

Astérisque

JEAN-LOUIS VERDIER
MALTISINOTIS GEORGES (éd.)
Des catégories dérivées des catégories abéliennes

Astérisque, tome 239 (1996)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__239__R1_0>

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » ([http://smf4.emath.fr/
Publications/Asterisque/](http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/)) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

239

ASTÉRISQUE

1996

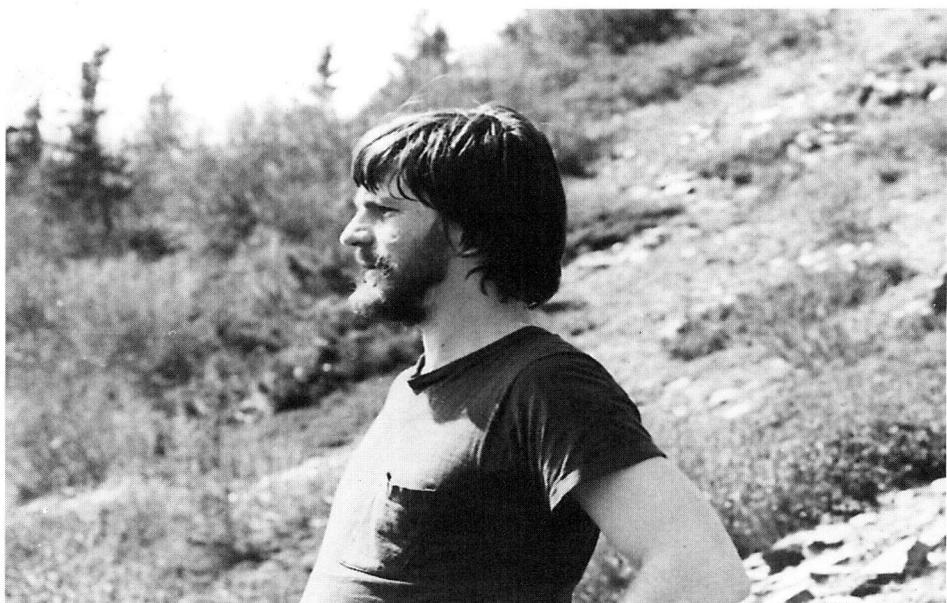
**DES CATÉGORIES DÉRIVÉES
DES CATÉGORIES ABÉLIENNES**

Jean-Louis VERDIER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects classification :

14F20, 18E30, 18E35, 18G05, 18G10, 18G15, 18G20, 18G35,
18G40, 55U15, 55U25, 55U30.



Jean-Louis VERDIER, 1977

Préface

Jean-Louis Verdier, tragiquement disparu le 25 août 1989, a soutenu sa thèse de doctorat d'Etat, intitulée *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, le 14 juin 1967, à Paris. Le présent texte est celui du manuscrit dactylographié de cette thèse, dans sa dernière version. Les éditeurs se sont bornés à corriger des erreurs de détail. Seule la partie intitulée *Introduction* avait été déposée à la faculté. Le corps du texte était inachevé à la date de la soutenance, et l'est resté.

La genèse de ce travail est assez bien connue (*cf.* [I]). On sait que Grothendieck conçut l'idée des catégories dérivées au début des années soixante pour fournir le cadre d'algèbre homologique nécessaire à la vaste généralisation des théorèmes de dualité qu'il avait imaginée à la suite de son exposé au congrès international d'Édimbourg de 1958. Il avait proposé à Verdier, comme sujet de thèse, de construire le formalisme envisagé. En 1963, Verdier faisait paraître un fascicule de résultats résumant l'essentiel de la théorie, *Catégories dérivées, quelques résultats (État 0)*, miméographié par l'IHÉS (reproduit dans [SGA 4 1/2]). Si la notion de catégorie dérivée est due à Grothendieck, c'est à Verdier que revient d'avoir introduit, en amont, celle de catégorie triangulée. L'axiomatique présentée là, inspirée de la théorie homotopique stable (*cf.* [P]), devait se révéler d'une surprenante fécondité.

Ce n'est que plusieurs années après que Verdier entreprend une rédaction d'ensemble de son travail. Pourquoi ne l'a-t-il pas terminée? Bien des hypothèses ont été avancées. Je pencherais pour la suivante. La partie qui manque est la théorie des foncteurs dérivés. Quand Verdier en arrive à cet endroit de sa rédaction, les catégories dérivées ont déjà été largement utilisées en géométrie algébrique. Diverses variantes et généralisations se développent : notion de dérivabilité ponctuelle à la Deligne, foncteurs dérivés non additifs (algèbre homotopique à la Quillen), foncteurs dérivés filtrés. Dès lors, le cadre fixé par le fascicule de résultats s'avérait insuffisant. Trouver le bon point de vue aurait demandé un nouveau travail de fondements que Verdier, intéressé à cette époque par d'autres problèmes, n'a eu, me semble-t-il, ni le loisir ni sans doute l'envie de réaliser. À mesure que le temps passait, des articles sur

les catégories dérivées paraissaient et l'usage s'en répandait, le formalisme envahissant d'autres domaines des mathématiques (comme les équations aux dérivées partielles linéaires). L'achèvement de son ouvrage devenait alors aux yeux de Verdier une tâche de moins en moins nécessaire ...

Tout incomplet qu'il est, ce texte de Verdier constitue néanmoins une référence précieuse, voire irremplaçable (par exemple, la présentation, originale et élégante, qui y est donnée des suites spectrales ne se trouve, à ma connaissance, nulle part ailleurs). On ne peut que se réjouir qu'il voie enfin le jour.

Paris, le 27 avril 1996

Luc Illusie

Références

[I] L. Illusie, *Catégories dérivées et dualité, travaux de J.-L. Verdier*, L'Enseignement Mathématique, 36 (1990), 369-391. (Exposé donné le 19 octobre 1989, lors de la cérémonie en hommage à Jean-Louis Verdier organisée par l'Université Paris VII.)

[P] D. Puppe, *On the formal structure of stable homotopy theory*, Colloquium on Algebraic Topology, Aarhus Universitet (1962), 65-71.

[SGA 4 1/2] “Cohomologie étale”, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, SGA 4 1/2, par P. Deligne, Lecture Notes in Mathematics 569, Springer-Verlag (1977), 262-311.

Note des éditeurs

C'est lors de la cérémonie en hommage à J.-L. Verdier, organisée par l'Université Paris VII, le 19 octobre 1989, que M. Artin, P. Cartier et L. Illusie eurent l'idée de publier la thèse de J.-L. Verdier. Deux ans plus tard je me joignais à eux et j'obtenais, grâce à l'appui de J. Le Potier et de M. Broué, un financement de Paris VII (URA 212) et de l'ÉNS (DMI) pour une saisie de ce texte en T_EX. Une fois la frappe terminée, le résultat fut soigneusement comparé à l'original dactylographié de Verdier. Il restait encore à faire une relecture mathématique car Verdier n'avait jamais effectué les dernières corrections.

Cette lecture attentive a été faite, avec un extrême soin, par P. Cartier (chapitre I), B. Keller (chapitre III), et, pour l'ensemble du texte, par M. Zisman et moi-même. En dehors des nombreuses coquilles qui ne méritent pas d'être énumérées, les principales modifications apportées sont les suivantes. Dans le chapitre I, la proposition (3.1.5) affirmait une équivalence. Cette équivalence a été remplacée par une implication, la réciproque (jamais utilisée par la suite) étant fausse. Dans la proposition (3.4.1), il y avait une erreur de signe, induisant des erreurs de signe dans le chapitre III ((1.3.4), (b) et (3.2.7.3)). Ceci a conduit à adapter la définition de la “catégorie triangulée opposée” (chap. II, 1.1.7) afin que reste vraie l'affirmation : *la catégorie dérivée de la catégorie opposée est la catégorie triangulée opposée à la catégorie dérivée*.

Dans le chapitre II, l'ordre des propositions du §1.2 a été modifié. En effet, Verdier s'était rendu compte, après la rédaction, que l'assertion que la somme directe de deux triangles distingués est un triangle distingué est conséquence des autres axiomes des catégories triangulées. Il l'avait donc supprimée de la liste des axiomes, sans effectuer les remaniements qui en résulttaient. D'autre part, les alinéas (2.3.6) et (2.3.7) qui n'étaient pas utilisés dans la suite, et dont la vérification a échoué, ont été supprimés. La définition de la notion d'objet spectral stationnaire (4.4.2) a été légèrement modifiée, la définition originale étant trop faible pour l'établissement du théorème (4.4.3) qui suivait. Il a été vérifié que cela était sans conséquence pour la suite.

L’index de notations et l’index terminologique ont été complétés. En revanche, la bibliographie a été laissée inchangée (sauf pour les SGA dont les références définitives dans les “Lecture Notes” ont été indiquées). En particulier, l’absence de référence numéro 13 n’a pas été comblée.

Je voudrais remercier vivement M. Broué, A. Bruguières, P. Cartier, L. Gruson, L. Illusie, B. Keller, J. Le Potier, M. Zisman, ainsi que l’Université Paris VII, l’École Normale Supérieure, et l’Institut des Hautes Études Scientifiques, qui ont aidé à divers titres à la réalisation de ce projet. Je remercie également C. Defosse et C. Gourgues pour avoir patiemment saisi cet ouvrage en *AMS-TEX*.

J’aurais aimé pouvoir étendre ces remerciements à L. Doustaing préma-turément disparu en décembre 1994.

Paris, le 14 juin 1996

Georges Maltsiniotis

Publications de J.-L. Verdier

- [01] *Sur les intégrales attachées aux formes automorphes* (d'après G. Shimura), Séminaire Bourbaki 1960-61, n° 216, pp. 216-1 à 216-27, Benjamin (1966).
- [02] *Le théorème de dualité de Poincaré*, C.R.A.S. t. 256, pp. 2084-2086, Gauthier-Villars (1963).
- [03] *Seminar on étale cohomology of number fields* (en collaboration avec M. Artin), Woods Hole Conference on Algebraic Geometry, A.M.S. (1964).
- [04] *Équivalence essentielle des systèmes projectifs*, C.R.A.S. t. 261, pp. 4950-4953, Gauthier-Villars (1965).
- [05] *Dimension des espaces localement compacts*, C.R.A.S. t. 261, pp. 5293-5296, Gauthier-Villars (1965).
- [06] *Dualité dans la cohomologie des groupes profinis*, Appendice à “Cohomologie galoisienne” (Jean-Pierre Serre), Lecture Notes in Mathematics 5, pp. 183-206, Springer (1964), quatrième édition (1973).
- [07] *Faisceaux constructibles sur un espace localement compact*, C.R.A.S. t. 262, pp. 12-15, Gauthier-Villars (1966).
- [08] *Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts*, Séminaire Bourbaki 1965-66, n° 300, pp. 300-01 à 300-13, Benjamin (1966).
- [09] *The Lefschetz fixed point formula in étale cohomology*, Conference on Local Fields, NUFFIC Summer School held at Driebergen in 1966, pp. 199-214, Springer (1967).
- [10] *A duality theorem in the étale cohomology of schemes*, Conference on Local Fields, NUFFIC Summer School held at Driebergen in 1966, pp. 184-198, Springer (1967).
- [11] *Base change for twisted inverse image of coherent sheaves*, Bombay Colloquium on Algebraic Geometry in 1968, pp. 393-408, Oxford University Press (1969).

- [12] *Théorème de dualité pour la cohomologie des espaces localement compacts*, Dualité de Poincaré, Séminaire Heidelberg-Strasbourg 1966-67, exp. 4, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, n° 3, pp. 1-36 (1969).
- [13] *Théorème du noyau*, Dualité de Poincaré, Séminaire Heidelberg-Strasbourg 1966-67, exp. 9, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, n° 3, pp. 1-52 (1969).
- [14] *On a theorem of Wilder*, Applications of categorical algebra, Proc. Symp. Pure Math. 17, pp. 184-191, A.M.S. (1970).
- [15] *Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert* (en collaboration avec R. Kiehl), Math. Ann. 195, pp. 24-50, Springer (1971).
- [16] *Topologie sur les espaces de cohomologie d'un complexe de faisceaux analytiques à cohomologie cohérente*, Bull. Soc. Math. France 99, pp. 337-343, Gauthier-Villars (1971).
- [17] *Dualité relative en géométrie analytique complexe* (en collaboration avec J.-P. Ramis et G. Ruget), Inv. Math. 13, pp. 261-283, Springer (1971).
- [18] S.G.A. 4 (1963-64) “Théorie des topos et cohomologie étale des schémas” : *Préfaisceaux* (en collaboration avec A. Grothendieck) pp. 1-184; *Topologies et faisceaux*, pp. 219-263; *Fonctorialité des catégories de faisceaux*, pp. 265-297; *Topos* (en collaboration avec A. Grothendieck), pp. 299-519, Lecture Notes in Mathematics 269, Springer (1972).
- [19] S.G.A. 4 (1963-64) “Théorie des topos et cohomologie étale des schémas” : *Cohomologie dans les topos*, pp. 1-62; *Conditions de finitude. Topos et sites fibrés. Applications aux questions de passage à la limite* (en collaboration avec A. Grothendieck), pp. 163-336, Lecture Notes in Mathematics 270, Springer (1972).
- [20] *Caractéristique d'Euler-Poincaré*, Bull. Soc. Math. France 101, pp. 441-445, Gauthier-Villars (1973).
- [21] *Le théorème de Le Potier*, Séminaire de géométrie analytique 1972-73, Différents aspects de la positivité, Astérisque 17, pp. 68-78, S.M.F. (1974).
- [22] *Indépendance par rapport à ℓ des polynômes caractéristiques des endomorphismes de Frobenius de la cohomologie ℓ -adique* (d'après P. Deligne), Séminaire Bourbaki 1972-73, n° 423, Lecture Notes in Mathematics 383, pp. 98-115, Springer (1974).
- [23] *Quelques problèmes d'intersection en géométrie riemannienne* (en collaboration avec P. Marry), J. Diff. Geom. 12, pp. 345-376, A.M.S. (1977).

- [24] *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Inv. Math. 36, pp. 295-312, Springer (1976).
- [25] *Classe d'homologie associée à un cycle*, Séminaire de géométrie analytique 1974-75, Astérisque 36-37, pp. 101-151, S.M.F. (1976).
- [26] *Le théorème de Riemann-Roch pour les intersections complètes*, Séminaire de géométrie analytique 1974-1975, Astérisque 36-37, pp. 189-228, S.M.F. (1976).
- [27] *Le théorème de Riemann-Roch pour les variétés algébriques éventuellement singulières* (d'après P. Baum, W. Fulton et R. MacPherson), Séminaire Bourbaki 1974-75, n° 464, Lecture Notes in Mathematics 514, pp. 159-175, Springer (1976).
- [28] *Catégories dérivées* (rédigé en 1963, publié en 1976), Séminaire de Géométrie Algébrique 4 1/2, Cohomologie Étale, Lecture Notes in Mathematics 569, pp. 262-311, Springer (1977).
- [29] *Équations différentielles algébriques*, Séminaire Bourbaki 1977-78, n° 512, Lecture Notes in Mathematics 710, pp. 101-122, Springer (1979).
- [30] *Instantons*, Les équations de Yang-Mills, Séminaire É.N.S. 1977-78, Astérisque 71-72, pp. 105-134, S.M.F. (1980).
- [31] *Spécialisation des classes de Chern*, Caractéristique d'Euler-Poincaré, Séminaire É.N.S. 1978-79, Astérisque 82-83, pp. 149-159, S.M.F. (1981).
- [32] *Algèbres de Lie, systèmes hamiltoniens, courbes algébriques* (d'après M. Adler et P. Van Moerbeke), Séminaire Bourbaki 1980-81, n° 566, Lecture Notes in Mathematics 901, pp. 85-94, Springer (1981).
- [33] *Les représentations des algèbres de Lie affines : applications à quelques problèmes de physique* (d'après E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa), Séminaire Bourbaki 1981-82, n° 596, Astérisque 92-93, pp. 365-377, S.M.F. (1982).
- [34] *Construction des matrices S* (en collaboration avec A. Treibich-Kohn), Mathématique et Physique, Séminaire de l'É.N.S. 1979-82, Progress in Mathematics 37, pp. 175-196, Birkhäuser (1983).
- [35] *Two dimensional σ -models and harmonic maps from S^2 to S^{2n}* , Group Theoretical Methods in Physics, Lecture Notes in Physics 180, pp. 136-141, Springer (1983).
- [36] *Géométrie Microlocale*, Algebraic Geometry, Japan-France Conference, Tokyo-Kyoto 1982, Lecture Notes in Mathematics 1016, pp. 125-133, Springer (1983).

- [37] *Construction géométrique de la correspondance de McKay* (en collaboration avec G. Gonzalez-Sprinberg), Annales Scientifiques É.N.S. t. 16, pp. 409-449, Gauthier-Villars (1983).
- [38] *Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée*, Analyse et topologie sur les espaces singuliers (II-III), Astérisque 101-102, pp. 332-364, S.M.F. (1983).
- [39] *Transformation de Fourier géométrique* (en collaboration avec J.-L. Brylinski et B. Malgrange), C.R.A.S. t. 297, pp. 55-58, Gauthier-Villars (1983).
- [40] *Extension of a perverse sheaf over a closed subspace*, Systèmes Différentiels et Singularités, Astérisque 130, pp. 210-217, S.M.F. (1985).
- [41] *Prolongements de faisceaux pervers monodromiques*, Systèmes Différentiels et Singularités, Astérisque 130, pp. 218-236, S.M.F. (1985).
- [42] *Reflexive modules over rational double points* (en collaboration avec M. Artin), Math. Ann. 270, pp. 79-82, Springer (1985).
- [43] *Sur la règle de McKay en caractéristique positive* (en collaboration avec G. Gonzalez-Sprinberg), C.R.A.S. t. 301, pp. 585-587, Gauthier-Villars (1985).
- [44] *Applications harmoniques de S^2 dans S^4* , Geometry today, International Conference, Rome 1984, Progress in Mathematics 60, pp. 267-282, Birkhäuser (1985).
- [45] *Structure multiplicative des modules réflexifs sur les points doubles rationnels* (en collaboration avec G. Gonzalez-Sprinberg), Géométrie algébrique et applications : I. Géométrie et calcul algébrique, Travaux en cours 22, pp. 79-110, Hermann (1987).
- [46] *Un calcul triste*, Appendice, Géométrie algébrique et applications : II. Singularités et géométrie complexe, Travaux en cours 23, pp. 12-14, Hermann (1987).
- [47] *Transformation de Fourier géométrique II* (en collaboration avec J.-L. Brylinski et B. Malgrange), C.R.A.S. t. 303, pp. 193-198, Gauthier-Villars (1986).
- [48] *Groupes quantiques* (d'après V. G. Drinfel'd), Séminaire Bourbaki 1986-87, n° 685, Astérisque 152-153, pp. 305-319, S.M.F. (1987).
- [49] *Applications harmoniques de S^2 dans S^4 II*, Harmonic mappings, twistors, and σ -models, Advanced series in Mathematical Physics 4, pp. 124-147, World Scientific (1988).

- [50] *New Elliptic Solitons*, “Algebraic Analysis”, Papers Dedicated to Professor Mikio Sato on the Occasion of his Sixtieth Birthday, Vol. II, pp. 901-910, Academic Press (1988).
- [51] *Solitons Elliptiques* (en collaboration avec A. Treibich), The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progress in Mathematics 88, pp. 437-473, Birkhäuser (1990).
- [52] *Revêtements tangentiels et sommes de 4 nombres triangulaires* (en collaboration avec A. Treibich), C.R.A.S. t. 311, pp. 51-54, Gauthier-Villars (1990).
- [53] *Boussinesq Elliptic Solitons : the cyclic case* (en collaboration avec E. Previato), Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry, pp. 173-185, Hindustan Book Agency (1993).
- [54] *Variétés de Krichever des Solitons Elliptiques de KP* (en collaboration avec A. Treibich), Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry, pp. 187-232, Hindustan Book Agency (1993).

DES CATÉGORIES DÉRIVÉES
DES CATÉGORIES ABÉLIENNES

J.-L. VERDIER

Introduction

Nous proposons dans ce travail un formalisme de l'hyperhomologie.

1. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux catégories abéliennes, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif. Lorsque la catégorie \mathcal{A} possède suffisamment d'objets injectifs, la construction des foncteurs dérivés droits de F est maintenant classique [1] : tout objet X de \mathcal{A} possède une résolution injective $X \xrightarrow{\epsilon} I^\bullet(X)$ unique à “*homotopie près*”. Les objets de cohomologie du complexe $F(I^\bullet(X))$ sont donc définis à isomorphisme canonique près par l'objet X et dépendent fonctoriellement de X . Les foncteurs obtenus sont les foncteurs dérivés droits de F .

Ainsi, on associe fonctoriellement à tout objet X de \mathcal{A} un complexe d'objets de \mathcal{B} défini “à homotopie près” dont on prend la cohomologie. Cependant le plus souvent, les constructions usuelles de l'algèbre homologique ne fournissent pas des complexes définis à homotopie près, mais des complexes définis à *quasi-isomorphisme près* (un morphisme de complexes est appelé un quasi-isomorphisme s'il induit un isomorphisme sur les objets de cohomologie). Pour illustrer ce point, donnons deux exemples.

Notons tout d'abord que, pour étudier les foncteurs dérivés de F , il y a lieu de considérer des résolutions $X \xrightarrow{\epsilon'} \mathcal{R}(X)$ plus générales que les résolutions injectives : les résolutions par des objets acycliques pour le foncteur F (en théorie des faisceaux, résolutions par des faisceaux flasques, nous [23] ; en théorie des modules, résolutions par des modules plats ...). Ces résolutions ne sont plus nécessairement uniques à homotopie près. Mais étant données une résolution F -acyclique $X \xrightarrow{\epsilon'} \mathcal{R}(X)$ et une résolution injective $X \xrightarrow{\epsilon} I^\bullet(X)$, il existe un et un seul (à homotopie près) morphisme de résolutions, *i.e.* un morphisme de complexes $\rho : \mathcal{R}(X) \rightarrow I^\bullet(X)$ tel que le dia-

gramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \varepsilon' & \\ X & & \downarrow \rho \\ & \searrow \varepsilon & \\ & & I^*(X) \end{array}$$

De plus, étant donné un morphisme de résolutions F -acycliques :

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \varepsilon_1 & \\ X & & \downarrow \rho' \\ & \searrow \varepsilon_2 & \\ & & \mathcal{R}_2(X) \end{array},$$

le morphisme de complexes d'objets de \mathcal{B} :

$$F(\rho') : F(\mathcal{R}_1(X)) \longrightarrow F(\mathcal{R}_2(X))$$

est un quasi-isomorphisme. Remarquons qu'ici on obtient dans \mathcal{B} un système inductif de complexes et de quasi-isomorphismes qui possède un élément maximal unique à homotopie près : le transformé par F d'une résolution injective de X . Ce phénomène ne se produit plus dans le deuxième exemple que nous abordons maintenant.

Le procédé de définition des foncteurs dérivés par résolution se généralise parfois au cas où la catégorie \mathcal{A} ne possède plus nécessairement suffisamment d'objets injectifs ou projectifs. Considérons le cas où \mathcal{A} est la catégorie des faisceaux de groupes commutatifs sur un espace topologique E . Cette catégorie ne possède pas, en général, suffisamment d'objets projectifs. On se propose néanmoins de définir les *foncteurs dérivés gauches* du foncteur exact à droite de \mathcal{A} dans \mathcal{A} qui, à tout faisceau G , associe le faisceau $F \otimes_{\mathbb{Z}} G$ (F faisceau fixe). On exige, bien entendu, que cette définition fournit des foncteurs possédant les propriétés usuelles des foncteurs dérivés gauches (comportement par rapport aux suites exactes et une certaine propriété universelle) et qu'elle redonne dans les cas connus (par exemple lorsque E est réduit à un point) les produits de torsion usuels.

On peut opérer de la manière que voici. Tout faisceau G admet une résolution à gauche $L^\bullet \rightarrow G$ de longueur finie (en fait de longueur 2) par des

CATÉGORIES DÉRIVÉES

faisceaux dont les fibres sont des groupes commutatifs sans torsion (résolution *plate*). On constate aisément les faits suivants :

a) Étant données deux résolutions plates $L_i^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_i} G$, $i = 1, 2$, il en existe une troisième $L_3^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_3} G$ et un diagramme commutatif à homotopie près de résolutions :

$$\begin{array}{ccc}
 & L_1^\bullet & \\
 \rho_1 \nearrow & & \searrow \varepsilon_1 \\
 L_3^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_3} & G \\
 \rho_2 \searrow & & \nearrow \varepsilon_2 \\
 & L_2^\bullet &
 \end{array}.$$

b) Étant donnés deux morphismes de résolutions plates :

$$\begin{array}{ccc}
 L_1^\bullet & & \\
 \downarrow \rho & \swarrow \varepsilon_1 & \\
 L_2^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_2} & G \\
 \downarrow \rho' & & \\
 & &
 \end{array},$$

il existe une troisième résolution plate :

$$L_3^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_3} G ,$$

et un morphisme de résolutions :

$$\begin{array}{ccc}
 L_3^\bullet & & \\
 \downarrow \sigma & \searrow \varepsilon_3 & \\
 L_1^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_1} & G \\
 & &
 \end{array},$$

tel que les morphismes de complexes $\rho\sigma$ et $\rho'\sigma$ soient homotopes.

c) Pour tout morphisme de résolutions plates :

$$\begin{array}{ccc}
 L_1^\bullet & & \\
 \downarrow \rho & \searrow \varepsilon_1 & \\
 L_2^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_2} & G \\
 & &
 \end{array},$$

le morphisme de complexes de faisceaux :

$$F \otimes \rho : F \otimes_{\mathbb{Z}} L_1^\bullet \longrightarrow F \otimes_{\mathbb{Z}} L_2^\bullet \quad ,$$

est un *quasi-isomorphisme*.

On obtient donc un système cohérent de complexes de faisceaux $F \otimes_{\mathbb{Z}} L^\bullet$ et de quasi-isomorphismes qui dépend, en un sens qu'on peut préciser, fonctoriellement du faisceau G . En tout cas, les objets de cohomologie des complexes $F \otimes_{\mathbb{Z}} L^\bullet$ (L^\bullet résolution plate de G) sont définis à isomorphismes uniques près et dépendent fonctoriellement de G . Les foncteurs ainsi obtenus possèdent les propriétés voulues et méritent le nom de foncteurs dérivés gauches du foncteur “produit tensoriel par F ”.

Bien entendu, pour calculer les faisceaux de torsion $\text{Tor}^{\mathbb{Z}}(F, G)$, on peut prendre le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathbf{Tor}^{\mathbb{Z}}(F(U), G(U))$ (U ouvert de E). Mais la méthode que nous employons fournit un complexe de faisceaux bien défini à quasi-isomorphisme près dont les objets de cohomologie sont $\text{Tor}^{\mathbb{Z}}(F, G)$ et $F \otimes_{\mathbb{Z}} G$, information supplémentaire essentielle pour le maniement commode de ces foncteurs, ainsi que nous le verrons par la suite. Cette méthode s'étend immédiatement au cas des topos annelés et permet de définir dans ce cadre les foncteurs dérivés gauches du foncteur “produit tensoriel de faisceaux”.

2. Dans l'étude des foncteurs dérivés d'un foncteur composé de deux foncteurs, des propriétés d'associativité, des relations du type de Künneth, on est amené à étendre le formalisme des foncteurs dérivés au cas où l'argument n'est plus seulement un objet de la catégorie étudiée, mais un complexe d'objets de cette catégorie. Cette extension a été faite dans [1]. Rappelons-en les grandes lignes. Soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes telles que \mathcal{A} possède suffisamment d'objets injectifs. Soit Y^\bullet un complexe d'objets de \mathcal{A} . On définit dans *loc. cit.* les “résolutions injectives” du complexe Y^\bullet , que nous appelons *résolutions injectives de Cartan-Eilenberg* du complexe Y^\bullet . Une telle résolution est, par définition, un double complexe $I^{\bullet\bullet}$ dont les composants sont des objets injectifs de \mathcal{A} , muni d'une augmentation :

$$Y^\bullet \xrightarrow{\epsilon} I^{\bullet\bullet}$$

qui induit des résolutions injectives (au sens usuel) des composants, des bords, et des objets de cohomologie du complexe Y^\bullet . Ces résolutions sont uniques à homotopie (de doubles complexes) près. On forme alors le double complexe $F(I^{\bullet\bullet})$, puis le complexe simple associé $\int F(I^{\bullet\bullet})$ qui, lui aussi, est déterminé

CATÉGORIES DÉRIVÉES

à homotopie près par le complexe Y^\bullet . Les objets de cohomologie $\mathcal{R}^n F(Y^\bullet)$ du complexe $\int F(I^{\bullet\bullet})$ sont donc définis à isomorphisme canonique près et on constate qu'ils dépendent fonctoriellement du complexe Y^\bullet . Les foncteurs $\mathcal{R}^n F$ obtenus sont les *hyperdérivés à droite* de F . On obtient de plus deux suites spectrales fonctorielles en Y^\bullet dont les termes initiaux sont :

$$I_2^{p,q} = H^p(\mathbf{R}^q F(Y^\bullet)) \quad (*)$$

$$II_2^{p,q} = R^p F(H^q(Y^\bullet)) , \quad (**)$$

et dont les termes infinis sont les gradués associés aux objets $\mathcal{R}^n F(Y^\bullet)$ convenablement filtrés. Bornons-nous, pour simplifier, au cas où les composants des complexes envisagés sont nuls en degré suffisamment petit. On constate alors que les suites spectrales (*) et (**) convergent. Un morphisme $m : Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ de complexes induit des morphismes :

$$\mathcal{R}^n F(m) : \mathcal{R}^n F(Y^\bullet) \longrightarrow \mathcal{R}^n F(Z^\bullet)$$

et des morphismes des suites spectrales correspondantes. En particulier, lorsque m est un quasi-isomorphisme, la suite spectrale (**) montre que les morphismes $\mathcal{R}^n F(m)$ sont des isomorphismes. Ainsi les objets $\mathcal{R}^n F(Y^\bullet)$ sont déterminés dès que l'on connaît le complexe Y^\bullet à “quasi-isomorphisme près”. Comme, par ailleurs, on a indiqué que les procédés usuels de l'algèbre homologique ne fournissent le plus souvent que des complexes déterminés à quasi-isomorphisme près, il apparaît que les objets naturels qu'étudie l'hyperhomologie sont les “classes de complexes à quasi-isomorphisme près”.

3. La démarche que nous suivons s'impose alors naturellement. On introduit, pour toute catégorie abélienne \mathcal{A} , la catégorie $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ des complexes d'objets de \mathcal{A} . Puis on construit à partir de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ une nouvelle catégorie en rendant formellement inversibles les quasi-isomorphismes de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$. On obtient ainsi une catégorie $D(\mathcal{A})$: la “catégorie dérivée” de la catégorie abélienne \mathcal{A} . Par des procédés de résolution à droite qu'il importe peu de préciser dans cette introduction, on associe à un foncteur additif entre deux catégories abéliennes $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, un foncteur $R F : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$ (qui n'est défini le plus souvent que sur une sous-catégorie convenable $D^*(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{A})$ obtenue en imposant des limitations aux degrés des complexes envisagés) appelé le *foncteur dérivé total à droite* de F . Pour tout objet X de $D^*(\mathcal{A})$, l'objet $R F(X)$ de $D(\mathcal{B})$ est donc un complexe d'objets de \mathcal{B} défini à “quasi-isomorphisme près”, et par suite, les objets de cohomologie $\mathcal{R}^n F(X)$ de ce complexe sont bien définis. Les foncteurs $X \mapsto \mathcal{R}^n F(X)$ sont les “hyperdérivés à droite” du foncteur F , définis ici sans supposer nécessairement que

\mathcal{A} possède suffisamment d'objets injectifs. Le foncteur dérivé total permet donc, en particulier, de reconstruire les “hyperdérivés à droite de F ”; mais il fournit plus d'informations. Par exemple, lorsqu'on a un foncteur additif $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ entre catégories abéliennes, on peut composer les foncteurs dérivés totaux :

$$RG \cdot RF : D^*(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{C}) .$$

Dans les cas habituels, le foncteur $RG \cdot RF$ est canoniquement isomorphe au foncteur dérivé total de GF :

$$R(GF) \xrightarrow{\sim} RG \cdot RF ,$$

formule de composition qui traduit dans notre langage *la suite spectrale des foncteurs composés*, et qui est d'ailleurs plus précise, car elle ne se borne pas à donner certaines informations sur les objets de cohomologie de $RGF(X)$ (X objet de $D^*(\mathcal{A})$), mais elle décrit entièrement le complexe à “quasi-isomorphisme près” qui donne naissance à ces objets de cohomologie ; complexe dont la connaissance permet, par exemple, de composer à nouveau avec un autre foncteur dérivé total.

4. D'une manière générale, on est amené, dans ce formalisme, à travailler directement avec les complexes à “quasi-isomorphisme près”, complexes qu'on se garde bien de remplacer par les seuls objets de cohomologie. (Si, le plus souvent, les “invariants” que l'on recherche, au terme du calcul ou du raisonnement, sont les objets de cohomologie des complexes, il n'en est pas toujours ainsi : les différentielles des suites spectrales sont, elles aussi, des “invariants” intéressants). On établit, au niveau des complexes à quasi-isomorphisme près, ou au niveau des foncteurs dérivés totaux, ou plus généralement au niveau des foncteurs entre les catégories dérivées, diverses relations (relation d'isomorphie, relation d'adjonction pour les théorèmes du type dualité, etc.). Ces relations fourniront, par des procédés purement automatiques (les suites spectrales), des informations sur les objets de cohomologie des complexes, sur les filtrations naturelles dont ces objets sont munis, etc.

Même lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux valeurs des foncteurs dérivés traditionnels, i.e. aux seuls objets de cohomologie, les relations dans les catégories dérivées sont souvent des intermédiaires techniques indispensables pour arriver à étudier ces foncteurs et formuler pour eux certaines relations importantes.

Enfin, avantage essentiel, les relations qu'on établit dans les catégories dérivées sont d'apparence et de fait plus simples que les relations qu'on en

CATÉGORIES DÉRIVÉES

déduit pour les objets de cohomologie. Le mécanisme des suites spectrales cache le plus souvent la simplicité des phénomènes. L'exemple élémentaire des relations de Künneth est à cet égard significatif.

5. Soient X et Y deux espaces compacts, A un anneau à élément unité commutatif (pour simplifier), F et G deux faisceaux de A -modules sur X et Y respectivement. Lorsque A est un corps, on sait que le produit cartésien [23] définit un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués :

$$(\text{Kü})_{\text{coh}}^1 \quad \mathsf{H}^*(X, F) \otimes_A \mathsf{H}^*(Y, G) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}^*(X \times Y, F \otimes_A G) \quad .$$

Lorsque $A = \mathbb{Z}$ et que le faisceau F ou le faisceau G est sans torsion, on a des suites exactes scindables :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} \mathsf{H}^p(X, F) \otimes_A \mathsf{H}^q(Y, G) &\rightarrow \mathsf{H}^n(X \times Y, F \otimes_A G) \rightarrow \\ (\text{Kü})_{\text{coh}}^2 &\rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \mathsf{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}^p(X, F), \mathsf{H}^q(Y, G)) \rightarrow 0 \quad . \end{aligned}$$

Lorsque $A = \mathbb{Z}$ et qu'on ne fait aucune hypothèse sur F et G , on a deux familles de suites exactes scindables :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} \mathsf{H}^p(X, F) \otimes_A \mathsf{H}^q(Y, G) &\rightarrow \mathsf{H}^n \rightarrow \\ (\text{Kü})_{\text{coh}}^3 &\rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \mathsf{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathsf{H}^p(X, F), \mathsf{H}^q(Y, G)) \rightarrow 0 \quad , \\ 0 \rightarrow \mathsf{H}^{n+1}(X \times Y, \mathsf{Tor}^A(F, G)) &\rightarrow \mathsf{H}^n \rightarrow \mathsf{H}^n(X \times Y, F \otimes_A G) \rightarrow 0 \quad . \end{aligned}$$

La formulation initiale $(\text{Kü})_{\text{coh}}^1$ se complique donc, mais reste accessible au calcul explicite. Quand l'anneau A est plus compliqué, par exemple lorsque $A = \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$, ℓ premier, $r > 1$, anneau de dimension cohomologique globale infinie, on n'a plus, traditionnellement, que deux suites spectrales ayant même aboutissement dont les termes initiaux sont :

$$\begin{aligned} {}'K_2^{p,q} &= \bigoplus_{r+s=q} \mathsf{Tor}_{-p}^A(\mathsf{H}^r(X, F), \mathsf{H}^s(Y, G)) \quad , \\ (\text{Kü})_{\text{coh}}^4 &{}''K_2^{p,q} = \mathsf{H}^p(X \times Y, \mathsf{Tor}_{-q}^A(F, G)) \quad . \end{aligned}$$

Cependant ces suites spectrales et l'isomorphie entre leurs aboutissements ne sont que la conséquence et la traduction imparfaite de la relation suivante dans la catégorie dérivée de la catégorie des A -modules :

$$(\text{Kü})_{\text{Der}} \quad \mathsf{RH}(X, F) \overset{\mathsf{L}}{\otimes}_A \mathsf{RH}(Y, G) \xrightarrow{\sim} \mathsf{RH}(X \times Y, F \overset{\mathsf{L}}{\otimes}_A G) \quad ,$$

où $\mathbf{RH}(X, \)$ désigne le foncteur dérivé total à droite du foncteur “sections globales” sur X (de même pour $\mathbf{RH}(Y, \)$ et $\mathbf{RH}(X \times Y, \)$) et où $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A$ désigne le foncteur dérivé total à gauche du foncteur produit tensoriel. (On suppose que X et Y sont des espaces de dimension cohomologique finie, par exemple des complexes cellulaires finis.) Les deux membres de $(\text{Kü})_{\text{Der}}$ sont des complexes de A -modules déterminés à quasi-isomorphisme près dont les modules de cohomologie sont respectivement l’aboutissement de la première et de la deuxième suite spectrale de $(\text{Kü})_{\text{coh}}^4$. La formule $(\text{Kü})_{\text{Der}}$ est, bien entendu, encore valable lorsque F et G sont des complexes de faisceaux sur X et Y (convenablement bornés). Elle est parfaitement maniable pratiquement, et permet de formuler également les propriétés de commutativité, et d’associativité lorsqu’il y a plusieurs facteurs.

L’extension des scalaires conduit à une formule analogue dans les catégories dérivées. Lorsque $A \rightarrow B$ est une A -algèbre et lorsque F est un faisceau de A -modules sur X , on a la relation :

$$\mathbf{RH}(X, F) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A B \xrightarrow{\sim} \mathbf{RH}(X, F \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A B) .$$

De façon imagée, on peut dire, qu’en général, *les formules naïves et traditionnellement fausses deviennent vraies lorsqu’on travaille dans les catégories dérivées*.

L’importance des anneaux de coefficients $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ provient notamment de la cohomologie étale des schémas. On sait [6] que dans cette théorie on doit essentiellement travailler avec des faisceaux de torsion. On obtient la cohomologie ℓ -adique, *i.e.* à valeurs dans l’anneau $\widehat{\mathbb{Z}}_\ell$ des entiers ℓ -adiques, en passant à la limite projective dans la cohomologie à valeurs dans les anneaux $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$. La formule $(\text{Kü})_{\text{Der}}$ est encore valable dans ce contexte (lorsque, par exemple, X et Y sont des schémas propres sur un corps algébriquement clos, $A = \mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$), et passe à la limite immédiatement pour fournir une formule analogue pour les $\widehat{\mathbb{Z}}_\ell$ -faisceaux. Mais comme $\widehat{\mathbb{Z}}_\ell$ est un anneau principal, la formule $(\text{Kü})_{\text{Der}}$ fournit en passant à la cohomologie une formule du type $(\text{Kü})_{\text{coh}}^3$ et en tensorisant par \mathbb{Q}_ℓ , la formule $(\text{Kü})_{\text{coh}}^1$ pour les \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux.

6. C’est le développement systématique des considérations esquissées ci-dessus que nous présentons dans ce travail. Voici quel en est le plan.

Nous étudions au premier chapitre les catégories de complexes des catégories additives. Ces catégories sont graduées. Plus précisément, elles sont munies de foncteurs translation (translation des degrés dans une direction

CATÉGORIES DÉRIVÉES

donnée et changement de signe de la différentielle correspondante). Les extensions naturelles des foncteurs multi-additifs aux complexes ne commutent pas nécessairement aux translations, mais y commutent “à isomorphisme près”, isomorphismes déterminés, pratiquement, au signe près. Il se trouve qu’on ne peut choisir ces isomorphismes de manière cohérente pour la composition des “foncteurs translation”, et qu’il s’introduit alors un signe. L’étude de ce signe fait l’objet du paragraphe 1 (voir aussi l’appendice). Au paragraphe 2, nous définissons les notions classiques de complexes multiples, complexes simples, foncteur “complexe simple associé”, homotopie, et au paragraphe 3, nous abordons l’étude du cône d’un morphisme de complexes (“mapping cone” ou “mapping cylinder”), construction essentielle pour la suite.

La construction de la catégorie $D(\mathcal{A})$, catégorie dérivée de la catégorie abélienne \mathcal{A} , se fait en deux étapes. Dans la première étape on introduit la catégorie $K(\mathcal{A})$ des complexes de \mathcal{A} à homotopie près. Puis on inverse formellement dans $K(\mathcal{A})$ les quasi-isomorphismes pour obtenir la catégorie $D(\mathcal{A})$. Les catégories $K(\mathcal{A})$ et $D(\mathcal{A})$ ne sont pas nécessairement abéliennes; mais elles sont munies d’une structure supplémentaire, consistant en la donnée d’une famille de diagrammes définis à partir de la construction du cône : *les triangles distingués*. Les triangles distingués jouent, pour ces catégories, le rôle des suites exactes des catégories abéliennes. Les catégories additives munies de cette structure supplémentaire, mise en évidence et étudiée par Puppe [2], sont appelées *catégories triangulées* et sont étudiées de notre point de vue au chapitre II. Le premier paragraphe est consacré à l’exposé de résultats élémentaires sur les catégories triangulées. Au paragraphe 2, nous montrons, dans le cadre général des catégories triangulées, que le problème consistant à inverser formellement les quasi-isomorphismes de la catégorie triangulée $K(\mathcal{A})$ se résout simplement par un “*calcul de fractions*” [16]. Au paragraphe 3, nous démontrons un théorème dû à Freyd [17] : une catégorie triangulée \mathcal{D} se plonge de manière universelle dans une catégorie abélienne $A(\mathcal{D})$. Cette catégorie $A(\mathcal{D})$ possède une famille E d’objets à la fois injectifs et projectifs, telle que tout objet de $A(\mathcal{D})$ soit isomorphe à un sous-objet d’un objet de E et à un objet quotient d’un objet de E . La sous-catégorie pleine de $A(\mathcal{D})$ définie par E est isomorphe à la catégorie \mathcal{D} . Enfin au paragraphe 4, nous étudions les “*objets spectraux*” à valeurs dans les catégories triangulées ou les catégories abéliennes. Nous ne faisons ici qu’adapter les définitions de [1].

Le chapitre III est consacré à l’étude des catégories dérivées proprement dites. Lorsque X et Y sont deux objets de $D(\mathcal{A})$, catégorie dérivée de la catégorie abélienne \mathcal{A} , les morphismes de degré n de X dans Y s’interprètent, lorsque la catégorie \mathcal{A} possède suffisamment d’objets injectifs et lorsque Y est un complexe dont les composants sont nuls en degré petit, comme les

éléments de $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$, n -ième hyper-ext des complexes X et Y (au sens de [1]). Lorsque X et Y sont des complexes bornés (composants nuls sauf un nombre fini), les homomorphismes de degré n de X dans Y peuvent se définir par une construction qui généralise la construction de Yoneda [3]. La composition des morphismes dans $D(\mathcal{A})$ n'est autre que la composition de Yoneda. Au paragraphe 4, nous étudions les objets spectraux usuels. Tout complexe de \mathcal{A} donne naissance à trois objets spectraux à valeurs dans $D(\mathcal{A})$, qui permettent d'écrire de façon automatique les suites spectrales essentielles. D'ailleurs toute suite $\cdots \rightarrow X_n \rightarrow X_{n+1} \rightarrow \cdots$ de complexes et de morphismes de complexes (où les morphismes de transition ne sont pas nécessairement des monomorphismes) donne naissance à un objet spectral.

7. En résumé, il s'agit d'établir les fondements d'un formalisme, avec tous les inconvénients qu'un tel travail comporte : enthymèmes et sorites, démonstrations sans réelles difficultés mathématiques mais nécessitant souvent des suites de vérifications parfois (resp. toujours) ennuyeuses. Ce travail ne présente donc un intérêt que dans la mesure où ce formalisme, par sa souplesse et sa généralité, permet la formulation et la démonstration de "vrais" théorèmes. C'est le souci d'énoncer et de démontrer des théorèmes de dualité cohomologique qui a constitué la première motivation de ce formalisme. On sait qu'il existe dans différents contextes des théories de dualité cohomologique formellement très analogues :

1) Théorie de la dualité dans la cohomologie des faisceaux cohérents sur les schémas [4].

2) Théorie de la dualité dans la cohomologie des faisceaux pour la topologie étale des schémas [5], [6].

Ces théories sont dues à A. Grothendieck.

3) Théorie de la dualité dans la cohomologie des modules galoisiens due à J. Tate et J.-L. Verdier [7].

4) Théorie de la dualité dans la cohomologie des faisceaux sur un espace localement compact [9], [10].

5) Théorie de la dualité dans la cohomologie des faisceaux analytiques cohérents. Cette théorie reste encore essentiellement conjecturale.

6) Théorie de la dualité pour les corps locaux, corps de nombres ou corps de fonctions et ses relations avec la théorie du corps de classes. Cette théorie est à développer. Les premiers pas sont dus à M. Artin [8].

Toutes ces théories ont pour point de départ (ou d'arrivée) une propriété d'adjonction reliant certains foncteurs entre catégories dérivées. Le

CATÉGORIES DÉRIVÉES

cas particulièrement simple des espaces localement compacts fournit le modèle des énoncés qu'on obtient. Soient X et Y deux espaces localement compacts (disons : de dimension cohomologique finie), A un anneau (noethérien), $D(X_A)$ et $D(Y_A)$ les catégories dérivées des catégories de faisceaux de A -modules X_A et Y_A sur X et Y respectivement, $f : X \rightarrow Y$ une application continue. On peut alors définir dans cette situation :

a) Un foncteur $f_! : X_A \rightarrow Y_A$, image directe à support propre et le foncteur dérivé total correspondant :

$$R f_! : D(X_A) \rightarrow D(Y_A) .$$

(Lorsque $f : X \rightarrow Y$ est une application propre, le foncteur $f_!$ est le foncteur image directe usuel.)

b) Un foncteur $f^! : D^+(Y_A) \rightarrow D^+(X_A)$ (le signe + signifie qu'on se limite aux complexes bornés inférieurement) dont la définition précise est assez technique, mais qui est caractérisé, à isomorphisme unique près, par la propriété c).

c) Un isomorphisme bifonctoriel :

$$\Delta_f(F, G) : R\text{Hom}(R f_! F, G) \rightarrow R\text{Hom}(F, f^! G)$$

défini pour tout objet F de $D(X_A)$ et tout objet G de $D^+(Y_A)$ ($R\text{Hom}$ désigne le foncteur dérivé total du foncteur “complexe des homomorphismes”).

Les phénomènes importants sont alors les suivants :

D1) La formation du foncteur $f^!$ est transitive pour f variable.

D2) L’isomorphisme Δ_f est compatible avec la composition des applications.

D3) Lorsque X est lisse sur Y de dimension relative n , i.e. lorsque, localement sur X , X est Y -isomorphe au produit d’un ouvert de Y par l’espace topologique \mathbb{R}^n (exemple : $Y =$ un point, X variété topologique), on a pour tout objet G de $D^+(Y_A)$ un isomorphisme canonique :

$$f^!(G) \simeq f^*(G) \otimes \omega_{X/Y}[n] ,$$

où $f^*(G)$ est l’image inverse usuelle, $\omega_{X/Y}$ un faisceau localement libre de rang 1 : le faisceau d’orientation relative de X sur Y , et où $\omega_{X/Y}[n]$ désigne le complexe obtenu en faisant subir au complexe $\omega_{X/Y}$ un décalage des degrés de n unités.

D4) Lorsque X est un fermé de Y et que f est l'injection canonique, le foncteur $f^!$ est le foncteur dérivé total du foncteur "sections à support dans X ".

Ce théorème, et ses variantes dans les autres contextes signalés plus haut, contient les formulations traditionnelles de la dualité : théorème de dualité de Poincaré dans le cas topologique, théorème de dualité de Serre pour les faisceaux algébriques cohérents sur une variété projective et lisse. Mais l'emploi du langage des catégories dérivées ne permet pas seulement de démontrer avec plus de généralité des théorèmes auxquels on pouvait ne s'intéresser que dans des cas particuliers simples. On ne sait par exemple, à l'heure actuelle, démontrer le théorème de dualité sous la forme traditionnelle (type dualité de Serre), pour les faisceaux algébriques cohérents sur une variété propre et lisse non projective sur un corps algébriquement clos, que par l'intermédiaire du théorème de dualité général. Il en est de même pour la dualité en cohomologie étale, pour les variétés projectives non singulières.

8. Les théorèmes de dualité dans les cas 1), 2) et 4) conduisent à des formules de points fixes de Lefschetz, de type non classique, faisant intervenir des faisceaux pouvant présenter des singularités [10], [11], [12]. Soient X un espace topologique compact de dimension cohomologique finie, A un anneau noethérien, F un faisceau de A -modules sur X possédant les propriétés suivantes :

- a) En tout point de X , les fibres du faisceau F sont des A -modules de type fini et de dimension projective finie.
- b) Une propriété de régularité au voisinage de tout point de X , analogue aux propriétés décrites par Wilder [9].

Soit $\Phi = (\Phi_X, \Phi_F) : (X, F) \rightarrow (X, F)$ un endomorphisme de l'espace topologique X muni du faisceau F . L'endomorphisme Φ induit un endomorphisme de complexe de A -modules :

$$\mathbf{RH}(\Phi) : \mathbf{RH}(X, F) \longrightarrow \mathbf{RH}(X, F) \quad .$$

Sous les hypothèses *a*) et *b*), le complexe $\mathbf{RH}(X, F)$ est un *complexe parfait* de A -modules, *i.e.* il est isomorphe, dans la catégorie dérivée, à un complexe fini dont les composants sont des A -modules projectifs de type fini. On peut donc définir le nombre de Lefschetz $\chi(\mathbf{RH}(\Phi))$ comme étant la somme alternée des traces des composants de $\mathbf{RH}(\Phi)$, qui sont des endomorphismes de modules projectifs de type fini. Supposons maintenant, pour fixer les idées, que les points fixes de Φ soient isolés. On a alors l'égalité :

$$(Lef) \qquad \chi(\mathbf{RH}(\Phi)) = \sum_{P \text{ fixe}} \chi_P(\Phi) \quad ,$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

où les $\chi_P(\Phi)$ sont des *invariants locaux*, que l'on peut déterminer lorsqu'on connaît le faisceau F et l'endomorphisme Φ au voisinage de P . Lorsque X est une variété topologique et lorsque le faisceau F est constant et libre de rang 1, on retrouve la formule de Lefschetz usuelle.

Dans le cadre de la cohomologie des faisceaux cohérents, on a une formule analogue. Il faut prendre, pour X , un schéma de type fini et propre sur un corps k et pour F un faisceau cohérent de **tor**-dimension finie, ou plus généralement un complexe parfait. L'étude des invariants locaux qui s'introduisent alors n'a été faite que dans certains cas particuliers. Lorsque le corps k est algébriquement clos, le schéma X lisse sur k , le faisceau F localement libre et le point fixe P à croisement normal, on obtient :

$$\chi_P(\Phi) = \frac{\text{Tr}(\Phi_{F,P})}{\det(1 - d\Phi_{X,P})} ,$$

où $\Phi_{F,P}$ désigne l'endomorphisme induit par Φ sur la fibre réduite du faisceau F en P (qui est un k -espace vectoriel de dimension finie) et où $d\Phi_{X,P}$ désigne la différentielle du morphisme Φ_X en P .

Lorsqu'on ne suppose plus que le point fixe P est à croisement normal, *i.e.* lorsqu'on ne suppose plus que l'endomorphisme $1 - d\Phi_{X,P}$ est inversible, les invariants locaux peuvent encore se déterminer par un calcul de résidus au sens de [4].

Le théorème de Lefschetz dans le contexte de la Géométrie Algébrique peut d'ailleurs se généraliser aux situations relatives. On se donne un Y -schéma $X \xrightarrow{f} Y$ propre et lisse sur un schéma localement nœthérien Y et un faisceau cohérent F de **tor**-dimension finie sur X . Le complexe de faisceaux $R f_*(F)$ sur Y est alors un *complexe parfait*. Soit $\Phi : (X, F) \rightarrow (X, F)$ un Y -endomorphisme du schéma X muni du faisceau F et supposons que le schéma P des points fixes de Φ soit fini sur Y . L'endomorphisme Φ induit un endomorphisme :

$$R f_*(\Phi) : R f_*(F) \rightarrow R f_*(F) ,$$

et comme le complexe $R f_*(F)$ est *parfait*, on peut définir le nombre de Lefschetz $\chi(R f_*(\Phi))$ qui est ici une section du faisceau structural de Y . Cela posé, on a l'égalité :

$$\chi(R f_*(\Phi)) = \chi_P(\Phi) ,$$

où $\chi_P(\Phi)$ est un invariant local, qui peut encore se déterminer par un calcul de résidus.

Dans le cadre de la topologie étale, on a une formule de Lefschetz analogue [12]. Cette formule, appliquée à l'endomorphisme de Frobenius d'une courbe algébrique propre et lisse sur un corps fini, munie d'un faisceau constructible pour la topologie étale, a permis la démonstration de la rationalité des fonctions L généralisées [11]. Signalons que dans cette démonstration, on utilise une formule de Lefschetz où le faisceau des coefficients possède effectivement des singularités.

9. Dans le cas de la formule de Lefschetz topologique, on a vu que le complexe :

$$\mathbf{RH}(X, F)$$

est parfait, ce qui permet de définir le nombre de Lefschetz de :

$$\mathbf{RH}(\Phi) : \mathbf{RH}(X, F) \rightarrow \mathbf{RH}(X, F) \quad .$$

On voit là de façon particulièrement frappante pourquoi on ne peut remplacer un complexe par la collection de ses objets de cohomologie. On ne peut en effet définir la trace des endomorphismes :

$$\mathbf{H}^i(\Phi) : \mathbf{H}^i(X, F) \rightarrow \mathbf{H}^i(X, F)$$

que sous des conditions extrêmement restrictives. Lorsque, par exemple, la dimension cohomologique globale de l'anneau A est finie, *i.e.* lorsque A est régulier, on peut définir la trace de $\mathbf{H}^i(\Phi)$ en prenant des résolutions projectives finies. On a alors :

$$\chi(\mathbf{RH}(\Phi)) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(\mathbf{H}^i(\Phi)) \quad .$$

Mais ainsi qu'on l'a vu, notamment en théorie des faisceaux pour la topologie étale, on a à travailler avec des anneaux du type $\mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z}$ ($\ell \geq 2$) qui ne sont pas réguliers.

Cette notion de complexe parfait est également utile en géométrie algébrique : K-théorie et théorème de Riemann-Roch [14].

10. En conclusion, il semble qu'actuellement, le langage des catégories dérivées soit l'outil indispensable pour permettre de formuler et de démontrer les résultats essentiels des théories qu'on vient de mentionner.

Nous nous sommes limités dans ce travail à l'algèbre homologique additive : catégories abéliennes et foncteurs additifs. Dès qu'on aborde les théorèmes de Riemann-Roch [14] ce cadre est insuffisant. Nous n'avons pas non plus abordé l'étude des différents groupes de classes, ou groupes de Grothendieck, que l'on peut former avec les catégories triangulées. Enfin, nous avons laissé de côté les questions d'homologie relative, qui peuvent aussi se traiter dans le cadre des catégories triangulées [15].

Remerciements

Cette thèse a été faite sous la direction de A. Grothendieck. Les idées fondamentales qu'elle contient lui sont dues. Sans son impulsion initiale, son aide constante, ses critiques fructueuses, je n'aurais pu la mener à son terme. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie C. Chevalley d'avoir bien voulu présider mon Jury de thèse et d'avoir eu la patience de lire ce texte.

Je remercie R. Godement et N. Bourbaki de m'avoir initié aux mathématiques.

Chapitre I

Les catégories de complexes des catégories additives.

1. Catégories graduées.

1.1. Catégories graduées de type G .

1.1.1. À tout groupe G on associe une catégorie, que nous notons \mathcal{G} , définie de la manière suivante :

- $\text{Ob}(\mathcal{G})$ est un ensemble réduit à un élément choisi une fois pour toutes.
- $\text{Fl}(\mathcal{G})$ est l'ensemble sous-jacent à G .
- (1.1.1.1) – Les applications source et but sont les uniques applications de $\text{Fl}(\mathcal{G})$ dans $\text{Ob}(\mathcal{G})$. L'application identité envoie l'unique élément de $\text{Ob}(\mathcal{G})$ sur l'élément neutre de G .
- Le composé de deux flèches $\xrightarrow{g} \xrightarrow{h}$ est la flèche hg produite dans le groupe G des éléments h et g .

On appelle *catégorie graduée de type G* une catégorie fibrée sur \mathcal{G} [18]. Une catégorie (\mathcal{C}, G) graduée de type G est donc une catégorie \mathcal{C} munie d'un foncteur $\deg : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ faisant de \mathcal{C} une catégorie fibrée au-dessus de \mathcal{G} . Le foncteur $\deg : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ est appelé *foncteur degré*. L'image par \deg d'un morphisme de \mathcal{C} est appelé le *degré de ce morphisme*. Soit e l'élément neutre de G . On désigne par \mathcal{C}_e la catégorie fibre de (\mathcal{C}, G) . La catégorie \mathcal{C}_e est

donc la sous-catégorie de \mathcal{C} ayant même ensemble d'objets que \mathcal{C} et dont les morphismes sont les morphismes de \mathcal{C} de degré e .

Soient (\mathcal{C}, G) et (\mathcal{C}', G) deux catégories graduées de type G . On appelle *foncteur gradué* de (\mathcal{C}, G) dans (\mathcal{C}', G) un foncteur cartésien F au-dessus de \mathcal{G} . On désigne par $F_e : \mathcal{C}_e \rightarrow \mathcal{C}'_e$ le foncteur obtenu par restriction aux catégories fibres. Enfin, un morphisme de foncteurs gradués $m : F \rightarrow F'$ est dit *compatible avec la graduation* si c'est un \mathcal{G} -morphisme de foncteurs.

1.1.2. Soient \mathcal{C} une catégorie graduée de type G et g un élément de G . Pour tout couple X, Y d'objets de \mathcal{C} , on désigne par $\text{Hom}^g(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X dans Y de degré g . On a alors :

$$(1.1.2.1) \quad \text{Hom}(X, Y) = \bigsqcup_{g \in G} \text{Hom}^g(X, Y) \quad .$$

L'ensemble $\text{Hom}(X, Y)$ est donc muni d'une structure d'ensemble gradué de type G . Le degré étant fonctoriel, on a pour tout morphisme $m : X \rightarrow Y$ et tout morphisme $n : Y \rightarrow Z$:

$$(1.1.2.2) \quad \deg(n) \deg(m) = \deg(nm) \quad .$$

Les formules précédentes ne font que traduire le fait que \mathcal{C} est une catégorie au-dessus de \mathcal{G} . Exprimons maintenant que la catégorie \mathcal{C} est une catégorie fibrée au-dessus de \mathcal{G} . Il suffit pour cela d'exprimer que tout objet de \mathcal{C} est but d'un morphisme hypercartésien de degré donné [19]. Or on vérifie immédiatement que les morphismes hypercartésiens de \mathcal{C} sont les isomorphismes de \mathcal{C} , et par suite que la catégorie \mathcal{C} est fibrée si et seulement si elle possède la propriété suivante :

$$(1.1.2.3) \quad \text{Pour tout élément } g \text{ de } G \text{ et tout objet } X \text{ de } \mathcal{C}, \text{ il existe un isomorphisme de but } X \text{ et de degré } g.$$

Soient maintenant (\mathcal{C}, G) et (\mathcal{C}', G) deux catégories graduées de type G et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur gradué. Le foncteur F est d'abord un \mathcal{G} -foncteur et, par suite, il conserve le degré des morphismes. Il transforme de plus les morphismes cartésiens de \mathcal{C} en morphismes cartésiens de \mathcal{C}' , ce qui est automatique car les morphismes cartésiens de \mathcal{C} sont des isomorphismes. Les foncteurs gradués de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' sont donc simplement *les foncteurs de \mathcal{C} dans \mathcal{C}' qui conservent le degré*.

Enfin, un morphisme de foncteurs gradués $m : F \rightarrow F'$ compatible avec la graduation est simplement un morphisme de foncteurs de degré e , i.e. la donnée pour tout objet X de \mathcal{C} d'un morphisme :

$$m(X) : F(X) \rightarrow F'(X)$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

de degré e vérifiant les propriétés de compatibilité usuelles.

Définition 1.1.3. Une catégorie graduée de type G est dite *additive* si la catégorie fibre \mathcal{C}_e est additive [20]. Un foncteur gradué entre catégories graduées additives est dit *additif* si le foncteur restreint aux fibres est additif.

Soit \mathcal{C} une catégorie graduée de type G additive. La catégorie \mathcal{C} dépouillée de sa structure fibrée n'est pas additive lorsque $G \neq \{e\}$. On peut toutefois associer à \mathcal{C} une catégorie additive en procédant comme suit : pour tout couple X, Y d'objets de \mathcal{C} et tout élément g de G , on vérifie que l'ensemble $\mathbf{Hom}^g(X, Y)$ est muni naturellement d'une structure de groupe commutatif. Définissons alors une nouvelle catégorie \mathcal{C}_{add} en prenant comme ensemble d'objets l'ensemble des objets de \mathcal{C} , et comme ensemble de morphismes entre deux objets X et Y :

$$(1.1.3.1) \quad \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}_{\text{add}}}(X, Y) = \bigoplus_{g \in G} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}^g(X, Y) .$$

La composition des morphismes dans \mathcal{C}_{add} se définit de la manière évidente et on vérifie que \mathcal{C}_{add} est une catégorie additive. Étant donné de même un foncteur cartésien additif $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ entre deux catégories graduées additives, on construit par la même méthode un foncteur additif $F_{\text{add}} : \mathcal{C}_{\text{add}} \rightarrow \mathcal{C}'_{\text{add}}$. Nous n'utiliserons jamais cette construction.

Remarquons que la définition des catégories graduées adoptée ici est plus restrictive que celle qui s'impose naturellement à l'esprit. En plus des structures évidentes (1.1.2.1) et (1.1.2.2), nous imposons la propriété (1.1.2.3).

1.2. Opération à isomorphisme près d'un groupe sur une catégorie.

1.2.1. Soit \mathcal{C} une catégorie graduée de type G . Choisissons un clivage normalisé de la catégorie fibrée $\mathcal{C} \xrightarrow{\deg} \mathcal{G}$ [18], i.e. pour tout $g \in G$ choisissons un foncteur changement de base :

$$(1.2.1.1) \quad \begin{cases} T(g) : \mathcal{C}_e \rightarrow \mathcal{C}_e & , \\ T(e) = \text{identité de } \mathcal{C}_e & . \end{cases}$$

Pour tout couple (g, h) d'éléments de G , on a [18] un isomorphisme de foncteurs :

$$(1.2.1.2) \quad \begin{cases} c(h, g) : T(hg) \rightarrow T(h)T(g) & , \\ c(g, e) = c(e, g) = \text{identité de } T(g) & \end{cases}$$

et pour tout triplet (g, h, k) d'éléments de G , on a la relation :

$$(1.2.1.3) \quad (T(g) \star c(k, h))c(kh, g) = (c(h, g) \star T(k))c(k, hg) .$$

Définition 1.2.2. Soit G un groupe. On appelle G° -catégorie (G° groupe opposé à G) une catégorie \mathcal{C}_e munie d'une famille de foncteurs $T(g)$ ($g \in G$) et d'isomorphismes de foncteurs $c(h, g)$ ($g, h \in G$) vérifiant les propriétés (1.2.1.1), (1.2.1.2) et (1.2.1.3).

Une G° -catégorie est donc une catégorie \mathcal{C}_e munie d'une opération à isomorphisme près d'un groupe G° . On utilise la notation $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ pour désigner la G° -catégorie ; les isomorphismes $c(h, g)$ sont appelés les *isomorphismes de transition*. Lorsque les isomorphismes de transition sont des isomorphismes identiques, ce qui implique en particulier qu'on a pour tout couple $g, h \in G$ l'égalité $T(hg) = T(g)T(h)$, on dit que la G° -catégorie est *stricte*. Un tel objet est donc défini par une représentation de G° dans le groupe des automorphismes de la catégorie \mathcal{C}_e .

1.2.3. Soient maintenant \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories graduées de type G et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur gradué. Choisissons sur \mathcal{C} et \mathcal{C}' des clivages normalisés. Le choix de ces clivages définit des isomorphismes de foncteurs :

$$(1.2.3.1) \quad m(g) : F_e T(g) \rightarrow T'(g) F_e , \quad g \in G , \quad m(e) = \text{identité de } F_e$$

tels que pour tout couple $g, h \in G$, le diagramme ci-après soit commutatif :

$$(1.2.3.2) \quad \begin{array}{ccc} F_e T(hg) & \xrightarrow{m(hg)} & T'(hg) F_e \\ F_e \star c(h, g) \downarrow & & \downarrow c'(h, g) \star F_e \\ F_e T(g) T(h) & & \\ m(g) \star T(h) \downarrow & & \\ T'(g) F_e T(h) & \xrightarrow{T'(g) \star m(h)} & T'(g) T'(h) F_e \end{array} .$$

Définition 1.2.4. Soient $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ et $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ deux G° -catégories. On appelle G° -foncteur la donnée d'un foncteur :

$$F_e : \mathcal{C}_e \rightarrow \mathcal{C}'_e$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

et d'isomorphismes :

$$m(g) : F_e T(g) \rightarrow T'(g) F_e , \quad g \in G ,$$

tels que les diagrammes (1.2.3.2) soient commutatifs.

Un G° -foncteur est donc un foncteur “commutant à isomorphisme près aux opérations de G° ”. On utilisera pour le désigner la notation (F_e, m) . Lorsque pour tout $g \in G$ les isomorphismes $m(g)$ sont des isomorphismes identiques, ce qui implique en particulier que pour tout $g \in G$ on a les égalités $F_e T(g) = T'(g) F_e$, on dit que le G° -foncteur est *strict*.

1.2.5. Soient \mathcal{C} , \mathcal{C}' et \mathcal{C}'' trois catégories graduées et $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}' \xrightarrow{F'} \mathcal{C}''$, $F'' = F' F$ trois foncteurs gradués. Choisissons sur \mathcal{C} , \mathcal{C}' et \mathcal{C}'' des clivages normalisés. On en déduit, d'après ce qui précède, trois G° -catégories $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$, $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ et $(\mathcal{C}''_e, G^\circ, T'', c'')$ et trois G° -foncteurs (F_e, m) , (F'_e, m') et (F''_e, m'') . On vérifie immédiatement qu'on a les relations :

$$(1.2.5.1) \quad \begin{cases} F''_e = F'_e F_e & , \\ m''(g) = (m'(g) \star F_e)(F'_e \star m(g)) & , \quad g \in G . \end{cases}$$

Définition 1.2.6. Soient $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$, $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ et $(\mathcal{C}''_e, G^\circ, T'', c'')$ trois G° -catégories et :

$$(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c) \xrightarrow{(F_e, m)} (\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c') \xrightarrow{(F'_e, m')} (\mathcal{C}''_e, G^\circ, T'', c'')$$

deux G° -foncteurs. Les égalités (1.2.5.1) définissent un G° -foncteur qui est appelé le *foncteur composé* des G° -foncteurs (F_e, m) et (F'_e, m') .

1.2.7. Soient F et F' deux foncteurs gradués entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{C}' graduées de type G et soit $u : F \rightarrow F'$ un morphisme de foncteurs de degré e . Choisissons sur \mathcal{C} et \mathcal{C}' des clivages normalisés. On en déduit deux G° -catégories $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ et $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ et deux G° -foncteurs (F_e, m) , (F'_e, m') . Le morphisme u détermine alors un morphisme de foncteurs :

$$(1.2.7.1) \quad u_e : F_e \rightarrow F'_e$$

tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$(1.2.7.2) \quad \begin{array}{ccc} F_e T(g) & \xrightarrow{u_e \star T(g)} & F'_e T(g) \\ m(g) \downarrow & & \downarrow m'(g) \\ T'(g) F_e & \xrightarrow{T'(g) \star u_e} & T'(g) F'_e \end{array} .$$

Définition 1.2.8. Soient $(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$ et $(\mathcal{C}'_e, G^\circ, T', c')$ deux G° -catégories et (F_e, m) et $(F'_e, m') : \mathcal{C}_e \rightarrow \mathcal{C}'_e$ deux G° -foncteurs. On dit qu'un morphisme de foncteurs $u_e : F_e \rightarrow F'_e$ est *compatible* avec les opérations de G° si pour tout $g \in G$ le diagramme (1.2.7.2) est commutatif.

Enfin, nous dirons qu'une G° -catégorie est *additive* si la catégorie sous-jacente est additive. D'après (1.1.3), la G° -catégorie associée à une catégorie graduée additive est une G° -catégorie additive.

1.3. Équivalence de deux langages.

1.3.1. On se fixe un univers \mathbf{U} . Désignons par $\mathbf{Grad}(G)$ la \mathbf{U} -catégorie dont les objets sont les catégories graduées de type G , appartenant à \mathbf{U} , et dont les morphismes sont les foncteurs gradués. Désignons de même par $G^\circ\text{-Cat}$ la \mathbf{U} -catégorie dont les objets sont les G° -catégories, appartenant à \mathbf{U} , et dont les morphismes sont les G° -foncteurs. On déduit immédiatement de (1.2.1), (1.2.3) et (1.2.5) que le choix, pour toute catégorie graduée de type G d'un clivage normalisé, définit un foncteur :

$$(1.3.1.1) \quad \Psi : \mathbf{Grad}(G) \rightarrow G^\circ\text{-Cat} .$$

Le résultat de [18] s'interprète comme suit :

Proposition 1.3.2. *Le foncteur Ψ est une équivalence de catégories.*

On trouvera dans [18] la description d'un foncteur quasi-inverse de Ψ . Nous nous bornerons ici à décrire rapidement la catégorie graduée $\mathcal{C}[G]$ associée à une G° -catégorie $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$. Tout d'abord, l'ensemble des objets de $\mathcal{C}[G]$ est l'ensemble des objets de \mathcal{C} . Soient X et Y deux objets de \mathcal{C} . Posons alors :

$$(1.3.2.1) \quad \mathbf{Hom}^g(X, Y) = \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T(g)Y) , \quad g \in G ,$$

$$(1.3.2.2) \quad \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(X, Y) = \bigsqcup_{g \in G} \mathbf{Hom}^g(X, Y) .$$

Décrivons alors la composition des morphismes de $\mathcal{C}[G]$. Soient X , Y et Z trois objets de \mathcal{C} et $u \in \mathbf{Hom}^g(X, Y)$, $v \in \mathbf{Hom}^{g'}(Y, Z)$, $g, g' \in G$. Le foncteur $T(g)$ définit une application :

$$(1.3.2.3) \quad \mathbf{Hom}^{g'}(Y, Z) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g)T(g')Z)$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

et l'isomorphisme $c(g', g)^{-1}$ définit une application :

$$(1.3.2.4) \quad \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g)T(g')Z) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g'g)Z) \quad .$$

D'où en prenant l'image de v , un élément $v' \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(g)Y, T(g'g)Z)$. Le composé dans \mathcal{C} de u et de v' est un élément :

$$(1.3.2.5) \quad w = v' \circ_{\mathcal{C}} u, \quad w \in \mathbf{Hom}^{g'g}(X, Z)$$

qui est, par définition, le composé de u et de v dans $\mathcal{C}[G]$. Le foncteur fibrant $\mathcal{C}[G] \rightarrow \mathcal{G}$ est alors le foncteur évident. La catégorie fibrée $\mathcal{C}[G] \rightarrow \mathcal{G}$ est munie d'un clivage normalisé canonique.

1.3.3. On a en fait un résultat plus précis. Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories graduées de type G munies de clivages normalisés. Le foncteur Ψ définit une bijection :

$$(1.3.3.1) \quad \Psi(\mathcal{C}, \mathcal{C}') : \mathbf{Hom}_{\mathbf{Grad}(G)}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \rightarrow \mathbf{Hom}_{G^\circ\text{-Cat}}(\Psi(\mathcal{C}), \Psi(\mathcal{C}')) \quad .$$

Or ces ensembles sont les ensembles d'objets des catégories :

$$(1.3.3.2) \quad \mathcal{H}om_{\mathbf{Grad}(G)}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \quad , \quad \mathcal{H}om_{G^\circ\text{-Cat}}(\Psi(\mathcal{C}), \Psi(\mathcal{C}'))$$

dont les morphismes sont respectivement les morphismes de foncteurs de degré e et les morphismes de foncteurs compatibles avec les opérations de G° . De plus, il résulte immédiatement de (1.2.7) que l'application $\Psi(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ s'étend en un foncteur :

$$(1.3.3.3) \quad \Psi(\mathcal{C}, \mathcal{C}') : \mathcal{H}om_{\mathbf{Grad}(G)}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \rightarrow \mathcal{H}om_{G^\circ\text{-Cat}}(\Psi(\mathcal{C}), \Psi(\mathcal{C}'))$$

et on vérifie aisement :

Proposition 1.3.4. *Le foncteur $\Psi(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ est un isomorphisme de catégories.*

1.3.5. Enfin, pour être complet, il conviendrait de noter que le foncteur Ψ (étendu aux morphismes de foncteurs) respecte les convolutions des foncteurs par les morphismes de foncteurs. La vérification en est laissée au lecteur.

