M. PRATELLI

Quelques résultats de calcul stochastique et leur application aux marchés financiers

Astérisque, tome 236 (1996), p. 277-289
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__277_0>

Quelques résultats de calcul stochastique et leur application aux marchés financiers.

M. Pratelli

Résumé. — Nous donnons quelques résultats d'intégration stochastique et de théorie générale des processus, qui peuvent être appliqués dans l'étude des modèles stochastiques pour les marchés financiers.

Un article de P.– A. Meyer ([Me1]), qui remonte à il y a vingt ans, débute par cette phrase: «Aux gens qui disent que les probabilités sont une branche des mathématiques appliquées, nous répondons depuis des années que les probabilités que *nous* faisons, au moins, ne peuvent servir à rien. Il faut se détromper: la solution de certains problèmes posés par les ingénieurs exige maintenant une partie de l'arsenal de la "théorie générale des processus".»

La théorie de l'intégration stochastique (que j'eus la chance d'apprendre de bonne source en suivant, en 1975, le cours de M. Meyer qui devait donner lieu à [Me2]) s'est avérée très efficace dans plusieurs applications. La plus récente, et peut-être la plus frappante, de ces applications est celle qui concerne la construction de modèles pour les marchés financiers. Des problèmes tels que l'existence d'une "probabilité martingale équivalente" (voir [St],[De],[DS]) ou la recherche de stratégies de couverture des options qui minimisent le risque (voir [FS],[Sc]) ne peuvent être abordés avec le seul support de la théorie d'Itô: ils exigent en effet tout l'arsenal des résultats de "l'Ecole de Strasbourg".

Cette note a été inspirée par la lecture de l'article [AH], dans lequel les auteurs considèrent un marché financier avec un ensemble dénombrable d'actifs: après avoir introduit la notion de "marché approximativement complet", ils donnent un exemple d'un marché qui satisfait à cette condition et dans lequel l'unicité de la "probabilité martingale équivalente" n'a pas lieu.

Dans le premier paragraphe de cette note on étend aux espaces $\mathcal{H}^p$ de martingales locales la théorie de l'intégrale stochastique vectorielle isométrique (exposée, pour le cas $p = 2$, dans le livre [Mt]). Cette extension est utilisée dans le paragraphe suivant pour obtenir une formule de représentation de certains sous–espaces stables de $\mathcal{H}^p$

(qui étend au cas de dimension infinie des résultats du chapitre 4 du livre de Jacod [Ja]).

Les notions ainsi introduites permettent de donner une formule de représentation pour la notion de "marché approximativement complet" introduite par Artzner et Heath.

Dans le troisième paragraphe on prouve que l'extrémalité de la probabilité martingale est réduite à l'unicité de la probabilité martingale équivalente dans le cas où l'on remplace la notion de martingale per celle de "martingale stricte". Cette dernière notion semble être suffisamment large pour couvrir les principales applications aux marchés financiers.

Enfin, dans le quatrième paragraphe on indique comment les résultats précédents peuvent être appliqués aux marchés financiers.

Je profite de cette occasion pour évoquer un ami disparu, Michel Métivier, et un colloque que j'avais eu avec lui à Pise, dans un bureau de la Scuola Normale Superiore. Je lui avais exposé le contenu des deux premiers paragraphes de cette note, et il m'avait encouragé à le publier. Si je ne le fais qu'aujourd'hui, c'est parce que j'en cherchais des applications.

0. Notations

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t<\infty}$ satisfaisant aux conditions habituelles.

A tout processus croissant A (adapté et continu à droite), on associe la mesure μ_A, sur $]0,\infty[\times\Omega$, définie par

$$\mu_A(B) = \mathbf{E}\left[\int_{]0,\infty[} I_B(s,\omega)\, dA_s(\omega)\right].$$

Etant donnés deux espaces de Hilbert séparables $\mathbb{H}, \mathbb{G}$ (dont les normes seront indiquées par $|\cdot|_{\mathbb{H}}$ et par $|\cdot|_{\mathbb{G}}$ respectivement), on considère l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})$ des opérateurs linéaires continus de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$ (avec la norme $\|\cdot\|$), ainsi que le sous-espace $\mathcal{L}_1(\mathbb{H},\mathbb{G})$ des opérateurs nucléaires (avec la norme $\|\cdot\|_1$) et le sous-espace $\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{G})$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt (avec la norme $\|\cdot\|_2$).

