Astérisque

B. MAISONNEUVE

Excursions chevauchant un temps aléatoire quelconque

Astérisque, tome 236 (1996), p. 215-226
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__215_0>

Excursions chevauchant un temps aléatoire quelconque

B. Maisonneuve

Résumé. — Nous étudions diverses lois conditionnelles de l'excursion (d'un processus de Markov) chevauchant un temps aléatoire quelconque.

Cet exposé constitue la rédaction de résultats présentés pour l'essentiel au Seminar on Stochastic Processes de Gainesville en 1985 et aux Journées de Luminy 1985. Il s'agit aussi d'un petit cadeau d'anniversaire à mes maîtres P.A. Meyer (qui a manifesté plusieurs fois son intérêt pour une telle rédaction) et J. Neveu.

1. Introduction

Considérons un processus de Ray X à valeurs dans E, un borélien B de $E \times E$ et un intervalle de temps aléatoire maximal $]g, d[$ sur lequel (X_-, X) ne visite pas B; cet intervalle d'excursion sera en général celui qui "chevauche" un temps aléatoire donné T.

Nous nous proposons d'exprimer la loi du processus $(X_{g+t})_{t\geq 0}$ conditionnée par le passé de g, à l'aide des mesures de sortie de l'ensemble aléatoire $M = \overline{\{t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in B\}}$. La formule principale obtenue au §**3** généralise diverses formules connues pour des temps T particuliers. Nous étudierons ensuite la loi de l'excursion e basée sur $]g, d[$ conditionnée simultanément par le passé de g et le futur de d. Nous montrerons que cette loi ne dépend que de $(X_g, d-g, X_d)$ dans diverses situations, en particulier dans celles étudiées par Getoor et Sharpe, mais à la différence de [5], [6], [7] nous ne ferons aucune hypothèse de dualité.

Signalons aussi que l'utilisation du système de sortie $(\mathcal{F}_{D_t})$ prévisible défini en [13] permet de remplacer le passé de g par son passé strict et que le conditionnement par rapport au passé strict de Weil [15] (voir aussi [12]) permet de remplacer le futur de d par le futur large, prenant en compte X_{d-}.

2. Notations générales

A. — Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ la réalisation canonique d'un processus de Ray d'espace d'états E (compact métrisable). La tribu borélienne et la tribu des ensembles universellement mesurables de E sont notées $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$. Sur l'ensemble Ω (des applications càd làg de $\mathbf{R}_+$ dans E), la tribu engendrée par les coordonnées X_t et sa complétée universelle sont notées $\mathcal{F}^o$ et $\mathcal{F}^*$. Dans la suite, P désigne une mesure P^μ, correspondant à une mesure initiale fixée μ, et les propriétés énoncées p.s. le seront relativement à P (sauf mention explicite d'une autre mesure).

Pour $t \in \mathbf{R}_+$ on définit les opérateurs a_t, k_t *d'arrêt* et de *meurtre* des trajectoires à t :

$$X_s(a_t) = X_{s\wedge t},\ X_s(k_t) = X_s \text{ si } s < t,\ \delta \text{ si } s \geq t\ ,$$

où δ est un point fixé, considéré comme cimetière. δ n'est pas supposé absorbant. On pose $X_\infty = \delta$.

Pour $s \in \mathbf{R}_+$, $\omega, \omega' \in \Omega$ on note $\omega|s|\omega'$ la trajectoire $w \in \Omega$ identique à ω ou à $k_s\omega$ sur $[0, s[$ et telle que $\theta_s w = \omega'$.

B. — On considère un fermé aléatoire M de $(0,\infty)\times\Omega$ optionnel, homogène et tel que la v.a. $R = \inf M$ soit $\mathcal{F}^*$-mesurable, par exemple l'ensemble M de l'introduction. On note

$$\begin{aligned}
&D_t = \inf\{s > t : s \in M\}\ \ (\inf\emptyset = +\infty),\ R_t = D_t - t,\\
&G_t = \sup\{s \leq t : s \in M\}\ \ (\sup\emptyset = 0),\ A_t = t - G_t,\\
&G^o = \{t \in M \cup \{0\} : D_t > t\}\,,\ \ G = G^o\backslash\{0\},\\
&\mathcal{R}_t = \mathcal{F}_{D_t}.
\end{aligned}$$

Pour tout processus $(\mathcal{F}_t)$ optionnel (π_t), à valeurs dans un espace arbitraire $(W, \mathcal{G})$ et toute fonction universellement mesurable positive f sur $W \times \Omega$ on peut écrire

$$(2.1)\qquad E\left(\sum_{s\in G^o} f(\pi_s, \theta_s)\right) = \int P(d\omega)\int L^o(\omega, ds)\widehat{P}^{X_s(\omega)}\left(f(\pi_s(\omega), \bullet)\right)$$

où $(L, \widehat{P})$ est un système de sortie de M et où L^o désigne la mesure aléatoire $L(ds) + I_{\{R>0\}}\varepsilon_o(ds)$ sur $\mathbf{R}_+$ (voir [9] et [10] (5)). Nous pouvons supposer que pour tout $x \in E$ la mesure de sortie $\widehat{P}^x$ est portée par $\{X_0 = x,\ R > 0\}$.

