qu'il est réalisable, le corollaire 7.3.10 assure que son genre est fini. Un problème intéressant et naturel est alors de calculer (ou au moins d'estimer) le genre de ce type géométrique réalisable.

Nous nous intéressons, dans ce paragraphe, au cas le plus simple : celui d'un type géométrique de genre fini sans double-bord T qui n'a qu'un seul rectangle R . Les résultats obtenus dans les paragraphes précédents (en particulier dans les paragraphes 7.3, 7.4, 7.5 et 7.8) vont nous permettre de montrer que T est de genre nul, *i.e.* qu'il existe une surface compacte *planaire* munie d'un difféomorphisme de Smale dont un ensemble hyperbolique admet une partition de Markov de type géométrique T .

Proposition 7.9.1. — *Soit $T = (1, \{h\}, \{v = h\}, \Phi)$ un type géométrique sans double-bord de partition de Markov à un rectangle. Si T est de genre fini, son genre $g(T)$ est nul.*

Démonstration. — Supposons que $g(T) = g$ soit fini et ne soit pas nul. Le genre de T est défini indépendamment de la réalisation $(\{R\}, \Phi)$ choisie (*cf.* le paragraphe 7.3 et en particulier la proposition 7.3.5). Considérons donc $(\{R\}, \Phi)$ une réalisation quelconque de T . Appelons \mathcal{R}_m sa $m^{\text{ième}}$ -réalisante et g_m le genre de cette surface compacte \mathcal{R}_m . Puisque $g \neq 0$, la proposition 7.7.1 nous affirme que $g_6 = g$ est non nul.

Nous avons vu, au paragraphe 7.3, que le rectangle R se plongeait dans \mathcal{R}_m pour tout m donc en particulier dans \mathcal{R}_6 . De plus, le lemme 7.4.4 implique que l'adhérence de $\mathcal{R}_6 \setminus R$ est l'union (disjointe) de tous les rubans de \mathcal{R}_6 (portés par ∂R). La surface \mathcal{R}_6 est donc un disque topologique \bar{R} sur le bord duquel sont attachés sans twist, par leurs côtés horizontaux, un nombre fini de rubans r_i . Cette remarque nous place dans le cadre d'application des lemmes du paragraphe 7.5 (*cf.* la définition 7.5.1). Comme le genre de \mathcal{R}_6 est non nul, le lemme 7.5.2 affirme qu'il existe deux rubans r et \tilde{r} de

\mathcal{R}_6 tels que les côtés horizontaux c et c' de r apparaissent dans ∂R en alternance avec les côtés horizontaux \tilde{c} et \tilde{c}' du ruban \tilde{r} .

Si l'un des deux rubans r ou \tilde{r} a ses deux côtés horizontaux dans un même côté horizontal du rectangle R , la surface \mathcal{R}_6 présente une obstruction (1) donc le genre du type géométrique T est infini par le lemme 7.8.8, ce qui contredit l'hypothèse.

Il n'y a donc qu'un côté horizontal de r et qu'un côté horizontal de \tilde{r} dans chaque composante connexe de $\partial^h R$. L'hypothèse d'alternance de c, c' et \tilde{c}, \tilde{c}' dans le bord de R implique, d'après le lemme 7.7.7, que les rubans r et \tilde{r} créent une obstruction. En relisant la preuve de ce lemme, on peut même préciser que c'est une obstruction (2). Comme ci-dessus, il en découle que le genre du type géométrique est infini, par application du lemme 7.8.9, ce qui achève la démonstration. \square

Conjecture 4. — *Si T est un type géométrique de genre fini sans double-bord à n rectangles, alors son genre est inférieur à $n(2n - 1)$.*

Idée d'esquisse de tentative d'ébauche de démonstration. — Le genre de T est fini donc par la proposition 7.8.1, la surface \mathcal{R}_{6n} ne présente aucune des trois obstructions. La proposition 7.7.1 dit alors que le genre de T est égal au genre de \mathcal{R}_{6n} .

Si A et B sont deux côtés horizontaux dont au moins l'un est non-périodique, on déduit de l'absence d'obstructions (1) et (2) que l'union des rubans ayant leur bord horizontal dans $A \cup B$ et des rectangles contenant A et B dans leur bord est une surface plane. Si A et B sont deux côtés périodiques, les propositions 7.6.8 (qui donne l'existence de domaines fondamentaux autonomes couplés C_A et C_B) et 7.7.5 (qui dit que les rubans qui ont un côté horizontal dans $C_A \cup C_B$ forment avec les rectangles contenant A et B une surface plane) permettent d'affirmer le même résultat : l'union des rectangles contenant A et B et des rubans avec leurs côtés horizontaux dans $A \cup B$ est plane.

Considérons donc la sous-surface suivante de \mathcal{R}_{6n} , qui a même genre qu'elle : dans \mathcal{R}_{6n} , on supprime tout ruban qui a ses deux côtés horizontaux dans un même côté horizontal de rectangle et dès qu'il existe un ruban r avec un côté dans A et l'autre dans $B \neq A$, on supprime tous les rubans qui joignent A à B sauf r . Les n rectangles apportent $2n$ côtés horizontaux donc $n(2n - 1)$ paires différentes de côtés horizontaux. Cette construction revient donc à considérer l'union X des n rectangles et d'au plus $n(2n - 1)$ rubans r_i tels que, pour tout i , les côtés horizontaux de r_i sont dans deux côtés horizontaux différents des rectangles de la partition et tels que, si r_i et r_j ont chacun un côté dans A et un côté dans $B \neq A$, alors $i = j$. Supprimer l'un de ces rubans diminue le genre de X d'au plus 1. Le genre de X est donc inférieur ou égal à $n(2n - 1)$ et cette inégalité est encore vraie pour le genre de T .

On peut même espérer améliorer ce majorant en remarquant que l'absence d'obstruction (3) apporte une contrainte (non utilisée ici) sur les rubans r_i joignant deux côtés périodiques. \square

CHAPITRE 8

PIÈCES BASIQUES ET HOMÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV (PAR C. BONATTI ET E. JEANDENANS)

Nous avons vu que toute classe d'équivalence d'arches d'un attracteur ou répulseur hyperbolique est un zip. D'autre part, G. Ruas montre dans sa thèse (voir [Ru]) que la restriction d'un difféomorphisme d'une surface compacte au bassin d'attraction d'un attracteur hyperbolique transitif est semi-conjugée à un homéomorphisme pseudo-Anosov (avec un ensemble fini de points marqués). Cette semi-conjugaison est très naturelle : elle consiste essentiellement à remplacer toute u -arche par un point. Ce travail n'a jamais été publié.

Le but de cette partie est de démontrer une généralisation du résultat de Ruas : nous considérons une pièce basique (ensemble hyperbolique saturé transitif) d'un difféomorphisme de Smale f d'une surface compacte, telle que ses variétés invariantes ne possèdent pas d'impasse, ce qui revient à dire que toute classe d'équivalence d'arches est un zip. Nous montrons que la restriction de f au domaine de la pièce basique est semi-conjugée à un homéomorphisme pseudo-Anosov, la semi-conjugaison consistant essentiellement à écraser en un point toute arche et tout rectangle bordé par quatre arches.

Dans un premier paragraphe, nous rappelons les définitions de bases concernant les homéomorphismes pseudo-Anosov avec points marqués. Puis nous rappellerons la notion de mesures de Margulis ν^s et ν^u transverses aux variétés invariantes d'une pièce basique : ces mesures sont l'équivalent des mesures transverses aux feuilletages stables et instables des homéomorphismes pseudo-Anosov. Le troisième paragraphe construit la relation d'équivalence par laquelle nous quotienterons le domaine $\Delta(K)$ d'une pièce basique sans impasse (K, f) , et le quatrième paragraphe montrera que le quotient de $\Delta(K)$ est une surface compacte et que f passe au quotient en un homéomorphisme pseudo-Anosov avec points marqués.

8.1. Rappels sur les homéomorphismes pseudo-Anosov

Définition 8.1.1. — Soit S une surface et \mathcal{F} un feuilletage de S avec singularités isolées. On appelle mesure transverse invariante par holonomie une mesure μ définie sur chaque arc transverse au feuilletage et vérifiant la propriété suivante :

Soient $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow S$ deux arcs transverses à \mathcal{F} , isotopes à travers des arcs transverses dont les extrémités restent dans la même feuille. Alors $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$.

Définition 8.1.2. — Soit S une surface compacte, connexe. On dit qu'un homéomorphisme $f: S \rightarrow S$ est un homéomorphisme pseudo-Anosov si :

1. il existe deux feuilletages \mathcal{F}^s stable et \mathcal{F}^u instable invariants par f ayant le même ensemble fini de singularités ;
2. chaque singularité de \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u est une selle à au moins trois séparatrices (voir figure 1) ;
3. \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont transverses (en dehors de leur lieu singulier) ;
4. \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u admettent chacun une mesure transverse invariante par holonomie, μ^s et μ^u respectivement et il existe un réel $\lambda > 1$, qu'on appelle le facteur de dilatation de f , tel que $f_*(\mu^s) = \lambda^{-1}\mu^s$ et $f_*(\mu^u) = \lambda\mu^u$, où la mesure image $f_*(\mu^s)$ d'un arc α transverse à \mathcal{F}^s est défini par $f_*\mu^s(\alpha) = \mu^s(f^{-1}(\alpha))$.

On étend la notion d'homéomorphisme pseudo-Anosov en définissant les homéomorphismes pseudo-Anosov avec points marqués :

Définition 8.1.3. — Soit f un homéomorphisme d'une surface compacte S . Soit K un ensemble fini invariant par f . On dit que f est un homéomorphisme pseudo-Anosov avec les points de K marqués si f satisfait toutes les propriétés d'un homéomorphisme pseudo-Anosov excepté l'item 2), qu'on remplace par :

2') les feuilletages stable et instable de f admettent en tout point de K une singularité à une branche appelée épine, les autres singularités étant de type selle à au moins trois séparatrices (voir figure 1).

Nous utiliserons dans la suite un voisinage bien choisi d'une singularité d'un homéomorphisme pseudo-Anosov. Voyons à présent comment le construire (voir figure 2).

Lemme 8.1.4. — Soit s une singularité à $n \geq 1$ séparatrices d'un homéomorphisme pseudo-Anosov avec points marqués. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe un voisinage D de s ayant les propriétés suivantes :

1. Le bord de D est formé de n segments de feuilles du feuilletage instable alternés avec n segments de feuilles du feuilletage stable,
2. Pour toute séparatrice σ stable ou instable issue de s , la composante connexe de $\sigma \cap D$ contenant s est de mesure (instable ou stable respectivement) égale à ε .

