

# *Astérisque*

ALAIN GENESTIER

## **Espaces symétriques de Drinfeld**

*Astérisque*, tome 234 (1996)

[<http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1996\\_\\_234\\_\\_1\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__234__1_0)

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**234**

**ASTÉRISQUE**

**1996**

**ESPACES SYMÉTRIQUES  
DE DRINFELD**

**Alain GENESTIER**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

**Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**Classification A.M.S. :**  
14G20, 14K10, 14L05

# TABLE DE MATIÈRES

<b>I.</b>	<b>Rappels et compléments</b>	<b>7</b>
0	Introduction	7
1	$\mathcal{O}$ -modules formels et $\mathcal{O}_D$ -modules formels	7
2	Le module de coordonnées des $\mathcal{O}$ -modules formels	9
3	Théorie des déformations	21
4	Le foncteur $G$ de Drinfeld	25
<b>II.</b>	<b>Représentabilité du foncteur <math>G</math> : approche explicite</b>	<b>35</b>
0	Introduction	35
1	Les sous-foncteurs attachés aux sommets de l'immeuble	36
2	Les sous foncteurs attachés aux simplexes maximaux de l'immeuble	41
3	Utilisation de la théorie des déformations	57
4	Le recollement : les sous-foncteurs ouverts attachés aux simplexes de dimension arbitraire.	63
<b>III.</b>	<b>Le morphisme de périodes</b>	<b>69</b>
0	Introduction	69
1	Rappels sur le schéma formel $\widehat{\Omega}^d$	71
2	Le morphisme $\xi' : G_{\mathcal{O}} \rightarrow \widehat{\Omega}^d$	76
3	Le morphisme $\xi'$ est un isomorphisme	94
<b>IV.</b>	<b>Revêtement de Drinfeld et morphisme déterminant</b>	<b>105</b>
0	Introduction	105
1	Le revêtement de Drinfeld	107
2	Morphisme déterminant	114
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>





# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Soit  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers d'un corps local non-Archimédien  $K$ , de caractéristique résiduelle  $p > 0$ .

0.1. — Pour tout entier  $d \geq 1$ , Drinfeld a construit dans [D3] une variété rigide-analytique  $\Omega^d$  sur  $K$  dont l'ensemble des points à valeur dans une extension finie  $L$  de  $K$  est

$$\mathbb{P}^{d-1}(L) - \bigcup_H H(L)$$

(où  $H$  parcourt l'ensemble des hyperplans rationnels sur  $K$  de  $\mathbb{P}^{d-1}$ ), et qui est ainsi un analogue non-Archimédien des espaces Hermitiens symétriques, pour le cas du groupe linéaire  $\mathrm{GL}_d$ .

Dans le cas particulier où  $d = 2$ , cette variété avait déjà été considérée par Mumford [Mu1], qui l'obtenait comme fibre générique au sens de Raynaud [Ra] d'un certain  $\mathcal{O}$ -schéma formel construit par éclatements successifs à partir de  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}}^1$  (de sorte que la fibre spéciale de ce schéma formel est un arbre de droites projectives).

Deligne a alors construit un schéma formel  $\widehat{\Omega}^d$ , localement de type fini sur  $\mathcal{O}$ , dont la fibre générique au sens de Raynaud est  $\Omega^d$  (ce travail, qui n'a pas été publié, est résumé dans [R]; voir aussi notre troisième chapitre). Pour l'instant, disons seulement que ce schéma formel est muni d'une action de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  et que le complexe simplicial dual de sa fibre spéciale est l'immeuble de Bruhat-Tits de  $\mathrm{PGL}_d(K)$ .

0.2. — Soient  $D$  une algèbre à division centrale simple d'invariant  $1/d$  sur  $K$ ,  $\mathcal{O}_D$  un ordre maximal de  $D$  et  $K_d$  une sous-extension maximale non ramifiée de  $D$ , d'anneau d'entiers  $\mathcal{O}_d$ . Drinfeld définit un problème de modules  $G$  pour des groupes formels munis d'une action de  $\mathcal{O}_D$  et d'une rigidification convenable, et construit un isomorphisme

$$\xi: G \longrightarrow \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$$

(voir [D1], et aussi [B-C] pour le cas où  $d = 2$  et où le corps local  $K$  est d'inégale caractéristique).