1.3.6. Le plus souvent, nous utiliserons des G° -catégories strictes (1.2.2). Soient $(\mathcal{C}, G^\circ, T)$ et $(\mathcal{C}', G^\circ, T')$ deux G° -catégories strictes. Un G° -foncteur (F, m) est alors un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ muni d'isomorphismes :

$$(1.3.6.1) \quad m(g) : FT(g) \rightarrow T'(g)F, \quad g \in G, \quad m(e) = \text{identité}$$

tels que les diagrammes ci-après soient commutatifs :

$$(1.3.6.2) \quad \begin{array}{ccc} FT(hg) & \xrightarrow{m(hg)} & T'(hg)F \\ \parallel & & \parallel \\ FT(g)T(h) & & T'(g)T'(h)F \\ m(g) \star T(h) \downarrow & \nearrow T'(g) \star m(h) & \\ T'(g)FT(h) & & g, h \in G \end{array} .$$

Il convient de remarquer que, même dans le cas d'opération stricte de G° sur les catégories, les foncteurs ne commutent pas nécessairement strictement aux opérations de G° . Ainsi, lorsque G° opère trivialement sur les catégories \mathcal{C} et \mathcal{C}' (*i.e.* $T(g) = T'(g) = \text{identité}$), un G° -foncteur n'est alors autre qu'un foncteur muni d'une représentation de G dans son groupe des automorphismes. De plus, il est facile de voir qu'un G° -foncteur n'est pas nécessairement isomorphe à un G° -foncteur strict. On construit facilement un contre-exemple en s'inspirant de [19]. En utilisant les résultats de [*loc. cit.*], on peut d'ailleurs montrer que toute G° -catégorie est G° -équivalente à une G° -catégorie stricte. On peut aussi par les mêmes méthodes préciser ce résultat de la façon suivante. Étant données deux G° -catégories $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ et $(\mathcal{C}', G^\circ, T', c')$, il existe deux G° -catégories strictes : $(\tilde{\mathcal{C}}, G^\circ, \tilde{T})$ et $(\tilde{\mathcal{C}}', G^\circ, \tilde{T}')$ et des G° -équivalences :

$$(u, \mu) : (\tilde{\mathcal{C}}, G^\circ, \tilde{T}) \rightarrow (\mathcal{C}, G^\circ, T, c) ,$$

$$(v, \nu) : (\mathcal{C}', G^\circ, T', c') \rightarrow (\tilde{\mathcal{C}}', G^\circ, \tilde{T}')$$

telles que pour tout foncteur :

$$(F, m) : (\mathcal{C}, G^\circ, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', G^\circ, T', c') ,$$

le foncteur composé :

$$(v, \nu)(F, m)(u, \mu) : (\tilde{\mathcal{C}}, G^\circ, \tilde{T}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{C}}', G^\circ, \tilde{T}')$$

soit isomorphe à un foncteur commutant strictement aux opérations de G° . Nous n'utiliserons pas ce résultat.

1.3.7. Nous avons rappelé dans ce numéro l'équivalence de deux langages : le langage des catégories graduées et celui des G° -catégories. Nous emploierons

CATÉGORIES DÉRIVÉES

exclusivement dans ce travail le langage des G° -catégories. Cependant, nous n'oublierons pas totalement le point de vue “catégories graduées” en utilisant la terminologie suivante :

Définition 1.3.8. Soient G un groupe et $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ une G° -catégorie. Soient g et h deux éléments de G et X et Y deux objets de \mathcal{C} . Un morphisme de \mathcal{C} :

$$u : T(h)X \rightarrow T(gh)Y$$

sera appelé un *morphisme de degré g de X dans Y* .

Montrons que cette terminologie n'apporte pas de confusion. En effet, pour tout couple h, h' d'éléments de G , le foncteur $T(h^{-1}h')$ et les isomorphismes $c(h, h^{-1}h')$ et $c(gh, h^{-1}h')$ définissent un isomorphisme bifonctoriel :

$$(1.3.8.1) \quad i_g(h, h') : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h)X, T(gh)Y) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h')X, T(gh')Y)$$

et les identités de cocycle (1.2.1.3) montrent qu'on a la relation :

$$(1.3.8.2) \quad i_g(h, h'') = i_g(h', h'')i_g(h, h') \quad ,$$

pour tout triplet $h, h', h'' \in G$. Si donc, on identifie les différents ensembles :

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h)X, T(gh)Y)$$

à l'aide des isomorphismes $i_g(h, h')$, la formule (1.3.8.2) montre que ces différentes identifications sont compatibles. De plus, pour tout quadruplet $g, g', h, h' \in G$ et tout triplet X, Y, Z d'objets de \mathcal{C} , le diagramme ci-après (1.3.8.3) est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h)X, T(gh)Y) \times \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(gh)Y, T(g'gh)Z) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h)X, T(g'gh)Z) \\ i_g(h, h') \times i_{g'}(gh, gh') \downarrow \simeq & & i_{g'g}(h, h') \downarrow \simeq \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h')X, T(gh')Y) \times \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(gh')Y, T(g'gh')Z) & \rightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(T(h')X, T(g'gh')Z) \end{array}$$

(les flèches horizontales sont définies par la composition dans \mathcal{C}). Le diagramme (1.3.8.3) nous permet donc de définir sans ambiguïté, ou plus précisément aux identifications définies par les isomorphismes $i_g(h, h')$ près, le composé de deux morphismes de degré respectif g et g' et on vérifie immédiatement que cette définition de la composition est compatible avec la définition

de la composition dans la catégorie graduée $\mathcal{C}[G]$ associée à la G° -catégorie $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ (1.3.2.5).

1.3.9. Soit (\mathcal{C}, G, T, c) une G -catégorie. La *catégorie opposée* à (\mathcal{C}, G, T, c) est une G° -catégorie (G° groupe opposé à G) $(\mathcal{C}^\circ, G^\circ, T^\circ, c^\circ)$ définie de la manière suivante. La catégorie \mathcal{C}° est la catégorie opposée à \mathcal{C} . Les foncteurs $T^\circ(g)$, $g \in G^\circ$, sont définis par :

$$(1.3.9.1) \quad \begin{aligned} T^\circ(g)X &= T(g^{-1})X \quad , \quad X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}^\circ) = \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \ , \\ T^\circ(g)u &= T(g^{-1})u \quad , \quad u \in \mathbf{Fl}(\mathcal{C}^\circ) = \mathbf{Fl}(\mathcal{C}) \ , \end{aligned}$$

et les isomorphismes $c^\circ(g, h)$ de \mathcal{C}° sont définis par :

$$(1.3.9.2) \quad \begin{aligned} c^\circ(g, h) : T^\circ(h \perp g) &\rightarrow T^\circ(h)T^\circ(g) \quad , \\ c^\circ(g, h) &= c^{-1}(g^{-1}, h^{-1}) \quad . \end{aligned}$$

(on désigne par \perp la composition dans G°).

Remarque 1.3.10. Soit $\mathcal{C}[G^\circ] \rightarrow \mathcal{G}^\circ$ la catégorie graduée de type G° associée à la catégorie (\mathcal{C}, G, T, c) . Cette catégorie est munie d'un clivage canonique. Soit alors $\mathcal{C}[G^\circ]^\circ \rightarrow \mathcal{G}$ la catégorie cofibrée obtenue en passant aux catégories opposées. Cette catégorie est munie d'un coclivage canonique et, comme G est un groupe, cette catégorie est aussi fibrée sur \mathcal{G} . On en déduit un clivage canonique sur $\mathcal{C}[G^\circ]^\circ \rightarrow \mathcal{G}$ et par suite une G° -catégorie qui est canoniquement isomorphe à la catégorie opposée à la catégorie (\mathcal{C}, G, T, c) , ainsi qu'on le vérifie immédiatement.

1.3.11. Soient (\mathcal{C}, G, T, c) une G -catégorie et $(\mathcal{C}', G', T', c')$ une G' -catégorie. La catégorie $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ est munie canoniquement d'une structure de $G \times G'$ -catégorie de la manière évidente. La $G \times G'$ -catégorie obtenue sera appelée le *produit* de la G -catégorie (\mathcal{C}, G, T, c) par la G' -catégorie $(\mathcal{C}', G', T', c')$.

1.3.12. Soit $(\mathcal{C}, G^\circ, T, c)$ une G° -catégorie. On utilisera le plus souvent dans la pratique une notation à droite pour désigner les opérations de G° sur \mathcal{C} . On posera pour tout objet X de \mathcal{C} :

$$(1.3.12.1) \quad T(g)X = X[g]$$

et de même pour tout morphisme u de \mathcal{C} :

$$(1.3.12.2) \quad T(g)u = u[g] \quad .$$

Les isomorphismes $c(g, h)$ définissent donc, pour tout objet X , des isomorphismes :

$$(1.3.12.3) \quad c(g, h)(X) : X[gh] \rightarrow X[g][h] \quad .$$

Cette notation a en particulier l'avantage de transformer les opérations de G° sur \mathcal{C} en des opérations *à droite* de G sur \mathcal{C} .

CATÉGORIES DÉRIVÉES

1.4. Changement de groupes.

1.4.1. Soit $f : H \rightarrow G$ un homomorphisme de groupes. On associe à toute G -catégorie (\mathcal{C}, G, T, c) une H -catégorie $(\mathcal{C}, H, T_f, c_f)$ en faisant opérer H sur \mathcal{C} par l'intermédiaire de f , *i.e.* en posant :

$$(1.4.1.1) \quad \begin{aligned} T_f(h) &= T(f(h)) \quad , \quad h \in H \quad , \\ c_f(h, h') &= c(f(h), f(h')) \quad , \quad h, h' \in H \quad . \end{aligned}$$

Étant donné de même un G -foncteur :

$$(F, m) : (\mathcal{C}, G, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', G, T', c') \quad ,$$

on lui associe un H -foncteur (F, m_f) entre les H -catégories correspondantes en posant :

$$(1.4.1.2) \quad m_f(h) = m(f(h)) \quad .$$

Enfin, un morphisme de G -foncteurs compatible avec les opérations de G est compatible avec les opérateurs de H .

Ce qui précède définit visiblement un foncteur, qu'on appelle le *foncteur de changement de groupes* :

$$(1.4.1.3) \quad f^* : G\text{-Cat} \rightarrow H\text{-Cat} \quad .$$

Plus précisément, soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux G -catégories ; le foncteur f^* définit une application :

$$(1.4.1.4) \quad f^*(\mathcal{C}, \mathcal{C}') : \mathbf{Hom}_{G\text{-Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \rightarrow \mathbf{Hom}_{H\text{-Cat}}(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}')) \quad .$$

Mais les ensembles $\mathbf{Hom}_{G\text{-Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ et $\mathbf{Hom}_{H\text{-Cat}}(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}'))$ sont des ensembles d'objets de catégories $\mathcal{H}om_{G\text{-Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ et $\mathcal{H}om_{H\text{-Cat}}(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}'))$ dont les morphismes sont les morphismes de foncteurs, compatibles avec les opérations des groupes, et l'application $f^*(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ s'étend naturellement en un foncteur :

$$(1.4.1.5) \quad \underline{f^*(\mathcal{C}, \mathcal{C}')} : \mathcal{H}om_{G\text{-Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \rightarrow \mathcal{H}om_{H\text{-Cat}}(f^*(\mathcal{C}), f^*(\mathcal{C}')) \quad .$$

Ce foncteur est fidèle.

1.4.2. Soient $e \rightarrow K \xrightarrow{n} H \xrightarrow{f} G \rightarrow e$ une suite exacte de groupes, le groupe K étant identifié par n à un sous-groupe distingué de H , et (\mathcal{C}, G, T, c) , $(\mathcal{C}', G, T', c')$ deux G -catégories. Soient $(\mathcal{C}, H, T_f, c_f)$, $(\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$ les H -catégories obtenues par le changement de groupes $H \xrightarrow{f} G$. Soit enfin :

$$(1.4.2.1) \quad (F, m) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \rightarrow (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$$

un H -foncteur. Les diagrammes (1.2.3.2) fournissent alors pour tout couple d'éléments $k, k' \in K$, un diagramme commutatif :

$$(1.4.2.2) \quad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{m(kk')} & F \\ & \searrow m(k) & \swarrow m(k') \\ & F & \end{array} ,$$

d'où une représentation de K° dans le groupe des automorphismes de F . Lorsque le foncteur (F, m) provient d'un G -foncteur, cette représentation est triviale. Réciproquement, lorsque cette représentation est triviale, on déduit immédiatement des diagrammes (1.2.3.2) que, pour tout $h \in H$ et pour tout $k \in K$, on a :

$$(1.4.2.3) \quad m(hk) = m(kh) = m(h)$$

et, par suite, le H -foncteur (F, m) provient d'un G -foncteur par le changement de groupe f^* . On se propose dans la suite de ce numéro d'étudier, dans un cas très particulier, les H -foncteurs (F, m) qui induisent une représentation donnée à l'avance de K° dans le groupe des automorphismes de F .

1.4.3. On utilise les notations de (1.4.2). On suppose que la catégorie \mathcal{C}' est additive et que $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le groupe des signes $\{-1, +1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère alors sur le foncteur identique de la catégorie \mathcal{C}' en associant à tout objet X de \mathcal{C}' le morphisme :

$$(1.4.3.1) \quad \varepsilon(X) : X \xrightarrow{\varepsilon \cdot \text{id}_X} X \quad , \quad \varepsilon \in \{-1, +1\} \quad .$$

Par suite, le groupe des signes opère sur tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ en associant à tout objet Y de \mathcal{C} le morphisme :

$$(1.4.3.2) \quad \varepsilon(Y) : F(Y) \xrightarrow{\varepsilon \cdot \text{id}_{F(Y)}} F(Y) \quad , \quad \varepsilon \in \{-1, +1\} \quad .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Cette opération est appelée *l'opération canonique*. On se propose d'étudier les H -foncteurs :

$$(1.4.3.3) \quad (F, m) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \rightarrow (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$$

qui induisent l'opération canonique du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur le foncteur F .

Soit $\dot{\alpha} \in H^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'élément décrivant l'extension :

$$(1.4.3.4) \quad 1 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{n} H \xrightarrow{f} G \rightarrow e \quad .$$

Soit $\alpha_s \in Z^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ un cocycle normalisé non homogène dans la classe $\dot{\alpha}$ défini par une section normalisée s de f . On a :

$$\begin{aligned} \alpha_s(\sigma_1, \sigma_2) &= s(\sigma_2)s(\sigma_1\sigma_2)^{-1}s(\sigma_1) \quad , \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G \quad , \\ s(e) &= \text{unité de } H \quad , \\ (1.4.3.5) \quad \alpha_s(\sigma_1, e) &= \alpha_s(e, \sigma_1) = 1 \quad , \\ \delta\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= \alpha_s(\sigma_2, \sigma_3)\alpha_s(\sigma_1\sigma_2, \sigma_3)^{-1}\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2\sigma_3)\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2)^{-1} \\ &= 1 \quad , \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in G \quad . \end{aligned}$$

La section $s : G \rightarrow H$ définit un isomorphisme d'ensembles :

$$H \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G \quad ,$$

et en transportant la loi de groupe de H sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G$ par cet isomorphisme, on obtient la loi de groupe :

$$(1.4.3.6) \quad (\varepsilon_1, \sigma_1)(\varepsilon_2, \sigma_2) = (\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2), \sigma_1\sigma_2) \quad .$$

Identifions alors le groupe H et le groupe décrit par (1.4.3.6). On a, pour tout $(\varepsilon_1, \sigma_1), (\varepsilon_2, \sigma_2) \in H$:

$$\begin{aligned} (1.4.3.7) \quad T_f(\varepsilon_1, \sigma_1) &= T(\sigma_1) \quad , \\ T'_f(\varepsilon_1, \sigma_1) &= T'(\sigma_1) \quad , \\ c_f((\varepsilon_1, \sigma_1), (\varepsilon_2, \sigma_2)) &= c(\sigma_1, \sigma_2) \quad , \\ c'_f((\varepsilon_1, \sigma_1), (\varepsilon_2, \sigma_2)) &= c'(\sigma_1, \sigma_2) \end{aligned}$$

et, par suite, d'après (1.2.3.2), pour tout couple (ε, σ) , le diagramme ci-après est commutatif :

$$(1.4.3.8) \quad \begin{array}{ccc} FT(\sigma) & \xrightarrow{m((\varepsilon, \sigma))} & T'(\sigma)F \\ m((1, \sigma)) \searrow & & \nearrow T'(\sigma) * m(\varepsilon) \\ & T'(\sigma)F & \end{array},$$

i.e.

$$(1.4.3.9) \quad m((\varepsilon, \sigma)) = \varepsilon m((1, \sigma)) .$$

Posons alors :

$$(1.4.3.10) \quad m((1, \sigma)) = p(\sigma) : FT(\sigma) \rightarrow T'(\sigma)F .$$

La famille des isomorphismes $p(\sigma)$, $\sigma \in G$, possède alors la propriété suivante : pour tout couple $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, le diagramme ci-après est $\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2)$ -commutatif (i.e. commutatif si $\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2) = +1$ et anti-commutatif si $\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2) = -1$) :

$$(1.4.3.11) \quad \begin{array}{ccc} FT(\sigma_1\sigma_2) & \xrightarrow{p(\sigma_1\sigma_2)} & T'(\sigma_1\sigma_2)F \\ F * c(\sigma_2, \sigma_1) \downarrow & & \downarrow c'(\sigma_2, \sigma_1) * F \\ FT(\sigma_1)T(\sigma_2) & & \\ p(\sigma_1) * T(\sigma_2) \downarrow & & \\ T'(\sigma_1)FT(\sigma_2) & \xrightarrow{T'(\sigma_1) * p(\sigma_2)} & T'(\sigma_1)T'(\sigma_2)F \end{array} .$$

Réiproquement, lorsqu'on se donne un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ et une famille d'isomorphismes $p(\sigma) : FT(\sigma) \rightarrow T'(\sigma)F$, $\sigma \in G$, telle que pour tout couple $(\sigma_1, \sigma_2) \in G \times G$ le diagramme (1.4.3.11) soit $\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2)$ -commutatif, on peut reconstruire d'une manière unique un H -foncteur :

$$(F, m) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \rightarrow (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$$

induisant l'opération canonique du groupe des signes sur F , en posant (via l'identification du groupe H avec le groupe décrit par (1.4.3.6)) :

$$(1.4.3.12) \quad m((\varepsilon, \sigma)) = \varepsilon p(\sigma) .$$

La vérification immédiate est laissée au lecteur.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Définition 1.4.4. Soient (\mathcal{C}, G, T, c) et $(\mathcal{C}', G, T', c')$ deux G -catégories, \mathcal{C}' étant une catégorie additive. Soit $\alpha \in Z^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ un cocycle normalisé non homogène. On appelle *G-foncteur tordu par le cocycle α* l'objet (F, p) constitué par un foncteur :

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$$

et des isomorphismes de foncteurs :

$$p(\sigma) : FT(\sigma) \rightarrow T'(\sigma)F \quad , \quad \sigma \in G \quad ,$$

tels que, pour tout couple $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, le diagramme (1.4.3.11) soit $\alpha(\sigma_1, \sigma_2)$ -commutatif.

Le choix d'une section normalisée s de l'extension (1.4.3.4) permet donc d'établir une correspondance biunivoque entre les H -foncteurs :

$$(F, m) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \rightarrow (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$$

qui induisent l'opération canonique du groupe des signes sur F , et les G -foncteurs tordus par le cocycle α_s défini par la section s .

1.4.5. On utilise les notations de (1.4.3). Soient :

$$(1.4.5.1) \quad (F_1, m_1), (F_2, m_2) : (\mathcal{C}, H, T_f, c_f) \rightarrow (\mathcal{C}', H, T'_f, c'_f)$$

deux H -foncteurs induisant l'opération canonique du groupe des signes et :

$$(1.4.5.2) \quad u : (F_1, m_1) \rightarrow (F_2, m_2)$$

un morphisme de foncteurs compatible avec les opérations de H . Soient s_1 et s_2 deux sections normalisées de l'application f de la suite exacte (1.4.3.4) ($s_1(e) = s_2(e) = e$). Soient $\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2} \in Z^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ les cocycles normalisés correspondants. Soit $\beta : G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'application :

$$(1.4.5.3) \quad \beta(\sigma) = s_2(\sigma)s_1(\sigma)^{-1} \quad , \quad \sigma \in G \quad .$$

Les foncteurs (F_1, m_1) et (F_2, m_2) définissent, d'après (1.4.3), des G -foncteurs $(F_1, p_1), (F_2, p_2)$ tordus respectivement par les cocycles $\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}$. On vérifie immédiatement que le morphisme $u : F_1 \rightarrow F_2$ entre les foncteurs sous-jacents possède la propriété suivante :

Pour tout élément $\sigma \in G$, le diagramme :

$$(1.4.5.4) \quad \begin{array}{ccc} F_1 T(\sigma) & \xrightarrow{p_1(\sigma)} & T'(\sigma) F_1 \\ u * T(\sigma) \downarrow & & \downarrow T'(\sigma) * u \\ F_2 T(\sigma) & \xrightarrow{p_2(\sigma)} & T'(\sigma) F_2 \end{array}$$

est $\beta(\sigma)$ -commutatif.

Définition 1.4.6. Soient (\mathcal{C}, G, T, c) une G -catégorie, $(\mathcal{C}', G, T', c')$ une G -catégorie additive, α_1 et α_2 dans $Z^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ deux cocycles non homogènes normalisés, $\beta : G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ une application telle que :

$$(1.4.6.1) \quad \alpha_2(\sigma_1, \sigma_2) \alpha_1^{-1}(\sigma_1, \sigma_2) = \beta(\sigma_2) \beta(\sigma_1 \sigma_2)^{-1} \beta(\sigma_1) .$$

Soient enfin $(F_1, p_1), (F_2, p_2) : (\mathcal{C}, G, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', G, T', c')$ deux G -foncteurs tordus respectivement par les cocycles α_1 et α_2 . On appelle β -morphisme du foncteur (F_1, p_1) dans le foncteur (F_2, p_2) un morphisme $u : F_1 \rightarrow F_2$ de foncteurs tel que, pour tout $\sigma \in G$, le diagramme (1.4.5.4) soit $\beta(\sigma)$ -commutatif.

1.4.7. On a montré (1.4.5) que le choix de deux sections normalisées permet d'associer à un morphisme de H -foncteurs induisant l'opération canonique du groupe des signes un β -morphisme entre les G -foncteurs tordus correspondants. On vérifie immédiatement que cette correspondance est biunivoque. De plus, lorsqu'on a trois H -foncteurs $(F_1, m_1), (F_2, m_2), (F_3, m_3)$ induisant l'opération canonique du groupe des signes, trois sections normalisées s_1, s_2, s_3 et deux morphismes de H -foncteurs u, v et leur composé vu :

$$(1.4.7.1) \quad \begin{aligned} u : (F_1, m_1) &\rightarrow (F_2, m_2) , \\ v : (F_2, m_2) &\rightarrow (F_3, m_3) , \\ vu : (F_1, m_1) &\rightarrow (F_3, m_3) , \end{aligned}$$

les morphismes :

$$(1.4.7.2) \quad \begin{aligned} u : (F_1, p_1) &\rightarrow (F_2, p_2) , \\ v : (F_2, p_2) &\rightarrow (F_3, p_3) , \\ vu : (F_1, p_1) &\rightarrow (F_3, p_3) , \end{aligned}$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

où les (F_i, p_i) sont les G -foncteurs tordus déterminés respectivement par les foncteurs (F_i, m_i) et les sections s_i , sont des $\beta_{j,i}$ -morphismes, où :

$$(1.4.7.3) \quad \beta_{j,i}(\sigma) = s_j(\sigma)s_i(\sigma)^{-1}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i < j .$$

On a donc la relation :

$$(1.4.7.4) \quad \beta_{3,1} = \beta_{3,2}\beta_{2,1} .$$

Les relations (1.4.7.2) et (1.4.7.4) permettent alors de définir le *composé* du $\beta_{3,2}$ -morphisme v avec le $\beta_{2,1}$ -morphisme u et cette composition ainsi définie est compatible avec la composition des morphismes de H -foncteurs.

1.4.8. Soient \mathcal{C}' une catégorie additive et :

$$(F, p) : (\mathcal{C}, G, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', G, T', c')$$

un G -foncteur tordu par un cocycle normalisé $\alpha \in Z^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. On désigne par :

$$(1.4.8.1) \quad (F^\circ, p^\circ) : (\mathcal{C}^\circ, G^\circ, T^\circ, c^\circ) \rightarrow (\mathcal{C}'^\circ, G^\circ, T'^\circ, c'^\circ)$$

le *foncteur gradué tordu opposé* au foncteur (F, p) . (On utilise les notations de (1.3.9)). Il est défini de la manière suivante :

Le foncteur sous-jacent est F° , le foncteur opposé au foncteur F . Pour tout $g \in G^\circ$ (groupe opposé à G), l'isomorphisme de \mathcal{C}° :

$$p^\circ(g) : F^\circ T^\circ(g) = FT(g^{-1}) \xrightarrow{\sim} T'^\circ(g)F^\circ = T'(g^{-1})F$$

est égal à $p^{-1}(g^{-1})$.

Le foncteur (F°, p°) est un G° -foncteur tordu par le cocycle α° dans $Z^2(G^\circ, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ opposé au cocycle α ($\alpha^\circ(g, g') = \alpha^{-1}(g^{-1}, g'^{-1})$).

1.4.9. La seule vertu du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qu'on utilise dans ce numéro est qu'il opère canoniquement sur le foncteur identique des catégories additives. On peut donc développer des considérations analogues en remplaçant le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par un groupe commutatif K opérant sur les foncteurs identiques des catégories considérées, de façon compatible avec les opérations de G .

1.5. \mathbb{Z}^n -catégories.

1.5.1. Soient $(\mathcal{C}, \mathbb{Z}^n, T, c)$ une \mathbb{Z}^n -catégorie, $(\mathcal{C}', \mathbb{Z}^n, T', c')$ une \mathbb{Z}^n -catégorie additive, $(F, p) : (\mathcal{C}, \mathbb{Z}^n, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', \mathbb{Z}^n, T', c')$ un \mathbb{Z}^n -foncteur tordu par un cocycle normalisé $\alpha \in Z^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Désignons par e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{Z}^n . On a donc pour tout $i \in [1, n]$ un isomorphisme de foncteurs :

$$(1.5.1.1) \quad p(e_i) : FT(e_i) \rightarrow T'(e_i)F$$

et pour tout couple $(i, j), i \neq j$, un diagramme $\alpha(e_i, e_j)\alpha^{-1}(e_j, e_i)$ -commutatif :

$$(1.5.1.2)$$

$$\begin{array}{ccccc} FT(e_i + e_j) & \xrightarrow{F * c(e_i, e_j)} & FT(e_j)T(e_i) & \xrightarrow{p(e_j) * T(e_i)} & T'(e_j)FT(e_i) \\ \downarrow F * c(e_j, e_i) & & & & \downarrow T'(e_j) * p(e_i) \\ FT(e_i)T(e_j) & & & & T'(e_j)T'(e_i)F \\ \downarrow p(e_i) * T(e_j) & & & & \downarrow c'(e_i, e_j)^{-1} * F \\ T'(e_i)FT(e_j) & \xrightarrow{T'(e_i) * p(e_j)} & T'(e_i)T'(e_j)F & \xrightarrow{c'(e_j, e_i)^{-1} * F} & T'(e_i + e_j)F \end{array} .$$

Proposition 1.5.2. Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur et pour tout $i \in [1, n]$ un isomorphisme de foncteurs :

$$p_i : FT(e_i) \rightarrow T'(e_i)F$$

tel que pour tout couple $i, j, i \neq j$, le diagramme analogue au diagramme (1.5.1.2), où l'on remplace les $p(e_i)$ par les p_i , soit $\alpha(e_i, e_j)\alpha^{-1}(e_j, e_i)$ -commutatif. Il existe un et un seul \mathbb{Z}^n -foncteur tordu par le cocycle α :

$$(F, p) : (\mathcal{C}, \mathbb{Z}^n, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', \mathbb{Z}^n, T', c')$$

tel que :

$$p(e_i) = p_i \quad , \quad i \in [1, n] \quad .$$

La démonstration de l'unicité se fait en examinant les diagrammes (1.4.3.11). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ce point. Nous nous bornerons à donner quelques indications sur la démonstration de l'existence. Celle-ci se fait par récurrence sur l'entier n .

CATÉGORIES DÉRIVÉES

1.5.3. Existence dans le cas $n = 1$. Posons :

$$(1.5.3.1) \quad \begin{aligned} p(0) &= \text{identité ,} \\ p(e_1) &= p_1 . \end{aligned}$$

Puis :

$$(1.5.3.2) \quad \begin{aligned} p(-e_1) &= \alpha(e_1, -e_1)(T'(-e_1)F * c^{-1}(-e_1, e_1)) \\ &\quad (T'(-e_1) * p^{-1}(e_1) * T(-e_1))(c'(e_1, -e_1) * FT(-e_1)) , \end{aligned}$$

i.e. $p(-e_1)$ est, au signe près (ce signe étant $\alpha(e_1, -e_1)$), le morphisme composé :

$$\begin{aligned} FT(-e_1) &\xrightarrow{c'(e_1, -e_1) * FT(-e_1)} T'(-e_1)T'(e_1)FT(-e_1) \xrightarrow{T'(-e_1) * p^{-1}(e_1) * T(-e_1)} \\ &\longrightarrow T'(-e_1)FT(e_1)T(-e_1) \xrightarrow{T'(-e_1)F * c^{-1}(-e_1, e_1)} T'(-e_1)F . \end{aligned}$$

Nous allons définir les isomorphismes $p(qe_1)$ par récurrence sur $|q|$. Pour cela, considérons les diagrammes $D(q, q')$ du type (1.4.3.11), où les isomorphismes $p(re_1)$ à définir doivent intervenir :

$$(1.5.3.3) \quad \begin{array}{ccc} FT((q + q')e_1) & \xrightarrow{p((q + q')e_1)} & T'((q + q')e_1)F \\ F * c(q'e_1, qe_1) \downarrow & & \downarrow c'(q'e_1, qe_1) * F \\ FT(qe_1)T(q'e_1) & & \\ p(qe_1) * T(q'e_1) \downarrow & & \\ T'(qe_1)FT(q'e_1) & \xrightarrow{T'(qe_1) * p(q'e_1)} & T'(qe_1)T'(q'e_1)F \end{array}$$

et supposons que les isomorphismes $p(qe_1)$ soient définis pour les entiers q tels que $|q| < r$. On définit alors $p(re_1)$ comme étant l'unique isomorphisme rendant le diagramme $D(r - 1, 1)$ $\alpha(r - 1, 1)$ -commutatif et $p(-re_1)$ comme étant l'unique isomorphisme rendant le diagramme $D(-r + 1, -1)$ $\alpha(-r + 1, -1)$ -commutatif. Les isomorphismes $p(qe_1)$ étant maintenant définis, nous pouvons considérer la propriété :

$$(P(q, q')) \quad \text{Le diagramme } D(q, q') \text{ est } \alpha(q, q')\text{-commutatif.}$$

Soit par définition, soit par vérification immédiate, la propriété $P(q, q')$ est vraie dans les cas suivants :

$$\begin{aligned}
 (1.5.3.4) \quad & q = 0 \quad , \\
 & q' = 0 \quad , \\
 & q \leq 0 \text{ et } q' = -1 \quad , \\
 & q \geq 0 \text{ et } q' = 1 \quad , \\
 & q = 1 \text{ et } q' = -1 \quad , \\
 & q = -1 \text{ et } q' = 1 \quad .
 \end{aligned}$$

De plus, l'examen des différents diagrammes $D(q, q')$ qu'on peut former avec trois entiers q, q', q'' montre immédiatement (1.5.5) :

(1.5.3.5) *Si trois des quatre propriétés $P(q', q'')$, $P(q + q', q'')$, $P(q, q' + q'')$, $P(q, q')$ sont vraies, la quatrième l'est aussi.*

On déduit alors de (1.5.3.4) que la propriété $P(q, q')$ est vraie pour tout couple d'entiers q, q' , ce qui achève la démonstration dans le cas $n = 1$.

1.5.4. Existence dans le cas général. Désignons par $\mathbb{Z}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$ le sous-groupe engendré par les $n - 1$ premiers éléments de la base de \mathbb{Z}^n ; on a alors $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}e_n$. Utilisant l'hypothèse de récurrence, il existe des isomorphismes :

$$\begin{aligned}
 p(\sigma) : FT(\sigma) &\rightarrow T'(\sigma)F \quad , \quad \sigma \in \mathbb{Z}^{n-1} , \\
 p(\tau) : FT(\tau) &\rightarrow T'(\tau)F \quad , \quad \tau \in \mathbb{Z}e_n \quad ,
 \end{aligned}$$

tels que les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
 (1.5.4.1)_{\lambda, \mu} & \begin{array}{c} FT(\lambda + \mu) \xrightarrow{p(\lambda + \mu)} T'(\lambda + \mu)F \\ F * c(\mu, \lambda) \downarrow \\ FT(\lambda)T(\mu) \\ p(\lambda) * T(\mu) \downarrow \\ T'(\lambda)FT(\mu) \xrightarrow{T'(\lambda) * p(\mu)} T'(\lambda)T'(\mu)F \end{array} & c'(\mu, \lambda) * F \downarrow
 \end{array}$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

soient $\alpha(\lambda, \mu)$ -commutatifs lorsque $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^{n-1}$ ou $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}e_n$. Désignons alors par $Q(\sigma, \tau)$, $\sigma \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $\tau \in \mathbb{Z}e_n$, la propriété :

$(Q(\sigma, \tau))$ *Le diagramme ci-après est $\alpha(\sigma, \tau)\alpha^{-1}(\tau, \sigma)$ -commutatif :*

$(1.5.4.2)_{\sigma, \tau}$

$$\begin{array}{ccccc}
 FT(\sigma + \tau) & \xrightarrow{F * c(\sigma, \tau)} & FT(\tau)T(\sigma) & \xrightarrow{p(\tau) * T(\sigma)} & T'(\tau)FT(\sigma) \\
 \downarrow F * c(\tau, \sigma) & & & & \downarrow T'(\tau) * p(\sigma) \\
 FT(\sigma)T(\tau) & & & & T'(\tau)T'(\sigma)F \\
 \downarrow p(\sigma) * T(\tau) & & & & \downarrow c'(\sigma, \tau)^{-1} * F \\
 T'(\sigma)FT(\tau) & \xrightarrow{T'(\sigma) * p(\tau)} & T'(\sigma)T'(\tau)F & \xrightarrow{c'(\tau, \sigma)^{-1} * F} & T'(\sigma + \tau)F
 \end{array} .$$

Par hypothèse, les propriétés $Q(e_i, e_n)$, $Q(e_i, 0)$, $1 \leq i \leq n-1$, $Q(0, e_n)$, sont vraies. De plus, en utilisant les diagrammes $\alpha(\lambda, \mu)$ -commutatifs $(1.5.4.1)_{\lambda, \mu}$, on vérifie aisément (1.5.6) :

$(1.5.4.3)$ *Si deux des propriétés $Q(\sigma, \tau + \tau')$, $Q(\sigma, \tau)$, $Q(\sigma, \tau')$, $\sigma \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $\tau, \tau' \in \mathbb{Z}e_n$ sont vérifiées, la troisième l'est aussi. De même, si deux des propriétés $Q(\sigma + \sigma', \tau)$, $Q(\sigma, \tau)$, $Q(\sigma', \tau)$, $\sigma, \sigma' \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $\tau \in \mathbb{Z}e_n$ sont vraies, la troisième l'est aussi.*

On en déduit que la propriété $Q(\sigma, \tau)$ est vérifiée pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^{n-1}$ et tout $\tau \in \mathbb{Z}e_n$.

Définissons alors, pour tout $\omega \in \mathbb{Z}^n$, $\omega = \sigma + \tau$, $\sigma \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $\tau \in \mathbb{Z}e_n$, l'isomorphisme $p(\omega) : FT(\omega) \longrightarrow T'(\omega)F$, comme étant l'unique isomorphisme rendant le diagramme $(1.5.4.1)_{\sigma, \tau}$ $\alpha(\sigma, \tau)$ -commutatif. Ceci nous permet d'écrire pour tout couple $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n$ le diagramme $(1.5.4.1)_{\lambda, \mu}$ et de considérer la propriété :

$(P(\lambda, \mu))$ *Le diagramme $(1.5.4.1)_{\lambda, \mu}$ est $\alpha(\lambda, \mu)$ -commutatif.*

D'après ce qui précède, nous savons que la propriété $P(\lambda, \mu)$ est vérifiée dans les cas suivants :

$$\begin{aligned}
 & \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{Z}^{n-1}, \\
 (1.5.4.4) \quad & \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{Z}e_n, \\
 & \lambda \in \mathbb{Z}^{n-1} \text{ et } \mu \in \mathbb{Z}e_n, \\
 & \lambda \in \mathbb{Z}e_n \text{ et } \mu \in \mathbb{Z}^{n-1}.
 \end{aligned}$$

De plus (1.5.5), on a :

(1.5.4.5) *Si trois des propriétés $P(\mu, \nu)$, $P(\lambda + \mu, \nu)$, $P(\lambda, \mu + \nu)$, $P(\lambda, \mu)$ sont vraies, la quatrième l'est aussi.*

On en déduit que la propriété $P(\lambda, \mu)$ est vraie pour tout couple $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n$, ce qui achève la démonstration de la proposition (1.5.2).

Diagramme 1.5.5. On se propose de démontrer l'assertion (1.5.4.5). On désigne par $D(\lambda, \mu)$ le diagramme (1.5.4.1) $_{\lambda, \mu}$. La démonstration de (1.5.4.5) repose sur la considération du diagramme que nous écrivons, pour simplifier, dans le cas où les isomorphismes de transition c et c' sont des morphismes identiques, *i.e.* dans le cas où le groupe \mathbb{Z}^n opère strictement sur les catégories \mathcal{C} et \mathcal{C}' :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & FT(\lambda + \mu + \nu) & & \\
 & \swarrow p(\lambda + \mu) * T(\nu) & & \searrow p(\lambda + \mu + \nu) & \\
 T'(\lambda + \mu)FT(\nu) & \xrightarrow{T'(\lambda + \mu) * p(\nu)} & & \xrightarrow{T'(\lambda + \mu + \nu)F} & \\
 & \nwarrow T'(\lambda) * p(\mu) * T(\nu) & & \nearrow T'(\lambda) * p(\mu + \nu) & \\
 & T'(\lambda)FT(\mu + \nu) & & &
 \end{array}$$

Ce diagramme a la forme d'un tétraèdre dont les quatres faces sont respectivement les diagrammes $D(\lambda, \mu + \nu)$, $D(\lambda + \mu, \nu)$, $D(\lambda, \mu)T(\nu)$ et $T'(\lambda)D(\mu, \nu)$. La démonstration de (1.5.4.5) se fait alors en envisageant les quatre cas possibles et en utilisant la relation de cocycle. Dans le cas général, le diagramme qu'il faut introduire est un peu plus compliqué, mais en utilisant les identités (1.2.1.3), l'argument se ramène à l'argument esquissé ci-dessus. Pour obtenir la démonstration de (1.5.3.5), on utilise le même diagramme en posant : $\lambda = qe_1$, $\mu = q'e_1$, $\nu = q''e_1$.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Diagramme 1.5.6. Démontrons maintenant l'assertion (1.5.4.3). La démonstration repose sur la considération du diagramme suivant, que nous écrirons pour simplifier dans le cas où les isomorphismes de transition c et c' sont des morphismes identiques :

1.5.7.

$$\begin{array}{ccccc}
 & FT(\sigma + \sigma' + \tau) & \xrightarrow{p(\sigma') * T(\sigma + \tau)} & T'(\sigma')FT(\sigma + \tau) & \\
 & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow \\
 & p(\sigma) * T(\sigma' + \tau) & \xrightarrow{p(\sigma + \sigma') * T(\tau)} & T'(\sigma)FT(\sigma' + \tau) & T'(\sigma') * p(\sigma) * T(\tau) \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & T'(\sigma) * p(\tau) * T(\sigma') & \xrightarrow{T'(\sigma) * p(\sigma') * T(\tau)} & T'(\sigma + \sigma')FT(\tau) & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & p(\tau) * T(\sigma + \sigma') & \xrightarrow{T'(\sigma) * p(\tau) * T(\sigma')} & T'(\sigma + \sigma')FT(\tau) & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & T'(\tau)FT(\sigma + \sigma') & \xrightarrow{T'(\tau) * p(\sigma') * T(\sigma)} & T'(\tau + \sigma')FT(\sigma) & \\
 & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow \\
 & T'(\tau) * p(\sigma) * T(\sigma') & \xrightarrow{T'(\tau) * p(\sigma + \sigma')} & T'(\tau + \sigma)FT(\sigma') & T'(\sigma' + \tau) * p(\sigma) \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & T'(\tau + \sigma)FT(\sigma') & \xrightarrow{T'(\sigma + \tau) * p(\sigma')} & T'(\tau + \sigma + \sigma')F &
 \end{array}$$

Désignons par $\Delta(\sigma, \tau)$ le diagramme $(1.5.4.2)_{\sigma, \tau}$. Le diagramme ci-dessus

fait apparaître cinq diagrammes verticaux qui sont respectivement les diagrammes :

$$T'(\sigma')\Delta(\sigma, \tau), T'(\sigma)\Delta(\sigma', \tau), \Delta(\sigma, \tau)T(\sigma'), \Delta(\sigma', \tau)T(\sigma), \Delta(\sigma + \sigma', \tau).$$

Il fait apparaître de même quatre diagrammes horizontaux qui sont respectivement les diagrammes :

$$D(\sigma, \sigma')T(\tau), D(\sigma', \sigma)T(\tau), T'(\tau)D(\sigma, \sigma'), T'(\tau)D(\sigma', \sigma).$$

Par hypothèse de récurrence, les diagrammes $D(\sigma, \sigma')$ et $D(\sigma', \sigma)$ sont respectivement $\alpha(\sigma, \sigma')$ et $\alpha(\sigma', \sigma)$ -commutatifs. On en déduit la première partie de l'assertion (1.5.4.3) en envisageant les trois cas possibles. La deuxième partie de l'assertion (1.5.4.3) s'obtient en interchangeant les rôles des σ et des τ . Dans le cas général, le diagramme qu'il faut introduire est plus compliqué. Mais, en utilisant les identités (1.2.1.3), l'argument se ramène à celui présenté ci-dessus.

Remarque 1.5.8. La proposition (1.5.2) s'applique en particulier au cas où le cocycle α est trivial. On vérifie alors que la proposition et sa démonstration s'étendent *verbatim* au cas où la catégorie \mathcal{C}' n'est plus nécessairement additive.

1.5.9. Soient :

$$(F_1, p_1), (F_2, p_2) : (\mathcal{C}, \mathbb{Z}^n, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', \mathbb{Z}^n, T', c')$$

deux \mathbb{Z}^n -foncteurs tordus respectivement par deux cocycles normalisés $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $\beta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ une application telle que :

$$(1.5.9.1) \quad \alpha_2(\sigma_1, \sigma_2)\alpha_1^{-1}(\sigma_1, \sigma_2) = \beta(\sigma_2)\beta(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\beta(\sigma_1), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{Z}^n,$$

et $u : (F_1, p_1) \rightarrow (F_2, p_2)$ un β -morphisme de foncteurs (1.4.6). Soit e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{Z}^n . Pour tout $i \in [1, n]$ le diagramme ci-après est $\beta(e_i)$ -commutatif :

$$(1.5.9.2) \quad \begin{array}{ccc} F_1 T(e_i) & \xrightarrow{p_1(e_i)} & T'(e_i) F_1 \\ u * T(e_i) \downarrow & & \downarrow T'(e_i) * u \\ F_2 T(e_i) & \xrightarrow{p_2(e_i)} & T'(e_i) F_2 \end{array} .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Réiproquement :

Proposition 1.5.10. *Tout morphisme $u : F_1 \rightarrow F_2$ entre les foncteurs sous-jacents, tels que pour tout $i \in [1, n]$ le diagramme (1.5.9.2) soit $\beta(e_i)$ -commutatif, est un β -morphism de foncteurs.*

En effet, pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^n$, désignons par $R(\sigma)$ la propriété :

$(R(\sigma))$ *Le diagramme ci-après est $\beta(\sigma)$ -commutatif :*

$$(1.5.10.1)_\sigma \quad \begin{array}{ccc} F_1 T(\sigma) & \xrightarrow{p_1(\sigma)} & T'(\sigma) F_1 \\ u * T(\sigma) \downarrow & & \downarrow T'(\sigma) * u \\ F_2 T(\sigma) & \xrightarrow{p_2(\sigma)} & T'(\sigma) F_2 \end{array} .$$

L'examen des différents diagrammes $(1.5.10.1)_{\sigma_1}, (1.5.10.1)_{\sigma_2}, (1.5.10.1)_{\sigma_1+\sigma_2}$ montre immédiatement qu'on a :

Si deux des propriétés $R(\sigma_1), R(\sigma_2), R(\sigma_1 + \sigma_2)$ sont vraies, la troisième l'est aussi.

De plus par hypothèse, on a les propriétés $R(e_i), i \in [1, n]$ et $R(0)$. On en déduit immédiatement que la propriété $R(\sigma)$ est vraie pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^n$.

1.5.11. Une \mathbb{Z}^n -catégorie stricte est une catégorie munie d'une représentation de \mathbb{Z}^n dans son groupe des automorphismes. Pour définir une telle représentation, il suffit bien entendu de se donner n automorphismes : $T(e_1), \dots, T(e_n)$ qui commutent deux à deux.

1.5.12. Le problème consistant à déterminer sur une catégorie donnée les structures de \mathbb{Z}^n -catégorie (non nécessairement stricte) est beaucoup moins simple. Ainsi, si on se borne à déterminer, sur une catégorie \mathcal{C} , les structures de \mathbb{Z}^n -catégorie telles que pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^n$ on ait $T(\sigma) =$ identité de \mathcal{C} , on a alors à se donner, pour tout couple σ_1, σ_2 d'éléments de \mathbb{Z}^n , un élément $c(\sigma_1, \sigma_2)$ du groupe des automorphismes du foncteur identique de \mathcal{C} (ce groupe est commutatif), cette donnée étant soumise à vérifier les identités (1.2.1.3). Par suite, pour se donner une telle structure, il faut se donner un 2-cocycle normalisé non homogène de \mathbb{Z}^n à valeurs dans le groupe des automorphismes du foncteur identique de \mathcal{C} . On vérifie d'ailleurs immédiatement que deux telles structures sont isomorphes, par un \mathbb{Z}^n -foncteur (F, m) tel que $F =$ identité de \mathcal{C} , si et seulement si les cocycles correspondants sont dans la même classe de cohomologie.

1.5.13. Les \mathbb{Z}^n -catégories que nous utiliserons dans ce travail seront des catégories strictes. Aussi ne tenterons-nous pas d'aborder le problème signalé en (1.5.12) dans le cas général. Cependant l'exemple présenté en (1.5.12) suggère que la détermination des structures de \mathbb{Z} -catégorie sur une catégorie \mathcal{C} est particulièrement simple. C'est en effet le cas. Désignons par $E\text{-Cat}$ la \mathbf{U} -catégorie dont les objets sont les catégories appartenant à \mathbf{U} munies d'une équivalence :

$$(1.5.13.1) \quad T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

et dont les morphismes sont les foncteurs $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ muni d'un isomorphisme :

$$(1.5.13.2) \quad m : FT \rightarrow T'F \quad .$$

On a alors évidemment un foncteur de la \mathbf{U} -catégorie $\mathbb{Z}\text{-Cat}$ dans la \mathbf{U} -catégorie $E\text{-Cat}$:

$$(1.5.13.3) \quad R : \mathbb{Z}\text{-Cat} \rightarrow E\text{-Cat} \quad .$$

Le foncteur R associe à une \mathbb{Z} -catégorie $(\mathcal{C}, \mathbb{Z}, T, c)$ la catégorie \mathcal{C} munie de l'équivalence $T(1) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ et à tout \mathbb{Z} -foncteur :

$$(F, m) : (\mathcal{C}, \mathbb{Z}, T, c) \rightarrow (\mathcal{C}', \mathbb{Z}, T', c') \quad ,$$

le foncteur F muni de l'isomorphisme $m(1) : FT(1) \rightarrow T'(1)F$.

Proposition 1.5.14. *Le foncteur R est une équivalence de catégories.*

Nous nous bornerons à donner des indications sur la démonstration. La proposition (1.5.2) et la remarque (1.5.8) montrent que R est pleinement fidèle. Il suffit donc de montrer que R est essentiellement surjectif. Soit donc $(\mathcal{C}, T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$ une catégorie munie d'une équivalence. Soient $T^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur quasi-inverse de T et :

$$(1.5.14.1) \quad \begin{aligned} u &: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow TT^{-1} \quad , \\ v &: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow T^{-1}T \end{aligned}$$

les isomorphismes d'adjonction.

Les foncteurs T^n et $(T^{-1})^n$ sont, pour tout entier $n > 0$, adjoints l'un de l'autre, d'où des isomorphismes d'adjonction :

$$(1.5.14.2) \quad \begin{aligned} u^{(n)} &: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow T^n(T^{-1})^n \quad , \\ v^{(n)} &: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow (T^{-1})^nT^n \quad . \end{aligned}$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Posons alors :

$$(1.5.14.3) \quad \begin{aligned} T(0) &= \text{id}_{\mathcal{C}} \quad , \\ T(n) &= T^n \quad , \quad n > 0 \quad , \\ T(n) &= (T^{-1})^{-n} \quad , \quad n < 0 \quad . \end{aligned}$$

Puis, pour tout couple (n, n') d'entiers, définissons des isomorphismes :

$$c(n', n) : T(n + n') \rightarrow T(n)T(n')$$

par :

$$(1.5.14.4) \quad \begin{aligned} n, n' \geq 0 \quad c(n', n) &= \text{identité} \quad , \\ n, n' \leq 0 \quad c(n', n) &= \text{identité} \quad , \\ n' \leq 0, \quad n \geq 0, \quad n + n' \leq 0, \quad c(n', n) &= u^{(n)} * T(n + n') \quad , \\ n' \leq 0, \quad n \geq 0, \quad n + n' \geq 0, \quad c(n', n) &= T(n + n') * u^{(-n')} \quad , \\ n' \geq 0, \quad n \leq 0, \quad n + n' \leq 0, \quad c(n', n) &= T(n + n') * v^{(n')} \quad , \\ n' \geq 0, \quad n \leq 0, \quad n + n' \geq 0, \quad c(n', n) &= v^{(-n)} * T(n + n') \quad . \end{aligned}$$

Pour s'assurer qu'on a bien ainsi défini une \mathbb{Z} -catégorie, il reste à vérifier qu'on a bien les identités du type (1.2.1.3). Cette vérification s'appuie sur les identités classiques que vérifient les morphismes $u^{(n)}$ et $v^{(n)}$. Nous laissons au lecteur le soin de l'entreprendre.

1.6. Cocycle de Koszul. Règle des signes.

1.6.1. Soit e_1, \dots, e_n une base de \mathbb{Z}^n . Désignons par $\mathbb{Z}_{i,j}^n$, $i, j \in [1, n]$, $i \neq j$, le sous-groupe de \mathbb{Z}^n engendré par les éléments e_i et e_j . Les homomorphismes de restriction définissent un homomorphisme :

$$(1.6.1.1) \quad H^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_{\substack{i, j \in [1, n] \\ i < j}} H^2(\mathbb{Z}_{i,j}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad .$$

On a des isomorphismes (canoniques) :

$$(1.6.1.2) \quad H^2(\mathbb{Z}_{i,j}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad .$$

L'homomorphisme (1.6.1.1) est un isomorphisme.

Proposition 1.6.2. 1) Soient $\alpha \in Z^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ un cocycle normalisé non homogène, $\dot{\alpha} \in H^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sa classe de cohomologie, $\dot{\alpha}_{i,j} \in H^2(\mathbb{Z}_{i,j}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ses composantes. On a (utilisant (1.6.1.2)) :

$$(1.6.2.1) \quad \dot{\alpha}_{i,j} = \alpha(e_i, e_j)^{-1} \alpha(e_j, e_i) .$$

(On écrit multiplicativement la loi de groupe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

2) Soient α_1 et α_2 deux éléments cohomologues de $Z^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et pour tout $i \in [1, n]$, β_i un élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il existe une et une seule application $\beta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ telle que :

$$(1.6.2.2) \quad \alpha_2(\sigma_1, \sigma_2)\alpha_1^{-1}(\sigma_1, \sigma_2) = \beta(\sigma_2)\beta(\sigma_1 + \sigma_2)^{-1}\beta(\sigma_1) , \text{ pour } \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{Z}^n ,$$

$$(1.6.2.3) \quad \beta(e_i) = \beta_i .$$

On se ramène, pour démontrer la première assertion au cas $n = 2$ et on vérifie immédiatement que la quantité $\alpha(e_i, e_j)^{-1} \alpha(e_j, e_i)$ ne change pas lorsqu'on modifie α par un cobord. Lorsque α est un cobord, il est symétrique et par suite la formule (1.6.2.1) est vraie dans ce cas. D'autre part, le cocycle :

$$\alpha_0(p_1 e_i + q_1 e_j, p_2 e_i + q_2 e_j) = (-1)^{q_1 p_2}$$

n'est pas cohomologue à 0 puisqu'on a :

$$\alpha_0(e_i, e_j)^{-1} \alpha_0(e_j, e_i) = -1$$

et tout cocycle non cohomologue à zéro est cohomologue à α_0 .

Pour démontrer la deuxième assertion, on remarque que deux solutions de (1.6.2.2) diffèrent par un homomorphisme de groupes ; par suite, on peut toujours modifier une solution de (1.6.2.2) d'une manière unique par un homomorphisme de groupes de façon à lui faire prendre sur les e_i des valeurs données à l'avance.

Définition 1.6.3. Soit e_1, \dots, e_n une base de \mathbb{Z}^n . On appelle *classe de Koszul relative à la base e_1, \dots, e_n* l'unique élément de $H^2(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dont les restrictions aux $H^2(\mathbb{Z}_{i,j}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ soient non nulles.

On notera que la définition de la classe de Koszul fait intervenir le choix d'une base de \mathbb{Z}^n . Les classes de Koszul associées à deux bases distinctes sont en général distinctes.

Soit e_1, \dots, e_n une base de \mathbb{Z}^n qu'on ordonne suivant l'ordre naturel de $[1, n]$. Désignons alors par $\mathbb{Z}^n(\leq i)$ (resp. $\mathbb{Z}^n(\geq i)$) le sous-groupe de \mathbb{Z}^n engendré par les e_j , $j \leq i$ (resp. $j \geq i$).

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Définition 1.6.4. On appelle *cocycle de Koszul relatif à une base ordonnée* e_1, \dots, e_n de \mathbb{Z}^n l'unique cocycle α dans la classe de Koszul relative à la base e_1, \dots, e_n qui vérifie les égalités :

$$(1.6.4.1) \quad \alpha(\sigma_1, \sigma_2) = 1 \quad \forall \sigma_1 \in \mathbb{Z}^n(\leq i), \forall \sigma_2 \in \mathbb{Z}^n(\geq i), \forall i \in [1, n] .$$

Soient $\sigma_1 = \sum_{i=1}^n p_i e_i$, $\sigma_2 = \sum_{i=1}^n q_i e_i$ deux éléments de \mathbb{Z}^n ; on a alors :

$$(1.6.4.2) \quad \alpha(\sigma_1, \sigma_2) = (-1)^{\left(\sum_{i < j} q_i p_j \right)} .$$

Cette définition demande une justification. L'existence d'un cocycle dans la classe de Koszul vérifiant (1.6.4.1) est claire : un calcul immédiat montre que le cocycle (1.6.4.2) vérifie (1.6.4.1) et qu'il est dans la classe de Koszul (1.6.2). Pour vérifier l'unicité, il suffit de remarquer que tout cocycle cohomologique au cocycle α est du type :

$$\alpha_1(\sigma_1, \sigma_2) = \alpha(\sigma_1, \sigma_2)\beta(\sigma_2)\beta(\sigma_1 + \sigma_2)^{-1}\beta(\sigma_1)$$

et qu'un tel cocycle possède la propriété (1.6.4.1) si et seulement si :

$$\beta(\sigma_1 + \sigma_2) = \beta(\sigma_1)\beta(\sigma_2) \quad \forall i, \forall \sigma_1 \in \mathbb{Z}^n(\leq i), \forall \sigma_2 \in \mathbb{Z}^n(\geq i) .$$

On en déduit immédiatement que $\beta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un homomorphisme de groupes et par suite qu'on a $\alpha_1 = \alpha$.

1.6.5. La définition du cocycle de Koszul fait intervenir de façon essentielle l'ordre total que l'on met sur la base e_1, \dots, e_n de \mathbb{Z}^n . Désignons par \leq l'ordre naturel de $[1, n]$ et par \leq_s un ordre total sur $[1, n]$. Soit s l'unique permutation de $[1, n]$ telle que :

$$(1.6.5.1) \quad i \leq_s j \iff s(i) \leq s(j) .$$

Soient α et α_s les cocycles de Koszul relatifs respectivement aux ordres \leq et \leq_s . On a alors :

$$(1.6.5.2)$$

$$\alpha(\sigma_1, \sigma_2) = (-1)^{\left(\sum_{i < j} q_i p_j \right)} ,$$

$$\sigma_1 = \sum_i p_i e_i, \quad \sigma_2 = \sum_i q_i e_i,$$

$$\alpha_s(\sigma_1, \sigma_2) = (-1)^{\left(\sum_{s(i) < s(j)} q_i p_j \right)} ,$$

d'où on déduit immédiatement :

$$(1.6.5.3) \quad \begin{aligned} \alpha_s(\sigma_1, \sigma_2) \alpha(\sigma_1, \sigma_2)^{-1} &= \beta_s(\sigma_2) \beta_s(\sigma_1 + \sigma_2)^{-1} \beta_s(\sigma_1) \quad , \\ \beta_s(\sigma_1) &= (-1)^{\left(\sum_{\substack{i < j \\ s(i) > s(j)}} p_i p_j \right)} \quad , \\ \beta_s(e_i) &= 1 \quad , \quad \forall i \in [1, n] \quad . \end{aligned}$$

Par suite, d'après (1.6.2), toute application $\beta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ telle que

$$(1.6.5.4) \quad \alpha_s(\sigma_1, \sigma_2) \alpha(\sigma_1, \sigma_2)^{-1} = \beta(\sigma_2) \beta(\sigma_1 + \sigma_2)^{-1} \beta(\sigma_1)$$

est du type :

$$(1.6.5.5) \quad \beta = \beta_s \eta \quad ,$$

où $\eta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'unique homomorphisme de groupes qui prend sur les $e_j \in \mathbb{Z}^n$ les valeurs $\beta(e_j)$.

1.6.6. Soient $(\mathcal{C}_i, \mathbb{Z}, T_i, c_i)$, $1 \leq i \leq n$, des \mathbb{Z} -catégories et $(\mathcal{D}, \mathbb{Z}, T, c)$ une \mathbb{Z} -catégorie additive. Désignons par $(\mathcal{C}, \mathbb{Z}^n, T, c)$ la catégorie produit des $(\mathcal{C}_i, \mathbb{Z}, T_i, c_i)$. Le groupe \mathbb{Z}^n est muni naturellement d'une base ordonnée e_1, \dots, e_n . Il opère à isomorphisme près sur \mathcal{C} par la formule (on utilise ici la notation à droite introduite en (1.3.12)) :

$$(1.6.6.1) \quad (X_1, \dots, X_n)[\sigma] = (X_1[l_1], \dots, X_n[l_n]) \quad , \quad \sigma = \sum_{i=1}^n l_i e_i \quad .$$

Soit $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ l'homomorphisme $\varphi\left(\sum_{i=1}^n l_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n l_i$. Faisons opérer \mathbb{Z}^n sur \mathcal{D} par l'intermédiaire de φ (1.4.1). Dans cette situation, nous utiliserons toujours les conventions suivantes :

Règle des signes I : Les foncteurs de \mathcal{C} dans \mathcal{D} seront toujours, sauf mention expresse du contraire, des \mathbb{Z}^n -foncteurs tordus par le cocycle de Koszul relatif à la base ordonnée e_1, \dots, e_n .

Règle des signes II : les morphismes de foncteurs seront, sauf mention expresse du contraire, des morphismes de \mathbb{Z}^n -foncteurs relatifs à l'homomorphisme trivial $\beta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (1.4.6).

CATÉGORIES DÉRIVÉES

D'après la proposition (1.5.2), se donner un foncteur de \mathcal{C} dans \mathcal{D} revient à se donner un foncteur :

$$(1.6.6.2) \quad (X_1, \dots, X_n) \longmapsto F(X_1, \dots, X_n)$$

et des isomorphismes de foncteurs :

$$(1.6.6.3) \quad p_i : F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_n) \xrightarrow{\sim} F(X_1, \dots, X_n)[1]$$

tels que les diagrammes (1.5.1.2) :

$$\begin{array}{ccc} F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_j[1], \dots, X_n) & \xrightarrow{p_i} & F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j[1], \dots, X_n)[1] \\ \downarrow p_j & & \downarrow p_j[1] \\ F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_j, \dots, X_n)[1] & \xrightarrow{p_i[1]} & F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n)[2] \end{array}$$

soient anticommutatifs (pour $i < j$). (Pour simplifier le diagramme (1.5.1.2), on a supposé, ce qui sera toujours le cas dans ce travail, que les isomorphismes de transition de \mathcal{D} sont des identités).

De même, d'après la proposition (1.5.10), les morphismes de foncteurs $u : F \rightarrow F'$ que nous considérons sont soumis aux conditions suivantes : les diagrammes ci-après sont commutatifs :

$$(1.6.6.4) \quad \begin{array}{ccc} F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_n) & \xrightarrow{u} & F'(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_n) \\ \downarrow p_i & & \downarrow p'_i \\ F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)[1] & \xrightarrow{u[1]} & F'(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)[1] \end{array} .$$

Lorsque le contexte ne prêtera à aucune confusion, nous désignerons les \mathbb{Z} -catégories par les catégories sous-jacentes et les \mathbb{Z}^n -foncteurs tordus par leurs foncteurs sous-jacents.

2. Complexes d'une catégorie additive.

2.1. Complexes n -uples.

2.1.1. Fixons d'abord quelques notations. On désigne par $[n]$ l'ensemble :

$$[n] = \{p \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq p \leq n\} .$$

On désigne par $\mathbb{Z}[n]$ le groupe abélien libre engendré par l'ensemble $[n]$ et pour tout $i \in [n]$ par e_i le générateur de $\mathbb{Z}[n]$ associé à i . Soit $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ une application ; on désigne encore par $\varphi : \mathbb{Z}[n] \rightarrow \mathbb{Z}[m]$ l'homomorphisme de groupes qui lui correspond. Dans ce paragraphe, \mathcal{C} désigne une catégorie additive.

Définition 2.1.2. Un *complexe n -uple d'objets* de \mathcal{C} est un objet constitué par :

- 1) La donnée, pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, d'un objet X^σ de \mathcal{C} .
- 2) La donnée, pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ et tout $i \in [n]$, d'un morphisme :

$$d^{\sigma,i} : X^\sigma \rightarrow X^{\sigma+e_i} ,$$

ces morphismes étant soumis aux conditions suivantes :

$$(2.1.2.1) \quad \begin{aligned} d^{\sigma+e_i,i} d^{\sigma,i} &= 0 & \forall \sigma \in \mathbb{Z}[n], \forall i \in [n] , \\ d^{\sigma+e_j,i} d^{\sigma,j} &= d^{\sigma+e_i,j} d^{\sigma,i} & \forall \sigma \in \mathbb{Z}[n], \forall i, j \in [n] . \end{aligned}$$

2.1.3. Un complexe n -uple d'objets de \mathcal{C} sera appelé le plus souvent un *complexe n -uple* de \mathcal{C} . Soit $(X^\sigma, d^{\sigma,i})$ un complexe n -uple de \mathcal{C} . L'objet X^σ est appelé le *composant de degré σ* du complexe $(X^\sigma, d^{\sigma,i})$. Le morphisme $d^{\sigma,i}$ est appelé la *différentielle de degré σ dans la direction i* du complexe $(X^\sigma, d^{\sigma,i})$. Soit Y un complexe n -uple de \mathcal{C} . Le composant de degré σ de Y est noté Y^σ . La différentielle de degré σ dans la direction i de Y est notée $d_Y^{\sigma,i}$.

Définition 2.1.4. Soient Y et Y' deux complexes n -uples de \mathcal{C} . Un *morphisme de complexes de Y dans Y'* est une famille de morphismes de \mathcal{C} :

$$(f^\sigma : Y^\sigma \rightarrow Y'^\sigma)_{\sigma \in \mathbb{Z}[n]}$$

qui commutent aux différentielles, *i.e.* telle que :

$$(2.1.4.1) \quad f^{\sigma+e_i} d_Y^{\sigma,i} = d_{Y'}^{\sigma,i} f^\sigma .$$

2.1.5. Le morphisme $f^\sigma : Y^\sigma \rightarrow Y'^\sigma$ est appelé le *composant de degré σ* du morphisme (f^σ) . Soit $f : Y \rightarrow Y'$ un morphisme de complexes n -uples. Le composant de degré σ de f est noté f^σ . Les morphismes de complexes n -uples se composent de manière évidente : composant par composant. Les complexes n -uples d'objets de \mathcal{C} forment une catégorie qui est notée $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$. Lorsque $n = 1$, on utilise la notation simplifiée $\mathbf{comp}^1(\mathcal{C}) = \mathbf{comp}(\mathcal{C})$. Les objets de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ sont appelés les *complexes simples* de \mathcal{C} ou même, lorsqu'aucune confusion n'en résulte, les *complexes* de \mathcal{C} . Les catégories $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$ sont additives.

2.1.6. Soit Y un complexe n -uple de \mathcal{C} . On utilise parfois, pour désigner le composant de degré σ de Y , la notation $Y_{-\sigma}$, et, pour désigner la différentielle de degré σ de Y dans la direction i , la notation $d_{-\sigma,i}^Y$. Cette notation est surtout utilisée lorsque Y est un complexe simple dont tous les composants de degré positif sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Soit de même $f : Y \rightarrow Y'$ un morphisme de complexes n -uples. On utilise parfois la notation $f_{-\sigma}$ pour désigner le composant de degré σ du morphisme f .

2.1.7. Soit $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ une application. Un complexe n -uple Y de \mathcal{C} est dit *φ -sommable*, si pour tout $\tau \in \mathbb{Z}[m]$, l'ensemble des $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ tels que $\varphi(\sigma) = \tau$ et Y^σ soit différent de 0, est fini. Lorsque φ est l'unique application $[n] \rightarrow [1]$, on dit simplement *sommable*. Soient $[n] \xrightarrow{\varphi} [m] \xrightarrow{\psi} [p]$ deux applications. Tout complexe n -uple Y qui est $\psi\varphi$ -sommable est aussi φ -sommable. En particulier, tout complexe n -uple sommable est φ -sommable pour toute application $[n] \xrightarrow{\varphi} [m]$. Lorsque φ est une injection, tous les complexes sont φ -sommables. On appelle *catégorie des complexes n -uples φ -sommables*, la sous-catégorie pleine de $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$ définie par les complexes φ -sommables.

2.2. Complexe simple associé.

2.2.1. Pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, $\sigma = \sum_{j \in [n]} l_j e_j$, $l_j \in \mathbb{Z}$, et pour tout $i \in [n]$ posons :

$$(2.2.1.1) \quad \varepsilon(\sigma, i) = (-1)^{\left(\sum_{j < i} l_j \right)} .$$

La formule (2.2.1.1) définit une application :

$$(\sigma, i) \mapsto \varepsilon(\sigma, i)$$

de $\mathbb{Z}[n] \times [n]$ dans le groupe des signes $\{-1, 1\}$. On vérifie immédiatement que pour tout $i \in [n]$, l'application $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma, i)$ est un homomorphisme de

CATÉGORIES DÉRIVÉES

groupes et que $\varepsilon(e_j, i) = -1$ si $j < i$, $\varepsilon(e_j, i) = 1$ si $i \leq j$. L'application $(\sigma, i) \mapsto \varepsilon(\sigma, i)$ est d'ailleurs uniquement déterminée par ces propriétés. On en déduit immédiatement la relation :

$$(2.2.1.2) \quad \varepsilon(\sigma, i)\varepsilon(\sigma + e_i, j) = -\varepsilon(\sigma, j)\varepsilon(\sigma + e_j, i)$$

valable pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ et pour tout couple $(i, j) \in [n] \times [n]$, $i \neq j$.

2.2.2. Soit Y un complexe n -uple de \mathcal{C} . Posons :

$$(2.2.2.1) \quad \delta_Y^{\sigma, i} = \varepsilon(\sigma, i)d_Y^{\sigma, i} .$$

On déduit alors de (2.2.1.2) que les relations (2.1.2.1) sont équivalentes aux relations :

$$(2.2.2.2) \quad \begin{aligned} \delta_Y^{\sigma+e_i, i}\delta_Y^{\sigma, i} &= 0, \quad \forall \sigma \in \mathbb{Z}[n], \quad \forall i \in [n] , \\ \delta_Y^{\sigma+e_j, i}\delta_Y^{\sigma, j} + \delta_Y^{\sigma+e_i, j}\delta_Y^{\sigma, i} &= 0, \quad \forall \sigma \in \mathbb{Z}[n], \quad \forall i, j \in [n] . \end{aligned}$$

Soit maintenant $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ une application et supposons que Y soit φ -sommable. On définit alors un complexe m -uple $\int_{\varphi} Y$ par les formules :

$$(2.2.2.3) \quad \left(\int_{\varphi} Y \right)^{\tau} = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^{\sigma}, \quad \forall \tau \in \mathbb{Z}[m] ,$$

$$(2.2.2.4) \quad \delta_{\int_{\varphi} Y}^{\tau, i}(y_{\sigma}) = \sum_{\varphi(j)=i} \delta_Y^{\sigma, j}(y_{\sigma}), \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n], \quad i \in [m], \quad y_{\sigma} \in Y^{\sigma}, \quad \tau = \varphi(\sigma).$$

La formule (2.2.2.4) définit un morphisme de $(\int_{\varphi} Y)^{\tau} = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^{\sigma}$ dans $(\int_{\varphi} Y)^{\tau+e_i} = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau+e_i} Y^{\sigma}$ lorsque \mathcal{C} est la catégorie des groupes abéliens.

Elle permet aussi de définir un morphisme de $(\int_{\varphi} Y)^{\tau}$ dans $(\int_{\varphi} Y)^{\tau+e_i}$ lorsque \mathcal{C} est une catégorie additive en se plaçant dans la catégorie des foncteurs contravariants sur \mathcal{C} à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, *i.e.* en interprétant y_{σ} comme un morphisme d'un objet quelconque de \mathcal{C} dans Y^{σ} . Un calcul immédiat montre que les $\delta_{\int_{\varphi} Y}^{\tau, i}$ vérifient les relations (2.2.2.2) d'où, en revenant aux différentielles, que les objets définis par (2.2.2.3) munis des morphismes définis par :

$$(2.2.2.5) \quad d_{\int_{\varphi} Y}^{\tau, i}(y_{\sigma}) = \varepsilon(\tau, i) \sum_{\varphi(j)=i} \varepsilon(\sigma, j) d_Y^{\sigma, j}(y_{\sigma}), \quad i \in [m], \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n], \quad \varphi(\sigma) = \tau$$

forment un complexe m -uple de \mathcal{C} .

Soit maintenant $f : Y \rightarrow Y'$ un morphisme de complexes n -uples de \mathcal{C} , φ -sommables. Posons :

$$(2.2.2.6) \quad \left(\int_{\varphi} f \right)^{\tau} = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau} f^{\sigma} : \left(\int_{\varphi} Y \right)^{\tau} \rightarrow \left(\int_{\varphi} Y' \right)^{\tau} .$$

Il est clair que les $(\int_{\varphi} f)^{\tau}$ commutent aux différentielles de $\int_{\varphi} Y$ et de $\int_{\varphi} Y'$ et que, par suite, une telle famille définit un morphisme de complexes m -uples $\int_{\varphi} f : \int_{\varphi} Y \rightarrow \int_{\varphi} Y'$. Il est clair que $\int_{\varphi} fg = \int_{\varphi} f \int_{\varphi} g$ et que $\int_{\varphi} \text{id}_Y = \text{id}_{\int_{\varphi} Y}$. Par suite \int_{φ} est un foncteur de la catégorie des complexes n -uples φ -sommables dans la catégorie des complexes m -uples. Ce foncteur est additif.

2.2.3. Soient $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ une application, τ un élément de $\mathbb{Z}[m]$ et i un élément de $[m]$. Soient E_1 (resp. E_2) les ensembles :

$$E_1 = \{ \sigma_1 \in \mathbb{Z}[n] \mid \varphi(\sigma_1) = \tau \} \\ (\text{resp. } E_2 = \{ \sigma_2 \in \mathbb{Z}[n] \mid \varphi(\sigma_2) = \tau + e_i \}) .$$

Soit enfin Y un complexe n -uple de \mathcal{C} . Posons, pour $\sigma_1 \in E_1$, $\sigma_2 \in E_2$:

$$(2.2.3.1) \quad u_{\sigma_2, \sigma_1}(Y) = \varepsilon(\tau, i) \varepsilon(\sigma_1, j) d_Y^{\sigma_1, j} \quad \begin{array}{l} \text{si } \sigma_2 - \sigma_1 = e_j, \\ = 0 \quad \text{sinon,} \end{array}$$

d'où une matrice de type $E_2 \times E_1$:

$$(2.2.3.2) \quad M(\tau, i, Y) = (u_{\sigma_2, \sigma_1}(Y))_{\sigma_2 \in E_2, \sigma_1 \in E_1} .$$

Lorsque Y est φ -sommable, cette matrice est la matrice du morphisme $d_{\int_{\varphi} Y}^{\tau, i}$.