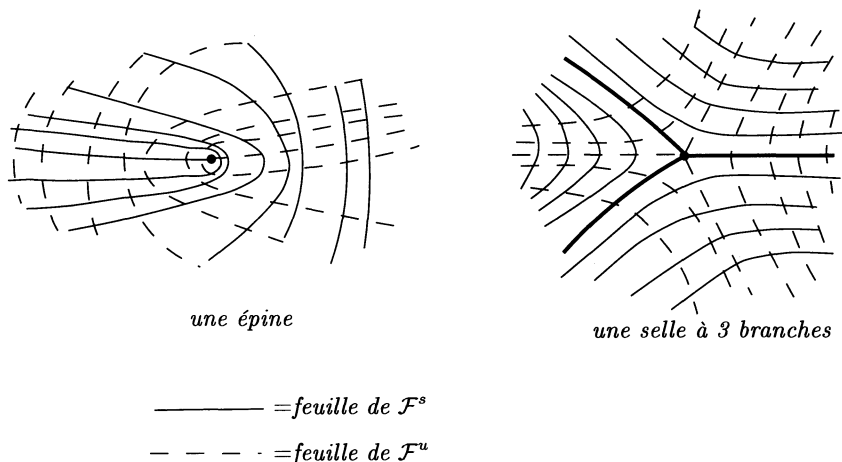


FIGURE 1. Singularités des feuilletages d'un homéomorphisme pseudo-Anosov

Démonstration. — Notons S_1, \dots, S_n les séparatrices de \mathcal{F}^s issues de s , la numérotation étant donnée par le sens direct correspondant à l'orientation de la surface et le choix de S_1 . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note U_i la séparatrice de \mathcal{F}^u issue de s entre S_i et S_{i+1} .

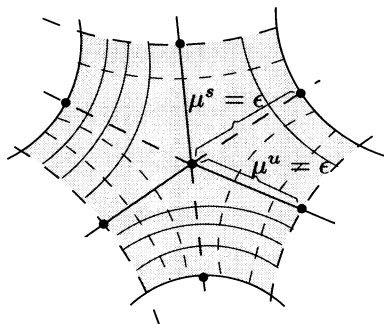
Pour tout i , notons α_i et β_i les points des séparatrices S_i et U_i respectivement, tels que $\mu^u([s, \alpha_i]^s) = \varepsilon = \mu^s([s, \beta_i]^u)$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la feuille stable passant par β_i coupe la feuille instable passant par α_i en un point α_i^+ tel que $\mu^s([\alpha_i, \alpha_i^+]) = \varepsilon$ (de plus la mesure instable $\mu^u([\alpha_i^+, \beta_i]^s)$ est égale à ε). De même, on définit α_i^- comme l'intersection du segment de feuille instable passant par α_i et du segment de feuille stable passant par β_{i-1} .

Le bord du disque D est l'union des segments $[\alpha_i^-, \alpha_i^+]^u$ et $[\alpha_{i-1}^+, \alpha_i^-]^s$ (voir la figure 2). \square

Définition 8.1.5. — On dira que le voisinage D défini ci-dessus est le voisinage régulier de s de taille ε .

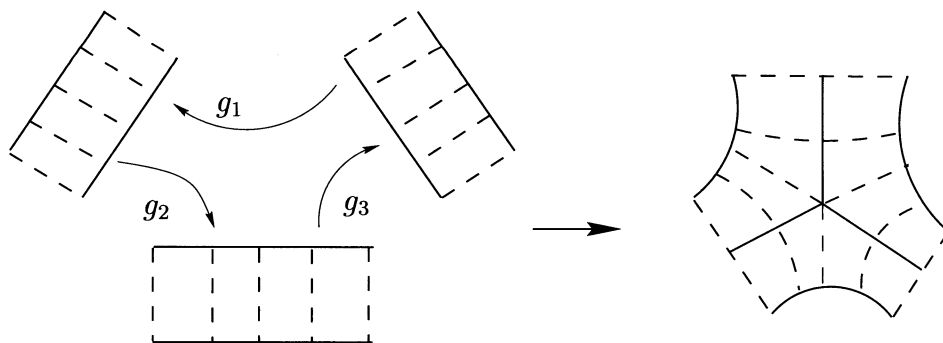
Remarque. — Soient $R_i = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, \varepsilon] \times \{i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, n rectangles du plan feuilletés par les segments horizontaux et verticaux et munis des mesures transverses invariantes dx et dy . Pour tout $i = 1, \dots, n$, soit g_i le difféomorphisme du segment $[-\varepsilon, 0] \times \{0\} \times \{i\}$ de R_i sur le segment $[0, \varepsilon] \times \{0\} \times \{i+1\}$ de R_{i+1} défini par $g_i(t, 0, i) = (-t, 0, i+1)$. L'espace-quotient

$$\mathcal{M} = \left(\prod_{i=1}^n R_i \right) / g_1, g_2, \dots, g_n$$

FIGURE 2. Un voisinage régulier de taille ϵ d'une singularité

est alors une surface homéomorphe à un disque de \mathbb{R}^2 , feuilletée par deux feuilletages transverses (appelés *feuilletage horizontal* et *feuilletage vertical*) admettant tous deux une unique singularité à n séparatrices en $(0,0)$ (qui est l'image par le passage au quotient de l'origine de chaque rectangle R_i) et munis de deux mesures transverses invariantes par holonomie que nous noterons dx et dy (voir la figure 3).

Dans le cas où $n = 2$, le point «singulier» $(0,0)$ a deux séparatrices stables et deux instables, ce qui revient à dire que ce point n'est pas singulier. Nous ne pourrions cependant pas exclure ce cas.

FIGURE 3. Modèle de taille ϵ d'une singularité à 3 séparatrices

Définition 8.1.6. — Le disque M muni des deux feuilletages (horizontal et vertical) et de leur mesure transverse (dy et dx , respectivement) s'appellera modèle de taille ϵ d'une singularité à n séparatrices.

On vérifie facilement qu'un voisinage de taille ϵ est homéomorphe au modèle de taille ϵ :

Lemme 8.1.7. — *Soit s une singularité à k séparatrices d'un homéomorphisme pseudo-Anosov. Soit D un voisinage de s de taille ε , et notons \mathcal{M} le modèle de taille ε d'une singularité à k séparatrices. Alors il existe un homéomorphisme h de D dans \mathcal{M} préservant l'orientation, les deux feuilletages transverses et les mesures transverses invariantes par holonomie.*

8.2. Mesures de Margulis

Ce paragraphe a pour but de construire les mesures de Margulis ν^s et ν^u , transverses aux variétés stables ou instables d'une pièce basique. Ces mesures sont classiquement contruites dans le cadre de champs de vecteurs de type Anosov (voir [Mar] ; c'est pourquoi nous en rappelons brièvement la construction ici pour les variétés invariantes d'une pièce basique d'un difféomorphisme d'une surface compacte.

Proposition 8.2.1. — *Soit K une pièce basique (non-réduite à une orbite périodique) d'un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte. Alors $W^u(K)$ possède une mesure transverse invariante par holonomie, appelée mesure de Margulis instable et notée ν^u , vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *La mesure de tout segment σ transverse à $W^u(K)$ est strictement positive si et seulement si l'intérieur de σ rencontre $W^s(K)$;*
2. *il existe une constante $\lambda > 1$ telle que, pour tout segment σ transverse à $W^u(K)$, on ait $\nu^u(f^{-1}(\sigma)) = \lambda \cdot \nu^u(\sigma)$.*

Remarque. — Voici deux résultats classiques que nous ne redémontrons pas ici car nous ne les utiliserons pas.

1. La mesure ν^u est unique à multiplication près par une constante, et λ est unique.
2. On définit de même la mesure ν^s transverse à $W^s(K)$. Alors le produit $\nu^s \cdot \nu^u$ défini sur la surface S une mesure invariante par f ; cette mesure est ergodique, et l'entropie de f pour cette mesure est égale à l'entropie topologique.

Idée de la démonstration de la proposition. — On a vu qu'une pièce basique K qui n'est ni un attracteur ni un répulseur possède une partition de Markov génératrice dont les rectangles R_i sont deux à deux disjoints. Nous allons définir la mesure ν^u sur les segments horizontaux des R_i comme limite d'une suite de mesures.

Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient $a_{i,j}$ est le nombre de composantes connexes d'intersection de $f(R_i) \cap R_j$

Soit m_i la mesure supposée des segments horizontaux de R_i . Pour vérifier les propriétés désirées, la mesure devra vérifier $m_i = \lambda^{-1} \cdot \sum_j a_{j,i} \cdot m_j$. On choisit donc pour λ l'unique valeur propre de A dont le vecteur propre a toutes ses coordonnées positives : d'après le théorème de Peron-Frobenius, λ est la plus grande valeur propre réelle. On note donc m_i la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur propre de la transposée tA de valeur propre λ .

Notons I_i le quotient de R_i par le feuilletage vertical : le segment I_i s'identifie aux segments horizontaux de R_i , c'est sur ces segments que l'on va définir ν^u .

Choisissons une mesure ν_0 sur l'union des I_i dans la classe de la mesure de Lebesgue, et telle que la mesure de I_i pour ν_0 soit m_i . On note ν_1 la mesure dont le support est l'union des segments de I_i correspondant aux composantes connexes de $R_i \cup f(R_j)$; sur chacune des composantes la mesure a une densité constante par rapport à ν_0 , de façon que la mesure de cette composante soit $\lambda^{-1} \cdot m_j$. Ainsi $\nu_1(I_i) = \nu_0(I_i) = m_i$. On définit ν_n comme étant la mesure de support égale à l'union des intervalles de I_i correspondant à une composante d'intersection de R_i avec $f^n(R_j)$, ν_n étant de densité constante par rapport à ν_0 sur chacun de ses intervalles, et de mesure $\lambda^{-n} \cdot m_j$. On vérifie que la suite des mesures ν_n ainsi construites converge faiblement vers une mesure ν^u , qui vérifie alors les propriétés annoncées.

Dans le cas où K est un attracteur ou un répulseur hyperbolique, les rectangles d'une partition de Markov ne sont pas disjoints mais peuvent éventuellement s'intersecter le long d'un segment de leur bord. La construction des mesures de Margulis est identique à ci-dessus, en remarquant que ces intersections sont de mesure nulle. \square

Corollaire 8.2.2. — *Pour tout segment $\sigma = [a, b]$ transverse à $W^u(K)$, la fonction $x \mapsto \nu^u([a, x])$ est continue sur σ et constante sur les intervalles d'intérieur disjoint de $W^u(K)$.*

8.3. Semi-conjugaison d'une pièce basique sans impasse à un homéomorphisme pseudo-Anosov

Dans tout ce chapitre, on considère une pièce basique K (ensemble saturé transitif) qui ne possède pas d'impasse (voir la définition 2.4.7). On a vu qu'alors les séparatrices de type bord portent toutes un zip (voir définition 2.3.2). Nous allons refermer les zips : un homéomorphisme pseudo-Anosov apparaît ! Plus précisément, nous allons écraser chaque arche et chaque rectangle bordé d'arches. Nous montrerons que le quotient du domaine $\Delta(K)$ (voir la définition 3.2.1) est alors une surface compacte et que f passe au quotient en un homéomorphisme pseudo-Anosov. C'est ce qu'énonce le théorème suivant :

Théorème 8.3.1. — *Soit f un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte orientée S , soit K une pièce basique et $\Delta(K)$ son domaine.*

Supposons qu'il n'existe pas d'impasse associée à K . Alors il existe une surface compacte \tilde{S} , un homéomorphisme pseudo-Anosov avec points marqués Φ de \tilde{S} et une application continue surjective π de $\Delta(K)$ sur \tilde{S} tels que :

$$\pi \circ f|_{\Delta(K)} = \Phi \circ \pi.$$

De plus la semi-conjugaison π est injective sur les orbites périodiques sauf sur celles de type bord (qui sont en nombre fini).