Dans les deux premiers paragraphes, le lecteur est supposé être familier avec les notions et les notations introduites dans le livre de Métivier ([Mt]). On trouvera notamment dans ce livre, pour une martingale locale M à valeurs dans $\mathbb{H}$, la définition du processus croissant $[M]_t$, ainsi que celle du processus $[\![M]\!]_t$ à valeurs dans l'ensemble des éléments symétriques positifs de $\mathcal{L}_1(\mathbb{H},\mathbb{H})$.

Dans le troisième paragraphe, qui est indépendant des deux premiers, et où l'on considère des processus à valeurs réelles, les notations sont plutôt celles du livre de Jacod ([Ja]).

1. Utilisation des espaces $\mathcal{H}^p$ dans l'intégration stochastique vectorielle.

On désigne par $\mathcal{H}^p(\mathbb{H})$ (pour $1 \le p \le \infty$) l'espace des martingales locales M, à valeurs dans $\mathbb{H}$, telles que la variable aléatoire

$$M^* = \sup_{0 \le t < \infty} |M_t|_{\mathbf{H}}$$

appartienne à L^p. Il s'agit d'un espace de Banach (avec la norme évidente). On le désignera simplement par $\mathcal{H}^p$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. La célèbre inégalité de Burkholder–Davis–Gundy affirme l'existence, pour $1 \le p < \infty$, de deux constantes c_p, C_p telles que l'on ait

$$c_p \, \|M^*\|_{L^p} \le \left\| [M]_\infty^{1/2} \right\|_{L^p} \le C_p \, \|M^*\|_{L^p} \, .$$

(Pour une démonstration synthétique, voir le chap. 11 de [MP].)

Proposition 1.1 *Pour toute martingale locale M, il existe un processus R_M fortement optionnel, à valeurs dans l'ensemble des éléments symétriques positifs de $\mathcal{L}_1(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, avec $\|R_M\|_1 = 1$ et tel que l'on ait*

$$[\![M]\!]_t = \int_{[0,t]} R_M(s) \, d[M]_s.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la décomposition $M = M^c + M^d$, où M^c désigne la partie martingale continue. Le théorème 21.6 de [Mt] assure l'existence d'un processus Q_M fortement optionnel, à valeurs dans l'ensemble des éléments symétriques positifs de $\mathcal{L}_1(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, avec $\|Q_M\|_1 = 1$ et tel que l'on ait

$$\langle\!\langle M^c \rangle\!\rangle_t = \int_{[0,t]} Q_M(s) \, d\langle M^c \rangle_s.$$

Posons

$$B = \{(s, \omega) : \; \Delta M_s(\omega) \neq 0\},$$

et désignons par R_M le processus qui coïncide avec $\Delta M_s^{\otimes 2} / |\Delta M_s|_{\mathbf{H}}^2$ sur B, et avec Q_M sur B^c. Puisque B est négligeable pour la mesure associée à $\langle M^c \rangle$, on a

$$\langle\!\langle M^c \rangle\!\rangle_t = \int_{[0,t]} Q_M \, I_{B^c} \, d\langle M^c \rangle = \int_{[0,t]} R_M \, I_{B^c} \, d[M].$$

On a en outre

$$[\![M^d]\!]_t = \sum_{s \le t} \Delta M_s^{\otimes 2} = \int_{[0,t]} R_M \, I_B \, d[M].$$

La relation

$$[\![M]\!] = \langle\!\langle M^c \rangle\!\rangle + [\![M^d]\!]$$

montre alors que le processus R_M possède les propriétés désirées.

Considérons maintenant l'espace $\mathcal{E}\big(\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})\big)$ constitué par les processus prévisibles élémentaires à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})$, c'est-à -dire par les processus de la forme

$$X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, I_{]s_i,t_i]\times F_i}(t,\omega),$$

où les a_i sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})$ et où les rectangles $]s_i,t_i] \times F_i$ sont deux à deux disjoints, avec $F_i \in \mathcal{F}_{s_i}$ pour tout i.