La formule (2.1) est encore valable pour tout processus $(\mathcal{R}_t)$ prévisible (π_t) à condition de remplacer le système de sortie optionnel $(L, \widehat{P})$ par le système de sortie $(\mathcal{F}_{D_t})$ prévisible défini en [13], que nous noterons $(\Lambda, \overline{P})$; il faut alors remplacer X_s par X_{s-}^D dans le membre de droite de (2.1) ($X_s^D = X_{D_s}$, $X_{0-}^D = X_0$). Nous pouvons encore supposer que pour tout $x \in E$, la mesure $\overline{P}^x$ est portée par $\{R > 0\}$ (mais non par $\{X_0 = x\}$).

C. — Dans toute la suite T désignera un *temps aléatoire* $\mathcal{F}^*$ *mesurable fixé*, les temps G_T, D_T seront notés g, d et *nous supposerons que* $T < d$ *sur* $\{T < \infty\}$ ou de manière équivalente que $g \in G^o$ sur $\{g < \infty\}$ (cette hypothèse est par exemple réalisée si $g < T$ sur $\{g < \infty\}$). L'excursion chevauchant T sera notée e; précisément on a : $e = k_R \circ \theta_g$.

3. Conditionnement par rapport au passé de g

Rappelons que la tribu $\mathcal{F}_g$ du passé de g est engendrée par les variables Z_g, où Z est un processus optionnel positif indexé par $\overline{\mathbf{R}}_+$. Étant donnée une mesure ν sur $(\Omega, \mathcal{F}^o)$ et deux ensembles ν-mesurables B, C on pose

$$\nu(B \mid C) = \frac{\nu(B \cap C)}{\nu(C)} \tag{3.1}$$

en convenant que ce quotient est nul si $\nu(C) = 0$ ou $+\infty$.

La formule fondamentale est donnée par le théorème suivant (c'est l'analogue de la formule générale de conditionnement par rapport au passé strict de [12]). Pour $\omega \in \{g < \infty\}$, ν^ω désigne la mesure $\widehat{P}^{X_g(\omega)}$ et A^ω désigne l'application $T(\omega|g(\omega)|\bullet) - g(\omega)$ de Ω dans $]-\infty, +\infty]$.

3.2. Théorème. — *Pour $B \in \mathcal{F}^*$ on a p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$*

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g)(\omega) = \nu^\omega(B \mid 0 \leq A^\omega < R) \ . \tag{3.3}$$

De plus, si T est un temps d'arrêt de la filtration rapide $\mathcal{R}_t = \mathcal{F}_{D_t}$, on a $\nu^\omega(A^\omega < 0) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$ et par suite la condition $0 \leq A^\omega$ peut être supprimée de (3.3).

3.4. *Remarque.* — La formule (3.3) peut être généralisée de la manière suivante : si (π_t) est comme dans (2.2) et si f est universellement mesurable ≥ 0 sur $W \times \Omega$ on a p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$

$$E\left[f(\pi_g, \theta_g) \mid \mathcal{F}_g\right](\omega) = \nu^\omega\left(f(\pi_g(\omega), \bullet) \mid 0 \leq A^\omega < R\right) \ . \tag{3.5}$$

Avec les conventions utilisées dans (3.1) ceci montre que $0 < \nu^\omega(0 \leq A^\omega < R) < \infty$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$.

Démonstration. — Établissons (3.5). Si $g(\omega)<\infty$, $g(\omega)$ est l'unique $s \in G^o(\omega)$ tel que $s \leq T(\omega) < D_s(\omega)$ ou $0 \leq T(\omega|s|\theta_s\omega) - s < R(\theta_s\omega)$ et pour Z optionnel ≥ 0 on a d'après (2.1)

$$E\left[Z_g f(\pi_g, \theta_g),\ g < \infty\right] = \int P(d\omega) \int_{\mathbf{R}_+} L^o(\omega, ds) Z_s(\omega) \widehat{P}^{X_s(\omega)}\left(f(\pi_s\omega, \bullet), C_s^\omega\right)$$

où $C_s^\omega = \{0 \leq T(\omega|s|\bullet) - s < R\}$. Il en résulte que $P(d\omega)L^o(\omega, ds)$ p.p. on a $\widehat{P}^{X_s(\omega)}(C_s^\omega) < \infty$ et que le second membre s'écrit

$$\int P(d\omega) \int_{\mathbf{R}_+} L^o(\omega, ds) Z_s(\omega) \widehat{P}^{X_s(\omega)}\left(f(\pi_s\omega, \bullet) \mid C_s^\omega\right) \widehat{P}^{X_s(\omega)}(C_s^\omega) = E[Z_g \Phi,\ g < \infty],$$

où $\Phi(\omega)$ désigne le second membre de (3.5).