Remarquons que dans le cas général, cette matrice ne possède qu'un nombre fini de termes non nuls sur chaque ligne et sur chaque colonne. Il y a donc *a priori* au moins deux extensions possibles du foncteur \int_{φ} aux complexes quelconques lorsque, dans \mathcal{C} , les produits dénombrables et les sommes di-

CATÉGORIES DÉRIVÉES

rectes dénombrables sont représentables :

$$\begin{aligned}
 (2.2.3.3) \quad & \left(\int_{\varphi}^{\Pi} Y \right)^{\tau} = \prod_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^{\sigma} , \\
 & d_{\int_{\varphi}^{\Pi} Y}^{\tau, i} \quad \text{défini par la matrice } M(\tau, i, Y) , \\
 & \left(\int_{\varphi}^{\Sigma} Y \right)^{\tau} = \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau} Y^{\sigma} , \\
 & d_{\int_{\varphi}^{\Sigma} Y}^{\tau, i} \quad \text{défini par la matrice } M(\tau, i, Y) .
 \end{aligned}$$

Le foncteur \int_{φ}^{Π} est appelé la Π -extension du foncteur \int_{φ} . Le foncteur \int_{φ}^{Σ} est appelé la Σ -extension du foncteur \int_{φ} . Ces deux extensions seront utilisées par la suite. On a d'ailleurs un morphisme naturel de foncteurs $\int_{\varphi}^{\Sigma} \rightarrow \int_{\varphi}^{\Pi}$ correspondant au morphisme fonctoriel de la somme directe dans le produit.

2.2.4. Soient $[n] \xrightarrow{\varphi} [m] \xrightarrow{\psi} [r]$ deux applications et supposons, pour fixer les idées, que les produits dénombrables soient représentables dans \mathcal{C} . On a alors les relations :

$$(2.2.4.1) \quad \int_{\psi}^{\Pi} \int_{\varphi}^{\Pi} = \int_{\psi\varphi}^{\Pi} ,$$

$$(2.2.4.2) \quad \int_{\text{id}}^{\Pi} = \text{id} .$$

Le rédacteur se voit ici dans la pénible obligation de tirer l'irritant coup de chapeau habituel. Le signe $=$ de la formule (2.2.4.1) n'est valable que lorsqu'on dispose d'un foncteur produit possédant des propriétés d'associativité convenables, ce qui n'est jamais le cas dans la pratique. Dans le cas général, le signe “=” doit être remplacé par un isomorphisme canonique qui vérifie les propriétés de compatibilité usuelles du type (1.2.1.3). Des relations analogues aux relations (2.2.4.1) sont valables pour le foncteur \int_{φ}^{Σ} . Lorsque les produits et sommes dénombrables ne sont pas nécessairement représentables, la formule (2.2.4.1) est encore valable lorsqu'on se restreint aux complexes $\psi\varphi$ -sommables. Lorsque ψ est l'unique morphisme $[n] \rightarrow [1]$, on utilise la notation \int_n . Pour tout complexe n -uple sommable Y , le complexe $\int_n Y$ est appelé le *complexe simple associé au complexe Y* .

2.3. Structure graduée sur les catégories de complexes.

2.3.1. Soient Y un complexe n -uple et $i \in [n]$. Posons :

$$(2.3.1.1) \quad \begin{aligned} (T_i Y)^\sigma &= Y^{\sigma + e_i} \quad , \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n] \quad , \\ d_{T_i Y}^{\sigma, j} &= \nu(i, j) d_Y^{\sigma + e_i, j} \quad , \quad j \in [n] \quad , \end{aligned}$$

où $\nu(i, j) = 1$ si $i \neq j$, $\nu(i, j) = -1$ si $i = j$. Pour tout morphisme de complexes n -uples $f : Y \rightarrow Y'$, posons :

$$(2.3.1.2) \quad (T_i f)^\sigma = f^{\sigma + e_i} \quad , \quad \sigma \in \mathbb{Z}[n] \quad .$$

On définit ainsi un foncteur $T_i : \mathbf{comp}^n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$ qu'on appelle le *foncteur de translation dans la direction i* . Lorsque $n = 1$, on utilise la notation TY , Tf ou bien $Y[1]$, $f[1]$. Le foncteur de translation dans la direction i est un automorphisme de $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$. Les foncteurs T_i , $i \in [n]$, commutent deux à deux :

$$(2.3.1.3) \quad T_i T_j = T_j T_i \quad , \quad \forall i, j \in [n] \quad .$$

On peut donc définir une opération du groupe $\mathbb{Z}[n]$ sur la catégorie $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$:

$$(2.3.1.4) \quad \sigma = \sum_{i \in [n]} l_i e_i \quad , \quad T(\sigma) = T_1^{l_1} \cdots T_n^{l_n} \quad .$$

La notation $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$ désignera dorénavant la catégorie $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$ munie de la structure de $\mathbb{Z}[n]$ -catégorie stricte décrite ci-dessus.

2.3.2. Soient $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ une application, Y un complexe n -uple de \mathcal{C} , i un élément de $[n]$. On suppose, pour fixer les idées, que les sommes dénombrables sont représentables dans \mathcal{C} . Remarquons tout d'abord que les objets $(\int_\varphi^\Sigma T_i Y)^\tau$ et $(T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma Y)^\tau$ sont égaux. Ils sont en effet égaux par définition à :

$$\bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau+e_{\varphi(i)}} Y^\sigma \quad .$$

Posons alors :

$$(2.3.2.1) \quad \begin{aligned} (p_{i, \varphi}(Y))^\tau &: \left(\int_\varphi^\Sigma T_i Y \right)^\tau \rightarrow \left(T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma Y \right)^\tau, \quad \tau \in \mathbb{Z}[m] \quad , \\ (p_{i, \varphi}(Y))^\tau &= \bigoplus_{\varphi(\sigma)=\tau+e_{\varphi(i)}} \varepsilon(\sigma, i) \varepsilon(\varphi(\sigma), \varphi(i)) \mathbf{id}_{Y^\sigma} \quad . \end{aligned}$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Un calcul immédiat montre que la famille $((p_{i,\varphi}(Y))^\tau, \tau \in \mathbb{Z}[m])$ commute aux différentielles de $\int_\varphi^\Sigma T_i Y$ et de $T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma Y$ et qu'elle définit par suite un morphisme :

$$(2.3.2.2) \quad p_{i,\varphi}(Y) : \int_\varphi^\Sigma T_i Y \rightarrow T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma Y .$$

Ce morphisme est un isomorphisme fonctoriel en Y , d'où un isomorphisme de foncteurs :

$$(2.3.2.3) \quad p_{i,\varphi} : \int_\varphi^\Sigma T_i \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma .$$

Proposition 2.3.3. 1) Pour tout couple $i, j \in [n], i \neq j$, le diagramme :

$$(2.3.3.1) \quad \begin{array}{ccc} \int_\varphi^\Sigma T_i T_j & \xrightarrow{p_{i,\varphi} \star T_j} & T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma T_j \\ p_{j,\varphi} \star T_i \downarrow & & \downarrow T_{\varphi(i)} \star p_{j,\varphi} \\ T_{\varphi(j)} \int_\varphi^\Sigma T_i & \xrightarrow{T_{\varphi(j)} \star p_{i,\varphi}} & T_{\varphi(i)} T_{\varphi(j)} \int_\varphi^\Sigma \end{array}$$

est commutatif lorsque $\varphi(i) \neq \varphi(j)$ et anticommutatif lorsque $\varphi(i) = \varphi(j)$.

2) Soit $\psi : [m] \rightarrow [r]$ une application. Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \int_\psi^\Sigma \int_\varphi^\Sigma T_i & \xrightarrow{\int_\psi^\Sigma \star p_{i,\varphi}} & \int_\psi^\Sigma T_{\varphi(i)} \int_\varphi^\Sigma \\ \parallel & & \downarrow p_{\varphi(i),\psi} \star \int_\varphi^\Sigma \\ \int_{\psi\varphi}^\Sigma T_i & \xrightarrow{p_{i,\psi\varphi}} & T_{\psi\varphi(i)} \int_{\psi\varphi}^\Sigma = T_{\psi\varphi(i)} \int_\psi^\Sigma \int_\varphi^\Sigma \end{array}$$

est commutatif. (Le lecteur qui ne veut pas tricher remplacera le signe “=” par des isomorphismes canoniques).

La preuve est immédiate et laissée au lecteur. La première assertion résulte de (2.2.1.2).

2.3.4. Prenons pour application φ l'unique application $[n] \xrightarrow{\varphi} [1]$ et faisons opérer le groupe $\mathbb{Z}[n]$ sur $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ par l'intermédiaire de $\varphi : \mathbb{Z}[n] \rightarrow \mathbb{Z}$. Il existe alors (1.5.2) un seul $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur tordu par le cocycle de Koszul :

$$(2.3.4.1) \quad \left(\int_n^\Sigma, p_n \right) : \mathbf{comp}^n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{comp}(\mathcal{C})$$

tel que :

$$p_n(e_i) = p_{i,\varphi} \quad .$$

Dorénavant, la notation \int_n^Σ désignera le foncteur \int_n^Σ muni de la structure de $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur tordu décrite ci-dessus.

2.3.5. Les considérations développées aux alinéas (2.3.2), (2.3.3) et (2.3.4) s'appliquent, modulo les modifications évidentes, aux foncteurs \int_φ^Π . Lorsque les sommes et produits dénombrables ne sont pas nécessairement représentables dans \mathcal{C} , les résultats ci-dessus s'appliquent aux foncteurs \int_φ en se restreignant à des complexes possédant des propriétés de sommabilité convenables.

2.4. Extension des foncteurs aux complexes.

2.4.1. Il existe un foncteur canonique :

$$(2.4.1.1) \quad \iota_n : \mathbf{comp}^n(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \mathbf{comp}^n(\mathcal{C}^\circ)$$

défini par les formules suivantes :

$$(2.4.1.2) \quad \begin{aligned} (\iota_n X)^\sigma &= X^{-\sigma} \quad , \quad X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})) \quad , \\ d_{\iota_n X}^{\sigma,i} &= d_X^{-\sigma-e_i,i} \quad , \\ (\iota_n f)^\sigma &= f^{-\sigma} \quad , \quad f \in \mathbf{Fl}(\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})) \quad . \end{aligned}$$

Le foncteur ι_n est un isomorphisme de $\mathbb{Z}[n]$ -catégories (la structure de $\mathbb{Z}[n]$ -catégorie de $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C}^\circ)$ est définie par (2.3.1) ; la structure graduée de $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})^\circ$ est définie par (2.3.1) et (1.3.9)).

Supposons que les sommes directes dénombrables soient représentables dans \mathcal{C} et soit $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ une application. Désignons par :

$$(2.4.1.3) \quad \left(\int_{\varphi,\mathcal{C}}^\Sigma \right)^\circ : \mathbf{comp}^n(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \mathbf{comp}^m(\mathcal{C})^\circ \quad ,$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

le foncteur opposé au foncteur défini en (2.2.3) et (2.2.4). De même, désignons par :

$$(2.4.1.4) \quad \int_{\varphi, \mathcal{C}^\circ}^{\Pi} : \mathbf{comp}^n(\mathcal{C}^\circ) \rightarrow \mathbf{comp}^m(\mathcal{C}^\circ) \quad ,$$

le foncteur défini en (2.2.3) et (2.2.4). On vérifie immédiatement que le diagramme :

$$(2.4.1.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{comp}^n(\mathcal{C})^\circ & \xrightarrow{\iota_n} & \mathbf{comp}^n(\mathcal{C}^\circ) \\ \left(\int_{\varphi, \mathcal{C}}^\Sigma \right)^\circ \downarrow & & \downarrow \int_{\varphi, \mathcal{C}^\circ}^\Pi \\ \mathbf{comp}^m(\mathcal{C})^\circ & \xrightarrow{\iota_m} & \mathbf{comp}^m(\mathcal{C}^\circ) \end{array}$$

est commutatif. En particulier, lorsque φ est l'unique application $[n] \rightarrow [1]$, on a un diagramme commutatif :

$$(2.4.1.6) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{comp}^n(\mathcal{C})^\circ & \xrightarrow{\iota_n} & \mathbf{comp}^n(\mathcal{C}^\circ) \\ \left(\int_{n, \mathcal{C}}^\Sigma \right)^\circ \downarrow & & \downarrow \int_{n, \mathcal{C}^\circ}^\Pi \\ \mathbf{comp}(\mathcal{C})^\circ & \xrightarrow{\iota_1} & \mathbf{comp}(\mathcal{C}^\circ) \end{array}$$

et on vérifie immédiatement que le couple d'isomorphismes (ι_1, ι_n) est un isomorphisme du $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur tordu $\left(\int_{n, \mathcal{C}}^\Sigma \right)^\circ$ sur le $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur tordu $\int_{n, \mathcal{C}^\circ}^\Pi$. (la structure graduée de $\int_{n, \mathcal{C}^\circ}^\Pi$ est décrite en (2.3.4) ; la structure graduée de $\left(\int_{n, \mathcal{C}}^\Sigma \right)^\circ$ est décrite en (2.3.4) et (1.4.8)).

Nous identifierons dorénavant par l'isomorphisme ι_n les catégories $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})^\circ$ et $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C}^\circ)$ et les foncteurs $\left(\int_{\varphi, \mathcal{C}}^\Sigma \right)^\circ$ et $\int_{\varphi, \mathcal{C}^\circ}^\Pi$.

2.4.2. Soient \mathcal{C}_i , $i \in [n]$, une famille de catégories additives et $\prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i$ leur produit. On désigne par (X_1, X_2, \dots, X_n) les objets de $\prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i$ et on utilise la notation $(X_1, X_2, \dots, f_i, \dots, X_n)$ pour désigner le morphisme :

$$(\mathbf{id}_{X_1}, \mathbf{id}_{X_2}, \dots, f_i, \dots, \mathbf{id}_{X_n}) \quad .$$

Ces conventions s'appliquent en particulier à la catégorie $\prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i)$.

Remarquons que la catégorie $\prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i)$ est munie d'une structure de

$\mathbb{Z}[n]$ -catégorie (1.3.11). Pour tout $\sigma = \sum_{i \in [n]} l_i e_i$, $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, on a :

$$(2.4.2.1) \quad T(\sigma)(X_1, X_2, \dots, X_n) = (X_1[l_1], X_2[l_2], \dots, X_n[l_n]) \quad .$$

Un objet (X_1, \dots, X_n) de $\prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i)$ est dit *sommable* si pour tout $l \in \mathbb{Z}$,

l'ensemble des $\sigma = \sum_{i \in [n]} l_i e_i \in \mathbb{Z}[n]$ tels que $\sum_{i \in [n]} l_i = l$ et $X_i^{l_i} \neq 0$, pour au moins un $i \in [n]$, est fini.

Soit maintenant $F : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur multiadditif (covariant).

Pour tout objet (X_1, \dots, X_n) de $\prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i)$, posons :

$$(2.4.2.2) \quad F^{[n]}(X_1, \dots, X_n)^\sigma = F(X_1^{l_1}, \dots, X_n^{l_n}) \quad ,$$

pour tout $\sigma = \sum_{i \in [n]} l_i e_i \in \mathbb{Z}[n]$,

$$d_{F^{[n]}(X_1, \dots, X_n)}^{\sigma, i} = F(X_1^{l_1}, \dots, d_{X_i}^{l_i}, \dots, X_n^{l_n}) \quad , \quad \forall i \in [n] \quad .$$

On a ainsi défini un complexe n -uple de \mathcal{C} .

Pour tout morphisme (f_1, \dots, f_n) de $\prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i)$, posons :

$$(2.4.2.3) \quad F^{[n]}(f_1, \dots, f_n)^\sigma = F(f_1^{l_1}, \dots, f_n^{l_n}) \quad ,$$

pour tout $\sigma = \sum_{i \in [n]} l_i e_i \in \mathbb{Z}[n]$. On a ainsi défini un morphisme de complexes n -uples.

Ce qui précède définit visiblement un foncteur :

$$(2.4.2.4) \quad F^{[n]} : \prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathbf{comp}^n(\mathcal{C}) \quad .$$

Remarquons que pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, on a :

$$(2.4.2.5) \quad F^{[n]}T(\sigma) = T(\sigma)F^{[n]} \quad .$$

Par suite, le foncteur $F^{[n]}$ est un $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur strict. Le foncteur $F^{[n]}$ transforme les objets sommables de $\prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i)$ en objets sommables de $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Supposons maintenant que les produits (resp. sommes directes) dénombrables soient représentables dans \mathcal{C} . On pose alors :

$$(2.4.2.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{comp}_{\Pi} F &= \int_n^{\Pi} F^{[n]} \quad , \\ (\text{resp. } \mathbf{comp}_{\Sigma} F &= \int_n^{\Sigma} F^{[n]} \quad) \quad . \end{aligned}$$

Le foncteur $\mathbf{comp}_{\Pi} F$ (resp. $\mathbf{comp}_{\Sigma} F$) : $\prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathbf{comp}(\mathcal{C})$ est appelé la Π -extension (resp. la Σ -extension) du foncteur F aux complexes. Le foncteur F étant un $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur strict et le foncteur \int_n^{Π} (resp. \int_n^{Σ}) étant un $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur tordu par le cocycle de Koszul relatif à la base ordonnée e_1, \dots, e_n de $\mathbb{Z}[n]$, le foncteur $\mathbf{comp}_{\Pi} F$ (resp. $\mathbf{comp}_{\Sigma} F$) est un $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur tordu par le cocycle de Koszul relatif à la base ordonnée e_1, \dots, e_n de $\mathbb{Z}[n]$, conformément à la règle des signes I (1.6.6). On a donc pour tout $i \in [n]$ des isomorphismes canoniques :

$$(2.4.2.7) \quad \mathbf{comp}_{\Pi} F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_n) \xrightarrow{\sim} \mathbf{comp}_{\Pi} F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)[1]$$

$$(\text{resp. } \mathbf{comp}_{\Sigma} F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_n) \xrightarrow{\sim} \mathbf{comp}_{\Sigma} F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)[1] \quad)$$

qui seront notés p_i . Ces isomorphismes possèdent les propriétés d'anticommutativité décrites en (1.6.6.3). Les restrictions des foncteurs $\mathbf{comp}_{\Pi} F$ et $\mathbf{comp}_{\Sigma} F$ aux objets sommables de $\prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i)$ sont égales, et cette restriction peut toujours se définir, sans hypothèses sur la catégorie \mathcal{C} .

2.4.3. Soient maintenant deux foncteurs multiadditifs $F, F' : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}$ et $h : F \rightarrow F'$ un morphisme de foncteurs. On en déduit un morphisme de foncteurs :

$$h^{[n]} : F^{[n]} \rightarrow F'^{[n]} \quad ,$$

en posant :

$$(2.4.3.1) \quad \begin{aligned} h^{[n]}(X_1, \dots, X_n)^{\sigma} &= h(X_1^{l_1}, \dots, X_n^{l_n}) \quad , \\ \sigma = \sum_{i \in [n]} l_i e_i &\in \mathbb{Z}[n] \quad , \quad (X_1, \dots, X_n) \in \mathbf{Ob} \left(\prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i) \right) \quad . \end{aligned}$$

D'où, en passant aux complexes simples, deux morphismes de foncteurs :

$$(2.4.3.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{comp}_\Pi h : \mathbf{comp}_\Pi F \rightarrow \mathbf{comp}_\Pi F' & , \\ \mathbf{comp}_\Sigma h : \mathbf{comp}_\Sigma F \rightarrow \mathbf{comp}_\Sigma F' & . \end{aligned}$$

Si h et h' sont deux morphismes composables de foncteurs multiadditifs, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{comp}_\Pi hh' &= \mathbf{comp}_\Pi h \mathbf{comp}_\Pi h' & , \\ \mathbf{comp}_\Sigma hh' &= \mathbf{comp}_\Sigma h \mathbf{comp}_\Sigma h' & . \end{aligned}$$

Le morphisme $\mathbf{comp}_\Pi h$ (resp. $\mathbf{comp}_\Sigma h$) est un morphisme de $\mathbb{Z}[n]$ -foncteurs qui suit la règle des signes II (1.6.6).

2.4.4. Lorsque le foncteur F est contravariant en certaines variables, *i.e.* lorsqu'on a des égalités $C_i = (C'_i)^\circ$, pour $i \in J \subset [n]$, les foncteurs $\mathbf{comp}_\Pi F$ et $\mathbf{comp}_\Sigma F$ sont, modulo les identifications faites en (2.4.1), contravariants en les variables correspondantes.

2.5. Homotopies.

2.5.1. Soient X et Y deux complexes n -uples de \mathcal{C} et $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de complexes. Une *homotopie* reliant f à g est une famille de morphismes $a = (a^{\sigma, i} : X^{\sigma+e_i} \rightarrow Y^\sigma, \sigma \in \mathbb{Z}[n], i \in [n])$ telle que :

$$(2.5.1.1) \quad \begin{aligned} a^{\sigma+e_i - e_j, j} d_X^{\sigma, i} &= d_Y^{\sigma - e_j, i} a^{\sigma - e_j, j}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{Z}[n], \forall i, j \in [n], i \neq j, \\ g^\sigma - f^\sigma &= \sum_{i \in [n]} a^{\sigma, i} d_X^{\sigma, i} + d_Y^{\sigma - e_i, i} a^{\sigma - e_i, i}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{Z}[n] . \end{aligned}$$

On utilise la notation $a : f \rightsquigarrow g$ pour désigner les homotopies a reliant f à g .

2.5.2. Soient $f, g, h : X \rightrightarrows Y$ trois morphismes, $a : f \rightsquigarrow g$ et $b : g \rightsquigarrow h$ deux homotopies. On désigne par $b + a : f \rightsquigarrow h$, l'homotopie $((b + a)^{\sigma, i} = b^{\sigma, i} + a^{\sigma, i}, \sigma \in \mathbb{Z}[n], i \in [n])$.

2.5.3. Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de complexes, $a : f \rightsquigarrow g$ une homotopie et $u : Y \rightarrow Y'$ (resp. $v : X' \rightarrow X$) un morphisme de complexes. On désigne par $u \star a : uf \rightsquigarrow ug$ (resp. $a \star v : fv \rightsquigarrow gv$) l'homotopie $((u \star a)^{\sigma, i} = u^\sigma a^{\sigma, i})$ (resp. $((a \star v)^{\sigma, i} = a^{\sigma, i} v^{\sigma+e_i})$).

CATÉGORIES DÉRIVÉES

2.5.4. Les opérations \star et “somme des homotopies” possèdent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 u \star (b + a) &= u \star b + u \star a \quad , \\
 (b + a) \star v &= b \star v + a \star v \quad , \\
 (2.5.4.1) \quad uu' \star a &= u \star (u' \star a) \quad , \\
 a \star vv' &= (a \star v) \star v' \quad .
 \end{aligned}$$

2.5.5. Deux morphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$ sont dits *homotopes* s'il existe une homotopie qui les relie. Deux morphismes f, g sont homotopes si le morphisme $f - g$ est homotope à zéro. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme homotope à zéro. Pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$, le morphisme $T(\sigma)f$ est homotope à zéro. L'ensemble des morphismes homotopes à zéro forme un idéal de $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$, i.e. le composé dans les deux sens d'un morphisme homotope à zéro avec un morphisme quelconque est homotope à zéro et la somme directe de deux morphismes homotopes à zéro est homotope à zéro.

2.5.6. Soit $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ une application. Les foncteurs \int_φ^Σ et \int_φ^Π transforment les couples de morphismes homotopes de $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$ en couples de morphismes homotopes de $\mathbf{comp}^m(\mathcal{C})$. Soient de même $F : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur multiadditif,

$$F^{[n]} : \prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$$

le foncteur décrit en (2.4.2.4), X_i des objets de $\mathbf{comp}(\mathcal{C}_i)$ ($i \neq j$) et $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes homotopes de $\mathbf{comp}(\mathcal{C}_j)$. Les morphismes de $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$:

$$F^{[n]}(X_1, \dots, f, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad F^{[n]}(X_1, \dots, g, \dots, X_n)$$

sont homotopes. Par suite, les morphismes de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$:

$$\mathbf{comp}_\Pi F(X_1, \dots, f, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad \mathbf{comp}_\Sigma F(X_1, \dots, g, \dots, X_n)$$

sont homotopes (même résultat pour $\mathbf{comp}_\Sigma F$). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier toutes ces assertions ou de se reporter à [1].

2.5.7. Désignons par $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ la catégorie suivante :

- Les objets de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ sont les objets de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$.

– Soient X et Y deux objets de $\mathbf{K}(\mathcal{C})$, $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$. La relation “ f et g sont homotopes” est une relation d’équivalence sur $\mathbf{Hom}_{\mathbf{comp}(\mathcal{C})}(X, Y)$, et on définit $\mathbf{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{C})}(X, Y)$ comme le quotient de $\mathbf{Hom}_{\mathbf{comp}(\mathcal{C})}(X, Y)$ par cette relation d’équivalence.

– Il résulte immédiatement de (2.5.5) que la loi de composition sur les morphismes de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ passe au quotient et définit une loi de composition sur les morphismes de $\mathbf{K}(\mathcal{C})$.

Il résulte immédiatement de (2.5.5) qu’on a bien défini ainsi une catégorie et que cette catégorie est additive. Le foncteur canonique $\mathbf{comp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{Q} \mathbf{K}(\mathcal{C})$ qui est l’identité sur les objets et qui associe à tout morphisme f de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ sa classe d’équivalence \dot{f} est additif. Le morphisme \dot{f} de $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ image du morphisme f de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ par le foncteur canonique est appelé la *classe de f modulo homotopie*. La catégorie $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ est appelé la *catégorie des complexes de \mathcal{C} à homotopie près*.

2.5.8. Le foncteur canonique $\mathbf{comp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{Q} \mathbf{K}(\mathcal{C})$ possède la propriété suivante : tout foncteur de $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ dans une catégorie \mathcal{A} fournit, par composition avec Q , un foncteur de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ dans \mathcal{A} , d’où, pour toute catégorie \mathcal{A} , un foncteur :

$$\mathcal{H}om(Q, \mathcal{A}) : \mathcal{H}om(\mathbf{K}(\mathcal{C}), \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathbf{comp}(\mathcal{C}), \mathcal{A})$$

($\mathcal{H}om$ désigne la catégorie des foncteurs). Ce foncteur est pleinement fidèle, injectif sur les objets et l’image est la sous-catégorie pleine de :

$$\mathcal{H}om(\mathbf{comp}(\mathcal{C}), \mathcal{A})$$

définie par les foncteurs de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ dans \mathcal{A} qui transforment tout couple de morphismes homotopes de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ en morphismes égaux. La catégorie $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ munie du foncteur canonique $\mathbf{comp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{Q} \mathbf{K}(\mathcal{C})$ est déterminée à isomorphisme unique près par cette propriété.

2.5.9. Il résulte immédiatement de (2.5.5) et de (2.5.8) qu’il existe un et un seul foncteur de translation sur $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ tel que le foncteur canonique :

$$\mathbf{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C})$$

commute (strictement) aux translations. Ce foncteur de translation est un automorphisme de $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ et par suite définit sur $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ une structure de \mathbb{Z} -catégorie stricte. Le foncteur canonique $\mathbf{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C})$ est un \mathbb{Z} -foncteur strict.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

2.5.10. Soit $F : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur multiadditif. Désignons par :

$$Q_i : \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C}_i)$$

les foncteurs canoniques. Il résulte de (2.5.6) et de (2.5.7) qu'il existe, lorsque les produits dénombrables sont représentables dans \mathcal{C} , un et un seul foncteur $\mathbf{K}_\Pi(F) : \prod_{i \in [n]} \mathbf{K}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C})$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$(2.5.10.1) \quad \begin{array}{ccc} \prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i) & \xrightarrow{\mathbf{comp}_\Pi F} & \mathbf{comp}(\mathcal{C}) \\ \prod_{i \in [n]} Q_i \downarrow & & \downarrow Q \\ \prod_{i \in [n]} \mathbf{K}(\mathcal{C}_i) & \xrightarrow{\mathbf{K}_\Pi F} & \mathbf{K}(\mathcal{C}) \end{array} .$$

De plus, le foncteur $\prod_{i \in [n]} Q_i$ étant un $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur strict, il existe sur le foncteur $\mathbf{K}_\Pi F$ une et une seule structure de $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur gradué tordu par le cocycle de Koszul relatif à la base ordonnée e_1, \dots, e_n de $\mathbb{Z}[n]$, tel qu'on ait l'égalité entre $\mathbb{Z}[n]$ -foncteurs tordus :

$$(2.5.10.2) \quad \mathbf{K}_\Pi F \prod_{i \in [n]} Q_i = Q \mathbf{comp}_\Pi F .$$

Enfin, soient F et F' deux foncteurs multiadditifs et $m : F \rightarrow F'$ un morphisme de foncteurs. Il résulte de (2.5.7) qu'il existe un et un seul morphisme de foncteurs :

$$(2.5.10.3) \quad \mathbf{K}_\Pi m : \mathbf{K}_\Pi F \rightarrow \mathbf{K}_\Pi F'$$

tel que :

$$(2.5.10.4) \quad \mathbf{K}_\Pi m \star \prod_{i \in [n]} Q_i = Q \star \mathbf{comp}_\Pi m .$$

Le foncteur $\mathbf{K}_\Pi F$ est appelé la *Π -extension* du foncteur F aux complexes à homotopie près. Le morphisme $\mathbf{K}_\Pi m$ est appelé la *Π -extension* du morphisme m aux complexes à homotopie près.

Lorsque les sommes directes dénombrables sont représentables dans \mathcal{C} , on définit de manière analogue le foncteur $\mathbf{K}_\Sigma F$: la *Σ -extension* du foncteur F aux complexes à homotopie près, et le morphisme $\mathbf{K}_\Sigma m$: la *Σ -extension* du morphisme m aux complexes à homotopie près.

2.5.11. Soient X et Y deux complexes de \mathcal{C} . Un morphisme de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$, $f : X \rightarrow Y$, est appelé un *homotopisme* si son image \dot{f} dans $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ est un isomorphisme. Les complexes X et Y sont dits *homotopes* s'ils sont isomorphes dans $\mathbf{K}(\mathcal{C})$.

2.5.12. Soient X et Y deux complexes de \mathcal{C} , $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$, $a, b : f \rightleftarrows g$ deux homotopies reliant f à g . On appelle *homotopie du deuxième ordre* reliant a à b , notée $\alpha : a \rightsquigarrow b$, une famille de morphismes $\alpha = (\alpha^i : X^{i+2} \rightarrow Y^i, i \in \mathbb{Z})$ telle que :

$$(2.5.12.1) \quad b^i - a^i = \alpha^i d_X^{i+1} - d_Y^{i-1} \alpha^{i-1} .$$

2.5.13. Remarquons pour terminer que l'isomorphisme (2.4.1) :

$$\iota_1 : \mathbf{comp}(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \mathbf{comp}(\mathcal{C}^\circ)$$

définit, en vertu de (2.5.7), un unique isomorphisme :

$$\iota_1 : \mathbf{K}(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C}^\circ)$$

qui est un isomorphisme de \mathbb{Z} -catégories. Nous identifierons dorénavant le plus souvent les catégories $\mathbf{K}(\mathcal{C})^\circ$ et $\mathbf{K}(\mathcal{C}^\circ)$ par cet isomorphisme.

3. Triangles distingués.

3.1. Le cône d'un morphisme.

3.1.1. Soit \mathcal{C} une catégorie additive. On désigne par $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ la catégorie suivante :

– Les objets de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ sont les morphismes (de degré zéro) $X \xrightarrow{f} Y$ de complexes d'objets de \mathcal{C} .

– Soient $X \xrightarrow{f} Y$ et $X' \xrightarrow{f'} Y'$ deux objets de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. Un morphisme de $X \xrightarrow{f} Y$ dans $X' \xrightarrow{f'} Y'$ est un triplet (g, h, a) , où $g : X \rightarrow X'$ et $h : Y \rightarrow Y'$ sont des morphismes de complexes de degré zéro et où $a : f'g \rightsquigarrow hf$ est une homotopie reliant $f'g$ à hf .

– Soient :

$$(g, h, a) : (X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow (X' \xrightarrow{f'} Y') \quad \text{et} \quad (g', h', a') : (X' \xrightarrow{f'} Y') \rightarrow (X'' \xrightarrow{f''} Y'')$$

deux morphismes de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. Le morphisme composé :

$$(g'', h'', a'') : (X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow (X'' \xrightarrow{f''} Y'')$$

est alors défini par les égalités :

$$\begin{aligned} g'' &= g'g \quad , \\ (3.1.1.1) \quad h'' &= h'h \quad , \\ a'' &= a' \star g + h' \star a \quad . \end{aligned}$$

On vérifie aussitôt qu'on a bien ainsi défini une catégorie. On représentera le plus souvent un morphisme $(g, h, a) : (X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow (X' \xrightarrow{f'} Y')$ de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ par un diagramme :

$$(3.1.1.2) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} \nearrow a & \rightarrow Y' \end{array} .$$

La catégorie $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ est additive. La somme directe de $X \xrightarrow{f} Y$ et de $X' \xrightarrow{f'} Y'$ est :

$$X \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}} Y \oplus Y' .$$

3.1.2. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un objet de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. Posons :

$$c(f)^i = Y^i \oplus X^{i+1} ,$$

$$(3.1.2.1) \quad d_{c(f)}^i = \begin{pmatrix} d_Y^i & f^{i+1} \\ 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix} : Y^i \oplus X^{i+1} \rightarrow Y^{i+1} \oplus X^{i+2} .$$

On vérifie qu'on a ainsi défini un complexe d'objets de \mathcal{C} . Ce complexe est noté $c(f)$ et est appelé le *cône du morphisme* f . Soit maintenant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} \nearrow a & Y' \end{array}$$

un morphisme de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. Posons :

$$(3.1.2.2) \quad c((g, h, a))^i = \begin{pmatrix} h^i & a^i \\ 0 & g^{i+1} \end{pmatrix} : Y^i \oplus X^{i+1} \rightarrow Y'^i \oplus X'^{i+1} .$$

Ces morphismes commutent avec les différentielles de $c(f)$ et de $c(f')$ et par suite définissent un morphisme de complexes :

$$(3.1.2.3) \quad c((g, h, a)) : c(f) \rightarrow c(f') .$$

On vérifie qu'on a défini ainsi un foncteur $c : \text{tr}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C})$ qu'on appelle le *foncteur cône*.

Désignons par $s : \text{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{tr}_1(\mathcal{C})$ le foncteur $X \longmapsto (0 \rightarrow X)$. Pour tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$, on désigne par $\Phi(f) : (X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow sc(f)$ le

morphisme suivant de $\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow & \searrow a(f) & \downarrow p(f) \\
 0 & \xrightarrow{\sim} & c(f)
 \end{array} ,$$

(3.1.2.4)

$$p(f)^i = \begin{pmatrix} \mathbf{id}_{Y^i} \\ 0 \end{pmatrix} : Y^i \rightarrow Y^i \oplus X^{i+1} ,$$

$$a(f)^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{id}_{X^{i+1}} \end{pmatrix} : X^{i+1} \rightarrow Y^i \oplus X^{i+1} .$$

Un calcul immédiat montre que Φ est un morphisme du foncteur identique de la catégorie $\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})$ dans le foncteur sc .

Proposition 3.1.3. *Le morphisme Φ fait du foncteur cône un adjoint à gauche du foncteur s , i.e. pour tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})$ et pour tout objet W de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$, l'application canonique définie par le morphisme Φ :*

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{comp}(\mathcal{C})}(c(f), W) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})}((X \xrightarrow{f} Y), sW)$$

est un isomorphisme.

La vérification est laissée au lecteur. On notera que le foncteur s est pleinement fidèle et que par suite le foncteur cs est canoniquement isomorphe au foncteur identique. En fait, avec la construction choisie du foncteur c , le foncteur cs est égal au foncteur identique. La propriété d'adjonction de (3.1.3) peut encore se traduire comme suit : l'application définie par le foncteur :

$$c : \mathbf{Hom}_{\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})}((X \xrightarrow{f} Y), sW) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{comp}(\mathcal{C})}(c(f), W)$$

est un isomorphisme.

3.1.4. Nous allons définir dans $\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})$ une notion d'homotopie. Soient :

$$(g, h, a), (g', h', a') : (X \xrightarrow{f} Y) \rightrightarrows (X' \xrightarrow{f'} Y')$$

deux morphismes de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. Une *homotopie* reliant (g, h, a) à (g', h', a') est un triplet (b, b', α) , où $b : g \rightsquigarrow g'$ et $b' : h \rightsquigarrow h'$ sont des homotopies et où $\alpha : f' \star b + a' \rightsquigarrow b' \star f + a$ est une homotopie du deuxième ordre (2.5.12). Deux morphismes de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ seront dits *homotopes* s'il existe une homotopie les reliant. La relation : “ (g, h, a) et (g', h', a') sont homotopes” est une relation d'équivalence compatible avec la somme directe et la composition des morphismes. On peut donc introduire la catégorie $\text{Tr}_1(\mathcal{C})$ dont les objets sont les objets de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ et les morphismes les morphismes de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ à homotopie près.

Proposition 3.1.5. *Soient $D, D' : (X \xrightarrow{f} Y) \rightrightarrows (X' \xrightarrow{f'} Y')$ deux morphismes de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. Si les morphismes D et D' sont homotopes dans $\text{tr}_1(\mathcal{C})$, alors les morphismes $c(D)$ et $c(D')$ sont homotopes dans $\text{comp}(\mathcal{C})$.*

Soient $D = (g, h, a)$ et $D' = (g', h', a')$. Supposons que D et D' soient homotopes dans $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. Il existe donc des homotopies b et b' telles que :

$$(3.1.5.1) \quad \begin{aligned} g' - g &= bd + db \quad , \\ h' - h &= b'd + db' \quad . \end{aligned}$$

(Pour alléger la notation, nous avons omis dans ce calcul les exposants indiquant le degré des composants.) Il existe de plus une homotopie du deuxième ordre α telle que :

$$\alpha d - d\alpha = b'f + a - (f'b + a') \quad .$$

Un calcul immédiat montre alors que $\begin{pmatrix} b' & \alpha \\ 0 & -b \end{pmatrix}$ est une homotopie qui relie $c(D)$ à $c(D')$.

Corollaire 3.1.6. *Les foncteurs :*

$$c : \text{tr}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad s : \text{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{tr}_1(\mathcal{C})$$

sont compatibles avec les homotopies de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ et de $\text{comp}(\mathcal{C})$ et définissent, en passant au quotient, des foncteurs encore notés $c : \text{Tr}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \text{K}(\mathcal{C})$ et $s : \text{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Tr}_1(\mathcal{C})$. Le foncteur $c : \text{Tr}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \text{K}(\mathcal{C})$ est adjoint à gauche du foncteur $s : \text{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Tr}_1(\mathcal{C})$.

Ceci résulte formellement de (3.1.5) et de (3.1.3).

3.1.7. Désignons par $s' : \text{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{tr}_1(\mathcal{C})$ le foncteur $X \longmapsto (X \rightarrow 0)$. Le foncteur $cs' : \text{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{C})$ est égal au foncteur de translation de $\text{comp}(\mathcal{C})$. Le foncteur s' transforme deux morphismes homotopes de $\text{comp}(\mathcal{C})$ en morphismes homotopes de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ et par suite définit un foncteur que nous noterons encore $s' : \text{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Tr}_1(\mathcal{C})$. Le foncteur $cs' : \text{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{K}(\mathcal{C})$ est égal au foncteur de translation de $\text{K}(\mathcal{C})$.

3.2. Propriétés du foncteur cône.

3.2.1. Dans une \mathbb{Z} -catégorie, on appelle *triangle* tout diagramme du type :

$$(3.2.1.1) \quad X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \quad .$$

Pour désigner le triangle (3.2.1.1), on utilise la notation (X, Y, Z, u, v, w) , ou bien le diagramme :

$$(3.2.1.2) \quad \begin{array}{ccc} & Z & \\ w \swarrow & & \nwarrow v \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array},$$

la flèche munie d'un pousoir désignant le morphisme de degré 1 du triangle. Soient (X, Y, Z, u, v, w) et (X', Y', Z', u', v', w') deux triangles. Un *morphisme de triangles* est un diagramme commutatif :

$$(3.2.1.3) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}.$$

Les morphismes de triangles se composent de la manière évidente. Les triangles forment une catégorie.

3.2.2. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un objet de $\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})$. Le morphisme (fonctoriel en f) de $\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})$:

$$(3.2.2.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \mathsf{id}_X \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

fournit, en appliquant le foncteur cône, un morphisme, fonctoriel en $X \xrightarrow{f} Y$, (3.1.7) de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$:

$$(3.2.2.2) \quad q(f) : c(f) \rightarrow X[1] \quad .$$

De même, le morphisme de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$:

$$(3.2.2.3) \quad \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \text{id}_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

fournit, en appliquant le foncteur cône, un morphisme, fonctoriel en $X \xrightarrow{f} Y$, de $\text{comp}(\mathcal{C})$ (3.1.2.4) :

$$(3.2.2.4) \quad p(f) : Y \rightarrow c(f) \quad .$$

On peut donc associer à tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ un triangle de $\text{comp}(\mathcal{C})$:

$$(3.2.2.5) \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p(f)} c(f) \xrightarrow{q(f)} X[1] \quad .$$

On notera que ce triangle ne dépend pas fonctoriellement de l'objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. Soit, en effet, $D = (g, h, a) : (X \xrightarrow{f} Y) \rightarrow (X' \xrightarrow{f'} Y')$ un morphisme de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. On obtient alors le diagramme :

$$(3.2.2.6) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{p(f)} & c(f) & \xrightarrow{q(f)} & X[1] \\ g \downarrow & & h \downarrow & & c(D) \downarrow & & g[1] \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{p(f')} & c(f') & \xrightarrow{q(f')} & X'[1] \end{array} \quad .$$

$\nearrow a$

Les morphismes $p(f)$ et $q(f)$ étant fonctoriels en f , les deux derniers carrés de ce diagramme sont commutatifs, mais le premier carré est commutatif à homotopie près seulement. En passant au quotient par les homotopies, on peut associer à tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\text{Tr}_1(\mathcal{C})$ un triangle de $\mathbf{K}(\mathcal{C})$:

$$(3.2.2.7) \quad X \xrightarrow{\dot{f}} Y \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X[1]$$

qui dépend fonctoriellement de $X \xrightarrow{f} Y$. (On désigne par \dot{f} , $\dot{p}(f)$, $\dot{q}(f)$ les classes modulo homotopie des morphismes f , $p(f)$, $q(f)$ respectivement.) On a donc ainsi un foncteur de la catégorie $\text{Tr}_1(\mathcal{C})$ dans la catégorie des triangles de $\mathbf{K}(\mathcal{C})$.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

3.2.3. L'automorphisme de translation de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ s'étend naturellement en un automorphisme $T : \mathbf{tr}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{tr}_1(\mathcal{C})$:

$$(3.2.3.1) \quad \begin{aligned} T(X \xrightarrow{f} Y) &= X[1] \xrightarrow{f[1]} Y[1] \\ T((g, h, a)) &= (g[1], h[1], -a[1]) . \end{aligned}$$

On fait alors du foncteur cône un \mathbb{Z} -foncteur (1.5.2) en définissant un isomorphisme $\Psi(f) : c(f[1]) \xrightarrow{\sim} c(f)[1]$:

$$(3.2.3.2) \quad \Psi(f)^i = \begin{pmatrix} \mathbf{id}_{Y^{i+1}} & 0 \\ 0 & -\mathbf{id}_{X^{i+2}} \end{pmatrix} : Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \rightarrow Y^{i+1} \oplus X^{i+2} .$$

Le lecteur vérifiera que (3.2.3.2) définit bien un isomorphisme de complexes et démontrera la proposition suivante :

Proposition 3.2.4. *Lorsque $f = 0 \rightarrow Y$, l'isomorphisme canonique :*

$$c(f[n]) \xrightarrow{\sim} c(f)[n]$$

n'est autre que l'application identique de $Y[n]$. Lorsque $f = X \rightarrow 0$, l'isomorphisme canonique :

$$c(f[n]) \xrightarrow{\sim} c(f)[n]$$

n'est autre que l'isomorphisme :

$$X[n+1] \xrightarrow{(-1)^n \mathbf{id}_{X[n+1]}} X[n+1] .$$

3.2.5. Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un objet de $\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})$. On peut lui associer un triangle de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$:

$$(3.2.5.1) \quad Y \xrightarrow{p(f)} c(f) \xrightarrow{q(f)} X[1] \xrightarrow{f[1]} Y[1] .$$

Or le morphisme $q(f)p(f) : Y \rightarrow X[1]$ est le transformé par le foncteur cône du morphisme :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Il est donc nul. Il existe donc, d'après les propriétés d'adjonction du foncteur cône (3.1.3), un unique morphisme :

$$(3.2.5.2) \quad J : c(p(f)) \rightarrow X[1] ,$$

tel que le diagramme :

$$(3.2.5.3) \quad \begin{array}{ccc} c(f) & \xrightarrow{p(p(f))} & c(p(f)) \\ \text{id}_{c(f)} \downarrow & & \downarrow J \\ c(f) & \xrightarrow{q(f)} & X[1] \end{array}$$

soit commutatif et que l'on ait $Ja(p(f)) = 0$ (3.1.2.4).

Proposition 3.2.6. a) *Le morphisme J est un homotopisme, i.e. est un isomorphisme à homotopie près.*

b) *Le diagramme :*

$$(3.2.6.1) \quad \begin{array}{ccc} c(p(f)) & \xrightarrow{q(p(f))} & Y[1] \\ J \downarrow & & \downarrow \text{id}_{Y[1]} \\ X[1] & \xrightarrow{f[1]} & Y[1] \end{array}$$

est anticommutatif à homotopie près.

3.2.7. Démonstration. Nous allons d'abord construire un morphisme $H : X[1] \rightarrow c(p(f))$. Il suffit pour cela de construire un morphisme entre les deux foncteurs que ces objets représentent. Soit W un objet de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$. Un morphisme de $c(p(f))$ dans W n'est autre que, tenant compte des propriétés d'adjonction du foncteur cône (3.1.3), un couple (u, a) , où $u : c(f) \rightarrow W$ est un morphisme de complexes et $a : 0 \rightsquigarrow up(f)$ est une homotopie. Utilisant encore une fois (3.1.3), on voit qu'un morphisme de $c(p(f))$ dans W est un triplet $(m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, b : 0 \rightsquigarrow mf)$. Assurons à ce triplet le diagramme :

$$(3.2.7.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\alpha} & W \end{array} \quad \alpha = b - a \star f ,$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

i.e. ((3.1.3) et (3.1.7)) un morphisme de $X[1]$ dans W . On a donc associé, fonctoriellement en W , à tout morphisme de $c(p(f))$ dans W un morphisme de $X[1]$ dans W , et par suite on a défini un morphisme $H : X[1] \rightarrow c(p(f))$. Pour prouver la partie *a*) de la proposition (3.2.6), il suffit de montrer que :

(3.2.7.2) *Le morphisme $JH : X[1] \rightarrow X[1]$ est l'identité.*

(3.2.7.3) *Le morphisme $HJ : c(p(f)) \rightarrow c(p(f))$ est homotope à l'identité.*

Pour prouver la partie *b*) de la proposition (3.2.6), il suffit de montrer de plus que :

(3.2.7.4) *Le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} X[1] & \xrightarrow{f[1]} & Y[1] \\ H \downarrow & & \downarrow \text{id}_{Y[1]} \\ c(p(f)) & \xrightarrow{q(p(f))} & Y[1] \end{array}$$

est anticommutatif.

3.2.8. Démonstration de l'assertion (3.2.7.2).

Montrons que le morphisme $JH : X[1] \rightarrow X[1]$ est l'identité. Il suffit pour cela de voir que le morphisme JH induit l'endomorphisme identique du foncteur représenté par $X[1]$. D'après (3.1.3) et (3.1.7), le foncteur :

$$W \longmapsto \mathbf{Hom}_{\mathbf{comp}(\mathcal{C})}(X[1], W)$$

n'est autre que le foncteur :

$$(3.2.8.1) \quad W \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\alpha} & W \end{array} \right\} .$$

D'autre part, d'après (3.2.7), l'objet $c(p(f))$ de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ représente le foncteur :

$$(3.2.8.2) \quad W \longmapsto \left\{ (m : Y \longrightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, b : 0 \rightsquigarrow mf) \right\} .$$

L'homomorphisme $J : c(p(f)) \rightarrow X[1]$ correspond, ainsi qu'on le vérifie immédiatement, au morphisme fonctoriel :

(3.2.8.3)

$$D = \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & W \end{array} \mapsto JD = (0 : Y \rightarrow W, 0 : 0 \rightsquigarrow 0, \alpha : 0 \rightsquigarrow 0).$$

Le morphisme $H : X[1] \rightarrow c(p(f))$ correspond par définition (3.2.7) au morphisme fonctoriel :

(3.2.8.4)

$$t = (m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, b : 0 \rightsquigarrow mf) \mapsto Ht = \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & W \end{array}, \alpha = b - a \star f.$$

Le composé de ces deux morphismes fonctoriels est bien l'identité, ce qui démontre l'assertion (3.2.7.2).

3.2.9. Démonstration de l'assertion (3.2.7.3).

D'après (3.2.8), le morphisme $HJ : c(p(f)) \rightarrow c(p(f))$ correspond au morphisme fonctoriel :

$$(3.2.9.1) \quad t = (m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, b : 0 \rightsquigarrow mf) \mapsto HJt = \\ = (0 : Y \rightarrow W, 0 : 0 \rightsquigarrow 0, b - a \star f : 0 \rightsquigarrow 0)$$

et par suite :

$$(3.2.9.2) \quad t - HJt = (m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, a \star f : 0 \rightsquigarrow mf) .$$

Pour prouver l'assertion (3.2.7.3), il suffit de montrer que tout triplet de la forme $(m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, a \star f : 0 \rightsquigarrow mf)$ correspond à un morphisme homotope à zéro de $c(p(f))$ dans W . Or un tel triplet définit, en utilisant (3.1.3), un morphisme :

$$(3.2.9.3) \quad v : c(p(f)) \rightarrow W \quad v = (m : Y \rightarrow W, a \star f : 0 \rightsquigarrow mf)$$

et une homotopie :

$$(3.2.9.4) \quad a : 0 \rightsquigarrow vp(f) = m ,$$

d'où un diagramme :

$$(3.2.9.5) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{p(f)} & c(f) \\ \downarrow & & \downarrow v \\ 0 & \xrightarrow{\text{---}}^a & W \end{array}$$

définissant par (3.1.3) le morphisme $n : c(p(f)) \rightarrow W$ associé au triplet $(m : Y \rightarrow W, a : 0 \rightsquigarrow m, a \star f : 0 \rightsquigarrow mf)$. Pour montrer que le morphisme n est homotope à zéro, il suffit (3.1.5) de montrer que le diagramme (3.2.9.5) est un morphisme homotope à zéro de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$ et, pour cela, il suffit de montrer qu'il existe une homotopie $\beta : 0 \rightsquigarrow v$ telle que $\beta \star p(f) = a$. Or le morphisme $v : c(f) \rightarrow W$ a pour composants :

$$(3.2.9.6) \quad v^i = (m^i, a^i f^{i+1}) : Y^i \oplus X^{i+1} \rightarrow W^i$$

et on vérifie immédiatement que l'homotopie β de composants :

$$(3.2.9.7) \quad \beta^i = (a^i, 0) : Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \rightarrow W^i$$

relie 0 à v et que $\beta \star p(f) = a$, ce qui achève la démonstration de l'assertion (3.2.7.3).

3.2.10. Démonstration de l'assertion (3.2.7.4).

L'objet $Y[1]$ représente le foncteur :

$$(3.2.10.1) \quad W \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\text{---}}^{\alpha} & W \end{array} \right\}$$

et le morphisme $f[1] : X[1] \rightarrow Y[1]$ représente le morphisme fonctoriel :

$$(3.2.10.2) \quad D = \left\{ \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\text{---}}^{\alpha} & W \end{array} \right\} \mapsto f[1]D = \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\text{---}}^{\alpha \star f} & W \end{array} \right\}.$$

De même, le morphisme $q(p(f)) : c(p(f)) \rightarrow Y[1]$ représente le morphisme fonctoriel :

(3.2.10.3)

$$D = \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\sim} & W \end{array} \longmapsto q(p(f))D = (0 : Y \rightarrow W, \alpha : 0 \rightsquigarrow 0, 0 : 0 \rightsquigarrow 0).$$

Par suite, en utilisant (3.2.8.4), pour démontrer (3.2.7.4), il suffit de remarquer que pour tout diagramme :

$$D = \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow \\ 0 & \xrightarrow{\sim} & W \end{array},$$

on a $Hq(p(f))D + f[1]D = 0$.

3.2.11. Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ deux morphismes de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$. Posons $gf = h$. On peut construire, avec ces données, deux diagrammes commutatifs :

$$(3.2.11.1) \quad D = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \text{id}_X & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{h} & Z \end{array}, \quad D' = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Z \\ \downarrow f & & \downarrow \text{id}_Z \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

que nous interpréterons comme des morphismes de $\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})$. D'où, en appliquant le foncteur cône, deux diagrammes :

$$(3.2.11.2) \quad \begin{array}{ccc} c(f) & \xrightarrow{c(D)} & c(h) \xrightarrow{c(D')} c(g) \\ & & \\ I = & \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Z \\ p(f) \downarrow & & \downarrow p(h) \\ c(f) & \xrightarrow{c(D)} & c(h) \end{array} & . \end{array}$$

Ce dernier diagramme est un carré commutatif (3.2.2.4) et peut donc être interprété comme un morphisme de $\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})$, d'où en appliquant encore une fois le foncteur cône, un morphisme :

$$(3.2.11.3) \quad c(I) : c(g) \longrightarrow c(c(D)) .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Proposition 3.2.12. a) Le morphisme $c(I) : c(g) \rightarrow c(c(D))$ est un homotopisme.

b) Le diagramme :

$$(3.2.12.1) \quad \begin{array}{ccc} & & c(g) \\ & \nearrow c(D') & \downarrow c(I) \\ c(h) & \xrightarrow{p(c(D))} & c(c(D)) \end{array}$$

est commutatif à homotopie près.

c) Le diagramme :

$$(3.2.12.2) \quad \begin{array}{ccc} c(g) & \xrightarrow{q(g)} & Y[1] \\ \downarrow c(I) & & \downarrow p(f)[1] \\ c(c(D)) & \xrightarrow{q(c(D))} & c(f)[1] \end{array}$$

est commutatif.

En effet, un calcul immédiat montre que le i -ème composant du morphisme $c(I)$ est :

$$(3.2.12.3) \quad c(I)^i = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \text{id} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : Z^i \oplus Y^{i+1} \rightarrow Z^i \oplus X^{i+1} \oplus Y^{i+1} \oplus X^{i+2} .$$

Le morphisme $u : c(c(D)) \rightarrow c(g)$ de composants :

$$(3.2.12.4) \quad u^i = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{i+1} & \text{id} & 0 \end{pmatrix} : Z^i \oplus X^{i+1} \oplus Y^{i+1} \oplus X^{i+2} \rightarrow Z^i \oplus Y^{i+1}$$

est un inverse de $c(I)$ à homotopie près, ce qui démontre la première assertion. Pour démontrer la deuxième assertion, il suffit de vérifier que le diagramme :

$$(3.2.12.5) \quad \begin{array}{ccc} & & c(g) \\ & \nearrow c(D') & \uparrow u \\ c(h) & \xrightarrow{p(c(D))} & c(c(D)) \end{array}$$

est commutatif, ce qui se fait en exhibant les composants. Enfin, d'après (3.2.2), les propriétés fonctorielles du morphisme $q(f)$ (3.2.2.2) impliquent que le carré (3.2.12.2) soit commutatif.

3.3. Propriétés des triangles distingués.

Définition 3.3.1. Un triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ sera dit *distingué* s'il existe un objet $X' \xrightarrow{f'} Y'$ de $\mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$ et un isomorphisme de triangles ((3.2.1.3) et (3.2.2.7)) :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ f \downarrow l & & g \downarrow l & & h \downarrow l & & l \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{\dot{p}(f')} & c(f') & \xrightarrow{\dot{q}(f')} & X'[1] \end{array} .$$

Proposition 3.3.2. (TRI) *Tout triangle de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ isomorphe à un triangle distingué est un triangle distingué. Pour tout objet X de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$, le triangle $X \xrightarrow{\mathsf{id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ est distingué. Tout morphisme $u : X \rightarrow Y$ de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ est contenu dans un triangle distingué $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.*

La première assertion est triviale. Pour démontrer la deuxième assertion, il suffit de montrer que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\mathsf{id}_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ \mathsf{id}_X \downarrow & & \mathsf{id}_X \downarrow & & \downarrow & & \mathsf{id}_{X[1]} \downarrow \\ X & \xrightarrow{\mathsf{id}_X} & X & \xrightarrow{\dot{p}(\mathsf{id}_X)} & c(\mathsf{id}_X) & \xrightarrow{\dot{q}(\mathsf{id}_X)} & X[1] \end{array}$$

est un isomorphisme de triangles de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Il suffit donc de montrer que $c(\mathsf{id}_X)$ est homotope à zéro. Or il résulte immédiatement de la définition des homotopies dans $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ (3.1.4) que tout morphisme de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ du type :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mathsf{id}_X} & X \\ \downarrow & & \downarrow g \\ 0 & \xrightarrow{a} & W \end{array}$$

est homotope à zéro. Les propriétés d'adjonction du foncteur cône (3.1.6) montrent alors que $c(\mathsf{id}_X)$ est homotope à zéro. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme

CATÉGORIES DÉRIVÉES

de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ dans la classe modulo homotopie de $u : X \rightarrow Y$. On a alors un objet de $\mathbf{Tr}_1(\mathcal{C}) : X \xrightarrow{f} Y$. Le triangle distingué :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X[1]$$

contient le morphisme u .

Proposition 3.3.3. (TRII) *Un triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ de $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ est distingué si et seulement si le triangle $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ est distingué.*

Supposons que le triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ soit distingué. Il est alors isomorphe à un triangle du type :

$$X' \xrightarrow{\dot{f}} Y' \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X'[1] ,$$

où $X' \xrightarrow{f} Y'$ est un objet de $\mathbf{Tr}_1(\mathcal{C})$. Il suffit donc de montrer que le triangle :

$$Y' \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X'[1] \xrightarrow{-\dot{f}[1]} Y'[1] ,$$

est distingué. Or d'après (3.2.6), le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} Y' & \xrightarrow{\dot{p}(f)} & c(f) & \xrightarrow{\dot{p}(p(f))} & c(p(f)) & \xrightarrow{\dot{q}(p(f))} & Y'[1] \\ \downarrow \mathbf{id}_{Y'} & & \downarrow \mathbf{id}_{c(f)} & & \downarrow j & & \downarrow \mathbf{id}_{Y'[1]} \\ Y' & \xrightarrow{\dot{p}(f)} & c(f) & \xrightarrow{\dot{q}(f)} & X'[1] & \xrightarrow{-\dot{f}[1]} & Y'[1] \end{array}$$

est un isomorphisme de triangles dans $\mathbf{K}(\mathcal{C})$. Supposons maintenant que le triangle $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ soit distingué. On en déduit par (3.2.4) que le triangle :

$$Y[-1] \xrightarrow{v[-1]} Z[-1] \xrightarrow{w[-1]} X \xrightarrow{u} Y$$

est distingué et, en appliquant deux fois l'argument précédent, que le triangle :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

est distingué, ce qui achève la démonstration.

Proposition 3.3.4. (TRIII) Soient :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1], \quad X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$$

deux triangles distingués de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ et :

$$(3.3.4.1) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u'} & Y' \\ m \downarrow & & \downarrow n \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

un carré commutatif de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Il existe un morphisme $r : Z' \rightarrow Z$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \\ m \downarrow & & n \downarrow & & r \downarrow & & \downarrow m[1] \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \end{array}$$

soit un morphisme de triangles.

Par définition, les triangles proposés sont isomorphes à des triangles :

$$V \xrightarrow{\dot{f}} W \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} V[1] ,$$

$$V' \xrightarrow{\dot{f}'} W' \xrightarrow{\dot{p}(f')} c(f') \xrightarrow{\dot{q}(f')} V'[1]$$

et, par suite, le carré (3.3.4.1) est isomorphe à un carré :

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{\dot{f}'} & W' \\ \dot{g} \downarrow & & \downarrow \dot{g}' \\ V & \xrightarrow{\dot{f}} & W \end{array} ,$$

où $g : V' \rightarrow V$ et $g' : W' \rightarrow W$ sont des morphismes de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$. Le carré de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{f'} & W' \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

est commutatif à homotopie près. Soit donc $a : fg \rightsquigarrow g'f'$ une homotopie. Le diagramme :

$$D = \begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{f'} & W' \\ \downarrow g & & \downarrow g' \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

\rightsquigarrow^a

est un morphisme de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. On en déduit par (3.2.2.7) que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} V' & \xrightarrow{\dot{f}'} & W' & \xrightarrow{\dot{p}(f')} & c(f') & \xrightarrow{\dot{q}(f')} & V'[1] \\ \downarrow \dot{g} & & \downarrow \dot{g}' & & \downarrow \dot{c}(D) & & \downarrow \dot{g}[1] \\ V & \xrightarrow{\dot{f}} & W & \xrightarrow{\dot{p}(f)} & c(f) & \xrightarrow{\dot{q}(f)} & V[1] \end{array}$$

est un morphisme de triangles dans $\mathsf{K}(\mathcal{C})$, d'où l'existence du morphisme $r : Z' \rightarrow Z$.

Proposition 3.3.5. (TRIV) Soit :

$$\begin{array}{ccccc} & & X_2 & & \\ & \nearrow u_3 & & \searrow u_1 & \\ X_1 & \xrightarrow{u_2} & X_3 & & \end{array}$$

un diagramme commutatif de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Il existe trois triangles distingués :

$$X_1 \xrightarrow{u_3} X_2 \xrightarrow{v_3} Z_3 \xrightarrow{w_3} X_1[1] \quad ,$$

$$X_2 \xrightarrow{u_1} X_3 \xrightarrow{v_1} Z_1 \xrightarrow{w_1} X_2[1] \quad ,$$

$$X_1 \xrightarrow{u_2} X_3 \xrightarrow{v_2} Z_2 \xrightarrow{w_2} X_1[1]$$

et deux morphismes :

$$m_1 : Z_3 \rightarrow Z_2 \quad ,$$

$$m_3 : Z_2 \rightarrow Z_1 \quad ,$$

tels que :

a) *Les diagrammes :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_1 & \xrightarrow{u_3} & X_2 & \xrightarrow{v_3} & Z_3 & \xrightarrow{w_3} & X_1[1] \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow u_1 & & \downarrow m_1 & & \downarrow \text{id} \\
 X_1 & \xrightarrow{u_2} & X_3 & \xrightarrow{v_2} & Z_2 & \xrightarrow{w_2} & X_1[1]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_1 & \xrightarrow{u_2} & X_3 & \xrightarrow{v_2} & Z_2 & \xrightarrow{w_2} & X_1[1] \\
 \downarrow u_3 & & \downarrow \text{id} & & \downarrow m_3 & & \downarrow u_3[1] \\
 X_2 & \xrightarrow{u_1} & X_3 & \xrightarrow{v_1} & Z_1 & \xrightarrow{w_1} & X_2[1]
 \end{array}$$

soient des morphismes de triangles.

b) *Le triangle :*

$$Z_3 \xrightarrow{m_1} Z_2 \xrightarrow{m_3} Z_1 \xrightarrow{v_3[1]w_1} Z_3[1]$$

soit distingué.

Soient $f : X_1 \rightarrow X_2$ (resp. $g : X_2 \rightarrow X_3$) un morphisme de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ qui soit dans la classe u_3 (resp. u_1). Posons $h = gf : X_1 \rightarrow X_3$. Le morphisme h est dans la classe u_3 . Pour démontrer la proposition, il suffit de prendre pour triangles distingués les triangles (3.2.2) :

$$X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X_1[1] ,$$

$$X_2 \xrightarrow{g} X_3 \xrightarrow{\dot{p}(g)} c(g) \xrightarrow{\dot{q}(g)} X_2[1] ,$$

$$X_1 \xrightarrow{h} X_3 \xrightarrow{\dot{p}(h)} c(h) \xrightarrow{\dot{q}(h)} X_1[1]$$

et pour morphismes, les morphismes :

$$c(D) : c(f) \longrightarrow c(h) , \quad c(D') : c(h) \longrightarrow c(g) ,$$

où D et D' sont les diagrammes :

$$D = \begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow g \\
 X_1 & \xrightarrow{h} & X_3
 \end{array} , \quad
 D' = \begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{h} & X_3 \\
 \downarrow f & & \downarrow \text{id} \\
 X_2 & \xrightarrow{g} & X_3
 \end{array} .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

En effet, la première assertion est une conséquence immédiate de (3.2.2) et, d'après la proposition (3.2.12), il existe un morphisme $c(I) : c(g) \rightarrow c(c(D))$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 c(f) & \xrightarrow{\dot{c}(D)} & c(h) & \xrightarrow{\dot{c}(D')} & c(g) & \xrightarrow{\dot{p}(f)[1]\dot{q}(g)} & c(f)[1] \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \dot{c}(I) & & \downarrow \text{id} \\
 c(f) & \xrightarrow{\dot{c}(D)} & c(h) & \xrightarrow{\dot{p}(c(D))} & c(c(D)) & \xrightarrow{\dot{q}(c(D))} & c(f)[1]
 \end{array}$$

soit un isomorphisme de triangles.

3.3.6. Soit $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{comp}(\mathcal{C})$ un foncteur. Désignons par $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$ la catégorie des suites de n morphismes composables de \mathcal{J} : les objets de $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$ sont les diagrammes de \mathcal{J} :

$$i_1 \xrightarrow{f_1} i_2 \xrightarrow{f_2} i_3 \dots \xrightarrow{f_n} i_{n+1} .$$

Soient (i_p, f_p) et (j_p, g_p) deux suites de n morphismes composables de \mathcal{J} . Un morphisme, dans $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$, de (i_p, f_p) dans (j_p, g_p) est un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 i_1 & \xrightarrow{f_1} & i_2 & \xrightarrow{f_2} & i_3 & \xrightarrow{f_3} & \dots & \xrightarrow{f_n} & i_{n+1} \\
 \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & & & \downarrow h_{n+1} \\
 j_1 & \xrightarrow{g_1} & j_2 & \xrightarrow{g_2} & j_3 & \xrightarrow{g_3} & \dots & \xrightarrow{g_n} & j_{n+1}
 \end{array} .$$

La composition des morphismes se définit de la manière évidente. On désigne par $\mathbf{Fl}_n(\mathcal{J})$ l'ensemble des objets de $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$. Soit $i \xrightarrow{f} j$ un objet de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J})$. En appliquant le foncteur F , on obtient un morphisme de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$:

$$F(i) \xrightarrow{F(f)} F(j) ,$$

qu'on peut interpréter comme un objet de $\mathbf{Tr}_1(\mathcal{C})$, d'où, en appliquant le foncteur cône, un foncteur $S : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C})$:

$$(3.3.6.1) \quad S(f) = S(i \xrightarrow{f} j) = c(F(i) \xrightarrow{F(f)} F(j)) .$$

Soit maintenant $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$ un objet de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$. On peut lui faire correspondre le diagramme suivant de $\mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$:

$$(3.3.6.2) \quad \begin{array}{ccc} F(i) & \xrightarrow{F(f)} & F(j) \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow F(g) \\ F(i) & \xrightarrow{F(gf)} & F(k) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ F(j) & \xrightarrow{F(g)} & F(k) \end{array} .$$

Posons :

$$(3.3.6.3) \quad \begin{aligned} \delta(f, g) : S(g) &\rightarrow S(f)[1] & , \\ \delta(f, g) = \dot{p}(F(f)) &[1]\dot{q}(F(g)) & . \end{aligned}$$

On obtient, en appliquant le foncteur cône au diagramme (3.3.6.2), un foncteur de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ dans la catégorie des triangles de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$:

$$(3.3.6.4) \quad (i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k) \quad \longmapsto \quad S(f) \rightarrow S(gf) \rightarrow S(g) \xrightarrow{\delta(f,g)} S(f)[1] .$$

La fin de la démonstration de (3.3.5) montre que le triangle :

$$S(f) \rightarrow S(gf) \rightarrow S(g) \xrightarrow{\delta(f,g)} S(f)[1]$$

est un triangle distingué.

3.4. Propriétés fonctorielles des triangles distingués.

Proposition 3.4.1. *Soient $\iota_1 : \mathsf{K}(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C}^\circ)$ l'isomorphisme canonique (2.5.13) et $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ un triangle distingué de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Le triangle de $\mathsf{K}(\mathcal{C}^\circ)$:*

$$(\iota_1 X)[-1] \xrightarrow{\iota_1 w} \iota_1 Z \xrightarrow{\iota_1 v} \iota_1 Y \xrightarrow{-\iota_1 u} \iota_1 X$$

est distingué.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

On peut toujours supposer (3.3.1) que le triangle proposé est de la forme :

$$X \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{\dot{p}(f)} c(f) \xrightarrow{\dot{q}(f)} X[1] \quad ,$$

où $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$. Il s'agit alors de montrer que le triangle :

$$(\iota_1 X)[-1] \xrightarrow{\iota_1 \dot{q}(f)} \iota_1 c(f) \xrightarrow{\iota_1 \dot{p}(f)} \iota_1 Y \xrightarrow{-(\iota_1 f)} \iota_1 X$$

est distingué ($\iota_1 f$ est l'image par $\iota_1 : \mathbf{comp}(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \mathbf{comp}(\mathcal{C}^\circ)$ du morphisme f). Il résulte immédiatement des définitions de ι_1 (2.4.1) et du foncteur cône (3.1.2) que les composants et les différentielles du complexe $\iota_1 c(f)$ sont :

$$\iota_1 c(f)^i = (\iota_1 X)^{i-1} \oplus (\iota_1 Y)^i \quad ,$$

$$(3.4.1.1) \quad d_{\iota_1 c(f)}^i = \begin{pmatrix} -d_{\iota_1 X}^{i-1} & (\iota_1 f)^i \\ 0 & d_{\iota_1 Y}^i \end{pmatrix} .$$

Par suite, on a l'égalité :

$$\iota_1 c(f) = c(-\iota_1 f)[-1]$$

et on vérifie que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} (\iota_1 X)[-1] & \xrightarrow{\iota_1 \dot{q}(f)} & \iota_1 c(f) & \xrightarrow{\iota_1 \dot{p}(f)} & \iota_1 Y & \xrightarrow{-\iota_1 f} & \iota_1 X \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ (\iota_1 X)[-1] & \xrightarrow{\dot{p}(-\iota_1 f)[-1]} & c(-\iota_1 f)[-1] & \xrightarrow{\dot{q}(-\iota_1 f)[-1]} & \iota_1 Y & \xrightarrow{-\iota_1 f} & \iota_1 X \end{array}$$

est commutatif. Il suffit alors d'appliquer (3.3.3) pourachever la démonstration.

3.4.2. Soit $F : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur multiadditif. Supposons, pour fixer les idées, que les produits dénombrables soient représentables dans \mathcal{C} . Soient alors :

$$\mathsf{K}_\Pi F : \prod_{i \in [n]} \mathsf{K}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C})$$

la Π -extension de F aux complexes à homotopie près et :

$$p_i : \mathsf{K}_\Pi F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_n) \rightarrow \mathsf{K}_\Pi F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)[1]$$

les isomorphismes fonctoriels canoniques.

Soient $j \in [n]$ et pour tout $i \neq j$, X_i un objet de $\mathsf{K}(\mathcal{C}_i)$. Désignons par $G : \mathsf{K}(\mathcal{C}_j) \rightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C})$ le foncteur :

$$(3.4.2.1) \quad X \longmapsto G(X) = \mathsf{K}_{\Pi} F(X_1, \dots, X, \dots, X_n) \quad ,$$

et par $m : G(X[1]) \xrightarrow{\sim} G(X)[1]$ l'isomorphisme fonctoriel déduit de p_j .

Proposition 3.4.3. *Pour tout triangle distingué :*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

de $\mathsf{K}(\mathcal{C}_j)$, le triangle de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$:

$$G(X) \xrightarrow{G(u)} G(Y) \xrightarrow{G(v)} G(Z) \xrightarrow{mG(w)} G(X)[1]$$

est distingué.