Lemme 1.2 *Etant donnés un élément X de $\mathcal{E}\big(\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{G})\big)$ et une martingale M, posons $N_t = \int_{[0,t]} X\, dM$. On a alors*

$$[\![N]\!]_t = \int_{[0,t]} (X \circ R_M \circ X^*)\, d[M].$$

DÉMONSTRATION. Rappelons que l'on a

$$N^c = \int X\, dM^c, \qquad N^d = \int X\, dM^d.$$

La formule à démontrer est déjà connue pour la partie martingale continue. Pour l'autre partie, elle découle de la relation suivante:

$$\sum_{s\le t} \Delta N_s^{\otimes 2} = \sum_{s\le t} (X_s \circ \Delta M_s)^{\otimes 2} = \sum_{s\le t} X_s \circ \Delta M_s^{\otimes 2} \circ X_s^*.$$

On remarquera que la formule du Lemme précédent entraîne notamment

$$\begin{aligned}[N]_t = \ \operatorname{trace}\big([\![N]\!]_t\big) &= \int_{[0,t]} \operatorname{trace}\,(X \circ R_M \circ X^*)\, d[M] \\ &= \int_{[0,t]} \left\| X \circ R_M^{1/2} \right\|_2^2 d[M].\end{aligned}$$

Lemme 1.3 *Soient A un processus croissant et (K_n) une suite de processus optionnels. Pour un exposant p, avec $1 \le p < \infty$, on suppose que l'on ait*

$$\lim_n \mathbf{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[} K_n^2\, dA\right)^{p/2}\right] = 0.$$

On peut alors extraire de (K_n) une sous–suite qui converge μ_A–p.s. vers zéro.

DÉMONSTRATION. On peut se restreindre au cas $p = 1$ et montrer que la relation

$$\sum_n \mathbf{E}\left[\left(\int K_n^2\, dA\right)^{1/2}\right] < \infty$$

entraîne $\sum_n K_n^2(s,\omega) < \infty$ μ_A–p.s.. A cet effet, posons

$$B_n = \left\{\omega : \left(\int_{[0,\infty[} K_n^2(s,\omega)\, dA_s(\omega)\right) \leq 1\right\}.$$

On a alors

$$\sum_n \mathbf{E}\left[I_{B_n} \int K_n^2\, dA\right] \leq \sum_n \mathbf{E}\left[I_{B_n} \left(\int K_n^2\, dA\right)^{1/2}\right] < \infty,$$

et donc $\sum_n I_{B_n}(\omega)\, K_n^2(s,\omega) < \infty$ μ_A–p.s..
En outre, la relation $\sum_n P(B_n^c) < \infty$ montre que l'ensemble $\limsup_n B_n^c$ est négligeable, de sorte que l'on a $\sum_n I_{B_n^c}(\omega)\, K_n^2(s,\omega) < \infty$ μ_A–p.s..

Le lemme est donc démontré.

Soit maintenant M un élément de $\mathcal{H}^p(\mathbb{H})$ (avec $1 \leq p < \infty$). Nous désignerons par $L^{*,p}(\mathbb{H},\mathbb{G};M)$ l'espace constitué par les processus X, à valeurs dans l'espace des applications linéaires (non nécessairement bornées) de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{G}$, pour lesquels les conditions suivantes sont remplies:

(a) Le domaine de $X(s,\omega)$ contient l'image de $R_M^{1/2}(s,\omega)$.

(b) Pour tout élément h de $\mathbb{H}$, le processus $X \circ R_M^{1/2}(h)$ est optionnel.

(c) Le processus $X \circ R_M^{1/2}$ est à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{G})$ des opérateurs de Hilbert–Schmidt, et l'on a

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[} \left\|X \circ R_M^{1/2}\right\|_2^2 d[M]\right)^{p/2}\right]^{1/p} < \infty.$$

Proposition 1.4 *L'espace $L^{*,p}$, muni de la norme évidente, est un espace de Banach.*

DÉMONSTRATION. L'espace $\mathcal{L}_2(\mathbb{H},\mathbb{G})$ étant séparable, le processus $X \circ R_M^{1/2}$ est fortement optionnel. Etant donnée une suite de Cauchy (X_n) dans l'espace $L^{*,p}$, le Lemme 1.3 permet de construire une sous–suite (X_{n_k}) et un processus Y fortement optionnel, de telle manière que la suite

$$\left(\left\|X_{n_k} \circ R_M^{1/2} - Y\right\|_2\right)$$

converge $\mu_{[M]}$–p.s. vers 0. Puisque le processus Y s'annule sur le noyau de $R_M^{1/2}$, il est de la forme $Y = X \circ R_M^{1/2}$. On voit alors que X est la limite cherchée.