Lorsque T est un *temps d'arrêt* de $(\mathcal{R}_t)$, $d = D_T$ est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t)$ et si $g(\omega) < \infty$, le point $g(\omega)$ est le seul $s \in G^o(\omega)$ tel que $s < d(\omega)$ et $T(\omega|s|\theta_s\omega) - s < R(\theta_s\omega)$. En reprenant le calcul précédent avec $Z_s I_{\{s<d\}}$ en place de Z_s on trouve (3.5) avec la condition $A^\omega < R$ en place de $0 \leq A^\omega < R$ et il en résulte comme dans la remarque 3.4 que $0 < \nu^\omega(A^\omega < R) < \infty$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$. Comme $g \leq T = T(k_g|g|\theta_g)$, il en découle aussi que

$$
\begin{aligned}
0 = P\{T < g < \infty\} &= \int_{\{g<\infty\}} P(d\omega)\nu^\omega(A^\omega < 0 \mid A^\omega < R) \\
&= \int_{\{g<\infty\}} P(d\omega)\frac{\nu^\omega(A^\omega < 0)}{\nu^\omega(A^\omega < R)} ,
\end{aligned}
$$

d'où $\nu^\omega(A^\omega < 0) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$. ∎

3.6. *Remarques.* — Il est intéressant de noter que p.s. (ω)

$$\nu^\omega\,(g(\omega) \notin G^o(\omega|g(\omega)|\bullet)) = 0 .$$

En effet, avec la notation C_s^ω de la démonstration précédente,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\{g<\infty\}} P(d\omega)\nu^\omega\,(g(\omega)\notin G^o(\omega|g(\omega)|\bullet)) \\
&\qquad = \int P(d\omega) \int L^o(\omega, ds)\widehat{P}^{X_s(\omega)}\,(s\notin G^o(\omega|s|\bullet))\,\widehat{P}^{X_s}(C_s^\omega) .
\end{aligned}
$$

Cette expression est nulle car

$$\int P(d\omega) \int L^o(\omega, ds)\widehat{P}^{X_s(\omega)}(s\notin G^o(\omega|s|\bullet)) = P^\mu\left(\sum_{s\in G^o} I_{s\notin G^o}\right) = 0 .$$

Il résulte de cette remarque que la condition $0 \leq A^\omega < R$ intervenant dans (3.3) peut être remplacée par $A^\omega = 0$ si $T \in G^o$ sur $\{T < \infty\}$ et par $0 < A^\omega < R$ si $g < T$ sur $\{g < \infty\}$; si T est un temps d'arrêt de $(\mathcal{R}_t)$ tel que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$, on a aussi $\nu^\omega(A^\omega \leq 0) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$. *Ces remarques seront souvent utilisées dans les exemples qui suivent.*

3.7. *Exemples.*

1) Si le temps T est *strictement terminal* (au sens où $T \circ \theta_t = T - t$ sur $\{T \geq t\}$), la condition $A^\omega(\omega') \geq 0$ entraîne $A^\omega(\omega') = T(\omega')$, donc si T est de plus un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$ il résulte du théorème 3.2 que

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g) = \widehat{P}^{X_g}(B \mid T < R) \;\text{ sur }\; \{g < \infty\}. \tag{3.8}$$

Dans ce cas $\mathcal{F}_g$ et θ_g sont *conditionnellement indépendants étant donné* X_g.

Par exemple considérons le processus $Y_t = (R_t, a_R \circ \theta_t) = (R, a_R) \circ \theta_t$. Ce processus, à valeurs dans $\overline{\Omega} = \overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, est homogène, adapté à $(\mathcal{R}_t)$ et càd làg, Ω étant muni de la topologie de Skorohod ou de la topologie de la convergence en mesure ([11], III.1). Nous pouvons alors prendre $T = S_{\{S<D_S\}}$, où $S = \inf\{t \geq 0 : Y_t \in B\}$, B étant un borélien de $\overline{\Omega}$. Par exemple, pour $T = \inf\{t : R_t > a\}$ ($a \in]0, \infty[$) les conditions $T < R$ et $R > a$ sont équivalentes et l'on retrouve une formule bien connue :

$$(3.9) \qquad P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g) = \widehat{P}^{X_g}(B \mid R > a) \; .$$

Noter que $]g, d[$ est ici le premier intervalle contigu à M de longueur $> a$.

2) Si le temps T est *terminal* ($T \circ \theta_t = T - t$ sur $\{T > t\}$), la condition $A^\omega(\omega') > 0$ entraîne $A^\omega(\omega') = T(\omega')$, donc, si de plus T est un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$ tel que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$, on obtient encore la formule (3.8). On retrouve ainsi un résultat de Getoor et Sharpe [6] (cas d'un t. d'a. de $(\mathcal{F}_t)$), étendu par Boutabia et Maisonneuve [1] aux t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$.

3) Si T est un *temps de retour* ($T \circ \theta_t = (T-t)_+$) tel que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$, la condition $0 < A^\omega(\omega') < R(\omega')$ équivaut à $0 < T(\omega') < R(\omega')$, donc (3.3) s'écrit

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g) = \widehat{P}^{X_g}(B \mid 0 < T < R) \text{ sur } \{g < \infty\} \; ,$$

et nous retrouvons une formule de Getoor [5], avec la même conséquence (sur l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{F}_g$ et θ_g) que précédemment.

4) Soit b_t l'opérateur de "départ" à t défini par $X_s(b_t) = X_{s \vee t}$ et supposons que $\{T \geq t\} \in b_t^{-1}(\mathcal{F}^*)$ pour tout t. On a alors $\{T \geq t\} = \{T(b_s) \geq t\}$ pour $s \leq t$ à cause de l'idempotence des b_s et, si $g(\omega) < \infty$,

$$(3.10) \qquad \{0 \leq A^\omega < R\} = \{0 \leq T(\omega_0 | g(\omega) | \bullet) - g(\omega) < R\} \; ,$$

ω_0 étant un point fixé de Ω. En écrivant la formule (3.3), on obtient l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{F}_g$ et θ_g relativement à (g, X_g).