0.3. — Dans le cas où le corps local  $K$  est d'(égale) caractéristique positive, on donne dans cet ouvrage une autre approche de la construction de l'isomorphisme  $\xi$  inspirée de travaux d'Anderson, de Drinfeld et de Stuhler. On va en exposer les grandes lignes en les comparant à celles de l'approche de Drinfeld.

0.4. — Notre approche diffère déjà de celle de Drinfeld par les outils utilisés. La construction de Drinfeld utilise la théorie de Cartier (et plus généralement la «  $\mathcal{O}$ -théorie de Cartier »). La nôtre, qui est spécifique au cas où l'anneau  $\mathcal{O}$  est d'égale caractéristique, utilise une théorie des « modules de coordonnées » introduite par Drinfeld [D2]. Cette théorie est un analogue dans le cadre des  $\mathcal{O}$ -modules formels de la théorie des modules de Dieudonné contravariants.

0.5. — Les stratégies mises en œuvre sont elles aussi différentes.

Drinfeld construit d'abord un morphisme de foncteurs

$$\xi: G \longrightarrow \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d.$$

Il prouve ensuite que ce morphisme est un isomorphisme. Il en résulte alors que le foncteur  $G$  est représentable par le schéma formel  $\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$  ; il est cependant difficile d'expliciter l'isomorphisme  $\xi^{-1}$  afin d'obtenir une description utilisable de l'objet universel sur  $\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$ .

Nous montrons directement que le foncteur  $G$  est représentable. Nous construisons ensuite en nous inspirant d'idées d'Anderson [A] un morphisme  $\mathrm{PGL}_d(K)$ -équivariant

$$\xi': G \longrightarrow \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d.$$

Nous démontrons enfin que  $\xi'$  est un isomorphisme (il s'avère que cet isomorphisme est celui de Drinfeld, cf. remarque (III. 3.4)).

0.6. — La preuve de la représentabilité du foncteur  $G$  fournit en fait des coordonnées locales pour la topologie de Zariski sur le schéma formel  $G$  et une description explicite de l'objet universel dans ces coordonnées locales. Le schéma formel  $\widehat{\Omega}^d$  est lui aussi muni de coordonnées locales naturelles, et on peut donc considérer que le morphisme  $\xi'$  fournit un changement de coordonnées. Celles provenant de  $\widehat{\Omega}^d$  sont en fait plus commodes pour exprimer l'action de  $\mathrm{PGL}_d(K)$ . On peut en calculer des approximations modulo les puissances de l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$  (cf. la remarque (III. 2.4.3)).

0.7. — En revanche, en utilisant la description explicite de l'objet universel dans les coordonnées locales provenant de  $G$ , il est facile de donner des équations locales du revêtement de Drinfeld  $\Sigma^d$ .

Dans la dernière partie de ce travail, on écrit de telles équations. On construit aussi un morphisme déterminant

$$\Sigma^d \longrightarrow \Sigma^1.$$

Rappelons que  $\Sigma^1$  est le spectre maximal de l'extension maximale abélienne totalement ramifiée de  $K$ . Le  $K$ -espace rigide  $\Sigma^d$  n'est donc pas géométriquement irréductible. Toutefois, on s'attend à ce que les fibres géométriques de ce morphisme déterminant (ou plutôt, du morphisme

$$\Sigma^d \longrightarrow \Sigma^1 \otimes_K K_d$$

qu'il induit) soient géométriquement irréductibles. En utilisant les équations locales du revêtement, nous l'avons montré pour  $d = 2$  (cf. [Ge1], [Ge2]). Dans le cas où le corps local est cette fois supposé d'inégale caractéristique, Faltings [F] a obtenu un

résultat allant dans le même sens (pour plus de détails, voir l'introduction de notre chapitre IV).

0.8. — Donnons rapidement le contenu des chapitres de ce travail (on donnera plus de détails dans les introductions de ces chapitres).

Dans le chapitre I, on effectue des rappels sur les  $\mathcal{O}$ -modules formels, sur leurs « modules de coordonnées » (l'analogue (0.4) de la théorie des modules de Dieudonné contravariants), sur la théorie des déformations des  $\mathcal{O}$ -modules formels et sur le foncteur  $G$ .