Le reste de ce paragraphe est consacré à la définition de la relation d'équivalence par laquelle nous quotienterons le domaine $\Delta(K)$.

Remarque. — Comme K est transitif, K ne contient pas de point périodique double-bord (item (7) de la proposition 2.1.1). Par hypothèse, K ne possède pas d'impasse ; nous avons vu que toute classe d'équivalence d'arche est un zip (non-dégénéré) : si W_1 et W_2 sont deux séparatrices distinctes de type bord, de même nature (stable ou instable) telles qu'il existe une arche ayant une extrémité sur W_1 et l'autre sur W_2 , alors toute arche ayant une extrémité sur W_1 a son autre extrémité sur W_2 .

Définition 8.3.2. — On dira que deux séparatrices W_1 et W_2 de type bord et de même nature (stable ou instable) sont voisines s'il existe une arche ayant une extrémité sur W_1 et l'autre sur W_2 .

Deux points périodiques bords p_1 et p_2 seront dit voisins si (au moins) une séparatrice de p_1 est voisine d'une séparatrice de p_2 .

Remarques

1. Un point périodique de type bord (ou coin) a au plus deux voisins.
2. Si l'un des voisins de p est égal à p alors p est son seul voisin.
3. Les voisins de p peuvent être confondus.

Définition 8.3.3. — Nous appellerons cycle (ce nom sera justifié par le lemme 8.3.4) tout ensemble non vide \mathcal{C} de points périodiques de type bord vérifiant les propriétés suivantes :

1. Si p appartient à \mathcal{C} , ses voisins aussi.
2. Pour tout couple (p, q) d'éléments de \mathcal{C} , il existe une chaîne $\{p = p_0, p_1, \dots, p_k = q\}$ permettant de passer de p à q par relation de voisinage, chaque p_{i+1} étant voisin de p_i pour $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Remarques

1. Les cycles sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence obtenue par saturation de la relation de voisinage.
2. Un cycle est un ensemble fini de points périodiques.

Considérons le graphe G défini de la façon suivante : les sommets de G sont les points périodiques de type bord de K , les arêtes sont les paires de séparatrices (de type bord) voisines. Une arête $\{W_1, W_2\}$ joint les points p_1 et p_2 si W_1 est issue de p_1 (resp. p_2) et si W_2 est issue de p_2 (resp. p_1). Remarquons que les composantes connexes du graphes correspondent aux cycles définis ci-dessus : deux points périodiques appartiennent au même cycle \mathcal{C} si et seulement s'ils sont deux sommets d'une même composante connexe de G .

Nous allons orienter les arêtes de G (en d'autres termes ordonner les paires de séparatrices voisines) de la manière suivante : munissons toute séparatrice de type bord de l'orientation qui fuit le point périodique ; d'après l'item (4) du corollaire 2.4.3, toute arche coupe suivant la même orientation les séparatrices sur lesquelles elle s'appuie. On oriente donc les arches de façon qu'un vecteur porté positivement par la séparatrice suivi d'un vecteur porté positivement par l'arche forment une base directe de la surface orientée S . Une arête joignant p_1 à p_2 et correspondant à la paire $\{W_1, W_2\}$ (W_i issue de p_i) sera orientée de p_1 à p_2 si une arche appuyée sur W_1 et W_2 va de W_1 à W_2 .

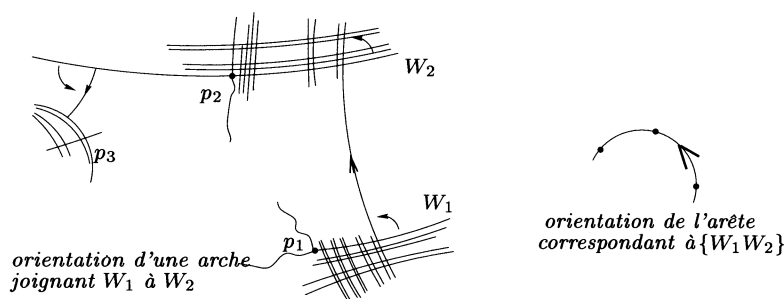


FIGURE 4. Orientation des arêtes du graphe G

Lemme 8.3.4. — *Toute composante connexe de G est homéomorphe à un cercle. Les arêtes orientées comme ci-dessus le sont de façon compatible et induisent une orientation sur chacun des cercles.*

Démonstration. — De tout sommet partent exactement deux arêtes et toute arête joint exactement deux sommets. Ceci prouve que toute composante connexe est un cercle. Les deux séparatrices de chaque point périodique sont munies de l'orientation fuyant leur origine donc les arches portées par l'une des séparatrices y arrivent et les arches portées par l'autre en partent. Ceci termine la démonstration. \square

Lemme 8.3.5. — *Dans un cycle, le nombre de points périodiques coins est pair.*

Démonstration. — Les arêtes du cercle correspondent à des paires de séparatrices de même nature (stable ou instable) donc il y a un nombre pair de séparatrices stables et un nombre pair de séparatrices instables, ce qui n'est pas le cas si le nombre de coins est impair (voir la figure 5). \square

Remarque. — Comme toute classe d'équivalence d'arches de K est un zip, il n'existe pas d'arche extrémale dans $\Delta(K)$. En particulier, K ne possède pas de chaîne infinie d'arches. De la proposition 3.1.2 et de la construction du domaine $\Delta(K)$, on déduit que toute composante connexe de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ est un demi-plan dont le bord dans

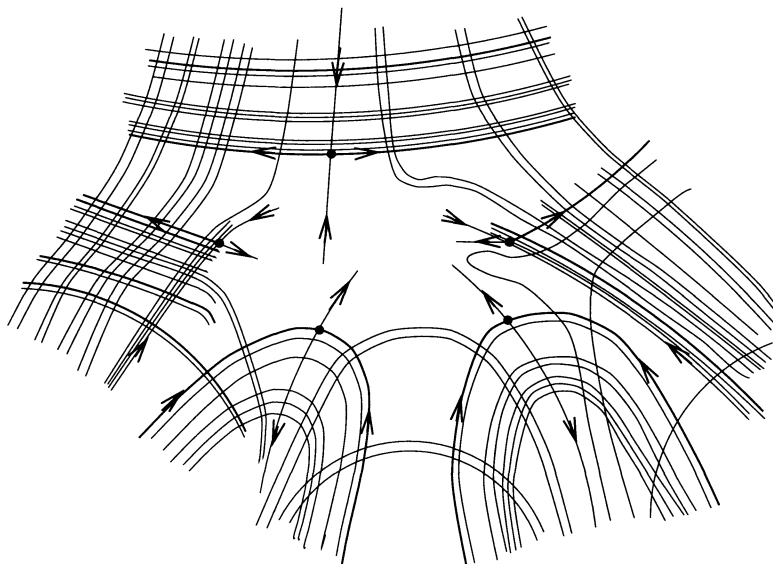


FIGURE 5. un cycle à 2 coins + 2 s-bords + 1 u-bord

$\Delta(K)$ est égal à l'union d'un point périodique coin et de ses deux séparatrices libres. De plus, toute courbe formée d'un point périodique coin p et de ses séparatrices libres est le bord d'une composante connexe de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$. Enfin la pièce basique étant non-triviale, elle ne possède pas de double-bord : un point coin p de K n'est coin que dans l'un de ses secteurs, et il ne correspond qu'à une seule composante de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ que l'on notera $C(p)$.

Définition 8.3.6. — Soit C un cycle. Nous noterons $\mathcal{P}(C)$ l'union du cycle, des séparatrices libres issues d'un point du cycle et des composantes connexes $C(p)$ de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ pour chaque point périodique coin p du cycle.

Remarque. — $\mathcal{P}(C)$ est un fermé de $\Delta(K)$. En effet, les séparatrices libres sont fermées dans $\Delta(K)$ (voir lemme 2.5.1) et la proposition 3.1.2 montre que l'adhérence dans $\Delta(K)$ d'une composante $C(p)$ est l'union de $C(p)$, du point p et de ses deux séparatrices libres : $\mathcal{P}(C)$ est donc une union finie de fermés.

Lemme 8.3.7. — Considérons les quatre familles de parties de $\Delta(K)$ suivantes :

1. les singletons $\{x \in K, x \text{ non bord}\}$,
2. les rectangles minimaux (dont le bord est constitué de deux arches stables et de deux arches instables),
3. les arches incluses dans une variété invariante non bord,
4. les ensembles $\mathcal{P}(C)$.

L'ensemble de toutes ces parties forment une partition de $\Delta(K)$ qui est invariante par f .

Démonstration. — Deux telles parties sont disjointes ou confondues, et chacune de ces famille est invariante par f : nous devons juste montrer que tout point de $\Delta(K)$ est dans l'union de toutes ces parties.

On a vu que toute composante connexe de $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ est incluse dans l'un des $\mathcal{P}(C)$. De plus, $\delta(K)$ est l'union de $W^s(K) \cup W^u(K)$ et de l'union des disques bordés d'arches.

De plus, comme toute classe d'équivalence d'arches est un zip, tout disque bordé d'arches est un rectangle et appartient donc à la deuxième famille de parties. Par ailleurs, $W^s(K) \cup W^u(K)$ se décompose en l'union de l'ensemble des points de K non isolés dans K , qui est exactement la première famille, de l'ensemble des séparatrices libres (elles sont incluses dans $\bigcup_{cycles}(\mathcal{P}(C))$ par définition) et de l'ensemble des arches. Ces dernières sont de deux sortes : les arches non isolées, qui forment les éléments de la troisième famille de parties, et les arches incluses dans le bord d'un polygone, qui ne peut être qu'un rectangle minimal (deuxième famille) comme on l'a vu plus haut. \square

Définition 8.3.8. — *Nous appellerons \mathcal{R} la relation d'équivalence dont les classes sont les parties de U appartenant à l'une ou l'autre des quatre familles ci-dessus.*

Le théorème 8.3.1 est impliqué par la proposition suivante.