On peut, tout d'abord, supposer que le triangle distingué de $\mathsf{K}(\mathcal{C}_j)$ est de la forme (3.3.1) :

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p(f)} c(f) \xrightarrow{q(f)} X[1] \quad ,$$

où $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de $\mathbf{comp}(\mathcal{C}_j)$. Désignons par :

$$H : \mathbf{comp}(\mathcal{C}_j) \longrightarrow \mathbf{comp}(\mathcal{C})$$

le foncteur :

$$X \longmapsto H(X) = \mathbf{comp}_{\Pi} F(X_1, \dots, X, \dots, X_n) \quad ,$$

et par $m : H(X[1]) \xrightarrow{\sim} H(X)[1]$ l'isomorphisme fonctoriel de commutation aux translations dans la direction j . Le foncteur (G, m) s'obtient à partir du foncteur (H, m) en passant aux complexes à homotopie près. Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer qu'il existe un isomorphisme de complexes dans $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$:

$$J : H(c(f)) \xrightarrow{\sim} c(H(f))$$

tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$(3.4.3.1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} H(X) & \xrightarrow{H(f)} & H(Y) & \xrightarrow{H(p(f))} & H(c(f)) & \xrightarrow{H(q(f))} & H(X[1]) \\ \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & J \downarrow & & m \downarrow \\ H(X) & \xrightarrow{H(f)} & H(Y) & \xrightarrow{p(H(f))} & c(H(f)) & \xrightarrow{q(H(f))} & H(X)[1] \end{array} \quad .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Pour tout complexe X , désignons par \overline{X} le complexe obtenu en gardant les composants de X et en annulant les différentielles. Il résulte immédiatement de la définition de H qu'on a l'égalité $\overline{H(X)} = \overline{H(\overline{X})}$. De même, pour tout morphisme de complexes $f : X \rightarrow Y$, désignons par $\overline{f} : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ le morphisme obtenu en conservant les composants de f . Il résulte alors de la définition du foncteur cône que $\overline{c(f)} = \overline{Y} \oplus \overline{X[1]}$, que le morphisme $\overline{p(f)} : \overline{Y} \rightarrow \overline{c(f)}$ est la première injection et que le morphisme $\overline{q(f)} : \overline{c(f)} \rightarrow \overline{X[1]}$ est la deuxième projection. Le foncteur H et le foncteur “ $\overline{}$ ” étant additifs, on en déduit que $\overline{H(c(f))} = \overline{H(Y)} \oplus \overline{H(X[1])}$, que $\overline{H(p(f))} : \overline{H(Y)} \rightarrow \overline{H(c(f))}$ est la première injection et que $\overline{H(q(f))} : \overline{H(c(f))} \rightarrow \overline{H(X[1])}$ est la deuxième projection. Il en résulte que :

$$H(c(f))^l = H(Y)^l \oplus H(X[1])^l \quad ,$$

$$(3.4.3.2) \quad d_{H(c(f))}^l = \begin{pmatrix} d_{H(Y)}^l & \Phi^l \\ 0 & d_{H(X[1])}^l \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\Phi^l : H(X[1])^l \rightarrow H(Y)^{l+1} \quad .$$

La différentielle de $H(c(f))$ s'obtient sous cette forme en exprimant simplement que $H(p(f))$ et $H(q(f))$ sont des morphismes de complexes. Pour calculer Φ^l , il faut revenir à la définition du foncteur H et, par suite, à la définition du foncteur complexe simple associé (2.2.2.5). On a :

$$(3.4.3.3) \quad \begin{aligned} H(X[1])^l &= \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum_i l_i = l}} F(X_1^{l_1}, \dots, X^{l_j+1}, \dots, X_n^{l_n}) \quad , \\ H(Y)^{l+1} &= \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum_i l_i = l}} F(X_1^{l_1}, \dots, Y^{l_j+1}, \dots, X_n^{l_n}) \quad , \\ \Phi^l &= \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum_i l_i = l}} \varepsilon(\sigma, j) F(X_1^{l_1}, \dots, f^{l_j+1}, \dots, X_n^{l_n}) \quad . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a (définition du foncteur cône) :

$$c(H(f))^l = H(Y)^l \oplus (H(X)[1])^l ,$$

$$(3.4.3.4) \quad d_{c(H(f))}^l = \begin{pmatrix} d_{H(Y)}^l & H(f)^{l+1} \\ 0 & d_{H(X)[1]}^l \end{pmatrix} ,$$

où le morphisme $H(f)$ est défini par (2.4.2.6), (2.4.2.3) et (2.2.2.6) :

$$(3.4.3.5) \quad H(f)^{l+1} = \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum l_i = l}} F(X_1^{l_1}, \dots, f^{l_j+1}, \dots, X_n^{l_n}) .$$

Posons alors :

$$(3.4.3.6) \quad J^l : H(Y)^l \oplus H(X[1])^l \longrightarrow H(Y)^l \oplus (H(X)[1])^l ,$$

$$J^l = \begin{pmatrix} \text{id}_{H(Y)^l} & 0 \\ 0 & \Psi^l \end{pmatrix} ,$$

$$\Psi^l = \prod_{\substack{\sigma = \sum l_i e_i \\ \sum l_i = l}} \varepsilon(\sigma, j) \text{id}_{F(X_1^{l_1}, \dots, X_j^{l_j+1}, \dots, X_n^{l_n})} .$$

Pour vérifier que les J^l sont les composants d'un morphisme de complexes, il suffit de vérifier que :

$$(3.4.3.7) \quad \Phi^l = H(f)^{l+1} \Psi^l ,$$

$$\Psi^{l+1} d_{H(X[1])}^l = d_{H(X)[1]}^l \Psi^l .$$

Pour vérifier que le diagramme (3.4.3.1) est commutatif, il suffit de vérifier que :

$$(3.4.3.8) \quad \Psi^l = m^l .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

La première égalité de (3.4.3.7) est évidente ((3.4.3.3) et (3.4.3.5)). La deuxième égalité de (3.4.3.7) résulte de (3.4.3.8). Pour vérifier (3.4.3.8), il suffit de se reporter à la définition du morphisme m (2.3.2.1).

3.4.4. Lorsque les sommes directes dénombrables sont représentables dans \mathcal{C} , on a une proposition analogue à la proposition (3.4.3) pour le foncteur $K_{\Sigma}F$. La démonstration s'obtient en remplaçant dans la démonstration de la proposition (3.4.3) les produits par des sommes.

Appendice : Commentaires sur le choix des signes.

Le foncteur cône est déterminé à isomorphisme unique près par ses propriétés d'adjonction (3.1.3). Pour pouvoir associer facilement à un morphisme de $\mathbf{tr}_1(\mathcal{C})$ un triangle de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$, nous avons choisi pour foncteur de translation le foncteur “cône du morphisme $X \rightarrow 0$ ” ((3.1.7) et (3.2.2.7)), *i.e.* décalage des degrés et changement de signe de la différentielle.

Soit $F : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur multiadditif. La catégorie $\prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i)$ est munie naturellement d'une structure de $\mathbb{Z}[n]$ -catégorie. Si on veut que le foncteur $F^{[n]} : \prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$ soit un $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur strict, on est conduit au choix des conventions que nous avons fait pour les translations : décalage des degrés dans une direction et changement de signe de la différentielle correspondante.

Nous avons pris les conventions de [1] pour le choix du foncteur complexe simple associé (à ceci près que, dans nos complexes multiples, les différentielles commutent entre elles). Ceci permet de définir le foncteur $\mathsf{K}_\Pi F : \prod_i \mathsf{K}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C})$. Il se trouve alors que $\mathsf{K}_\Pi F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_n)$ est différent de $\mathsf{K}_\Pi F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)[1]$. Pour pouvoir néanmoins affirmer que le foncteur $\mathsf{K}_\Pi F$ transforme les triangles distingués en triangles distingués, on est amené à définir les isomorphismes :

$$p_i : \mathsf{K}_\Pi F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_n) \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}_\Pi F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)[1]$$

(démonstration de (3.4.3)).

Il se trouve alors que, pour $i \neq j$, on a des diagrammes anticommutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{K}_\Pi F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_j[1], \dots) & \xrightarrow{p_j} & \mathsf{K}_\Pi F(X_1, \dots, X_i[1], \dots, X_j, \dots)[1] \\ p_i \downarrow & & \downarrow p_i \\ \mathsf{K}_\Pi F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j[1], \dots)[1] & \xrightarrow{p_j} & \mathsf{K}_\Pi F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots)[2] . \end{array}$$

On a alors montré (1.5.2) comment prolonger de façon cohérente ces isomorphismes en isomorphismes $p(\sigma)$ définis pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$. Il intervient ici un choix arbitraire. Il consiste à choisir un cocycle dans une classe de cohomologie qui elle est bien déterminée : la classe de Koszul (1.6.3). Pour nous conformer aux règles communément admises (par exemple [1]), nous avons choisi de prendre dans tous les cas le cocycle de Koszul (1.6.6).

Chapitre II

Catégories triangulées.

1. Définitions et premières propriétés.

1.1. Définition des catégories triangulées.

Définition 1.1.1. Une *catégorie triangulée* \mathcal{D} est une \mathbb{Z} -catégorie additive stricte (chap. I, 1.5.11) munie d'un ensemble de triangles (chap. I, 3.2.1), appelés *triangles distingués*, possédant les propriétés suivantes :

TRI : Tout triangle de \mathcal{D} isomorphe à un triangle distingué est un triangle distingué. Pour tout objet X de \mathcal{D} , le triangle $X \xrightarrow{\text{id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ est distingué. Tout morphisme $u : X \rightarrow Y$ de \mathcal{D} est contenu dans un triangle distingué $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

TRII : Un triangle de $\mathcal{D} : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ est distingué si et seulement si le triangle $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ est distingué.

TRIII : Pour tout couple de triangles distingués :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] ,$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$$

et tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array} ,$$

il existe un morphisme $h : Z \rightarrow Z'$ tel que (f, g, h) soit un morphisme de triangle, i.e. tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & f[1] \downarrow \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array} .$$

TRIV : Pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & X_2 & & \\ & \nearrow u_3 & & \searrow u_1 & \\ X_1 & \xrightarrow{u_2} & X_3 & & \end{array}$$

et tout triplet de triangles distingués :

$$\begin{aligned} X_1 &\xrightarrow{u_3} X_2 \xrightarrow{v_3} Z_3 \xrightarrow{w_3} X_1[1] , \\ X_2 &\xrightarrow{u_1} X_3 \xrightarrow{v_1} Z_1 \xrightarrow{w_1} X_2[1] , \\ X_1 &\xrightarrow{u_2} X_3 \xrightarrow{v_2} Z_2 \xrightarrow{w_2} X_1[1] , \end{aligned}$$

il existe deux morphismes :

$$m_1 : Z_3 \longrightarrow Z_2 ,$$

$$m_3 : Z_2 \longrightarrow Z_1 ,$$

tels que $(\text{id}_{X_1}, u_1, m_1)$ et $(u_3, \text{id}_{X_3}, m_3)$ soient des morphismes de triangles, et tels que le triangle :

$$Z_3 \xrightarrow{m_1} Z_2 \xrightarrow{m_3} Z_1 \xrightarrow{v_3[1]w_1} Z_3[1]$$

soit distingué.

Remarque 1.1.2. Soit (X, Y, Z, u, v, w) un triangle distingué. Il résulte de TRII que dans la suite illimitée :

$$\cdots \longrightarrow X[n] \xrightarrow{(-1)^n u[n]} Y[n] \xrightarrow{(-1)^n v[n]} Z[n] \xrightarrow{(-1)^n w[n]} X[n+1] \longrightarrow \cdots$$

trois morphismes consécutifs forment un triangle distingué. Les automorphismes de $\mathcal{D} : X \longmapsto X[n]$ sont appelés *automorphismes de translation*.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Définition 1.1.3. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux catégories triangulées. Un *foncteur exact* de \mathcal{D} dans \mathcal{D}' est un \mathbb{Z} -foncteur (non nécessairement strict) (chap. I, 1.2.4) $(F, p) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ tel que, pour tout triangle distingué :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

de \mathcal{D} , le triangle :

$$FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{p(X)Fw} (FX)[1]$$

soit distingué (1.1.4.2).

Définition 1.1.4. Soient \mathcal{D}_i , $1 \leq i \leq n$ et \mathcal{D} , $n+1$ catégories triangulées. Un *foncteur multi-exact* de $\prod_i \mathcal{D}_i$ dans \mathcal{D} est un \mathbb{Z}^n -foncteur tordu (chap. I, 1.4.4) $(F, p) : \prod_i \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{D}$ tel que, pour toute famille d'objets X_i appartenant respectivement aux catégories \mathcal{D}_i , $i \neq j$, le \mathbb{Z} -foncteur :

$$X \longmapsto F(X_1, \dots, X, \dots, X_n) : \mathcal{D}_j \rightarrow \mathcal{D}$$

soit un foncteur exact.

1.1.4.1. Dans la définition (1.1.4), la catégorie $\prod_i \mathcal{D}_i$ est munie de sa \mathbb{Z}^n -structure canonique et le groupe \mathbb{Z}^n opère sur la catégorie \mathcal{D} par l'intermédiaire de l'homomorphisme $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, somme des coordonnées (chap. I, 1.6.6).

1.1.4.2. Conformément à la règle des signes I (chap. I, 1.6.6), les foncteurs multi-exacts seront, sauf mention expresse du contraire, tordus par le cocycle de Koszul relatif à la base canonique e_1, \dots, e_n de \mathbb{Z}^n (chap. I, 1.6.4). Ceci implique en particulier que les foncteurs exacts de \mathcal{D} dans \mathcal{D}' sont tordus par le cocycle trivial.

Définition 1.1.5. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée et \mathcal{A} une catégorie abélienne. Un foncteur $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ est appelé *foncteur cohomologique* si pour tout triangle distingué :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

le diagramme :

$$HX \xrightarrow{Hu} HY \xrightarrow{Hv} HZ \xrightarrow{Hw} H(X[1])$$

est une suite exacte de \mathcal{A} .

On montrera (1.2.7) que les foncteurs cohomologiques sont additifs et que les foncteurs multi-exacts sont multi-additifs.

Soit $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur cohomologique. On utilise le plus souvent la notation $H^0(X) = H(X)$, $H^n(X) = H(X[n])$. En utilisant l'axiome TRII, on voit qu'un foncteur cohomologique associe à tout triangle distingué $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ une suite exacte longue :

(1.1.5.1)

$$\cdots \rightarrow H^{-1}(Z) \xrightarrow{H^{-1}(-w)} H^0(X) \xrightarrow{H^0(u)} H^0(Y) \xrightarrow{H^0(v)} H^0(Z) \xrightarrow{H^0(w)} \cdots$$

1.1.6. Soit \mathcal{D} une catégorie triangulée. On emploie le plus souvent la terminologie suivante : un triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ de \mathcal{D} est dit *anti-distingué* si le triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{-w} X[1]$ est distingué. Un \mathbb{Z} -foncteur d'une catégorie triangulée \mathcal{D}' dans \mathcal{D} est dit *antieract* s'il transforme les triangles distingués de \mathcal{D}' en triangles antidistingués de \mathcal{D} . Le plus souvent, pour désigner un foncteur exact de \mathcal{D}' dans \mathcal{D} , on omet de faire figurer dans la notation les isomorphismes de commutation aux translations.

1.1.7. Soient \mathcal{C} une \mathbb{Z} -catégorie stricte (chap. I, 1.2.2) et :

$$X \longmapsto X[n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

les foncteurs de translation de \mathcal{C} . Soit \mathcal{C}° la \mathbb{Z} -catégorie opposée (chap. I, 1.3.9). Pour tout morphisme u de \mathcal{C} , notons $((u))$ le morphisme correspondant de \mathcal{C}° . Cette notation est abusive car l'ensemble des objets et l'ensemble des morphismes de \mathcal{C}° sont égaux respectivement à l'ensemble des objets et l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} . Désignons par :

$$X \longmapsto X[[n]], \quad n \in \mathbb{Z},$$

les foncteurs de translations de \mathcal{C}° . Rappelons qu'on a, pour tout objet X de \mathcal{C} et tout entier $n \in \mathbb{Z}$ (chap. I, 1.3.9) :

$$X[-n] = X[[n]].$$

On appelle *catégorie triangulée opposée* à une catégorie triangulée \mathcal{D} la \mathbb{Z} -catégorie stricte \mathcal{D}° opposée à la catégorie \mathcal{D} (chap. I, 1.3.9) munie de l'ensemble de triangles distingués suivant. Un triangle de \mathcal{D}° :

$$X[[-1]] \xrightarrow{((w))} Z \xrightarrow{((v))} Y \xrightarrow{((u))} X$$

est distingué si et seulement si le triangle correspondant de la catégorie \mathcal{D} :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1],$$

est *antidistingué*. On démontre aisément que la famille de triangles de \mathcal{D}° ainsi définie vérifie les axiomes des catégories triangulées.

1.2. Premières propriétés des catégories triangulées.

Proposition 1.2.1. *Soit \mathcal{D} une catégorie triangulée. Pour tout objet X de \mathcal{D} , les foncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \cdot)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, X)$ sont des foncteurs cohomologiques à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.*

Il suffit tout d'abord de montrer que le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \cdot)$ est un foncteur cohomologique. L'autre assertion s'obtiendra alors en passant à la catégorie opposée \mathcal{D}° (1.1.7). Soit donc $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$ un triangle distingué. Il suffit de montrer que dans le diagramme :

(1.2.1.1)

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, X') \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, u')} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y') \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, v')} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Z') \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, w')} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, X'[1])$$

on a : $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, v') \circ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, u') = 0$ et que ce diagramme est exact en $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y')$. En effet, l'axiome TRII permettra alors d'obtenir le même résultat en $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Z')$. Soit donc $f : X \rightarrow X'$. D'après TRI, le triangle $X \xrightarrow{\text{id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ est distingué et d'après TRII et TRIII, il existe un morphisme $g : X \rightarrow Y'$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$(1.2.1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array} .$$

On en déduit que $u'f = g$ et que $v'u'f = v'g = 0$, ce qui démontre que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, v') \circ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, u') = 0$. Soit maintenant $g : X \rightarrow Y'$ un morphisme tel que $v'g = 0$. D'après TRII et TRIII, il existe un morphisme $f : X \rightarrow X'$ tel que le diagramme (1.2.1.2) soit commutatif. On en déduit que $g = u'f$ et que par conséquent la suite (1.2.1.1) est exacte en $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y')$.

Corollaire 1.2.2. *Dans un triangle distingué $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$, le composé de deux morphismes consécutifs est nul.*

En vertu de TRII, il suffit de montrer que $v'u' = 0$. Pour cela, il suffit de prendre $X = X'$ dans la suite exacte (1.2.1.1) et de considérer les images successives de $\text{id}_{X'} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X', X')$.

Corollaire 1.2.3. *Soient (X, Y, Z, u, v, w) et (X', Y', Z', u', v', w') deux triangles distingués de \mathcal{D} et (f_1, f_2, f_3) un morphisme de triangles. Si deux des f_i , $1 \leq i \leq 3$, sont des isomorphismes, le troisième l'est aussi.*

Supposons, pour fixer les idées, que $f_1 : X \rightarrow X'$ et $f_2 : Y \rightarrow Y'$ soient des isomorphismes. Pour tout objet W de \mathcal{D} , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Y) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Z) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X[1]) \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, f_1) & & \downarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, f_2) & & \downarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, f_3) \\ \cdots & \rightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X') & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Y') & \longrightarrow & \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Z') \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X'[1]) \rightarrow \cdots , \end{array}$$

où les lignes sont exactes. On en déduit, par le lemme des cinq, que $\mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, f_3)$ est un isomorphisme pour tout W , et par suite que f_3 est un isomorphisme. Les deux autres assertions du corollaire se déduisent de celle-ci en utilisant l'axiome TRII.

Corollaire 1.2.4. *Soient $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ et $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X[1]$ deux triangles distingués. Il existe un isomorphisme $f : Z \xrightarrow{\sim} Z'$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :*

$$(1.2.4.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \swarrow v & \downarrow f & \searrow w & \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v'} & Z' \\ & \searrow v' & \downarrow f & \swarrow w' & \\ & & X[1] & & \end{array}$$

En effet, d'après l'axiome TRIII, il existe un morphisme $f : Z \rightarrow Z'$ tel que le diagramme (1.2.4.1) soit commutatif. D'après (1.2.3), ce morphisme est un isomorphisme.

Le corollaire (1.2.4) montre donc que les triangles distingués contenant un morphisme donné sont essentiellement uniques : ils sont déterminés à isomorphisme près. Mais il convient de noter que cet isomorphisme n'est pas unique. Nous préciserons ce point en (1.2.12).

Corollaire 1.2.5. *La somme directe de deux triangles distingués est un triangle distingué.*

Soient :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] ,$$

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

deux triangles distingués et soit de plus :

$$X \oplus X' \xrightarrow{u \oplus u'} Y \oplus Y' \xrightarrow{m} L \xrightarrow{n} (X \oplus X')[1]$$

un triangle distingué contenant le morphisme $u \oplus u'$ (TRI). Les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ \left(\begin{array}{c} \text{id}_X \\ 0 \end{array} \right) \downarrow & & \downarrow \left(\begin{array}{c} \text{id}_Y \\ 0 \end{array} \right) \\ X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u'} & Y' \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \text{id}_{X'} \end{array} \right) \downarrow & & \downarrow \left(\begin{array}{c} 0 \\ \text{id}_{Y'} \end{array} \right) \\ X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' \end{array}$$

sont commutatifs et, par suite, s'insèrent en vertu de (TRIII) dans des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \left(\begin{array}{c} \text{id}_X \\ 0 \end{array} \right) \downarrow & & \downarrow \left(\begin{array}{c} \text{id}_Y \\ 0 \end{array} \right) & & \downarrow f & & \downarrow \left(\begin{array}{c} \text{id}_{X[1]} \\ 0 \end{array} \right) \\ X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{m} & L & \xrightarrow{n} & (X \oplus X')[1] \end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \text{id}_{X'} \end{array} \right) \downarrow & & \downarrow \left(\begin{array}{c} 0 \\ \text{id}_{Y'} \end{array} \right) & & \downarrow f' & & \downarrow \left(\begin{array}{c} 0 \\ \text{id}_{X'[1]} \end{array} \right) \\ X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{m} & L & \xrightarrow{n} & (X \oplus X')[1] \end{array}.$$

On en déduit que le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{v \oplus v'} & Z \oplus Z' & \xrightarrow{w \oplus w'} & (X \oplus X')[1] \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & \downarrow (f, f') & & \downarrow \text{id} \\
 X \oplus X' & \xrightarrow{u \oplus u'} & Y \oplus Y' & \xrightarrow{m} & L & \xrightarrow{n} & (X \oplus X')[1]
 \end{array} .$$

Pour démontrer le corollaire, il suffit de montrer que le morphisme :

$$(f, f') : Z \oplus Z' \longrightarrow L$$

est un isomorphisme. Il suffit donc de montrer que, pour tout objet M , le morphisme :

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(M, (f, f'))$$

est un isomorphisme de groupes abéliens; ceci résulte immédiatement de (1.2.1) et du lemme des cinq.

Corollaire 1.2.6. *Soit $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ un triangle distingué de \mathcal{D} tel que $w = 0$. Il existe alors une section $s : Z \rightarrow Y$ du morphisme v . Toute section $s : Z \rightarrow Y$ définit un isomorphisme :*

$$X \oplus Z \xrightarrow[\sim]{(u, s)} Y .$$

Réciproquement, tout triangle du type :

$$\begin{array}{ccccc}
 (1.2.6.1) & X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}} & X \oplus Z & \xrightarrow{(0, \text{id})} Z \xrightarrow{0} X[1]
 \end{array}$$

est distingué.

La troisième assertion résulte immédiatement de TRI, de TRII et de (1.2.5). Démontrons la première assertion. Il résulte de (1.2.1) que, pour tout W , la suite :

$$(1.2.6.2) \quad 0 \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Y) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Z) \rightarrow 0$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

est exacte. En prenant $W = Z$, on voit que l'application identique $\text{id}_Z \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, Z)$ provient d'une application $s : Z \rightarrow Y$, d'où l'existence de la section. Cette section permet de construire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & \left(\begin{array}{c} \text{id} \\ 0 \end{array}\right) & & (0, \text{id}) & \\ X & \xrightarrow{\quad} & X \oplus Z & \xrightarrow{\quad} & Z \\ \text{id} \downarrow & & (u, s) \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z \end{array} .$$

En appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, \cdot)$, l'exactitude de la suite (1.2.6.2) et le lemme des cinq entraînent que le morphisme :

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, (u, s)) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, X \oplus Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, Y)$$

est un isomorphisme. Par suite, le morphisme (u, s) est un isomorphisme.

Remarque 1.2.7. Le corollaire (1.2.6) permet de montrer que tout foncteur exact $\mathcal{D}' \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ est additif. Tout d'abord, le triangle $0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$ est distingué dans \mathcal{D}' ; par suite, le triangle :

$$F(0) \xrightarrow{\text{id}_{F(0)}} F(0) \xrightarrow{\text{id}_{F(0)}} F(0) \rightarrow F(0)[1]$$

est distingué dans \mathcal{D} . On déduit alors de (1.2.2) que $F(0) = 0$. En appliquant le foncteur F à des triangles distingués du type (1.2.6.1) et en appliquant (1.2.6), on en déduit que F est additif. Un raisonnement analogue montre que tout foncteur cohomologique est additif.

Définition 1.2.8. Une *décomposition* d'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ d'une catégorie additive est un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow l & & \downarrow l \\ Z \oplus W & \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} 0 & \text{id}_W \\ 0 & 0 \end{array}\right)} & W \oplus Z' \end{array} .$$

Un morphisme est dit *décomposable* s'il admet une décomposition. Un *scindage* d'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme $g : Y \rightarrow X$ tel que

$fgf = f$ et $gfg = g$. Un morphisme est dit *scindable* s'il possède un scindage. Les morphismes décomposables sont scindables. La réciproque n'est pas nécessairement vraie (exemple : catégorie des modules libres sur un anneau de Dedekind non principal). Une catégorie additive est dite *décomposable* si tous les morphismes de cette catégorie sont décomposables. Une catégorie décomposable est abélienne.

Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme d'une catégorie triangulée \mathcal{D} et soit :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow l & & \downarrow l \\ Z \oplus W & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id}_W \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & W \oplus Z' \end{array}$$

une décomposition de f . Tout triangle distingué contenant f est isomorphe au triangle :

$$Z \oplus W \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id}_W \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} W \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{Z'} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Z' \oplus Z[1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{Z[1]} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} Z[1] \oplus W[1] .$$

Ceci résulte immédiatement de (1.2.4), de (1.2.5) et des axiomes TRI et TRII.

Proposition 1.2.9. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{D} . Considérons les propriétés suivantes du morphisme f :

- i) Le morphisme f admet un noyau.
- ii) Le morphisme f admet un conoyau.
- iii) Le morphisme f est décomposable.
- iv) Le morphisme f est scindable.

On a alors les implications :

$$\text{i)} \iff \text{ii)} \iff \text{iii)} \implies \text{iv)} .$$

Lorsque les produits dénombrables ou bien lorsque les sommes dénombrables sont représentables dans \mathcal{D} , les propriétés i), ii), iii) et iv) sont équivalentes.

Tout d'abord, on a évidemment les implications $\text{iii)} \implies \text{i)}$, $\text{iii)} \implies \text{ii)}$, $\text{iii)} \implies \text{iv)}$. L'implication $\text{i)} \implies \text{iii)}$ est équivalente à l'implication

$ii) \Rightarrow iii)$ pour la catégorie opposée à \mathcal{D} . L'implication $i) \Rightarrow iii)$ pour toute catégorie triangulée est donc équivalente à l'implication $ii) \Rightarrow iii)$ pour toute catégorie triangulée. Pour démontrer les implications :

$$i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii) \Rightarrow iv) ,$$

il suffit donc de démontrer l'implication $i) \Rightarrow iii)$.

1.2.10. Démonstration de la proposition 1.2.9. (suite). Démontrons d'abord qu'un monomorphisme est décomposable. Soient $f : X \rightarrow Y$ un monomorphisme et $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ un triangle distingué contenant f (TRI). Le morphisme f étant un monomorphisme, il en est de même de $f[1]$. Il résulte alors de TRII et de (1.2.2) que $w = 0$. Il résulte alors de (1.2.6) que le morphisme f est décomposable. Démontrons maintenant que $i) \Rightarrow iii)$ dans le cas général. Supposons que le morphisme $f : X \rightarrow Y$ admette un noyau $\text{Ker}(f) \rightarrow X$. Le morphisme $\text{Ker}(f) \rightarrow X$ est un monomorphisme, donc il est décomposable. Le morphisme f est donc isomorphe à un morphisme du type :

$$\text{Ker}(f) \oplus X' \xrightarrow{(0,g)} Y ,$$

$$\begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont le noyau est $\text{Ker}(f) \xrightarrow{\quad} \text{Ker}(f) \oplus X'$. On en déduit immédiatement que le morphisme g est un monomorphisme; par suite, il est décomposable. Le morphisme $f : X \rightarrow Y$ est donc isomorphe à un morphisme du type :

$$\text{Ker}(f) \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{id} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} X' \oplus Y' .$$

Il est donc décomposable.

1.2.11. Démonstration de la proposition 1.2.9. (fin)¹. Il reste à démontrer l'implication $iv) \Rightarrow iii)$ sous les hypothèses supplémentaires. Remarquons tout d'abord que les sommes directes dénombrables sont représentables dans \mathcal{D} si et seulement si les produits directs dénombrables sont représentables dans \mathcal{D}° . De plus, l'implication $iv) \Rightarrow iii)$ pour la catégorie \mathcal{D} est équivalente à l'implication $iv) \Rightarrow iii)$ pour la catégorie opposée à \mathcal{D} . Il suffit donc de démontrer l'implication $iv) \Rightarrow iii)$ lorsque les produits dénombrables sont représentables dans \mathcal{D} , *i.e.* compte tenu de ce qui précède, de

¹Nous utilisons ici un argument dû à Freyd.

démontrer l'implication $iv) \implies i)$. Soit donc $f : X \rightarrow Y$ un morphisme muni d'un scindage $g : Y \rightarrow X$. Le foncteur noyau du morphisme $f : X \rightarrow Y$ est alors égal au foncteur noyau du morphisme $gf : X \rightarrow X$ qui est un projecteur de X (*i.e.* $gf\circ f = g$). On est donc ramené à démontrer que, dans une catégorie triangulée, où les produits dénombrables sont représentables, les projecteurs admettent des noyaux. Soit donc $e : X \rightarrow X$ un projecteur de X . Posons $X_i = X$, $i \in \mathbb{N}$, soient :

$$\Phi : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \quad ,$$

le morphisme défini par :

$$(1.2.11.1) \quad \Phi(x_0, x_1, x_2, \dots) = (ex_0 + (1 - e)x_1, ex_1 + (1 - e)x_2, \dots) \quad .$$

La formule (1.2.11.1) définit un morphisme en interprétant les symboles x_0, x_1, \dots comme des morphismes d'un objet quelconque de \mathcal{D} dans les X_i . De même, soit :

$$\Psi : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \quad ,$$

le morphisme défini par :

$$(1.2.11.2) \quad \Psi(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_0, (1 - e)x_0 + ex_1, (1 - e)x_1 + ex_2, \dots) \quad .$$

Il est clair que $\Phi\Psi = \text{id}$ et, par suite, le morphisme Φ est un épimorphisme. Il admet donc, d'après les implications déjà démontrées, un noyau représentable. D'autre part, le foncteur noyau de Φ est canoniquement isomorphe au foncteur noyau de $e : X \rightarrow X$. Ce foncteur est donc représentable et, par suite, le projecteur e admet un noyau. Ceci achève la démonstration de la proposition (1.2.9).

1.2.12. Le corollaire (1.2.4) montre que les triangles distingués contenant un morphisme donné sont uniques à isomorphisme non unique près. De plus, l'axiome TRIII impose que tout morphisme de morphismes se prolonge en un morphisme de triangles. On peut donc se demander s'il est possible de définir la structure triangulée en associant fonctoriellement à tout morphisme de la catégorie un triangle distingué. Nous allons montrer que dans l'affirmative la catégorie est, sous certaines hypothèses supplémentaires, décomposable.

Proposition 1.2.13. *Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée et Tr un foncteur de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ (chap. I, 3.3.6), catégorie des morphismes de \mathcal{D} , dans la catégorie des triangles distingués (sous-catégorie pleine de la catégorie des triangles de \mathcal{D} définie par les triangles distingués) :*

$$Tr(X \xrightarrow{f} Y) = X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{a(f)} \tau(f) \xrightarrow{b(f)} X[1] \quad .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Si les produits dénombrables ou les sommes directes dénombrables sont représentables dans \mathcal{D} , la catégorie \mathcal{D} est décomposable.

En effet, soit $v : W \rightarrow X$ un morphisme tel que $fv = 0$. On a alors un morphisme de morphismes :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ v \uparrow & & \uparrow \\ W & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

D'où, en appliquant le foncteur Tr , un diagramme commutatif :

$$(1.2.13.1) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{a(f)} & \tau(f) & \xrightarrow{b(f)} & X[1] \\ v \uparrow & & \uparrow & & Tr(v, 0) \uparrow & & \uparrow v[1] \\ W & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tau(W \rightarrow 0) & \xrightarrow{b(W \rightarrow 0)} & W[1] \end{array} .$$

Remarquons tout d'abord que la ligne du bas du diagramme (1.2.13.1) est un triangle distingué. Par suite, le morphisme $b(W \rightarrow 0)$ est un isomorphisme (1.2.1). Posons alors :

$$\alpha(v) = Tr(v, 0)[-1] b(W \rightarrow 0)^{-1}[-1] ,$$

de sorte que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \tau(f)[-1] & \xrightarrow{b(f)[-1]} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \alpha(v) & \downarrow v & \nearrow 0 & \\ & W & & & \end{array}$$

soit commutatif. On vérifie aussitôt qu'on a ainsi défini une section :

$$\alpha : \mathbf{Ker}(f) \longrightarrow \tau(f)[-1]$$

du morphisme canonique $\tau(f)[-1] \rightarrow \mathbf{Ker}(f)$ du foncteur représenté par $\tau(f)[-1]$ dans le foncteur noyau du morphisme f . Le foncteur noyau de f est donc isomorphe au foncteur noyau d'un projecteur de $\tau(f)[-1]$. Il est donc représentable (1.2.9). On en déduit par (1.2.9) que le morphisme f est décomposable, ce qui achève la démonstration.

Remarque 1.2.14. Les propriétés étudiées au numéro 1.2 n'ont fait à aucun moment intervenir l'axiome TRIV. Elles sont donc valables pour toutes les \mathbb{Z} -catégories additives strictes munies d'un ensemble de triangles vérifiant les axiomes TRI, TRII et TRIII.

1.3. Exemples de catégories triangulées.

1.3.1. Soient \mathcal{C} une catégorie additive, $K(\mathcal{C})$ la catégorie des complexes de \mathcal{C} à homotopie près (chap. I, 2.5.7). La catégorie $K(\mathcal{C})$ est une \mathbb{Z} -catégorie stricte munie d'une famille de triangles, les triangles distingués (chap. I, 3.3.1), qui possède les propriétés TRI, TRII et TRIII (chap. I, 3.3).

Proposition 1.3.2. *La catégorie $K(\mathcal{C})$, munie de la famille des triangles distingués, est une catégorie triangulée.*

Il reste à démontrer que la famille des triangles distingués de $K(\mathcal{C})$ possède la propriété TRIV. Soient donc :

$$\begin{array}{ccc} & X_2 & \\ u_3 \nearrow & & \searrow u_1 \\ X_1 & \xrightarrow{u_2} & X_3 \end{array}$$

un diagramme commutatif et :

$$X_1 \xrightarrow{u_3} X_2 \xrightarrow{v_3} Z_3 \xrightarrow{w_3} X_1[1] \quad ,$$

$$X_2 \xrightarrow{u_1} X_3 \xrightarrow{v_1} Z_1 \xrightarrow{w_1} X_2[1] \quad ,$$

$$X_1 \xrightarrow{u_2} X_3 \xrightarrow{v_2} Z_2 \xrightarrow{w_2} X_1[1]$$

trois triangles distingués. D'après (chap. I, 3.3.5), il existe trois triangles distingués :

$$(X_1, X_2, Z'_3, u_3, v'_3, w'_3) \quad , \quad (X_2, X_3, Z'_1, u_1, v'_1, w'_1) \quad , \quad (X_1, X_3, Z'_2, u_2, v'_2, w'_2)$$

et deux morphismes :

$$m'_1 : Z'_3 \longrightarrow Z'_2 \quad , \quad m'_3 : Z'_2 \longrightarrow Z'_1 \quad ,$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

tels que $(\mathbf{id}_{X_1}, u_1, m'_1)$ et $(u_3, \mathbf{id}_{X_3}, m'_3)$ soient des morphismes de triangles et tels que le triangle :

$$Z'_3 \xrightarrow{m'_1} Z'_2 \xrightarrow{m'_3} Z'_1 \xrightarrow{v'_3[1]w'_1} Z'_3[1]$$

soit distingué. De plus ((1.2.4) et (1.2.14)), il existe des isomorphismes $i_j : Z'_j \rightarrow Z_j$, $1 \leq j \leq 3$, tels que $(\mathbf{id}, \mathbf{id}, i_j)$ soient des isomorphismes de triangles. Il suffit alors de poser :

$$m_1 = i_2 m'_1 i_3^{-1} : Z_3 \longrightarrow Z_2 \quad , \quad m_3 = i_1 m'_3 i_2^{-1} : Z_2 \longrightarrow Z_1 \quad .$$

Les morphismes m_1 et m_3 possèdent les propriétés demandées par l'axiome TRIV.

1.3.3. Soit \mathcal{C} une catégorie additive. À tout objet X de \mathcal{C} , on associe le complexe de \mathcal{C} dont tous les composants sont nuls sauf le composant de degré zéro qui est égal à X . On définit ainsi un foncteur de \mathcal{C} dans $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$, et en composant avec le foncteur canonique $\mathbf{comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C})$, un foncteur de \mathcal{C} dans $\mathbf{K}(\mathcal{C})$.

Ces foncteurs sont pleinement fidèles et injectifs sur les ensembles d'objets, et réalisent donc \mathcal{C} comme sous-catégorie pleine de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ et $\mathbf{K}(\mathcal{C})$. Par la suite, la catégorie \mathcal{C} sera toujours considérée comme sous-catégorie pleine de $\mathbf{comp}(\mathcal{C})$ et $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ par l'intermédiaire de ces foncteurs.

1.3.4. Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne. Pour tout complexe X de \mathcal{C} , on désigne par $H^0(X)$ l'objet de \mathcal{C} :

$$(1.3.4.1) \quad H^0(X) = \mathbf{Ker}(d_X^0)/\mathbf{Im}(d_X^{-1}) \quad .$$

Pour tout morphisme de complexes $X \xrightarrow{f} Y$, on désigne par :

$$H^0(f) : H^0(X) \longrightarrow H^0(Y)$$

le morphisme induit par f . On définit ainsi un foncteur :

$$H^0 : \mathbf{comp}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

qu'on appelle le *zéro-ième objet de cohomologie*. Ce foncteur transforme les morphismes homotopes en morphismes égaux et, par suite, fournit un foncteur encore noté :

$$H^0 : \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C} \quad .$$

Proposition 1.3.5. Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne. Le foncteur :

$$\mathsf{H}^0 : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

est un foncteur cohomologique.

En effet, d'après (chap. I, 3.3.1), il suffit de montrer que, pour tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$ (chap. I, 3.1.1), la suite :

$$\mathsf{H}^0(X) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(f)} \mathsf{H}^0(Y) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(p(f))} \mathsf{H}^0(c(f)) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(q(f))} \mathsf{H}^0(X[1])$$

est exacte. En utilisant la propriété TRII (1.1.1), on voit qu'il suffit de montrer que la suite :

$$\mathsf{H}^0(Y) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(p(f))} \mathsf{H}^0(c(f)) \xrightarrow{\mathsf{H}^0(q(f))} \mathsf{H}^0(X[1])$$

est exacte, ce qui résulte immédiatement des définitions (chap. I, 3.1.2 et 3.2.2).

Le foncteur $\mathsf{H}^0 : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ est appelé le *foncteur cohomologique canonique*. On pose $\mathsf{H}^n(X) = \mathsf{H}^0(X[n])$ conformément à l'usage.

Proposition 1.3.6. Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) La catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ est abélienne.
- ii) La catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ est décomposable (1.2.8).
- iii) La catégorie \mathcal{C} est décomposable.

L'équivalence $i) \iff ii)$ résulte de (1.2.9). L'implication $ii) \Rightarrow iii)$ est évidente car \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Pour tout complexe X de \mathcal{C} , désignons par $\mathsf{H}^*(X)$ le complexe :

$$\mathsf{H}^*(X)^l = \mathsf{H}^l(X) \quad , \quad l \in \mathbb{Z} \quad ,$$

$$d_{\mathsf{H}^*(X)}^l = 0 \quad , \quad l \in \mathbb{Z} .$$

On vérifie que le foncteur $\mathsf{H}^* : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C})$ est une équivalence de catégories lorsque \mathcal{C} est décomposable. On en déduit l'implication $iii) \Rightarrow ii)$.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

1.3.7. Soit $F : \prod_{i \in [n]} \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur multi-additif. Supposons que les produits dénombrables soient représentables dans \mathcal{C} . Il résulte immédiatement de (chap. I, 3.4.3 et 3.4.4) que la Π -extension du foncteur F aux complexes à homotopie près :

$$\mathsf{K}_\Pi F : \prod_{i \in [n]} \mathsf{K}(\mathcal{C}_i) \rightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C})$$

est un foncteur multi-exact. Ce foncteur est un \mathbb{Z}^n -foncteur tordu par le cocycle de Koszul conformément à la règle des signes (chap. I, 1.6.6). Résultats analogues pour le foncteur $\mathsf{K}_\Sigma F$.

1.3.8. Soit \mathcal{C} une catégorie additive et $\iota : \mathsf{K}(\mathcal{C})^\circ \rightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C}^\circ)$ l'isomorphisme canonique $\iota = \iota_1$ (chap. I, 2.5.13). Munissons la catégorie $\mathsf{K}(\mathcal{C})^\circ$ de la structure triangulée décrite en (1.1.7). Il résulte de (chap. I, 3.4.1) que ι est un foncteur exact entre catégories triangulées. Par suite, ι est un isomorphisme de catégories triangulées. Nous identifierons dorénavant, sauf mention du contraire, les catégories triangulées $\mathsf{K}(\mathcal{C})^\circ$ et $\mathsf{K}(\mathcal{C}^\circ)$ à l'aide de l'isomorphisme ι .

2. Localisation dans les catégories triangulées.

2.1. Systèmes multiplicatifs de morphismes [16].

2.1.1. Soit \mathcal{C} une catégorie (non nécessairement additive). Un ensemble S de morphismes de \mathcal{C} est appelé un *système multiplicatif* si il possède les propriétés suivantes :

SM1) Le composé de deux morphismes composable de S est un élément de S . Pour tout objet X de \mathcal{C} , le morphisme identique de X est un élément de S .

SM2) Tout diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & s \in S \\ & \searrow & \\ f & \longrightarrow & \end{array}$$

peut se compléter en un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ t \in S & \dashrightarrow & s \in S \\ \downarrow & & \downarrow \\ f & \longrightarrow & \end{array} .$$

Tout diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ t \in S & \downarrow & \\ & & \end{array}$$

peut se compléter en un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ t \in S & \dashrightarrow & s \in S \\ \downarrow & & \downarrow \\ f & \dashrightarrow & \end{array} .$$

SM3) Pour tout couple de morphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe un morphisme s de S , de source Y , tel que $sf = sg$.

ii) Il existe un morphisme t de S , de but X , tel que $ft = gt$.

Un système multiplicatif est dit *saturé* s'il possède la propriété suivante :

SM4) Si f, g et h sont trois morphismes composables et si les morphismes fg et gh appartiennent à S , alors le morphisme g appartient à S .

2.1.2. Soit \mathcal{D} une catégorie triangulée. Un système multiplicatif S de \mathcal{D} est dit *compatible avec la triangulation* s'il possède les propriétés suivantes :

SM5) Pour tout élément s de S et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme $s[n]$ appartient à S . Autrement dit, S est *stable par les automorphismes de translation*.

SM6) Pour tout couple de triangles distingués :

$$(X, Y, Z, u, v, w) , (X', Y', Z', u', v', w')$$

et tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array} ,$$

où s et s' sont des éléments de S , il existe un morphisme appartenant à S : $s'' : Z \rightarrow Z'$ tel que (s, s', s'') soit un morphisme de triangles.

Remarque 2.1.3. 1) Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée, S un système multiplicatif de \mathcal{D} compatible avec la triangulation et \mathcal{D}° la catégorie triangulée opposée à \mathcal{D} . L'ensemble S de morphismes de \mathcal{D}° est un système multiplicatif de \mathcal{D}° compatible avec la triangulation de \mathcal{D}° (1.1.7).

2) Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée et S un ensemble de morphismes de \mathcal{D} possédant les propriétés SM1), SM5) et SM6). Alors l'ensemble S possède aussi la propriété SM2). En effet, il suffit de montrer que tout diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & X' & \\ & \downarrow s \in S & \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

se complète en un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 Z' & \xrightarrow{\quad g \quad} & X' \\
 t \downarrow & & \downarrow s \\
 Z & \xrightarrow{\quad f \quad} & X
 \end{array} ,$$

car alors la deuxième assertion de SM2) s'obtiendra en passant à la catégorie opposée. Par TRI) et TRII), on sait qu'il existe un triangle distingué $(X, Y, Z[1], u, v, f[1])$ et, par TRI), on sait qu'il existe un triangle distingué (X', Y, Z', us, v', w') . On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{\quad us \quad} & Y \\
 s \downarrow & & \downarrow \text{id}_Y \\
 X & \xrightarrow{\quad u \quad} & Y
 \end{array} .$$

Le morphisme id_Y appartient à S (SM1) et, par SM6), on obtient un morphisme $s' : Z' \rightarrow Z[1]$ appartenant à S tel que (s, id_Y, s') soit un morphisme de triangles. En particulier, le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 Z' & \xrightarrow{\quad w' \quad} & X'[1] \\
 s' \downarrow & & \downarrow s[1] \\
 Z[1] & \xrightarrow{\quad f[1] \quad} & X[1]
 \end{array} ,$$

d'où, en utilisant SM5), la première assertion de SM2).

2.1.4. *Les systèmes multiplicatifs des catégories triangulées seront, sauf mention expresse du contraire, compatibles avec la triangulation. Ils seront donc appelés simplement et par abus de langage, systèmes multiplicatifs.*

2.1.5. Soit \mathcal{D} une catégorie triangulée. Une *sous-catégorie triangulée pleine* de \mathcal{D} est une sous-catégorie pleine de \mathcal{D} stable par translations, munie d'une structure triangulée telle que le foncteur d'inclusion soit un foncteur exact (pour la commutation stricte aux translations). Une sous-catégorie triangulée pleine de \mathcal{D} est une sous-catégorie additive de \mathcal{D} (1.2.7). Une sous-catégorie

pleine de \mathcal{D} admet au plus une structure triangulée compatible avec le foncteur d'inclusion. Soit \mathcal{D}' une sous-catégorie pleine de \mathcal{D} stable par translations. Pour que \mathcal{D}' admette une structure triangulée faisant de \mathcal{D}' une sous-catégorie triangulée pleine de \mathcal{D} , il faut et il suffit que pour tout couple X, Y d'objets de \mathcal{D}' et tout morphisme $f : X \rightarrow Y$, il existe un triangle distingué de $\mathcal{D} : (X, Y, Z, f, g, h)$, où Z est un objet de \mathcal{D}' .

2.1.6. Soit \mathcal{D} une catégorie triangulée. Une sous-catégorie triangulée pleine \mathcal{D}' de \mathcal{D} est dite *saturée* si elle possède la propriété suivante :

(2.1.6.1) *Tout facteur direct dans \mathcal{D} d'un objet de \mathcal{D}' est isomorphe à un objet de \mathcal{D}' .*

(Un facteur direct d'un objet Y est un objet X tel qu'il existe un objet Z et un isomorphisme $X \oplus Z \xrightarrow{\sim} Y$).

2.1.7. Soit \mathcal{D}' une sous-catégorie triangulée pleine d'une catégorie triangulée \mathcal{D} . Désignons par $S(\mathcal{D}')$ l'ensemble des morphismes de \mathcal{D} défini de la manière suivante :

(2.1.7.1) *Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ appartient à $S(\mathcal{D}')$ si et seulement s'il existe un triangle distingué de $\mathcal{D} : (X, Y, Z, f, g, h)$, où Z est un objet de \mathcal{D}' .*

Proposition 2.1.8. *L'ensemble $S(\mathcal{D}')$ (2.1.7.1) est un système multiplicatif (2.1.4) de \mathcal{D} . Il est saturé si et seulement si la sous-catégorie \mathcal{D}' est saturée.*

Pour prouver la première assertion, il suffit en vertu de (2.1.3), de montrer que l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ possède les propriétés SM1), SM3), SM5) et SM6). Nous allons montrer successivement que l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ possède ces propriétés, et nous démontrerons ensuite la dernière assertion.

2.1.9. *L'ensemble $S(\mathcal{D}')$ possède la propriété SM1).* Tout d'abord, il est clair que pour tout objet X de \mathcal{D} , le morphisme id_X est un élément de $S(\mathcal{D}')$. Ceci résulte immédiatement de TRI) et du fait que les objets nuls de \mathcal{D}' sont des objets nuls de \mathcal{D} . Le fait que l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ est stable par composition résulte immédiatement de l'axiome TRIV) et de (1.2.4). Nous laissons au lecteur le soin de faire les vérifications.

2.1.10. *L'ensemble $S(\mathcal{D}')$ possède la propriété SM3).* Il suffit tout d'abord de montrer que lorsqu'on a un diagramme $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{f} Z$, avec $s \in S(\mathcal{D}')$, $fs = 0$, il existe un diagramme $Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{t} W$, avec $t \in S(\mathcal{D}')$, $tf = 0$. Car alors, en passant aux catégories opposées, on obtiendra la réciproque et, par

CATÉGORIES DÉRIVÉES

suite, SM3). Par hypothèse, il existe un triangle distingué (X, Y, N, s, h, u) , où N est un objet de \mathcal{D}' . Comme on a $fs = 0$, il résulte de (1.2.1) qu'il existe un morphisme $g : N \rightarrow Z$ tel que $f = gh$. Soit alors (N, Z, W, g, t, v) un triangle distingué contenant g (TRI). On a alors $tg = 0$ (1.2.2) et, par suite, $tf = tgh = 0$. Tout revient donc à montrer que t est un élément de $S(\mathcal{D}')$, ce qui résulte immédiatement de TRII).

2.1.11. *L'ensemble $S(\mathcal{D}')$ possède la propriété SM5).* Résulte immédiatement de TRII) et du fait que la sous-catégorie \mathcal{D}' est stable par translation.

2.1.12. *L'ensemble $S(\mathcal{D}')$ possède la propriété SM6).* Soient (X, Y, Z, u, v, w) et (X', Y', Z', u', v', w') deux triangles distingués de \mathcal{D} et :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

un diagramme commutatif, où s et s' appartiennent à $S(\mathcal{D}')$. Il s'agit de trouver un morphisme $s'' : Z \rightarrow Z'$ de $S(\mathcal{D}')$ tel que (s, s', s'') soit un morphisme de triangles. On peut tout d'abord supposer qu'on est dans l'un des deux cas suivants :

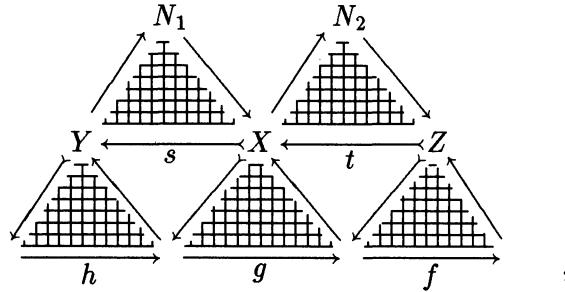
- a) On a $X = X'$ et $s = \text{id}_X$.
- b) On a $Y = Y'$ et $s' = \text{id}_Y$.

En effet, tout morphisme de morphismes se factorise :

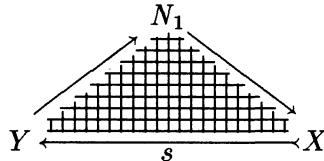
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ \text{id}_X \downarrow & & \downarrow s' \\ X & \xrightarrow{s'u} & Y' \\ s \downarrow & & \downarrow \text{id}_{Y'} \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array},$$

et on obtiendra le morphisme s'' en composant (on a déjà montré que l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ est stable par composition). Ensuite, le cas b) se déduit du cas a) en passant aux catégories opposées. Il suffit donc de traiter le cas a), qui est alors une conséquence immédiate de TRIV).

2.1.13. Si la catégorie \mathcal{D}' est saturée, l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ est saturé. Soient f, g, h trois morphismes composable tels que fg et gh soient des éléments de $S(\mathcal{D}')$. Utilisant l'axiome TRIV, on peut construire un diagramme :



où N_1 et N_2 sont des objets de \mathcal{D}' , où les cinq triangles hachurés sont des triangles distingués et où les deux triangles non hachurés sont commutatifs. On en déduit que $s[1]t = 0$ (1.2.2). De plus, en vertu de SM1) et SM5), le morphisme $s[1]t$ est un élément de $S(\mathcal{D}')$. Il existe donc un triangle distingué du type $(Z, Y[2], N, 0, u, v)$, où N est un objet de \mathcal{D}' . On en déduit, en utilisant (1.2.6) et TRII, que Y est facteur direct d'un objet de \mathcal{D}' . Par suite, Y est isomorphe à un objet de \mathcal{D}' . On en déduit, en utilisant (1.2.4), le fait que \mathcal{D}' soit une sous-catégorie triangulée de \mathcal{D} et le triangle distingué :



que X est isomorphe à un objet de \mathcal{D}' . Par suite, le morphisme g est un élément de $S(\mathcal{D}')$.

2.1.14. Si l'ensemble $S(\mathcal{D}')$ est saturé, la sous-catégorie \mathcal{D}' est saturée. Soit X un facteur direct d'un objet de \mathcal{D}' . En utilisant (1.2.6) et TRII, on voit qu'il existe un triangle distingué $(X, Y, N, 0, u, v)$, où N est un objet de \mathcal{D}' . Par suite, le morphisme nul $X \rightarrow Y$ est un morphisme de $S(\mathcal{D}')$. Appliquons alors la propriété SM4) aux trois morphismes $0 \rightarrow X \rightarrow 0 \rightarrow Y$. On en déduit que le morphisme $X \rightarrow 0$ est un élément de $S(\mathcal{D}')$. Il existe donc un triangle distingué $(X, 0, N, 0, 0, i)$, où N est un objet de \mathcal{D}' . Par suite, le morphisme $N \xrightarrow{i} X[1]$ est un isomorphisme. On en déduit que X est isomorphe à $N[-1]$, qui est un objet de \mathcal{D}' . Ceci achève la preuve de la proposition (2.1.8).

CATÉGORIES DÉRIVÉES

2.1.15. Soit \mathcal{D}' une sous-catégorie triangulée pleine d'une catégorie triangulée \mathcal{D} . Le système multiplicatif $S(\mathcal{D}')$ (2.1.7) est appelé le *système multiplicatif associé à la sous-catégorie \mathcal{D}'* .

Proposition 2.1.16. Soit $F : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ un foncteur exact entre deux catégories triangulées (1.1.3). Soit $S(F)$ l'ensemble des morphismes de \mathcal{D}_1 qui sont transformés par F en isomorphismes de \mathcal{D}_2 . Soit $\mathcal{D}'(F)$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{D}_1 définie par les objets de \mathcal{D}_1 qui sont transformés par F en objets nuls de \mathcal{D}_2 .

- a) La sous-catégorie $\mathcal{D}'(F)$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine (tout objet de \mathcal{D}_1 isomorphe à un objet de $\mathcal{D}'(F)$ est un objet de $\mathcal{D}'(F)$) et saturée.
- b) L'ensemble $S(F)$ est un système multiplicatif saturé de \mathcal{D}_1 .
- c) L'ensemble $S(F)$ est le système multiplicatif associé à la sous-catégorie $\mathcal{D}'(F)$ (2.1.15).

La preuve est facile et laissée au lecteur qui pourra démontrer de même la proposition ci-après :

Proposition 2.1.17. Soit $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur cohomologique d'une catégorie triangulée dans une catégorie abélienne. Soit $S(H)$ l'ensemble des morphismes de \mathcal{D} qui sont transformés, ainsi que leurs translatés, en des isomorphismes de \mathcal{A} . Soit $\mathcal{D}'(H)$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{D} définie par les objets de \mathcal{D} qui sont transformés, ainsi que leurs translatés, en des objets nuls de \mathcal{A} .

- a) La sous-catégorie $\mathcal{D}'(H)$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine et saturée.
- b) L'ensemble $S(H)$ est un système multiplicatif saturé de \mathcal{D} .
- c) L'ensemble $S(H)$ est le système multiplicatif associé à la sous-catégorie $\mathcal{D}'(H)$ (2.1.15).

2.2. Construction de la catégorie localisée.

2.2.1. Soient \mathcal{C} une catégorie (non nécessairement additive) et S un système multiplicatif de \mathcal{C} . Désignons, pour tout objet X de \mathcal{C} , par S/X (resp. $X \setminus S$) la catégorie dont les objets sont les morphismes de S de but X (resp. de source X) et dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{u} & Y' \\
 s \searrow & & \swarrow t \\
 & X &
 \end{array}
 \quad , \quad s, t \in S$$

(resp.

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 s \swarrow & & \searrow t \\
 Y & \xrightarrow{u} & Y'
 \end{array}
 \quad s, t \in S$$

) .

Pour tout couple X, Y d'objets de \mathcal{C} , posons :

$$(2.2.1.1) \quad \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Y) = \varinjlim_{(S/X)^\circ} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, Y) .$$

(Le “point” dans la formule (2.2.1.1) désigne la source d'un objet variable de S/X).

Il résulte immédiatement des propriétés SM1), SM2) et SM3) que la catégorie $(S/X)^\circ$ est filtrante [6]. Il en résulte qu'un élément de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Y)$ est une classe de diagrammes du type :

$$D = X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{m} Y , \quad s \in S ,$$

deux diagrammes $D_1 = X \xleftarrow{s_1} X_1 \xrightarrow{m_1} Y$ et $D_2 = X \xleftarrow{s_2} X_2 \xrightarrow{m_2} Y$ appartenant à la même classe si et seulement s'il existe un diagramme :

$$D_3 = X \xleftarrow{s_3} X_3 \xrightarrow{m_3} Y , \quad s_3 \in S ,$$

et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 & & \\
 & \swarrow s_1 & \uparrow u & \searrow m_1 & \\
 X & \xleftarrow{s_3} & X_3 & \xrightarrow{m_3} & Y \\
 & \nwarrow s_2 & \downarrow v & \nearrow m_2 & \\
 & & X_2 & &
 \end{array}$$

.

Pour tout élément $f \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on désigne par $Q(f)$ la classe du diagramme $X \xleftarrow{\text{id}_X} X \xrightarrow{f} Y$. Pour tout morphisme $s : Y \rightarrow X$, $s \in S$, on désigne par $Q(s)^{-1}$ la classe du diagramme $X \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{\text{id}_Y} Y$.

Désignons alors par $\mathbf{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1}))$ l'ensemble :

$$\coprod_{(X, Y) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathbf{Ob}(\mathcal{C})} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Y) ,$$

par \mathbf{s} et $\mathbf{b} : \text{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1})) \rightrightarrows \text{Ob}(\mathcal{C})$ les applications :

$$m \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Y), \quad \mathbf{s}(m) = X, \quad \mathbf{b}(m) = Y,$$

et par $\mathbf{id} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1}))$ l'application $X \longmapsto Q(\mathbf{id}_X)$. On définit ainsi un diagramme $\mathcal{C}(S^{-1}) = (\text{Ob}(\mathcal{C}), \text{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1})), \mathbf{s}, \mathbf{b}, \mathbf{id})$. On a de plus un couple d'applications noté abusivement :

$$Q = (\mathbf{id}_{\text{Ob}(\mathcal{C})} : \text{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}), Q : \text{Fl}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1}))) .$$

Théorème 2.2.2. a) Il existe une et une seule loi de composition partiellement définie sur $\text{Fl}(\mathcal{C}(S^{-1}))$ telle que :

- 1) $\mathcal{C}(S^{-1})$ soit une catégorie.
 - 2) $Q(s)$ soit un isomorphisme et $Q(s)^{-1}$ son inverse ($s \in S$).
 - 3) Pour tout diagramme $D = X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{m} Y$, $s \in S$, on ait $\overline{D} = Q(m)Q(s)^{-1}$ ($\overline{D} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Y)$ est la classe de D).
 - 4) Q soit un foncteur.
- b) Tout morphisme de $\mathcal{C}(S^{-1})$ peut s'écrire comme un composé $Q(t)^{-1}Q(m)$, $m \in \text{Fl}(\mathcal{C})$, $t \in S$, (resp. $Q(p)Q(s)^{-1}$, $p \in \text{Fl}(\mathcal{C})$, $s \in S$).
- c) Le foncteur Q commute aux limites projectives finies et aux limites inducitives finies.
- d) Pour toute catégorie \mathcal{A} , la composition avec le foncteur Q définit un foncteur :

$$\mathcal{H}om(Q, \mathcal{A}) : \mathcal{H}om(\mathcal{C}(S^{-1}), \mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{A})$$

($\mathcal{H}om$ désigne la catégorie des foncteurs). Le foncteur $\mathcal{H}om(Q, \mathcal{A})$ est injectif sur les objets, pleinement fidèle, et l'image de $\mathcal{H}om(\mathcal{C}(S^{-1}), \mathcal{A})$ est la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{H}om(Q, \mathcal{A})$ définie par les foncteurs de \mathcal{C} dans \mathcal{A} qui transforment les morphismes de S en isomorphismes.

La démonstration de ce théorème est laissée au lecteur, qui pourra consulter [16]. Nous nous bornerons à décrire la composition des morphismes dans $\mathcal{C}(S^{-1})$. Soient $\overline{D}_1 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Y)$ et $\overline{D}_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(Y, Z)$ deux morphismes composable de $\mathcal{C}(S^{-1})$. Soient $D_1 = X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{m} Y$ et $D_2 = Y \xleftarrow{t} Y' \xrightarrow{p} Z$ deux diagrammes de \mathcal{C} dans les classes \overline{D}_1 et \overline{D}_2 . En utilisant SM2), complétons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X' & & Y' \\ \searrow m & & \swarrow t \\ & Y & \end{array} \quad t \in S$$

en un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z'' & & \\
 & t' \in S \swarrow & & \searrow m' & \\
 X' & & & & Y' \\
 & m \searrow & & \swarrow t \in S & \\
 & & Y & &
 \end{array} .$$

On obtient alors un diagramme $D_3 = X \xleftarrow{st'} Z'' \xrightarrow{pm'} Z$, où le composé st' appartient à S (SM1). On vérifie que la classe \overline{D}_3 de D_3 dans $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Z)$ ne dépend que des classes \overline{D}_1 et \overline{D}_2 . Le morphisme \overline{D}_3 est le composé dans $\mathcal{C}(S^{-1})$ des morphismes \overline{D}_1 et \overline{D}_2 .

Remarque 2.2.3. a) Il résulte de la quatrième assertion du théorème (2.2.2) que la catégorie $\mathcal{C}(S^{-1})$ munie du foncteur $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}(S^{-1})$ est solution d'un problème universel : le foncteur Q transforme les morphismes de S en isomorphismes, et tout foncteur de \mathcal{C} dans une catégorie \mathcal{A} qui transforme les morphismes de S en isomorphismes se factorise d'une manière unique par Q . La catégorie $\mathcal{C}(S^{-1})$ munie du foncteur Q est donc déterminée à isomorphisme unique près par cette propriété.

b) Soient \mathcal{C} une catégorie et S un ensemble de morphismes de \mathcal{C} qui ne soit pas nécessairement un système multiplicatif de \mathcal{C} . Il existe toujours une catégorie $\mathcal{C}(S^{-1})$ et un foncteur $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}(S^{-1})$ qui transforme les morphismes de S en isomorphismes, tel que tout foncteur de \mathcal{C} dans une catégorie \mathcal{A} transformant les morphismes de S en isomorphismes se factorise d'une manière unique par Q . Lorsque S est un système multiplicatif de \mathcal{C} , le théorème (2.2.2) donne une description simple de la catégorie $\mathcal{C}(S^{-1})$; il donne de plus des propriétés supplémentaires du foncteur Q (assertions b) et c)) qui ne sont pas vraies en général.

Corollaire 2.2.4. Soient \mathcal{C} une catégorie et S un système multiplicatif de \mathcal{C} .

a) L'ensemble S est un système multiplicatif de \mathcal{C}° , la catégorie opposée à \mathcal{C} . On a un isomorphisme canonique de catégories :

$$(\mathcal{C}^\circ(S^{-1}))^\circ \longrightarrow \mathcal{C}(S^{-1}) .$$

Cet isomorphisme induit en particulier des isomorphismes :

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}(S^{-1})}(X, Y) \longrightarrow \varinjlim_{Y \setminus S} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, .) .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

- b) *Lorsque la catégorie \mathcal{C} est additive, la catégorie $\mathcal{C}(S^{-1})$ est additive et le foncteur Q est additif.*
- c) *Soit \hat{S} l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} qui sont transformés par Q en isomorphismes de $\mathcal{C}(S^{-1})$. L'ensemble \hat{S} est un système multiplicatif saturé de \mathcal{C} . Tout système multiplicatif saturé de \mathcal{C} qui contient S contient \hat{S} .*

La première assertion résulte immédiatement de la propriété universelle de $\mathcal{C}(S^{-1})$: la catégorie $(\mathcal{C}^\circ(S^{-1}))^\circ$ est une solution de ce problème. La deuxième assertion résulte immédiatement des assertions b) et c) du théorème (2.2.2). Il résulte immédiatement de la description des morphismes de $\mathcal{C}(S^{-1})$ qu'un morphisme f de \mathcal{C} est transformé par Q en isomorphisme si et seulement s'il existe deux morphismes de \mathcal{C} , g et h , tels que gf et fh soient définis et appartiennent à S . On en déduit immédiatement que l'ensemble \hat{S} possède les propriétés SM2) et SM3). De plus, il résulte de la définition de \hat{S} que cet ensemble possède les propriétés SM1) et SM4). L'ensemble \hat{S} est donc un système multiplicatif saturé de \mathcal{C} . La dernière assertion de (2.2.4) est triviale.

2.2.5. Soient \mathcal{C} une catégorie et S un système multiplicatif de \mathcal{C} . La catégorie $\mathcal{C}(S^{-1})$ est appelée la *catégorie localisée* de \mathcal{C} par rapport au système S . Le foncteur $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}(S^{-1})$ est appelé le *foncteur de localisation*. Le système multiplicatif \hat{S} est appelé le *saturé* du système S .

Théorème 2.2.6. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée et S un système multiplicatif de \mathcal{D} (2.1.4). Désignons par $\mathcal{D}(S^{-1})$ la catégorie localisée de \mathcal{D} et $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}(S^{-1})$ le foncteur de localisation.

- a) *Il existe sur $\mathcal{D}(S^{-1})$ une et une seule structure de \mathbb{Z} -catégorie stricte telle que Q soit un \mathbb{Z} -foncteur strict.*
- b) *Il existe sur $\mathcal{D}(S^{-1})$ une et une seule structure triangulée telle que Q soit un foncteur exact. Les triangles distingués pour cette structure sont les triangles isomorphes aux images par Q des triangles distingués de \mathcal{D} .*
- c) *Tout foncteur exact (resp. cohomologique) $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ dans une catégorie triangulée (resp. abélienne) qui transforme les morphismes de S en isomorphismes se factorise d'une manière unique par $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}(S^{-1})$ en un foncteur exact (resp. cohomologique) $G : \mathcal{D}(S^{-1}) \rightarrow \mathcal{D}'$. Soient $F_1, F_2 : \mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{D}'$ deux foncteurs exacts (resp. cohomologiques) qui transforment les morphismes de S en isomorphismes; $G_1, G_2 : \mathcal{D}(S^{-1}) \rightrightarrows \mathcal{D}'$ leurs factorisations respectives et $m : F_1 \rightarrow F_2$ un morphisme de foncteurs exacts (resp. cohomologiques). Il existe un et un seul morphisme de foncteurs $p : G_1 \rightarrow G_2$ tel que $m = p \star Q$.*

La première assertion est une conséquence immédiate du théorème (2.2.2) et de SM5). La troisième assertion est une conséquence immédiate de la

deuxième assertion et du théorème (2.2.2). Il reste donc à démontrer la deuxième assertion. Soit \mathcal{T} l'ensemble des triangles de $\mathcal{D}(S^{-1})$ qui sont isomorphes aux images par Q des triangles distingués de \mathcal{D} . On vérifie sans difficulté que l'ensemble \mathcal{T} possède les propriétés TRI et TRII. Pour démontrer qu'il possède la propriété TRIII, nous aurons besoin d'un lemme :

Lemme 2.2.7. *Soient $u : X \rightarrow Y$ et $u' : X' \rightarrow Y'$ deux morphismes de \mathcal{D} et :*

$$\begin{array}{ccc} Q(X) & \xrightarrow{Q(u)} & Q(Y) \\ m \downarrow & & \downarrow p \\ Q(X') & \xrightarrow{Q(u')} & Q(Y') \end{array}$$

un diagramme commutatif de $\mathcal{D}(S^{-1})$. Il existe un morphisme $u'' : X'' \rightarrow Y''$ et deux diagrammes commutatifs de \mathcal{D} :

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{u''} & Y'' \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array} \quad , \quad s, t \in S$$

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{u''} & Y'' \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array} \quad ,$$

tels que $m = Q(f)Q(s)^{-1}$ et $p = Q(g)Q(t)^{-1}$.

Supposons le lemme démontré et montrons que l'ensemble \mathcal{T} possède la propriété TRIII. En utilisant la définition de l'ensemble \mathcal{T} , on est ramené à démontrer : étant donné deux triangles distingués de \mathcal{D} :

$$(X, Y, Z, u, v, w) \quad , \quad (X', Y', Z', u', v', w')$$

et un diagramme commutatif de $\mathcal{D}(S^{-1})$:

$$\begin{array}{ccc} Q(X) & \xrightarrow{Q(u)} & Q(Y) \\ m \downarrow & & \downarrow p \\ Q(X') & \xrightarrow{Q(u')} & Q(Y') \end{array} \quad ,$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

il existe un morphisme $r : Q(Z) \rightarrow Q(Z')$ tel que (m, p, r) soit un morphisme de triangles. En utilisant le lemme (2.2.7), on est ramené à envisager les deux cas suivants :

a) $m = Q(s)^{-1}$, $p = Q(t)^{-1}$, $s, t \in S$ et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u'} & Y' \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

est commutatif.

b) $m = Q(f)$, $p = Q(g)$ et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

est commutatif.

Dans le cas a), la propriété résulte alors de la propriété SM6) (2.1.2). Dans le cas b), la propriété résulte de la propriété TRIII pour les triangles distingués de \mathcal{D} .

2.2.8. Démonstration du lemme 2.2.7. En vertu du théorème (2.2.2), il existe un morphisme $t : Y'' \rightarrow Y$, $t \in S$, tel que $pQ(t) = Q(g)$, où $g : Y'' \rightarrow Y'$. On construit alors pas à pas le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X'' & & & & \\ s_3 \downarrow & \searrow u'' & & & \\ X''_2 & & & & \\ s_2 \downarrow & \searrow u''_2 & & & \\ X''_1 & \xrightarrow{u''_1} & Y'' & & \\ s_1 \downarrow & & \downarrow t & & \\ X & \xrightarrow{u} & Y & & , \end{array}$$

tel que :

- 1) On ait l'égalité $us_1 = tu''_1$ et $s_1 \in S$. Ceci se fait en utilisant SM2).
- 2) On ait les égalités $mQ(s_1s_2) = Q(f')$, où $f' : X''_2 \rightarrow X'$ est un morphisme de \mathcal{D} , $u''_2 = u''_1s_2$ et $s_2 \in S$. Ceci se fait en utilisant le théorème (2.2.2).
- 3) On ait l'égalité $u'f's_3 = gu''_2s_3$, $u'' = u''_2s_3$, et $s_3 \in S$. En effet, le diagramme de \mathcal{D} :

$$\begin{array}{ccc} X''_2 & \xrightarrow{u''_2} & Y'' \\ f' \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

n'est pas nécessairement commutatif. Mais le diagramme de $\mathcal{D}(S^{-1})$ obtenu en appliquant le foncteur Q au diagramme précédent est commutatif. On a donc $Q(u'f') = Q(gu''_2) : Q(X''_2) \rightarrow Q(Y')$. Il en résulte, par définition des morphismes de $\mathcal{D}(S^{-1})$, qu'il existe un morphisme $s_3 \in S : X'' \rightarrow X''_2$ tel que $u'f's_3 = gu''_2s_3$.

Pourachever la démonstration du lemme, il suffit de poser $f = f's_3$, $s = s_1s_2s_3$.

2.2.9. Fin de la démonstration du théorème 2.2.6. Il reste à démontrer que l'ensemble \mathcal{T} possède la propriété TRIV. Nous savons maintenant que cet ensemble possède les propriétés TRI, TRII et TRIII. On peut donc utiliser les résultats du numéro 1.2 (1.2.14). En particulier, il résulte de (1.2.4) que tous les triangles de \mathcal{T} contenant un morphisme donné sont isomorphes. On peut donc, par des réductions analogues à celles utilisées dans la démonstration de la proposition (1.3.2), se ramener, pour démontrer la propriété TRIV, à des diagrammes de $\mathcal{D}(S^{-1})$ qui sont images par Q de diagrammes analogues de \mathcal{D} . La vérification est alors facile. Nous laissons au lecteur le soin d'en mettre au point les détails.

2.2.10. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée, $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ une sous-catégorie triangulée pleine et $S(\mathcal{B})$ le système multiplicatif associé à \mathcal{B} (2.1.15). On notera \mathcal{D}/\mathcal{B} la catégorie $\mathcal{D}(S(\mathcal{B})^{-1})$. La catégorie \mathcal{D}/\mathcal{B} est appelée la *catégorie quotient de la catégorie \mathcal{D} par la catégorie \mathcal{B}* . Le foncteur canonique $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ est appelé le *foncteur de passage au quotient*. Soit $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ un foncteur exact (resp. cohomologique) dans une catégorie triangulée (resp. abélienne). On désigne par $\text{Ker}(F)$ et on appelle *noyau de F* la sous-catégorie triangulée strictement pleine saturée définie par les objets qui sont annulés par F (resp. dont tous les translatés sont annulés par F) ((2.1.16) et (2.1.17)).

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Corollaire 2.2.11. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée et $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ une sous-catégorie triangulée pleine.

- a) Le noyau du foncteur de passage au quotient $Q : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ est la plus petite sous-catégorie triangulée strictement pleine saturée qui contienne \mathcal{B} .
- b) L'application $\mathcal{B} \mapsto S(\mathcal{B})$ qui à toute sous-catégorie triangulée strictement pleine saturée associe son système multiplicatif saturé (2.1.8) est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de l'ensemble des sous-catégories triangulées strictement pleines saturées, ordonné par inclusion, dans l'ensemble des systèmes multiplicatifs saturés de \mathcal{D} , ordonné par inclusion. L'application inverse associe à tout système multiplicatif saturé le noyau du foncteur de localisation correspondant.
- c) Un foncteur exact (resp. cohomologique) $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ dont le noyau contient la sous-catégorie \mathcal{B} se factorise d'une manière unique par $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ en un foncteur $G : \mathcal{D}/\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}'$ qui est exact (resp. cohomologique). Un morphisme de foncteurs exacts (resp. cohomologiques) dont les noyaux contiennent la sous-catégorie \mathcal{B} provient d'une manière unique d'un morphisme entre les factorisations.

Ce sont des conséquences faciles du théorème (2.2.6).

2.2.12. Commentaires sur la propriété TRIV. Appelons *catégorie pré-triangulée* une \mathbb{Z} -catégorie stricte munie d'une famille de triangles possédant les propriétés TRI, TRII et TRIII. On définit de la même façon que pour les catégories triangulées les notions de *foncteurs exacts, foncteurs cohomologiques, systèmes multiplicatifs*.