Dans le chapitre II, on montre que le foncteur  $G$  est représentable. Pour cela, on montre d'abord que sa fibre spéciale est représentable, puis on utilise la théorie des déformations du chapitre I.

Dans le chapitre III, on commence par quelques rappels concernant le schéma formel  $\widehat{\Omega}^d$  puis on construit le morphisme  $\xi'$ . On démontre ensuite que  $\xi'$  est un isomorphisme.

Dans le chapitre IV, on rappelle la définition du revêtement de Drinfeld et on en donne des équations locales. On construit ensuite le morphisme déterminant et on le calcule explicitement dans les coordonnées locales du revêtement.

0.9. — Dans tout le texte, on utilisera les notations suivantes.

On désignera par  $\mathcal{O}$  un anneau de valuation discrète complet d'égale caractéristique  $p > 0$  et de corps résiduel fini  $\mathbb{F}_q$ . On notera  $K$  son corps des fractions et  $v$  la valuation de  $K$ . On fixera une uniformisante  $\pi$ , de  $K$ . On désignera par  $\mathcal{O}_d$  l'anneau des entiers de l'extension non-ramifiée de degré  $d$ ,  $K_d$ , de  $K$  et par  $\sigma$  l'automorphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbre de  $\mathcal{O}_d$  qui induit l'automorphisme de Frobenius ( $x \mapsto x^q$ ) sur son corps résiduel  $\mathbb{F}_{q^d}$ . La  $\mathcal{O}$ -algèbre  $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_d[[\Pi]]$  des séries formelles non-commutatives en une indéterminée  $\Pi$  vérifiant les relations

$$\Pi a = \sigma(a)\Pi \quad (\forall a \in \mathcal{O}_d)$$

$$\Pi^d = \pi$$

est alors l'ordre maximal de l'algèbre à division centrale simple  $D$  d'invariant  $1/d$  sur  $K$ .

Tous les modules considérés seront (au moins) des  $\mathbb{F}_q$ -modules. On notera donc simplement  $\otimes$  (resp.  $\widehat{\otimes}$ ) le produit tensoriel sur  $\mathbb{F}_q$  (resp. le complété de ce produit tensoriel, lorsque les  $\mathbb{F}_q$ -modules envisagés sont des modules topologiques).

Cet ouvrage doit beaucoup à G. Laumon, qui m'a aidé par ses conseils et m'a encouragé à le rédiger. Je suis heureux de l'en remercier maintenant.

Je remercie aussi H. Carayol, M. Rapoport, M. Raynaud et T. Zink pour des conversations qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce travail ainsi que P. Deligne qui a attiré mon attention sur quelques points obscurs dans une première version de ce texte. J'assure de plus T. Zink de ma reconnaissance pour le mois que j'ai passé grâce à lui à Bielefeld, pour l'accueil chaleureux qu'il m'y a réservé, et pour le temps qu'il m'y a consacré.

Je remercie enfin Mesdames Bonnardel et Le Bronnec qui ont réalisé, avec beaucoup de soin, la frappe d'une grande partie du manuscrit.



# I. RAPPELS ET COMPLÉMENTS

## 0 Introduction

Les notions figurant dans ce chapitre sont pour la plupart dues à Drinfeld ([D2]).

Le premier paragraphe est consacré à quelques rappels concernant les  $\mathcal{O}$ -modules formels.

Dans le second paragraphe, qui est le plus important du chapitre, on montre que la construction d'un « module de coordonnées » ([D2]) ramène la théorie des  $\mathcal{O}$ -modules formels à de l'algèbre semi-linéaire. Signalons qu'il existe aussi une  $\mathcal{O}$ -théorie de Cartier ([H]) pour les  $\mathcal{O}$ -modules formels. La théorie du module de coordonnées nous semblant plus maniable, nous n'utiliserons pas la  $\mathcal{O}$ -théorie de Cartier dans la suite de l'ouvrage.

Dans le troisième paragraphe, on définit pour les  $\mathcal{O}$ -modules formels une cohomologie de de Rham, munie d'une filtration de Hodge. Ceci étend simplement les définitions proposées par Anderson, Deligne et Gekeler pour les modules de Drinfeld. On montre ensuite qu'il revient au même de se donner une déformation d'un  $\mathcal{O}$ -module formel ou simplement une déformation de sa filtration de Hodge.