Définition 1.5 *On désigne par $\Lambda^p(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M)$ la fermeture de $\mathcal{E}(\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{G}))$ dans l'espace $L^{*,p}(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M)$. Le prolongement à Λ^p de l'intégrale stochastique des processus prévisibles élémentaires est une isométrie de Λ^p sur un sous–espace fermé de $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$, désigné par $\mathcal{L}^p(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M)$. Cette isométrie définit l'intégrale stochastique pour les éléments de Λ^p.*

Il n'est pas facile de caractériser les éléments de Λ^p. On a toutefois le résultat suivant (qui coïncide, dans le cas où $p = 2$, avec le théorème 22.4 de [Mt]):

Théorème 1.6 *Pour qu'un processus X, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{G})$, appartienne à Λ^p, il suffit qu'il possède les deux propriétés suivantes:*

(a) Pour tout élément h de $\mathbb{H}$, le processus $X(h)$ est prévisible.

(b) On a

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_{[0,\infty[} \left\| X \circ R_M^{1/2} \right\|_2^2 \, d[M]\right)^{p/2}\right] < \infty.$$

DÉMONSTRATION. Pour prouver que le processus $\|X\|$ est prévisible, on remarquera que l'on a

$$\|X(s,\omega)\| = \sup_n |X(s,\omega)\, h_n|_{\mathbb{G}},$$

où (h_n) désigne une suite partout dense dans la boule unité de $\mathbb{H}$.

On remarquera ensuite que, X étant limite dans $L^{*,p}$ de la suite $X\, I_{\{\|X\| \le n\}}$, on peut se restreindre au cas où $\|X(s,\omega)\|$ est uniformément borné par une constante k.

Si l'image de X est de dimension finie, X est fortement prévisible (car $\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R}^n)$ est séparable) et donc limite p.s. de processus élémentaires.

Choisissons maintenant, dans les espaces $\mathbb{H}, \mathbb{G}$, deux bases orthonormales (h_n) et (g_n). Désignons par π^n la projection orthogonale de $\mathbb{G}$ sur le sous–espace engendré par $(g_1, \ldots, g_n)$, et posons $X_n = \pi^n \circ X$. On voit alors facilement que X est limite dans $L^{*,p}$ de la suite (X_n). Il suffit, pour cela, de tenir compte des relations suivantes:

$$\left\|(X_n - X) \circ R_M^{1/2}\right\|_2 \le 2k \left\|R_M^{1/2}\right\|_2,$$

$$\lim_n \sum_i \left|(X_n - X) \circ R_M^{1/2}(h_i)\right|_{\mathbb{G}}^2 = 0.$$

L'exemple 22.5 de [Mt] concerne un processus appartenant à Λ^2, qui admet comme valeurs des opérateurs non bornés (et qui ne vérifie donc pas les hypothèses du

Théorème 1.6). On peut modifier cet exemple en remplaçant l'exposant 2 par un exposant p quelconque (avec $1 \leq p < \infty$).

Remarquons enfin que le procédé habituel de localisation permet d'étendre la définition de l'intégrale $\int X\, dM$ au cas où M est une martingale locale, et X est localement dans $\Lambda^1(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M)$.

2. Représentation de sous–espaces stables de martingales

Le but de ce paragraphe est d'étendre au cas $p \neq 2$ la formule de représentation des sous–espaces stables de martingales vectorielles établie par Ouvrard ([Ou]). Même dans le cas $p = 2$, il est bien connu qu'on ne peut pas obtenir une telle formule sans introduire l'intégrale stochastique pour des processus à valeurs dans l'espace des opérateurs non bornés.

On rappelle qu'un sous–espace fermé $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}^p(\mathbb{H})$ est dit un *sous–espace p–stable* si, pour tout élément M de $\mathcal{S}$ et tout élément X de $\mathcal{E}(\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{G}))$, l'intégrale stochastique $\int X\, dM$ appartient à $\mathcal{S}$.