5) Si T satisfait à $\{T > t\} \in b_t^{-1}(\mathcal{F}^*)$ et si $g < T$ sur $\{g < \infty\}$, on a de la même manière

$$\{0 < A^\omega < R\} = \{0 < T(\omega_0 | g(\omega) | \bullet) - g(\omega) < R\} \; ,$$

avec la même conséquence qu'au **4)**. Nous avons ainsi retrouvé un autre résultat de Getoor [5] (les temps envisagés ici ne sont autres que les "*forward times*" de [5], car b_t et θ_t engendrent la même tribu).

6) Si $t \in \mathbf{R}_+$ et $T \equiv t$ sur $\{G_t < t\}$, $+\infty$ sur $\{G_t = t\}$, la condition $A^\omega < R$ s'écrit $R > A_t(\omega)$ ($= t - G_t(\omega)$) si $g(\omega) < \infty$ et l'on retrouve la formule bien connue

$$(3.11) \qquad P(\theta_{G_t} \in B \mid \mathcal{F}_{G_t})(\omega) = \widehat{P}^{X_{G_t}(\omega)}(B \mid R > A_t(\omega))$$

p.s. (ω) sur $\{G_t < t\}$.

Supposons plus généralement que T soit un *temps d'arrêt de la filtration lente* $\mathcal{L}_t = (\mathcal{F}_{G_t})_+$. Comme tout élément de $\check{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{G_t}$ est P-p.s. égal à un élément de $\mathcal{L}_t^o = \mathcal{T}(G_t, a_{G_t})$, un raisonnement classique ([3], XIV 38) montre que T est P-p.s. égal à un t. d'a. de $(\mathcal{L}_{t+}^o)$. Nous supposerons donc que T lui-même est un t. d'a. de $(\mathcal{L}_{t+}^o)$. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $I_{\{T<t\}}$ s'écrit $f_t(G_t, a_{G_t})$ à l'aide d'une fonction f_t sur $\mathbf{R}_+ \times \Omega$. Soient ω, $\omega' \in \Omega$ tels que $g(\omega) \in G^o(w)$, où $w = (\omega|g(\omega)|\omega')$, et $X_0(\omega') = X_g(\omega)$. Les conditions $T(w) < g(\omega) + R(\omega')$ et $T(\omega) < g(\omega) + R(\omega')$ sont alors équivalentes (par exemple la première entraîne que pour $t \in]g(\omega), g(\omega) + R(\omega')[$ on a $(G_t, a_{G_t})(w) = (G_t, a_{G_t})(\omega)$, donc $T(\omega) < t$), et la formule (3.3) s'écrit

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g)(\omega) = \nu^\omega (B \mid R > A_T(\omega)) \tag{3.12}$$

p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$, où $A_T(\omega) = T(\omega) - g(\omega)$. Cette formule reste valable pour un t. d'a. T de $(\mathcal{L}_t)$ tel que $T < d$ sur $\{T < \infty\}$ et en particulier pour un temps T de $(\mathcal{L}_t)$ tel que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$. Par ailleurs dans ce dernier cas on a aussi ([10] et [4], XX61)

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{L}_T)(\omega) = \nu^\omega (B \mid R > A_T(\omega)) \tag{3.13}$$

p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$. Il résulte des égalités (3.12) et (3.13) que $E(H) \mid \mathcal{F}_g) = E(H \mid \mathcal{L}_T)$ pour H mesurable ≥ 0, donc que $\mathcal{L}_T = \mathcal{F}_g$. *Pour un temps d'arrêt général T de $(\mathcal{L}_t)$ on en déduit l'égalité*

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{T}(\mathcal{F}_g, \{g < T\}) = \check{\mathcal{F}}_T\,. \tag{3.14}$$

Dans [14] Pitman affirme que pour un t. d'a. T de $(\check{\mathcal{F}}_t)$ on a $\check{\mathcal{F}}_T = \mathcal{F}_g$, où $g = G_T$, mais son théorème de représentation 6.1 n'est établi que sur $\{g < T\}$ et montre seulement que $\check{\mathcal{F}}_T$ et $\mathcal{F}_g$ ont même trace sur $\{g < T\}$ (ce que l'on retrouve ici d'après (3.14)).

4. Conditionnement par rapport à $\mathcal{R}_{g-}$

Tout ce qui précède (à part les exemples utilisant la propriété $\widehat{P}^x(X_0 \neq x_0) = 0$) peut être adapté au conditionnement par rapport à $\mathcal{R}_{g-}$: il suffit de remplacer $(L, \widehat{P})$ par $(\Lambda, \overline{P})$ et X_g par X_{g-}^D dans les formules. Noter que

$$X_{g-}^D = \begin{cases} X_{g-} & \text{sur } \{g \in G^o \backslash I\} \\ X_g & \text{sur } \{g \in I\} \end{cases},$$