Soit S un système multiplicatif (2.1.4) d'une catégorie pré-triangulée \mathcal{D} . La catégorie localisée $\mathcal{D}(S^{-1})$ admet une et une seule structure de catégorie pré-triangulée telle que le foncteur de localisation soit exact. La sous-catégorie pleine des objets de \mathcal{D} qui sont annulés par le foncteur de localisation est une sous-catégorie pré-triangulée pleine. On a besoin dans la pratique de savoir, inversement, associer à une sous-catégorie pré-triangulée un système multiplicatif saturé convenable. Le rédacteur ne sait le faire qu'en utilisant la propriété TRIV. Cette propriété, de nature assez technique, a donc surtout servi, pour l'instant, à obtenir le corollaire (2.2.11) à partir du théorème (2.2.6).

2.3. Propriétés du foncteur de localisation.

Proposition 2.3.1. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée, \mathcal{B} une sous-catégorie triangulée pleine.

Pour toute sous-catégorie triangulée pleine \mathcal{A} telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, désignons par $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ (resp. $S_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$) le système multiplicatif de \mathcal{D} (resp. \mathcal{A}) associé à \mathcal{B} (2.1.7).

- a) On a $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}) \cap \text{Fl}(\mathcal{A}) = S_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.
- b) Le foncteur canonique $\mathcal{A}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ est pleinement fidèle et injectif sur les objets. L'image de ce foncteur est $Q(\mathcal{A})$, où $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ est le foncteur canonique.
- c) Le foncteur canonique $\mathcal{D}/\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{D}/\mathcal{B})/(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ est un isomorphisme de catégories.
- d) Si la catégorie \mathcal{A} est saturée (2.1.6), la sous-catégorie $Q(\mathcal{A})$ est saturée.

Pour toute sous-catégorie triangulée pleine \mathcal{C} de \mathcal{D}/\mathcal{B} , désignons par $Q^{-1}(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{D} définie par les objets X de \mathcal{D} tels que $Q(X)$ soit isomorphe à un objet de la catégorie \mathcal{C} .

- a)^{bis} La catégorie $Q^{-1}(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine de \mathcal{D} .
- b)^{bis} Le système multiplicatif $S_{\mathcal{D}}(Q^{-1}(\mathcal{C}))$ est composé des morphismes de \mathcal{D} dont l'image par Q est un morphisme de $S_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.
- c)^{bis} La sous-catégorie $Q^{-1}(\mathcal{C})$ est saturée si et seulement si la sous-catégorie \mathcal{C} est saturée.
- d)^{bis} L'application $\mathcal{A} \mapsto Q(\mathcal{A})$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de l'ensemble des sous-catégories triangulées strictement pleines de \mathcal{D} contenant $\widehat{\mathcal{B}}$ (le noyau du foncteur Q), ordonné par inclusion, dans l'ensemble des sous-catégories triangulées strictement pleines de \mathcal{D}/\mathcal{B} , ordonné par inclusion. L'application inverse est l'application $\mathcal{C} \mapsto Q^{-1}(\mathcal{C})$.

La première assertion est évidente. La deuxième résulte immédiatement de la description des morphismes dans les catégories \mathcal{A}/\mathcal{B} et \mathcal{D}/\mathcal{B} (2.2.1). Pour démontrer c), il suffit de se reporter aux propriétés universelles des catégories quotients (2.2.11). Démontrons d). Quitte à remplacer \mathcal{A} par sa clôture strictement pleine, ce qui modifie $Q(\mathcal{A})$ par une équivalence, on peut supposer que \mathcal{A} est strictement pleine. Le noyau du foncteur $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A}$ est alors la catégorie \mathcal{A} (2.2.11). Ce foncteur se factorise en $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A}$. On en déduit que le noyau du foncteur canonique $\mathcal{D}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A}$ est $Q(\mathcal{A})$. Par suite, $Q(\mathcal{A})$ est saturée (2.1.16). L'assertion a)^{bis} est évidente, de même que l'assertion b)^{bis}. Supposons que \mathcal{C} soit saturée. On peut supposer de plus que \mathcal{C} est strictement pleine, car si l'on désigne par $\widehat{\mathcal{C}}$ la clôture strictement pleine de \mathcal{C} , la catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ est strictement pleine saturée et $Q^{-1}(\widehat{\mathcal{C}}) = Q^{-1}(\mathcal{C})$. La catégorie \mathcal{C} est alors noyau d'un foncteur exact (2.2.11). Par suite, $Q^{-1}(\mathcal{C})$ est noyau d'un foncteur exact, donc saturée (2.1.16). Supposons que $Q^{-1}(\mathcal{C})$ soit

saturée. La sous-catégorie $Q(Q^{-1}(\mathcal{C}))$ est strictement pleine saturée d'après la démonstration de d). Or la catégorie $Q(Q^{-1}(\mathcal{C}))$ est la clôture strictement pleine de \mathcal{C} . Par suite, \mathcal{C} est saturée. Ceci démontre l'assertion $c)^{\text{bis}}$. Il reste à démontrer la dernière assertion. Il est clair que lorsque \mathcal{C} est strictement pleine, on a $Q(Q^{-1}(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$. Soit \mathcal{A} une catégorie triangulée strictement pleine contenant $\widehat{\mathcal{B}}$. Il nous faut montrer que $\mathcal{A} = Q^{-1}(Q(\mathcal{A}))$. Quitte à remplacer \mathcal{B} par $\widehat{\mathcal{B}}$, ce qui ne change pas la catégorie \mathcal{D}/\mathcal{B} (2.2.11), on peut supposer que \mathcal{B} est saturée, et par suite que $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{B}}$. Comme on a évidemment l'inclusion $\mathcal{A} \subset Q^{-1}(Q(\mathcal{A}))$, il suffit de montrer que tout objet de \mathcal{D} qui devient isomorphe dans \mathcal{D}/\mathcal{B} à un objet de \mathcal{A} est un objet de \mathcal{A} . Soient donc X un objet de \mathcal{A} , Y un objet de \mathcal{D} et $m : Q(X) \xrightarrow{\sim} Q(Y)$ un isomorphisme. Le morphisme m se décompose en $m = Q(f)Q(s)^{-1}$, où $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ (2.2.2), et où $Q(f)$ est un isomorphisme. Donc $f \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ car \mathcal{B} est saturée ((2.1.8) et (2.2.4)). On a donc un diagramme dans \mathcal{D} :

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array} \quad s, f \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$$

Le morphisme s étant un élément de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, il existe un triangle distingué (Z, X, W, s, u, v) , où W est un objet de \mathcal{B} (2.1.7). Par suite, W est un objet de \mathcal{A} , et comme \mathcal{A} est strictement pleine, l'objet Z appartient aussi à \mathcal{A} (1.2.4). Le même argument montre alors que Y est un objet de \mathcal{A} , ce qui achève la démonstration de la proposition.

2.3.2. Soient $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur et X un objet de \mathcal{C}' . Rappelons qu'un objet Y de \mathcal{C} est dit *F-libre à droite sur X*, ou simplement *libre à droite sur X*, s'il existe un morphisme $u : F(Y) \longrightarrow X$ tel que pour tout morphisme $F(Z) \xrightarrow{v} X$, il existe un et un seul morphisme $w : Z \longrightarrow Y$ tel que le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow F(w) \quad \nearrow v & & \\ F(Z) & & \end{array}$$

La flèche $u : F(Y) \longrightarrow X$ s'appelle *flèche de liberté* pour le couple (X, Y) (relativement au foncteur F). Celà peut encore s'interpréter, en prenant un

univers dont \mathcal{C} et \mathcal{C}' soient des éléments, en disant que Y est libre à droite sur X s'il existe un isomorphisme entre les foncteurs $Z \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ et $Z \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(Z), Y)$. Nous dirons qu'un objet Y de \mathcal{C} est *F-libre à droite* s'il existe un objet X de \mathcal{C}' tel que Y soit libre à droite sur X . Nous dirons qu'un objet X de \mathcal{C}' est *F-libérable à droite* s'il existe un objet Y de \mathcal{C} libre à droite sur X . On définit de façon analogue, par passage aux catégories opposées, les notions d'objet libre ou libérable à gauche.

Proposition 2.3.3. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée, \mathcal{B} une sous-catégorie triangulée pleine, $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ le foncteur de passage au quotient (2.2.10), $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ le système multiplicatif de \mathcal{D} associé à \mathcal{B} (2.1.8).

a) Pour tout objet Y de \mathcal{D} , les conditions suivantes sont équivalentes :

i) L'objet Y est Q -libre à droite.

ii) Pour tout morphisme $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, $s : S \rightarrow T$, l'application :

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(s, Y) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(T, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S, Y)$$

est une bijection.

iii) Pour tout objet B de \mathcal{B} , $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, Y) = 0$.

iv) Tout morphisme $Y \xrightarrow{s} Z$, avec $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, admet une rétraction.

v) Pour tout objet X de \mathcal{D} , l'application :

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X), Q(Y))$$

est bijective.

b) Soit $L_R(Q)$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{D} définie par les objets Q -libres à droite. La catégorie $L_R(Q)$ est triangulée, strictement pleine, saturée.

c) La restriction du foncteur de passage au quotient à $L_R(Q)$:

$$Q|_{L_R(Q)} : L_R(Q) \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$$

est pleinement fidèle et injective sur les objets.

d) Soit $Lib_R(Q) \subset \mathcal{D}/\mathcal{B}$ la sous-catégorie pleine définie par les objets Q -libérables à droite de \mathcal{D}/\mathcal{B} . La sous-catégorie $Lib_R(Q)$ est triangulée strictement pleine. Si les produits ou les sommes directes dénombrables sont représentables dans \mathcal{D} , la catégorie $Lib_R(Q)$ est saturée.

e) Le foncteur Q envoie $L_R(Q)$ dans $Lib_R(Q)$. La catégorie $Lib_R(Q)$ est la clôture strictement pleine de l'image de $L_R(Q)$. Les flèches de liberté sont des isomorphismes.

f) Un objet Z de \mathcal{D} appartient à $Q^{-1}(Lib_R(Q))$ si et seulement s'il existe un objet libre à droite Y et un morphisme $s : Z \rightarrow Y$, où s appartient à $\widehat{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, le saturé du système $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ (2.2.4, (c)).

g) Le foncteur d'inclusion $L_R(Q) \subset Q^{-1}(Lib_R(Q))$ admet un adjoint à gauche $\mathcal{R} : Q^{-1}(Lib_R(Q)) \rightarrow L_R(Q)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathcal{R} & & & \\
 L_R(Q) & \xleftarrow{\quad} & Q^{-1}(Lib_R(Q)) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D} \\
 & \swarrow \Psi & \downarrow Q_1 & & \downarrow Q \\
 Q|L_R(Q) & \xrightarrow{\quad} & Lib_R(Q) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D}/\mathcal{B} \\
 & & & & .
 \end{array}$$

Soit $\Psi : Lib_R(Q) \rightarrow L_R(Q)$ un foncteur quasi-inverse à $Q|L_R(Q)$ (cf. c) et e)). On peut prendre pour foncteur \mathcal{R} le foncteur ΨQ_1 , où on désigne par $Q_1 : Q^{-1}(Lib_R(Q)) \rightarrow Lib_R(Q)$ le foncteur induit par Q . Le foncteur Ψ est adjoint à droite au foncteur Q_1 .

2.3.4. Démonstration de la proposition 2.3.3 : Démontrons a). Tout d'abord, si Y est Q -libre à droite, le foncteur $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ est isomorphe au foncteur $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X), Z)$, pour un objet Z convenable de \mathcal{D}/\mathcal{B} . Par suite, le foncteur $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ transforme les morphismes de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ en isomorphismes. Ceci démontre l'implication $i) \Rightarrow ii)$. L'implication $ii) \Rightarrow iii)$ résulte de ce que le morphisme $B \rightarrow 0$ est un morphisme de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$. L'implication $iii) \Rightarrow iv)$ résulte de la définition de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ et de (1.2.6). L'implication $iv) \Rightarrow v)$ résulte de l'isomorphisme (2.2.4) :

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(Q(X), Q(Y)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{Y \setminus S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, .) \quad .$$

Enfin, l'implication $v) \Rightarrow i)$ est évidente : Y est libre à droite sur $Q(Y)$.

L'assertion b) résulte de a), iii). L'assertion c) résulte de a), v). Il résulte aussi de a), v) que les objets de \mathcal{D}/\mathcal{B} qui sont libérables à droite sont les objets de \mathcal{D}/\mathcal{B} qui sont isomorphes dans \mathcal{D}/\mathcal{B} aux images par Q des objets Q -libres à droite. Les flèches de liberté sont des isomorphismes. Ceci démontre e). Il est alors clair que $Lib_R(Q)$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine. Soit $Z = Z_1 \oplus Z_2$ un objet de $Lib_R(Q)$. Il existe donc un objet Q -libre à droite Y et un isomorphisme $Q(Y) \xrightarrow{\sim} Z_1 \oplus Z_2$. Le foncteur $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ admet donc un projecteur, et par suite la décomposition de Z en somme directe définit sur Y un projecteur. Les facteurs de Z seront dans $Lib_R(Q)$ si et seulement si ce projecteur est décomposable, ce qui est le cas lorsque dans \mathcal{D} les sommes ou produits dénombrables sont représentables (1.2.9).

Ceci démontre *d*) ; démontrons maintenant *f*). Un objet Z de \mathcal{D} appartient à $Q^{-1}(Lib_R(Q))$ si et seulement s'il existe un objet Q -libre à droite Y et un isomorphisme dans \mathcal{D}/\mathcal{B} : $Q(Z) \xrightarrow{\sim} Q(Y)$. Un tel isomorphisme est de la forme $m = Q(s)^{-1}Q(t)$, où $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ et $t \in \widehat{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ ((2.2.2) et (2.2.4)). On a par suite dans \mathcal{D} un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ t \nearrow & \downarrow s & \\ Z & & Y \end{array} .$$

D'après *a*), *iv*), le morphisme s admet une rétraction $s' : X \rightarrow Y$ qui est un élément de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ (1.2.6). Par suite, il existe un morphisme $t' : Z \rightarrow Y$, $t' \in \widehat{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$. Réciproquement, s'il existe un tel morphisme, le morphisme $Q(t') : Q(Z) \rightarrow Q(Y)$ est un isomorphisme. Il reste à démontrer *g*). On a, d'après *a*), *v*), un isomorphisme bifonctoriel :

$$\mathbf{Hom}_{Q^{-1}(Lib_R(Q))}(Z, \Psi(W)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{Lib_R(Q)}(Q_1(Z), W) ,$$

ce qui montre que Ψ est adjoint à droite à Q_1 . On en déduit immédiatement que si on note $i : Lib_R(Q) \hookrightarrow Q^{-1}(Lib_R(Q))$ le foncteur d'inclusion, on a un isomorphisme bifonctoriel :

$$\mathbf{Hom}_{Q^{-1}(Lib_R(Q))}(Z, i(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{Lib_R(Q)}(\Psi Q_1(Z), Y) .$$

Ceci montre que le foncteur $\mathcal{R} = \Psi Q_1$ est adjoint à gauche au foncteur d'inclusion et achève la démonstration de la proposition (2.3.3).

Proposition 2.3.5. *Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée, \mathcal{A} et \mathcal{B} deux sous-catégories triangulées pleines (\mathcal{B} strictement pleine), $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ et $S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ les systèmes multiplicatifs de \mathcal{D} et \mathcal{A} associés respectivement aux catégories \mathcal{B} et $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.*

a) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Tout morphisme $X \xrightarrow{s} X'$, avec $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{A})$, $s \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$, s s'insère dans un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & X' \\ & \searrow s' & \downarrow \\ & & X'' \end{array} \quad s' \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

ii) *Tout morphisme $B \rightarrow X$, avec $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, s'insère dans un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\quad} & X \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & B' &
 \end{array}
 \quad B' \in \text{Ob}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

Les sous-catégories triangulées pleines \mathcal{A} de \mathcal{D} qui possèdent les deux propriétés équivalentes ci-dessus sont appelées *sous-catégories \mathcal{B} -localisantes à droite*.

b) *Si \mathcal{A} est \mathcal{B} -localisante à droite, le foncteur canonique :*

$$\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$$

est pleinement fidèle et injectif sur les objets.

c) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) \mathcal{A} est \mathcal{B} -localisante à droite.

ii) *Soit $Q : \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ le foncteur canonique. La sous-catégorie $\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est formée d'objets Q -libres à droite.*

L'équivalence de a) résulte immédiatement de TRIII et des définitions des systèmes $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ et $S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ (2.1.7). Démontrons b). Soient X et Y deux objets de \mathcal{A} (donc de $\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$).

Montrons d'abord que l'homomorphisme :

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X, Y)$$

est injectif. Désignons par $Q_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ et $Q_2 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$ les foncteurs canoniques de passage au quotient. Un élément $m \in \text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(X, Y)$ peut toujours s'écrire sous la forme $m = Q_1(s)^{-1}Q_1(f)$, $s \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ (2.2.2). Son image dans $\text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X, Y)$ est alors $Q_2(s)^{-1}Q_2(f)$. D'après (2.2.4, a)), cette image est nulle si et seulement s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & u & \\
 f \swarrow & \nearrow s & \\
 X & & Y
 \end{array}
 \quad t \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$$

tel que $uf = 0$. En utilisant alors $a), i)$, on voit qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow v & \\ f \swarrow & & \downarrow t' \\ X & & Y \end{array} \quad t' \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

tel que $vf = 0$. Il en résulte alors que $m = Q_1(t')^{-1}Q_1(vf) = 0$.

Montrons maintenant que l'homomorphisme :

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(X, Y) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X, Y)$$

est surjectif. Un élément $p \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}(X, Y)$ se met sous la forme :

$$p = Q_2(t)^{-1}Q_2(g) \quad , \quad t \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}) \quad .$$

En utilisant $a), i)$, on voit qu'un tel élément s'écrit toujours sous la forme :

$$p = Q_2(s)^{-1}Q_2(g') \quad , \quad s \in S_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \quad ,$$

et, par suite, qu'il provient d'un élément de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(X, Y)$.

Il reste à démontrer l'équivalence de $c)$. Démontrons tout d'abord que $i) \Rightarrow ii)$. D'après (2.3.1), la catégorie \mathcal{D}/\mathcal{B} est canoniquement isomorphe à la catégorie $(\mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B})/(\mathcal{B}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ et le foncteur canonique :

$$Q : \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{B}$$

est le foncteur de passage au quotient. Par suite, d'après la proposition (2.3.3, $a)$), pour démontrer l'implication $i) \Rightarrow ii)$, il suffit de montrer que pour tout objet X de \mathcal{A} et tout objet B de \mathcal{B} , $\mathbf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(B, X) = 0$. Un élément m de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(B, X)$ se met sous la forme $Q_3(f)Q_3(s)^{-1}$, où :

$$Q_3 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$$

est le foncteur canonique, et où s est un élément de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, le système multiplicatif de \mathcal{D} associé à $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ (2.2.2). On a alors un diagramme de \mathcal{D} :

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ B & & X \end{array} \quad ,$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

et comme B est un objet de \mathcal{B} et s un élément de $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, l'objet W est isomorphe à un objet de \mathcal{B} (1.2.4). Par suite, d'après la première assertion, le morphisme f se factorise à travers un objet de $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Le morphisme $Q_3(f)$ est donc nul, et par suite $m = 0$. Démontrons maintenant l'implication $ii) \Rightarrow i)$. Il suffit de montrer, d'après $a)$, que tout morphisme dans \mathcal{D} , $g : B \rightarrow X$, où B est un objet de \mathcal{B} et X un objet de \mathcal{A} , se factorise à travers un objet de $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. On sait par hypothèse que $Q_3(g) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(B, X)$ est nul. Par suite (2.2.4), il existe un morphisme $t : X \rightarrow X'$, $t \in S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, tel que $tg = 0$. Par définition de l'ensemble $S_{\mathcal{D}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, il existe un triangle distingué de \mathcal{D} de la forme (B', X, X', l, t, w) , où B' est un objet de $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. D'après (1.2.1), l'égalité $tg = 0$ implique que le morphisme g se factorise à travers B' , ce qu'il fallait démontrer. Ceci achève la démonstration de la proposition (2.3.5).

On dit qu'une sous-catégorie triangulée pleine \mathcal{A} de \mathcal{D} est \mathcal{B} -localisante à gauche si la sous-catégorie \mathcal{A}° de \mathcal{D}° est \mathcal{B}° -localisante à droite.

3. Abélianisation des catégories triangulées.

3.1. Construction de la catégorie $\mathbf{A}(\mathcal{D})$.

3.1.1. Soient \mathcal{D} une catégorie additive et $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ la catégorie des morphismes de \mathcal{D} (chap. I, 3.3.6). Un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ est dit *négligeable* si $f'g = hf = 0$. Le composé dans les deux sens d'un morphisme négligeable et d'un morphisme quelconque est un morphisme négligeable ; la somme directe de deux morphismes négligeables est un morphisme négligeable. Désignons par $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ la catégorie dont les objets sont les objets de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ et les morphismes, les morphismes de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ à morphismes négligeables près, *i.e.* pour tout couple U et V d'objets de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$, le groupe $\mathbf{Hom}_{\mathbf{A}(\mathcal{D})}(U, V)$ est le quotient du groupe $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})}(U, V)$ par le sous-groupe des morphismes négligeables. La catégorie $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ est additive.

Soit \mathcal{C} une catégorie ; la composition avec le foncteur canonique :

$$\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D})$$

fournit un foncteur :

$$(3.1.1.1) \quad \mathbf{Hom}(\mathbf{A}(\mathcal{D}), \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}), \mathcal{C}) \quad .$$

Ce foncteur est pleinement fidèle et injectif sur les objets. Son image est la sous-catégorie pleine définie par les foncteurs de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ dans \mathcal{C} qui transforment les morphismes qui diffèrent par un morphisme négligeable, en morphismes égaux.

3.1.2. Le foncteur canonique de \mathcal{D} dans $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$: $X \mapsto (X \xrightarrow{\text{id}_X} X)$ composé avec le foncteur canonique $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D})$ est un foncteur qu'on note :

$$(3.1.2.1) \quad \mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D}) \quad .$$

Le foncteur \mathcal{H} est additif. Il est pleinement fidèle et injectif sur les objets. Il réalise donc \mathcal{D} comme sous-catégorie pleine de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$.

3.1.3. Supposons que la catégorie \mathcal{D} soit une \mathbb{Z} -catégorie stricte. Les foncteurs de translations de $\mathcal{D} : X \mapsto X[n], n \in \mathbb{Z}$, s'étendent en automorphismes de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$:

$$\left(X \xrightarrow{f} Y \right) \mapsto \left(X[n] \xrightarrow{f[n]} Y[n] \right) .$$

Il résulte immédiatement de la propriété universelle de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ (3.1.1.1) que ces automorphismes passent au quotient et définissent sur $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ une structure de \mathbb{Z} -catégorie stricte. Le foncteur $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D})$ est un \mathbb{Z} -foncteur strict.

3.1.4. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux \mathbb{Z} -catégories strictes additives et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un \mathbb{Z} -foncteur additif (tordu par le cocycle trivial). Soit $\mathcal{F}\ell_1(F)$ l'extension de F aux catégories de morphismes :

$$\mathcal{F}\ell_1(F) \left(X \xrightarrow{f} Y \right) = \left(FX \xrightarrow{Ff} FY \right) .$$

Le foncteur $\mathcal{F}\ell_1(F)$ transforme les morphismes négligeables de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ en morphismes négligeables de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}')$. Il définit par suite un foncteur :

$$(3.1.4.1) \quad \mathbf{A}(F) : \mathbf{A}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D}') .$$

Le foncteur $\mathbf{A}(F)$ est additif. Il résulte immédiatement des propriétés universelles des catégories $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ et $\mathbf{A}(\mathcal{D}')$ que le foncteur $\mathbf{A}(F)$ est muni canoniquement d'une structure de \mathbb{Z} -foncteur.

Soit $F' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}''$ un \mathbb{Z} -foncteur additif entre \mathbb{Z} -catégories strictes additives. On a alors :

$$(3.1.4.2) \quad \mathbf{A}(F') \mathbf{A}(F) = \mathbf{A}(F'F) .$$

Le diagramme ci-après est commutatif :

$$(3.1.4.3) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D}' \\ \mathcal{H} \downarrow & & \downarrow \mathcal{H}' \\ \mathbf{A}(\mathcal{D}) & \xrightarrow{\mathbf{A}(F)} & \mathbf{A}(\mathcal{D}') \end{array}$$

(les foncteurs \mathcal{H} et \mathcal{H}' sont définis en (3.1.2)).

Soit de même $m : F \longrightarrow F''$ un morphisme de \mathbb{Z} -foncteurs additifs entre $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$. On en déduit, par les mêmes arguments que précédemment, un morphisme de \mathbb{Z} -foncteurs :

$$(3.1.4.4) \quad \mathbf{A}(m) : \mathbf{A}(F) \longrightarrow \mathbf{A}(F'') .$$

Si m et m' sont deux morphismes composable de \mathbb{Z} -foncteurs additifs, on a :

$$(3.1.4.5) \quad \mathbf{A}(m') \mathbf{A}(m) = \mathbf{A}(m'm) .$$

3.2. Propriétés de la catégorie $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ (\mathcal{D} catégorie triangulée).

3.2.0. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux catégories triangulées. Désignons par $\mathcal{E}x(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs exacts de \mathcal{D} dans \mathcal{D}' et dont les morphismes sont les morphismes de foncteurs exacts. Désignons de même par $\mathbb{Z}\text{-Add}(\mathbf{A}(\mathcal{D}), \mathbf{A}(\mathcal{D}'))$ la catégorie dont les objets sont les \mathbb{Z} -foncteurs additifs de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ dans $\mathbf{A}(\mathcal{D}')$ et dont les morphismes sont les morphismes de \mathbb{Z} -foncteurs. Il résulte de ce qui précède qu'on a défini un foncteur :

$$(3.2.0.1) \quad \mathbf{A}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'} : \mathcal{E}x(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Add}(\mathbf{A}(\mathcal{D}), \mathbf{A}(\mathcal{D}')) .$$

Ce foncteur associe à un foncteur exact F le foncteur $\mathbf{A}(F)$.

Théorème 3.2.1. (*) a) Si \mathcal{D} est une catégorie triangulée, la catégorie $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ est abélienne. Si $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ est un foncteur exact entre deux catégories triangulées, le foncteur $\mathbf{A}(F)$ (3.1.4.1) est exact. Le foncteur $\mathbf{A}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$ (3.2.0.1) est pleinement fidèle et injectif sur les objets.

b) Les objets de \mathcal{D} sont injectifs et projectifs dans $\mathbf{A}(\mathcal{D})$. Tout objet de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ est isomorphe à un objet quotient (resp. à un sous-objet) d'un objet de \mathcal{D} .

c) Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Désignons par $\mathcal{E}x(\mathbf{A}(\mathcal{D}), \mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs exacts de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ dans \mathcal{A} et les morphismes, les morphismes de foncteurs. De même, désignons par $\mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de \mathcal{D} dans \mathcal{A} et les morphismes, les morphismes de foncteurs. La composition avec le foncteur $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D})$ définit un foncteur :

$$\mathcal{E}x(\mathbf{A}(\mathcal{D}), \mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{A}) .$$

Ce foncteur est pleinement fidèle. Son image essentielle est constituée par les foncteurs cohomologiques de \mathcal{D} dans \mathcal{A} (1.1.5). En particulier, le foncteur $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D})$ est un foncteur cohomologique.

La démonstration de ce théorème nous occupera jusqu'à l'alinéa (3.2.9). Nous démontrerons d'abord trois propositions intermédiaires.

3.2.2. Soit \mathbf{U} un univers tel que la catégorie \mathcal{D} soit \mathbf{U} -petite, i.e. tel que \mathcal{D} soit un élément de \mathbf{U} . Soit \mathcal{D}^\wedge la catégorie des foncteurs *additifs* contravariants sur \mathcal{D} à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens \mathbf{U} -petits. La catégorie \mathcal{D}^\wedge est abélienne et le foncteur canonique $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^\wedge$, qui associe à tout objet de \mathcal{D} le foncteur qu'il représente, est pleinement fidèle. Le foncteur h transforme tout objet de \mathcal{D} en objet projectif de \mathcal{D}^\wedge .

(*) Ce théorème m'a été communiqué par Freyd [17].

Un objet de \mathcal{D}^\wedge est dit *admissible* s'il est image d'un morphisme entre foncteurs représentables. Soit $\mathcal{I}m : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}^\wedge$ le foncteur :

$$(3.2.2.1) \quad \mathcal{I}m\left(X \xrightarrow{f} Y\right) = \text{image du morphisme } h(f).$$

Le foncteur $\mathcal{I}m$ est additif et transforme les morphismes négligeables en morphismes nuls. Il se factorise donc d'une manière unique par un foncteur additif noté abusivement :

$$(3.2.2.2) \quad \mathcal{I}m : \mathbf{A}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}^\wedge.$$

Le foncteur composé $\mathcal{I}m \circ \mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}^\wedge$ n'est autre que le foncteur h . Un objet de \mathcal{D}^\wedge est isomorphe à l'image par $\mathcal{I}m$ d'un objet de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ si et seulement s'il est admissible.

Proposition 3.2.3. *Le foncteur $\mathcal{I}m : \mathbf{A}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}^\wedge$ est pleinement fidèle.*

Soit :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array} = (g; g')$$

un morphisme de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$. Nous désignerons par $\mathcal{I}m((g; g'))$ l'image par $\mathcal{I}m$ du morphisme $(g; g')$. Le diagramme de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ \text{id}_X \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow \text{id}_Y \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \end{array}$$

fournit, en appliquant le foncteur $\mathcal{I}m$, le diagramme :

$$h(X) \xrightarrow{\mathcal{I}m((\text{id}_X; f))} \mathcal{I}m(f) \xrightarrow{\mathcal{I}m((f; \text{id}_Y))} h(Y).$$

On a l'égalité :

$$(3.2.3.1) \quad \mathcal{I}m((f; \text{id}_Y)) \circ \mathcal{I}m((\text{id}_X; f)) = h(f).$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Soient (X, Y, f) et (X', Y', f') deux objets de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$. Pour démontrer la proposition (3.2.3), il suffit de montrer que l'homomorphisme défini par le foncteur $\mathcal{I}m$:

$$(3.2.3.2) \quad \mathbf{Hom}_{\mathbf{A}(\mathcal{D})}((X, Y, f), (X', Y', f')) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(\mathcal{I}m(f), \mathcal{I}m(f'))$$

est un isomorphisme. Montrons d'abord qu'il est injectif. Soit donc :

$$(g; g') : (X, Y, f) \longrightarrow (X', Y', f')$$

un morphisme de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$ tel que $\mathcal{I}m((g; g')) = 0$. Le morphisme composé :

$$\mathcal{I}m((f'; \mathbf{id}_{Y'})) \circ \mathcal{I}m((g; g')) \circ \mathcal{I}m(\mathbf{id}_X; f)$$

est égal au morphisme $h(g'f)$. Par suite, $h(g'f) = 0$. Le foncteur h étant pleinement fidèle, on a $g'f = 0$. Par suite, le morphisme $(g; g')$ est négligeable. Pour démontrer que l'homomorphisme (3.2.3.2) est surjectif, il suffit de démontrer le lemme :

Lemme 3.2.4. *Soit $\mathcal{I}m(f) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{I}m(f')$ un morphisme de \mathcal{D}^\wedge . Il existe deux morphismes de \mathcal{D} , $g : X \longrightarrow X'$ et $g' : Y \longrightarrow Y'$, tels que les diagrammes ci-après soient commutatifs :*

$$(3.2.4.1) \quad \begin{array}{ccc} h(X) & \xrightarrow{\mathcal{I}m((\mathbf{id}_X; f))} & \mathcal{I}m(f) \\ h(g) \downarrow & & \downarrow \alpha \\ h(X') & \xrightarrow{\mathcal{I}m((\mathbf{id}_{X'}; f'))} & \mathcal{I}m(f') \end{array}$$

$$(3.2.4.2) \quad \begin{array}{ccc} h(X) & \xrightarrow{h(f)} & h(Y) \\ h(g) \downarrow & & \downarrow h(g') \\ h(X') & \xrightarrow{h(f')} & h(Y') \end{array}$$

En effet, on déduit immédiatement du lemme que le morphisme α est égal au morphisme $\mathcal{I}m((g; g'))$. Ceci résulte de l'égalité (3.2.3.1) et du fait que $\mathcal{I}m((\mathbf{id}_X; f))$ est un épimorphisme de \mathcal{D}^\wedge .

Pour démontrer le lemme (3.2.4), remarquons que le morphisme :

$$h(X') \xrightarrow{\mathcal{I}m((\text{id}_{X'}; f'))} \mathcal{I}m(f')$$

est un épimorphisme de \mathcal{D}^\wedge . Les foncteurs représentables étant des objets projectifs de \mathcal{D}^\wedge , il existe un morphisme $g : X \rightarrow X'$ tel que le diagramme (3.2.4.1) soit commutatif.

Passons maintenant à la construction du morphisme $g' : Y \rightarrow Y'$. Il résulte des axiomes TRI et TRII des catégories triangulées qu'il existe deux triangles distingués de la forme (Z, X, Y, u, f, v) et (Z', X', Y', u', f', v') . Comme pour tout objet W de \mathcal{D} , le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(W, \cdot)$ est un foncteur cohomologique (1.2.1), les suites :

$$\begin{array}{ccccc} h(Z) & \xrightarrow{h(u)} & h(X) & \xrightarrow{\mathcal{I}m((\text{id}_X; f))} & \mathcal{I}m(f) \longrightarrow 0 \\ h(Z') & \xrightarrow{h(u')} & h(X') & \xrightarrow{\mathcal{I}m((\text{id}_{X'}; f'))} & \mathcal{I}m(f') \longrightarrow 0 \end{array}$$

sont exactes. Comme $h(Z)$ est un objet projectif de \mathcal{D}^\wedge , il existe un morphisme $g'' : Z \rightarrow Z'$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} h(Z) & \xrightarrow{h(u)} & h(X) \\ h(g'') \downarrow & & \downarrow h(g) \\ h(Z') & \xrightarrow{h(u')} & h(X') \end{array}$$

soit commutatif. Il résulte alors de l'axiome TRIII qu'il existe un morphisme g' tel que (g'', g, g') soit un morphisme de triangle. En particulier, le diagramme (3.2.4.2) est commutatif. Ceci achève la démonstration du lemme (3.2.4) et de la proposition (3.2.3).

Proposition 3.2.5. *Soient V et V' deux objets admissibles de \mathcal{D}^\wedge et $\alpha : V \rightarrow V'$ un morphisme de \mathcal{D}^\wedge . Le noyau de α dans \mathcal{D}^\wedge (resp. le conoyau de α dans \mathcal{D}^\wedge) est un objet admissible de \mathcal{D}^\wedge .*

D'après (3.2.3), on peut supposer que $V = \mathcal{I}m(f)$ et $V' = \mathcal{I}m(f')$ et que α est le morphisme induit sur les images des morphismes $h(f)$ et $h(f')$ par un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} h(X) & \xrightarrow{h(f)} & h(Y) \\ h(g) \downarrow & & \downarrow h(g') \\ h(X') & \xrightarrow{h(f')} & h(Y') \end{array}$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Soit alors $(Z, X, Y', u, f'g, v)$ un triangle distingué de \mathcal{D} . Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 h(Z) & \xrightarrow{h(fu)} & h(Y) \\
 h(u) \downarrow & & \downarrow \text{id}_{h(Y)} \\
 h(X) & \xrightarrow{h(f)} & h(Y) \\
 h(g) \downarrow & & \downarrow h(g') \\
 h(X') & \xrightarrow{h(f')} & h(Y')
 \end{array}$$

fournit, en prenant les images des morphismes horizontaux, un diagramme :

$$(3.2.5.1) \quad \mathcal{I}m(fu) \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\alpha} V' .$$

Montrons que le morphisme $\mathcal{I}m(fu) \xrightarrow{\beta} V$ est le noyau de α . Tout d'abord, il est clair que β est un monomorphisme : en effet, $\mathcal{I}m(fu)$ et V sont des sous-objets de $h(Y)$. Ensuite, le composé $\alpha\beta$ est nul : en effet, le morphisme canonique $h(Z) \rightarrow \mathcal{I}m(fu)$ est un épimorphisme ; le morphisme canonique $V' \rightarrow h(Y')$ est un monomorphisme, et le composé $h(f'gu)$ est l'image par h du composé de deux morphismes consécutifs d'un triangle distingué ; ce morphisme est donc nul (1.2.2). Il reste à montrer que la suite (3.2.5.1) est exacte en V . Soit W un objet de \mathcal{D} . Un morphisme σ de $h(W)$ dans V provient toujours d'un morphisme de $h(W)$ dans $h(X)$ ($h(W)$ est projectif dans \mathcal{D}^\wedge), i.e. d'un morphisme $m : W \rightarrow X$. Ce morphisme composé avec α est nul si et seulement si $f'gm = 0$ (V' est un sous-objet de $h(Y')$). Par suite (1.2.1), il existe un morphisme $n : W \rightarrow Z$ tel que $un = m$. Le morphisme σ se factorise donc par $\mathcal{I}m(fu)$.

Montrons maintenant que le conoyau de α dans \mathcal{D}^\wedge est un objet admissible de \mathcal{D}^\wedge . Soit $(X, Y', Z', g'f, u', v')$ un triangle distingué de \mathcal{D} . Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 h(X) & \xrightarrow{h(f)} & h(Y) \\
 h(g) \downarrow & & \downarrow h(g') \\
 h(X') & \xrightarrow{h(f')} & h(Y') \\
 \text{id}_{h(X')} \downarrow & & \downarrow h(u') \\
 h(X') & \xrightarrow{h(u'f')} & h(Z')
 \end{array}$$

fournit, en prenant les images des morphismes horizontaux, le diagramme :

$$(3.2.5.2) \quad V \xrightarrow{\alpha} V' \xrightarrow{\gamma} \mathcal{I}m(u'f') .$$

Tout d'abord, γ est un épimorphisme : en effet, V' et $\mathcal{I}m(u'f')$ sont des quotients de $h(X')$. Ensuite, le composé $\gamma\alpha$ est nul : en effet, le morphisme canonique $h(X) \rightarrow V$ est un épimorphisme, le morphisme canonique :

$$\mathcal{I}m(u'f') \rightarrow h(Z')$$

est un monomorphisme et le composé $h(u'g'f)$ est transformé par h du composé de deux morphismes consécutifs d'un triangle distingué ; ce morphisme est donc nul (1.2.2). Il reste à montrer que la suite (3.2.5.2) est exacte en V' . Pour cela, d'après les propriétés des suites exactes dans \mathcal{D}^\wedge , il suffit de montrer que pour tout objet W de \mathcal{D} , la suite de groupes commutatifs :

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(h(W), V) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(h(W), V') \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(h(W), \mathcal{I}m(u'f'))$$

est exacte. Soit donc σ un morphisme de $h(W)$ dans V' . Ce morphisme σ composé avec le morphisme canonique de V' dans $h(Y')$ fournit un morphisme de $h(W)$ dans $h(Y')$, i.e. un morphisme $m : W \rightarrow Y'$. Le composé $\gamma\sigma$ est nul si et seulement si $u'm = 0$ ($\mathcal{I}m(u'f')$ est un sous-objet de $h(Z')$). Il existe donc (1.2.1) un morphisme $n : W \rightarrow X$ tel que $g'fn = m$. D'où, en composant avec le morphisme canonique $h(X) \rightarrow V$, un morphisme $\sigma' : h(W) \rightarrow V$. Comme V' est un sous-objet de $h(Y')$, on a $\alpha\sigma' = \sigma$. Ceci achève la démonstration de la proposition (3.2.5).

3.2.6. Il résulte de la proposition (3.2.3) que la catégorie $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ est équivalente à la sous-catégorie pleine des objets admissibles de \mathcal{D}^\wedge . Il résulte de la proposition (3.2.5) que la sous-catégorie pleine des objets admissibles de \mathcal{D}^\wedge est une sous-catégorie abélienne de \mathcal{D}^\wedge . La catégorie $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ est par suite abélienne.

Proposition 3.2.7. *Toute suite exacte de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$:*

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3$$

est isomorphe à une suite de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ déterminée par un diagramme commutatif de \mathcal{D} :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{u_1} & X_2 & \xrightarrow{u_2} & X_3 \\ \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{\text{id}_{Y_1}} & Y_2 = Y_1 & \longrightarrow & Y_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} (X_i \xrightarrow{f_i} Y_i) \simeq V_i \\ 1 \leq i \leq 3 \end{array}$$

tel que le diagramme :

$$X_1 \xrightarrow{u_1} X_2 \xrightarrow{f_3 u_2} Y_3$$

puisse s'insérer dans un triangle distingué $(X_1, X_2, Y_3, u_1, f_3 u_2, u_3)$.

Ceci résulte immédiatement de la démonstration de la proposition (3.2.5).

3.2.8. Démonstration des assertions a) et b) du théorème 3.2.1.

Nous avons déjà montré (3.2.6) que la catégorie $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ est abélienne. Soit $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ un foncteur exact. Il résulte immédiatement de la proposition (3.2.7) que le foncteur $\mathbf{A}(F)$ est exact à gauche. Par ailleurs, il est clair d'après la construction de la catégorie $\mathbf{A}(\mathcal{D})$, que la catégorie $\mathbf{A}(\mathcal{D}^\circ)^\circ$ est canoniquement isomorphe à la catégorie $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ et que le foncteur $\mathbf{A}(F^\circ)^\circ$ est canoniquement isomorphe au foncteur $\mathbf{A}(F)$. Le foncteur F° étant exact (1.1.7), on en déduit que $\mathbf{A}(F^\circ)$ est un foncteur exact à gauche et, par suite, que le foncteur $\mathbf{A}(F)$ est aussi exact à droite, donc exact. Les objets admissibles de \mathcal{D}^\wedge sont isomorphes à des sous-objets et des objets quotients de foncteurs représentables. Par suite (3.2.3), tout objet de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ est isomorphe à un sous-objet et à un objet quotient d'un objet de \mathcal{D} . Les foncteurs représentables sont des objets projectifs dans \mathcal{D}^\wedge . Ils sont donc (3.2.5) projectifs dans la sous-catégorie pleine des objets admissibles de \mathcal{D}^\wedge . Par suite (3.2.3), les objets de \mathcal{D} sont des projectifs de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$. On en déduit que les objets de \mathcal{D}° sont des objets projectifs de $\mathbf{A}(\mathcal{D}^\circ)$ et par suite, en passant aux catégories opposées, que les objets de \mathcal{D} sont des objets injectifs de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$. La démonstration en forme du fait que $\mathbf{A}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$ est pleinement fidèle peut être sans danger laissée au lecteur : un morphisme entre foncteurs exacts est uniquement déterminé lorsqu'on connaît ses valeurs sur suffisamment d'objets projectifs.

3.2.9. Fin de la démonstration du théorème 3.2.1.

Montrons d'abord que le foncteur $\mathcal{H} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{A}(\mathcal{D})$ est un foncteur cohomologique. Soit :

$$(X, Y, Z, f, g, h)$$

un triangle distingué de \mathcal{D} . Il faut démontrer que la suite :

$$\mathcal{H}(X) \xrightarrow{\mathcal{H}(f)} \mathcal{H}(Y) \xrightarrow{\mathcal{H}(g)} \mathcal{H}(Z)$$

est exacte. Pour cela ((3.2.3) et (3.2.5)), il suffit de montrer que la suite :

$$(3.2.9.1) \quad h(X) \xrightarrow{h(f)} h(Y) \xrightarrow{h(g)} h(Z)$$

est exacte dans \mathcal{D}^\wedge . La suite (3.2.9.1) est exacte si et seulement si pour tout objet W de \mathcal{D} , la suite :

$\mathbf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(h(W), h(X)) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(h(W), h(Y)) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(h(W), h(Z))$
est exacte. Or ceci résulte de ce que h est pleinement fidèle et de (1.2.1).

Soit alors \mathcal{A} une catégorie abélienne et :

$$\mathcal{E}x(\mathbf{A}(\mathcal{D}), \mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{A})$$

le foncteur “composition avec \mathcal{H} ”. Il est clair que ce foncteur est pleinement fidèle : un morphisme entre foncteurs exacts est uniquement déterminé lorsqu’on connaît ses valeurs sur suffisamment d’objets projectifs. Il reste à démontrer que tout foncteur cohomologique $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ se factorise à travers $\mathbf{A}(\mathcal{D})$:

$$(3.2.9.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \mathbf{A}(\mathcal{D}) \\ & \searrow \Psi & \downarrow \Phi \\ & & \mathcal{A} \end{array} ,$$

le foncteur Φ étant exact. Pour tout objet $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ posons :

$$\Phi\left(X \xrightarrow{f} Y\right) = \text{Image dans } \mathcal{A} \text{ de } \Psi(X) \xrightarrow{\Psi(f)} \Psi(Y) \quad (*) .$$

On détermine ainsi un foncteur de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ dans \mathcal{A} tel que le diagramme (3.2.9.2) soit commutatif. Montrons que Φ est un foncteur exact. Il résulte immédiatement de (3.2.7) que Φ est exact à gauche. En passant aux catégories opposées, on montre de même que Φ est exact à droite. Ceci achève la démonstration du théorème (3.2.1).

Remarque 3.2.10. 1) La propriété universelle décrite dans le théorème (3.2.1, c)) détermine la catégorie $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ à équivalence près.

2) Lorsque dans \mathcal{D} les sommes dénombrables ou bien les produits dénombrables sont représentables, tous les objets projectifs (resp. injectifs) de $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ sont isomorphes à des objets de \mathcal{D} . En effet, un tel objet est facteur direct dans $\mathbf{A}(\mathcal{D})$ d’un objet de \mathcal{D} . Il est donc noyau d’un projecteur d’un objet de \mathcal{D} . Or sous les hypothèses faites, les projecteurs sont décomposables dans \mathcal{D} (1.2.9).

(*) On remarquera que la construction du foncteur Φ fait intervenir le choix d’un foncteur “image” dans \mathcal{A} . Ce choix est bien entendu unique à isomorphisme unique près. On peut toujours imposer, ce que nous ferons désormais, que le foncteur “image” associe à tout morphisme identique id_T dans \mathcal{A} , l’objet T muni du morphisme $T \xrightarrow{\text{id}_T} T$.

4. Objets spectraux.

Nous reprenons, pour l'adapter aux catégories triangulées, l'exposition des suites spectrales de [1], chap. XV, §7.

4.1. Définition des objets spectraux.

4.1.1. Soit \mathcal{J} une catégorie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J})$ la catégorie des suites de n morphismes composables de \mathcal{J} (chap. I, 3.3.6). Nous utiliserons trois foncteurs notés $s_i : \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J})$, $1 \leq i \leq 3$:

$$(4.1.1.1) \quad \begin{cases} \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \in \mathbf{Ob} \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J}) , \\ s_1 \left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \right) = \xrightarrow{f} , \\ s_2 \left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \right) = \xrightarrow{gf} , \\ s_3 \left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \right) = \xrightarrow{g} , \end{cases}$$

et deux morphismes de foncteurs :

$$(4.1.1.2) \quad \begin{cases} u_1 : s_1 \rightarrow s_2 \text{ défini par :} \\ u_1 \left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \right) = \text{id} \downarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{gf} \\ \downarrow g \end{array} ; \\ u_2 : s_2 \rightarrow s_3 \text{ défini par :} \\ u_2 \left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \right) = f \downarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{gf} \\ \xrightarrow{g} \\ \downarrow \text{id} \end{array} . \end{cases}$$

4.1.2. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée et \mathcal{J} une catégorie. Un *objet spectral de type \mathcal{J} à valeurs dans \mathcal{D}* est un objet constitué par deux foncteurs :

a) Un foncteur $X : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\left(\xrightarrow{f} \right) \mapsto X_f .$$

b) Un foncteur de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ dans la catégorie des triangles distingués de \mathcal{D} de la forme :

$$\omega_2 = \left(\xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \right) \longmapsto X_f \xrightarrow{X * u_1(\omega_2)} X_{gf} \xrightarrow{X * u_2(\omega_2)} X_g \xrightarrow{\delta(\omega_2)} X_f[1] .$$

Pour désigner les objets spectraux de type \mathcal{J} , nous utiliserons la notation $(X_f, f \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}), \delta(\omega_2), \omega_2 \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J}))$, ou plus simplement (X_f, δ) quand aucune confusion n'en résulte.

4.1.3. Soient \mathcal{C} une catégorie additive et $F : \mathcal{J} \longrightarrow \text{comp}(\mathcal{C})$ un foncteur. On a montré au chapitre I, (3.3.6) comment associer à F un objet spectral de type \mathcal{J} à valeurs dans $K(\mathcal{C})$. L'objet spectral décrit au chapitre I, (3.3.6) est appelé l'*objet spectral associé au foncteur F* .

4.1.4. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et \mathcal{J} une catégorie. Un *objet spectral de type \mathcal{J} à valeurs dans \mathcal{A}* est constitué par :

a) Une suite de foncteurs $H^n : \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) La donnée pour tout objet $\omega_2 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ et tout entier n , d'un morphisme $\delta^n(\omega_2) : H^n(g) \longrightarrow H^{n+1}(f)$, fonctoriel en ω_2 , tel que le diagramme :

$$\cdots \longrightarrow H^n(f) \xrightarrow{H^n * u_1(\omega_2)} H^n(gf) \xrightarrow{H^n * u_2(\omega_2)} H^n(g) \xrightarrow{\delta^n(\omega_2)} H^{n+1}(f) \longrightarrow \cdots$$

soit une suite exacte illimitée de \mathcal{A} .

Nous utiliserons la notation :

$$(H^n(f), f \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}), \delta^n(\omega_2), \omega_2 \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J}))$$

pour désigner les objets spectraux de type \mathcal{J} , ou plus simplement $(H^n(f), \delta)$ quand aucune confusion n'en résulte.

4.1.5. Soit $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un foncteur exact entre deux catégories triangulées. Soit (X_f, δ) un objet spectral de type \mathcal{J} à valeurs dans \mathcal{D} . Le couple des foncteurs $(FX_f, F\delta)$ est un objet spectral de type \mathcal{J} à valeurs dans \mathcal{D}' . De même, un foncteur cohomologique $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ d'une catégorie triangulée dans une catégorie abélienne transforme les objets spectraux à valeurs dans \mathcal{D} en objets spectraux à valeurs dans \mathcal{A} .

4.1.6. Soient \mathcal{D} une catégorie triangulée et (X_f, δ) , (Y_f, δ') deux objets spectraux de type \mathcal{J} à valeurs dans \mathcal{D} . Un *morphisme d'objets spectraux* est un morphisme de foncteurs :

$$m_f : X_f \longrightarrow Y_f , \quad f \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) ,$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

tel que pour tout objet $\omega_2 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$, le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_g & \xrightarrow{\delta(\omega_2)} & X_f[1] \\ m_g \downarrow & & \downarrow m_f[1] \\ Y_g & \xrightarrow{\delta'(\omega_2)} & Y_f[1] \end{array} .$$

Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et $(H^n(f), \delta)$, $(H'^n(f), \delta')$ deux objets spectraux de type \mathcal{J} à valeurs dans \mathcal{A} . Un *morphisme d'objets spectraux* est une suite de morphismes de foncteurs :

$$m^n(f) : H^n(f) \longrightarrow H'^n(f) , \quad f \in \mathbf{Ob} \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}) , \quad n \in \mathbb{Z} ,$$

telle que pour tout objet $\omega_2 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ et tout entier n , le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(g) & \xrightarrow{\delta^n(\omega_2)} & H^{n+1}(f) \\ m^n(g) \downarrow & & \downarrow m^{n+1}(f) \\ H'^n(g) & \xrightarrow{\delta'^n(\omega_2)} & H'^{n+1}(f) \end{array} .$$

Les objets spectraux de type \mathcal{J} à valeurs dans \mathcal{D} (resp. \mathcal{A}) forment une catégorie.

4.2. Mécanisme des suites spectrales.

4.2.1. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et $(H^n(f), \delta)$ un objet spectral de type \mathcal{J} . Pour tout objet $\omega_2 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$, posons :

$$(4.2.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} B \begin{bmatrix} n \\ \omega_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} n \\ f, g \end{bmatrix} = \mathbf{Im} \left(H^{n-1}(g) \xrightarrow{\delta^{n-1}(\omega_2)} H^n(f) \right) \\ \qquad \qquad \qquad \simeq \mathbf{Ker} \left(H^n(f) \xrightarrow{H^n * u_1(\omega_2)} H^n(gf) \right) , \\ Z \begin{bmatrix} n \\ \omega_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} n \\ f, g \end{bmatrix} = \mathbf{Ker} \left(H^n(g) \xrightarrow{\delta^n(\omega_2)} H^{n+1}(f) \right) \\ \qquad \qquad \qquad \simeq \mathbf{Im} \left(H^n(gf) \xrightarrow{H^n * u_2(\omega_2)} H^n(g) \right) . \end{array} \right.$$

On a ainsi défini deux foncteurs de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ dans \mathcal{A} . On a par définition des inclusions :

$$B \begin{bmatrix} n \\ f, g \end{bmatrix} \subset H^n(f) \quad , \quad Z \begin{bmatrix} n \\ f, g \end{bmatrix} \subset H^n(g) \quad .$$

Soit $\omega_3 = \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} \xrightarrow{h}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$.

Proposition 4.2.2. *On a les inclusions :*

$$B \begin{bmatrix} n \\ g, h \end{bmatrix} \subset Z \begin{bmatrix} n \\ f, g \end{bmatrix} \subset H^n(g) \quad .$$

La deuxième inclusion est mise pour mémoire. Pour démontrer la première inclusion, il suffit de montrer que le composé des deux morphismes de la suite :

$$H^{n-1}(h) \xrightarrow{\delta_1} H^n(g) \xrightarrow{\delta_2} H^{n+1}(f)$$

est nul. Or l'objet $\xrightarrow{g} \xrightarrow{h}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ fournit la suite exacte :

$$H^{n-1}(h) \xrightarrow{\delta_1} H^n(g) \xrightarrow{u} H^n(hg) \quad ,$$

et le morphisme de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$:

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{g} & \\ \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow h \\ \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{hg} & & \end{array}$$

fournit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(g) & \xrightarrow{\delta_2} & H^{n+1}(f) \\ u \downarrow & \nearrow \delta_3 & \\ H^n(hg) & & \end{array} .$$

D'où la proposition.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

4.2.3. Posons alors :

$$(4.2.3.1) \quad E \left[\begin{matrix} n \\ \omega_3 \end{matrix} \right] = E \left[\begin{matrix} n \\ f, g, h \end{matrix} \right] = Z \left[\begin{matrix} n \\ f, g \end{matrix} \right] \Big/ B \left[\begin{matrix} n \\ g, h \end{matrix} \right] \quad .$$

On a ainsi défini un foncteur de $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$ dans \mathcal{A} .

Soit maintenant $\omega_3 = \xrightarrow{f_2} \xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$. L'objet $\xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4}$ de $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$ fournit la suite exacte :

$$H^n(f_3) \xrightarrow{u} H^n(f_4 f_3) \longrightarrow H^n(f_4) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(f_3) \quad .$$

De plus, le morphisme dans $\mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})$:

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{f_2} & & \xrightarrow{f_3} & \\ \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow f_4 \\ & \xrightarrow{f_2} & & \xrightarrow{f_4 f_3} & \end{array}$$

fournit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(f_4 f_3) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(f_2) \\ u \uparrow & \nearrow \delta & \\ H^n(f_3) & & \end{array} \quad .$$

Par suite, le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} H^n(f_4 f_3) & \longrightarrow & H^n(f_4) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(f_3) \\ u \uparrow & \searrow \delta & & & \\ H^n(f_3) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(f_2) & & \end{array}$$

définit un morphisme :

$$\Psi^n(\omega_3) : Z \left[\begin{matrix} n \\ f_3, f_4 \end{matrix} \right] \longrightarrow H^{n+1}(f_2) \Big/ B \left[\begin{matrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{matrix} \right] \quad .$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\Psi^n(\omega_3)) &= Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3f_2, f_4 \end{smallmatrix}\right] , \\ \text{Im}(\Psi^n(\omega_3)) &= B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_4f_3 \end{smallmatrix}\right] / B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix}\right] .\end{aligned}$$

Le morphisme $\Psi^n(\omega_3)$ définit par suite un isomorphisme :

$$\Phi^n(\omega_3) : Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3, f_4 \end{smallmatrix}\right] / Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3f_2, f_4 \end{smallmatrix}\right] \xrightarrow{\sim} B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_4f_3 \end{smallmatrix}\right] / B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix}\right] .$$

Soit alors $\omega_5 = \xrightarrow{f_1} \xrightarrow{f_2} \xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4} \xrightarrow{f_5}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_5(\mathcal{J})$. Les morphismes canoniques :

$$\begin{aligned}E\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3, f_4, f_5 \end{smallmatrix}\right] &\longrightarrow Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3, f_4 \end{smallmatrix}\right] / Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3f_2, f_4 \end{smallmatrix}\right] \longrightarrow 0 , \\ 0 &\longrightarrow B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_4f_3 \end{smallmatrix}\right] / B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix}\right] \longrightarrow E\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_1, f_2, f_3 \end{smallmatrix}\right] ,\end{aligned}$$

composés avec l'isomorphisme $\Phi^n(f_2, f_3, f_4)$, définissent un morphisme :

(4.2.3.2)

$$d^n(\omega_5) = d^n(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) : E\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3, f_4, f_5 \end{smallmatrix}\right] \longrightarrow E\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_1, f_2, f_3 \end{smallmatrix}\right] .$$

On a :

$$(4.2.3.3) \quad \begin{cases} \text{Im}(d^n(\omega_5)) = B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_4f_3 \end{smallmatrix}\right] / B\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix}\right] , \\ \text{Ker}(d^n(\omega_5)) = Z\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_3f_2, f_4 \end{smallmatrix}\right] / B\left[\begin{smallmatrix} n \\ f_4, f_5 \end{smallmatrix}\right] . \end{cases}$$

Le morphisme $d^n(\omega_5)$ dépend fonctoriellement, en un sens évident, de ω_5 .

Proposition 4.2.4. Soit $\omega_7 = \xrightarrow{f_1} \xrightarrow{f_2} \xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4} \xrightarrow{f_5} \xrightarrow{f_6} \xrightarrow{f_7}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_7(\mathcal{J})$. Posons :

$$d_1 = d^{n-1}(f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) ,$$

$$d_2 = d^n(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) .$$

Le composé des morphismes :

$$E \left[\begin{matrix} n-1 \\ f_5, f_6, f_7 \end{matrix} \right] \xrightarrow{d_1} E \left[\begin{matrix} n \\ f_3, f_4, f_5 \end{matrix} \right] \xrightarrow{d_2} E \left[\begin{matrix} n+1 \\ f_1, f_2, f_3 \end{matrix} \right]$$

est nul. On a un isomorphisme canonique :

$$(4.2.4.1) \quad \text{Ker}(d_2)/\text{Im}(d_1) \simeq E \left[\begin{matrix} n \\ f_3 f_2, f_4, f_6 f_5 \end{matrix} \right] .$$

Résulte immédiatement de (4.2.3.3) et (4.2.3.1).

4.2.5. Les morphismes $d^n(\omega_5)$, $\omega_5 \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_5(\mathcal{J})$, sont appelés les *différentielles* (relatives à l'objet spectral considéré). La famille des foncteurs (4.2.3.1) $\omega_3 \mapsto E \left[\begin{matrix} n \\ \omega_3 \end{matrix} \right]$, $\omega_3 \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$, munis des différentielles (4.2.3.2) $d^n(\omega_5)$, $\omega_5 \in \text{Ob } \mathcal{F}\ell_5(\mathcal{J})$, est appelée la *famille spectrale* associée à l'objet spectral $(H^n(f), \delta)$.

4.2.6. Soit $\omega_4 = \xrightarrow{f_1} \xrightarrow{f_2} \xrightarrow{f_3} \xrightarrow{f_4}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_4(\mathcal{J})$. On en déduit un diagramme dans $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$:

$$\begin{array}{ccccccc} & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{f_1} & & \\ f_1 \downarrow & \xrightarrow{\text{id}} & \downarrow f_1 & \downarrow f_1 & \downarrow f_2 f_1 & \downarrow f_2 & \\ f_2 \downarrow & \xrightarrow{\text{id}} & \downarrow f_2 & \downarrow f_3 f_2 & \downarrow f_3 & \downarrow f_3 & \\ f_3 \downarrow & \xrightarrow{\text{id}} & \downarrow f_4 f_3 & \downarrow f_4 & \downarrow f_4 & \downarrow f_4 & \\ & \xrightarrow{f_4} & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{\text{id}} & \xrightarrow{\text{id}} & & \end{array} .$$

D'où, en appliquant le foncteur $E \left[\begin{matrix} n \\ \omega_3 \end{matrix} \right]$, trois suites exactes de \mathcal{A} :

$$0 \rightarrow B \left[\begin{matrix} n \\ f_2, f_4 f_3 \end{matrix} \right] / B \left[\begin{matrix} n \\ f_2, f_3 \end{matrix} \right] \rightarrow E \left[\begin{matrix} n \\ f_1, f_2, f_3 \end{matrix} \right] \rightarrow E \left[\begin{matrix} n \\ f_1, f_2, f_4 f_3 \end{matrix} \right] \rightarrow 0 ,$$

$$0 \rightarrow E \left[\begin{matrix} n \\ f_1, f_2, f_4 f_3 \end{matrix} \right] \rightarrow E \left[\begin{matrix} n \\ f_1, f_3 f_2, f_4 \end{matrix} \right] \rightarrow E \left[\begin{matrix} n \\ f_2 f_1, f_3, f_4 \end{matrix} \right] \rightarrow 0 ,$$

$$0 \rightarrow E \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_2 f_1, f_3, f_4 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow E \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_2, f_3, f_4 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow Z \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_2, f_3 \end{smallmatrix} \right] / Z \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_2 f_1, f_3 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow 0.$$

Soit alors f_i , $i \in \mathbb{Z}$, une suite illimitée de morphismes composable de \mathcal{J} . On déduit de ce qui précède et de la définition des différentielles, une suite exacte illimitée :

$$\cdots \rightarrow E \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ f_{i+3}, f_{i+4}, f_{i+5} \end{smallmatrix} \right] \xrightarrow{d^{n-1}} E \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_{i+1}, f_{i+2}, f_{i+3} \end{smallmatrix} \right] \rightarrow E \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_{i+1}, f_{i+3} f_{i+2}, f_{i+4} \end{smallmatrix} \right] \rightarrow \\ \rightarrow E \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_{i+2}, f_{i+3}, f_{i+4} \end{smallmatrix} \right] \xrightarrow{d^n} E \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ f_i, f_{i+1}, f_{i+2} \end{smallmatrix} \right] \rightarrow \cdots .$$

Le lecteur curieux élucidera les rapports de cette suite exacte avec la suite exacte à 5 termes de bas degré des suites spectrales classiques.

4.2.7. Tout diagramme commutatif de \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \nearrow & \downarrow \varphi & \searrow & \\ X' & \xrightarrow{\varphi'} & X & \xrightarrow{\eta} & X'' \end{array} ,$$

dans lequel la ligne est exacte, définit par l'intermédiaire de η un isomorphisme ([1] p.316, Lemme 1.1) :

$$\text{Im}(\varphi) / \text{Im}(\varphi') \simeq \text{Im}(\psi) .$$

Soit $\omega_3 = \xrightarrow{f_1} \xrightarrow{f_2} \xrightarrow{f_3}$ un objet de $\mathcal{F}\ell_3(\mathcal{J})$. En appliquant la remarque précédente au diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & H^n(f_2 f_1) & & \\ & \swarrow \delta & \downarrow & \searrow & \\ H^{n-1}(f_3) & \xrightarrow{\delta} & H^n(f_2) & \longrightarrow & H^n(f_3 f_2) \end{array} ,$$

on obtient un isomorphisme :

$$(4.2.7.1) \quad E \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_1, f_2, f_3 \end{smallmatrix} \right] \xrightarrow{\sim} \text{Im}(H^n(f_2 f_1) \rightarrow H^n(f_3 f_2)) .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

En appliquant la même remarque au diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^n(f_2 f_1) & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 H^n(f_1) & \longrightarrow & H^n(f_3 f_2 f_1) & \longrightarrow & H^n(f_3 f_2) \quad ,
 \end{array}$$

on obtient un isomorphisme :

(4.2.7.2)

$$E \left[\begin{smallmatrix} n \\ f_1, f_2, f_3 \end{smallmatrix} \right] \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}(H^n(f_2 f_1) \rightarrow H^n(f_3 f_2 f_1)) / \operatorname{Im}(H^n(f_1) \rightarrow H^n(f_3 f_2 f_1)).$$

4.3. Les termes $E \left[\begin{smallmatrix} n \\ -\infty, p, q, +\infty \end{smallmatrix} \right]$.

4.3.1. Soit $\tilde{\mathbb{Z}}$ l'ensemble ordonné \mathbb{Z} complété par un élément initial $-\infty$ et un élément final $+\infty$. Par abus de notation, nous désignerons également par $\tilde{\mathbb{Z}}$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\tilde{\mathbb{Z}}$. Un morphisme de $\tilde{\mathbb{Z}}$ est donc un couple $p \leq q$, où p et q sont des éléments de $\tilde{\mathbb{Z}}$. Une suite ordonnée $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ définit un objet de $\mathcal{F}\ell_{n-1}(\tilde{\mathbb{Z}})$ noté (p_1, p_2, \dots, p_n) . Un morphisme de $\tilde{\mathbb{Z}}$ est dit *fini* si sa source et son but appartiennent à \mathbb{Z} . Un objet $\mathcal{F}\ell_n(\tilde{\mathbb{Z}})$ est dit *fini* si les morphismes qui le composent sont finis.

4.3.2. Nous n'utiliserons dans ce travail que les objets spectraux de type $\tilde{\mathbb{Z}}$, qui seront appelés dorénavant objets spectraux. On retrouve ainsi la notion du chapitre XV, §7 de [1]. Soit $\left(H^n(p, q), \delta, p \leq q \in \tilde{\mathbb{Z}} \right)$ un objet spectral à valeurs dans une catégorie abélienne \mathcal{A} . Posons :

$$(4.3.2.1) \quad F^p H^n(-\infty, +\infty) = \operatorname{Im}(H^n(-\infty, p) \rightarrow H^n(-\infty, +\infty)) \quad .$$

On a $F^{+\infty} H^n(-\infty, +\infty) = H^n(-\infty, +\infty)$ et $F^{-\infty} H^n(-\infty, +\infty) = 0$. Les $F^p H^n(-\infty, +\infty)$ forment une filtration croissante de type $\tilde{\mathbb{Z}}$ de $H^n(-\infty, +\infty)$. De plus, pour tout couple $p \leq q$ on a un isomorphisme (4.2.7.2) :

$$E \left[\begin{smallmatrix} n \\ -\infty, p, q, +\infty \end{smallmatrix} \right] \simeq F^q H^n(-\infty, +\infty) / F^p H^n(-\infty, +\infty) \quad .$$

4.3.3. On s'intéresse plus particulièrement aux termes $E \left[\begin{smallmatrix} n \\ p-r+1, p, p+1, p+r \end{smallmatrix} \right]$, $p \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}$, $r > 0$, car ceux-ci permettront, sous des hypothèses convenables, de déterminer le gradué associé à $H^n(-\infty, +\infty)$. Pour nous ramener aux notations de *loc. cit.*, nous poserons :

$$(4.3.3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} E \left[\begin{smallmatrix} n \\ p-r, p-1, p, p+r-1 \end{smallmatrix} \right] = I_r^{-p, n+p}, \\ \text{i.e. :} \\ I_r^{p, q} = E \left[\begin{smallmatrix} p+q \\ -p-r, -p-1, -p, -p+r-1 \end{smallmatrix} \right], \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq r \leq +\infty. \\ \text{Les différentielles correspondantes seront notées :} \\ d_r : I_r^{p, q} \longrightarrow I_r^{p+r, q-r+1}. \end{array} \right.$$

Il nous arrivera très souvent d'utiliser la notation :

$$(4.3.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E \left[\begin{smallmatrix} n \\ p-r+1, p, p+1, p+r \end{smallmatrix} \right] = II_{r+1}^{n-p, p}, \\ \text{i.e. :} \\ II_r^{p, q} = E \left[\begin{smallmatrix} p+q \\ q-r+2, q, q+1, q+r-1 \end{smallmatrix} \right], \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad 2 \leq r \leq +\infty. \\ \text{Les différentielles correspondantes seront notées :} \\ d_r : II_r^{p, q} \longrightarrow II_r^{p+r, q-r+1}. \end{array} \right.$$

Nous préciserons dans chaque cas la notation utilisée. Remarquons que lorsqu'on utilise la notation (4.3.3.1), les termes $I_r^{p, q}$ sont définis pour $r \geq 1$, alors que lorsqu'on utilise la notation (4.3.3.2), les termes $II_r^{p, q}$ ne sont définis que pour $r \geq 2$.

L'ensemble des termes $E \left[\begin{smallmatrix} n \\ p-r+1, p, p+1, p+r \end{smallmatrix} \right]$, $n, p \in \mathbb{Z}$, $1 \leq r \leq +\infty$, munis des différentielles correspondantes, est appelé *la suite spectrale* associée à l'objet spectral $(H^n(p, q), \delta(p, q, r))$.

4.4. Convergence.

4.4.1. Pour une étude détaillée de la convergence des suites spectrales, nous renvoyons à *loc. cit.* Nous n'utiliserons que le critère suivant :

Définition 4.4.2. On dit qu'un objet spectral $(H^n(p, q), \delta)$ à valeurs dans une catégorie abélienne \mathcal{A} est *stationnaire*, si pour tout entier n , il existe deux entiers $u(n), v(n) \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$H^n(p, q) = 0, \quad u(n) \leq p \leq q \leq +\infty ,$$

$$H^n(p, q) = 0, \quad -\infty \leq p \leq q \leq v(n) .$$

Théorème 4.4.3. Soit $(H^n(p, q), \delta)$ un objet spectral stationnaire.

a) Pour tout n , la filtration $F^p H^n(-\infty, +\infty)$, $p \in \tilde{\mathbb{Z}}$, est stationnaire, i.e. il existe deux entiers $n_1 \leq n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$F^{n_1} H^n(-\infty, +\infty) = 0 \quad \text{et} \quad F^{n_2} H^n(-\infty, +\infty) = H^n(-\infty, +\infty) .$$

b) Les différentielles partant de (resp. aboutissant à) $E_{r,p,q,s}^n$ sont nulles si $r \leq v(n+1)$ (resp. $u(n-1) \leq s$), et de plus :

c) Pour tout n et tout couple $p \leq q$, les objets $E_{r,p,q,s}^n$ tels que :

$$-\infty \leq r \leq v(n+1) \quad \text{et} \quad u(n-1) \leq s \leq +\infty$$

sont canoniquement isomorphes.

Ce théorème résulte immédiatement des définitions.

Un objet spectral stationnaire fournit une suite spectrale fortement convergente au sens de *loc. cit.* Nous dirons qu'une suite spectrale associée à un objet spectral est *stationnaire*, ou encore, abusivement, *convergente*, lorsque cet objet spectral est stationnaire. En utilisant l'une ou l'autre des notations de (4.3.3), nous écrirons :

$$I_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(-\infty, +\infty)$$

$$II_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(-\infty, +\infty)$$

pour indiquer qu'une suite spectrale converge. L'ensemble des termes $H^{p+q}(-\infty, +\infty)$ sera alors appelé *l'aboutissement* de la suite spectrale.

4.4.4. Soient $(H^n(p, q), \delta)$, $(H'^n(p, q), \delta')$ deux objets spectraux à valeurs dans \mathcal{A} et $m^n(p, q) = H^n(p, q) \longrightarrow H'^n(p, q)$ un morphisme d'objets spectraux. Un tel morphisme induit un morphisme des familles spectrales correspondantes, *i.e.* une famille de morphismes :

$$m \begin{bmatrix} n \\ p, q, r, s \end{bmatrix} : E \begin{bmatrix} n \\ p, q, r, s \end{bmatrix} \longrightarrow E' \begin{bmatrix} n \\ p, q, r, s \end{bmatrix}$$

qui commutent aux différentielles. En particulier, le morphisme $m(p, q)$ induit un morphisme des suites spectrales correspondantes :

$$m_r^{p, q} : E_r^{p, q} \longrightarrow E'^{p, q}_r .$$

(On pose ici $E_r^{p, q} = I_r^{p, q}$ ou bien $E_r^{p, q} = II_r^{p, q}$ en prenant l'une ou l'autre des notations de (4.3.3)).

Proposition 4.4.5. *On suppose que les objets spectraux :*

$$(H^n(p, q), \delta) \quad \text{et} \quad (H'^n(p, q), \delta')$$

sont stationnaires et que pour un entier r convenable, le morphisme :

$$m_r^{p, q} : E_r^{p, q} \longrightarrow E'^{p, q}_r$$

est un isomorphisme pour tout couple p, q . Alors pour tout $r' \geq r$, le morphisme :

$$m_{r'}^{p, q} : E_{r'}^{p, q} \longrightarrow E'^{p, q}_{r'}$$

est un isomorphisme. Le morphisme :

$$m^n(-\infty, +\infty) : H^n(-\infty, +\infty) \longrightarrow H'^n(-\infty, +\infty)$$

est un isomorphisme d'objets filtrés.

En effet, les $m_r^{p, q}$ définissent un isomorphisme entre les objets différentiels gradués $(E_r^{p, q}, d_r)$ et $(E'^{p, q}_r, d_r)$. Ils induisent donc un isomorphisme sur les objets de cohomologie $E_{r+1}^{p, q}$ et $E'^{p, q}_{r+1}$, d'où la première assertion par récurrence sur r' . Les objets spectraux étant stationnaires, le morphisme :

$$m_\infty^{p, q} : E_\infty^{p, q} \longrightarrow E'^{p, q}_\infty$$

est un isomorphisme. Les $E_\infty^{p, q}$ (resp. $E'^{p, q}_\infty$) sont les gradués associés aux objets filtrés $H^n(-\infty, +\infty)$ (resp. $H'^n(-\infty, +\infty)$). Comme les filtrations de ces objets sont stationnaires, on en déduit que :

$$m^n(-\infty, +\infty) : H^n(-\infty, +\infty) \longrightarrow H'^n(-\infty, +\infty)$$

est un isomorphisme d'objets filtrés.