Proposition 8.3.9. — *Le quotient \tilde{S} de $\Delta(K)$ par la relation d'équivalence \mathcal{R} est une surface séparée compacte. Le difféomorphisme C^1 -structurellement stable f passe au quotient en un homéomorphisme de \tilde{S} . La variété stable de K et sa variété instable passent au quotient en deux feuilletages invariants de \tilde{S} transverses l'un à l'autre. Ils ont même ensemble fini de singularités qui sont soit des épines, soit homéomorphes à des selles à au moins trois séparatrices.*

Les deux feuilletages invariants admettent chacun une mesure transverse invariante par holonomie et il existe un réel λ strictement plus grand que 1 tel que $f_(\mu^s) = \lambda^{-1}\mu^s$ et $f_*(\mu^u) = \lambda\mu^u$*

8.4. Implosion des trous et des intervalles

Pour prouver que le quotient \tilde{S} de $\Delta(K)$ par la relation \mathcal{R} est une surface munie de deux feuilletages transverses, nous allons exhiber une carte feuilletée au voisinage de chacun de ses points. La difficulté principale concerne les points de \tilde{S} correspondant aux cycles de K .

Nous considérons donc d'abord les rectangles minimaux, les arches et les points de K qui ne sont pas de type bord, *i.e.* les classes d'équivalence qui ne sont pas des $\mathcal{P}(C)$.

Lemme 8.4.1. — Soit γ une classe d'équivalence qui n'est pas de type $\mathcal{P}(C)$. Il existe alors une base de voisinages de γ par des rectangles.

Démonstration. — Si γ est un point de K non isolé, la propriété de produit local donne le résultat. Si γ est une arche non bord, elle admet un itéré γ' (positif si γ est stable, négatif sinon) de taille assez petite pour que la propriété de produit local permette de conclure.

Supposons que γ soit un rectangle minimal (c'est-à-dire bordé par quatre arches) et soit U un voisinage de γ . Soient a, b, c, d les quatre arches formant le bord de γ . Comme K ne possède pas de double-bord, il existe des arches $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ et \tilde{d} disjointes de γ , contenues dans U , et aussi proches que l'on veut de a, b, c et d . On construit alors facilement un rectangle inclus dans U et contenant γ dans son intérieur, à l'aide de la structure de produit local aux sommets de γ et des arches a_n, b_n, c_n et d_n pour n assez grand. (voir la figure 6). \square

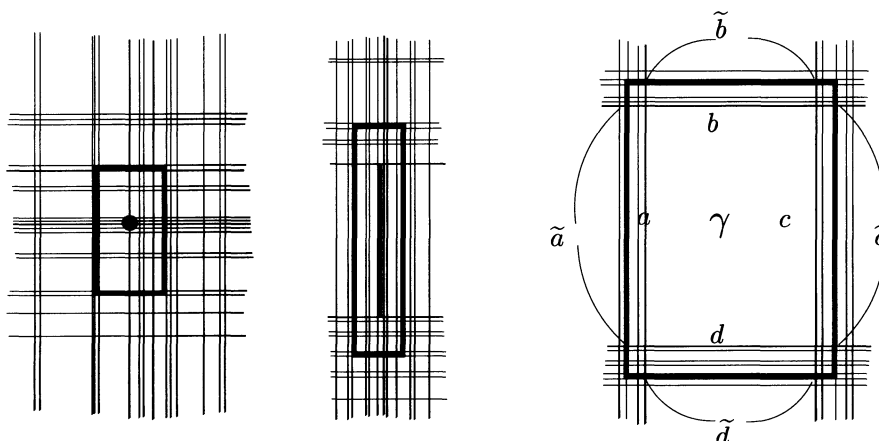


FIGURE 6. Rectangles voisinages des points «réguliers» de \tilde{S}

Remarque. — Aucun segment de variété stable ou instable de K n'est isolé des deux côtés (par hypothèse de transitivité) donc nous pouvons choisir les rectangles voisinages de γ avec leur bord non isolé du côté intérieur. L'intérieur d'un tel rectangle est alors un ouvert saturé pour la relation d'équivalence.

Lemme 8.4.2. — Soit \mathcal{O} l'intérieur d'un rectangle dont chaque côté du bord est non isolé dans \mathcal{O} . Le quotient de \mathcal{O} par la relation d'équivalence \mathcal{R} est homéomorphe à un rectangle $]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[$ du plan.

De plus, la lamination de \mathcal{O} par les segments de variétés stables de $W^s(K) \cap \mathcal{O}$ a pour image le feuilletage du rectangle par les horizontales, et la lamination induite par $W^u(K) \cap \mathcal{O}$ a pour image le feuilletage par les verticales.

Enfin, la mesure de Margulis ν^s passe au quotient en la mesure dt et la mesure ν^u induit la mesure ds , où (s, t) sont les coordonnées canoniques de \mathbb{R}^2 .

Démonstration. — D'après la définition de rectangle, il existe des coordonnées $(s, t) \in [-1, 1]^2$ sur le rectangle fermé $\overline{\mathcal{O}}$, telles que les segments stables soient des segments horizontaux $[-1, 1] \times \{t\}$ et que les segments instables soient des segments verticaux. Soient ν^s et ν^u les mesures de Margulis associées à (K, f) . La mesure ν^s est définie sur les segments transverses à $W^s(K)$ et est invariante par holonomie. On en déduit que l'intégrale de ν^s sur un segment $\{s\} \times [0, t]$ est indépendante de s : on la notera $\int_0^t d\nu^s$. On définit de même $\int_0^s d\nu^u$ comme l'intégrale de ν^u sur un segment $[0, s] \times \{t\}$.

Définissons alors l'application (ψ_1, ψ_2) de \mathcal{O} dans le rectangle $]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[$, où $a_2 = \int_0^1 d\nu^s$, $a_1 = -\int_{-1}^0 d\mu^s$, $b_2 = \int_0^1 d\nu^u$ et $b_1 = -\int_{-1}^0 d\nu^u$. Soit $m \in \mathcal{O}$ de coordonnées (s, t) :

$$(\psi_1, \psi_2)(m) = (\varepsilon \int_0^s d\nu^u, \eta \int_0^t d\nu^s)$$

avec $\varepsilon = +$ si $s \geq 0$, $\varepsilon = -$ sinon, et $\eta = +$ si $t \geq 0$, $\eta = -$ sinon.

D'après le corollaire 8.2.2, les applications ψ_i sont continues. De plus, la mesure $\nu^s(I)$ d'un intervalle vertical I est non-nulle si et seulement si l'intérieur de I rencontre $W^s(K)$.

En particulier, si a est une arche instable, son intérieur est disjoint de $W^s(K)$, donc la mesure stable de a est nulle, et son image par (ψ_1, ψ_2) est réduite à un point. De même, la mesure instable d'une arche stable est nulle. On montre de même que l'image par (ψ_1, ψ_2) d'un rectangle minimal est un point.

Voyons maintenant que l'image réciproque par (ψ_1, ψ_2) de tout point du rectangle $]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[$ est une classe d'équivalence. Soient p et q deux points de \mathcal{O} de coordonnées (s, t) et (x, y) respectivement. Si p et q ont même image par (ψ_1, ψ_2) , on a :

$$\int_0^s d\nu^u = \int_0^x d\nu^u \text{ et } \int_0^t d\nu^s = \int_0^y d\nu^s.$$

Or $\int_0^s d\nu^u - \int_0^x d\nu^u = \int_x^s d\nu^u = 0$ représente l'intégrale de ν^u sur le segment horizontal $[x, s] \times \{t\}$. Il est donc d'intérieur disjoint de $W^u(K)$. De même, le segment vertical $\{y\} \times [y, t]$ est d'intérieur disjoint de $W^s(K)$. Ces deux segments mis bout à bout forment un chemin joignant p à q sans couper $W^s(K) \cup W^u(K)$. On en déduit que les points p et q appartiennent tous deux à une même arche stable ou instable ou à un même rectangle minimal.

Par conséquent, l'application (ψ_1, ψ_2) passe au quotient par la relation d'équivalence \mathcal{R} en une application (Ψ_1, Ψ_2) continue et bijective de \mathcal{O}/\mathcal{R} dans $]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[$. Cette application est ouverte car l'image par (ψ_1, ψ_2) d'un ouvert saturé de \mathcal{O} est un ouvert du rectangle. L'application (Ψ_1, Ψ_2) est bien un homéomorphisme, la preuve du lemme est complète. \square

8.5. Construction d'un voisinage d'un cycle

Considérons à présent une classe d'équivalence de type $\mathcal{P}(C)$. Notre but est de montrer que si C est un cycle à r éléments, composé de $2n$ coins, p u-bords et q s-bords, alors la classe d'équivalence $\mathcal{P}(C)$ possède un voisinage saturé pour la relation \mathcal{R} et dont le quotient par \mathcal{R} est un disque muni de deux feuilletages transverses possédant une singularité à $n + p + q$ séparatrices admise pour un homéomorphisme pseudo-Anosov.

Dans ce paragraphe, nous allons construire un voisinage saturé convenable de $\mathcal{P}(C)$ et le prochain paragraphe considèrera le quotient de ce voisinage par \mathcal{R} .

Les séparatrices non-bord issues d'un point périodique bord de C ainsi que les domaines des zips associés à C auront comme image les séparatrices issues du point singulier image de $\mathcal{P}(C)$. Voyons qu'ils sont munis d'un ordre cyclique naturel, ce qui nous permettra de les numérotter.

Rappelons que le cycle C correspond à une composante connexe ρ du graphe G dont les sommets sont les points périodiques bords et dont les arêtes sont les paires de séparatrices voisines. On a vu que ρ est un cercle naturellement orienté. Nous dirons qu'une arête de ρ est stable si elle correspond à une paire de séparatrices stables ; on parlera de même d'arêtes instables.

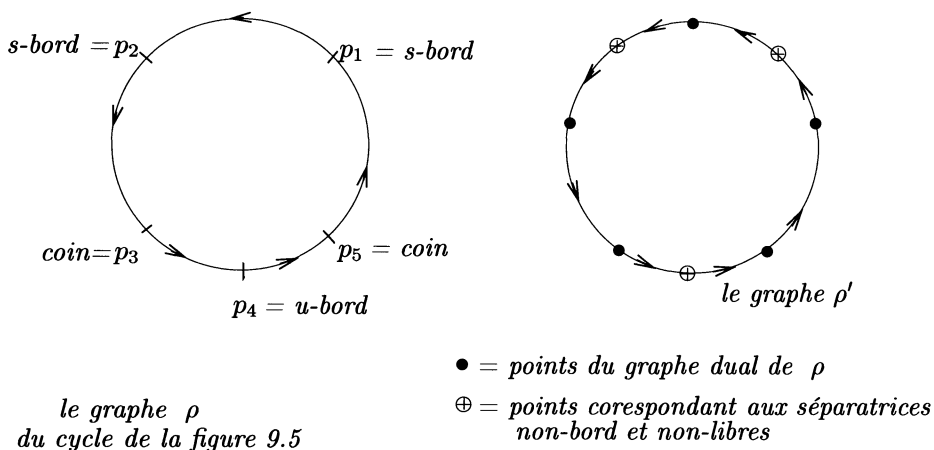
De plus, un point périodique p de C n'est pas un coin si et seulement si le sommet de ρ qui lui correspond est commun à deux arêtes de même nature, stable ou instable. Dans ce cas, il possède une séparatrice non-bord, qui est de nature (instable ou stable) différente des arêtes dont p est le sommet commun.