I désignant l'ensemble des points isolés de $M \cup \{0\}$. Par exemple la formule (3.3) devient

$$P(\theta_g \in B \mid \mathcal{R}_{g-})(\omega) = \overline{\nu}^\omega(B \mid 0 \leq A^\omega < R) \text{ p.s. } (\omega) \text{ sur } \{g < \infty\} \tag{4.1}$$

où $\overline{\nu}^\omega$ désigne la mesure $\overline{P}^{X_{g-}^D(\omega)}$. Dans le cas d'un *temps d'arrêt de $\mathcal{R}_t$*, la condition $0 \leq A^\omega$ est inutile dans cette formule; la démonstration nécessite ici une légère modification : on remarque que si $g(\omega) < \infty$, le point $g(\omega)$ est le seul $s \in G^o(\omega)$ tel que $s \leq T(\omega)$ et $T(\omega)|s|\theta_s\omega) - s < R(\theta^s\omega)$ et l'on travaille avec le processus $\mathcal{R}$ prévisible $Z_s I_{\{s \leq T\}}$, où Z est $\mathcal{R}$ prévisible. Dans les situations des exemples 3.7, **1)**, **2)** et **3)** on observe maintenant l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{R}_{g-}$ ($= \mathcal{F}_{g-}$ lorsque $P(g \in I) = 0$) et θ_g relativement à X^D_{g-} (X_{g-} lorsque $P(g \in I) = 0$).

Considérons par exemple un temps T de la forme $T = S_{\{S \in G^o\}}$, où $S = \inf\{t \in G : (X^D_{t-}, Y_t) \in H\}$, H étant un borélien de $E \times \overline{\Omega}$ (voir 3.7, **1)** pour la définition de Y). Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
P(\theta_g \in B \mid \mathcal{R}_{g-})(\omega) &= \overline{\nu}^{\omega}(B \mid A^{\omega} = 0) \\
&= \overline{\nu}^{\omega}(B \mid (X^D_{g-}(\omega), Y_0) \in H)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$, grâce aux remarques 3.6. Si l'on remplace S par $S = \sup\{t \in G : (X^D_{t-}, \theta_t) \in A\}$ dans cet exemple, avec $A \subset E \times \Omega$, on obtient

$$
P(\theta_g \in B \mid \mathcal{R}_{g-})(\omega) = \overline{\nu}^{\omega}\left(B \mid (X^D_{g-}(\omega), \theta_0) \in A, S = 0\right) . \tag{4.3}
$$

Dans les deux cas $\mathcal{R}_{g-}$ et θ_g sont conditionnellement indépendants étant donné X^D_{g-}. Ces résultats sont évidemment à rappprocher de ceux de [12].

5. Conditionnement par rapport à $(\mathcal{F}_g, d, \theta_d)$

Les lois conditionnelles étudiées dans ce paragraphe vont faire intervenir les mesures $P^{x,\ell,y}$ fournies par le lemme suivant (et déjà introduites dans [1]). Nous poserons

$$
\widehat{R} = (R, X_R) .
$$

5.1. Lemme. — *Il existe une famille $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}_+} \otimes \mathcal{E}$ mesurable $(P^{x,\ell,y})$ de mesures sur $(\Omega, \mathcal{F}^o)$, de masses 0 ou 1, telles que pour $(x, \ell, y) \in E \times \overline{\mathbf{R}}_+ \times E$ et $A, B \in \mathcal{F}^o$*

(i) $\widehat{P}^x(A \mid \widehat{R}) = P^{x,\widehat{R}}(A)$ $\quad \widehat{P}^x$-p.p.,

(ii) $P^{x,\ell,y}(a_\ell \in A, \theta_\ell \in B) = P^{x,\ell,y}(a_\ell \in A) P^y(B)$.

Démonstration. — On a $\widehat{P}^x(R = 0) = 0$ et $\widehat{P}^x(1 - e^{-R}) \leq 1$; comme $(\Omega, \mathcal{F}^o)$ est un bon espace, et que la tribu $\mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}_+} \otimes \mathcal{E}$ est séparable, on peut trouver une famille de probabilités $(P^{x,\ell,y})$ ayant la mesurabilité indiquée et satisfaisant à *(i)*. Fixons x, A, B et notons $\varphi(\ell, y)$, $\psi(\ell, y)$ les membres de *(ii)* relatifs à cette famille. Pour toute fonction $h \in (\mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}_+} \otimes \mathcal{E})_+$ on a

$$
\begin{aligned}
\widehat{P}^x\left(h(\widehat{R})\varphi(\widehat{R})\right) &= \widehat{P}^x\left(h(\widehat{R}) I_A(a_R) I_B(\theta_R)\right) \\
&= \widehat{P}^x\left(h(\widehat{R}) I_A(a_R) P^{X_R}(B)\right) \\
&= \widehat{P}^x\left(h(\widehat{R})\psi(\widehat{R})\right) ,
\end{aligned}
$$

où la seconde égalité résulte de la propriété de Markov de $(X_t)_{t>0}$ au temps R sous $\widehat{P}^x$ (noter que $R > 0, \widehat{P}^x$-p.p.). Il en résulte que $\varphi(\widehat{R}) = \psi(\widehat{R})\ \widehat{P}^x$-p.p.; l'ensemble négligeable peut être choisi indépendamment de A et B, car $(\Omega, \mathcal{F}^o)$ est un bon espace. La famille cherchée s'obtient en remplaçant $P^{x,\ell,y}$ par $P^{x,\ell,y}1_C(x,\ell,y)$, où C désigne l'ensemble des (x,ℓ,y) tels que *(ii)* ait lieu pour tous $A, B \in \mathcal{F}^o$. La propriété de mesurabilité de $(P^{x,\ell,y})$ est conservée car $C \in \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}_+} \otimes \mathcal{E}$; la propriété *(i)* reste également satisfaite car $(x, \widehat{R}) \in C\ \widehat{P}^x$-p.p.. ■

5.2. *Remarque.* — La propriété 5.1, *ii)* entraîne l'*indépendance* de a_ℓ (ou k_ℓ) et θ_ℓ sous $P^{x,\ell,y}$ (la notion d'indépendance prend évidemment un sens pour une mesure identiquement nulle).