Chapitre III

Les catégories dérivées.

1. Définitions des catégories dérivées.

Dans ce paragraphe, \mathcal{A} désigne, sauf mention du contraire, une catégorie abélienne.

1.1. Notations et terminologie.

1.1.1. Soit \mathcal{A} une catégorie additive (non nécessairement abélienne). On désigne par $\mathbf{comp}^b(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{comp}^+(\mathcal{A})$, resp. $\mathbf{comp}^-(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ définie par les complexes X tels que $X^i = 0$, pour $|i|$ assez grand (resp. i assez petit, resp. i assez grand). On désigne par $K^b(\mathcal{A})$ (resp. $K^+(\mathcal{A})$, resp. $K^-(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $K(\mathcal{A})$ définie par les objets de $\mathbf{comp}^b(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{comp}^+(\mathcal{A})$, resp. $\mathbf{comp}^-(\mathcal{A})$).

1.1.2. Soient maintenant \mathcal{A} une catégorie (abélienne) et $*$ l'un des signes typographiques : b , $+$, $-$, "vide". On désigne par $\mathbf{comp}^{*,b}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{comp}^{*,+}(\mathcal{A})$, resp. $\mathbf{comp}^{*,-}(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{comp}^*(\mathcal{A})$ définie par les complexes X objets de $\mathbf{comp}^*(\mathcal{A})$ tels que $H^i(X) = 0$, pour $|i|$ grand (resp. pour i petit, resp. pour i grand). De même, on désigne par $K^{*,b}(\mathcal{A})$ (resp. $K^{*,+}(\mathcal{A})$, resp. $K^{*,-}(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $K^*(\mathcal{A})$ définie par les complexes X objets de $K^*(\mathcal{A})$ tels que $H^i(X) = 0$, pour $|i|$ grand (resp. i petit, resp. i grand). On introduit ainsi huit sous-catégories de $K(\mathcal{A})$:

$$(1.1.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & K^+(\mathcal{A}) & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ K^b(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\quad} & K^{+,b}(\mathcal{A}) & \xleftarrow{\quad} & K^{*,+}(\mathcal{A}) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & K^{*,b}(\mathcal{A}) & \xleftarrow{\quad} & K^{*,-}(\mathcal{A}) \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ & & K^{-}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\quad} & K(\mathcal{A}) \end{array}$$

Il résulte immédiatement de la définition des triangles distingués dans $K(\mathcal{A})$ (chap. I, 3.3.1) et des propriétés du foncteur cohomologique canonique $H : K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ que les catégories $K^{*,*'}(\mathcal{A}) \subset K(\mathcal{A})$ sont des sous-catégories *triangulées* (chap. II, 2.1.5) pleines (strictement si $*$ = “vide”) et *saturées* (chap. II, 2.1.6) de $K(\mathcal{A})$.

1.1.3. Un complexe X de \mathcal{A} est dit *acyclique* si pour tout entier i , $H^i(X) = 0$. On désigne par $Ac^*(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $K^*(\mathcal{A})$ définie par les complexes acycliques qui sont des objets de $K^*(\mathcal{A})$. Un morphisme $X \xrightarrow{u} Y$ de $K(\mathcal{A})$ (resp. de $comp(\mathcal{A})$) est appelé un *quasi-isomorphisme* si pour tout entier i , le morphisme $H^i(X) \xrightarrow{H^i(u)} H^i(Y)$ est un isomorphisme. On désigne par $Qis^*(\mathcal{A})$ (ou par Qis^* lorsqu’aucune confusion n’en résulte) l’ensemble des quasi-isomorphismes de $K^*(\mathcal{A})$. La sous-catégorie $Ac^*(\mathcal{A})$ de $K^*(\mathcal{A})$ est une sous-catégorie triangulée strictement pleine et saturée de $K^*(\mathcal{A})$. L’ensemble $Qis^*(\mathcal{A})$ est un système multiplicatif saturé de morphismes de $K^*(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.1.4). Dans un triangle distingué (X, Y, Z, u, v, w) de $K^*(\mathcal{A})$, le morphisme u est un quasi-isomorphisme si et seulement si le complexe Z est acyclique. Autrement dit (chap. II, 2.1.15), $Qis^*(\mathcal{A})$ est le système multiplicatif de $K^*(\mathcal{A})$ associé à la sous-catégorie triangulée pleine $Ac^*(\mathcal{A})$.

1.1.4. Soit M un ensemble d’objets de \mathcal{A} . Un complexe de \mathcal{A} est dit *de type* M si tous ses composants sont des éléments de M . Un morphisme $u : X \longrightarrow Y$ de $K^*(\mathcal{A})$ ou de $comp^*(\mathcal{A})$ est appelé une *Résolution à droite* (resp. *à gauche*) de X (resp. Y) *de type* M si u est un quasi-isomorphisme et si Y (resp. X) est un complexe de type M . Le plus souvent, par abus de langage et quand le contexte ne prête à aucune confusion, on supprime la mention “à droite” (resp. “à gauche”). De même le plus souvent, par abus de langage et quand le contexte ne prête à aucune confusion, on désigne par résolution à droite (resp. à gauche) d’un objet Y , le but (resp. la source) d’une résolution à droite (resp. à gauche) de Y . On désigne par $comp_{\mathcal{A}}^*(M)$, ou simplement $comp^*(M)$ (resp. $K_{\mathcal{A}}^*(M)$, ou simplement $K^*(M)$), la sous-catégorie pleine de $comp^*(\mathcal{A})$ (resp. $K^*(\mathcal{A})$) définie par les complexes de type M .

1.1.5. Lorsque M est l’ensemble des objets projectifs (resp. injectifs) de la catégorie \mathcal{A} , les complexes dont les composants sont projectifs (resp. injectifs) sont appelés, conformément aux conventions ci-dessus, les *complexes de type projectif* (resp. *injectif*). Le lecteur prendra soin de ne pas confondre les complexes de type projectif (resp. injectif) avec les objets projectifs (resp. injectifs) de la catégorie $comp(\mathcal{A})$. On constate aisément qu’un objet de $comp(\mathcal{A})$ est projectif (resp. injectif) si et seulement s’il est de type projectif (resp. injectif) et homotope à zéro.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

1.2. Les sous-catégories remarquables des catégories dérivées.

Proposition 1.2.1. a) *Les sous-catégories $\mathbf{K}^{*,*}(\mathcal{A}) \subset \mathbf{K}(\mathcal{A})$ sont $\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$ -localisantes à droite et à gauche (chap. II, 2.3.5).*

b) *Les sous-catégories $\mathbf{K}^{+,*}(\mathcal{A}) \subset \mathbf{K}(\mathcal{A})$ sont $\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$ -localisantes à droite.*

b)^{bis} *Les sous-catégories $\mathbf{K}^{-,*}(\mathcal{A}) \subset \mathbf{K}(\mathcal{A})$ sont $\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$ -localisantes à gauche.*

c) *La sous-catégorie $\mathbf{K}^b(\mathcal{A}) \subset \mathbf{K}^+(\mathcal{A})$ est $\mathbf{Ac}^+(\mathcal{A})$ -localisante à gauche.*

c)^{bis} *La sous-catégorie $\mathbf{K}^b(\mathcal{A}) \subset \mathbf{K}^-(\mathcal{A})$ est $\mathbf{Ac}^-(\mathcal{A})$ -localisante à droite.*

d) *Tout objet de $\mathbf{K}^{+,+}(\mathcal{A})$ s'envoie par un quasi-isomorphisme dans un objet de $\mathbf{K}^+(\mathcal{A})$.*

d)^{bis} *Tout objet de $\mathbf{K}^{-,+}(\mathcal{A})$ reçoit par un quasi-isomorphisme un objet de $\mathbf{K}^-(\mathcal{A})$.*

e) *Tout objet de $\mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$ s'envoie par un quasi-isomorphisme dans un objet de $\mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$.*

e)^{bis} *Tout objet de $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ reçoit par un quasi-isomorphisme un objet de $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$.*

f) *Tout objet de $\mathbf{K}^{+,b}(\mathcal{A})$ reçoit par un quasi-isomorphisme un objet de $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$.*

f)^{bis} *Tout objet de $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ s'envoie par un quasi-isomorphisme dans un objet de $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$.*

Pour tout complexe X , on désigne par $X(n, +\infty)$ (resp. $X(-\infty, n)$) le complexe :

$$X(n, +\infty) = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X^n / \mathbf{Im}(d_X^{n-1}) \longrightarrow X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

(resp.

$$X(-\infty, n) = \cdots \longrightarrow X^{n-3} \longrightarrow X^{n-2} \longrightarrow \mathbf{Ker}(d_X^{n-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots$$

et par $p : X \longrightarrow X(n, +\infty)$ (resp. $i : X(-\infty, n) \longrightarrow X$) le morphisme de complexes :

$$p^q = \text{identité}, \quad q > n,$$

$$p^n = X^n \longrightarrow X^n / \mathbf{Im}(d_X^{n-1}) \quad (\text{morphisme canonique}),$$

$$p^q = 0, \quad q \leq n - 1$$

(resp.

$$i^q = \text{identité}, \quad q < n - 1,$$

$$i^{n-1} = \text{Ker } (d_X^{n-1}) \longrightarrow X^{n-1} \quad (\text{morphisme canonique}),$$

$$i^q = 0, \quad q \geq n \quad).$$

Remarquons que le morphisme p (resp. i) induit un isomorphisme sur les objets de cohomologie en degré $j \geq n$ (resp. $j < n$) et que $H^j(X(n, +\infty)) = 0$ pour $j < n$ (resp. $H^j(X(-\infty, n)) = 0$ pour $j \geq n$). Toutes les assertions de la proposition (1.2.1) se démontrent alors immédiatement en utilisant cette construction. Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration en détail.

Définition 1.2.2. On appelle *catégorie dérivée* de \mathcal{A} et on note $D(\mathcal{A})$ la catégorie triangulée :

$$D(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) / Ac(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) [Qis(\mathcal{A})^{-1}]$$

(chap. II, 2.2.6 et 2.2.10).

Il résulte du théorème (2.2.6) que le foncteur cohomologique canonique $H : K(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ se factorise d'une manière unique en un foncteur cohomologique encore noté :

$$(1.2.2.1) \quad H : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

et encore appelé *foncteur cohomologique canonique*. Le foncteur canonique de passage au quotient est noté $Q : K(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$.

Théorème 1.2.3. a) *Les foncteurs naturels qui figurent dans le diagramme :*

$$\begin{array}{ccccc} & & K^{\cdot+}(\mathcal{A}) / Ac(\mathcal{A}) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ K^{\cdot b}(\mathcal{A}) / Ac(\mathcal{A}) & & & & D(\mathcal{A}) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & K^{\cdot-}(\mathcal{A}) / Ac(\mathcal{A}) & & \end{array}$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

sont strictement pleinement fidèles. Ils sont injectifs sur les objets et réalisent donc les catégories $K^{*,*}(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$ comme sous-catégories triangulées strictement pleines de $D(\mathcal{A})$. Un objet X de $D(\mathcal{A})$ est un objet de $K^{*,b}(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$ (resp. $K^{*,+}(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$, resp. $K^{*,-}(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$) si et seulement si $H^i(X) = 0$, pour $|i|$ grand (resp. i petit, resp. i grand).

b) Les foncteurs naturels qui figurent en traits pleins dans les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} K^+(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}^+(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K^{*,+}(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}(\mathcal{A}) \\ & & \searrow \\ & & D(\mathcal{A}) \end{array}$$

$$K^-(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow K^{*,-}(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}(\mathcal{A}) \quad \text{dashed arrow}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & K^{+,b}(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}^+(\mathcal{A}) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ K^b(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}^b(\mathcal{A}) & & & & K^{*,b}(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}(\mathcal{A}) \dashrightarrow D(\mathcal{A}) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & K^{-,b}(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}^-(\mathcal{A}) & & \end{array}$$

sont des équivalences de catégories. Il sont injectifs sur les ensembles d'objets.

c) Les foncteurs naturels qui figurent en traits pleins dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} K^{+,b}(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}^+(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K^+(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}^+(\mathcal{A}) \\ & & \searrow \\ & & D(\mathcal{A}) \end{array}$$

$$K^{-,b}(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}^-(\mathcal{A}) \longrightarrow K^-(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}^-(\mathcal{A}) \quad \text{dashed arrow}$$

sont strictement pleinement fidèles et injectifs sur les ensembles d'objets.

Résulte immédiatement de (1.2.1) et de (chap. II, 2.3.5).

1.2.4. La sous-catégorie $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{K}^+(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$, resp. $\mathbf{K}^-(\mathcal{A})/\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$) de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ est notée $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{D}^+(\mathcal{A})$, resp. $\mathbf{D}^-(\mathcal{A})$) et est appelée la *sous-catégorie des objets bornés* (resp. *bornés inférieurement*, resp. *bornés supérieurement*). Il convient de noter que ces limitations ne s'appliquent qu'aux objets de cohomologie des complexes considérés.

1.2.5. Soient X et Y deux objets de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$. On désigne par $\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y)$ le groupe $\mathbf{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X, Y)$. De même, on désigne par $\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$ les groupes $\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y[i]) \simeq \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X[-i], Y)$ (chap. I, 1.3.8). Cette notation sera justifiée ultérieurement. Rappelons cependant que tout triangle distingué (X, X', X'', u, v, w) (resp. (Y, Y', Y'', u, v, w)) de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ fournit une suite exacte illimitée :

$$\cdots \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X'', Y) \longrightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X', Y) \longrightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \longrightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X'', Y) \rightarrow \cdots$$

(resp.

$$\cdots \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \longrightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y') \longrightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y'') \longrightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) \rightarrow \cdots)$$

(chap. II, 1.2.1).

1.2.6. Soit M un ensemble d'objets de \mathcal{A} . On désigne par $\mathbf{D}_M(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ définie par les complexes dont les objets de cohomologie appartiennent à M en tout degré. On désigne par $\mathbf{D}_M^*(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine $\mathbf{D}_M(\mathcal{A}) \cap \mathbf{D}^*(\mathcal{A})$. Si la sous-catégorie pleine de \mathcal{A} définie par les objets de M est une sous-catégorie épaisse de \mathcal{A} (*i.e.* si elle est abélienne, si le foncteur d'inclusion est exact et si l'ensemble des objets de M est stable par extension), les sous-catégories $\mathbf{D}_M^*(\mathcal{A})$ sont des sous-catégories triangulées pleines de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$.

1.2.7. Soient $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact entre deux catégories abéliennes et $\mathbf{K}(F) : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{B})$ l'extension du foncteur F aux complexes à homotopie près (chap. I, 2.5.10). Le foncteur $\mathbf{K}(F)$ transforme les complexes acycliques de \mathcal{A} en complexes acycliques de \mathcal{B} , est exact (chap. II, 1.3.7) et, par suite, (chap. II, 2.2.6) définit un foncteur exact $\mathbf{D}(F) : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{B})$. Le foncteur $\mathbf{D}(F)$ transforme les objets bornés (resp. bornés inférieurement, resp. bornés supérieurement) de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ en objets de même nature de $\mathbf{D}(\mathcal{B})$. Le plus souvent, on utilisera la notation abusive $F : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{B})$ pour désigner le foncteur $\mathbf{D}(F)$.

1.2.8. L'isomorphisme canonique (chap. II, 1.3.8) $\iota : \mathbf{K}(\mathcal{A})^\circ \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{A}^\circ)$ transforme les objets de $\mathbf{Ac}(\mathcal{A})^\circ$ en objets de $\mathbf{Ac}(\mathcal{A}^\circ)$ et, par suite, définit un isomorphisme de catégories triangulées encore noté $\iota : \mathbf{D}(\mathcal{A})^\circ \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}^\circ)$.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

On identifiera dorénavant, sauf mention du contraire, les catégories $D(\mathcal{A})^\circ$ et $D(\mathcal{A}^\circ)$ à l'aide de l'isomorphisme ι . Notons que cette identification identifie la catégorie $D^b(\mathcal{A})^\circ$ avec la catégorie $D^b(\mathcal{A}^\circ)$, la catégorie $D^+(\mathcal{A})^\circ$ avec la catégorie $D^-(\mathcal{A}^\circ)$ et la catégorie $D^-(\mathcal{A})^\circ$ avec la catégorie $D^+(\mathcal{A}^\circ)$.

1.2.9. Le foncteur canonique $\mathcal{A} \longrightarrow K(\mathcal{A})$ (chap. II, 1.3.3), composé avec le foncteur $Q : K(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$, fournit un foncteur $\mathcal{A} \longrightarrow D(\mathcal{A})$ qui est *pleinement fidèle* : en effet, soient X et Y deux objets de \mathcal{A} . Un morphisme dans $D(\mathcal{A})$ de X dans Y est (chap. II, 2.2.2) la classe \overline{D} d'un diagramme de $K(\mathcal{A})$:

$$D = X \xleftarrow{s} Z^\bullet \xrightarrow{m} Y \quad ,$$

où s est un quasi-isomorphisme de $K(\mathcal{A})$. Par suite, $s : Z^\bullet \longrightarrow X$ induit un isomorphisme $H^0(s) : H^0(Z^\bullet) \xrightarrow{\sim} H(X) = X$ et on vérifie aussitôt que $\overline{D} = Q(H^0(m)H^0(s)^{-1})$. Ceci montre que l'homomorphisme :

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y)$$

est surjectif. Montrons qu'il est injectif. Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans \mathcal{A} définit un morphisme nul dans la catégorie $D(\mathcal{A})$ si et seulement s'il existe un quasi-isomorphisme $s : Z^\bullet \longrightarrow X$ dans $K(\mathcal{A})$ tel que $fs = 0$. On en déduit que $H^0(f)H^0(s) = 0$. Comme $H^0(s)$ est un isomorphisme, on en déduit que $H^0(f) = f = 0$.

Notons que le foncteur $\mathcal{A} \longrightarrow D(\mathcal{A})$ est de plus injectif sur les ensembles d'objets et réalise par suite \mathcal{A} comme sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$. Dorénavant, la catégorie \mathcal{A} sera toujours considérée comme une sous-catégorie de sa catégorie dérivée par l'intermédiaire de ce foncteur. Le foncteur cohomologique canonique $D(\mathcal{A}) \xrightarrow{H} \mathcal{A}$, restreint à la sous-catégorie \mathcal{A} , est le foncteur identique.

Proposition 1.2.10. a) *Un objet X de $D(\mathcal{A})$ est isomorphe à un objet de \mathcal{A} si et seulement si $H^i(X) = 0$, pour tout $i \neq 0$. Il est alors canoniquement isomorphe à $H^0(X)$.*

b) *Soient X et Y deux objets de \mathcal{A} . On a :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) = 0 \quad , \quad \text{pour } n < 0 \quad ,$$

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \quad .$$

Démontrons a). Il est clair que $H^i(X) = 0$, pour $i \neq 0$, lorsque X est un objet de \mathcal{A} . Soit X un objet de $D(\mathcal{A})$ tel que $H^i(X)$ soit nul, pour $i \neq 0$.

Le complexe $X(0, +\infty)$ (démonstration de (1.2.1)) est alors quasi-isomorphe à X , et le morphisme canonique $H^0(X(0, +\infty)) \rightarrow X(0, +\infty)$ est un quasi-isomorphisme. Ce qui montre que X est isomorphe dans $D(\mathcal{A})$ à $H^0(X)$.

Démontrons b). La deuxième égalité est mise pour mémoire et résulte de ce que \mathcal{A} est une sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$. Un morphisme dans $D(\mathcal{A})$ de $X[-n]$ dans Y est de la forme $Q(m)Q(s)^{-1}$, où $m : Z^\bullet \rightarrow Y$ est un morphisme de $K(\mathcal{A})$ et $s : Z^\bullet \rightarrow X[-n]$ est un quasi-isomorphisme de $K(\mathcal{A})$. Le morphisme $i : Z^\bullet(-\infty, n+1) \rightarrow Z^\bullet$ (démonstration de (1.2.1)) est alors un quasi-isomorphisme. Par suite, on a :

$$Q(m)Q(s)^{-1} = Q(m)Q(i)Q(i)^{-1}Q(s)^{-1} = Q(mi)Q(si)^{-1} .$$

Lorsque n est strictement négatif, $mi = 0$. Par suite, $Q(m)Q(s)^{-1} = 0$.

Définition 1.2.11. On désigne par \mathcal{A}^{Ext} la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ définie par les translatés des objets de \mathcal{A} .

La catégorie \mathcal{A}^{Ext} est donc (contrairement à la sous-catégorie \mathcal{A}) une sous- \mathbb{Z} -catégorie de $D(\mathcal{A})$. Un objet de $D(\mathcal{A})$ est isomorphe à un objet de \mathcal{A}^{Ext} si et seulement s'il ne possède qu'un seul objet de cohomologie non nul.

1.3. Le δ -foncteur canonique.

1.3.1. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne et \mathcal{D} une catégorie triangulée. Un δ -foncteur de \mathcal{A} dans \mathcal{D} est un objet constitué par :

- 1) Un foncteur $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$.
- 2) La donnée, pour toute suite exacte $S = 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ de \mathcal{A} , d'un morphisme de \mathcal{D} :

$$\delta(S) : G(Z) \rightarrow G(X)[1] .$$

Ces données étant soumises aux axiomes suivants :

- a) Pour tout morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} S & = & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \\ & & u \downarrow & & v \downarrow & & w \downarrow \\ S' & = & 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' \longrightarrow Z' \longrightarrow 0 \end{array} ,$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 G(Z) & \xrightarrow{\delta(S)} & G(X)[1] \\
 G(w) \downarrow & & \downarrow G(u)[1] \\
 G(Z') & \xrightarrow{\delta(S')} & G(X')[1]
 \end{array} .$$

b) Pour toute suite exacte de \mathcal{A} , $S = 0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$, le triangle $(G(X), G(Y), G(Z), G(u), G(v), \delta(S))$ est distingué.

1.3.2. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et u un morphisme de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$. On désigne par $[u]$ l'image de u dans $D(\mathcal{A})$. Soit $S = 0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$. Les propriétés d'adjonction du foncteur cône (chap. I, 3.1.3), définissent un morphisme $\mu(S) : c(u) \longrightarrow Z$. Le diagramme ci-après est commutatif (chap. I, 3.2.2.4) :

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{p(u)} & c(u) \\
 & \searrow v & \downarrow \mu(S) \\
 & & Z
 \end{array} .$$

Un calcul simple montre que les composants du morphisme $\mu(S)$ sont :

$$\begin{aligned}
 (1.3.2.1) \quad \mu(S)^i &: Y^i \oplus X^{i+1} \longrightarrow Z^i \\
 \mu(S)^i &= (v^i, 0) \quad .
 \end{aligned}$$

On en déduit que le morphisme $\mu(S) : c(u) \longrightarrow Z$ est un épimorphisme et qu'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow c(\text{id}_X) \longrightarrow c(u) \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \quad .$$

Introduisons alors le complexe $c(\mu(S))$ et soit $m : c(\text{id}_X) \longrightarrow c(\mu(S))[-1]$ le morphisme de composants :

$$\begin{aligned}
 (1.3.2.2) \quad m^i &: X^i \oplus X^{i+1} \longrightarrow Z^{i-1} \oplus Y^i \oplus X^{i+1} \\
 m^i &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u^i & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} \quad .
 \end{aligned}$$

Le morphisme m est un monomorphisme et on a la suite exacte :

$$(1.3.2.3) \quad 0 \longrightarrow c(\text{id}_X) \xrightarrow{m} c(\mu(S))[-1] \longrightarrow c(\text{id}_Z)[-1] \longrightarrow 0 \quad .$$

Les complexes $c(\text{id}_X)$ et $c(\text{id}_Z)$ sont homotopes à zéro. Par suite, le complexe $c(\mu(S))$ est acyclique. Le morphisme $\mu(S)$ est donc un quasi-isomorphisme.

En passant dans la catégorie $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, on obtient un diagramme (chap. I, 3.2.2.7) :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\dot{u}} & Y & \xrightarrow{\dot{p}(u)} & c(u) & \xrightarrow{\dot{q}(u)} & X[1] \\ & & \searrow \dot{v} & & \downarrow \dot{\mu}(S) & & \\ & & & & Z & & \end{array} \quad .$$

Posons alors :

$$(1.3.2.4) \quad \delta(S) = [q(u)] [\mu(S)]^{-1} \quad .$$

Il résulte des définitions des structures triangulées de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ (chap. I, 3.3.1) et de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.2.6) que le triangle $(X, Y, Z, [u], [v], \delta(S))$ est distingué dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$. De plus, on vérifie immédiatement que le morphisme $\delta(S)$ est fonctoriel par rapport à S ((1.3.1), propriété a)). On a donc muni le foncteur canonique $\mathbf{comp}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ d'une structure de δ -foncteur. Le δ -foncteur ainsi obtenu est appelé le *δ -foncteur canonique*. Le morphisme $\delta(S)$ est appelé le *morphisme de liaison* associé à la suite exacte S .

1.3.3. Soit \mathcal{A}° la catégorie opposée à \mathcal{A} . Pour toute suite exacte S de $\mathbf{comp}(\mathcal{A}^\circ)$, désignons par $\delta^\circ(S)$ le morphisme de liaison associé. Soient \mathcal{C} une catégorie, X un objet de \mathcal{C} et u un morphisme de \mathcal{C} . Dans la proposition ci-après, nous désignerons abusivement par X° et u° l'objet et le morphisme correspondant de la catégorie opposée à \mathcal{C} (rappelons que la catégorie opposée à \mathcal{C} a même ensemble d'objets et de morphismes que la catégorie \mathcal{C}).

Proposition 1.3.4. a) *Pour toute suite exacte S de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$, on a :*

$$\delta(S[1]) = -\delta(S)[1] \quad .$$

b) *Pour toute suite exacte S de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$, compte tenu de l'identification (1.2.8), on a :*

$$\delta^\circ(S^\circ) = \delta(S)^\circ[1] \quad .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

c) *Tout triangle distingué de $D(\mathcal{A})$ est isomorphe à un triangle distingué du type $(X, Y, Z, [u], [v], \delta(S))$, où $S = 0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ est une suite exacte de \mathcal{A} .*

La démonstration de a) et b) est laissée au lecteur. Démontrons c). D'après (chap. II, 2.2.6), tout triangle distingué de $D(\mathcal{A})$ est isomorphe à l'image par $Q : K(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ d'un triangle distingué de $K(\mathcal{A})$. D'après (chap. I, 3.3.1) et l'axiome TRII, tout triangle distingué de $K(\mathcal{A})$ est isomorphe à un triangle de la forme :

$$Y \xrightarrow{\dot{p}(u)} c(u) \xrightarrow{\dot{q}(u)} X[1] \xrightarrow{-\dot{u}[1]} Y[1] .$$

Par suite, tout triangle distingué de $D(\mathcal{A})$ est isomorphe à un triangle du type :

$$(Y, c(u), X[1], [p(u)], [q(u)], -[u][1]) .$$

Remarquons alors que :

$$S = 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{p(u)} c(u) \xrightarrow{q(u)} X[1] \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\text{comp}(\mathcal{A})$. Il résulte alors de (chap. II, 1.2.4) qu'il existe un isomorphisme du triangle :

$$(Y, c(u), X[1], [p(u)], [q(u)], -[u][1])$$

sur le triangle :

$$(Y, c(u), X[1], [p(u)], [q(u)], \delta(S)) .$$

Proposition 1.3.5. a) *Tout foncteur $F : \text{comp}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}$ qui transforme les quasi-isomorphismes en isomorphismes de \mathcal{C} , se factorise de manière unique par le foncteur $\text{comp}(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$.*

b) *Tout foncteur semi-exact de $\text{comp}(\mathcal{A})$ dans une catégorie abélienne \mathcal{B} qui transforme les quasi-isomorphismes en isomorphismes se factorise d'une manière unique à travers le δ -foncteur canonique $\text{comp}(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$ et un foncteur cohomologique de $D(\mathcal{A})$ dans \mathcal{B} .*

L'assertion b) résulte de l'assertion a) et de la description des triangles distingués de $D(\mathcal{A})$ donnée par (1.3.4). L'assertion a) résulte de la définition de $D(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.2.6) et du lemme ci-après.

Lemme 1.3.6. *Soient \mathcal{A} une catégorie additive (non nécessairement abélienne) et F un foncteur de $\text{comp}(\mathcal{A})$ dans une catégorie \mathcal{C} . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) F se factorise par $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.
- ii) F transforme les homotopismes en isomorphismes de \mathcal{C} .

Il est clair que $i) \Rightarrow ii)$. Pour montrer que $ii) \Rightarrow i)$, il suffit de montrer que F transforme les couples de morphismes homotopes en morphismes égaux. Soit X un objet de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$. Le foncteur sur $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$:

$Y \mapsto \{\text{couple de morphismes de } X \text{ dans } Y \text{ muni d'une homotopie qui les relie}\}$

est représentable par un complexe Z :

$$Z^i = X^i \oplus X^i \oplus X^{i+1}$$

$$(1.3.6.1) \quad d_Z^i = \begin{pmatrix} d_X^i & 0 & \mathsf{id}_{X^{i+1}} \\ 0 & d_X^i & -\mathsf{id}_{X^{i+1}} \\ 0 & 0 & -d_X^{i+1} \end{pmatrix} .$$

Il existe donc deux morphismes homotopes $p_1, p_2 : X \longrightarrow Z$:

$$(1.3.6.2) \quad \begin{aligned} p_1^i &= \begin{pmatrix} \mathsf{id}_{X^i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ p_2^i &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{id}_{X^i} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et il suffit de montrer que $F(p_1) = F(p_2)$. Or le couple de morphismes $(\mathsf{id}_X, \mathsf{id}_X)$ muni de l'homotopie triviale définit un morphisme $\pi : Z \longrightarrow X$:

$$(1.3.6.3) \quad \pi^i = (\mathsf{id}_{X^i}, \mathsf{id}_{X^i}, 0)$$

et on a $\pi p_1 = \pi p_2 = \mathsf{id}_X$. De plus, on vérifie immédiatement que les morphismes π, p_1 et p_2 sont des homotopismes. Il en résulte que $F(p_1), F(p_2), F(\pi)$ sont des isomorphismes et que $F(\pi)F(p_1) = F(\pi)F(p_2) = \mathsf{id}_{F(X)}$. Par suite, $F(p_1) = F(p_2)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque 1.3.7. Il résulte de la proposition (1.3.5) que la catégorie dérivée de \mathcal{A} est la solution du problème universel consistant à inverser les quasi-isomorphismes de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.2.3, b)).

2. Résolutions.

Dans tout ce paragraphe, \mathcal{A} désigne une catégorie abélienne.

2.1. Morphismes élémentaires.

2.1.1. Soient X un complexe de \mathcal{A} et X^i le composant de degré i . Soit $u : Y \rightarrow X^i$ un morphisme de \mathcal{A} . Construisons le diagramme commutatif ci-après :

(2.1.1.1)

$$\begin{array}{ccccccc} & & X'^{i-1} & \xrightarrow{v_2} & Y & & \\ & \nearrow v_1 & \downarrow u' & & \downarrow u & \searrow v_3 & \\ X^{i-3} & \xrightarrow{d_X^{i-3}} & X^{i-2} & \xrightarrow{d_X^{i-2}} & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} & \xrightarrow{d_X^{i+1}} & X^{i+2}, \end{array}$$

où le carré :

$$\begin{array}{ccc} X'^{i-1} & \xrightarrow{v_2} & Y \\ \downarrow u' & & \downarrow u \\ X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i \end{array}$$

est cartésien et où les morphismes v_1 et v_3 sont définis par les égalités :

$$v_2 v_1 = 0 \quad ,$$

$$u' v_1 = d_X^{i-2} \quad ,$$

$$v_3 = d_X^i u \quad .$$

Désignons alors par $X(u, i)$ le complexe :

(2.1.1.2)

$$X(u, i) = \cdots X^{i-3} \xrightarrow{d_X^{i-3}} X^{i-2} \xrightarrow{v_1} X'^{i-1} \xrightarrow{v_2} Y \xrightarrow{v_3} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2} \cdots ,$$

et par $p(u, i) : X(u, i) \rightarrow X$ le morphisme de complexe :

$$p(u, i)^j = \text{identité, pour } j \neq i-1, i \quad ,$$

$$(2.1.1.3) \quad p(u, i)^{i-1} = u' \quad ,$$

$$p(u, i)^i = u \quad .$$

Soit alors $m : Z \rightarrow X$ un morphisme de complexes. Il est clair que le complexe Z' au dessus de Z obtenu par le changement de base $Z \xrightarrow{m} X$:

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & X(u, i) \\ \downarrow & & \downarrow p(u, i) \\ Z & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

est isomorphe à un complexe $p(w, i) : Z(w, i) \rightarrow Z$ pour un morphisme w convenable.

Lemme 2.1.2. a) *Le morphisme $H^j(p(u, i)) : H^j(X(u, i)) \rightarrow H^j(X)$ est un isomorphisme pour $j \neq i, i+1$.*

b) *On a des suites exactes :*

$$0 \rightarrow H^i(X(u, i)) \rightarrow H^i(X) \rightarrow (\text{Ker } (d_X^i) + \text{Im}(u)) / (\text{Im } (d_X^{i-1}) + \text{Im}(u)) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow & (\text{Ker } (d_X^i) + \text{Im}(u)) / (\text{Im } (d_X^{i-1}) + \text{Im}(u)) \rightarrow \\ & X^i / (\text{Im } (d_X^{i-1}) + \text{Im}(u)) \rightarrow X^i / (\text{Ker } (d_X^i) + \text{Im}(u)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$0 \rightarrow X^i / (\text{Ker } (d_X^i) + \text{Im}(u)) \rightarrow H^{i+1}(X(u, i)) \rightarrow H^{i+1}(X) \rightarrow 0$$

c) *Pour que $p(u, i)$ soit un quasi-isomorphisme, il faut et il suffit que :*

$$\text{Im } (d_X^{i-1}) + \text{Im}(u) = X^i .$$

La “chasse au diagramme” est laissée au lecteur.

Définition 2.1.3. Un morphisme de complexes $m : Z \rightarrow X$ est appelé un *morphisme élémentaire de hauteur i* s’il est isomorphe dans $\mathcal{F}\ell_1(\text{comp}(\mathcal{A}))$ à un morphisme du type $p(u, i)$, où u est un *épimorphisme*.

Un morphisme élémentaire est donc, en particulier, un quasi-isomorphisme ((2.1.2), c)). Un morphisme élémentaire est un épimorphisme de $\text{comp}(\mathcal{A})$. Un épimorphisme de $\text{comp}(\mathcal{A})$ est un morphisme élémentaire si et seulement si son noyau est un complexe acyclique comportant au plus deux composants non nuls. Le composé de deux morphismes élémentaires de même hauteur est

CATÉGORIES DÉRIVÉES

un morphisme élémentaire. Les morphismes élémentaires sont stables par changement de base. Soit :

$$\cdots X_n \xrightarrow{u_n} X_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} X_{n-2} \cdots$$

une suite de morphismes de complexes, illimitée dans les deux sens, telle que pour tout entier n , le morphisme u_n soit un morphisme élémentaire de hauteur $-n$. Cette suite admet dans $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ une limite projective et inductive (cette suite induit sur les composants de degré donné une suite stationnaire dans les deux sens).

Lemme 2.1.4. *Soit $m : X \rightarrow Y$ un quasi-isomorphisme de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$. Il existe une suite de morphismes :*

$$u_n : X_n \rightarrow X_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

telle que u_n soit, pour tout entier n , un morphisme élémentaire de hauteur $-n$, et des morphismes :

$$\begin{aligned} & \varinjlim_n X_n \xleftarrow{\sim} Y, \\ & \varprojlim_n X_n \xleftarrow{v} X, \quad v \text{ homotopisme (chap. I, 2.5.11)}, \end{aligned}$$

tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & \varinjlim_n X_n \\ m \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_n X_n \end{array}$$

soit commutatif à homotopie près.

Tout d'abord, remarquons que pour tout morphisme $m : X \rightarrow Y$ de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$, il existe un épimorphisme $m' : X' \rightarrow Y$ et un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & X' \\ & \searrow m & \swarrow m' \\ & Y & \end{array},$$

où v est un homotopisme.

Construisons en effet le cône du morphisme m :

$$X \xrightarrow{m} Y \xrightarrow{p(m)} c(m) \longrightarrow X[1] ,$$

puis de nouveau, le cône du morphisme $p(m)$:

$$Y \xrightarrow{p(m)} c(m) \longrightarrow c(p(m)) \xrightarrow{q} Y[1] .$$

Le morphisme $c(p(m)) \xrightarrow{q} Y[1]$ est une épimorphisme (chap. I, 3.2.2). Il résulte des propriétés des triangles distingués (propriété TRII) qu'il existe un homotopisme :

$$X \xrightarrow{v} c(p(m))[-1]$$

tel que le triangle ci-après :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{v} & c(p(m))[-1] & & \\ m \searrow & & \swarrow q[-1] & & \\ & Y & & & \end{array}$$

soit commutatif à homotopie près.

On peut donc supposer que le morphisme m est un épimorphisme de $\text{comp}(\mathcal{A})$. Soit alors :

$$N = \cdots \longrightarrow N^i \xrightarrow{d_N^i} N^{i+1} \xrightarrow{d_N^{i+1}} N^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

le noyau du morphisme m . Posons :

$$N_{-n} = \cdots \longrightarrow N^{n-3} \longrightarrow N^{n-2} \longrightarrow \text{Im}(d_N^{n-2}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Les N_{-n} forment une suite décroissante de sous-complexes acycliques de N , d'où en posant $X_n = X/N_n$, une suite :

$$u_n : X_n \longrightarrow X_{n-1} , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

Les u_n sont des morphismes élémentaires de hauteur $-n$ et $\varprojlim_n X_n = X$, $\varprojlim_n X_n = Y$.

Remarque 2.1.5. Plaçons nous sous les hypothèses du lemme (2.1.4) et supposons de plus que $X, Y \in \text{Ob } \text{comp}^-(\mathcal{A})$. L'argument présenté plus haut montre alors qu'on peut, en changeant au besoin X par un homotopisme, supposer que m est un épimorphisme. La construction de la suite X_n présentée ci-dessus, montre alors que le système inductif X_n est stationnaire (*i.e.* $X_n = Y$ et $u_n = \text{identité}$ pour n petit) et que pour tout n , $X_n \in \text{Ob } \text{comp}^-(\mathcal{A})$.

2.2. Étude de certains ensembles d'objets.

2.2.1. Soit M un ensemble d'objets de \mathcal{A} . Nous considérerons les différentes propriétés suivantes :

(E_1) Les objets nuls appartiennent à M . La somme directe de deux objets appartenant à M est un objet appartenant à M .

(E_2) Pour tout épimorphisme $X \xrightarrow{u} L$, où X est un objet de \mathcal{A} et L un élément de M , il existe un épimorphisme $v : L' \rightarrow L$, $L' \in M$, qui se factorise par u .

(E_3) Pour tout entier n et toute suite exacte :

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 , \quad L_i \in M , \quad 0 \leq i \leq n ,$$

il existe un épimorphisme $L' \longrightarrow X$, où $L' \in M$.

(E_4) Pour tout épimorphisme $u : L \longrightarrow L'$, $L, L' \in M$, le noyau de u est un élément de M .

(E_5) Pour toute extension $0 \longrightarrow L \longrightarrow Z \longrightarrow L' \longrightarrow 0$, $L, L' \in M$, l'objet Z est un élément de M ; 0 est un élément de M .

(E_6) L'ensemble M est exact, *i.e.* chaque fois que deux des objets d'une suite exacte courte de \mathcal{A} sont des éléments de M , le troisième l'est aussi; 0 est un élément de M .

On notera qu'on a les implications $(E_6) \Rightarrow (E_4)$ et (E_5) , $(E_4) \Rightarrow (E_3)$ et $(E_5) \Rightarrow (E_1)$. Une suite exacte illimitée :

$$\cdots \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 , \quad L_i \in M , \quad i \in \mathbb{N} ,$$

est appelée une ∞ - M -présentation de l'objet X . Soit M un ensemble d'objets possédant les propriétés (E_1), (E_2) et (E_3). Désignons par M^\wedge l'ensemble d'objets suivants : un objet X appartient à M^\wedge s'il possède une ∞ - M -présentation et si pour tout entier n et toute suite exacte :

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 , \quad L_i \in M , \quad 0 \leq i \leq n ,$$

l'objet X' possède une ∞ - M -présentation.

Lemme 2.2.2. Soit $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{A} .

- a) Si X et Y sont des éléments de M^\wedge , il existe un épimorphisme $u : L \rightarrow Z$, $L \in M$.
- b) Si X et Z sont des éléments de M^\wedge , il existe un épimorphisme $u : L \rightarrow Y$, $L \in M$.
- c) Si Y et Z sont des éléments de M^\wedge , il existe un épimorphisme $u : L \rightarrow X$, $L \in M$.

Lemme 2.2.3. Soit $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{A} .

- a) Si Y et Z sont des éléments de M^\wedge , pour tout épimorphisme $u : L \rightarrow X$, $L \in M$, le noyau de u est un noyau d'un épimorphisme entre deux éléments de M^\wedge .
- b) Si X et Y sont des éléments de M^\wedge , pour tout épimorphisme $u : L \rightarrow Z$, $L \in M$, le noyau de u est un conoyau d'un monomorphisme entre deux éléments de M^\wedge .
- c) Si X et Z sont des éléments de M^\wedge , pour tout épimorphisme $u : L \rightarrow Y$, $L \in M$, le noyau de u est un noyau d'un épimorphisme entre deux éléments de M^\wedge .

La démonstration des deux lemmes est laissée au lecteur. On remarquera que les propriétés (a) et (c) des lemmes (2.2.2) et (2.2.3) ne font pas intervenir la propriété (E_2) .

Proposition 2.2.4. a) L'ensemble M^\wedge possède les propriétés (E_6) et (E_2) . L'ensemble M est contenu dans l'ensemble M^\wedge . Tout objet de M^\wedge est quotient d'un objet de M .

- b) Tout ensemble d'objets M' contenant M tel que tout objet de M' soit un quotient d'un objet de M et qui possède la propriété (E_3) est contenu dans M^\wedge .
- c) En particulier, $(M^\wedge)^\wedge = M^\wedge$.

La propriété a) résulte des deux lemmes précédents. Les propriétés b) et c) sont immédiates.

2.2.5. Soient $M \subset M'$ deux ensembles d'objets de \mathcal{A} tels que M possède les propriétés (E_4) et (E_5) , que M' possède la propriété (E_4) , et que tout objet de M' soit quotient d'un objet de M . On dit qu'un objet X de M' est de M -dimension inférieure où égale à n et on note $M\text{-dim}(X) \leq n$, s'il existe une suite exacte :

$$0 \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow X \rightarrow 0 , \quad L_i \in M , \quad 0 \leq i \leq n .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

S'il existe des entiers n tels que $M\text{-dim}(X) \leq n$, on appelle *M-dimension* de X et on note $M\text{-dim}(X)$, le plus petit des entiers n tels que $M\text{-dim}(X) \leq n$. S'il n'existe pas de tels entiers, on pose $M\text{-dim}(X) = +\infty$.

Lemme 2.2.6. *Soit $0 \rightarrow X \rightarrow L \xrightarrow{u} Y \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{A} telle que $L \in M$ et $X, Y \in M'$. On a :*

$$M\text{-dim}(X) = \sup\{M\text{-dim}(Y) - 1, 0\} \quad .$$

Proposition 2.2.7. *Soit $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ une suite exacte, $X, Y, Z \in M'$.*

- a) $M\text{-dim}(Z) \leq \inf\{M\text{-dim}(X), M\text{-dim}(Y)\} \Rightarrow M\text{-dim}(X) = M\text{-dim}(Y)$.
- b) $M\text{-dim}(Y) \leq \inf\{M\text{-dim}(X), M\text{-dim}(Z)\} \Rightarrow M\text{-dim}(X) = \sup\{M\text{-dim}(Z) - 1, M\text{-dim}(Y)\}$.
- c) $M\text{-dim}(X) \leq \inf\{M\text{-dim}(Y), M\text{-dim}(Z)\} \Rightarrow M\text{-dim}(Z) = M\text{-dim}(Y)$ ou $M\text{-dim}(Z) = M\text{-dim}(Y) + 1$.

La proposition se démontre par récurrence, en construisant un épimorphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}, \quad L_i \in M, \quad 0 \leq i \leq 2,$$

et en appliquant l'hypothèse de récurrence à la suite exacte noyau sur laquelle on a un contrôle, grâce au lemme (2.2.6). Reste donc à démontrer le lemme. Tout d'abord, si $M\text{-dim}(Y) = +\infty$ (resp. 0), $M\text{-dim}(X) = +\infty$ (resp. 0). On peut donc supposer que $M\text{-dim}(Y)$ est fini non nul, et il s'agit de montrer que $M\text{-dim}(X) = M\text{-dim}(Y) - 1$. Soit :

$$0 \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow Y \longrightarrow 0, \quad n \geq 1,$$

une M -résolution de Y . Posons :

$$V^\bullet = 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow Y \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

(L_i est le composant de degré $-i$),

$$U_0^\bullet = V^\bullet(u, 1) \quad , \quad p_0 = p(u, 1) : U_0^\bullet \longrightarrow V^\bullet$$

(2.1.1). Le morphisme p_0 est un morphisme élémentaire de hauteur 1. Le complexe U_0^\bullet est de la forme :

$$U_0^\bullet = 0 \rightarrow 0 \cdots 0 \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_1 \rightarrow Z_0 \rightarrow L \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots .$$

D'après la propriété (E_4) , l'objet Z_0 est un élément de M' . Par suite, il existe un épimorphisme $u_0 : L'_0 \rightarrow Z_0$, $L'_0 \in M$. Posons alors (2.1.1) $U_1^\bullet = U_0^\bullet(u_0, 0)$, $p_1 = p(u_0, 0) : U_1^\bullet \rightarrow U_0^\bullet$. En poursuivant ainsi, on démontre par récurrence, qu'il existe une suite de morphismes :

$$p_i : U_i^\bullet \rightarrow U_{i-1}^\bullet , \quad 1 \leq i \leq n-1 ,$$

$$p_0 : U_0^\bullet \rightarrow V^\bullet ,$$

où p_i est un morphisme élémentaire de hauteur $-i+1$ et où U_i^\bullet est de la forme : $U_i^\bullet =$

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots L_{i+1} \rightarrow Z_i \rightarrow L'_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L'_0 \rightarrow L \rightarrow 0 \cdots ,$$

où $L'_j \in M$, $0 \leq j \leq i-1$. On obtient donc, en composant ces différents morphismes p_i , un quasi-isomorphisme épimorphique :

$$p : U_{n-1}^\bullet \rightarrow V^\bullet .$$

Remarquons alors que dans le complexe :

$$U_{n-1}^\bullet = 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow L_n \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow L'_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow L'_0 \rightarrow L \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

l'objet Z_{n-1} apparaît, d'après la propriété (E_4) , comme une extension de deux éléments de M et est par suite, d'après la propriété (E_5) , un élément de M . Posons alors :

$$L^\bullet = 0 \rightarrow 0 \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \cdots ,$$

$$L'^\bullet = 0 \rightarrow 0 \rightarrow L_n \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow L'_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow L'_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \cdots$$

et notons $m : L'^\bullet \rightarrow L^\bullet$ le morphisme induit par p . Le seul objet de cohomologie non nul de L^\bullet (resp. L'^\bullet) est l'objet Y en dimension 0 (resp. L en dimension 0) et le morphisme m induit sur ces objets le morphisme u . Considérons alors le cône $c(m)$ du morphisme m :

$$c(m) = \longrightarrow 0 \longrightarrow L_n \longrightarrow L_n \oplus Z_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} \oplus L'_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow L_1 \oplus L'_0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

(l'objet L_0 est le composant de degré 0 de $c(m)$). La cohomologie de $c(m)$ est nulle en degré différent de -1 , et égale à X en degré -1 . Le morphisme $L_n \rightarrow L_n \oplus Z_{n-1}$ dont la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \text{id} \\ * \end{pmatrix}$ admet une rétraction. Il existe donc un morphisme $v : Z_{n-1} \rightarrow L_{n-1} \oplus L'_{n-2}$ tel que le complexe :

$$\cdots 0 \rightarrow 0 \rightarrow Z_{n-1} \xrightarrow{v} L_{n-1} \oplus L'_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow L_1 \oplus L'_0 \rightarrow L_0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

soit quasi-isomorphe au complexe $c(m)$. D'autre part, le noyau du morphisme $L_1 \oplus L'_0 \rightarrow L_0$ est, d'après la propriété (E_4) , un élément de M . Désignons par L''_1 ce noyau. Le complexe :

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow L_{n-1} \oplus L'_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow L_2 \oplus L'_1 \rightarrow L''_1 \rightarrow X \rightarrow 0 \cdots$$

est donc acyclique. On a ainsi construit une résolution de longueur $n - 1$ de l'objet X et, par suite, $M\text{-dim}(X) \leq n - 1$. Par ailleurs, il est clair que $M\text{-dim}(X) \geq M\text{-dim}(Y) - 1$. Ceci achève la démonstration du lemme (2.2.6) et de la proposition (2.2.7).

2.3. Quelques lemmes sur les résolutions.

Proposition 2.3.1. [22] a) Soit M un ensemble d'objets de \mathcal{A} possédant les propriétés (E_1) , (E_2) et (E_3) (2.2.1). Soient $Y \in \text{Ob } \mathbf{comp}^-(\mathcal{A})$ un complexe dont les composants appartiennent à M^\wedge (2.2.1) et $m : X \rightarrow Y$ un quasi-isomorphisme. Il existe un complexe $L^\bullet \in \text{Ob } \mathbf{comp}^-(\mathcal{A})$ dont les composants appartiennent à M et un quasi-isomorphisme $w : L^\bullet \rightarrow X$.

b) Réciproquement, soit M un ensemble d'objets de \mathcal{A} possédant la propriété (E_1) . Supposons que pour tout complexe $Y \in \text{Ob } \mathbf{comp}^-(\mathcal{A})$ dont les composants sont des éléments de M , et pour tout quasi-isomorphisme $m : X \rightarrow Y$, il existe un complexe L^\bullet dont les composants appartiennent à M et un quasi-isomorphisme $w : L^\bullet \rightarrow X$. Alors l'ensemble M possède les propriétés (E_2) et (E_3) .

Démontrons a). Tout d'abord, il existe un complexe $X' \in \text{Ob } \mathbf{comp}^-(\mathcal{A})$ et un quasi-isomorphisme $X' \rightarrow X$ (1.2.1). On peut donc se ramener au cas où X est un objet de $\mathbf{comp}^-(\mathcal{A})$. D'après (2.1.4) et (2.1.5), il existe une suite de morphismes :

$$u_n : X_n \rightarrow X_{n-1} , \quad n \in \mathbb{Z} ,$$

où les X_n sont des objets de $\text{comp}^-(\mathcal{A})$, les u_n des morphismes élémentaires de hauteur $-n$ et un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_n X_n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow m \\ \varinjlim_n X_n & \xrightarrow{\sim} & Y \end{array}$$

Pour démontrer la proposition, on peut donc supposer que $X = \varprojlim_n X_n$ et que $X_n = Y$, $u_n = \text{identité}$, pour n assez petit. Nous allons construire par récurrence sur n :

a) Une suite de morphismes élémentaires :

$$v_n : L_n^\bullet \longrightarrow L_{n-1}^\bullet, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad v_n \text{ élémentaire de hauteur } -n.$$

b) Une suite de morphismes :

$$w_n : L_n^\bullet \longrightarrow X_n$$

tels que :

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ les composants de degré i , $i \geq -n$, de L_n^\bullet soient des éléments de M et les composants de degré i , $i < -n$, soient des éléments de M^\wedge .

2) Les diagrammes ci-après, soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} L_n^\bullet & \xrightarrow{w_n} & X_n \\ v_n \downarrow & & \downarrow u_n \\ L_{n-1}^\bullet & \xrightarrow{w_{n-1}} & X_{n-1} \end{array} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

3) L'objet L_n^\bullet soit égal à Y et les morphismes v_n et w_n soient l'identité pour n assez petit.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Ceci étant fait, il suffira de poser $L^\bullet = \varprojlim_n L_n^\bullet$, $w = \varprojlim_n w_n$. Pour

n suffisamment petit, on pose $L_n = Y$, $v_n = \text{id}_Y$ et $w_n = \text{id}_Y$. Supposons que l'on ait construit pour tout entier $n < q$, $q \in \mathbb{Z}$, des complexes L_n^\bullet et des morphismes v_n et w_n possédant les propriétés 1), 2) et 3) ci-dessus. Le complexe X_n est de la forme :

$$X_n = \cdots \longrightarrow Y^{-n-2} \longrightarrow Z^{-n-1} \longrightarrow X^{-n} \longrightarrow X^{-n+1} \longrightarrow \cdots$$

et le complexe L_n^\bullet est de la forme :

$$L_n^\bullet = \cdots \longrightarrow Y^{-n-2} \longrightarrow Z'^{-n-1} \longrightarrow L^{-n} \longrightarrow L^{-n+1} \longrightarrow \cdots ,$$

où les Y^i (resp. les X^i) sont les composants du complexe Y (resp. X). On a donc un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & X^{-q} & \\ & \downarrow (u_q)^{-q} & \\ Z'^{-q} & \xrightarrow{(w_{q-1})^{-q}} & Z^{-q} \end{array} ,$$

où $(u_q)^{-q}$ est un épimorphisme et où $Z'^{-q} \in M^\wedge$. Comme l'ensemble M^\wedge possède la propriété (E_2) (2.2.4), on peut compléter ce diagramme en un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L^{-q} & \xrightarrow{\beta} & X^{-q} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow (u_q)^{-q} \\ Z'^{-q} & \xrightarrow{(w_{q-1})^{-q}} & Z^{-q} \end{array} ,$$

où le morphisme α est un épimorphisme et l'objet L^{-q} un élément de M . On en déduit, en utilisant les notations (2.1.1.2) et (2.1.1.3), un diagramme commutatif de complexes :

$$\begin{array}{ccc} L_{q-1}^\bullet(\alpha, -q) & \xrightarrow{\varphi} & X_{q-1}((u_q)^{-q}, -q) \simeq X_q \\ p(\alpha, -q) \downarrow & & \downarrow p((u_q)^{-q}, -q) \simeq u_q \\ L_{q-1}^\bullet & \xrightarrow{w_{q-1}} & X_{q-1} \end{array} .$$

Posons alors $L_q^\bullet = L_{q-1}^\bullet(\alpha, -q)$, $w_q = \varphi$, $v_q = p(\alpha, -q)$. Les complexes L_n^\bullet et les morphismes de complexes w_n et v_n , $n \leq q$, possèdent les propriétés 2) et 3). Il reste à montrer que L_q^\bullet possède la propriété 1) ci-dessus. Ceci résulte du fait que l'ensemble M^\wedge est exact (E_6) (2.2.4).

Démontrons b). Soient L un élément de M et $u : X \rightarrow L$ un épimorphisme. Désignons par Y le noyau de u . On a un quasi-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{array} .$$

Par suite, on a un quasi-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & L^{-1} & \longrightarrow & L^0 & \longrightarrow & L^1 \longrightarrow L^2 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{array} ,$$

où les L^i sont des éléments de M . Par suite, le morphisme uv est un épimorphisme, ce qui démontre la propriété (E_2). Soit maintenant :

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0$$

une suite exacte, où les L_i sont des éléments de M . On a alors un quasi-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{array} .$$

Il existe par suite un quasi-isomorphisme :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & L^{-n-1} & \longrightarrow & L^{-n} & \longrightarrow & L^{-n+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

et par suite v est un épimorphisme, ce qui démontre la propriété (E_3) et achève la démonstration de la proposition.

Proposition 2.3.2. *Soit M un ensemble d'objets de \mathcal{A} possédant les propriétés (E_1) , (E_2) et (E_3) . Soit $Y \in \text{Ob } \text{comp}(\mathcal{A})$ un complexe tel que pour tout entier n , $H^n(Y) \in M$ et tel qu'il existe un entier n_0 tel que $H^n(Y) = 0$, pour $n \geq n_0$. Il existe alors un complexe $X \in \text{Ob } \text{comp}^-(\mathcal{A})$ dont les composants sont des éléments de M et un quasi-isomorphisme :*

$$u : X \longrightarrow Y .$$

Tout d'abord, il existe (1.2.1) un complexe $Y' \in \text{Ob } \text{comp}^-(\mathcal{A})$ et un quasi-isomorphisme $Y' \longrightarrow Y$. On peut donc se ramener au cas où Y est un objet de $\text{comp}^-(\mathcal{A})$. Nous allons construire par récurrence sur n , une suite de morphismes :

$$u_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$$

possédant les propriétés suivantes :

- 1) Pour n assez petit $X_n = Y$ et $u_n = \text{id}_Y$.
- 2) Les composants de degré $i \geq -n$ du complexe X_n sont des éléments de M . Les noyaux et images des différentielles de degré $i \geq -n$ de X_n sont des éléments de M^\wedge (2.1.1).
- 3) Le morphisme u_n est un quasi-isomorphisme. Il est isomorphe au morphisme $p((u_n)^{-n}, -n)$ (2.1.1.3).

Ceci fait, il suffit de poser $X = \varprojlim_n X_n$ et de prendre pour morphisme u le morphisme canonique :

$$u : X = \varprojlim_n X_n \longrightarrow \varinjlim_n X_n = Y .$$

Pour n assez petit, on pose $X_n = Y$ et $u_n = \text{id}_Y$. Supposons que l'on ait construit pour tout entier $n < q$ des complexes X_n et des morphismes u_n possédant les propriétés 1), 2) et 3) ci-dessus. Le complexe X_{q-1} est de la forme :

$$X_{q-1} = \cdots \longrightarrow Y^{-q-2} \longrightarrow Y^{-q-1} \longrightarrow Z^{-q} \longrightarrow L^{-q+1} \longrightarrow L^{-q+2} \longrightarrow \cdots ,$$

où les Y^i sont les composants du complexe Y et les L^i sont des éléments de M . On a alors un épimorphisme :

$$Z^{-q} \longrightarrow Z^{-q}/\text{Im}(Y^{-q-1} \longrightarrow Z^{-q}) \longrightarrow 0$$

et des suites exactes :

$$0 \rightarrow H^{-q}(X_{q-1}) \rightarrow Z^{-q}/\text{Im}(Y^{-q-1} \rightarrow Z^{-q}) \rightarrow Z^{-q}/\text{Ker}(Z^{-q} \rightarrow L^{-q+1}) \rightarrow 0 ,$$

$$0 \rightarrow Z^{-q}/\text{Ker}(Z^{-q} \rightarrow L^{-q+1}) \rightarrow L^{-q+1} \rightarrow L^{-q+1}/\text{Im}(Z^{-q} \rightarrow L^{-q+1}) \rightarrow 0 ,$$

$$0 \rightarrow H^{-q+1}(X_{q-1}) \rightarrow L^{-q+1}/\text{Im}(Z^{-q} \rightarrow L^{-q+1}) \rightarrow L^{-q+1}/\text{Ker}(L^{-q+1} \rightarrow L^{-q+2}) \rightarrow 0 .$$

Le complexe X_{q-1} étant quasi-isomorphe au complexe Y , les objets $H^i(X_{q-1})$ sont des éléments de M . Il résulte alors des suites exactes écrites ci-dessus, de l'hypothèse de récurrence 2), et des propriétés d'exactitude de l'ensemble M^\wedge (2.2.4), que l'objet $Z^{-q}/\text{Im}(Y^{-q-1} \rightarrow Z^{-q})$ est un élément de M^\wedge . Par suite, il existe un morphisme :

$$v : L^{-q} \longrightarrow Z^{-q}$$

tel que L^{-q} soit un élément de M et que le morphisme composé :

$$L^{-q} \xrightarrow{v} Z^{-q} \longrightarrow Z^{-q}/\text{Im}(Y^{-q-1} \rightarrow Z^{-q})$$

soit un épimorphisme. Posons alors :

$$X_q = X_{q-1}(v, -q) ,$$

$$u_q = p(v, -q) \quad (2.1.1).$$

Il résulte de (2.1.2) que u_q est un quasi-isomorphisme, d'où la propriété 3). Il reste à vérifier la propriété 2), *i.e.* à vérifier que le noyau et l'image du morphisme $L^{-q} \longrightarrow L^{-q+1}$ sont des éléments de M^\wedge ; ce qui résulte immédiatement des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \text{Im}(L^{-q} \longrightarrow L^{-q+1}) \longrightarrow \text{Ker}(L^{-q+1} \longrightarrow L^{-q+2}) \longrightarrow H^{-q+1}(X_q) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(L^{-q} \longrightarrow L^{-q+1}) \longrightarrow L^{-q} \longrightarrow \text{Im}(L^{-q} \longrightarrow L^{-q+1}) \longrightarrow 0 .$$

Ceci achève la preuve de la proposition.

Proposition 2.3.3. *Soient $M \subset M'$ deux ensembles d'objets de \mathcal{A} tels que M possède les propriétés (E_4) et (E_5) , que M' possède les propriétés (E_1) et (E_4) et que tout objet de M' soit quotient d'un objet M . Soit $Y \in \text{Ob comp}(\mathcal{A})$ un complexe tel que :*

1) *Les composants Y^i , $i \in \mathbb{Z}$, de Y soient des éléments de M' .*

CATÉGORIES DÉRIVÉES

2) La suite $i \mapsto i - M\text{-dim}(Y^i)$ tende vers $+\infty$, quand i tend vers $+\infty$.

Il existe alors un complexe $X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{comp}(\mathcal{A}))$ dont les composants sont des éléments de M et un quasi-isomorphisme :

$$u : X \longrightarrow Y .$$

Si on suppose de plus que tous les composants de Y sont de M -dimension finie et que $Y \in \mathbf{Ob}(\mathbf{comp}^b(\mathcal{A}))$ (resp. $\mathbf{Ob}(\mathbf{comp}^+(\mathcal{A}))$), on peut alors prendre X dans $\mathbf{comp}^b(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{comp}^+(\mathcal{A})$).

Soit n_0 un entier tel que $i > n_0 \Rightarrow M\text{-dim}(Y^i) < +\infty$. On se propose de construire :

a) Une suite de complexes X_i , $i \geq n_0$.

b) Une suite de morphismes $u_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$, $i > n_0$, $u_{n_0} : X_{n_0} \longrightarrow Y$, tels que :

1)_i $(X_i)^j \in M$, pour $j \leq i$.

2)_i $(X_i)^j = Y^j$, pour $j > i$.

3)_i Le morphisme u_i soit un quasi-isomorphisme.

4)_i $(u_i)^j = \text{identité}$, pour $j > i$.

5)_i $(u_i)^j = \text{identité}$, pour $j \leq i - M\text{-dim}(Y^i)$; cette dernière propriété n'étant vraie que pour $i > n_0$.

Cette construction étant faite, remarquons que le système projectif X_i admet une limite projective dans $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$: les systèmes projectifs induits sur les composants de degré donné sont stationnaires, car $i - M\text{-dim}(Y^i)$ tend vers $+\infty$ avec i . Il suffira de poser alors $X = \varprojlim_i X_i$ et de prendre pour $u : X \longrightarrow Y$ le morphisme canonique. Les composants du complexe X sont des éléments de M et le morphisme u est un quasi-isomorphisme.

Construisons tout d'abord le morphisme $u_{n_0} : X_{n_0} \longrightarrow Y$. Procédons par récurrence et supposons qu'on ait construit pour tout entier i , $-n_0 \leq i < q$, des complexes $X_{n_0, i}$ et des morphismes $v_{n_0, i} : X_{n_0, i} \longrightarrow X_{n_0, i-1}$, $i > -n_0$, et $v_{n_0, -n_0} : X_{n_0, -n_0} \longrightarrow Y$, tels que :

I) _{n_0, i} Les composants $(X_{n_0, i})^j$ soient des éléments de M , pour $-i \leq j \leq n_0$.

II) _{n_0, i} Les composants $(X_{n_0, i})^j$ soient des éléments de M' , pour tout entier j .

III) _{n_0, i} Le morphisme $v_{n_0, i}$ soit un morphisme élémentaire de hauteur $-i$ (2.1.3).

Le complexe $X_{n_0, q-1}$ est alors de la forme :

$$\dots \rightarrow Y^{-q-1} \rightarrow Z^{-q} \rightarrow L^{-q+1} \rightarrow L^{-q+2} \dots \rightarrow L^{n_0-1} \rightarrow L^{n_0} \rightarrow Y^{n_0+1} \rightarrow Y^{n_0+2} \rightarrow \dots ,$$

où Z^{-q} est un élément de M' et les L^j , $-q + 1 \leq j \leq n_0$, des éléments de M . Il existe par suite un épimorphisme :

$$\alpha : L^{-q} \longrightarrow Z^{-q} , \text{ où } L^{-q} \in M .$$

Posons alors :

$$X_{n_0,q} = X_{n_0,q-1}(\alpha, -q) ,$$

$$v_{n_0,q} = p(\alpha, -q) \quad (2.1.1).$$

Il est clair que par construction on a les propriétés $I)_{n_0,q}$ et $III)_{n_0,q}$. La propriété $II)_{n_0,q}$ résulte de ce que l'ensemble M' possède les propriétés (E_1) et (E_4) . On peut donc poursuivre la construction des $X_{n_0,i}$. En posant $X_{n_0} = \varprojlim_i X_{n_0,i}$ et en prenant pour $u_{n_0} : X_{n_0} \longrightarrow Y$ le morphisme canonique, on

obtient un complexe et un morphisme qui possèdent les propriétés $1)_{n_0}, 2)_{n_0}, 3)_{n_0}, 4)_{n_0}$.

Pour construire alors les complexes X_i et les morphismes $u_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$, nous procérons par récurrence. Supposons donc qu'on ait construit pour tout entier i , $n_0 \leq i < q$, des complexes X_i et des morphismes $u_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$ possédant les propriétés $1)_i, 2)_i, 3)_i, 4)_i, 5)_i$, $n_0 \leq i < q$. Il s'agit de construire un complexe X_q et un morphisme $u_q : X_q \longrightarrow X_{q-1}$ tels que l'on ait les propriétés $1)_q, 2)_q, 3)_q, 4)_q, 5)_q$. Tout d'abord, si $Y^q \in M$, on pose $X_q = X_{q-1}$ et u_q = identité. Supposons que Y^q ne soit pas un élément de M , i.e. que $M\text{-dim}(Y^q) > 0$. Pour construire le complexe X_q et le morphisme $u_q : X_q \longrightarrow X_{q-1}$, nous procérons à nouveau par récurrence. Soit r un entier tel que $-q < r \leq -q + M\text{-dim}(Y^q)$. Supposons qu'on ait déterminé une suite de complexes $X_{q,l}$, $-q < l < r$, et de morphismes $v_{q,l} : X_{q,l} \longrightarrow X_{q,l-1}$ (on pose $X_{q,-q} = X_{q-1}$) tels que :

$$I')_l \quad (X_{q,l})^j = (X_{q,l-1})^j, \text{ pour tout } j \neq -l, -l+1.$$

$$II')_l \quad (X_{q,l})^{-l} \in M' \text{ et } M\text{-dim}((X_{q,l})^{-l}) = M\text{-dim}(Y^q) - l - q.$$

$$III')_l \quad (X_{q,l})^{-l+1} \in M.$$

$IV')_l$ $v_{q,l}$ soit un morphisme élémentaire de hauteur $-l+1$ et $(v_{q,l})^j =$ identité, pour $j \neq -l, -l+1$.

Le complexe $X_{q,r-1}$ est alors de la forme :

$$\cdots \rightarrow L^{-r} \rightarrow Z^{-r+1} \rightarrow L^{-r+2} \rightarrow \cdots \rightarrow L^q \rightarrow Y^{q+1} \rightarrow Y^{q+2} \rightarrow \cdots ,$$

où les L^i sont des éléments de M et où Z^{-r+1} est un élément de M' tel que $M\text{-dim}(Z^{-r+1}) = M\text{-dim}(Y^q) - r + 1 - q$. Il existe donc un épimorphisme

CATÉGORIES DÉRIVÉES

$\alpha : L^{-r+1} \longrightarrow Z^{-r+1}$, où L^{-r+1} est un objet de M . Posons alors $X_{q,r} = X_{q,r-1}(\alpha, -r + 1)$ et $v_{q,r} = p(\alpha, -r + 1)$ (2.1.1). Il est clair que $X_{q,r}$ et $v_{q,r}$ possèdent les propriétés $I')_r$, $III')_r$, $IV')_r$. De plus, par définition du complexe $X_{q,r}$ (2.1.1), on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow (X_{q,r})^{-r} \longrightarrow L^{-r} \oplus L^{-r+1} \longrightarrow Z^{-r+1} \longrightarrow 0 \quad .$$

Il résulte alors de la propriété (E_4) que $(X_{q,r})^{-r}$ est un élément de M' et de (2.2.6) que :

$$M\text{-dim}((X_{q,r})^{-r}) = M\text{-dim}(Z^{-r+1}) - 1 = M\text{-dim}(Y^q) - r - q \quad ,$$

d'où la propriété $II')_r$. On peut donc poursuivre la construction. Posons alors $X_{q,-q+M\text{-dim}(Y^q)} = X_q$ et désignons par $u_q : X_q \longrightarrow X_{q-1}$ le morphisme obtenu en composant les $v_{q,l}$. Il est clair que X_q et u_q possèdent les propriétés $1)_q$, $2)_q$, $3)_q$, $4)_q$, $5)_q$. Ceci achève la démonstration de la première assertion de la proposition. Pour démontrer la deuxième assertion, il suffit de remarquer que sous les hypothèses supplémentaires, on peut prendre dans la construction précédente $X_{n_0} = Y$, pour un n_0 convenable.

Remarque 2.3.4. Dans la construction du complexe X_{n_0} (cf. démonstration de la proposition (2.3.3)), nous avons en fait démontré le résultat suivant : soit $M \subset M'$ deux ensembles d'objets de \mathcal{A} tels que $0 \in M$, M' possède les propriétés (E_1) et (E_4) et que tout objet de M' soit quotient d'un objet de M . Soit $Y \in \text{Ob } \text{comp}^-(\mathcal{A})$ un complexe dont tous les composants sont des éléments de M' . Il existe un complexe $X \in \text{Ob } \text{comp}^-(\mathcal{A})$ dont tous les composants sont des éléments de M et un quasi-isomorphisme $u : X \longrightarrow Y$.

2.3.5. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les résultats qu'on obtient en appliquant les résultats de ce numéro à la catégorie opposée à \mathcal{A} . On dit qu'un ensemble M d'objets de \mathcal{A} possède la propriété $(E_i)^\circ$, $1 \leq i \leq 6$, si l'ensemble M d'objets de \mathcal{A}° possède la propriété (E_i) de (2.2.1).

2.4. Applications.

Proposition 2.4.1. a) Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et M un ensemble d'objets de \mathcal{A} possédant la propriété (E_1) (2.2.1). La catégorie $\mathbf{K}^-(M)$ (1.1.4) est $\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$ -localisante à gauche (chap. II, 2.3.5) si et seulement si l'ensemble M possède les propriétés (E_2) et (E_3) .

b) Soient M un ensemble d'objets possédant les propriétés (E_1) , (E_2) et (E_3) et M^\wedge l'ensemble associé à M , défini en (2.2.1). Le foncteur naturel :

$$\mathbf{K}^-(M)/\mathbf{Ac}^-(M) \longrightarrow \mathbf{K}^-(M^\wedge)/\mathbf{Ac}^-(M^\wedge)$$

est une équivalence de catégories. Le foncteur naturel :

$$K^-(M^\wedge)/\mathbf{Ac}^-(M^\wedge) \longrightarrow D^-(\mathcal{A})$$

est pleinement fidèle. Les objets de $D^-(\mathcal{A})$ dont les objets de cohomologie sont des éléments de M^\wedge sont isomorphes à des objets de $K^-(M^\wedge)/\mathbf{Ac}^-(M^\wedge)$, où $\mathbf{Ac}^-(M)$ et $\mathbf{Ac}^-(M^\wedge)$ désignent les catégories des complexes acycliques dont les composants sont des éléments de M et M^\wedge respectivement.

Cette proposition résulte immédiatement de (2.3.1), (2.3.2) et de (chap. II, 2.3.5).

Corollaire 2.4.2. Soit \mathbf{U} un univers. On suppose que la catégorie \mathcal{A} est une \mathbf{U} -catégorie, i.e. que pour tout couple Y et Z d'objets de \mathcal{A} , $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$ est un élément de \mathbf{U} , et que les sommes directes indexées par des éléments de \mathbf{U} sont représentables dans \mathcal{A} . Soient $(X_i)_{i \in I \in \mathbf{U}}$ une famille de générateurs de \mathcal{A} et M l'ensemble des objets de \mathcal{A} de la forme $\coprod_{j \in J \in \mathbf{U}} X_j$, où les X_j sont des éléments de l'ensemble $\bigcup_{i \in I} \{X_i\}$. Alors le foncteur naturel :

$$K^-(M)/\mathbf{Ac}^-(M) \longrightarrow D^-(\mathcal{A})$$

est une équivalence de catégories.

Résulte immédiatement de (2.4.1).

Proposition 2.4.3. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et M un ensemble d'objets de \mathcal{A} possédant les propriétés (E_4) et (E_5) tel que tout objet de \mathcal{A} soit quotient d'un élément de M et tel qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ majorant la M -dimension de tout objet X de \mathcal{A} .

- a) La catégorie $K^*(M)$ est $\mathbf{Ac}^*(\mathcal{A})$ -localisante à gauche ($* = -, +, b$, “vide”).
- b) Le foncteur naturel :

$$K^*(M)/\mathbf{Ac}^*(M) \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$$

est une équivalence de catégories.

Paraphrase la proposition (2.3.3) ($* = +, b$, “vide”), ou la proposition (2.3.1) ($* = -$).

Proposition 2.4.4. On désigne par $Q^* : K^*(\mathcal{A}) \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$ le foncteur canonique.

- a) Soit X un objet de \mathcal{A} . L'objet X est Q -libre à gauche (chap. II, 2.3.2) si et seulement si X est un objet projectif de la catégorie \mathcal{A} .