Le théorème suivant, dans lequel les suites (h_n) et (g_n) sont des bases orthonormales pour les espaces de Hilbert $\mathbb{H}$ et $\mathbb{G}$, coïncide avec le Théorème 4.60 du livre de Jacod ([Ja]) dans le cas où l'on a $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.1 *Soit M un élément de $\mathcal{H}^p(\mathbb{H})$. L'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M)$ coïncide alors avec le sous–espace p–stable de $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$ engendré par les martingales de la forme*

$$g_i \int X\, d(h_j \cdot M),$$

où (i, j) varie dans $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$, et X dans l'espace des processus prévisibles élémentaires à valeurs réelles.

DÉMONSTRATION. On vérifie aussitôt que $\mathcal{L}^p(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M)$ est un sous–espace p–stable de $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$. En effet, si X est un élément de $\Lambda^p(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M)$, et Y un élément de $\mathcal{E}(\mathcal{L}(\mathbb{G}, \mathbb{G}))$, on a

$$Y \circ X \in \Lambda^p(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M).$$

Il est d'autre part évident que le sous–espace p–stable dont on parle dans l'énoncé contient les intégrales stochastiques de la forme $\int X\, dM$, où X est une combinaison linéaire d'éléments du type $X_{i,j}(t, \omega)\, h_i \otimes g_j$, avec chaque $X_{i,j}$ réel prévisible borné. En outre, ces intégrales stochastiques forment un ensemble partout dense dans $\mathcal{E}(\mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{G}))$ pour la norme de Λ^p (comme on le voit en modifiant légèrement la deuxième partie de la démonstration du Théorème 1.6). Le Théorème est donc démontré.

Le résultat suivant est démontré, pour $p = 2$, dans [Ou].

Corollaire 2.2 *Soit N une martingale de $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$. Pour que N appartienne à $\mathcal{L}^p(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M)$, il faut et il suffit que, pour tout élément g de $\mathbb{G}$, la martingale réelle $g \cdot N$ appartienne au sous–espace p–stable engendré par les martingales réelles de la forme $h \cdot M$, où h varie dans $\mathbb{H}$.*

DÉMONSTRATION. La condition est évidemment nécessaire: si N appartient à $\mathcal{L}^p(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M)$, c'est-à-dire au sous–espace p–stable engendré par les processus de la forme $g_i \int X \, d(h_j \cdot M)$, il est clair que $g \cdot N$ appartient au sous–espace p–stable engendré par les processus de la forme $(g \cdot g_i) \int X \, d(h_j \cdot M)$.

Pour prouver que la condition est suffisante, on remarque d'abord que N est limite dans $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$ des martingales $\sum_{i \leq n} (g_i \cdot N) \, g_i$. Il suffit alors de prouver que ces martingales appartiennent à $\mathcal{L}^p(\mathbb{H}, \mathbb{G}; M)$. A cet effet, remarquons que chaque $(g_i \cdot N)$ est limite dans $\mathcal{H}^p(\mathbb{R})$ de processus de la forme

$$\sum_{j \leq k} \int X_j \, d(h_j \cdot M)$$

(avec X_j processus prévisible élémentaire à valeurs réelles). Il en résulte que $(g_i \cdot N) \, g_i$ est limite dans $\mathcal{H}^p(\mathbb{G})$ de processus de la forme

$$\sum_{j \leq k} g_i \int X_j \, d(h_j \cdot M).$$

L'assertion est donc démontrée.

Considérons maintenant une suite (M^n) de martingales réelles appartenant à $\mathcal{H}^p(\mathbb{R})$, avec

$$\sum_{n \geq 0} \left\| [M^n]_\infty^{1/2} \right\|_{L^p} < \infty.$$

En désignant par (e_n) la base canonique de ℓ^2, on voit que la martingale $M = \sum_{n \geq 0} e_n \, M^n$ est bien définie en tant qu'élément de $\mathcal{H}^p(\ell^2)$. On a en effet $[M]_t = \sum_{i \geq 0} [M^i]_t$, de sorte que l'appartenance de $[M]_\infty^{1/2}$ à L^p résulte de la majoration suivante:

$$[M]_\infty^{1/2} \leq \sum_{i \geq 0} [M^i]_\infty^{1/2}.$$

Théorème 2.3 *Soit $\mathcal{S}$ le sous–espace stable de $\mathcal{H}^p(\mathbb{R})$ engendré par la suite de martingales (M_n). Tout élément de $\mathcal{S}$ peut alors s'écrire sous la forme $\int X \, dM$, avec X élément de $\Lambda^p(\ell^2, \mathbb{R}; M)$.*

DÉMONSTRATION. Ce n'est qu'un cas particulier du Théorème 2.1, car $\mathcal{S}$ est engendré par les intégrales stochastiques de la forme

$$\int X \, dM^i = \int X \, d(e_i \cdot M),$$

où X est prévisible élémentaire.