Avec les notations T, g, d du §**2** et les mesures $P^{x,\ell,y}$ on définit pour $\omega \in \{g < \infty\}$

$$(5.3) \qquad \begin{aligned} n^\omega &= P^{X_g(\omega), d(\omega)-g(\omega), X_d(\omega)}, \\ C^\omega &= \{0 \leq A^\omega < R\}, \quad C_d^\omega = \{0 \leq A_d^\omega < R\}, \end{aligned}$$

où A^ω est défini comme au §**3** et où A_d^ω désigne l'application $T(\omega|g(\omega)|\bullet|d(\omega)|\theta_d\omega) - g(\omega)$ de Ω dans $]-\infty, +\infty]$. Pour $s, t \in \mathbf{R}_+$, $s \leq t$ et $\omega, \omega', \omega'' \in \Omega$. On pose

$$(\omega|s|\omega'|t|\omega'') = (\omega|s|\omega')|t|\omega'' = \omega|s|(\omega'|t-s|\omega'').$$

On a donc

$$\begin{aligned} A_d^\omega(\omega') &= A^\omega(\omega'|d(\omega) - g(\omega)|\theta_d\,\omega), \\ C_d^\omega &= \{\omega' : \omega'|d(\omega) - g(\omega)|\theta_d\,\omega \in C^\omega\}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section. Rappelons que $e = k_R \circ \theta_g$.

5.4. THÉORÈME. — *Pour $B \in \mathcal{F}^*$ on a p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$.*
a) $P(\theta_g \in B \mid \mathcal{F}_g, d, X_d)(\omega) = n^\omega(B \mid C^\omega)$,
b) $P(e \in B \mid \mathcal{F}_g, d, \theta_d)(\omega) = n^\omega(k_R \in B \mid C_d^\omega)$.

De plus, si T est un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$, on peut remplacer C^ω et C_d^ω par $\{A^\omega < R\}$ dans cet énoncé et l'on a

$$n^\omega(A^\omega < 0) = 0 \text{ p.s. } (\omega) \text{ sur } \{g < \infty\}.$$

5.5. *Remarque.* — p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$ la mesure n^ω est, comme $\widehat{P}^{X_g(\omega)}$, portée par $\{g(\omega) \in G^o(\omega|g(\omega)|\bullet)\}$. Nous pouvons alors faire des remarques analogues à 3.6. Par exemple, si $g < T$ sur $\{g < \infty\}$, les conditions C^ω, C_d^ω de *a)* et *b)* peuvent être remplacées par $\{0 < A^\omega < R\}$, $\{0 < A_d^\omega < R\}$ respectivement et si de plus T est un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$ on a $n^\omega(A^\omega \leq 0) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$.

Démonstration.

a) Soit Z une fonction $\mathcal{F}_g$ mesurable positive nulle sur $\{g = \infty\}$ et soit φ une fonction $\mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}_+} \otimes \mathcal{E}$ mesurable positive. Pour établir *a)* il s'agit de montrer que

$$P(Z\ \varphi(d-g, X_d), \theta_d \in B) = P(Z\ \varphi(d-g, X_d) n^\bullet(B \mid C^\bullet)) \ ,$$

soit d'après la formule (3.3) :

$$\int P(d\omega) \frac{Z(\omega)}{\nu^\omega(C^\omega)} \nu^\omega \left(\varphi(\widehat{R}), B \cap C^\omega\right)$$
$$= \int P(d\omega) \frac{Z(\omega)}{\nu^\omega(C^\omega)} \nu^\omega \left(\varphi(\widehat{R}) P^{X_g(\omega), \widehat{R}}(B \mid C^\omega), C^\omega\right).$$

Or d'après 5.1, *(i)* on a

$$\begin{aligned}\nu^\omega(\varphi(\widehat{R}), B \cap C^\omega) &= \nu^\omega \left((\varphi(\widehat{R}) P^{X_g(\omega), \widehat{R}}(B \mid C^\omega) P^{X_g(\omega), \widehat{R}}(C^\omega)\right) \\ &= \nu^\omega \left((\varphi(\widehat{R}) P^{X_g(\omega), \widehat{R}}(B \mid C^\omega), C^\omega\right) \ ,\end{aligned}$$

d'où l'égalité cherchée.

b) Nous allons maintenant déduire 5.4, *b)* de 5.4, *a)*. Soit Z une fonction $\mathcal{T}(\mathcal{F}_g, d, X_d)$ mesurable ≥ 0 portée par $\{g < \infty\}$ et soit $C \in \mathcal{F}^o$. Nous voulons montrer que

$$(5.6) \qquad P(Z, e \in B, \theta_d \in C) = P(Z n^\bullet(k_R \in B \mid C^\bullet_d), \theta_d \in C) \ .$$