CATÉGORIES DÉRIVÉES

b) Désignons par P l'ensemble des objets projectifs de \mathcal{A} . La catégorie triangulée $K^-(P)$ est une sous-catégorie de la catégorie des objets Q -libres à gauche. Le foncteur naturel :

$$K^-(P) \longrightarrow D(\mathcal{A})$$

est pleinement fidèle.

c) Si tout objet de \mathcal{A} est quotient d'objet projectif (resp. et si de plus il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ qui majore la dimension projective des objets de \mathcal{A}), alors :

1) Le foncteur naturel $K^-(P) \longrightarrow D^-(\mathcal{A})$ (resp. $K^*(P) \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$) est une équivalence de catégories. On désigne par $L^- : D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow K^-(P)$ (resp. $L^* : D^*(\mathcal{A}) \longrightarrow K^*(P)$) un foncteur quasi-inverse.

2) Le foncteur $L^- Q^- : K^-(\mathcal{A}) \rightarrow K^-(P)$ (resp. $L^* Q^* : K^*(\mathcal{A}) \rightarrow K^*(P)$) est adjoint à droite au foncteur d'inclusion :

$$K^-(P) \longrightarrow K^-(\mathcal{A}) \quad (\text{resp. } K^*(P) \rightarrow K^*(\mathcal{A}) \quad).$$

Le morphisme d'adjonction $\text{id}_{K^-(\mathcal{A})} \longrightarrow L^- Q^-$ (resp. $\text{id}_{K^*(\mathcal{A})} \longrightarrow L^* Q^*$) est un "quasi-isomorphisme".

3) Le foncteur L^- (resp. L^*) est un adjoint à gauche au foncteur Q^- (resp. Q^*).

4) Un objet de $K^-(\mathcal{A})$ (resp. $K^*(\mathcal{A})$) est Q -libre à gauche si et seulement s'il est isomorphe à un objet de $K^-(P)$ (resp. $K^*(P)$).

Démontrons a). Pour tout objet Y de \mathcal{A} , on a : $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y[n]) = 0$, pour $n \neq 0$, et par suite, comme X est Q -libre à gauche (chap. II, 2.3.3), on a :

$$\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y[n]) = 0 \quad , \quad \text{pour } n \neq 0 \quad .$$

Par ailleurs, on a $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ (1.2.9). Soit alors :

$$S = 0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Y'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de \mathcal{A} . Le foncteur cohomologique canonique $\text{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ (1.3.2) fournit un triangle distingué $(Y', Y, Y'', [u], [v], \delta(S))$. D'où, une suite exacte (chap. II, 1.2.1) :

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y') \rightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y'') \rightarrow 0 \rightarrow \cdots ,$$

i.e. une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y'') \longrightarrow 0 \quad ,$$

ce qui montre que X est un objet projectif de \mathcal{A} .

Démontrons *b*). Soient L^\bullet un complexe de type projectif objet de $K^-(\mathcal{A})$ et $u : L^\bullet \rightarrow Y$ un morphisme dans un complexe acyclique. Supposons qu'on ait construit pour tout entier $i > n$, un morphisme $s^i : L^i \rightarrow Y^{i-1}$ tel que $u^i = d_Y^{i-1} s^i + s^{i+1} d_L^n$. (une telle construction est toujours possible pour n suffisamment grand car L^\bullet est un objet de $K^-(\mathcal{A})$). On en déduit que $d_Y^n(u^n - s^{n+1} d_L^n) = 0$ et, par suite, le morphisme $u^n - s^{n+1} d_L^n$ se factorise par $\text{Ker}(d_Y^n)$. Le complexe Y étant acyclique, le morphisme $Y^{n-1} \rightarrow \text{Ker}(d_Y^n)$ est un épimorphisme et l'objet L^n étant projectif, il existe un morphisme $s^n : L^n \rightarrow Y^{n-1}$ tel que $d_Y^{n-1} s^n = u^n - s^{n+1} d_L^n$. On démontre ainsi par récurrence qu'il existe, pour tout entier i , un morphisme s^i tel que $u^i = d_Y^{i-1} s^i + s^{i+1} d_L^n$. Le morphisme u est donc homotope à zéro. On en déduit par (chap. II, 2.3.3) que l'objet L^\bullet est un objet Q -libre à gauche. La dernière assertion de *b*) résulte alors de (chap. II, 2.3.3).

Démontrons *c*). L'assertion 1) résulte immédiatement de *b*) et de (2.3.1). Pour démontrer l'assertion 1) sous la forme resp., montrons d'abord que tout complexe de type projectif est Q -libre à gauche. Soit L^\bullet un complexe de type projectif et $u : X \rightarrow L^\bullet$ un quasi-isomorphisme. Il suffit de montrer que u admet une section (chap. II, 2.3.3). Il suffit donc de montrer qu'il existe un complexe de type projectif L'^\bullet et un quasi-isomorphisme $v : L'^\bullet \rightarrow X$ tel que le morphisme composé $uv : L'^\bullet \rightarrow L^\bullet$ soit un isomorphisme de $K(\mathcal{A})$. D'après (2.3.3), il existe toujours un complexe L'^\bullet de type projectif et un quasi-isomorphisme $v : L'^\bullet \rightarrow X$. Tout revient donc à montrer qu'un quasi-isomorphisme $uv : L'^\bullet \rightarrow L^\bullet$ est un isomorphisme. Or il existe un triangle distingué $(L'^\bullet, L^\bullet, L''^\bullet, uv, w, m)$, où L''^\bullet est un complexe de type projectif acyclique. Tout revient donc à montrer que les complexes acycliques de type projectif sont homotopes à zéro. Soit donc L''^\bullet un complexe acyclique de type projectif. Comme la dimension projective des objets de \mathcal{A} est majorée, les noyaux des différentielles de L''^\bullet sont des projectifs (2.2.6). On en déduit que toutes les différentielles de L''^\bullet sont des morphismes décomposables (chap. II, 1.2.8) et, par suite, que L''^\bullet est homotope à zéro.

Il résulte alors de (chap. II, 2.3.3) que le foncteur naturel $K^*(P) \rightarrow D(\mathcal{A})$ est pleinement fidèle. Par suite, le foncteur $K^*(P) \rightarrow D^*(\mathcal{A})$ est pleinement fidèle. D'après (2.3.3), ce foncteur est aussi essentiellement surjectif ; il est par suite une équivalence de catégorie. Les assertions 2) et 3) ne sont alors que des applications directes de (chap. II, 2.3.3). L'assertion 4) est alors évidente : un objet Q -libre à gauche de $K^-(\mathcal{A})$ (resp. de $K^*(\mathcal{A})$) admet, d'après (2.3.1) (resp. (2.3.3)), une résolution à gauche par un complexe de type projectif de $K^-(\mathcal{A})$ (resp. $K^*(\mathcal{A})$), et un quasi-isomorphisme entre objets Q -libres à gauche est un isomorphisme de $K(\mathcal{A})$.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Remarque 2.4.5. *a)* Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne dont tous les objets soient isomorphes à des quotients d'objets projectifs. Un complexe de type projectif n'est pas nécessairement Q -libre à gauche.

Exemple : Soit \mathcal{A} la catégorie des $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -modules. Le complexe :

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

dont toutes les différentielles sont la multiplication par 2 est acyclique et de type projectif. Il n'est cependant pas homotope à zéro. Le même complexe fournit un exemple de complexe acyclique de type injectif, non homotope à zéro.

b) Même lorsque la dimension projective des objets de \mathcal{A} n'est pas bornée, il peut exister des complexes de type projectif Q -libres à gauche dont l'image dans $D(\mathcal{A})$ n'appartient pas à $D^-(\mathcal{A})$. Par exemple, un complexe projectif de Cartan-Eilenberg est un objet Q -libre à gauche. Plus généralement, toute somme directe d'objets Q -libres à gauche est Q -libre à gauche.

2.4.6. Nous laissons au lecteur le soin de formuler les énoncés qu'on obtient en appliquant les résultats de ce numéro à la catégorie opposée à la catégorie \mathcal{A} .

3. Étude des Ext.

Dans ce paragraphe, \mathcal{A} désigne une catégorie abélienne.

3.1. Différentes définitions équivalentes.

3.1.1. On dit que la *dimension cohomologique de \mathcal{A} est inférieure ou égale à n* si pour tout couple X et Y d'objets de \mathcal{A} et pour tout entier $p > n$, on a $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^p(X, Y) = 0$ ((1.2.5), (1.2.9)). On appelle *dimension cohomologique de \mathcal{A}* et on note $\mathrm{dimcoh}(\mathcal{A})$, le plus petit des entiers n pour lesquels la dimension cohomologique de \mathcal{A} est inférieure ou égale à n . S'il n'existe pas d'entier n pour lequel la dimension cohomologique de \mathcal{A} soit inférieure ou égale à n , on dit que la dimension cohomologique de \mathcal{A} est infinie et on écrit $\mathrm{dimcoh}(\mathcal{A}) = +\infty$.

3.1.2. Rappelons (1.1.3) qu'on désigne par Qis^* l'ensemble des quasi-isomorphismes de $K^*(\mathcal{A})$ ($* = b, -, +, \text{“vide”}$). Soit X un objet de $K^*(\mathcal{A})$, on désigne par Qis^*/X (resp. $X \setminus \mathrm{Qis}^*$) la catégorie des quasi-isomorphismes de but X (resp. de source X) (chap. II, 2.2.1). L'ensemble Qis^* étant un système multiplicatif de morphismes, la catégorie Qis^*/X (resp. $X \setminus \mathrm{Qis}^*$) est filtrante à gauche (resp. à droite) (chap. II, 2.2.1). La catégorie Qis^*/X (resp. $X \setminus \mathrm{Qis}^*$) admet un objet initial (resp. final) $u : Y \longrightarrow X$ (resp. $u : X \longrightarrow Y$) si et seulement s'il existe un objet Q^* -libre à gauche (resp. à droite) Y et un quasi-isomorphisme $u : Y \longrightarrow X$ (resp. $u : X \longrightarrow Y$), comme on le voit immédiatement en utilisant (chap. II, 2.3.3).

Proposition 3.1.3. Soient X et Y deux complexes de \mathcal{A} .

- (1) $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) = \varinjlim_{(\mathrm{Qis}/X)^{\circ}} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\cdot, Y) \quad .$
- (2) $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{Y \setminus \mathrm{Qis}} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, \cdot) \quad .$
- (3) $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{(\mathrm{Qis}/X)^{\circ} \times (Y \setminus \mathrm{Qis})} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\cdot, \cdot) \quad .$
- (4) $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X[p], Y[n+p]) \quad , \text{ pour tout entier } p \quad .$
- (5) Pour tout X dans $K^-(\mathcal{A})$, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{(\mathrm{Qis}^-/X)^{\circ}} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\cdot, Y) \quad .$
- (6) Pour tout Y dans $K^+(\mathcal{A})$, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{Y \setminus \mathrm{Qis}^+} \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, \cdot) \quad .$

(7) Pour tout X dans $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$ et tout Y dans $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$,

$$\mathsf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{(\mathbf{Qis}^b/X)^\circ} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(\cdot, Y) .$$

(8) Pour tout X dans $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$ et tout Y dans $\mathsf{K}^b(\mathcal{A})$,

$$\mathsf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \varinjlim_{Y \setminus \mathbf{Qis}^b} \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, \cdot) .$$

La formule (1) résulte de la définition de la catégorie localisée (chap. II, 2.2.2). La formule (2) se déduit de la formule (1), en passant à la catégorie opposée (chap. II, 2.2.4). La formule (3) se déduit alors des formules (1) et (2). La formule (4) est une définition (chap. I, 1.3.8). Les formules (5) et (6) résultent de la proposition (1.2.1), b) et $b)$ ^{bis}. Les formules (7) et (8) résultent de la proposition (1.2.1), c) et $c)$ ^{bis}.

Proposition 3.1.4. *On suppose que tout objet de la catégorie \mathcal{A} est isomorphe à un sous-objet (resp. à un quotient) d'un objet injectif (resp. projectif) de \mathcal{A} .*

1) *Tout objet Y (resp. X) de $\mathsf{K}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{K}^-(\mathcal{A})$) possède une résolution à droite (resp. à gauche) $u : Y \longrightarrow I^\bullet$ (resp. $u : P^\bullet \longrightarrow X$) de type injectif (resp. projectif) (1.1.4).*

2) *Cette résolution définit un isomorphisme :*

$$\mathsf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, I^\bullet) , \text{ pour tout } X \text{ dans } \mathsf{K}(\mathcal{A})$$

(resp. $\mathsf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet, Y) , \text{ pour tout } Y \text{ dans } \mathsf{K}(\mathcal{A})$).

3) *La dimension cohomologique de \mathcal{A} est la borne supérieure des dimensions injectives (resp. projectives) des objets de \mathcal{A} .*

4) *Lorsque la dimension cohomologique de \mathcal{A} est finie, tout objet Y (resp. X) de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ possède une résolution à droite (resp. à gauche) $u : Y \longrightarrow I^\bullet$ (resp. $u : P^\bullet \longrightarrow X$) de type injectif (resp. projectif).*

5) *Avec les hypothèses et notations de 4), une telle résolution définit un isomorphisme :*

$$\mathsf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(X, I^\bullet) , \text{ pour tout } X \text{ dans } \mathsf{K}(\mathcal{A})$$

(resp. $\mathsf{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet, Y) , \text{ pour tout } Y \text{ dans } \mathsf{K}(\mathcal{A})$).

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Seule reste à démontrer la troisième assertion. Les autres assertions sont des conséquences immédiates de la proposition (2.4.4). L'assertion 2) montre aussitôt que la dimension cohomologique de \mathcal{A} est inférieure ou égale à la borne supérieure des dimensions injectives (resp. projectives) des objets de \mathcal{A} . Supposons que la dimension cohomologique de \mathcal{A} soit égale à n et soit :

$$I^\bullet = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow I^3 \longrightarrow \cdots$$

une résolution de type injectif d'un objet Y de \mathcal{A} . Pour tout objet X de \mathcal{A} , on a $\mathbf{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(X[-n-1], I^\bullet) = 0$. En particulier, en prenant $X = \mathbf{Ker} d_{I^\bullet}^{n+1}$, on montre aussitôt que le morphisme canonique $\mathbf{Ker} d_{I^\bullet}^{n+1} \longrightarrow I^{n+1}$ se factorise à travers I^n :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{Ker} d_{I^\bullet}^{n+1} & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ I^n & \xrightarrow{\quad} & I^{n+1} & \xrightarrow{\quad} & \cdots \end{array}$$

Par suite, $\mathbf{Ker} d_{I^\bullet}^{n+1}$ et $\mathbf{Ker} d_{I^\bullet}^n$ sont des facteurs directs de I^n et sont donc injectifs. Le complexe :

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{n-1} \longrightarrow \mathbf{Ker} d_{I^\bullet}^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

est une résolution injective de Y ; ce qui montre que la dimension injective de Y est inférieure ou égale à n . On démontre de même que la dimension projective de tout objet X de \mathcal{A} est inférieure ou égale à n .

3.1.5. Soient X et Y deux objets de \mathcal{A} . La proposition (3.1.4) montre que lorsque la catégorie \mathcal{A} possède suffisamment d'objets injectifs ou projectifs les groupes $\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$ que nous avons définis ici coïncident avec ceux qui sont définis classiquement.

3.2. La construction de Yoneda.

3.2.1. Soient X et Y deux objets de \mathcal{A} . Désignons par $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ ($n \geq 1$) l'ensemble des suites exactes :

$$S^n(X, Y) = 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow Z_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z_0 \xrightarrow{u_0} X \longrightarrow 0 \quad .$$

L'entier n est appelé la longueur de la suite $S^n(X, Y)$. Assurons à tout élément $S^n(X, Y)$ de $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ trois complexes :

a) Le complexe X dont le seul composant non nul est l'objet X en degré zéro.

b) Le complexe :

$$Z^\bullet = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

(Y est le composant de degré $-n$ et les Z_i sont les composants de degré $-i$).

c) Le complexe $Y[n]$ dont le seul composant non nul est l'objet Y en degré $-n$.

Désignons alors par $u(S^n(X, Y)) : Z^\bullet \rightarrow X$ le morphisme dont le seul composant non nul est u_0 en degré 0, et par $v(S^n(X, Y)) : Z^\bullet \rightarrow Y[n]$ le morphisme dont le seul composant non nul est id_Y en degré $-n$. Le morphisme $u(S^n(X, Y))$ est un quasi-isomorphisme, d'où un morphisme dans $D(\mathcal{A})$ (avec les notations de (1.3.2)) :

$$(3.2.1.1) \quad \delta_{\mathcal{A}}^n(S^n(X, Y)) = [v(S^n(X, Y))] [u(S^n(X, Y))]^{-1} : X \longrightarrow Y[n] .$$

On définit ainsi une application :

$$(3.2.1.2) \quad \delta_{\mathcal{A}}^n : E_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) ,$$

qu'on note simplement δ^n lorsqu'aucune confusion n'en résulte.

Proposition 3.2.2. a) L'application δ^n est surjective.

b) Deux éléments :

$$S^n(X, Y) = 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

et :

$$S'^n(X, Y) = 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z'_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

ont la même image par δ^n si et seulement s'il existe un élément :

$$S''^n(X, Y) = 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z''_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z''_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \text{id} & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z''_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z''_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z'_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

c) Lorsque $n = 1$, δ^1 est le morphisme défini par le δ -foncteur canonique $\mathbf{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ (1.3.2).

Cette proposition résulte de la proposition (3.1.3) formule (7). Nous laissons l'exercice au lecteur qui pourra consulter [3].

3.2.3. Soit $S^n(X, Y) = 0 \rightarrow Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} Z_{n-2} \cdots Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0$ un élément de $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$. Pour tout entier p , $0 \leq p \leq n$, donnons nous un élément ε_p de $\{-1, +1\}$. Désignons par $S_{\varepsilon}^n(X, Y)$ la suite exacte :

$$(3.2.3.1) \quad 0 \rightarrow Y \xrightarrow{\varepsilon_n u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{\varepsilon_{n-1} u_{n-1}} Z_{n-2} \cdots Z_0 \xrightarrow{\varepsilon_0 u_0} X \rightarrow 0 ,$$

qui est élément de $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$. On a l'égalité :

$$(3.2.3.2) \quad \delta^n(S_{\varepsilon}^n(X, Y)) = \left(\prod_{i=0}^n \varepsilon_i \right) \delta^n(S^n(X, Y)) .$$

La formule (3.2.3.2) se démontre immédiatement en utilisant la relation d'équivalence (3.2.2), b) et la définition de δ^n (3.2.1.1).

3.2.4. Soient maintenant deux suites exactes :

$$\begin{aligned} S^n(X, X') &= 0 \rightarrow X' \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0 \\ S^m(X', X'') &= 0 \rightarrow X'' \xrightarrow{u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{u'_{m-1}} \cdots \xrightarrow{u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u'_0} X' \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Désignons par $S^m(X', X'') * S^n(X, X')$ la suite exacte :

$$(3.2.4.1) \quad \begin{aligned} S^m(X', X'') * S^n(X, X') &= \\ 0 \rightarrow X'' \xrightarrow{u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{u'_{m-1}} \cdots Z'_0 \xrightarrow{u'_0 u'_0} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0 & \end{aligned}$$

Proposition 3.2.5. On a l'égalité :

$$\delta^{m+n}(S^m(X', X'') * S^n(X, X')) = (-1)^{mn} (\delta^m(S^m(X', X''))) [n] \delta^n(S^n(X, X')).$$

Déterminons le morphisme $(\delta^m(S^m(X', X''))) [n] \delta^n(S^n(X, X'))$. Avec les notations de (3.2.1), on a deux diagrammes :

$$X' \xleftarrow{u(S^m(X', X''))} Z' \bullet \xrightarrow{v(S^m(X', X''))} X''[m] ,$$

$$X \xleftarrow{u(S^n(X, X'))} Z^\bullet \xrightarrow{v(S^n(X, X'))} X'[n] ,$$

d'où un diagramme :

$$X \xleftarrow{u(S^n)} Z^\bullet \xrightarrow{v(S^n)} X'[n] \xleftarrow{u(S^m)[n]} Z'^\bullet[n] \xrightarrow{v(S^m)[n]} X''[m+n] ,$$

(où pour simplifier la notation nous avons fait les abréviations évidentes). Il résulte alors de la définition de la translation dans $D(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.2.6) qu'on a l'égalité :

$$(3.2.5.1) \quad (\delta^m(S^m(X', X''))) [n] \delta^n(S^n(X, X')) =$$

$$[v(S^m)[n]] [u(S^m)[n]]^{-1} [v(S^n)] [u(S^n)]^{-1} .$$

Posons alors :

$$(3.2.5.2) \quad Z''^\bullet = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X'' \xrightarrow{(-1)^n u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{(-1)^n u'_{m-1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{(-1)^n u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u_n u'_0} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

(les Z_i sont les composants de degré $-i$ de Z''^\bullet),

$$S^{m+n}(X, X'') = 0 \longrightarrow X'' \xrightarrow{(-1)^n u'_m} Z'_{m-1} \xrightarrow{(-1)^n u'_{m-1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{(-1)^n u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u_n u'_0} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \longrightarrow 0$$

Définissons maintenant deux morphismes de complexes :

$$(3.2.5.3) \quad \rho : Z''^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \begin{cases} \rho^p &= \text{id}, \quad \text{pour } p \geq -n+1, \\ \rho^{-n} &= u'_0, \\ \rho^p &= 0, \quad \text{pour } p < -n, \end{cases}$$

$$\psi : Z''^\bullet \longrightarrow Z'^\bullet[n] \begin{cases} \psi^p &= 0, \quad \text{pour } p \geq -n+1, \\ \psi^p &= \text{id}, \quad \text{pour } p \leq -n. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement qu'on a les propriétés suivantes :

a) Le morphisme $\rho : Z''^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$ (3.2.5.3) est un quasi-isomorphisme.

b) Dans le diagramme ci-après :

$$(3.2.5.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & Z''^\bullet & & \\ u(S^{m+n}) & \swarrow & \rho & \searrow v(S^{m+n}) & \\ X & \xleftarrow{u(S^n)} & Z^\bullet & \xrightarrow{v(S^n)} & Z'^\bullet[n] \xrightarrow{v(S^m)[n]} X''[m+n] \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & & u(S^m)[n] & & \\ & & \searrow & & \\ & & X'[n] & & \end{array}$$

le carré central et les triangles latéraux sont commutatifs dans $\text{comp}(\mathcal{A})$.

En passant dans la catégorie $D(\mathcal{A})$, le diagramme (3.2.5.4) fournit l'égalité :

$$(\delta^m(S^m(X', X''))) [n] \delta^n(S^n(X, X')) = \delta^{m+n}(S^{m+n}(X, X'')) .$$

Il suffit alors d'utiliser (3.2.3.2) pourachever la démonstration.

3.2.6. Un cas d'application particulièrement important de la proposition (3.2.5) est le suivant. Soit :

$$S^n(X, Y) = 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \longrightarrow 0$$

un élément de $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$. Posons pour tout entier p , $1 \leq p \leq n$:

$$(3.2.6.1) \quad S_p^1 = 0 \longrightarrow \text{Ker}(u_{p-1}) \longrightarrow Z_{p-1} \longrightarrow \text{Im}(u_{p-1}) \longrightarrow 0 .$$

On a alors l'égalité :

(3.2.6.2)

$$\delta^n(S^n(X, Y)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \delta^1(S_n^1)[n-1] \delta^1(S_{n-1}^1)[n-2] \cdots \delta^1(S_1^1),$$

ainsi qu'on le démontre immédiatement en utilisant la proposition (3.2.5).

3.2.7. Buvons le calice jusqu'à la lie, et soient X et Y deux objets de \mathcal{A} et par conséquent de \mathcal{A}° : la catégorie opposée à \mathcal{A} . Les ensembles $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ et $E_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X)$ sont égaux et on a deux applications :

$$(3.2.7.1) \quad \begin{array}{ccc} E_{\mathcal{A}}^n(X, Y) & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{A}}^n} & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \\ \parallel & & \\ E_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X) & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{A}^\circ}^n} & \text{Ext}_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X) . \end{array}$$

Par ailleurs, on a identifié en (1.2.8) la catégorie $D(\mathcal{A})^\circ$ à la catégorie $D(\mathcal{A}^\circ)$, ce qui permet d'identifier les ensembles $\text{Ext}_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X)$ et $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ (chap. I, 1.3.9). Modulo ces identifications, on a donc deux applications ayant même source et même but :

$$(3.2.7.2) \quad \begin{array}{ccc} E_{\mathcal{A}}^n(X, Y) & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{A}}^n} & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \\ \parallel & & \parallel \\ E_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X) & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{A}^\circ}^n} & \text{Ext}_{\mathcal{A}^\circ}^n(Y, X) \end{array}$$

et on a la relation :

$$(3.2.7.3) \quad \delta_{\mathcal{A}}^n = \delta_{\mathcal{A}^\circ}^n .$$

Cette relation est vraie pour $n = 1$ (1.3.4). Elle se démontre alors par récurrence sur n en utilisant (3.2.5).

3.2.8. Soient :

$$S^n(X, Y) = 0 \longrightarrow Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_2} Z_1 \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \longrightarrow 0$$

un élément de $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$, $f : X' \longrightarrow X$ et $g : Y \longrightarrow Y''$ deux morphismes de \mathcal{A} . Posons :

(3.2.8.1)

$$S^n(X, Y) * f = 0 \rightarrow Y \xrightarrow{u_n} Z_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} \cdots \xrightarrow{u_2} Z_1 \xrightarrow{u'_1} Z'_0 \xrightarrow{u'_0} X' \rightarrow 0 ,$$

où Z'_0 est le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} Z'_0 & \xrightarrow{u'_0} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Z_0 & \xrightarrow{u_0} & X \end{array}$$

et où u'_1 est l'unique morphisme défini par les égalités $f'u'_1 = u_1$ et $u'_0u'_1 = 0$. De même, posons :

(3.2.8.2)

$$g * S^n(X, Y) = 0 \rightarrow Y'' \xrightarrow{u''_n} Z''_{n-1} \xrightarrow{u''_{n-1}} Z_{n-2} \xrightarrow{u_{n-2}} \cdots \xrightarrow{u_1} Z_0 \xrightarrow{u_0} X \rightarrow 0 ,$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

où Z''_{n-1} est la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{u_n} & Z_{n-1} \\ g \downarrow & & \downarrow g'' \\ Y'' & \xrightarrow{u''_n} & Z''_{n-1} \end{array}$$

et où u''_{n-1} est l'unique morphisme défini par les égalités $u''_{n-1} \circ g'' = u_{n-1}$ et $u''_{n-1} \circ u''_n = 0$.

Proposition 3.2.9. a) *On a les égalités :*

$$\delta^n(S^n(X, Y) * f) = \delta^n(S^n(X, Y))f$$

$$\delta^n(g * S^n(X, Y)) = g[n] \delta^n(S^n(X, Y)) .$$

b) *Tout diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S^n(X, Y) = 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & g \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & f \downarrow & & \\ S'^n(X', Y') = 0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Z'_1 & \longrightarrow & Z'_0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

fournit l'égalité :

$$(3.2.9.1) \quad \delta^n(g * S^n(X, Y)) = \delta^n(S'^n(X', Y') * f) .$$

Lorsque $n = 1$, ces propriétés résultent des propriétés du δ -foncteur canonique $\mathbf{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ (1.3). Le cas général s'obtient par récurrence sur n , en utilisant (3.2.5).

3.2.10. Soient $S^n(X, Y)$ et $S^n(X', Y')$ deux éléments appartenant respectivement aux ensembles $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ et $E_{\mathcal{A}}^n(X', Y')$ et considérons le morphisme :

$$\delta^n(S^n(X, Y) \oplus S^n(X', Y')) : X \oplus X' \longrightarrow (Y \oplus Y')[n] .$$

On a l'égalité :

(3.2.10.1)

$$\delta^n(S^n(X, Y) \oplus S^n(X', Y')) = \begin{pmatrix} \delta^n(S^n(X, Y)) & 0 \\ 0 & \delta^n(S^n(X', Y')) \end{pmatrix} ,$$

ainsi qu'il résulte immédiatement de la définition des applications δ_n .

3.2.11. Soient $f = \delta^n(S^n(X, Y))$ et $g = \delta^{n'}(S'^{n'}(X, Y))$ deux éléments de $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$. Le morphisme $f + g \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ est, par définition, le morphisme composé :

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{id} \\ \text{id} \end{pmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} Y[n] \oplus Y[n] \xrightarrow{(\text{id}, \text{id})} Y[n] .$$

Les alinéas (3.2.9) et (3.2.10) permettent alors, à partir des éléments $S^n(X, Y)$ et $S'^{n'}(X, Y)$, de construire un élément $S''^{n''}(X, Y) \in E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ tel que $\delta^n(S''^{n''}(X, Y)) = f + g$. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter cette construction.

3.2.12. Nous avons donc montré au cours de ce numéro que les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ (X et Y objets de \mathcal{A}) peuvent s'interpréter comme des quotients des ensembles $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ par la relation d'équivalence décrite en (3.2.2). De plus, la composition des extensions et la somme peuvent se décrire à l'aide d'opérations simples sur les éléments des $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$. On retrouve ainsi une description due à Yoneda [3].

3.3. La catégorie \mathcal{A}^{Ext} .

Lemme 3.3.1. a) Soient X et Y deux objets de \mathcal{A} et $\xi \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X[p], Y[q]) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{q-p}(X, Y)$, $q > p$. Il existe $q - p$ suites exactes de longueur 1, S_i^1 , $1 \leq i \leq q - p$, telles que la suite exacte de longueur $n : S_{q-p}^1 * S_{q-p-1}^1 * \dots * S_1^1$ soit définie (3.2.4) et telles que :

$$(3.3.1.1) \quad \delta^{q-p} (S_{q-p}^1 * S_{q-p-1}^1 * \dots * S_1^1) [p] = \xi .$$

b) Soient S^n et $S'^{n'}$ deux éléments de $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ qu'on peut écrire en utilisant les notations de (3.2.6) :

$$S^n = S_n^1 * S_{n-1}^1 * \dots * S_1^1 ,$$

$$S'^{n'} = S'^1_n * S'^1_{n-1} * \dots * S'^1_1 ,$$

où les S_i^1 et les S'_i , $1 \leq i \leq n$, sont des suites exactes de longueur 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\delta^n(S^n) = \delta^{n'}(S'^{n'})$.

ii) Il existe n suites exactes de longueur 1 : S''_i^1 , $1 \leq i \leq n$, et $2n - 2$ morphismes de \mathcal{A} : f_i , $1 \leq i \leq n - 1$, et g_i , $1 \leq i \leq n - 1$, tels que les suites

CATÉGORIES DÉRIVÉES

exactes $S_i^1 * f_{i-1}$, $1 < i \leq n$, $f_i * S''_i^1$, $1 \leq i < n$, $S'_i^1 * g_{i-1}$, $1 < i \leq n$, $g_i * S''_i^1$, $1 \leq i < n$, soient définies ((3.2.8.1) et (3.2.8.2)) et tels que :

$$(3.3.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \delta^1(S''_n^1) & = & \delta^1(S_n^1 * f_{n-1}) , \\ \delta^1(S''_n^1) & = & \delta^1(S'_n^1 * g_{n-1}) , \\ \delta^1(f_i * S''_i^1) & = & \delta^1(S_i^1 * f_{i-1}) , \quad 1 < i \leq n-1 , \\ \delta^1(g_i * S''_i^1) & = & \delta^1(S'_i^1 * g_{i-1}) , \quad 1 < i \leq n-1 , \\ \delta^1(f_1 * S''_1^1) & = & \delta^1(S_1^1) , \\ \delta^1(g_1 * S''_1^1) & = & \delta^1(S'_1^1) . \end{array} \right.$$

En effet, l'assertion *a*) résulte immédiatement de (3.2.2) et (3.2.5) et l'assertion *b*) résulte de la description de la relation d'équivalence induite par l'application $E_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$ ((3.2.2) et (3.2.9)).

3.3.2. Rappelons (1.2.11) que la catégorie \mathcal{A}^{Ext} est la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ définie par les translatés des objets de \mathcal{A} . Soit $F : \mathcal{A}^{\text{Ext}} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur (à valeurs dans une catégorie non nécessairement additive). Désignons, pour tout entier n , par $F^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur $X \mapsto F(X[n])$. De même, pour toute suite exacte de \mathcal{A} , $S^1 = 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, désignons par $\delta_F^n(S^1) : F^n(Z) \rightarrow F^{n+1}(X)$ le morphisme

$$F(\delta^1(S^1)[n]) : F(Z[n]) \rightarrow F(X[n+1]) .$$

La suite des foncteurs F^n , $n \in \mathbb{Z}$, munie des morphismes δ_F^* possède les propriétés suivantes (3.2.9) :

SFL I) Tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} S = 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow g \\ S' = 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' \longrightarrow 0 \end{array} ,$$

où les lignes sont exactes fournit, pour tout entier n , un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F^n(Z) & \xrightarrow{\delta_F^n(S)} & F^{n+1}(X) \\ F^n(g) \downarrow & & \downarrow F^{n+1}(f) \\ F^n(Z') & \xrightarrow{\delta_F^n(S')} & F^{n+1}(X') \end{array} .$$

SFL II) Lorsque $S = 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$, le morphisme $\delta_F^n(S)$ est, pour tout entier n , un isomorphisme.

Soit maintenant $m : F \rightarrow F'$ un morphisme de foncteurs $F, F' : \mathcal{A}^{\text{Ext}} \rightarrow \mathcal{C}$. On en déduit de façon évidente une suite de morphismes de foncteurs $m^n : F^n \rightarrow F'^n$. Cette suite de morphismes possède la propriété :

MSFL) Pour toute suite exacte $S = 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, et pour tout entier n , le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F^n(Z) & \xrightarrow{\delta_F^n(S)} & F^{n+1}(X) \\ m^n(Z) \downarrow & & \downarrow m^{n+1}(X) \\ F'^n(Z) & \xrightarrow{\delta_{F'}^n(S)} & F'^{n+1}(X) \end{array} .$$

Définition 3.3.3. Une suite de foncteurs $F^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ munie de la donnée, pour toute suite exacte $S = 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, d'un morphisme $\delta_F^n(S) : F^n(Z) \rightarrow F^{n+1}(X)$ possédant les propriétés SFL I) et SFL II) est appelée une *suite de foncteurs liés*. Soient (F^n, δ_F^n) et $(F'^n, \delta_{F'}^n)$ deux suites de foncteurs liés. Une suite de morphismes de foncteurs $m^n : F^n \rightarrow F'^n$ est appelée un *morphisme de suites de foncteurs liés* si elle possède la propriété MSFL).

Proposition 3.3.4. Soient $\mathcal{H}\text{om}(\mathcal{A}^{\text{Ext}}, \mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs de \mathcal{A}^{Ext} dans \mathcal{C} et $\mathcal{SFL}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ la catégorie dont les objets sont les suites de foncteurs liés et les morphismes, les morphismes de suites de foncteurs liés. Ce qui précède définit un foncteur :

$$\Phi : \mathcal{H}\text{om}(\mathcal{A}^{\text{Ext}}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{SFL}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \quad .$$

a) Ce foncteur est une équivalence de catégories.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

b) *Lorsque la catégorie \mathcal{C} est additive, un foncteur de \mathcal{A}^{Ext} dans \mathcal{C} est pré-additif si et seulement si chacun des foncteurs de la suite de foncteurs liés associée est additif.*

Nous nous bornerons à montrer que Φ est essentiellement surjectif. Tout d'abord, quitte à modifier les catégories en présence par une équivalence, on peut supposer que la catégorie \mathcal{A} possède un seul objet nul. On vérifie aussitôt qu'alors la catégorie \mathcal{A}^{Ext} ne possède qu'un seul objet nul. Soit alors (F^n, δ_F^n) une suite de foncteurs liés. Remarquons que, pour tout entier n , la propriété SFL II) définit un isomorphisme $F^n(0) \longrightarrow F^{n+1}(0)$. On peut alors, en remplaçant au besoin la suite (F^n, δ_F^n) par une suite isomorphe, supposer que, pour tout n , $F^n(0) = F^{n+1}(0)$ et que $\delta_F^n(0) = \text{identité}$. Tout objet non nul W de la catégorie \mathcal{A}^{Ext} s'écrit d'une manière unique sous la forme $X[n]$, où X est un objet de \mathcal{A} . Posons alors pour tout objet non nul W de \mathcal{A}^{Ext} , $F(W) = F^n(X)$ et posons de plus $F(0) = F^0(0)$. Nous avons ainsi défini une application de $\text{Ob}(\mathcal{A}^{\text{Ext}})$ dans $\text{Ob}(\mathcal{C})$ que nous allons maintenant prolonger en un foncteur $F : \mathcal{A}^{\text{Ext}} \longrightarrow \mathcal{C}$, qui induise la suite de foncteurs liés (F^n, δ_F^n) . Soit donc $m : W \longrightarrow W'$ un morphisme de \mathcal{A}^{Ext} . Examinons d'abord différents cas :

- 1) $W = W' = 0$. On pose alors $F(m) = \text{id}_{F^0(0)}$.
- 2) $W = 0$ et $W' = X[p]$, $X \neq 0$. On pose alors $F(m) = F^p(0 \longrightarrow X)$.
- 3) $W = Y[p]$, $Y \neq 0$, et $W' = 0$. On pose alors $F(m) = F^p(Y \longrightarrow 0)$.

Supposons maintenant que W et W' soient différents de l'objet nul. Ils s'écrivent alors de manière unique sous la forme $W = X[p]$, $W' = Y[q]$, où X et Y sont des objets de \mathcal{A} . L'entier $q - p$ est appelé alors le *degré* de m .

- 4) Degré de $m < 0$. On pose alors $F(m) = F^q(0 \longrightarrow Y) F^p(X \longrightarrow 0)$.
- 5) Degré de $m = 0$. Le morphisme m s'écrit alors de manière unique sous la forme $f[p]$, où f est un morphisme de \mathcal{A} . On pose alors $F(m) = F^p(f)$.
- 6) Degré de $m = 1$. Il existe une suite exacte de \mathcal{A} :

$$S = 0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

telle que $m = \delta^1(S)[p]$ (3.3.1). On pose alors $F(m) = \delta_F^p(S)$. Le fait que le morphisme $F(m)$ ainsi défini ne dépende pas de la suite exacte choisie résulte de (3.2.2) et de la propriété SFL I).

Désignons alors par $\text{Fl}_{\leq n}(\mathcal{A}^{\text{Ext}})$ l'ensemble des morphismes $m : W \rightarrow W'$ tels que W ou W' soit l'objet nul ou tels que le degré de m soit inférieur ou égal à n . L'existence du foncteur $F : \mathcal{A}^{\text{Ext}} \longrightarrow \mathcal{C}$ induisant la suite de foncteurs liés (F^n, δ_F^n) résulte alors du lemme et de la proposition suivants :

Lemme 3.3.5. Soient $m : W \rightarrow W'$, $m' : W' \rightarrow W''$, $m'' = m'm$ trois morphismes de \mathcal{A}^{Ext} appartenant à $\text{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\text{Ext}})$. Les morphismes $F(m)$, $F(m')$ et $F(m'')$ ont été définis ci-dessus dans les cas 1), 2), 3), 4), 5), 6) et on a :

$$(3.3.5.1) \quad F(m'') = F(m')F(m) \quad .$$

Proposition 3.3.6. (Définition de la catégorie \mathcal{A}^{Ext} par générateurs et relations). Soient \mathcal{C} une catégorie et :

$$\text{Ob}(F) : \text{Ob}(\mathcal{A}^{\text{Ext}}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad ,$$

$$\text{Fl}_{\leq 1}(F) : \text{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\text{Ext}}) \longrightarrow \text{Fl}(\mathcal{C})$$

deux applications compatibles avec les applications source et but des catégories \mathcal{A}^{Ext} et \mathcal{C} telles que pour tout triplet de morphismes $m : W \rightarrow W'$, $m' : W' \rightarrow W''$, $m'' = m'm$, $m, m', m'' \in \text{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\text{Ext}})$ on ait :

$$\text{Fl}_{\leq 1}(F)(m') \text{Fl}_{\leq 1}(F)(m) = \text{Fl}_{\leq 1}(F)(m'') \quad .$$

Il existe alors un foncteur $F : \mathcal{A}^{\text{Ext}} \rightarrow \mathcal{C}$ et un seul tel que F induise l'application $\text{Ob}(F)$ sur les ensembles d'objets et tel que pour tout $m \in \text{Fl}_{\leq 1}(\mathcal{A}^{\text{Ext}})$ on ait :

$$F(m) = \text{Fl}_{\leq 1}(F)(m) \quad .$$

En effet, on vérifie facilement que la suite de foncteurs liés associée au foncteur fourni par (3.3.5) et (3.3.6) est bien la suite (F^n, δ_F^n) qu'on avait au départ.

3.3.7. Démonstration du lemme 3.3.5. La démonstration se fait en examinant les différents cas possibles. Il y a, d'abord, quatre cas à examiner lorsqu'au moins deux des objets W , W' , W'' sont nuls. Les morphismes $F(m)$, $F(m')$ et $F(m'')$ sont alors définis dans l'un des cas 1), 2) ou 3). La vérification de (3.3.5.1) est immédiate et laissée au lecteur. Il y a, ensuite, neuf cas à examiner dans lesquels un des objets W , W' , W'' est nul. Deux des morphismes m , m' , m'' sont alors définis par 1), 2), 3), le troisième étant défini par 4), 5), 6). Là encore la vérification est immédiate et laissée au lecteur. Il reste à examiner les cas où W , W' , W'' sont non nuls. Ces cas sont au nombre de huit :

c_1) degré de m et $m' < 0$;

c_2) degré de $m < 0$, degré de $m' = 0$;

CATÉGORIES DÉRIVÉES

c_3) degré de $m = 0$, degré de $m' < 0$;

c_4) degré de m et $m' = 0$;

c_5) degré de $m = 1$, degré de $m' < 0$;

c_6) degré de $m < 0$, degré de $m' = 1$;

c_7) degré de $m = 1$, degré de $m' = 0$;

c_8) degré de $m = 0$, degré de $m' = 1$;

Nous nous bornerons à envisager le cas c_8); le cas c_7) se traite de la même manière et les cas c_i , $1 \leq i \leq 6$, sont triviaux. Soit :

$$S = 0 \longrightarrow X'' \longrightarrow Y \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

une suite exacte telle que $\delta^1(S)[p] = m'$, et $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme de \mathcal{A} tel que $f[p] = m$. On a alors $F(m) = F^p(f)$, $F(m') = \delta_F^p(S)$ et $F(m'') = \delta_F^p(S * f)$ (3.2.9). Or on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} S * f = 0 & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X & \longrightarrow 0 \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow f & & \\ S = 0 & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X' & \longrightarrow 0 \end{array} .$$

D'où un diagramme commutatif (SFL I) :

$$\begin{array}{ccc} F^p(X) & \xrightarrow{\delta_F^p(S * f)} & F^{p+1}(X'') \\ F^p(f) \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ F^p(X') & \xrightarrow{\delta_F^p(S)} & F^{p+1}(X'') \end{array} ,$$

i.e.

$$F(m'') = F(m')F(m) .$$

3.3.8. Démonstration de la proposition 3.3.6. Soit $m : X[p] \rightarrow Y[p+n]$, X et Y objets de \mathcal{A} , $n > 0$, un morphisme de \mathcal{A}^{Ext} . D'après le lemme (3.3.1), il existe $n+1$ objets $X_i[p+i]$, $0 \leq i \leq n$, $X_0[p] = X[p]$, $X_n[p+n] = Y[p+n]$ et n morphismes :

$$X[p] \xrightarrow{m_1} X_1[p+1] \xrightarrow{m_2} X_2[p+2] \xrightarrow{m_3} \cdots \xrightarrow{m_n} Y[p+n]$$

tel que $m = m_n m_{n-1} \cdots m_2 m_1$. Ceci entraîne aussitôt l'unicité de F . Pour démontrer l'existence, il suffit de remarquer que d'après le lemme (3.3.1), lorsqu'on a une deuxième décomposition de m : $m = m'_n m'_{n-1} \cdots m'_1$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & X_1[p+1] & \xrightarrow{m_2} & X_2[p+2] & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X_{n-1}[p+n-1] & \\
 m_1 \nearrow & \uparrow f_1[p+1] & & \uparrow f_2[p+2] & & \uparrow f_{n-1}[p+n-1] & \searrow m_n \\
 X[p] & \xrightarrow{m''_1} & X''_1[p+1] & \xrightarrow{m''_2} & X''_2[p+2] & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X''_{n-1}[p+n-1] \xrightarrow{m''_n} Y[p+n] \\
 m'_1 \searrow & \downarrow g_1[p+1] & & \downarrow g_2[p+2] & & \downarrow g_{n-1}[p+n-1] & \nearrow m'_n \\
 & X'_1[p+1] & \xrightarrow{m'_2} & X'_2[p+2] & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & X'_{n-1}[p+n-1] &
 \end{array},$$

où les f_i et les g_i , $1 \leq i \leq n-1$, sont des morphismes de \mathcal{A} .

4. Objets spectraux usuels.

4.1. Premier objet spectral canonique.

4.1.1. Rappelons que $\tilde{\mathbb{Z}}$ désigne l'ensemble ordonné $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ou encore la catégorie associée à cet ensemble ordonné (chap. II, 4.3.1). Soient \mathcal{A} une catégorie additive et $Y : \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbf{comp}(\mathcal{A})$ un foncteur :

$$(4.1.1.1) \quad \begin{aligned} q \in \tilde{\mathbb{Z}} \quad , \quad & q \longmapsto Y(q) \quad , \\ (p, q) \in \mathbf{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}}) \quad , \quad & u(p, q) : Y(p) \rightarrow Y(q) \quad . \end{aligned}$$

On a alors associé, au chapitre I, (3.3.6), au foncteur Y un objet spectral (de type $\tilde{\mathbb{Z}}$) à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ (chap. II, 4.1.2 et 4.1.3) dont nous allons rappeler la construction.

Soit, tout d'abord, pour tout élément (p, q) de $\mathbf{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ (*i.e.* pour tout couple $p, q \in \tilde{\mathbb{Z}}$ tel que $p \leq q$), $\mathcal{Y}(p, q)$ le cône du morphisme $u(p, q)$ (chap. I, 3.1.2) :

$$(4.1.1.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{Y}(p, q)^i = Y(q)^i \oplus Y(p)^{i+1} \quad , \\ d_{\mathcal{Y}(p, q)}^i = \begin{pmatrix} d_{Y(q)}^i & u(p, q)^{i+1} \\ 0 & -d_{Y(p)}^{i+1} \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Définissons alors, pour tout couple (p, q) et (p', q') d'éléments de $\mathbf{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ tels que $p \leq p'$ et $q \leq q'$:

$$(4.1.1.3) \quad \Phi((p, q), (p', q')) : \mathcal{Y}(p, q) \rightarrow \mathcal{Y}(p', q') \quad ,$$

comme étant la classe à homotopie près du morphisme de complexes :

$$(4.1.1.4) \quad \Psi((p, q), (p', q')) : \mathcal{Y}(p, q) \rightarrow \mathcal{Y}(p', q') \quad ,$$

défini par les formules :

$$(4.1.1.5) \quad \Psi((p, q), (p', q'))^i = \begin{pmatrix} u(q, q')^i & 0 \\ 0 & u(p, p')^{i+1} \end{pmatrix} \quad .$$

On a ainsi défini un foncteur $\mathcal{F}\ell_1(\widetilde{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Soit (p, q, r) un élément de $\mathsf{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$. Définissons alors :

$$(4.1.1.6) \quad \delta(p, q, r) : \mathcal{Y}(q, r) \rightarrow \mathcal{Y}(p, q)[1] \quad ,$$

comme étant la classe d'homotopie du morphisme de complexes :

$$(4.1.1.7) \quad d(p, q, r) : \mathcal{Y}(q, r) \rightarrow \mathcal{Y}(p, q)[1] \quad ,$$

défini par les formules :

$$(4.1.1.8) \quad d(p, q, r)^i = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id}_{\mathcal{Y}(q)^{i+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On sait (chap. I, 3.3.6) que le triangle de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$\left(\mathcal{Y}(p, q), \mathcal{Y}(p, r), \mathcal{Y}(q, r), \Phi((p, q), (p, r)), \Phi((p, r), (q, r)), \delta(p, q, r) \right)$$

est distingué et dépend fonctoriellement de (p, q, r) . On a donc construit un objet spectral $(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r))$, à valeurs dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$.

Soient $Y : \widetilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbf{comp}(\mathcal{A})$ et $Y' : \widetilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbf{comp}(\mathcal{A})$ deux foncteurs et $m : Y \rightarrow Y'$ un morphisme de foncteurs. Le morphisme m induit un morphisme des objets spectraux associés :

$$(4.1.1.9) \quad \mathcal{M}(p, q) : \mathcal{Y}(p, q) \rightarrow \mathcal{Y}'(p, q) \quad .$$

4.1.2. Soit Y un objet de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$. Posons :

$$(4.1.2.1) \quad q \in \mathbb{Z}, \quad Y(q) = 0 \rightarrow 0 \rightarrow Y^{-q} \rightarrow Y^{-q+1} \rightarrow Y^{-q+2} \rightarrow \cdots \quad ,$$

les différentielles de ce complexe étant induites par les différentielles de Y . Posons de même :

$$(4.1.2.2) \quad Y(-\infty) = 0 \quad , \quad Y(+\infty) = Y \quad .$$

On a des monomorphismes :

$$0 = Y(-\infty) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow Y(q) \hookrightarrow Y(q+1) \hookrightarrow Y(q+2) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow Y(+\infty) = Y \quad ,$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

qui définissent une filtration du type $\tilde{\mathbb{Z}}$ de Y qu'on appelle *première filtration canonique de Y* , et par suite un foncteur, que nous notons Y , de $\tilde{\mathbb{Z}}$ dans $\text{comp}(\mathcal{A})$. On en déduit par la construction rappelée en (4.1.1) un objet spectral à valeurs dans $K(\mathcal{A})$: $(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r))$. On se propose de décrire un objet spectral isomorphe à $(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r))$. Posons tout d'abord :

(4.1.2.3)

a) pour $-\infty < p < q < +\infty$:

$$Y(p, q) = \cdots 0 \rightarrow 0 \rightarrow Y^{-q} \rightarrow Y^{-q+1} \rightarrow \cdots \rightarrow Y^{-p-2} \rightarrow Y^{-p-1} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots,$$

b) pour $-\infty < p < +\infty$:

$$Y(p, +\infty) = \cdots \rightarrow Y^i \rightarrow Y^{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow Y^{-p-2} \rightarrow Y^{-p-1} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots,$$

c) $Y(-\infty, q) = Y(q)$, pour tout $q \in \tilde{\mathbb{Z}}$, $Y(p, p) = 0$, pour tout $p \in \tilde{\mathbb{Z}}$, les différentielles de ces complexes étant induites par les différentielles du complexe Y .

Désignons par :

$$(4.1.2.4) \quad \varphi((p, q), (p', q')) : Y(p, q) \rightarrow Y(p', q') , \quad p \leq p' \quad \text{et} \quad q \leq q' ,$$

la classe d'homotopie du morphisme de complexes :

$$(4.1.2.5) \quad \psi((p, q), (p', q')) : Y(p, q) \rightarrow Y(p', q') ,$$

dont les composants sont des morphismes identiques quand la source et le but sont des objets non nuls. On vérifie immédiatement qu'on a ainsi défini un foncteur de $\mathcal{F}\ell_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ dans $K(\mathcal{A})$.

Soit (p, q, r) un élément de $\mathcal{F}\ell_2(\tilde{\mathbb{Z}})$. Désignons par :

$$(4.1.2.6) \quad \delta(p, q, r) : Y(q, r) \rightarrow Y(p, q)[1]$$

la classe d'homotopie du morphisme de complexes :

$$(4.1.2.7) \quad d(p, q, r) : Y(q, r) \rightarrow Y(p, q)[1] ,$$

dont les composants sont :

$$(4.1.2.8) \quad \begin{aligned} d(p, q, r)^i &= 0 , \quad \text{pour } i \neq -q-1 , \\ d(p, q, r)^{-q-1} &= -d_Y^{-q-1} . \end{aligned}$$

Enfin, pour tout élément (p, q) de $\text{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$, désignons par :

$$(4.1.2.9) \quad J(p, q) : \mathcal{Y}(p, q) \rightarrow Y(p, q)$$

la classe d'homotopie du morphisme de complexes :

$$(4.1.2.10) \quad j(p, q) : \mathcal{Y}(p, q) \rightarrow Y(p, q) \quad ,$$

défini par les formules :

$$(4.1.2.11) \quad \begin{aligned} j(p, q)^i &= 0 \text{ , pour } i < -q \text{ ou } i > -p - 1 \text{ ,} \\ j(p, q)^i &= \text{identité , pour } -q \leq i \leq -p - 2 \text{ ,} \\ j(p, q)^{-p-1} &: Y^{-p-1} \oplus Y^{-p} \rightarrow Y^{-p-1} \text{ ,} \\ j(p, q)^{-p-1} &= (\text{id}, 0) \quad . \end{aligned}$$

Proposition 4.1.3. a) Pour tout élément (p, q) de $\text{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$, le morphisme $J(p, q) : \mathcal{Y}(p, q) \rightarrow Y(p, q)$ de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ est un isomorphisme.

b) Pour tout couple $(p, q), (p', q')$ de $\text{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ tel que $p \leq p'$ et $q \leq q'$, le diagramme de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(p, q) & \xrightarrow{\Phi((p, q), (p', q'))} & \mathcal{Y}(p', q') \\ J(p, q) \downarrow & & \downarrow J(p', q') \\ Y(p, q) & \xrightarrow{\varphi((p, q), (p', q'))} & Y(p', q') \end{array}$$

est commutatif.

c) Pour tout élément (p, q, r) de $\text{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$, le diagramme de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(q, r) & \xrightarrow{\delta(p, q, r)} & \mathcal{Y}(p, q)[1] \\ J(q, r) \downarrow & & \downarrow J(p, q)[1] \\ Y(q, r) & \xrightarrow{\delta(p, q, r)} & Y(p, q)[1] \end{array}$$

est commutatif.

La vérification est laissée au lecteur.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

4.1.4. Il résulte de (4.1.3) que pour tout objet Y de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$,

$$\mathbf{Spec}_1(Y) = (Y(p, q), \delta(p, q, r)) ,$$

défini par (4.1.2.3), (4.1.2.4) et (4.1.2.6), est un objet spectral à valeurs dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. L'objet spectral $\mathbf{Spec}_1(Y)$ dépend fonctoriellement de l'objet Y de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$. On a donc déterminé un foncteur :

$$Y \longmapsto \mathbf{Spec}_1(Y)$$

de la catégorie des complexes de \mathcal{A} dans la catégorie des objets spectraux à valeurs dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. Ce foncteur est appelé le foncteur *premier objet spectral canonique à valeurs dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$* . Pour tout objet Y de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$, l'objet spectral $\mathbf{Spec}_1(Y)$ est appelé le *premier objet spectral à valeurs dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ associé au complexe Y* . Il convient de noter que lorsque Y est un objet de $\mathbf{comp}^*(\mathcal{A})$ ($* = +, -, b$, “vide”), le premier objet spectral à valeurs dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ associé au complexe Y est, en fait, à valeurs dans $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$.

4.1.5. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et Y un complexe de \mathcal{A} . L'image par le foncteur canonique $\mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ du premier objet spectral associé au complexe Y est un objet spectral à valeurs dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ qui est appelé le *premier objet spectral à valeurs dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ associé au complexe Y* . Le plus souvent, nous dirons simplement *premier objet spectral associé au complexe Y* et noterons (abusivement) :

$$\mathbf{Spec}_1(Y) = (Y(p, q), \delta(p, q, r))$$

le premier objet spectral à valeurs dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ associé au complexe Y . Le foncteur premier objet spectral canonique composé avec le foncteur canonique $\mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ (étendu aux objets spectraux) est appelé le foncteur *premier objet spectral canonique à valeurs dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$* . Soulignons qu'il s'agit d'un foncteur de la catégorie des complexes de \mathcal{A} dans la catégorie des objets spectraux de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ et que *ce foncteur ne se factorise pas, en général, par la catégorie des complexes à homotopie près*.

4.1.6. Les complexes n -uples d'objets de \mathcal{A} permettent de construire des complexes simples munis de filtrations et par suite des objets spectraux à valeurs dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. Soient X un complexe n -uple (chap. I, 2.1.2) et m un entier, $1 \leq m \leq n$. Pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}[n]$ (notation de (chap. I, 2.1.1)), désignons par σ_m sa m -ième coordonnée.

Nous allons, tout d'abord, définir une famille de complexes et de morphismes de complexes. Soit, pour tout couple $(p, q) \in \mathbf{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$, ${}^mX(p, q)$ le

complexe n -uple défini par :

$$(4.1.6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left({}^m X(p, q) \right)^\sigma = \begin{cases} X^\sigma & \text{si } -q \leq \sigma_m < -p \\ 0 & \text{si } \sigma_m < -q \text{ ou } -p \leq \sigma_m \end{cases}, \\ \text{les différentielles de } {}^m X(p, q) \text{ sont les différentielles} \\ \text{de } X \text{ sauf peut-être si la source ou le but de la dif-} \\ \text{férentielle considérée sont des objets nuls.} \end{array} \right.$$

Pour tout couple (p, q) et (p', q') d'éléments de $\text{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$, tels que $p \leq p'$ et $q \leq q'$, désignons par :

$$(4.1.6.2) \quad f((p, q), (p', q')) : {}^m X(p, q) \longrightarrow {}^m X(p', q')$$

le morphisme de complexes n -uples dont les composants sont des morphismes identiques sauf peut-être si la source ou le but sont des objets nuls. Enfin, pour tout élément (p, q, r) de $\text{Fl}_2(\tilde{\mathbb{Z}})$, désignons par :

$$(4.1.6.3) \quad g(p, q, r) : {}^m X(q, r) \longrightarrow T_m({}^m X(p, q))$$

(T_m désigne le foncteur de translation dans la direction m (chap. I, 2.3.1) le morphisme dont les composants sont :

$$(4.1.6.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(p, q, r)^\sigma = 0 \quad \text{si } \sigma_m \neq -q - 1, \\ g(p, q, r)^\sigma = -d_X^{\sigma, m} \quad \text{si } \sigma_m = -q - 1. \end{array} \right.$$

Introduisons alors de nouvelles notations. Tout d'abord, désignons, par abus de notation, par $\int_n : \text{comp}^n(\mathcal{A}) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{A})$ la Π -extension ou la Σ -extension du foncteur complexe simple associé (sous réserve d'existence de produits ou sommes dénombrables dans \mathcal{A} (chap. I, 2.2.3). Posons alors :

$$(4.1.6.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_n {}^m X(p, q) = {}^m Y(p, q) \quad , \\ \int_n {}^m X(-\infty, q) = {}^m Y(-\infty, q) = {}^m Y(q) \quad , \\ \int_n {}^m X(-\infty, +\infty) = \int_n X = {}^m Y(-\infty, +\infty) = {}^m Y(+\infty) = Y; \end{array} \right.$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

puis :

$$(4.1.6.6) \quad \int_n f((p, q), (p', q')) = h((p, q), (p', q')) \quad .$$

Soit de plus :

$$(4.1.6.7) \quad {}^m d(p, q, r) : {}^m Y(q, r) \longrightarrow {}^m Y(p, q)[1]$$

le morphisme composé :

où le morphisme $(*)$ est l'isomorphisme de commutation aux translations du foncteur complexe simple associé (chap. I, 2.3.2.1).

On obtient ainsi une filtration du complexe simple $Y = \int_n X$:

$$(4.1.6.9) \quad 0 = {}^m Y(-\infty) \subset \cdots \subset {}^m Y(q) \subset \cdots \subset {}^m Y(+\infty) = Y$$

qu'on appelle *la filtration définie par le m-ième degré de X*.

On peut, par le procédé rappelé en (4.1.1), associer au complexe filtré (4.1.6.9) un objet spectral à valeurs dans $K(\mathcal{A})$ noté :

$$(4.1.6.10) \quad (\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r)) \quad .$$

Enfin, abusivement, nous désignerons dans la proposition ci-après par la même notation, un morphisme de $\text{comp}(\mathcal{A})$ et son image dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

Proposition 4.1.7. a) Les objets ${}^mY(p, q)$ (4.1.6.5), les morphismes $h((p, q), (p', q'))$ (4.1.6.6) et les morphismes ${}^m d(p, q, r)$ (4.1.6.7) définissent un objet spectral à valeurs dans $K(\mathcal{A})$ qui dépend fonctoriellement du complexe n -uple X .

Cet objet spectral est appelé *l'objet spectral à valeurs dans $K(A)$* défini par le complexe X filtré par son m -ième degré.

b) Il existe un isomorphisme canonique (i.e. fonctoriel par rapport à l'objet X de $\text{comp}^n(\mathcal{A})$) entre les objets spectraux $(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r))$ (4.1.6.10) et $({}^m Y(p, q), {}^m d(p, q, r))$.

Supposons, tout d'abord, la proposition démontrée lorsque X est un double complexe et lorsque l'entier $m = 1$, et montrons comment on peut se ramener à ce cas. Soit $\varphi : [n] \rightarrow [2]$ l'application :

$$(4.1.7.1) \quad \begin{cases} \varphi(m) = 1 & , \\ \varphi(i) = 2 & , \quad \text{pour tout } i \in [n], i \neq m \end{cases} .$$

Posons $\int_{\varphi} X = Z$ (chap. I, 2.2.2). On peut alors effectuer sur le double complexe Z les constructions décrites en (4.1.6.i), $1 \leq i \leq 4$. On obtient des doubles complexes :

$$(4.1.7.2) \quad {}^1Z(p, q) \quad , \quad (p, q) \in \mathbf{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}}) \quad ,$$

et des morphismes de doubles complexes :

$$(4.1.7.3) \quad \begin{aligned} f_Z((p, q), (p', q')) &: {}^1Z(p, q) \rightarrow {}^1Z(p', q') \quad , \\ g_Z(p, q, r) &: {}^1Z(q, r) \rightarrow T_1({}^1Z(p, q)) \quad . \end{aligned}$$

On constate alors que :

$$(4.1.7.4) \quad \begin{aligned} \int_{\varphi} {}^mX(p, q) &= {}^1Z(p, q) \quad , \quad (p, q) \in \mathbf{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}}) \quad , \\ \int_{\varphi} f((p, q), (p', q')) &= f_Z((p, q), (p', q')) \quad , \end{aligned}$$

(vérification immédiate) et que de plus le morphisme $g_Z(p, q, r)$ est le morphisme composé :

$$(4.1.7.5) \quad \int_{\varphi} {}^mX(q, r) \xrightarrow{\int_{\varphi} g(p, q, r)} \int_{\varphi} T_m({}^mX(p, q)) \xrightarrow{(**)} T_1 \left(\int_{\varphi} {}^mX(p, q) \right) ,$$

où $(**)$ est l'isomorphisme de commutation du foncteur \int_{φ} aux translations (chap. I, 2.3.2.1) (pour vérifier ceci, on utilise la définition explicite des différentielles de Z (chap. I, 2.2.2.5) et de l'isomorphisme de commutation (chap. I, 2.3.2.1)). Construisons alors l'objet spectral défini par Z filtré par son premier degré. Il résulte de l'égalité $\int_2 \int_{\varphi} = \int_n$, de (4.1.7.4), (4.1.7.5) et de (chap. I, 2.3.3) que $({}^mY(p, q), {}^m d(p, q, r))$ est égal à cet objet spectral.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Supposons donc que X soit un double complexe et que $m = 1$. Pour démontrer *a)*, il suffit de montrer que, pour tout $(p, q, r) \in \mathrm{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$, le diagramme de $\mathrm{comp}(\mathcal{A})$:

(4.1.7.6)

$$\int_2^1 X(p, q) \rightarrow \int_2^1 X(p, r) \rightarrow \int_2^1 X(q, r) \xrightarrow{1d(p, q, r)} \int_2 T_1(1X(p, q)) = \left(\int_2^1 X(p, q) \right)[1]$$

définit dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ un triangle distingué (remarquons que l'isomorphisme de commutation aux translations $\int_2 T_1(1X(p, q)) \xrightarrow{\sim} (\int_2 1X(p, q))[1]$ est dans ce cas l'identité). Les autres assertions contenues dans *a)* sont évidentes. Pour prouver que le diagramme (4.1.7.6) définit dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ un triangle distingué, il suffit, d'après la propriété (TRII) (chap. II, 1.1.1), de montrer que le diagramme :

(4.1.7.7)

$$\left(\int_2^1 X(q, r) \right)[-1] \xrightarrow{-1d(p, q, r)[-1]} \int_2^1 X(p, q) \longrightarrow \int_2^1 X(p, r) \longrightarrow \int_2^1 X(q, r)$$

définit dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ un triangle distingué. On constate alors immédiatement que le complexe simple $\int_2^1 X(p, r)$ est égal au cône du morphisme $-1d(p, q, r)[-1]$ (chap. I, 3.1.2) et que les morphismes $\int_2^1 X(p, q) \longrightarrow \int_2^1 X(p, r)$, $\int_2^1 X(p, r) \rightarrow \int_2^1 X(q, r)$, figurant dans (4.1.7.7), sont les morphismes introduits dans l'étude du foncteur cône (chap. I, 3.2.2.2 et 3.2.2.4). Par suite, le triangle de $\mathsf{K}(\mathcal{A})$ défini par le diagramme (4.1.7.7) est par définition (chap. I, 3.3.1) un triangle distingué. Démontrons maintenant *b)*. En utilisant les notations introduites en (4.1.6.5), on vient de montrer que dans le diagramme :

$$(4.1.7.8) \quad {}^1Y(q, r)[-1] \xrightarrow{-1d(-\infty, q, r)} {}^1Y(q) \longrightarrow {}^1Y(r) \longrightarrow {}^1Y(q, r),$$

le complexe ${}^1Y(r)$ apparaît comme le cône du morphisme $-1d(-\infty, q, r)$ (poser $p = -\infty$ dans le diagramme (4.1.7.7)). De plus (4.1.1), l'objet $\mathcal{Y}(q, r)$ a été défini comme étant le cône du morphisme :

$$(4.1.7.9) \quad {}^1Y(q) \longrightarrow {}^1Y(r)$$

On a alors défini, dans cette situation (chap. I, 3.2.5.2), un homotopisme (définissant donc un isomorphisme dans $\mathsf{K}(\mathcal{A})$) :

$$(4.1.7.10) \quad J(q, r) : \mathcal{Y}(q, r) \longrightarrow {}^1Y(q, r) .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que cet homotopisme est fonctoriel par rapport aux indices $(q, r) \in \mathrm{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ et par rapport au double complexe X et qu'il définit un isomorphisme canonique de l'objet spectral $(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r))$ sur l'objet spectral $({}^1Y(p, q), {}^1d(p, q, r))$.

4.1.8. Lorsque X est un complexe simple, l'objet spectral à valeurs dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ défini par le complexe X filtré par son premier degré (4.1.7) n'est autre que le premier objet spectral à valeurs dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ associé au complexe X . De même, soient X un complexe n -uple et m un entier, $1 \leq m \leq n$. Supposons que le composant X^σ de X soit nul lorsque :

$$\sigma - \sigma_m e_m \neq 0 \quad (\sigma_m \text{ } m\text{-ième coordonnée}).$$

On vérifie alors que l'objet spectral défini par le complexe X filtré par son m -ième degré est égal au premier objet spectral canonique du complexe simple $\int_m X$.

Enfin, lorsque la catégorie \mathcal{A} est abélienne, le foncteur canonique :

$$\mathbf{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$$

transforme l'objet spectral à valeurs dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ défini par un complexe n -uple X filtré par son m -ième degré en un objet spectral à valeurs dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$. L'objet spectral ainsi obtenu est appelé *l'objet spectral, à valeurs dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$, défini par X , filtré par son m -ième degré*. Lorsque aucune confusion n'en résulte, on supprime la mention “à valeurs dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ ”.

4.1.9. Soit $X^{\bullet\bullet}$ un complexe double de \mathcal{A} . Désignons, pour tout entier q , par $X^{q,\bullet}$ (resp. $X^{\bullet,q}$) le complexe simple :

$$X^{q,\bullet} = \dots \xrightarrow{d_2^{q,i-1}} X^{q,i} \xrightarrow{d_2^{q,i}} X^{q,i+1} \xrightarrow{d_2^{q,i+1}} \dots$$

$$(\text{ resp. } X^{\bullet,q} = \dots \rightarrow X^{i,q} \xrightarrow{(-1)^q d_1^{i,q}} X^{i+1,q} \xrightarrow{(-1)^q d_1^{i+1,q}} X^{i+2,q} \rightarrow \dots),$$

dont le composant de degré i est $X^{q,i}$ (resp. $X^{i,q}$).

La différentielle dans la première (resp. deuxième) direction de $X^{\bullet\bullet}$ induit des morphismes (dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$) :

$$d_1^{q,\bullet} : X^{q,\bullet} \longrightarrow X^{q+1,\bullet}$$

$$(\text{ resp. } d_2^{\bullet,q} : X^{\bullet,q} \longrightarrow X^{\bullet,q+1}),$$

dont les composants sont :

$$(d_1^{q,\bullet})^i = d_1^{q,i}$$

$$(\text{ resp. } (d_2^{\bullet,q})^i = (-1)^i d_2^{i,q}).$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Désignons par $({}^1Y(p, q), {}^1\delta(p, q, r))$ (resp. $({}^2Y(p, q), {}^2\delta(p, q, r))$) l' objet spectral, à valeurs dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, défini par le complexe X , filtré par son premier (resp. deuxième) degré (4.1.7). Il résulte immédiatement des définitions qu'on a les relations :

$$(4.1.9.1) \quad \begin{cases} {}^1Y(q-1, q) = X^{-q, \bullet}[q] & , \\ {}^2Y(q-1, q) = X^{\bullet, -q}[q] & , \\ {}^1\delta(q-1, q, q+1) = -(d_1^{-q-1, \bullet})[q+1] & , \\ {}^2\delta(q-1, q, q+1) = -(d_2^{\bullet, -q-1})[q+1] & . \end{cases}$$

Ces formules seront utilisées au numéro (4.6).

4.2. Objet spectral à valeurs dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ associé à un objet filtré de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$.

Dans ce numéro et les numéros suivants de ce paragraphe, \mathcal{A} désigne une catégorie abélienne.

4.2.1. Soient X un objet de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ et $X(q)$, $q \in \tilde{\mathbb{Z}}$, une filtration croissante de type $\tilde{\mathbb{Z}}$ du complexe X :

$$(4.2.1.1) \quad 0 = X(-\infty) \subset \cdots \subset X(q) \subset X(q+1) \subset \cdots \subset X(+\infty) = X \quad .$$

On en déduit, par la construction rappelée en (4.1.1), un objet spectral $(\mathcal{X}(p, q), \delta(p, q, r))$ à valeurs dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, d'où, en appliquant le foncteur canonique $\mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$, un objet spectral à valeurs dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ encore noté, abusivement, $(\mathcal{X}(p, q), \delta(p, q, r))$. On se propose de décrire un objet spectral à valeurs dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ isomorphe à ce dernier objet spectral.

4.2.2. Soit donc $0 = X(-\infty) \subset \cdots \subset X(q) \subset \cdots \subset X(+\infty) = X$, un objet filtré de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$. Posons :

$$(4.2.2.1) \quad X(p, q) = X(q)/X(p) \quad ,$$

pour tout élément (p, q) de $\mathrm{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$. (Le quotient est pris évidemment ici au sens de la catégorie abélienne $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$). Désignons par :

$$(4.2.2.2) \quad \varphi((p, q), (p', q')) : X(p, q) \longrightarrow X(p', q') \quad ,$$

où (p, q) et (p', q') sont des éléments de $\text{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ tels que $p \leq p'$ et $q \leq q'$, l'image dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ du morphisme canonique de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$:

$$(4.2.2.3) \quad \psi((p, q), (p', q')) : X(p, q) \longrightarrow X(p', q') .$$

On a ainsi déterminé un foncteur de $\mathcal{F}\ell_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$ dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$. Soit, pour tout élément (p, q, r) de $\text{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$:

$$(4.2.2.4) \quad S(p, q, r) : 0 \rightarrow X(p, q) \rightarrow X(p, r) \rightarrow X(q, r) \rightarrow 0 ,$$

la suite exacte de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ dont les morphismes sont les morphismes canoniques déduits de la filtration de X . Soit enfin, pour tout élément (p, q) de $\text{Fl}_1(\widetilde{\mathbb{Z}})$,

$$(4.2.2.5) \quad J(p, q) : \mathcal{X}(p, q) \longrightarrow X(p, q) ,$$

l'image dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ du morphisme de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$:

$$(4.2.2.6) \quad j(p, q) : \mathcal{X}(p, q) \longrightarrow X(p, q) ,$$

dont les composants sont :

$$j(p, q)^i : \mathcal{X}(p, q)^i = X(q)^i \oplus X(p)^{i+1} \rightarrow X(q)^i / X(p)^i = X(p, q)^i ,$$

$$j(p, q)^i = (\pi^i, 0) ,$$

$$(4.2.2.7) \quad \text{où } \pi^i \text{ est l'épimorphisme canonique :}$$

$$\pi^i : X(q)^i \longrightarrow X(q)^i / X(p)^i .$$

Proposition 4.2.3. Pour tout élément (p, q, r) de $\text{Fl}_2(\widetilde{\mathbb{Z}})$, désignons par :

$$\delta(p, q, r) : X(q, r) \longrightarrow X(p, q)[1] ,$$

le morphisme de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$:

$$(4.2.3.1) \quad \delta(p, q, r) = \delta(S(p, q, r)) ,$$

où $\delta(S(p, q, r))$ est le morphisme de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ associé à la suite exacte $S(p, q, r)$ (4.2.2.4) par le δ -foncteur canonique $\mathbf{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ (1.3.2).

a) Les objets $X(p, q)$ (4.2.2.1), les morphismes $\varphi((p, q), (p', q'))$ (4.2.2.2) et les morphismes $\delta(p, q, r)$ (4.2.3.1) définissent un objet spectral à valeurs dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$.

b) Les morphismes $J(p, q)$ (4.2.2.5) définissent un isomorphisme de l'objet spectral $(\mathcal{X}(p, q), \delta(p, q, r))$ sur l'objet spectral $(X(p, q), \delta(p, q, r))$.

L'assertion a) résulte immédiatement des propriétés du δ -foncteur canonique $\mathbf{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ (1.3.1). Pour démontrer l'assertion b), le lecteur se reportera à (1.3.2).