On remarquera que, dans le cas particulier où l'on a $[M^i, M^j] = 0$ pour $i \neq j$, tout élément de $\mathcal{S}$ peut s'écrire plus simplement sous la forme $\sum_{i=1}^{\infty} \int X^i \, dM^i$, où X^i appartient à $\Lambda^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}; M^i)$ pour tout i, et où la série converge dans $\mathcal{H}^p(\mathbb{R})$.

3. Extrémalité et unicité de la probabilité martingale équivalente

Dans ce paragraphe, la restriction de P à la tribu $\mathcal{F}_0$ est supposée être dégénérée. En outre, afin d'alléger les notations, toutes les martingales (locales) considérées seront supposées *nulles en* 0.

On se donne un ensemble $\mathcal{M}$ (non nécessairement dénombrable) de martingales réelles, appartenant à $\mathcal{H}^1$. En outre, on désigne par C l'ensemble convexe constitué par les lois qui rendent chaque élément de $\mathcal{M}$ une martingale (locale).

Un célèbre théorème de Jacod et Yor (voir, par ex., [Ja], Th. 11.2) affirme que le sous–espace stable de $\mathcal{H}^1$ engendré par $\mathcal{M}$ coïncide avec l'espace $\mathcal{H}^1$ tout entier si, et seulement si, la condition suivante est remplie:

(3.1) *La loi P est un point extrémal de C.*

Il est commode, dans les applications aux modèles financiers, de pouvoir remplacer la précédente condition d'extrémalité par la condition suivante:

(3.2) *Il n'existe dans C aucune loi équivalente à P et distincte de P.*

Cette dernière condition est, en général, plus forte que la condition d'extrémalité (3.2). Dans le livre de Jacod ([Ja], Cor. 11.4), on montre que les deux conditions sont équivalentes si l'ensemble $\mathcal{M}$ est *fini* ou bien si ses éléments sont *à trajectoires continues*. Dans ce paragraphe nous nous proposons de montrer qu'il en est de même dans le cas où chaque élément de $\mathcal{M}$ est une martingale stricte. On rappelle (voir [LJ]) qu'une martingale (locale) M est dite *stricte* si, pour tout temps d'arrêt T, la variable aléatoire M_T est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{T-}$. En outre, nous dirons que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est *strictement continue à gauche* si, pour tout temps d'arrêt T, on a $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$.

On sait (voir [Ja], Th. 11.2) que, dans le cas général, la condition d'extrémalité (3.1) équivaut à la condition suivante:

(3.1.*bis*) *La seule martingale bornée orthogonale à tout élément de $\mathcal{M}$ est la martingale nulle.*

On sait aussi (voir [Ja], Th. 11.3) que la condition (3.2) est une conséquence de la condition suivante:

(3.2.*bis*) *La seule martingale de $\mathcal{H}^1$ orthogonale à tout élément de $\mathcal{M}$ est la martingale nulle.*

Donc, si (3.1.*bis*) $\Rightarrow$ (3.2.*bis*), les conditions (3.1) et (3.2) coïncident (voir [Ja], Cor. 11.4).

Pour démontrer le résultat annoncé, nous nous servirons d'un petit lemme de "théorie générale":

Lemme 3.3 *On suppose que la filtration est strictement continue à gauche. Alors, pour tout processus X, optionnel et prélocalement borné, il existe une suite (croissante) (H_n) d'ensembles prévisibles dont la réunion coïncide avec $[\![0,\infty[\![$ et tels que X soit borné sur chaque H_n.*