Dans le quatrième paragraphe, on rappelle la définition du foncteur  $G$  de Drinfeld ([D1]). Celui-ci est un problème de modules pour des  $\mathcal{O}_D$ -modules formels munis d'une certaine rigidification. On donne ensuite une traduction de la définition du foncteur  $G$  en termes de modules de coordonnées. Ceci permet de définir un autre foncteur  $G_{\mathcal{O}}$  muni d'un morphisme  $G_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathrm{Spf} \mathcal{O}$  tel que  $G = G_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$  (cette définition est implicitement contenue dans [D2] ; ce foncteur a aussi été considéré par Stuhler ([S] § 3) à propos de l'uniformisation des variétés de Drinfeld).

C'est avec le foncteur  $G_{\mathcal{O}}$  que nous travaillerons dans la suite de l'ouvrage.

## 1 $\mathcal{O}$ -modules formels et $\mathcal{O}_D$ -modules formels

Dans la suite de ce paragraphe,  $B$  désignera une  $\mathcal{O}$ -algèbre dans laquelle l'image de  $\pi$  est nilpotente.

**Définition 1.1.** — *Un  $\mathcal{O}$ -module formel est un groupe formel lisse  $X$  sur  $B$  muni d'une action de  $\mathcal{O}$  telle que l'action induite sur l'espace tangent  $\mathrm{Lie} X$  coïncide avec celle provenant de la structure de  $B$ -module de  $\mathrm{Lie} X$ .*

On définit les morphismes de  $\mathcal{O}$ -modules formels de manière évidente.

**Définition 1.2.** — *Un  $\mathcal{O}_D$ -module formel est un groupe formel lisse  $X$  sur  $B$  muni d'une action de  $\mathcal{O}_D$  telle que le groupe formel avec action de  $\mathcal{O}$  sous-jacent soit un  $\mathcal{O}$ -module formel.*

On définit les morphismes de  $\mathcal{O}_D$ -modules formels de manière évidente.

Lorsque  $X$  est un  $\mathcal{O}$ -module formel (resp.  $\mathcal{O}_D$ -module formel) et  $a \in \mathcal{O}$  (resp.  $a \in \mathcal{O}_D$ ), on note  $X(a)$  l'endomorphisme du groupe formel  $X$  induit par  $a$ .

1.3. — On rappelle que si

$$\varphi: X_1 \longrightarrow X_2$$

est une isogénie de groupes formels lisses, définie sur une  $\mathbb{F}_p$ -algèbre, le noyau de  $\varphi$  est un schéma en groupe fini plat ([Z] Kap. V § 3). Son rang est localement une puissance  $p^h$  de  $p$  ([Z] Kap. V § 4). La fonction localement constante  $h$  est appelée la hauteur de l'isogénie  $\varphi$ .

**Définition 1.3.1.** — *Un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules formels (resp.  $\mathcal{O}_D$ -modules formels) est une isogénie lorsque le morphisme de groupes formels sous-jacent est une isogénie. La ( $\mathcal{O}$ -) hauteur de cette isogénie est le quotient de la hauteur de l'isogénie par le degré  $r$  du corps résiduel de  $\mathcal{O}$  sur le corps premier  $\mathbb{F}_p$ .*

*Remarque :* La  $\mathcal{O}$ -hauteur est donc *a priori* à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ . On verra ultérieurement (cf. (2.2.1)) que ses valeurs sont en fait entières.

La notion suivante est l'analogue pour les  $\mathcal{O}$ -Modules formels de la notion de groupe formel lisse  $p$ -divisible.

**Définition 1.3.2.** — *Un  $\mathcal{O}$ -module formel  $X$  est dit de hauteur finie lorsque l'endomorphisme  $X(\pi)$  est une isogénie. Sa hauteur est alors la  $\mathcal{O}$ -hauteur de cette isogénie.*

**Proposition 1.3.3.** — *Soit*

$$\rho: X_1 \longrightarrow X_2$$

*un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules formels de hauteur finie sur  $B$ .*

1. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Le morphisme  $\varphi$  est une isogénie.*
- (b) *Il existe un entier  $n \geq 0$  et un morphisme*

$$\rho': X_2 \longrightarrow X_1$$

*tels que  $\rho' \circ \rho = X_1(\pi^n)$ .*

2. *Lorsqu'elles sont vérifiées les modules  $X_1$  et  $X_2$  ont même hauteur.*

*Preuve :* cf. [Z] Satz (5.10) et Satz (5.25).  $\square$

**Définition 1.3.4.** — Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux  $\mathcal{O}$ -modules formels (resp.  $\mathcal{O}_D$ -modules formels) de hauteur finie sur  $B$ . Soit  $\rho \in \text{Hom}(X_1, X_2) \otimes_{\mathcal{O}} K$ . On dit que  $\rho$  est une quasiisogénie lorsque  $\rho$  satisfait les conditions équivalentes suivantes.

1. Il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $X_2(\pi^n) \circ \rho$  soit une isogénie.
2.  $\rho$  admet un inverse dans  $\text{Hom}(X_2, X_1) \otimes_{\mathcal{O}} K$

La  $\mathcal{O}$ -hauteur (virtuelle) d'une quasiisogénie se définit de manière évidente.

## 2 Le module de coordonnées des $\mathcal{O}$ -modules formels

2.1. — Nous aurons besoin de quelques rappels sur les groupes formels lisses et les groupes finis plats commutatifs.

Dans la suite de ce paragraphe,  $B$  désigne une  $\mathbb{F}_p$ -algèbre.

**Proposition 2.1.1.** — Soit  $X$  un groupe formel lisse sur  $B$  pour lequel la multiplication par  $p$  est nulle. Localement sur  $\text{Spec } B$  pour la topologie de Zariski, il existe un isomorphisme

$$\mathbb{G}_a^{\dim X} \xrightarrow{\sim} X.$$

*Preuve :* Localement sur  $\text{Spec } B$ , le module de Cartier associé à  $X$  admet une  $V$ -base. On a  $F = 0$  sur  $M$  et le système de coordonnées associé à cette  $V$ -base définit donc un tel isomorphisme (cf. [Z] Kap. IV).  $\square$

On note

$$\begin{aligned} \text{Fr}: B &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto x^p. \end{aligned}$$

l'endomorphisme de Frobenius et

$$\tau: \mathbb{G}_{a,B} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,B}$$

l'isogénie de Frobenius ( $t \mapsto t^p$ ) du groupe additif formel  $\mathbb{G}_{a,B} = \text{Spf } B[[t]]$ . La  $B$ -algèbre des endomorphismes du groupe formel  $\mathbb{G}_{a,B}$  s'identifie de manière évidente à  $B[[\tau]]$ .

Soit  $X$  un groupe formel sur  $B$ . On associe à  $X$  le  $B[[\tau]]$ -module à gauche

$$M_X = \text{Hom}(X, \mathbb{G}_{a,B}).$$

Lorsque  $X$  est lisse annulé par  $p$ , il résulte de la proposition (2.1.1) que le  $B[[\tau]]$ -module  $M_X$  est localement pour la topologie de Zariski sur  $\text{Spec } B$  un  $B[[\tau]]$ -module libre de rang  $\dim X$  (au sens où tout point de  $\text{Spec } B$  admet un voisinage de Zariski affine  $\text{Spec } C$  tel que le  $C[[\tau]]$ -module

$$C \hat{\otimes}_B M = \varprojlim_n C \otimes_B M / C \otimes_B M \cdot \tau^n = C[[\tau]] \otimes_{B[[\tau]]} M$$



soit libre de rang  $\dim X$ ).

La multiplication à gauche par  $\tau$  sur  $M_X$  est Fr-semilinéaire. Elle induit donc un morphisme

$$(2.1.1.1) \quad F : \text{Fr}^* M_X \longrightarrow M_X.$$

A tout  $m \in M_X$ , on associe la différentielle

$$dm : \text{Lie } X \longrightarrow \text{Lie } \mathbb{G}_{a,B}.$$

On définit ainsi un morphisme de  $B$ -modules

$$D : \text{Coker } F \longrightarrow (\text{Lie } X)^\vee.$$

La preuve de la proposition suivante est laissée au lecteur.