Considérons le graphe ρ' obtenu à partir de ρ de la façon suivante : on considère d'abord le graphe dual de ρ , en remplaçant les points par des arêtes et réciproquement : c'est encore topologiquement un cercle. Ses sommets correspondent aux paires de séparatrices voisines. Une arête a de ce graphe dual est orientée de l'arête entrant dans le sommet de ρ correspondant à a vers l'arête sortant de ce sommet. Pour obtenir ρ' , on complète ce graphe (en gardant son orientation) en lui ajoutant un sommet entre deux sommets successifs provenant d'arêtes de même nature : ce sommet correspond à la séparatrice non-bord du point périodique commun à ces deux arêtes de ρ .

Un sommet de ρ' correspond donc ou bien à une séparatrice non-bord ou bien à une paire de séparatrices voisines de C . De plus, la nature (stable ou instable) de ces séparatrices ou paire de séparatrices est alternée sur ρ' .

Remarquons enfin que les paires de séparatrices stables voisines correspondent aux zips instables (voir la définition 2.3.2). Cependant, nous appellerons *nature, stable ou instable*, d'un sommet de ρ' la nature de la séparatrice ou de la paire de séparatrices qui lui est associée.

Lemme 8.5.1. — *Si C est un cycle à $2n$ coins, p u-bords et q s-bords, alors le graphe ρ' comporte $n + p + q$ sommets stables alternés avec autant de sommets instables.*

FIGURE 7. Les cercles ρ et ρ'

Démonstration. — Comptons les séparatrices ou paires de séparatrices stables.

Les p points périodiques de type u-bord donnent exactement p séparatrices stables non-bord. Aux $2n$ coins sont associées $2n$ séparatrices stables bord (donc faisant partie de zips) et aux q points périodiques s-bords, $2q$ séparatrices stables bord. Ces séparatrices forment $1/2(2n + 2q)$ paires de séparatrices stables voisines, d'où le résultat. \square

Notation : Choisissons arbitrairement un sommet stable de ρ' et notons le S_1 . On notera $S_1, U_1, \dots, S_{n+p+q}, U_{n+p+q}$ les sommets de ρ' pris dans leur ordre d'apparition quand on décrit le cercle orienté ρ' . Remarquons que les S_i correspondent aux sommets stables et les U_i aux sommets instables.

Définition 8.5.2

1. Soit p un point périodique bord de K . On appellera secteur de p tout rectangle (non dégénéré) R admettant p comme sommet.
2. Un secteur a exactement un côté stable et un côté instable d'origine p . Munissons ces côtés de l'orientation fuyant p . Si la base formée par le vecteur tangent en p au côté stable suivi du vecteur tangent en p au côté instable est directe, nous dirons que R est un secteur droit. Sinon, R sera appelé secteur gauche (voir figure 8).
3. Deux secteurs de p seront dits adjacents s'ils ont un côté commun, et si leur intersection est réduite à ce côté.

Remarque. — Avec la numérotation des sommets du graphe ρ' , soit i l'indice de la séparatrice ou paire de séparatrices U_i contenant le côté instable de R issu de p . Alors

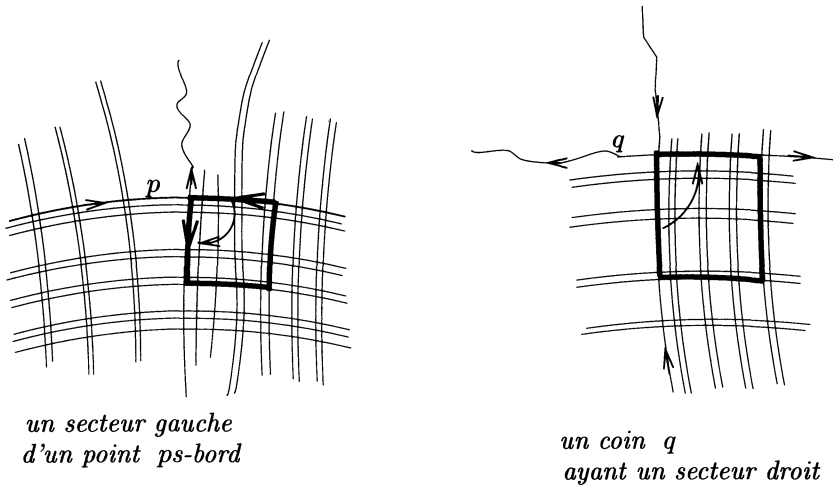


FIGURE 8. Secteurs des points périodiques bord

le côté stable de R issu de p peut être contenu dans S_i ou dans S_{i+1} . Dans le premier cas le secteur R est droit, dans le second cas il est gauche.

La structure de produit local de K et la finitude de l'ensemble des points périodiques bord permettent de montrer :

Lemme 8.5.3. — *On peut associer à tout point périodique coin p de K un secteur, noté D_p ou G_p suivant qu'il est droit ou gauche, et à tout point périodique bord p (non coin) de K deux secteurs adjacents, un droit D_p et un gauche G_p de façon que deux secteurs distincts non disjoints soient associés au même point p et soient adjacents.*

Remarque. — Comme la mesure ν^s de Margulis est non nulle sur tout segment instable rencontrant $W^s(K)$ dans son intérieur, pour tout point p périodique et tout point $q \in W^u(p) \cap K$ différent de p , la mesure du segment $[p, q]^u$ est strictement positive : en particulier, la mesure stable d'un côté instable d'un secteur R_p est non nulle. De même, la mesure instable d'un côté stable d'un R_p est non nulle.

Nous noterons $\zeta_0 > 0$ le minimum de l'ensemble de ces mesures stables et instables.

Lemme 8.5.4. — *Soit p un point périodique de K et W^s une séparatrice non libre issue de p . Alors,*

1. *Pour tout $r > 0$, il existe $x \in W^s \cap K$ tel que $\nu^u([p, x]^s) = r$. Ce point est unique (et alors noté $x(W^s, r)$) si et seulement s'il n'est pas l'extrémité d'une s -arche. Dans le cas contraire, les extrémités de cette s -arche sont les seuls points répondant à la question. On notera $x(W^s, r)$ celui des deux qui est le plus proche de p sur W^s .*

2. Si W_1^s et W_2^s sont deux séparatrices voisines de points périodiques p_1 et p_2 , alors, pour tout $r > 0$, les points $x(W_1^s, r)$ et $x(W_2^s, r)$ sont les extrémités d'une même u -arche.

On définit de même le point $x(W^u, r)$ pour toute séparatrice non-libre instable W^u .

Démonstration. — L'item 1) est une conséquence directe du fait que ν^u induit une mesure positive sur W^s , de support égal à $W^s \cap K$, et ne charge pas les singletons.

L'item 2) est conséquence de l'invariance de ν^u par holonomie, et du fait que les séparatrices voisines portent un zip : si $x \in W_1^s$ et $y \in W_2^s$ sont les extrémités d'une même u -arche alors les mesures des segments $[p_1, x]^s$ et $[p_2, y]^s$ sont égales. \square

Définition 8.5.5. — Pour tout $\zeta < \zeta_0$, un ζ -secteur d'un point périodique p sera un secteur dont les côtés d'origine p ont comme autre extrémité les points $x(W^s, \zeta)$ et $x(W^u, \zeta)$.

Remarque. — Soit $\zeta < \zeta_0$. Un point périodique coin a exactement un ζ -secteur et un point périodique bord non coin deux ζ -secteurs (qui sont adjacents).

Nous pouvons maintenant utiliser la numérotation des séparatrices ou paires de séparatrices d'un cycle pour attribuer un indice à tous les ζ -secteurs des éléments de ce cycle. En général dans la suite, nous oublierons la dépendance en ζ pour alléger les notations, quitte à la réintroduire quand ce sera nécessaire.

Remarques et notations

1. Pour chaque U_i , il existe deux ζ -secteurs dont le côté instable soit inclus dans U_i . De plus, l'un est droit et l'autre gauche, nous désignerons par D_i le premier et G_i le second.
2. Soit D_i un secteur droit d'un élément du cycle. D'après le lemme 8.5.4, si S_i est une paire de séparatrices, les secteurs D_i et G_{i-1} ne sont pas adjacents. Cependant, l'extrémité du côté stable de D_i inclus dans S_i est sur la même arche instable que le point analogue de G_{i-1} . Nous appellerons cette arche A_i .

De même, si U_i est une paire de séparatrices, nous appellerons B_i l'arche stable joignant les extrémités des côtés instables, inclus dans U_i , des ζ -secteurs D_i et G_i .

Lemme 8.5.6. — Appelons côtés extérieurs d'un secteur ses deux côtés ne contenant pas le point périodique.

1. Soit C un cycle. L'union des côtés extérieurs des secteurs des éléments de C , des arches stables A_i et des arches instables B_i forme une courbe simple fermée qu'on appellera $\gamma(C)$.
2. Les courbes $\gamma(C)$ sont deux à deux disjointes.

Démonstration. — Le premier item est clair d'après la définition des secteurs et la remarque précédant ce lemme. Le fait que les secteurs soient disjoints ou adjacents et que deux arches non disjointes soient confondues donnent l'item 2). \square

Nous allons montrer que la courbe $\gamma(C)$ borde un voisinage saturé de $\mathcal{P}(C)$. Ce voisinage sera formé de $\mathcal{P}(C)$, des secteurs et de «demi-zips» (voir la figure 9) que nous allons définir à présent.

Soit S_i une paire de séparatrices voisines stables qui portent un zip instable. Rappelons que le domaine du zip est l'image d'une immersion injective de $\mathbb{R} \times [0, 1]$ où l'image de $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ est S_i . L'arche A_i coupe le domaine du zip en deux composantes connexes.

Définition 8.5.7. — Appelons *demi-zips* (de taille ζ) et notons S_i l'union de A_i et de la composante du domaine du zip privé de A_i qui contient les deux intervalles de S_i qui joignent les extrémités de A_i aux points périodiques de S_i .

On définit de même les demi-zips U_i .

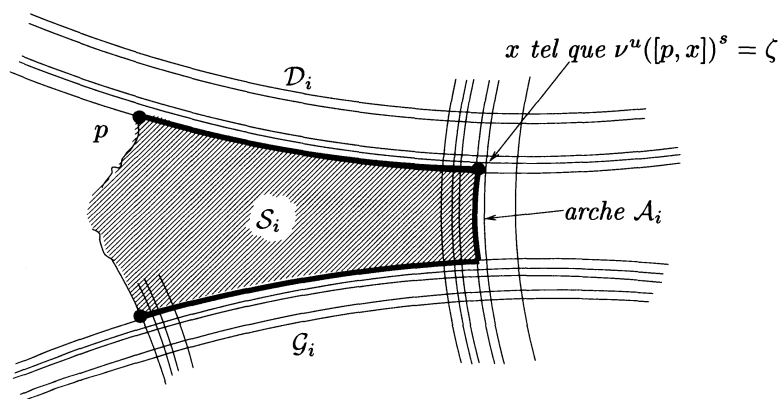


FIGURE 9. Un demi-zip de taille ζ

Lemme 8.5.8. — L'union du demi-zip S_i et des deux séparatrices instables libres issues des points périodiques de S_i est fermée dans le domaine $\Delta(K)$.