D'après *a)* le membre de gauche s'écrit

$$(5.7) \qquad \int P(d\omega) \frac{Z(\omega)}{n^\omega(C^\omega)} n^\omega(k_R \in B, \theta_R \in C, C^\omega) \ .$$

Dans cette expression on peut remplacer R par $\ell = d(\omega) - g(\omega)$ à cause du lemme ci-dessous. Par ailleurs, d'après l'indépendance de k_ℓ et θ_ℓ sous n^ω (voir 5.2)

$$\begin{aligned}n^\omega(k_\ell{\in}B, \theta_\ell{\in}C, C^\omega) &= \int_{\{\theta_\ell \in C\}} n^\omega(d\omega') n^\omega(k_\ell{\in}B, k_\ell|\ell|\theta_\ell\omega' \in C^\omega) \\ &= \int_{\{\theta_\ell \in C\}} n^\omega(d\omega') n^\omega(k_\ell{\in}B \mid k_\ell|\ell|\theta_\ell\omega'{\in}C^\omega) n^\omega(k_\ell|\ell|\theta_\ell\omega'{\in}C^\omega) \\ &= n^\omega(g^\omega(\theta_\ell), C^\omega) \ ,\end{aligned}$$

où $g^\omega(w) = I_C(w) n^\omega(k_\ell \in B \mid k_\ell|\ell|w \in C^\omega)$. En reportant cette expression dans (5.7) et en utilisant encore *a)* on trouve le second membre de (5.6).

Lorsque T est un *t. d'a.* de $(\mathcal{R}_t)$, la propriété de Markov au temps d permet de remplacer C_d^ω par C^ω dans la formule 5.4, *b)*. En effet e est $\mathcal{F}_d$ mesurable et l'on déduit directement de *a)* que (avec les mêmes Z, C que ci-dessus)

$$\begin{aligned} P(Z, e \in B, \theta_d \in C) &= P(ZP^{X_d}(C), e \in B) \\ &= \int P(d\omega)Z(\omega)P^{X_d(\omega)}(C)n^\omega(k_R \in B \mid C^\omega) \\ &= \int_{\{\theta_d \in C\}} P(d\omega)Z(\omega)n^\omega(k_R \in B \mid C^\omega) \,. \end{aligned}$$

Pour terminer, toujours dans le cas d'un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$ on peut remplacer C^ω par $\{A^\omega < R\}$ dans *a)*; en adaptant les raisonnements précédents on voit qu'on peut alors substituer $\{A_d^\omega < R\}$ ou $\{A^\omega < R\}$ à C_d^ω dans 5.4, *b)*. On démontre alors que $n^\omega(A^\omega < 0) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$ comme la propriété correspondante pour ν^ω (théorème 3.2). ■

5.8. LEMME. — *$n^\omega(\widehat{R} \neq (d(\omega) - g(\omega), X_d(\omega)) = 0$ p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$.*

Démonstration. — D'après (2.1) on a

$$\begin{aligned} &\int P(d\omega) \sum_{s \in G^o(\omega)} P^{X_s(\omega), \widehat{R}(\theta_s \omega)}(\widehat{R} \neq \widehat{R}(\theta_s \omega)) \\ &\qquad = \int P(d\omega) \int L^o(\omega, ds) \int \widehat{P}^{X_s(\omega)}(d\omega')P^{X_s(\omega), \widehat{R}(\omega')}(\widehat{R} \neq \widehat{R}(\omega')) \\ &\qquad = \int P(d\omega) \int L^o(\omega, ds)\widehat{P}^{X_s(\omega)}(\widehat{R} \neq \widehat{R}) = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\int_{\{g<\infty\}} P(d\omega)P^{X_g(\omega), \widehat{R}(\theta_g \omega)}(\widehat{R} \neq \widehat{R}(\theta_g \omega)) = 0$$

et il reste à remarquer que $\widehat{R}(\theta_g \omega) = (d(\omega) - g(\omega), X_d(\omega))$. ■

5.9. *Exemples.* — Voici une série d'exemples où la condition C_d^ω de la formule 5.4, *b)* se réduit à une condition ne dépendant pas de ω, ce qui conduit à l'indépendance conditionnelle de $(\mathcal{F}_g, d, \theta_d)$ et e étant donné $(X_g, d-g, X_d)$.