DÉMONSTRATION. Puisque le processus X est prélocalement borné, il suffit de prouver que, pour tout temps d'arrêt T tel que X soit borné sur $[\![0,T[\![$, l'intervalle stochastique $[\![0,T]\!]$ est la réunion d'une suite (H_n) d'ensembles prévisibles, tels que X soit borné sur chaque H_n.
A cet effet, puisque l'ensemble $\{|X| \leq n\} \cap [\![T]\!] \in \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$, il existe (voir par exemple [DM] pag. 200) un ensemble prévisible H_n tel que l'on ait

$$H_n \cap [\![T]\!] = \{|X| \leq n\} \cap [\![T]\!].$$

On peut aussi supposer que $H_n \subset [\![0,T]\!]$. Posons ensuite

$$H = \bigcup_{n\geq 1} H_n, \qquad H_0 = [\![0,T]\!] \setminus H.$$

On a alors $[\![T]\!] \subset H$. En outre, pour tout $n \geq 0$, le processus X est borné sur H_n, car il l'est sur chacun des deux ensembles $H_n \cap [\![0,T[\![$, $H_n \cap [\![T]\!]$ (dont le deuxième est vide pour $n = 0$). La suite $(H_n)_{n\geq 0}$ répond donc à la question.

Proposition 3.4 *Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de martingales locales strictes, tel que la seule martingale bornée orthogonale à tout élément de $\mathcal{M}$ soit la martingale nulle. On a alors les conclusions suivantes:*

1) La filtration est strictement continue à gauche.

2) La seule martingale locale orthogonale à tout élément de $\mathcal{M}$ est la martingale nulle.

DÉMONSTRATION. 1) Etant donné un temps d'arrêt T, considérons une variable aléatoire bornée V, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, telle que l'on ait $\mathbf{E}[V \mid \mathcal{F}_{T-}] = 0$. Il s'agit de prouver que V est p.s. nulle. A cet effet, remarquons que le processus N défini par $N_t = V\, I_{\{t\geq T\}}$ est une martingale bornée. Tout est donc réduit à prouver que cette martingale est nulle, c'est-à-dire qu'elle est orthogonale à tout élément M de $\mathcal{M}$. Pour cela, il suffit de prouver que N est orthogonale à toute martingale L, uniformément intégrable, obtenue de M par arrêt. Or, puisque L est encore stricte, les relations

$$[L,N]_t = (\Delta L_T\, V)\, I_{\{t\geq T\}},$$

$$\mathbf{E}[\Delta L_T\, V \mid \mathcal{F}_{T-}] = \Delta L_T\, \mathbf{E}[V \mid \mathcal{F}_{T-}] = 0$$

montrent que le processus $[L, N]$ est une martingale. On a donc bien que N est orthogonale à L, et l'assertion est démontrée.

2) Soit N une martingale locale orthogonale à tout élément de $\mathcal{M}$. En appliquant le Lemme 3.3 au processus $X = \Delta N$, on voit qu'il existe une suite croissante (H_n) d'ensemble prévisibles dont la réunion coïncide avec $[\![0, \infty[\![$ et tels que chacune des martingales locales $I_{H_n} \cdot N$ soit à sauts uniformément bornés (et donc localement bornée). Chacune de ces martingales locales est orthogonale à $\mathcal{M}$, donc nulle. Il en résulte que la martingale N elle même est nulle, ce qui achève la démonstration.

Le résultat annoncé est maintenant une conséquence immédiate.

Théorème 3.5 *Si $\mathcal{M}$ est un ensemble de martingales locales strictes, les conditions (3.1) et (3.2) coïncident.*

4. Application aux modèles de marchés financiers

Dans l'article [AH], les auteurs considèrent un marché avec un ensemble dénombrable d'actifs financiers, représentés par une suite (M^n) de processus qui sont supposés être des martingales (locales) pour la loi P.

La valeur d'un portefeuille basé sur les k premiers actifs financiers, et qui suit une stratégie élémentaire, est de la forme

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{k} \vartheta_{ij} \left(M^i_{t_{j+1}} - M^i_{t_j} \right),$$

où la variable aléatoire ϑ_{ij} est bornée et mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_j}$. Si toute variable aléatoire intégrable peut être approchée dans L^1 par des "valeurs de portefeuille" du type décrit ci–dessus, le marché est dit *approximativement complet*. Grâce au Théorème 2.1, cette condition revient à imposer que le sous–espace stable de $\mathcal{H}^1$ engendré par la suite (M^n) coïncide avec l'espace $\mathcal{H}^1$ tout entier (ce qui permet notamment d'utiliser la formule de représentation du Théorème 2.3).