Démonstration. — Notons q la période des séparatrices et remarquons que l'arche $f^q(A_i)$ est contenue dans S_i . Nous pouvons donc considérer le rectangle r bordé par A_i , $f^q(A_i)$ et les deux segments stables qui joignent leurs extrémités. Remarquons que le demi-zip S_i est l'union de tous les itérés positifs de r par f^q . Le lemme est alors une conséquence directe du corollaire 2.5.4. \square

Nous sommes à présent en mesure de définir les voisinages saturés de $\mathcal{P}(C)$ que nous avons annoncés.

Lemme 8.5.9. — Pour tout $\zeta \in]0, \zeta_0[$, la courbe $\gamma(\mathcal{C}, \zeta)$ sépare $\Delta(K)$ en deux composantes connexes. La composante connexe de $\Delta(K) \setminus \gamma(\mathcal{C}, \zeta)$ qui contient \mathcal{C} est un voisinage saturé pour \mathcal{R} de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, que l'on notera $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$.

Les $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \xi)$, pour $\xi \leq \zeta_0$, forment une base de voisinages ouverts de \mathcal{C} pour les voisinages saturés : si V est un voisinage saturé de \mathcal{C} , il contient un $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \xi)$.

Démonstration. — Soit $\zeta < \zeta_0$. Nous allons montrer que $O = \mathcal{P}(\mathcal{C}) \cup \bigcup_i (D_i \cup G_i \cup S_i \cup U_i) \setminus \gamma(\mathcal{C})$ est un ouvert fermé connexe de $\Delta(K) \setminus \gamma(\mathcal{C})$, saturé pour \mathcal{R} .

Les secteurs D_i et G_i sont compacts et en nombre fini. On a vu que $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ est fermé dans $\Delta(K)$, le lemme 8.5.8 assure que les demi-zips ont leur adhérence (comme partie de $\Delta(K)$) incluse dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$. L'union $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \cup \bigcup_i (D_i \cup G_i \cup S_i \cup U_i)$ est donc fermée dans $\Delta(K)$, aussi O est-il fermé dans $\Delta(K) \setminus \gamma(\mathcal{C})$.

Par construction, $\bigcup_i (D_i \cup G_i \cup S_i \cup U_i) \setminus \gamma(\mathcal{C})$ est connexe. Par contre $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ ne l'est pas *a priori*, mais chacune de ses composantes connexes contient un point périodique bord, qui appartient aussi aux côtés non extérieurs d'un G_i ou d'un D_i . Donc O est connexe.

Voyons que O est ouvert : la difficulté réside aux points périodiques bords et aux séparatrices libres qui en partent. Soit p un point périodique élément de \mathcal{C} . On se convainc facilement que tout point proche de p est soit dans un secteur, soit dans $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, soit dans le domaine d'un demi-zip. Ceci montre que O est un voisinage de p (voir la figure 10).

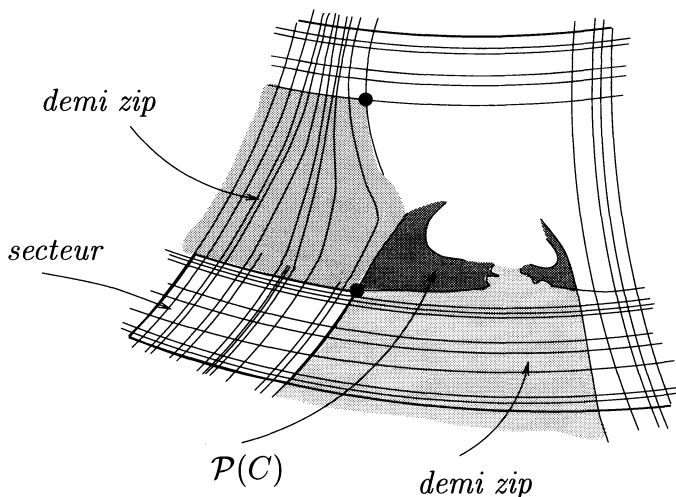


FIGURE 10. O est un voisinage de p

Soit W une séparatrice libre de p , instable pour se fixer les idées. L'intersection d'un voisinage de p dans O avec l'union de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ et des demi-zips instables (portés par

des séparatrices stables) donne un voisinage U inclus dans O de tout point de W assez proche de p (voir la figure 10). Comme les demi-zips instables et $\mathcal{P}(C)$ sont invariants par f^q (où q désigne la période de p), les itérés positifs par f^q de U fournissent des voisinages de tout point de W .

Il reste à montrer que l'ouvert O est saturé. Pour cela, rappelons que, dans la définition des ζ -secteurs, nous avons choisi leurs côtés extérieurs non isolés en tant que variété stable ou instable dans le secteur (voir le choix des points $x(W^s(p), \zeta)$, $x(W^u(p), \zeta)$). On en déduit que l'intérieur des secteurs est saturé. Pour la même raison, les demi-zips privés de l'arche A_i ou B_i (qui est précisément leur intersection avec $\gamma(C)$) sont saturés. Enfin, $\mathcal{P}(C)$ est saturé par définition. L'ouvert O est l'union de ces parties saturées.

Montrons maintenant que, si V est un voisinage saturé de $\mathcal{P}(C)$, il existe ζ tel que V contienne $\mathcal{V}(C, \zeta)$. Les points périodiques bords n'appartiennent pas au bord de V et ils ne sont pas isolés dans K sur leurs séparatrices non libres. Il existe donc $\zeta > 0$ tel que, pour chaque point périodique p , les ζ -secteurs de p sont inclus dans V . Le saturé de l'union de ces secteurs est exactement l'adhérence dans $\Delta(K)$ de $\mathcal{V}(C, \zeta)$. \square

8.6. Implosion des trous et des intervalles au voisinage d'un cycle

Lemme 8.6.1. — *Soit C un cycle à $2n$ coins, p u -bords et q s -bords. Soit \mathcal{M} un modèle de taille ζ d'une singularité à $n + p + q$ séparatrices.*

Il existe une application g de $\mathcal{V}(C, \zeta)$ sur \mathcal{M} vérifiant les propriétés suivantes :

1. *g est une surjection continue ;*
2. *$g(\mathcal{P}(C))$ est l'origine du modèle \mathcal{M} ;*
3. *l'image par g de tout segment de variété stable est inclus dans une feuille du feuilletage horizontal et toute feuille du feuilletage horizontal est l'image par g d'un ou de deux segment(s) stable(s). Idem pour les segments instables et le feuilletage vertical ;*
4. *la mesure-image de la mesure de Margulis ν^u est la mesure transverse au feuilletage horizontal dy : si α est un segment transverse au feuilletage horizontal, $dy(\alpha)$ est égal à $\nu^u(g^{-1}(\alpha))$. Idem ν^s et dx ;*
5. *l'image réciproque par g de tout point de \mathcal{M} est une classe d'équivalence de \mathcal{R} et g passe au quotient en un homéomorphisme de $\mathcal{V}(C, \zeta)/\mathcal{R}$ sur \mathcal{M} .*

Démonstration. — Nous allons définir par morceaux l'application g (selon que le point m appartient à un secteur, à un demi-zip ou à $\mathcal{P}(C)$) et montrer que la définition est cohérente sur le bord de ces morceaux, avant de vérifier que g induit bien un homéomorphisme sur le quotient. La figure 11 illustre cette preuve.

On définit g sur $\mathcal{P}(C)$ comme l'application constante sur l'origine de \mathcal{M} .

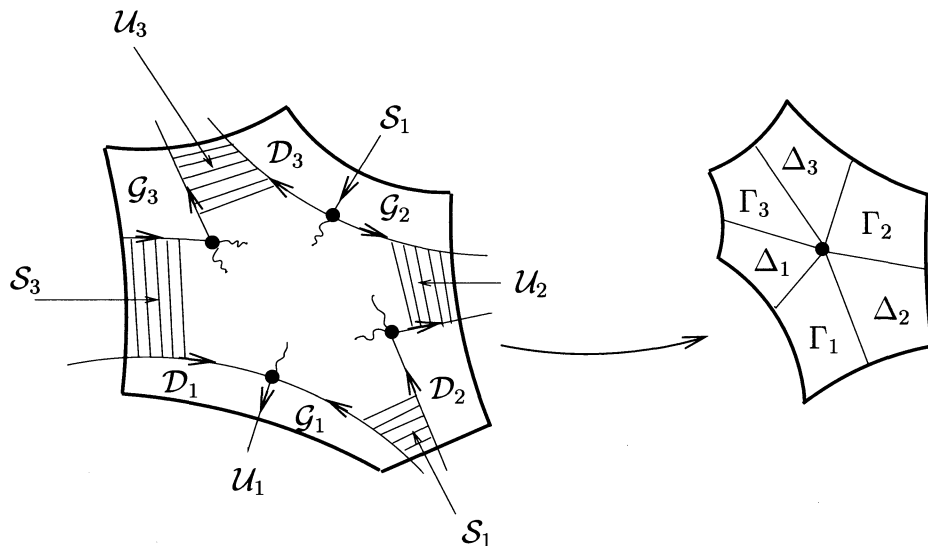


FIGURE 11. Au voisinage d'un cycle

Appelons Δ_i le secteur $[0, \zeta]^2 \times \{i\}$ de \mathcal{M} , σ_i son côté $[0, \zeta] \times \{0, i\}$ et τ_i , son côté $\{0\} \times [0, \zeta] \times \{i\}$. Nous noterons Γ_i le secteur $] - \zeta, 0] \times [0, \zeta] \times \{i\}$.

À tout élément du cycle \mathcal{C} , nous avons associé un secteur D_i ou G_i . rappelons que ces secteurs sont des rectangles. On peut donc choisir des coordonnées sur ces rectangles de façon que les segments stables soient horizontaux et les instables verticaux et que le point périodique de D_i soit le coin $(0, 0)$. Pour tout m de coordonnées (x, y) appartenant à D_i , on notera $\int_0^x d\nu^u$ et $\int_0^y d\nu^s$ les mesures pour ν^u et ν^s respectivement des segments de coordonnées $[0, x] \times \{y\}$ et $\{x\} \times [0, y]$. Nous définissons g de D_i dans Δ_i par :

$$m \mapsto \left(\int_0^x d\nu^u, \int_0^y d\nu^s, i \right).$$

De même que dans la démonstration du lemme 8.4.2, on montre que g ainsi défini est une surjection continue telle que l'image inverse de tout point par g est une classe d'équivalence de \mathcal{R} .

De façon semblable, l'application g est définie de G_i dans Γ_i par :

$$m \mapsto \left(- \int_0^x d\nu^u, \int_0^y d\nu^s, i \right).$$

Ainsi avons-nous envoyé tout point périodique bord en l'origine du modèle. De plus, remarquons que si D_i et G_i sont des secteurs adjacents, les deux définitions de g coïncident sur leur côté commun. Si G_i et D_{i+1} sont adjacents, sur leur côté commun, les deux définitions de g sont les mêmes car le point $(-x, 0) \times \{i\}$ est égal dans \mathcal{M} au point $(x, 0) \times \{i + 1\}$.