Tout d'abord il y a les exemples où T est un t. d'a. de $(\mathcal{R}_t)$ *strictement terminal* (et tel que $T < d$ sur $\{T < \infty\}$), ou *terminal* et tel que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$. Ce deuxième cas généralise un résultat de Getoor et Sharpe [6] concernant l'excursion chevauchant un temps terminal. Nous retrouvons aussi sans dualité les résultats de Getoor [5]. Supposons que $g < T$ sur $\{g < \infty\}$. Alors p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$, $P(e \in B \mid \mathcal{F}_g, d, \theta_d)(\omega)$ s'écrit

a) n^ω $(k_R \in B \mid 0 < T(\omega_0|g(\omega)|\bullet|d(\omega)|\theta_d\omega) - g(\omega) < R)$ si T est un *temps de départ* (ou forward time au sens de 3.7, **5**)).

b) $n^\omega\,(k_R \in B \mid 0 < T(\bullet|d(\omega) - g(\omega)|\theta_d\omega) < R)$ si T est un *temps de retour*.

c) $n^\omega(k_R \in B \mid 0 < T(k_R) < R)$ si $T = \sup\{t > 0 : X_t \in F\}$, où F est un borélien de $E\backslash\{\delta\}$ (ou plus généralement si T est *coterminal exact* [5]). En effet pour ω, ω' tels que $g(\omega) < \infty$ et $\widehat{R}(\omega') = (d(\omega) - \ell(\omega),\ X_d(\omega))$, on a $X_d(\omega) \notin F$ et

$$0 < T\,(\omega'|d(\omega) - g(\omega)|\theta_d\omega) < R(\omega') \Longleftrightarrow 0 < T(k_R\omega') < R(\omega')\ .$$

Noter que dans le cas *c)* la formule s'écrit aussi

$$P(e \in B \mid \mathcal{F}_g, d, \theta_d) = Q^{X_g, d-g, X_d}(B \mid 0 < T < \zeta) \text{ sur } \{g < \infty\} \tag{5.10}$$

à condition de poser $Q^{x,\ell,y} = k_\ell(P^{x,\ell,y})$.

Signalons aussi que si T est un t. d'a. de la *filtration lente* $\mathcal{L}_t$ (cf. 3.7, **6**)), le second membre de 5.4, *b)* s'écrit p.s. (ω) sur $\{g < \infty\}$.

$$n^\omega(k_R \in B \mid R > A_T(\omega)) = n^\omega(k_R \in B)$$

à cause du lemme 5.8. Nous avons ainsi obtenu la formule

$$P(e \in B \mid \mathcal{F}_g, d, \theta_d) = Q^{X_g, d-g, X_d}(B) \tag{5.11}$$

et retrouvé la formule (5) de [1].

5.12. *Remarque finale.* — La loi conditionnelle de e relativement à $(\mathcal{F}_g, d,\ X_{d-},\ \theta_d)$ s'étudie de la même manière grâce aux mesures (déjà introduites dans [1])

$$P_{x,\ell,y}(B) = \widehat{P}^x(B \mid R = \ell, X_{R-} = y)\ .$$

Le rôle joué par la propriété de Markov au temps R sous $\widehat{P}^x$ est maintenant joué par la formule de conditionnement par rapport au passé strict de R sous $\widehat{P}^x$ (on suppose ici que M est la fermeture dans $]0,\infty[$ d'un ensemble $\{t > 0 : (X_{t-}, X_t) \in A\}$, ce qui assure l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{F}_{R-}$ et θ_R étant donné X_{R-} [12]). Le lecteur imaginera facilement comment conditionner par $(\mathcal{R}_{g-}, d, X_{d-}, \theta_d)$ et il pourra examiner les formules obtenues dans divers cas particuliers.

Références

[1] Boutabia H. et Maisonneuve B. — *Lois conditionnelles des excursions markoviennes*, Sém. Prob. XXVI, LN 1526, Springer, 1992.

[2] Dellacherie C. et Meyer P.A. — Probabilités et Potentiel, Chapitres I à IV, Hermann, 1975.

[3] Dellacherie C. et Meyer P.A. — Probabilités et Potentiel, Chapitres XII à XVI, Hermann, 1987.

[4] Dellacherie C., Maisonneuve B. et Meyer P.A. — Probabilités et Potentiel, Chapitres XVII à XXIV, Hermann, 1992.

[5] Getoor R.K. — *Excursions and forward times*, Seminar on Stochastic Processes 1982, Birkhäuser (1983), 149–169.

[6] Getoor R.K. and Sharpe M.J. — *Excursions of dual processes*, Adv. in Math. **45** (1982), 259–309.

[7] Getoor R.K. and Sharpe M.J. — *Two results on dual excursions*, Seminar on Stochastic Processes 1981, Birkhäuser (1981), 31–52.
[8] Maisonneuve B. — *Topologies du type de Skorohod*, Sém. Prob. VI, Springer LN **258** (1972), 113–117.
[9] Maisonneuve B. — *Exit systems*, Ann. Prob. **3** (1975), 399–411.
[10] Maisonneuve B. — *On the structure of certain excursions of a Markov process*, Z.f.W. **47** (1979), 61–67.
[11] Maisonneuve B. — Systèmes Régénératifs, Astérisque 15, S.M.F., 1974.
[12] Maisonneuve B. — *Strict past conditioning at arbitrary times*, Seminar on Stochastic Processes 1985, Birkhäuser (1986), 148–154.
[13] Maisonneuve B. — *Systèmes de sortie* $(\mathcal{F}_{D_t})$*-prévisibles*, Probab. Th. Rel. Fields **80** (1989), 395–405.
[14] Pitman J.W. — *Lévy systems and paths decompositions*, Seminar on Stochastic Processes 1981, Birkhäuser (1981), 79–110.
[15] Weil M. — *Conditionnement par rapport au passé strict*, Sém. Prob. V, Springer LN **191** (1971), 362–372.

B. Maisonneuve
I.M.S.S.
Université de Grenoble II
BP 47X
38040 GRENOBLE Cedex