CATÉGORIES DÉRIVÉES

4.2.4. Un morphisme d'objets filtrés de type $\tilde{\mathbb{Z}}$ de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ induit de la manière évidente un morphisme entre les objets spectraux associés décrits par la proposition (4.2.3), *a*). La proposition (4.2.3) définit donc un foncteur de la catégorie des objets filtrés de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ dans la catégorie des objets spectraux à valeurs dans $D(\mathcal{A})$.

Soient X un objet de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ et $X(q) \subset X$, $q \in \tilde{\mathbb{Z}}$, sa première filtration canonique. L'objet spectral associé par la proposition (4.2.3) à l'objet filtré $(X, X(q), q \in \tilde{\mathbb{Z}})$ n'est autre, dans ce cas, que le premier objet spectral, à valeurs dans $D(\mathcal{A})$, associé au complexe X (4.1.5).

Soient de même X un complexe n -uple de \mathcal{A} , $\int_n X = Y$ le complexe simple associé, m un entier, $1 \leq m \leq n$, et :

$$0 = {}^m Y(-\infty) \subset \cdots \subset {}^m Y(q) \subset \cdots \subset {}^m Y(+\infty) = Y$$

la filtration définie par le m -ième degré de X (4.1.6.9). L'objet spectral associé par la proposition (4.2.3) à l'objet filtré $(Y, {}^m Y(q), q \in \tilde{\mathbb{Z}})$ n'est autre, dans ce cas, que l'objet spectral, à valeurs dans $D(\mathcal{A})$, défini par X , filtré par son m -ième degré (4.1.8).

4.3. Deuxième objet spectral canonique.

4.3.1. Soit X un objet de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$. Posons :

(4.3.1.1)

$$X(-\infty) = 0 \quad , \quad X(+\infty) = X \quad ,$$

$$X(q) = \cdots X^{q-3} \rightarrow X^{q-2} \rightarrow \mathsf{Ker}(d_X^{q-1}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots , \quad q \in \mathbb{Z} ,$$

les différentielles de ce dernier complexe étant induites par les différentielles de X . On a des monomorphismes canoniques :

$$(4.3.1.2) \quad 0 = X(-\infty) \subset \cdots \subset X(q) \subset X(q+1) \subset \cdots \subset X(+\infty) = X$$

qui définissent une filtration de type $\tilde{\mathbb{Z}}$ sur X qu'on appelle *la deuxième filtration canonique* de X . On en déduit, par la proposition (4.2.3), un objet spectral $(X(p, q), \delta(p, q, r))$ qu'on appelle le *deuxième objet spectral, à valeurs dans $D(\mathcal{A})$* , associé au complexe X . Un morphisme dans $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$: $X \rightarrow Y$ respecte les deuxièmes filtrations canoniques et, par suite, le foncteur :

$$X \longmapsto (X(p, q), \delta(p, q, r))$$

est un foncteur de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ dans la catégorie des objets spectraux à valeurs dans $D(\mathcal{A})$. Ce foncteur est appelé le foncteur *deuxième objet spectral canonique*.

Proposition 4.3.2. Soient X un objet de $\text{comp}(\mathcal{A})$, $(X(p, q), \delta(p, q, r))$ le deuxième objet spectral associé à X et $H : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ le foncteur cohomologique canonique.

a) $H^r(X(p, q)) = 0$, pour tout entier $r < p$ ou $r \geq q$.

b) Soit r un entier. Pour tout élément $(p, q) \in \text{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ tel que $p \leq r < q$, il existe un et un seul isomorphisme :

$$i_{p,q}^r(X) : H^r(X) \longrightarrow H^r(X(p, q))$$

tel que $i_{-\infty, +\infty}^r(X)$ soit l'identité et tel que pour tout couple (p, q) et (p', q') , $p \leq p'$, $q \leq q'$, $p \leq r < q$, $p' \leq r < q'$, le diagramme ci-après soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & H^r(X) & & \\ & i_{p,q}^r(X) \swarrow & & \searrow i_{p',q'}^r(X) & \\ H^r(X(p, q)) & \xrightarrow{H^r(\varphi((p, q), (p', q')))} & & & H^r(X(p', q')) \end{array} .$$

c) Soient $m : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\text{comp}(\mathcal{A})$ et :

$$m(p, q) : X(p, q) \rightarrow Y(p, q)$$

le morphisme correspondant entre les deuxièmes objets spectraux associés. Pour tout élément (p, q) de $\text{Fl}_1(\tilde{\mathbb{Z}})$ et tout entier r tel que $p \leq r < q$, le diagramme ci-après est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^r(X) & \xrightarrow{H^r(m)} & H^r(Y) \\ i_{p,q}^r(X) \downarrow l & & \downarrow l i_{p,q}^r(Y) \\ H^r(X(p, q)) & \xrightarrow{H^r(m(p, q))} & H^r(Y(p, q)) \end{array} .$$

Cette proposition résulte immédiatement des définitions.

Corollaire 4.3.3. Le foncteur deuxième objet spectral canonique (4.3.1) se factorise d'une manière unique à travers le foncteur canonique :

$$\text{comp}(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A}) .$$

En effet, d'après (4.3.2), un quasi-isomorphisme $m : X \rightarrow Y$ est transformé par ce foncteur en isomorphisme d'objets spectraux. Le corollaire résulte donc de (1.3.5).

CATÉGORIES DÉRIVÉES

4.3.4. Le foncteur de $D(\mathcal{A})$ dans la catégorie des objets spectraux de $D(\mathcal{A})$ est encore appelé, abusivement, le *foncteur deuxième objet spectral canonique*.

Soient X un complexe de \mathcal{A} , $(X(p, q), \delta(p, q, r))$ le deuxième objet spectral associé à X . Il résulte de (4.3.2) et (1.2.10) qu'on a un isomorphisme canonique dans $D(\mathcal{A})$:

$$(4.3.4.1) \quad X(p, p+1) \xrightarrow{\sim} H^p(X)[-p] \quad .$$

Notons aussi que lorsque X est un objet de $D^*(\mathcal{A})$ ($* = -, +, b$, “vide”), le deuxième objet spectral associé à X est en fait à valeurs dans $D^*(\mathcal{A})$.

4.4. Suites spectrales usuelles.

4.4.1. Soient \mathcal{A} une catégorie additive, non nécessairement abélienne, $F : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique dans une catégorie abélienne \mathcal{B} , $F^p : K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ les foncteurs déduits de F en composant avec le foncteur de translation de $K(\mathcal{A})$ ($F^p(X) = F(X[p])$). Soit, de plus, Y un complexe de \mathcal{A} . Le foncteur F transforme le premier objet spectral, à valeurs dans $K(\mathcal{A})$, associé à Y (4.1.4) en un objet spectral à valeurs dans \mathcal{B} . On en déduit (chap. II, 4.3.3) une suite spectrale à valeurs dans \mathcal{B} , fonctorielle en F et en Y (lorsque celui-ci varie dans $\text{comp}(\mathcal{A})$), qu'on appelle la *première suite spectrale du foncteur F , relative au complexe Y* . On utilise toujours, pour cette suite spectrale, l'indexation introduite au (chap. II, 4.3.3.1).

Proposition 4.4.2. a) *Le terme $I_1^{p,q}$ de la première suite spectrale du foncteur F relative au complexe Y est donné par :*

$$I_1^{p,q} = F^q(Y^p)$$

(Y^p désigne ici le complexe dont le seul composant non nul est, en degré zéro, le p -ième composant du complexe Y). La différentielle correspondante est :

$$d_1 : I_1^{p,q} \longrightarrow I_1^{p+1,q},$$

$$d_1 = F^q(-d_Y^p) : F^q(Y^p) \longrightarrow F^q(Y^{p+1}) \quad .$$

b) *Le terme $I_2^{p,q}$ de cette même suite spectrale peut donc se décrire comme suit : désignons par $F^{q,\bullet} : \text{comp}(K(\mathcal{A})) \rightarrow \text{comp}(\mathcal{B})$ l'extension de F^q aux complexes, $H_{\mathcal{B}}^p : \text{comp}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ le foncteur p -ième objet de cohomologie et Y^\bullet l'objet de $\text{comp}(K(\mathcal{A}))$:*

$$Y^\bullet = \dots \rightarrow Y^{p-1} \xrightarrow{d_Y^{p-1}} Y^p \xrightarrow{d_Y^p} Y^{p+1} \rightarrow \dots \quad .$$

On a alors :

$$I_2^{p,q} = H_B^p F^{q,\bullet}(Y^\bullet) .$$

c) Les termes $I_\infty^{p,q}$ sont les gradués associés aux objets $F^{p+q}(Y)$ convenablement filtrés.

Démontrons a). Soit $(Y(p,q), \delta(p,q,r))$ le premier objet spectral à valeurs dans $K(\mathcal{A})$ associé au complexe Y . Il résulte immédiatement de la définition de cet objet qu'on a (4.1.2.3) :

$$Y(-p-1, -p) = Y^p[-p] .$$

Par suite (chap. II, 4.3.3.1) :

$$I_1^{p,q} = F^{p+q}(Y^p[-p]) = F^q(Y^p) .$$

La description de la différentielle $d_1 : I_1^{p,q} \rightarrow I_1^{p+1,q}$ se déduit alors immédiatement de (4.1.2.6). L'assertion b) résulte immédiatement de a). La dernière assertion résulte de (chap. II, 4.3.2).

Remarque 4.4.3. Désignons par $(I_r^{p,q}(Y), d_r, r \geq 1)$ la première suite spectrale du foncteur F relative au complexe Y . Le foncteur :

$$Y \mapsto (I_r^{p,q}(Y), d_r, r \geq 1)$$

est un foncteur de la catégorie $\text{comp}(\mathcal{A})$ dans la catégorie des suites spectrales à valeurs dans \mathcal{B} . Ce foncteur ne se factorise pas en général par la catégorie $K(\mathcal{A})$. En revanche, le foncteur :

$$Y \mapsto (I_r^{p,q}(Y), d_r, r \geq 2)$$

se factorise, d'après la proposition (4.4.2), b), par la catégorie des complexes à homotopie près.

4.4.4. Soient maintenant \mathcal{A} une catégorie abélienne, $F : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique à valeurs dans une catégorie abélienne, F^p , $p \in \mathbb{Z}$, les foncteurs déduits de F en composant avec les translations de $D(\mathcal{A})$ ($F^p(X) = F(X[p])$). Soient, de plus, Y un objet de $\text{comp}(\mathcal{A})$ et $(Y(p,q), \delta(p,q,r))$ le premier objet spectral, à valeurs dans $D(\mathcal{A})$, associé au complexe Y . Le foncteur F transforme cet objet spectral en un objet spectral à valeurs dans \mathcal{B} . On en déduit une suite spectrale à valeurs dans \mathcal{B} qu'on appelle encore la *première suite spectrale du foncteur F , relative au complexe Y* . Cette suite spectrale est décrite essentiellement par la proposition (4.4.2) (il suffit dans la proposition (4.4.2) de remplacer la catégorie $K(\mathcal{A})$ par la catégorie $D(\mathcal{A})$). La première suite spectrale du foncteur F , relativement au complexe Y , dépend fonctoriellement de F et de l'argument Y quand celui-ci varie dans $\text{comp}(\mathcal{A})$. Nous utiliserons toujours, pour cette suite spectrale, l'indexation introduite en (chap. II, 4.3.3.1).

4.4.5. Les données sont les mêmes qu'en (4.4.4) mais on se donne, de plus, un objet X de $D(\mathcal{A})$. Soit $(X(p, q), \delta(p, q, r))$ le deuxième objet spectral à valeurs dans $D(\mathcal{A})$ associé au complexe X (4.3.1). Le foncteur F transforme cet objet spectral en un objet spectral à valeurs dans \mathcal{B} . On en déduit une suite spectrale fonctorielle en F et en l'argument X lorsque celui-ci varie dans la catégorie $D(\mathcal{A})$ (4.3.3). Cette suite spectrale est appelée la *deuxième suite spectrale du foncteur F , relative au complexe X* . On utilise toujours, pour cette suite spectrale, l'indexation introduite au (chap. II, 4.3.3.2).

Proposition 4.4.6. a) *Le terme $\Pi_2^{p,q}$ de la deuxième suite spectrale de F relative au complexe X est donné par :*

$$\Pi_2^{p,q} = F^p(\mathsf{H}^q(X))$$

b) *Les termes $\Pi_\infty^{p,q}$ sont les gradués associés aux objets $F^{p+q}(X)$ convenablement filtrés.*

En effet (4.3.4.1), on a un isomorphisme canonique :

$$X(p, p+1) \xrightarrow{\sim} \mathsf{H}^p(X)[-p] \quad ,$$

d'où en utilisant (chap. II, 4.3.3.2) :

$$\Pi_2^{p,q} = F^{p+q}(\mathsf{H}^q(X)[-q]) = F^p(\mathsf{H}^q(X)) \quad ,$$

d'où l'égalité (abusive) de a). L'assertion b) résulte de (chap. II, 4.3.2).

4.5. Problèmes de convergence.

Définition 4.5.1. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux catégories abéliennes. Un foncteur cohomologique $F : D^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ ($* = +, -, b$, “vide”) est dit *stationnaire à droite* (resp. *à gauche*) s'il existe un entier n_0 tel que, pour tout objet X de $D^*(\mathcal{A})$ tel que $\mathsf{H}^i(X) = 0$, pour tout $i < 0$ (resp. > 0), on ait $F^n(X) = 0$, pour tout $n < n_0$ (resp. $n > n_0$). Le foncteur F est dit *stationnaire* s'il est stationnaire à droite et à gauche. Un foncteur exact $G : D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^{*'}(\mathcal{B})$ est dit *stationnaire à droite* (resp. *stationnaire à gauche*, resp. *stationnaire*) si le foncteur cohomologique obtenu en composant le foncteur G avec le foncteur cohomologique canonique $D^{*'}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ est stationnaire à droite (resp. stationnaire à gauche, resp. stationnaire).

4.5.2. Soient $F : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique stationnaire à droite, p un entier, X un objet de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ et :

$$0 = X(-\infty) \rightarrow \cdots \rightarrow X(q) \rightarrow X(q+1) \rightarrow \cdots \rightarrow X(+\infty) = X$$

la deuxième filtration canonique (4.3.1) de X . Le système inductif $F^p(X(q))$ est stationnaire, *i.e.* il existe un entier q_0 tel que pour tout q , $q_0 \leq q \leq +\infty$, le morphisme :

$$F^p(X(q)) \rightarrow F^p(X)$$

soit un isomorphisme. En effet, avec les notations de (4.2.3), on a une suite exacte :

$$F^{p-1}(X(q, +\infty)) \rightarrow F^p(X(q)) \rightarrow F^p(X) \rightarrow F^p(X(q, +\infty)) \quad ,$$

et le foncteur F étant stationnaire à droite, il existe un entier q_0 tel que pour tout $q > q_0$ les objets $F^p(X(q, +\infty))$ et $F^{p-1}(X(q, +\infty))$ soient nuls.

Soient de même $F : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique stationnaire à droite, p un entier, Y un objet de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ et :

$$0 = Y(-\infty) \rightarrow \cdots \rightarrow Y(q) \rightarrow Y(q+1) \rightarrow \cdots Y(+\infty) = Y \quad ,$$

la première filtration de Y (4.1.2). Il existe un entier q_0 tel que pour tout $q < q_0$ l'objet $F^p(Y(q))$ soit nul. La vérification analogue à la précédente est laissée au lecteur qui pourra de même, en passant aux catégories opposées, étudier les propriétés analogues des foncteurs stationnaires à gauche.

Proposition 4.5.3. a) Soit Y un objet de $\mathbf{comp}^*(\mathcal{A})$ (1.1.1) ($* = +, -, b$, “vide”). Soit $F : \mathbf{D}^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique. La première suite spectrale du foncteur F relative au complexe Y (4.4.1) dont les termes initiaux sont (4.4.2) :

$$I_1^{p,q} = F^q(Y^p)$$

est stationnaire (chap. II, 4.4.2) dans les cas suivants :

- 1) Y est un objet de $\mathbf{comp}^b(\mathcal{A})$.
- 2) Y est un objet de $\mathbf{comp}^+(\mathcal{A})$ et F est stationnaire à droite.
- 3) Y est un objet de $\mathbf{comp}^-(\mathcal{A})$ et F est stationnaire à gauche.
- 4) Le foncteur F est stationnaire.

b) Soient X un objet de $\mathbf{D}^*(\mathcal{A})$ (1.2.4) et $F : \mathbf{D}^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique. La deuxième suite spectrale du foncteur F relative au complexe X (4.4.5) est stationnaire dans les cas suivants :

CATÉGORIES DÉRIVÉES

- 1) X est un objet de $D^b(\mathcal{A})$.
- 2) X est un objet de $D^+(\mathcal{A})$ et F est stationnaire à droite.
- 3) X est un objet de $D^-(\mathcal{A})$ et F est stationnaire à gauche.
- 4) Le foncteur F est stationnaire.

Cette proposition résulte immédiatement de (4.5.2) et de la définition (chap. II, 4.4.2).

Théorème 4.5.4. Soient $F_1, F_2 : D^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ ($* = +, -, b$, “vide”) deux foncteurs cohomologiques (resp. $G_1, G_2 : D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^{*'}(\mathcal{B})$ deux foncteurs exacts) et $m : F_1 \rightarrow F_2$ (resp. $m : G_1 \rightarrow G_2$) un morphisme de foncteurs (resp. un morphisme de foncteurs exacts (chap. I, 1.6.6.4)). La sous-catégorie pleine de $D^*(\mathcal{A})$ définie par les objets X de $D^*(\mathcal{A})$ tels que $m(X[p])$ soit un isomorphisme, pour tout entier p , est une sous-catégorie triangulée strictement pleine et saturée de $D^*(\mathcal{A})$ (chap. II, 2.1.6), notée $\mathbf{Is}(m)$.

- a) Si tout objet de \mathcal{A} est un objet de $\mathbf{Is}(m)$, alors $D^b(\mathcal{A}) \subset \mathbf{Is}(m)$.
- b) Si tout objet de \mathcal{A} est un objet de $\mathbf{Is}(m)$ et si les foncteurs F_1 et F_2 (resp. G_1 et G_2) sont stationnaires à droite, alors $D^+(\mathcal{A}) \cap D^*(\mathcal{A}) \subset \mathbf{Is}(m)$.
- c) Si tout objet de \mathcal{A} est un objet de $\mathbf{Is}(m)$ et si les foncteurs F_1 et F_2 (resp. G_1 et G_2) sont stationnaires à gauche, alors $D^-(\mathcal{A}) \cap D^*(\mathcal{A}) \subset \mathbf{Is}(m)$.
- d) Si tout objet de \mathcal{A} est un objet de $\mathbf{Is}(m)$ et si les foncteurs F_1 et F_2 (resp. G_1 et G_2) sont stationnaires, alors $D^*(\mathcal{A}) = \mathbf{Is}(m)$.
- e) S'il existe une partie M de $\mathbf{Ob}(\mathcal{A})$ telle que :
 - α) tout objet de \mathcal{A} soit isomorphe à un quotient d'un objet appartenant à M ;
 - β) tout objet appartenant à M soit un objet de $\mathbf{Is}(m)$;
 si de plus les foncteurs F_1 et F_2 (resp. G_1 et G_2) sont stationnaires à gauche, alors $D^-(\mathcal{A}) \cap D^*(\mathcal{A}) \subset \mathbf{Is}(m)$.
- f) S'il existe une partie M de $\mathbf{Ob}(\mathcal{A})$ telle que :
 - α) tout objet de \mathcal{A} soit isomorphe à un sous-objet d'un objet appartenant à M ;
 - β) tout objet appartenant à M est un objet de $\mathbf{Is}(m)$;
 si de plus les foncteurs F_1 et F_2 (resp. G_1 et G_2) sont stationnaires à droite, alors $D^+(\mathcal{A}) \cap D^*(\mathcal{A}) \subset \mathbf{Is}(m)$.

Notons, tout d'abord, que la partie resp. du théorème (4.5.4) se déduit de la partie non resp., en composant les foncteurs G_1 et G_2 avec le foncteur cohomologique canonique $D^{*'}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$. Démontrons *a*). Soit X un objet de

$D^b(\mathcal{A})$. Le morphisme m induit un morphisme entre les deuxièmes suites spectrales canoniques des foncteurs F_1 et F_2 relatives au complexe X . Le morphisme induit entre les termes initiaux :

$$m_2^{p,q}(X) : F_1^p(\mathbf{H}^q(X)) \longrightarrow F_2^p(\mathbf{H}^q(X))$$

est par hypothèse un isomorphisme. De plus, les deux suites spectrales sont stationnaires (4.5.3). On en déduit (chap. II, 4.4.5) que le morphisme m induit un isomorphisme entre les aboutissements des deux suites spectrales et, par suite, que $m(X)$ est un isomorphisme. Les assertions $b), c), d)$ se démontrent de manière analogue : il suffit de remarquer que sous les hypothèses faites, les deuxièmes suites spectrales canoniques sont stationnaires (4.5.3). Démontrons $e)$. Il suffit, d'après $c)$, de montrer que tout objet de \mathcal{A} est un objet de $\mathbf{Is}(m)$. Soient X un objet de \mathcal{A} , p un entier, et montrons que le morphisme :

$$m(X[p]) : F_1^p(X) \longrightarrow F_2^p(X)$$

est un isomorphisme. Les foncteurs F_1 et F_2 étant stationnaires à gauche, il existe un entier r tel que $F_i^q(Y) = 0$, pour $i = 1, 2$, tout objet Y de \mathcal{A} et tout entier $q \geq p+r-1$. La propriété $\alpha)$ implique que X est quasi-isomorphe à un complexe :

$$W^\bullet = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow Y \rightarrow L^{-r+1} \rightarrow L^{-r+2} \rightarrow \cdots \rightarrow L^{-1} \rightarrow L^0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots ,$$

où les composants L^i , $-r+1 \leq i \leq 0$, sont des éléments de M . Désignons par L^\bullet le complexe :

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow L^{-r+1} \rightarrow L^{-r+2} \rightarrow \cdots \rightarrow L^{-1} \rightarrow L^0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots .$$

On a une suite exacte de complexes :

$$0 \rightarrow L^\bullet \rightarrow W^\bullet \rightarrow Y[r] \rightarrow 0 ,$$

d'où (1.3.2) un triangle distingué de $D^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccc} & Y[r] & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ L^\bullet & \xrightarrow{\quad} & X \end{array} .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

On en déduit un diagramme commutatif, où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 F_1^{p+r-1}(Y) & \longrightarrow & F_1^p(L^\bullet) & \longrightarrow & F_1^p(X) & \longrightarrow & F_1^{p+r}(Y) \\
 \downarrow & & m(L^\bullet[p]) \downarrow & & \downarrow m(X[p]) & & \downarrow \\
 F_2^{p+r-1}(Y) & \longrightarrow & F_2^p(L^\bullet) & \longrightarrow & F_2^p(X) & \longrightarrow & F_2^{p+r}(Y)
 \end{array} .$$

L'entier r a été choisi de telle façon que les objets $F_i^q(Y)$ soient nuls, pour $i = 1, 2$ et $q \geq p + r - 1$, et, par suite, tout revient à montrer que $m(L^\bullet)$ est un isomorphisme, pour tout objet L^\bullet de $\mathbf{comp}^b(\mathcal{A})$ dont les composants sont des éléments de M . Or le morphisme m induit un morphisme entre les premières suites spectrales des foncteurs F_1 et F_2 relatives au complexe L^\bullet . Sur les termes initiaux, ce morphisme :

$$m_1^{p,q}(L^\bullet) : F_1^q(L^p) \rightarrow F_2^q(L^p) ,$$

est, par hypothèse, un isomorphisme. Ces suites spectrales étant stationnaires (4.5.3), le morphisme m induit un isomorphisme sur les aboutissments (chap. II, 4.4.5) et, par suite (4.4.2), le morphisme $m(L^\bullet)$ est un isomorphisme. Ceci achève la démonstration de l'assertion e). L'assertion f) se déduit de l'assertion e), en passant aux catégories opposées. Le théorème est démontré.

4.6. Objet spectral de Cartan-Eilenberg.

Définition 4.6.1. On dit qu'un complexe I^\bullet de \mathcal{A} est un *complexe injectif de Cartan-Eilenberg* si, pour tout entier i , les objets $\mathbf{Im}(d_{I^\bullet}^i)$ et $\mathbf{H}^i(I^\bullet)$ sont injectifs.

4.6.2. On notera qu'un complexe injectif de Cartan-Eilenberg I^\bullet est de type injectif (1.1.5), i.e. que ses composants sont des objets injectifs de \mathcal{A} et que, pour tout entier i , l'objet $\mathbf{Ker}(d_{I^\bullet}^i)$ est un objet injectif de \mathcal{A} . Ceci se vérifie immédiatement, en utilisant les suites exactes à trois termes qui relient ces différents objets.

Proposition 4.6.3. Soit I^\bullet un complexe injectif de Cartan-Eilenberg.

a) Pour tout complexe Y , le morphisme canonique :

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet) \longrightarrow \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{H}^p(Y), \mathbf{H}^p(I^\bullet))$$

est un isomorphisme.

b) Soit $Q : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A})$ le foncteur de passage au quotient. Le complexe I^\bullet est Q -libre à droite (chap. II, 2.3.3), i.e. pour tout complexe Y , le morphisme canonique :

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet)$$

est un isomorphisme.

c) Soit :

$$H^*(I^\bullet) : \cdots \rightarrow H^p(I^\bullet) \rightarrow H^{p+1}(I^\bullet) \rightarrow \cdots$$

le complexe dont les composants sont les $H^p(I^\bullet)$, $p \in \mathbb{Z}$, et les différentielles sont nulles. Il existe un et un seul isomorphisme dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ $I^\bullet \rightarrow H^*(I^\bullet)$ induisant l'identité sur les objets de cohomologie.

d) Les morphismes canoniques $H^*(I^\bullet) \rightarrow H^p(I^\bullet)[-p]$ définissent des isomorphismes dans $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ et dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$:

$$H^*(I^\bullet) \xrightarrow{\sim} \prod_{p \in \mathbb{Z}} H^p(I^\bullet)[-p] .$$

Montrons que a) entraîne b). En effet, il suffit (chap. II, 2.3.3) de montrer que pour tout complexe acyclique Y , $\mathbf{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(Y, I^\bullet) = 0$, ce qui résulte de a). Montrons que a) entraîne c). En effet, il suffit de remplacer, dans l'isomorphisme de a), le complexe Y par I^\bullet et le complexe I^\bullet par $H^*(I^\bullet)$. On voit de même que a) entraîne d) en remplaçant, dans l'isomorphisme de a), le complexe I^\bullet par le complexe $H^*(I^\bullet)$. Démontrons a). Il résulte immédiatement des définitions que le complexe I^\bullet est isomorphe à un complexe du type :

$$\cdots \rightarrow J^{n-2} \oplus H^{n-1} \oplus J^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{id} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} J^{n-1} \oplus H^n \oplus J^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{id} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} J^n \oplus H^{n+1} \oplus J^{n+1} \rightarrow \cdots ,$$

et, par suite, il existe un homotopisme entre I^\bullet et le complexe $H^*(I^\bullet)$. Pour démontrer a), on peut donc supposer que $I^\bullet = H^*(I^\bullet)$. Il est clair qu'on a alors un isomorphisme :

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(Y, H^*(I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(Y, H^p(I^\bullet)[-p]) .$$

De plus, les objets $H^p(I^\bullet)$ étant injectifs, le morphisme canonique :

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{K}(\mathcal{A})}(Y, H^p(I^\bullet)[-p]) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(H^p(Y), H^p(I^\bullet))$$

est un isomorphisme.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

4.6.4. Soit $X^{\bullet\bullet}$ un double complexe de \mathcal{A} (chap. I, 2.1.2). Le double complexe $X^{\bullet\bullet}$ définit un objet de $\mathbf{comp}(\mathbf{comp}(\mathcal{A}))$:

$$X^{\bullet\bullet} : \cdots \rightarrow X^{\bullet,n-1} \xrightarrow{d_2^{\bullet,n-1}} X^{\bullet,n} \xrightarrow{d_2^{\bullet,n}} X^{\bullet,n+1} \rightarrow \cdots .$$

(On utilise les notations de (4.1.9). Attention au signe !) Désignons par $B_1^p(X^{\bullet\bullet})$ le complexe simple :

$$(4.6.4.1) \quad \begin{cases} B_1^p(X^{\bullet\bullet})^i = \mathbf{Im}(d_1^{p-1,i}) & , \\ d_{B_1^p(X^{\bullet\bullet})}^i \text{ induit par } d_2^{p,i} & . \end{cases}$$

Désignons par $Z_1^p(X^{\bullet\bullet})$ le complexe simple :

$$(4.6.4.2) \quad \begin{cases} Z_1^p(X^{\bullet\bullet})^i = \mathbf{Ker}(d_1^{p,i}) & , \\ d_{Z_1^p(X^{\bullet\bullet})}^i \text{ induit par } d_2^{p,i} & . \end{cases}$$

Désignons par $H_1^p(X^{\bullet\bullet})$ le complexe simple :

$$(4.6.4.3) \quad \begin{cases} H_1^p(X^{\bullet\bullet})^i = Z_1^p(X^{\bullet\bullet})^i / B_1^p(X^{\bullet\bullet})^i & , \\ d_{H_1^p(X^{\bullet\bullet})}^i \text{ induit par } d_2^{p,i} & . \end{cases}$$

Enfin, Y étant un complexe simple de \mathcal{A} , nous désignons encore par Y le complexe double dont les composants sont nuls en deuxième degré non nul et dont les composants et les premières différentielles sont ceux de Y en deuxième degré zéro.

Définition 4.6.5. Soit Y un complexe simple de \mathcal{A} . Une *résolution injective de Cartan-Eilenberg* de Y est un double complexe :

$$I^{\bullet\bullet} : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow I^{\bullet,0} \rightarrow I^{\bullet,1} \rightarrow I^{\bullet,2} \rightarrow \cdots ,$$

muni d'un morphisme appelé *augmentation* :

$$\varepsilon : Y \rightarrow I^{\bullet\bullet}$$

tel que pour tout entier p , les complexes simples $B_1^p(I^{\bullet\bullet})$ (4.6.4.1) et $H_1^p(I^{\bullet\bullet})$ (4.6.4.3) munis des augmentations :

$$B_1^p(\varepsilon) : \mathbf{Im}(d_Y^{p-1}) \longrightarrow B_1^p(I^{\bullet\bullet}) ,$$

$$H_1^p(\varepsilon) : H^p(Y) \longrightarrow H_1^p(I^{\bullet\bullet})$$

soient des résolutions de type injectif (1.1.4).

Nous appelons donc *résolution injective de Cartan-Eilenberg du complexe* Y ce que ces auteurs appellent simplement résolution injective du complexe Y ([1], chap. XVII), terminologie que nous n'utiliserons pas dans ce travail. Une résolution injective de Cartan-Eilenberg de Y induit des résolutions de type injectif des composants du complexe Y et des noyaux des différentielles de Y [loc. cit.]. Nous dirons qu'une résolution de Cartan-Eilenberg $\varepsilon : Y \rightarrow I^{\bullet\bullet}$ est de *longueur finie* s'il existe un entier n_0 tel que $I^{\bullet,n} = 0$ pour $n > n_0$. Pour qu'un complexe Y admette une résolution injective de Cartan-Eilenberg de longueur finie, il faut et il suffit que la dimension injective des objets de cohomologie de Y et des images des différentielles de Y soit majorée. Rappelons les résultats établis dans loc. cit. :

Proposition 4.6.6. a) *Lorsque la catégorie \mathcal{A} possède suffisamment d'objets injectifs (3.1.5), tout complexe simple Y de \mathcal{A} admet une résolution injective de Cartan-Eilenberg.*

b) *Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de complexes simples, $\varepsilon : X \rightarrow I^{\bullet\bullet}$ et $\varepsilon' : Y \rightarrow J^{\bullet\bullet}$ deux résolutions injectives de Cartan-Eilenberg. Il existe un morphisme de doubles complexes :*

$$g : I^{\bullet\bullet} \longrightarrow J^{\bullet\bullet}$$

au dessus de f , i.e. tel que le diagramme de morphismes de doubles complexes :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon' \\ I^{\bullet\bullet} & \xrightarrow{g} & J^{\bullet\bullet} \end{array}$$

soit commutatif.

c) *Deux morphismes $g, g' : I^{\bullet\bullet} \rightarrow J^{\bullet\bullet}$ au dessus de f , sont homotopes (au sens de l'homotopie des morphismes de doubles complexes (chap. I, 2.5.1)).*

Nous renvoyons pour la démonstration à loc. cit.

4.6.7. Soient Y un objet de $\text{comp}(\mathcal{A})$ et $Y \rightarrow I^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg de Y . Le double complexe $I^{\bullet\bullet}$ donne naissance à deux objets spectraux à valeurs dans $D(\mathcal{A})$, suivant qu'on le filtre par son premier ou son deuxième degré (4.1.7). L'objet spectral, à valeurs dans $D(\mathcal{A})$, défini par $I^{\bullet\bullet}$ filtré par son deuxième degré, est appelé *l'objet spectral de Cartan-Eilenberg de Y* (relatif à la résolution de Cartan-Eilenberg considéré).

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Proposition 4.6.8. Soient Y un complexe de \mathcal{A} et $\varepsilon : Y \rightarrow I^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg de Y . Lorsque Y est un objet de $\mathbf{comp}^+(\mathcal{A})$, ou bien lorsque la résolution $I^{\bullet\bullet}$ est de longueur finie, le complexe simple $\int_2 I^{\bullet\bullet}$ est un complexe de type injectif et le morphisme de complexes :

$$\int_2 \varepsilon : Y \longrightarrow \int_2 I^{\bullet\bullet}$$

est un quasi-isomorphisme.

En effet, le morphisme ε induit un morphisme entre le premier objet spectral de Y , à valeurs dans $D(\mathcal{A})$ (4.1.5), et l'objet spectral, à valeurs dans $D(\mathcal{A})$, défini par $I^{\bullet\bullet}$ filtré par son premier degré ((4.1.7), (4.1.8)). Ces deux objets spectraux sont transformés par le foncteur cohomologique canonique $H : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ en objets spectraux à valeurs dans la catégorie abélienne \mathcal{A} . Il suffit de montrer que ε induit un isomorphisme entre ces objets spectraux. Or l'objet spectral défini par Y est toujours stationnaire (chap. II, 4.4.2) et, sous les hypothèses faites, l'objet spectral défini par $I^{\bullet\bullet}$ est stationnaire. Il suffit donc de montrer que ε induit un isomorphisme sur les termes initiaux. Ces termes initiaux sont d'une part :

$$I_1^{p,q} = H^q(Y^p) \quad ,$$

et d'autre part :

$${}'I_1^{p,q} = H^q(I^{p,\bullet}) \quad .$$

De plus, le morphisme induit par ε sur les termes initiaux est déduit par passage à la cohomologie du morphisme de complexes :

$$\varepsilon^p : Y^p \longrightarrow I^{p,\bullet} \quad .$$

Or ce morphisme est un quasi-isomorphisme, ce qui démontre la proposition.

4.6.9. Soient $F : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur cohomologique, Y un objet de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$ et $Y \rightarrow I^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg. Le foncteur F transforme l'objet spectral de Cartan-Eilenberg correspondant (4.6.7) en un objet spectral à valeurs dans \mathcal{B} , d'où une suite spectrale appelée *suite spectrale de Cartan-Eilenberg*. Désignons par $(C.E.)_r^{p,q}$ les termes de cette suite spectrale (chap. II, 4.3.3.1). Les termes initiaux de cette suite spectrale sont (4.1.9.1) :

$$(C.E.)_1^{p,q} = F^{p+q}(I^{\bullet,p}[-p]) = F^q(I^{\bullet,p}) \quad ,$$

et les premières différentielles sont (4.1.9.1) :

$$d_1^{p,q} : (\text{C.E.})_1^{p,q} \longrightarrow (\text{C.E.})_1^{p+1,q} \quad ,$$

$$d_1^{p,q} = F^q(-d_2^{\bullet,p}) \quad .$$

Les complexes $I^{\bullet,p}$ sont des complexes injectifs de Cartan-Eilenberg (4.6.1) et, par suite (4.6.3), on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$:

$$I^{\bullet,p} \xrightarrow{\sim} \prod_{r \in \mathbb{Z}} \mathsf{H}^r(I^{\bullet,p})[-r] \quad .$$

Utilisons alors le complexe $\mathsf{H}_1^p(I^{\bullet\bullet})$ introduit en (4.6.4.3). Pour tout entier r on a :

$$\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})^p = \mathsf{H}^r(I^{\bullet,p}) \quad ,$$

d'où un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$:

$$I^{\bullet,p} \xrightarrow{\sim} \prod_{r \in \mathbb{Z}} \mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})^p[-r] \quad ,$$

et, modulo cet isomorphisme, le morphisme de complexes :

$$d_2^{\bullet,p} : I^{\bullet,p} \longrightarrow I^{\bullet,p+1} \quad ,$$

est isomorphe au morphisme :

$$\prod_{r \in \mathbb{Z}} d_{\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})}^p[-r] \quad ,$$

d'où l'expression définitive des termes initiaux :

$$(4.6.9.1) \quad (\text{C.E.})_1^{p,q} = F^q \left(\prod_{r \in \mathbb{Z}} \mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})^p[-r] \right) \quad ,$$

et des premières différentielles :

$$(4.6.9.2) \quad d_1^{p,q} = -F^q \left(\prod_{r \in \mathbb{Z}} d_{\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})}^p[-r] \right) \quad .$$

Soit alors $F^{q,\bullet}(\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet}))$ le *complexe d'objets de \mathcal{B}* obtenu en appliquant le foncteur F^q aux composants et aux différentielles du complexe $\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})$. Les formules (4.6.9.1) et (4.6.9.2) définissent un morphisme :

$$(4.6.9.3) \quad (\text{C.E.})_2^{p,q} \longrightarrow \prod_{r \in \mathbb{Z}} \mathsf{H}_{\mathcal{B}}^p(F^{q-r,\bullet}(\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet}))) \quad .$$

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Ce morphisme est un isomorphisme lorsque, par exemple, le complexe Y est un objet de $\text{comp}^+(\mathcal{A})$ et lorsque le foncteur F est stationnaire à droite, ou bien, sans hypothèse sur Y , lorsque le foncteur F est stationnaire (4.5.1).

Le double complexe $I^{\bullet\bullet}$ étant une résolution injective de Cartan-Eilenberg de Y , le complexe $\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet})$ est une résolution injective de l'objet $\mathsf{H}^r(Y)$ et, par suite, on a un isomorphisme :

$$(4.6.9.4) \quad \mathsf{H}_{\mathcal{B}}^p(F^{q-r,\bullet}(\mathsf{H}_1^r(I^{\bullet\bullet}))) \xrightarrow{\sim} R^p F^{q-r}(\mathsf{H}^r(Y)) \quad ,$$

où $R^p F^{q-r} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ désigne le p -ième dérivé droit (au sens de [1]) du foncteur F^{q-r} restreint à la catégorie \mathcal{A} . On a donc, lorsque le morphisme (4.9.6.3) est un isomorphisme, un isomorphisme :

$$(4.6.9.5) \quad (\text{C.E.})_2^{p,q} \xrightarrow{\sim} \prod_{r \in \mathbb{Z}} R^p F^{q-r}(\mathsf{H}^r(Y)) \quad .$$

4.6.10. Étudions le cas où la catégorie \mathcal{B} est la catégorie **Ab** des groupes abéliens appartenant à un univers convenable et où le foncteur :

$$F : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

est le foncteur :

$$Y \longmapsto F(Y) = \mathsf{Ext}^0(Z, Y) \quad ,$$

où Z est un objet de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$. Soient Y un complexe de \mathcal{A} et $\varepsilon : Y \rightarrow I^{\bullet\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg. Le morphisme (4.6.9.3) est alors un isomorphisme (4.6.3) et, par suite, on a un isomorphisme :

$$(4.6.10.1) \quad (\text{C.E.})_2^{p,q} \xrightarrow{\sim} \prod_{r \in \mathbb{Z}} \mathsf{Ext}^p(\mathsf{H}^{r-q}(Z), \mathsf{H}^r(Y)) \quad .$$

Par ailleurs, la suite spectrale de Cartan-Eilenberg relative à F est stationnaire lorsque Y est un objet de $\text{comp}^+(\mathcal{A})$ et Z un objet de $\mathbf{D}^-(\mathcal{A})$, ou bien lorsque la résolution injective de Cartan-Eilenberg est de longueur finie. De plus, sous ces hypothèses, l'aboutissement de cette suite spectrale est, en vertu de (4.6.8) :

$$\prod_{r \in \mathbb{Z}} \mathsf{Ext}^p(\mathsf{H}^{r-q}(Z), \mathsf{H}^r(Y)) \Longrightarrow \mathsf{Ext}^{p+q}(Z, Y) \quad .$$

Index des notations.

$\mathbf{Ob}(\mathcal{G}), \mathbf{Fl}(\mathcal{G})$	chap. I, 1.1.1.
\deg	chap. I, 1.1.1.
\mathcal{C}_e, F_e	chap. I, 1.1.1.
$\mathbf{Hom}^g(X, Y)$	chap. I, 1.1.2.
$\mathcal{C}_{\text{add}}, F_{\text{add}}$	chap. I, 1.1.3.
$T(g), c(h, g)$	chap. I, 1.2.1.
$(\mathcal{C}_e, G^\circ, T, c)$	chap. I, 1.2.2.
(F_e, m)	chap. I, 1.2.4.
$\mathbf{Grad}(G), G^\circ\text{-Cat}, \Psi$	chap. I, 1.3.1.
$\mathcal{C}[G]$	chap. I, 1.3.2.
$\mathcal{H}om_{\mathbf{Grad}(G)}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'), \mathcal{H}om_{G^\circ\text{-Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$, Ψ	chap. I, 1.3.3.
$(\tilde{\mathcal{C}}, G^\circ, \tilde{T})$	chap. I, 1.3.6.
$i_g(h, h')$	chap. I, 1.3.8.
$(\mathcal{C}^\circ, G^\circ, T^\circ, c^\circ)$	chap. I, 1.3.9.
\perp	chap. I, 1.3.9.
$X[g], u[g]$	chap. I, 1.3.12.
$(\mathcal{C}, H, T_f, c_f), (F, m_f)$	chap. I, 1.4.1.
$f^*, \underline{f^*(\mathcal{C}, \mathcal{C}')}$	chap. I, 1.4.1.
$\dot{\alpha}, \alpha_s, \delta\alpha_s$	chap. I, 1.4.3.
(F, p)	chap. I, 1.4.4.
$(F^\circ, p^\circ), \alpha^\circ$	chap. I, 1.4.8.
$E\text{-Cat}$	chap. I, 1.5.13.
$\mathbb{Z}_{i,j}^n$	chap. I, 1.6.1.
$\mathbb{Z}^n(\leq i), \mathbb{Z}^n(\geq i)$	chap. I, 1.6.3.

α	chap. I, 1.6.4.
$\leq_s, \alpha_s, \beta_s$	chap. I, 1.6.5.
$[n], \mathbb{Z}[n], e_i$	chap. I, 2.1.1.
$Y^\sigma, d_Y^{\sigma,i}$	chap. I, 2.1.3.
f^σ	chap. I, 2.1.5.
$\mathbf{comp}^n(\mathcal{C}), \mathbf{comp}(\mathcal{C})$	chap. I, 2.1.5.
$Y_\sigma, d_{\sigma,i}^Y, f_\sigma$	chap. I, 2.1.6.
$\varepsilon(\sigma, i)$	chap. I, 2.2.1.
$\delta_Y^{\sigma,i}$	chap. I, 2.2.2.
$\int_\varphi Y, \int_\varphi f$	chap. I, 2.2.2.
$u_{\sigma_2, \sigma_1}, M(\tau, i, Y)$	chap. I, 2.2.3.
$\int_\varphi^\Pi Y, \int_\varphi^\Sigma Y$	chap. I, 2.2.3.
\int_n	chap. I, 2.2.4.
$T_i, T, Y[1], f[1], \nu(i, j)$	chap. I, 2.3.1.
$p_{i,\varphi}$	chap. I, 2.3.2.
p_n	chap. I, 2.3.4.
ι_n	chap. I, 2.4.1.
$\int_{\varphi,C}^\Sigma, \int_{\varphi,C}^\Pi, \int_{n,C}^\Sigma, \int_{n,C}^\Pi$	chap. I, 2.4.1.
$(X_1, X_2, \dots, X_n), (X_1, X_2, \dots, f_i, \dots, X_n)$	chap. I, 2.4.2.
$F^{[n]}, \mathbf{comp}_\Pi F, \mathbf{comp}_\Sigma F, p_i$	chap. I, 2.4.2.
$h^{[n]}, \mathbf{comp}_\Pi h, \mathbf{comp}_\Sigma h$	chap. I, 2.4.3.
$a : f \rightsquigarrow g$	chap. I, 2.5.1.
$b + a$	chap. I, 2.5.2.
$u \star a, a \star v$	chap. I, 2.5.3.
$\mathsf{K}(\mathcal{C}), \mathbf{comp}(\mathcal{C}) \xrightarrow{Q} \mathsf{K}(\mathcal{C}), \dot{f}$	chap. I, 2.5.7.
$\mathsf{K}_\Pi(F), \mathsf{K}_\Pi m, \mathsf{K}_\Sigma F, \mathsf{K}_\Sigma m$	chap. I, 2.5.10.
$\mathsf{tr}_1(\mathcal{C})$	chap. I, 3.1.1.
$c(f), c((g, h, a)), s$	chap. I, 3.1.2.
$\Phi(f), p(f), a(f)$	chap. I, 3.1.2.
$\mathsf{Tr}_1(\mathcal{C})$	chap. I, 3.1.4.
s'	chap. I, 3.1.7.
$(X, Y, Z, u, v, w),$	chap. I, 3.2.1.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \\
 w \swarrow & & \nwarrow v \\
 X & \xrightarrow{u} & Y
 \end{array} ,$$

$q(f)$	chap. I, 3.2.1.
$\Psi(f)$	chap. I, 3.2.2.
J	chap. I, 3.2.3.
H	chap. I, 3.2.5.
$\mathcal{F}\ell_n(\mathcal{J}), \mathbf{Fl}_n(\mathcal{J})$	chap. I, 3.2.7.
$S(f), \delta(f, g)$	chap. I, 3.3.6.
$H^n(X)$	chap. II, 1.1.5.
$((u)), X[[n]]$	chap. II, 1.1.7.
$\mathsf{H}^0(X)$	chap. II, 1.3.4.
$\mathsf{H}^n(X)$	chap. II, 1.3.5.
$\mathsf{H}^*(X)$	chap. II, 1.3.6.
$S(\mathcal{D}')$	chap. II, 2.1.7.
$S(F), \mathcal{D}'(F)$	chap. II, 2.1.16.
$S(H), \mathcal{D}'(H)$	chap. II, 2.1.17.
$S/X, X \setminus S$	chap. II, 2.2.1.
$\mathcal{C}(S^{-1}), Q$	chap. II, 2.2.1.
\hat{S}	chap. II, 2.2.4.
\mathcal{D}/\mathcal{B}	chap. II, 2.2.10.
$\mathcal{K}er(F)$	chap. II, 2.2.10.
$S_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}), Q^{-1}(\mathcal{C}), \widehat{\mathcal{B}}$	chap. II, 2.3.1.
$L_R(Q), Lib_R(Q)$	chap. II, 2.3.3.
$\mathbf{A}(\mathcal{D})$	chap. II, 3.1.1.
\mathcal{H}	chap. II, 3.1.2.
$\mathcal{F}\ell_1(F), \mathbf{A}(F), \mathbf{A}(m)$	chap. II, 3.1.4.
$\mathcal{E}x(\mathcal{D}, \mathcal{D}'), \mathbb{Z}\text{-Add}(\mathbf{A}(\mathcal{D}), \mathbf{A}(\mathcal{D}')), \mathbf{A}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$	chap. II, 3.2.0.
$\mathcal{E}x(\mathbf{A}(\mathcal{D}), \mathcal{A})$	chap. II, 3.2.1.
$Im, h, \mathcal{D}^\wedge$	chap. II, 3.2.2.
s_1, s_2, s_3, u_1, u_2	chap. II, 4.1.1.
$(X_f, f \in \mathbf{Ob} \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}), \delta(\omega_2), \omega_2 \in \mathbf{Ob} \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J})), (X_f, \delta)$	chap. II, 4.1.3.

$(H^n(f), f \in \mathbf{Ob} \mathcal{F}\ell_1(\mathcal{J}), \delta^n(\omega_2), \omega_2 \in \mathbf{Ob} \mathcal{F}\ell_2(\mathcal{J}))$, $(H^n(f), \delta)$ chap. II, 4.1.4.
$B \left[\begin{smallmatrix} n \\ \omega_2 \end{smallmatrix} \right], B \left[\begin{smallmatrix} n \\ f, g \end{smallmatrix} \right]$	chap. II, 4.2.1.
$Z \left[\begin{smallmatrix} n \\ \omega_2 \end{smallmatrix} \right], Z \left[\begin{smallmatrix} n \\ f, g \end{smallmatrix} \right]$	chap. II, 4.2.1.
$E \left[\begin{smallmatrix} n \\ \omega_3 \end{smallmatrix} \right], E \left[\begin{smallmatrix} n \\ f, g, h \end{smallmatrix} \right]$	chap. II, 4.2.3.
$\Psi^n(\omega_3), \Phi^n(\omega_3)$	chap. II, 4.2.3.
$d^n(\omega_5), d^n(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$	chap. II, 4.2.3.
$\tilde{\mathbb{Z}}$	chap. II, 4.3.1.
$F^p H^n(-\infty, +\infty)$	chap. II, 4.3.2.
$I_r^{p,q}, \Pi_r^{p,q}, d_r, E \left[\begin{smallmatrix} n \\ p, q, r, s \end{smallmatrix} \right]$	chap. II, 4.3.3.
$u(n), v(n)$	chap. II, 4.4.2.
$I_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(-\infty, +\infty)$	chap. II, 4.4.3.
$\Pi_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(-\infty, +\infty)$	chap. II, 4.4.3.
$\mathbf{comp}^b(\mathcal{A}), \mathbf{comp}^+(\mathcal{A}), \mathbf{comp}^-(\mathcal{A})$	chap. III, 1.1.1.
$K^b(\mathcal{A}), K^+(\mathcal{A}), K^-(\mathcal{A})$	chap. III, 1.1.1.
$\mathbf{comp}^{*,b}(\mathcal{A}), \mathbf{comp}^{*,+}(\mathcal{A}), \mathbf{comp}^{*,-}(\mathcal{A}), * \in \{b, +, -, \text{“vide”}\}$	chap. III, 1.1.2.
$K^{*,b}(\mathcal{A}), K^{*,+}(\mathcal{A}), K^{*,-}(\mathcal{A}), * \in \{b, +, -, \text{“vide”}\}$	chap. III, 1.1.2.
$\mathbf{Ac}^*(\mathcal{A}), \mathbf{Qis}^*(\mathcal{A}), \mathbf{Qis}^*$	chap. III, 1.1.3.
$\mathbf{comp}_{\mathcal{A}}^*(M), \mathbf{comp}^*(M)$	chap. III, 1.1.4.
$K_{\mathcal{A}}^*(M), K^*(M)$	chap. III, 1.1.4.
$X(n, +\infty), p : X \longrightarrow X(n, +\infty)$	chap. III, 1.2.1.
$X(-\infty, n), i : X(-\infty, n) \longrightarrow X$	chap. III, 1.2.1.
$D(\mathcal{A}), H : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}, Q : K(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$	chap. III, 1.2.2.
$D^b(\mathcal{A}), D^+(\mathcal{A}), D^-(\mathcal{A})$	chap. III, 1.2.4.
$\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$	chap. III, 1.2.5.
$D_M(\mathcal{A}), D_M^*(\mathcal{A})$	chap. III, 1.2.6.
$D(F)$	chap. III, 1.2.7.
ι	chap. III, 1.2.8.
$\mathcal{A}^{\mathbf{Ext}}$	chap. III, 1.2.11.
$[u], \delta(S)$	chap. III, 1.3.2.
$X(u, i), p(u, i)$	chap. III, 2.1.1.
M^\wedge	chap. III, 2.2.1.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

$M\text{-}\dim(X) \leq n$, $M\text{-}\dim(X)$	chap. III, 2.2.5.
$\dimcoh(\mathcal{A})$	chap. III, 3.1.1.
$E_{\mathcal{A}}^n(X, Y)$, $u(S^n(X, Y))$, $v(S^n(X, Y))$, $\delta_{\mathcal{A}}^n$, δ^n	chap. III, 3.2.1.
$S_{\epsilon}^n(X, Y)$	chap. III, 3.2.3.
$S^m(X', X'') * S^n(X, X')$	chap. III, 3.2.4.
$S^n(X, Y) * f$, $g * S^n(X, Y)$	chap. III, 3.2.8.
F^n , $\delta_F^n(S^1)$	chap. III, 3.3.2.
$\mathcal{SFL}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, $\Phi : \mathcal{H}om(\mathcal{A}^{\mathbf{Ext}}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{SFL}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$	chap. III, 3.3.4.
$\mathsf{Fl}_{\leq n}(\mathcal{A}^{\mathbf{Ext}})$	chap. III, 3.3.4.
$\mathcal{Y}(p, q)$, $\Phi((p, q), (p', q'))$, $\delta(p, q, r)$, $\mathcal{M}(p, q)$	chap. III, 4.1.1.
$Y(q)$, $Y(p, q)$, $\varphi((p, q), (p', q'))$, $J(p, q)$	chap. III, 4.1.2.
$\mathsf{Spec}_1(Y)$	chap. III, 4.1.4 et 4.1.5.
${}^mX(p, q)$, $f((p, q), (p', q'))$, $g(p, q, r)$	chap. III, 4.1.6.
${}^mY(p, q)$, ${}^mY(q)$, $h((p, q), (p', q'))$, ${}^md(p, q, r)$	chap. III, 4.1.6.
$(\mathcal{Y}(p, q), \delta(p, q, r))$	chap. III, 4.1.6.
$X^{q,\bullet}$, $X^{\bullet,q}$, $d_1^{q,\bullet}$, $d_2^{\bullet,q}$	chap. III, 4.1.9.
$(\mathcal{X}(p, q), \delta(p, q, r))$	chap. III, 4.2.1.
$X(p, q)$, $\varphi((p, q), (p', q'))$, $J(p, q)$	chap. III, 4.2.2.
$\mathsf{H}^*(I^\bullet)$	chap. III, 4.6.3.
$\mathsf{B}_1^p(X^{\bullet\bullet})$, $\mathsf{Z}_1^p(X^{\bullet\bullet})$, $\mathsf{H}_1^p(X^{\bullet\bullet})$	chap. III, 4.6.4.

Index terminologique.

- Aboutissement d'une suite spectrale. Chap. II, 4.4.3.
- Automorphisme de translation. Chap. II, 1.1.2.
- β -morphisme de G -foncteurs tordus. Chap. I, 1.4.6.
- Catégorie décomposable. Chap. II, 1.2.8.
- Catégorie dérivée d'une catégorie abélienne. Chap. III, 1.2.2.
- Catégorie des complexes de \mathcal{C} à homotopie près. Chap. I, 2.5.7.
- Catégorie des complexes n -uples φ -sommables. Chap. I, 2.1.7.
- Catégorie graduée additive. Chap. I, 1.1.3.
- Catégorie graduée de type G . Chap. I, 1.1.1.
- Catégorie localisée par rapport à un système multiplicatif. Chap. II, 2.2.5.
- Catégorie opposée à une G -catégorie. Chap. I, 1.3.9.
- Catégorie pré-triangulée. Chap. II, 2.2.12.
- Catégorie quotient d'une catégorie triangulée par une sous-catégorie triangulée. Chap. II, 2.2.10.
- Catégorie triangulée. Chap. II, 1.1.1.
- Catégorie triangulée opposée. Chap. II, 1.1.7.
- Classe de f modulo homotopie. Chap. I, 2.5.7.
- Classe de Koszul relative à une base. Chap. I, 1.6.3.
- Cocycle de Koszul relatif à une base ordonnée. Chap. I, 1.6.4.
- Complexe acyclique. Chap. III, 1.1.3.

- Complexe de type M . Chap. III, 1.1.4.
- Complexe de type injectif (resp. projectif). Chap. III, 1.1.5.
- Complexe d'une catégorie additive. Chap. I, 2.1.5.
- Complexe injectif de Cartan-Eilenberg. Chap. III, 4.6.1.
- Complexe n -uple d'objets d'une catégorie additive. Chap. I, 2.1.2.
- Complexe n -uple d'une catégorie additive. Chap. I, 2.1.3.
- Complexe n -uple φ -sommable. Chap. I, 2.1.7.
- Complexe n -uple sommable. Chap. I, 2.1.7.
- Complexe simple associé à un complexe n -uple. Chap. I, 2.2.4.
- Complexe simple d'une catégorie additive. Chap. I, 2.1.5.
- Complexes homotopes. Chap. I, 2.5.11.
- Composant de degré σ d'un complexe n -uple. Chap. I, 2.1.3.
- Composant de degré σ d'un morphisme de complexes n -uples. Chap. I, 2.1.5.
- Composition de β -morphismes de G -foncteurs tordus. Chap. I, 1.4.7.
- Cône d'un morphisme de complexes. Chap. I, 3.1.2.
- δ -foncteur. Chap. III, 1.3.1.
- δ -foncteur canonique. Chap. III, 1.3.2.
- Décomposition d'un morphisme. Chap. II, 1.2.8.
- Degré d'un morphisme. Chap. I, 1.1.1.
- Deuxième filtration canonique d'un complexe. Chap. III, 4.3.1.
- Deuxième objet spectral à valeurs dans $D(\mathcal{A})$ associé à un complexe. Chap. III, 4.3.1.
- Deuxième objet spectral canonique. Chap. III, 4.3.1, 4.3.4.
- Deuxième suite spectrale d'un foncteur relative à un complexe. Chap. III, 4.4.5.
- Diagramme ε -commutatif. Chap. I, 1.4.3.
- Différentielle de degré σ dans la direction i d'un complexe n -uple. Chap. I, 2.1.3.
- Différentielles relatives à un objet spectral. Chap. II, 4.2.5.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

- Dimension cohomologique d'une catégorie abélienne. Chap. III, 3.1.1.
- Extension d'un foncteur aux catégories de complexes. Chap. I, 2.4.2.
- Famille spectrale associée à un objet spectral. Chap. II, 4.2.5.
- Filtration définie par le m -ième degré. Chap. III, 4.1.6.
- Foncteur antiexact. Chap. II, 1.1.6.
- Foncteur cohomologique. Chap. II, 1.1.5.
- Foncteur cohomologique canonique. Chap. II, 1.3.5, Chap III, 1.2.2.
- Foncteur composé de deux G -foncteurs. Chap. I, 1.2.6.
- Foncteur cône. Chap. I, 3.1.2.
- Foncteur de changement de groupes. Chap. I, 1.4.1.
- Foncteur de localisation. Chap. II, 2.2.5.
- Foncteur de passage au quotient. Chap. II, 2.2.10.
- Foncteur de translation dans la direction i . Chap. I, 2.3.1.
- Foncteur degré. Chap. I, 1.1.1.
- Foncteur exact. Chap. II, 1.1.3.
- Foncteur exact (resp. cohomologique) stationnaire (resp. stationnaire à gauche, resp. stationnaire à droite). Chap. III, 4.5.1.
- Foncteur gradué. Chap. I, 1.1.1.
- Foncteur gradué additif. Chap. I, 1.1.3.
- Foncteur gradué tordu opposé à un G -foncteur tordu. Chap. I, 1.4.8.
- Foncteur multi-exact. Chap. II, 1.1.4.
- G -catégorie. Chap. I, 1.2.2.
- G -catégorie additive. Chap. I, 1.2.8.
- G -catégorie stricte. Chap. I, 1.2.2.
- G -foncteur. Chap. I, 1.2.4.
- G -foncteur strict. Chap. I, 1.2.4.
- G -foncteur tordu par un cocycle. Chap. I, 1.4.4.
- Homotopie du deuxième ordre reliant deux homotopies. Chap. I, 2.5.12.

- Homotopie reliant deux morphismes de complexes n -uples. Chap. I, 2.5.1.
- Homotopie reliant deux morphismes de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. Chap. I, 3.1.4.
- Homotopisme. Chap. I, 2.5.11.
- Isomorphismes de transition. Chap. I, 1.2.2.
- M -dimension d'un objet. Chap. III, 2.2.5.
- Morphisme de complexes n -uples. Chap. I, 2.1.4.
- Morphisme de degré g d'une G -catégorie. Chap. I, 1.3.8.
- Morphisme de foncteurs gradués, compatible avec la graduation. Chap. I, 1.1.1.
- Morphisme de G -foncteurs, compatible avec les opérations de G . Chap. I, 1.2.8.
- Morphisme de liaison associé à une suite exacte. Chap. III, 1.3.2.
- Morphisme de suites de foncteurs liés. Chap. III, 3.3.3.
- Morphisme de triangles. Chap. I, 3.2.1.
- Morphisme décomposable. Chap. II, 1.2.8.
- Morphisme d'objets spectraux. Chap. II, 4.1.6.
- Morphisme élémentaire de hauteur donnée. Chap. III, 2.1.3.
- Morphisme fini de $\tilde{\mathbb{Z}}$. Chap. II, 4.3.1.
- Morphisme négligeable de $\mathcal{F}\ell_1(\mathcal{D})$. Chap. II, 3.1.1.
- Morphisme scindable. Chap. II, 1.2.8.
- Morphismes homotopes de complexes n -uples. Chap. I, 2.5.5.
- Morphismes homotopes de $\text{tr}_1(\mathcal{C})$. Chap. I, 3.1.4.
- Noyau d'un foncteur exact ou cohomologique. Chap. II, 2.2.10.
- Objet admissible de \mathcal{D}^\wedge . Chap. II, 3.2.2.
- Objet de M -dimension inférieure ou égale à n . Chap. III, 2.2.5.
- Objet F -libérable à droite (ou à gauche). Chap. II, 2.3.2.
- Objet F -libre à droite (ou à gauche). Chap. II, 2.3.2.
- Objet F -libre à droite (ou à gauche) sur un autre. Chap. II, 2.3.2.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

Objet fini de $\mathcal{F}\ell_n(\tilde{\mathbb{Z}})$. Chap. II, 4.3.1.

Objet sommable de $\mathbf{comp}^n(\mathcal{C})$. Chap. I, 2.1.7.

Objet sommable de $\prod_{i \in [n]} \mathbf{comp}(\mathcal{C}_i)$. Chap. I, 2.4.2.

Objet spectral. Chap. II, 4.3.2.

Objet spectral à valeurs dans $D(\mathcal{A})$ défini par un complexe filtré par son m -ième degré. Chap. III, 4.1.8.

Objet spectral à valeurs dans $K(\mathcal{A})$ défini par un complexe filtré par son m -ième degré. Chap. III, 4.1.7.

Objet spectral associé à un foncteur à valeurs dans la catégorie des complexes d'une catégorie additive. Chap. II, 4.1.3.

Objet spectral de Cartan-Eilenberg. Chap. III, 4.6.7.

Objet spectral de type \mathcal{J} à valeurs dans une catégorie abélienne. Chap. II, 4.1.4.

Objet spectral de type \mathcal{J} à valeurs dans une catégorie triangulée. Chap. II, 4.1.2.

Objet spectral stationnaire. Chap. II, 4.4.2.

Opération canonique du groupe des signes sur un foncteur à valeurs dans une catégorie additive. Chap. I, 1.4.3.

Π -extension du foncteur \int_φ . Chap. I, 2.2.3.

Π -extension d'un foncteur aux complexes à homotopie près. Chap. I, 2.5.10.

Π -extension d'un foncteur multiadditif. Chap. I, 2.4.2.

Π -extension d'un morphisme de foncteurs aux complexes à homotopie près. Chap. I, 2.5.10.

Premier objet spectral à valeurs dans $D(\mathcal{A})$ associé à un complexe. Chap. III, 4.1.5.

Premier objet spectral à valeurs dans $K(\mathcal{A})$ associé à un complexe. Chap. III, 4.1.4.

Premier objet spectral associé à un complexe. Chap. III, 4.1.5.

Premier objet spectral canonique à valeurs dans $D(\mathcal{A})$. Chap. III, 4.1.5.

Premier objet spectral canonique à valeurs dans $K(\mathcal{A})$. Chap. III, 4.1.4.

Première filtration canonique d'un complexe. Chap. III, 4.1.2.

Première suite spectrale d'un foncteur relative à un complexe. Chap. III, 4.4.1, 4.4.4.

Produit d'une G -catégorie par une G' -catégorie. Chap. I, 1.3.11.

Quasi-isomorphisme. Chap. III, 1.1.3.

Règle des signes. Chap. I, 1.6.6.

Résolution à droite (resp. à gauche) de type M . Chap. III, 1.1.4.

Résolution injective de Cartan-Eilenberg. Chap. III, 4.6.5.

Résolution injective de Cartan-Eilenberg de longueur finie. Chap. III, 4.6.5.

Σ -extension du foncteur \int_φ . Chap. I, 2.2.3.

Σ -extension d'un foncteur aux complexes à homotopie près. Chap. I, 2.5.10.

Σ -extension d'un foncteur multiadditif. Chap. I, 2.4.2.

Σ -extension d'un morphisme de foncteurs aux complexes à homotopie près. Chap. I, 2.5.10.

Saturé d'un système multiplicatif. Chap. II, 2.2.5.

Scindage d'un morphisme. Chap. II, 1.2.8.

Somme de deux homotopies. Chap. I, 2.5.4.

Sous-catégorie \mathcal{B} -localisante à droite (ou à gauche). Chap. II, 2.3.5.

Sous-catégorie des objets bornés (resp. bornés inférieurement, resp. bornés supérieurement) de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne. Chap. III, 1.2.4.

Sous-catégorie triangulée. Chap. II, 2.1.5.

Sous-catégorie triangulée saturée. Chap. II, 2.1.6.

Suite de foncteurs liés. Chap. III, 3.3.3.

Suite spectrale associée à un objet spectral. Chap. II, 4.3.3.

Suite spectrale convergente. Chap. II, 4.4.3.

Suite spectrale de Cartan-Eilenberg. Chap. III, 4.6.9.

Suite spectrale stationnaire. Chap. II, 4.4.3.

Système multiplicatif associé à une sous-catégorie triangulée. Chap. II, 2.1.15.

CATÉGORIES DÉRIVÉES

- Système multiplicatif compatible avec la triangulation. Chap. II, 2.1.2.
- Système multiplicatif de morphismes. Chap. II, 2.1.1, 2.1.4.
- Système multiplicatif saturé. Chap. II, 2.1.1.
- Triangle antidistingué. Chap. II, 1.1.6.
- Triangle dans une \mathbb{Z} -catégorie. Chap. I, 3.2.1.
- Triangle distingué. Chap. II, 1.1.1.
- Triangle distingué de $K(\mathcal{C})$. Chap. I, 3.3.1.
- \mathbb{Z} -catégorie (resp. $\mathbb{Z}[n]$ -catégorie). Chap. I, 1.2.2.
- \mathbb{Z} -catégorie (resp. $\mathbb{Z}[n]$ -catégorie) stricte. Chap. I, 1.2.2.
- \mathbb{Z} -foncteur, $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur (resp. strict). Chap. I, 1.2.4.
- $\mathbb{Z}[n]$ -foncteur tordu. Chap. I, 1.4.4. et chap. I, 1.6.6.
- Zéro-ième objet de cohomologie. Chap. II, 1.3.4.
- ∞ - M -présentation d'un objet d'une catégorie abélienne. Chap. III, 2.2.1.

Bibliographie.

- [1] H. Cartan et S. Eilenberg, “Homological Algebra”, Princeton University Press (1956).
- [2] D. Puppe, *On the formal structure of stable homotopy theory*, Colloquium on Algebraic Topology, Aarhus Universitet, pp. 65-71 (1962).
- [3] N. Yoneda, *On Ext and exact sequences*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. I, Vol. VIII, pp. 507-576 (1960).
- [4] R. Harsthorne, “Residues and Duality”, Lecture Notes in Mathematics n° 20, Springer-Verlag (1966).
- [5] J.-L. Verdier, *A Duality Theorem in the Étale Cohomology of Schemes*, Lecture Notes of the Woods Hole Conference, American Mathematical Society (1964).
- [6] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, “Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas” (S.G.A. 4), Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (1963-1964), Lecture Notes in Mathematics n° 269, Springer-Verlag (1972).
- [7] J.-P. Serre, “Cohomologie Galoisienne”, Lecture Notes in Mathematics n° 5, Springer-Verlag (1964).
- [8] M. Artin et J.-L. Verdier, “Seminar on Étale Cohomology of Number Fields”, Lecture Notes of the Woods Hole Conference, American Mathematical Society (1964).
- [9] J.-L. Verdier, *Dualité dans la Cohomologie des Espaces Localement Compacts*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 300 (1965-1966).
- [10] J.-L. Verdier et M. Zisman, *Dualité de Poincaré*, Séminaire Heidelberg-Strasbourg (1966-1967), Publ. I.R.M.A. Strasbourg n° 3 (1969).

- [11] A. Grothendieck, *Formule de Lefschetz et Rationalité des Fonctions L*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 279 (1964-1965).
- [12] J.-L. Verdier, *The Lefschetz Fixed Point Formula in Etale Cohomology*, Proceedings of a Conference on Local Fields, Nuffic Summer School held at Driebergen in 1966, pp. 199-214, T. A. Springer Ed., Springer-Verlag (1967).
- [13]
- [14] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, “Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch” (S.G.A. 6), Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (1966-1967), Lecture Notes in Mathematics n° 225, Springer-Verlag (1971).
- [15] R. L. Knighten, “Derived Functors”, Thèse M.I.T. (1966).
- [16] P. Gabriel et M. Zisman, “Calculus of Fractions and Homotopy Theory”, Ergebnisse der Mathematik, Band 35, Springer-Verlag (1967).
- [17] P. Freyd, *Representation in Abelian Categories*, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965, pp. 95-120, S. Eilenberg, D. K. Harrison, S. MacLane, H. Röhrl Eds., Springer-Verlag (1966).
- [18] A. Grothendieck, *Catégories Fibrées et Descente*, “Revêtements Étales et Groupe Fondamental” (S.G.A. 1) Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (1960-1961), exposé n° VI, pp. 145-194, Lecture Notes in Mathematics n° 224, Springer-Verlag (1971) .
- [19] J. Giraud, *Méthode de la descente*, Bull. Soc. Math. de France, Mémoire n° 2 (1964)
- [20] P. Gabriel, *Des Catégories Abéliennes*, Bull. Soc. Math. de France, Tome 90, pp. 323-448 (1962).
- [21] P. Freyd, *Splitting Homotopy Idempotents*, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965, pp. 173-176, S. Eilenberg, D. K. Harrison, S. MacLane, H. Röhrl Eds., Springer-Verlag (1966).
- [22] L. Gruson, *Complétion Abélienne*, Bull. Sciences Math., Tome 90, pp. 17-40 (1966).
- [23] R. Godement, “Théorie des faisceaux”, Actualités scientifiques et industrielles 1252, Hermann (1958).
- [24] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J., vol. 9, pp. 119-221 (1957).

Table des matières.

Introduction	1
Remerciements	15
Chapitre I : Les catégories de complexes des catégories additives.	
1. Catégories graduées.	
1.1. Catégories graduées de type G	17
1.2. Opération à isomorphisme près d'un groupe sur une catégorie	19
1.3. Équivalence de deux langages	22
1.4. Changement de groupes	27
1.5. \mathbb{Z}^n -catégories	34
1.6. Cocycle de Koszul. Règle des signes	43
2. Complexes d'une catégorie additive.	
2.1. Complexes n -uples	49
2.2. Complexe simple associé	50
2.3. Structure graduée sur les catégories de complexes	54
2.4. Extension des foncteurs aux complexes	56
2.5. Homotopies	60
3. Triangles distingués.	
3.1. Le cône d'un morphisme	65
3.2. Propriétés du foncteur cône	69
3.3. Propriétés des triangles distingués	78
3.4. Propriétés fonctorielles des triangles distingués	84
Appendice : Commentaire sur le choix des signes	

Chapitre II : Catégories triangulées.

1. Définitions et premières propriétés.	
1.1. Définition des catégories triangulées	93
1.2. Premières propriétés des catégories triangulées	97
1.3. Exemples de catégories triangulées	106
2. Localisation dans les catégories triangulées.	
2.1. Systèmes multiplicatifs de morphismes	111
2.2. Construction de la catégorie localisée	117
2.3. Propriétés du foncteur de localisation	125
3. Abélianisation des catégories triangulées.	
3.1. Construction de la catégorie $A(\mathcal{D})$	135
3.2. Propriétés de la catégorie $A(\mathcal{D})$	137
4. Objets spectraux.	
4.1. Définition des objets spectraux	145
4.2. Mécanisme des suites spectrales	147
4.3. Les termes $E \begin{bmatrix} n \\ -\infty, p, q, +\infty \end{bmatrix}$	153
4.4. Convergence	155

Chapitre III : Les catégories dérivées.

1. Définition des catégories dérivées.	
1.1. Notations et terminologie	157
1.2. Les sous-catégories remarquables des catégories dérivées	159
1.3. Le δ -foncteur canonique	164
2. Résolutions.	
2.1. Morphismes élémentaires	169
2.2. Étude de certains ensembles d'objets	173
2.3. Quelques lemmes sur les résolutions	177
2.4. Applications	185
3. Étude des Ext .	
3.1. Différentes définitions équivalentes	191

CATÉGORIES DÉRIVÉES

3.2. La construction de Yoneda	193
3.3. La catégorie \mathcal{A}^{Ext}	200
4. Objets spectraux usuels.	
4.1. Premier objet spectral canonique	207
4.2. Objet spectral à valeurs dans $D(\mathcal{A})$ associé à un objet filtré de $\mathbf{comp}(\mathcal{A})$	217
4.3. Deuxième objet spectral canonique	219
4.4. Suites spectrales usuelles	221
4.5. Problèmes de convergence	223
4.6. Objet spectral de Cartan-Eilenberg	227
Index des notations	235
Index terminologique	241
Bibliographie	249
Table des matières	251