Reste à définir g sur les demi-zips privés de l'arche A_i ou B_i .

Envoyons le demi-zip $S_i \setminus \{A_i\}$ sur l'intervalle semi-ouvert σ_i : Soit p le point périodique du secteur D_i (ayant un côté commun avec $S_i \setminus \{A_i\}$). Pour tout m appartenant à $S_i \setminus \{A_i\}$, soit $c(m)$ un segment joignant m à la séparatrice stable de $S_i \setminus \{A_i\}$ issue de p . Si m appartient à une arche instable, on appelle m' l'extrémité de cette arche appartenant à la séparatrice stable de p . Dans le cas contraire, m appartient à un rectangle minimal et on choisit pour m' un point quelconque de l'arche stable du bord de ce rectangle incluse dans la séparatrice stable de p .

Définissons g du demi-zip sur σ_i par :

$$g(m) = (\nu^u([p, m']^s, 0, i).$$

Comme ν^u est à support dans K , cette définition ne dépend pas du choix de m' . De plus, elle coïncide avec la définition précédente de g sur D_i .

Soit \bar{p} le point périodique du secteur G_{i-1} , qui a un côté stable dans une séparatrice du demi-zip S_i . Soit m un point de ce côté stable. En tant que point de S_i , on lui a associé un point m' appartenant à la séparatrice stable issue de p . En utilisant le fait que la mesure de Margulis ν^u est invariante par holonomie, on montre que les segments $[\bar{p}, m]^s$ et $[p, m']^s$ ont même mesure instable. On en déduit que les deux valeurs de g en m sont égales dans \mathcal{M} .

On définit de la même manière g du demi-zip $U_i \setminus \{B_i\}$ dans l'intervalle τ_i et cette définition est compatible avec la définition de g sur les côtés inclus dans U_i des secteurs D_i et G_i .

Par construction, g vérifie les quatre premiers items et de même que dans le lemme 8.4.2, l'image réciproque d'un point de \mathcal{M} est une classe d'équivalence.

L'application passe donc au quotient en une bijection continue. Pour être un homéomorphisme, il lui faut encore être ouverte. Remarquons qu'en toute classe d'équivalence, nous avons exhibé une base de voisinages ouverts dans $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$ qui sont saturés. Ce sont soit des rectangles privés de leur bord, soit des $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \xi)$ avec $0 < \xi < \zeta$. L'image par g de tels ouverts saturés sont des ouverts de \mathcal{M} , ce qui conclut.

□

Lemme 8.6.2. — *Le quotient \tilde{S} du domaine $\Delta(K)$ de la pièce basique K par la relation d'équivalence \mathcal{R} est une surface séparée.*

Démonstration. — Soient x et y deux points de \tilde{S} . Ils se relèvent dans $\Delta(K)$ en deux classes d'équivalence, x' et y' respectivement. Nous devons montrer que x' et y' admettent des voisinages saturés disjoints. Nous allons choisir ces voisinages parmi ceux construits aux lemmes 6 et 8.5.9 Le seul cas délicat est celui où x' est un $\mathcal{P}(C)$ et y' une classe d'un autre type. Soit $\mathcal{V}(C)$ un voisinage saturé de x' . Si y' est disjoint de l'adhérence $\text{Adh}(\mathcal{V}(C))$ dans $\Delta(K)$, le complémentaire du saturé de $\text{Adh}(\mathcal{V}(C))$ est un voisinage saturé ouvert de y' . Si y' est dans l'intérieur de $\mathcal{V}(C)$, y étant non nul et $\mathcal{M} \subset S$ étant séparé, on trouve deux ouverts qui séparent x et y . Enfin, si

y' est une classe non disjointe de la courbe $\gamma(\mathcal{C})$, on considère un voisinage saturé qui est l'intérieur d'un rectangle dont les mesures (stable et instable) des côtés sont inférieures à $\zeta/10$. Ce rectangle est disjoint de $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta/2)$. \square

Remarquons que les cartes feuilletées que nous avons construites sont munies de mesures transverses aux deux feuilletages qui proviennent des mesures de Margulis des variétés invariantes de K . Les changements de cartes préservent ces mesures. Pour achever la démonstration du théorème 8.3.1 il reste à montrer que la surface \tilde{S} est bien compacte.

Lemme 8.6.3. — *Le domaine $\Delta(K)$ privé de l'union (sur l'ensemble des cycles \mathcal{C}) des voisinages ouverts $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$ est compact.*

Démonstration. — Soit (x_n) une suite de points de $\Delta(K)$ privé des $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$: en particulier les points x_n appartiennent au domaine restreint $\delta(K)$ privé des séparatrices libres et de l'intérieur des demi-zips. Nous allons montrer que la suite (x_n) possède une sous-suite convergente dans $\Delta(K)$ (et donc dans $\Delta(K)$ privé de l'ouvert union des $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$). Si la suite (x_n) contient une infinité de points dans K , cela découle de la compacité de K . On supposera donc que les x_n n'appartiennent pas à K . Ils appartiennent donc à des arches ou à des rectangles bordés d'arches. Rappelons que les arches appartiennent toutes à un nombre fini de zips, et que tout rectangle bordé d'arches est inclus dans l'intersection d'un zip stable et d'un zip instable (ou plus exactement dans l'intersection de leur domaine, nuance que l'on se permet d'oublier dans ce qui suit).

Supposons d'abord qu'il existe une infinité de x_n qui appartiennent chacun à une arche stable a_n . Quitte à prendre une sous-suite, on peut donc choisir un zip stable Z qui est la classe d'équivalence de toutes les arches a_n . Soit \mathcal{S} le demi-zip de Z dont on a ôté l'intérieur : rappelons qu'il est bordé par une arche A . Notons q la période des séparatrices instables qui portent le zip Z , et R le rectangle bordé par A , $f^q(A)$ et par deux segments instables contenus dans les séparatrices instables de Z . C'est un domaine fondamental de Z , et tout itéré négatif $f^{-m \cdot q}(R)$ est inclus dans le demi-zip \mathcal{S} . On en déduit qu'il existe une suite (y_n) de points de R et une suite $(k_n) \subset \mathbb{N}$ tels que pour tout n , $x_n = f^{k_n}(y_n)$. Notons $b_n = f^{-k_n}(a_n)$ l'arche stable passant par y_n . Si la suite (k_n) est bornée, les points x_n appartiennent à l'union d'un ensemble fini d'itérés de R , qui est compacte et incluse dans $\Delta(K)$. La suite (x_n) possède alors une sous-suite convergente dans $\Delta(K)$ et c'est ce que l'on voulait. Si la suite (k_n) n'est pas bornée, quitte à prendre une sous-suite on peut supposer qu'elle tend vers $+\infty$. La longueur de l'arche stable a_n tend alors vers zéro : en effet, $a_n = f^{k_n}(b_n)$, et la longueur des arches stables b_n est uniformément bornée. On en déduit que la distance de x_n aux extrémités de l'arche a_n tend vers zéro, et donc aussi la distance de x_n à K . Comme K est compact, on peut extraire une sous-suite de (x_n) convergeant vers un point de K , ce qui conclut.

On raisonne de même dans le cas où une infinité de x_n appartiennent à une arche instable. Il reste donc à considérer le cas où une infinité de points x_n appartiennent chacun à l'intérieur d'un rectangle r_n bordé d'arches. Remarquons que chacun de ces rectangles est inclus dans l'intersection d'un zip stable et d'un zip instable. Quitte à prendre une sous-suite, on peut alors supposer qu'il existe un zip stable Z^s et un zip instable Z^u tel que pour tout n le rectangle r_n soit inclus dans $Z^s \cap Z^u$. On procède alors comme pour le cas précédent : on choisit un domaine fondamental d^s de Z^s dont tous les itérés négatifs sont inclus dans le demi-zip \mathcal{S} associé à Z^s , et un domaine fondamental d^u de Z^u dont les itérés positifs sont dans le demi-zip \mathcal{U} associé à Z^u . Chaque rectangle r^n est donc inclus dans une intersection $f^{k_n}(d^s) \cap f^{-l_n}(d^u)$, où (k_n) et (l_n) sont deux suites d'entiers positifs. Si l'une ou l'autre de ces suites est bornée, la suite x_n est incluse dans l'union d'un nombre fini d'itérés de d^u ou de d^s , ce qui permet de trouver une sous-suite convergeant dans $\Delta(K)$. Si chacune de ces suites est non-bornée donc (quitte à prendre une sous-suite) tend vers $+\infty$, on montre que le bord de r_n est de longueur tendant vers zéro, on en déduit que le diamètre de r_n tend vers zéro, et donc que la distance de x_n à K tend vers 0. Il existe alors une sous-suite de (x_n) convergeant vers un point de K . Ceci achève la démonstration de ce lemme. \square

Corollaire 8.6.4. — *La surface \tilde{S} est compacte.*

Démonstration. — Nous allons montrer que \tilde{S} est l'union d'un nombre fini de compacts. En effet le lemme ci-dessus montre que $\Delta(K)$ privé des ouverts $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$ est compact ; son quotient l'est donc aussi. La surface \tilde{S} est l'union de ce compact et du quotient des adhérences dans $\Delta(K)$ des $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$. Or ces quotients sont homéomorphes à des disques fermés (modèles des singularités). \square

BIBLIOGRAPHIE

- [AbSm] R. Abraham, S. Smale, *Nongenericity of Ω -stability*, Global Analysis I, Proc. Symp. Pure Math., 1968, AMS 14 (1970), p. 5-8.
- [ABS] V.S. Afraimovich, V.V. Bykov et L.P. Shil'nikov, *On the appearance and structure of the Lorenz attractor*, Dokl. Acad. Sci. USSR 234, (1977), p. 336-339.
- [AnPo] A.A. Andronov, L.S. Pontriaguine, *systèmes grossiers*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 14 (1937) p. 247-250.
- [A1] D.V. Anosov, *Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. of the Steklov Inst. of Math. (translated by the AMS) 90 (1967).
- [A2] D.V. Anosov, *Structurally stable systems*, Proc. Steklov Inst. Math. 169 (1985) p. 61-95.
- [ArGr1] S.Kh Aranson, V.Z. Grines, *The topological classification of cascade on closed two-dimensional manifolds*, Russian Math. Surv. 45 N1 (1990) p. 1-35.
- [ArGr2] S.Kh Aranson, V.Z. Grines, *Cascade on surfaces*, Encyclopædia of Mathematical Sciences 66 Dynamical Systems IX, Springer Verlag (1995) p. 141-175.
- [Be] A. Bezen, *On the topological properties and the topological conjugacy of two-dimensional Morse-Smale diffeomorphisms*, Random Comput. Dynam. 2 N2 (1994) p. 183-203.
- [BezGr1] A.N. Bezdenezhnykh, V.Z. Grines, *Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds*, N.F. Otrokov (éditeur) Differ. Integral'nyi Uravn., Gor'kij Gos. Univ. (1985), p. 33-37.
- [BezGr2] A.N. Bezdenezhnykh, V.Z. Grines, *Diffeomorphism with orientable heteroclinic sets on two-dimensional manifolds*, E.A. Leontovich-Andronov (éditeur) Trud. Mezhvuz. Temat. Sb. Nauchn. Metody Kachestvennoj Teorii Differents Uravn. Gor'kij Gos. Univ. (1985) p. 139-152.