Dans l'article cité, Artzner et Heath donnent un exemple intéressant d'un marché approximativement complet dans lequel l'unicité de la "probabilité martingale équivalente" n'a pas lieu. Ils décrivent aussi certaines pathologies de ce marché. Or, de tels inconvénients sont éliminés si l'on impose aux actifs d'être des martingales strictes. D'autre part, cette condition est vérifiée dans la plupart des applications courantes, dans lesquelles la partie discontinue est une intégrale stochastique par rapport à un processus de Poisson. On vérifie en effet aisément que le processus de Poisson compensé est une martingale stricte par rapport à sa filtration naturelle.

Il suffit pour cela d'utiliser le résultat bien connu (voir, par ex., [FL]) selon lequel les instants de sauts T_k du processus de Poisson vérifient l'égalité $\mathcal{F}_{T_k} = \mathcal{F}_{T_k -}$. Puisque les sauts de chaque martingale doivent être contenus dans $\bigcup_k [\![T_k]\!]$ (grâce au résultat de représentation comme intégrale stochastique par rapport au processus de Poisson), une martingale à un seul saut $N_t = V\, I_{\{t \geq T\}}$ (avec V mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et telle que $\mathbf{E}[V \mid \mathcal{F}_{T-}] = 0$) doit être de la forme

$$\sum_k \left(V\, I_{\{T=T_k\}}\right) I_{\{t \geq T_k\}} .$$

Chaque $\left(V\, I_{\{T=T_k\}}\right) I_{\{t \geq T_k\}}$ étant une martingale, on a $\mathbf{E}[V\, I_{\{T=T_k\}} | \mathcal{F}_{T_k-}] = V\, I_{\{T=T_k\}} = 0$. Donc la filtration est strictement continue à gauche et toute martingale est stricte (voir (3.4))

On peut par le même raisonnement démontrer un résultat un peu plus général: si le marché est approximativement complet, et s'il existe une suite croissante (T_k) de temps d'arrêt, à graphes deux à deux disjoints, telle que l'on ait $\mathcal{F}_{T_k} = \mathcal{F}_{T_k-}$ pour tout k et que l'ensemble $\bigcup_n \{\Delta M^n \neq 0\}$ soit contenu dans la réunion des graphes des T_k, alors la filtration est strictement continue à gauche.

BIBLIOGRAPHIE

[AH] Artzner P. – Heath D., *Approximate completeness with multiple martingale measures*. Mathematical Finance **5** (1995), 1–11.

[De] Delbaen F., *Representing Martingale Measures when Asset Prices are continuous and bounded*. Mathematical Finance **2** (1992), 107–130.

[DM] Dellacherie C. – Meyer P.A., *Probabilités et Potentiel. Chapitres I à IV*. Hermann, Paris, 1975.

[DS] Delbaen F. – Schachermayer W., *A general version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing*. Mathematische Annalen **300** (1994), 463–520.

[FL] Fagnola F. – Letta G., *Sur la représentation intégrale des martingales du processus de Poisson*. Séminaire de Probabilités XX, Lecture Notes in Math. 1204 (1986), 28–30.

[FS] Föllmer H. – Schweizer M., *Hedging of contingent claims under incomplete information*, in Applied Stochastic Analysis (M.H.A. Davis and R.J. Elliot, eds.) Gordon and Breach, London (1991), 389–414.

[Ja] Jacod J., *Calcul stochastique et problèmes de martingales*. Lectures Notes in Math. 714 (1979).

[LJ] Le Jan Y., *Temps d'arrêt stricts et martingales de sauts*. ZW **44** (1978), 213–225.

[Mt] Métivier M., *Semimartingales*. W. de Gruyter, Berlin, 1982.

[MP] Métivier M. – Pellaumail J., *Stochastic Integration*. Academic Press, New York, 1980.

[Me1] Meyer P.– A., *Sur un problème de filtration*. Séminaire de Probabilités VII, Lecture Notes in Math. 321 (1973), 223–247.

[Me2] Meyer P.– A., *Un cours sur les intégrales stochastiques*, Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. 511 (1976), 245–401.

[Ou] Ouvrard J., *Représentation de martingales vectorielles de carré intégrable à valeurs dans des espaces de Hilbert séparables*. ZW **33** (1975), 195–208.

[Sc] Schweizer M., *Option hedging for semimartingales*. Stoch. Proc. and Appl. **37** (1991), 339–363.

[St] Stricker C., *Arbitrage et lois de martingale*. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 26, n. 3 (1990), 451–460.

Maurizio Pratelli
Dipartimento di Matematica
Via Buonarroti, 2
I–56127 Pisa (Italie)