- [BezGr3] A.N. Bezdeneshnykh, V.Z. Grines, *Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds, parties 1 et 2*, E.A. Leontovich-Andronov (éditeur) Trud.Mezhvuz. Temat. Sb. Nauchn. Metody Kachestvennoj Teorii Differents Uravn. Gor'kij Gos. Univ. (1985) 22-38 et (1987) p. 24-31.
- [Bi] G.D. Birkhoff, *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques*, Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei 93 vol.1 (1935) 85-216 et œuvres complètes vol. 2 Dover (1968).
- [BeHa1] M. Bestvina et M. Handel, *Train tracks and automorphisms of free groups*, Ann. of Math., 135, (1992) p. 1-51.
- [BeHa2] M. Bestvina et M. Handel, *Train-tracks for surface homeomorphisms*, Topology 34 N.1 (1995) p. 109-140.
- [BlFr] P. Blanchard, J. Franks, *An obstruction to the existence of certain dynamics in surface diffeomorphisms*, Ergod. Th. and Dyn. Sys. 1 (1981) p. 255-260.
- [Bo1] R. Bowen, *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*, Amer. J. of Math. 42 (1970), 725-747.
- [Bo2] R. Bowen, *Topological entropy and Axiom A*, Proc. Symp. Pure Math. Vol 14 AMS, Providence, R.I. (1970) p. 23-41.
- [Ch] J. Christy, *Branched surfaces and attractors. I : dynamic branched surfaces*, Trans. of the AMS 336 N2, april 1993, p. 759-784.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach et V. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque 66-67 (1979).
- [Fe] J. Fehrenbach, *Roots and symetries of pseudo Anosov homéomorphisms*, preprint INLN (1997).
- [Fl] G. Fleitas, *Classification of gradient like flows on dimension two and three*, Bol. Soc. Mat. Brasil 6 (1975).
- [Fr1] J. Franks, *Anosov diffeomorphisms*, Proc. Symp. Pure Maths 14 (1970) p. 61-93.
- [Fr2] J. Franks, *Homology and dynamical systems*, volume CBMS 49. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1982).
- [Fri] D. Fried, *Subshifts on surfaces*, Ergod. Th. and Dyn. Sys. 2 (1982) p. 15-21.
- [Go] C. Godbillon, *Eléments de topologie algébrique*, Hermann (1971).
- [Gr1] V.Z. Grines, *The topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basic set I*, (En russe) Trudy Moskow. Mat. Obsch 32 (1975) p. 35-60.
- [Gr2] V.Z. Grines, *The topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basic set II*, (En russe) Trudy Moskow. Mat. Obsch 34 (1977) p. 243-252.

- [Gr3] V.Z. Grines, *Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic trajectories on surfaces*, (En russe) Mat. Zametki 54 N3 (1993) p. 3-17, et traduction dans Math. Notes 54(1993), p. 881-889 (1994).
- [Gr4] V.Z. Grines, *Structural stability and the asymptotic behaviour of invariant manifolds of A-diffeomorphisms of surfaces*, Journal of Dynamical and Control Systems 3 N1 (1997) p. 91-110.
- [Gr5] V.Z. Grines, *On topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional attractors and repellers*, Matem. Sborn. 188 N4 (1997) p. 57-94.
- [Gr6] V.Z. Grines, *Representation of one-dimensional attractors and repellers of A-diffeomorphisms of surfaces by hyperbolic homeomorphisms*, Matem. Zametki. (1997) à paraître.
- [GrKa1] V.Z. Grines, Kh.Kh. Kalay, *The topological classification of basic sets with no pairs of conjugate points of A-diffeomorphisms of surfaces*, Gorkii State University, Gorkii (1988) p. 1-95.
- [GrKa2] V.Z. Grines, Kh.Kh. Kalay, *On the topological equivalence of diffeomorphisms with non-trivial basic sets on two-dimensional manifolds*, Methods of the qualitative theory of differential equations, Gorkii State University, Gorkii (1988) p. 40-48.
- [GuMoNe] J. Guckenheimer, J. Moser, Sh. Newhouse, *Dynamical Systems*, C.I.M.E. lectures, Bressanone, Italy, June 1978, Progress in Math. 8, 1980.
- [GuWi] J. Guckenheimer et R.F. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors*, Publ. Math. de l'I.H.E.S. 50 (1979), 307-320.
- [Ha] J. Hadamard, *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles*, Bull. Soc. Math. France, 29 (1901) p. 223-226.
- [Han] M. Handel, *Global shadowing of pseudo-Anosov homeomorphism*, Erg. Th. and Dyn. Sys. 5 (1985) p. 373-377.
- [He] G. Hemion, *On the classification of homéomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds*, Acta Math 1-2 (1979) p. 125-155.
- [HPPS] M. Hirsch, J. Palis, C. Pugh et M. Shub, *Neighbourhoods of hyperbolic sets*, Inventiones Math. 9, (1970), p. 121-134.
- [Je] E. Jeandenans, *Difféomorphismes hyperboliques des surfaces et combinatoire des partitions de Markov*, thèse de doctorat de l'université de Bourgogne, Dijon, 20 sept 1996.
- [La] R. Langevin, *Quelques nouveaux invariants des difféomorphismes Morse-Smale d'une surface*, Annales Inst. Fourier 43 (1993) Fasc.1 p. 265-278.
- [Lo1] J. Los, *Pseudo-Anosov maps and invariant train tracks in the disc : a finite algorithm*, Proc. London Math Soc. (1993).
- [Lo2] J. Los, *On the conjugacy problem for automorphisms of free groups*, Topology 35, 3,(1996) p. 779-806.

- [Lor] E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmosph. Sci. 20 (1963), p. 130-141.
- [Ma] R. Mañé, *A proof of the C^1 -stability conjecture*, Publ. Math. I.H.E.S. 66 (1988), p. 161-210.
- [Man] A. Manning, *There are no new Anosov diffeomorphisms on tori*, Amer. J. Math. 96 (1974), p. 422-429
- [Mar] G.A. Margulis, *Certain measures associated with U -flows on compact manifolds*, Func. Anal. and its Appl. 4, (1970) p. 55-67.
- [Mo] J. Moser, *On a theorem of Anosov*, J. Diff. Equ. 5 (1969) p. 411-440.
- [Mo1] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems*, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, (1973).
- [Mos] L. Mosher, *The classification of Pseudo-Anosovs*, London Math. Soc. Lect. Notes 112 (1986) 13-75.
- [NePa] S. Newhouse et J. Palis, *Hyperbolic nonwandering sets on two-dimensional manifolds*, Dyn. Systems, Peixoto ed., Salvador (1973) p. 293-301.
- [Pa] J. Palis, *On Morse-Smale dynamical systems*, Topology 8 (1969) p. 385-405.
- [PM] J. Palis et W. De Melo, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer-Verlag, (1982).
- [PaSm] J. Palis et S. Smale, *Structural stability theorems* , Proc. of Symposia in Pure Mathematics (Global Analysis) 14 (1970) 223-231.
- [PaSu] W. Parry et D. Sullivan, *A topological invariant of flows on one dimensional spaces*, Topology 14 (1975), p. 297-299.
- [PaTa] J. Palis et F. Takens, *Homoclinic bifurcations and chaotic dynamics* , Cambridge Uni.Press (1993).
- [PePe] M.C. Peixoto et M. Peixoto, *Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions*, Anais da Acad. Bras de Ciências 31, (1959).
- [Pe1] M. Peixoto, *Structural stability on two dimensional manifolds*, Topology 1, 1962.
- [Pe2] M. Peixoto, *On the classification of flows on 2-manifolds*, Salvador Symp. in Dynamical Systems, Academic Press (1973).
- [Per1] O. Perron, *Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen*, Math. Zeit. 29 (1928), p. 129-160.
- [Per2] O. Perron, *Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen*, J. Reine Angew. Math 161 (1929), 41-64.
- [Per3] O. Perron, *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen*, Math. Zeit.32 (1930), p. 703-728.
- [Pl1] R.V. Plykin, *On hyperbolic attractors of diffeomorphisms*, Usp.Math. Nauk 35, No 4, (1980) p. 94-104 [English Transl. Russ. Math. Survey 35, No 3, p. 109-121].

- [Pl2] R.V. Plykin, *On hyperbolic attractors of diffeomorphisms (non-orientable case)*, Usp.Math. Nauk 35, No 4, (1980) p. 186-187 [English Transl. Russ. Math. Survey 35, No 4, p. 186-187].
- [Pl3] R.V. Plykin, *On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades*, Usp.Math. Nauk 39, No 6, (1984) 75-113 [English Transl. Russ. Math. Survey 39, No 6, p. 85-131].
- [Po] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Les grands classiques Gauthier-Villars, librairie Blanchard.
- [Pu] C. Pugh, *The closing lemma*, Amer. J. Math 89 (1967), p. 956-1009.
- [PuSh1] C. Pugh, M. Shub, *Suspending subshifts*, in C. Percelli and R. Sacksteder editors, Contributions to Geometry and Analysis. London Math. Soc., Johns Hopkins University Press, 1981.
- [Ro] J.W. Robbin, *A structural stability theorem*, Annals of Math. 94 (1971), p. 447-493.
- [R] C. Robinson, *Structural stability of C^1 -diffeomorphisms*, J. Diff. Equ. 22 (1976), p. 28-73.
- [Ru] G. Ruas, *Atratores hiperbólicos de codimensão um e classes de isotopia em superfícies*, Informes de Matemática, I.M.P.A. Série F-01/82, (1982) (prépublication).
- [Sh] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque 56 (1978).
- [Si] Ya.G. Sinai, *Markov partitions and C -diffeomorphisms*, Funkts. Anal. Pri-lozh. 2, No 1, (1968) p.64-69 [English Transl. Funct. Anal. Appl. 2, p. 61-82].
- [Sm] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. A.M.S. 73 (1967), p. 747-817.
- [Wi1] R. Williams, *The 'DA' maps of Smale and structural stability*, Global Analysis, Proc. Symp in Pure Math. XIV, Amer. Math Soc (1970), p. 329-334.
- [Wi2] R. Williams, *Classifications of subshifts of finite type*, Annals of Math. 98 (1973) p.120-153 et Errata Annals of Math. 99 (1974) p. 380-381.
- [Wi3] R. Williams, *Classifications of one-dimensional attractors*, Proc. Symp Pure Math. 14 (1970) p. 341-363.