**Proposition 2.1.2.** — *Lorsque  $X$  est lisse et annulé par  $p$ , le morphisme  $D$  est un isomorphisme.  $\square$*

La construction  $X \mapsto M_X$  induit visiblement un foncteur contravariant  $M$  de la catégorie des groupes formels lisses annulés par  $p$  dans celle des  $B[[\tau]]$ -modules localement sur  $\text{Spec } B$  libres de type fini.

**Proposition 2.1.3.** — *Le foncteur  $M$  est une anti-équivalence de catégories.*

*Preuve :* La restriction du foncteur  $M$  aux sous-catégories pleines dont les objets sont respectivement les puissances de  $\mathbb{G}_{a,B}$  et les  $B[[\tau]]$ -modules libres est une équivalence de catégories.

D'autre part, lorsque  $M$  et  $N$  sont deux  $B[[\tau]]$ -modules localement sur  $\text{Spec}(B)$  libres de type fini, le préfaisceau sur  $\text{Spec}(B)_{\text{zar}}$  qui à un ouvert affine  $\text{Spec}(C)$  associe

$$\text{Hom}_{C[[\tau]]}(C[[\tau]] \otimes_{B[[\tau]]} M, C[[\tau]] \otimes_{B[[\tau]]} N)$$

est en fait un faisceau (comme on le voit en considérant d'abord les  $B[[\tau]]$ -modules de longueur finie  $\text{Coker } F_M^n$  et  $\text{Coker } F_N^n$  puis en passant à la limite projective).

La proposition résulte alors de la proposition (2.1.1).  $\square$

Soit  $G$  un groupe affine commutatif fini et plat de présentation finie sur  $B$ . On considère le  $B$ -module  $M_G$  des morphismes de groupes de  $G$  dans le groupe additif  $\mathbb{G}_{a,B}$ .

**Proposition 2.1.4.** — *Supposons que  $G$  se plonge localement dans  $\mathbb{G}_{a,B}^N$  pour la topologie f.p.q.c. sur  $\text{Spec } B$ . Le  $B$ -module  $M_G$  est alors localement libre de type fini et sa formation commute au changement de base.*

*Preuve :* Ceci résulte de l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a) \longrightarrow \mathrm{Lie} G^*$$

et de ([SGA 3] VII<sub>A</sub> (7.4)) appliqué au dual de Cartier.  $\square$

**Proposition 2.1.5.** — *Considérons une suite exacte*

$$1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{u} G_2 \xrightarrow{v} G_3 \longrightarrow 1$$

*de groupes finis plats de présentation finie (ce qui signifie que  $u$  est un noyau de  $v$  dans la catégorie des schémas en groupes affines commutatifs et que  $v$  est plat surjectif).*

*Supposons que  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G_3$  vérifient l'hypothèse de la proposition (2.1.4).*

*La suite*

$$(*) \quad 0 \longrightarrow M_{G_3} \longrightarrow M_{G_2} \longrightarrow M_{G_1} \longrightarrow 0$$

*est alors exacte.*

*Preuve :* Les modules  $M_{G_i}$  sont localement libres, et il suffit donc de vérifier l'exactitude de  $(*)$  fibre à fibre. Le morphisme  $v$  est plat surjectif. La suite

$$0 \longrightarrow (G_1)_s \longrightarrow (G_2)_s \longrightarrow (G_3)_s \longrightarrow 0$$

$(s \in \mathrm{Spec} B)$  est donc exacte. L'exactitude de  $(*)_s$  résulte alors de ([SGA 3] VII<sub>A</sub> (8.1)) appliqué au dual de Cartier.  $\square$

Soit

$$\varphi: X_1 \longrightarrow X_2$$

une isogénie de groupes formels commutatifs lisses de dimension finie annulés par  $p$ . La restriction au noyau de  $\varphi$  des morphismes

$$X_2 \longrightarrow \mathbb{G}_a$$

définit un morphisme

$$M_{X_2} \longrightarrow M_{\mathrm{Ker} \varphi}.$$

**Proposition 2.1.6.** —

1. *La suite*

$$0 \longrightarrow M_{X_2} \longrightarrow M_{X_1} \longrightarrow M_{\mathrm{Ker} \varphi} \longrightarrow 0$$

*est exacte.*

2. *Le rang de  $M_{\mathrm{Ker} \varphi}$  est égal à la hauteur de  $\varphi$  (en tant que fonctions localement constantes sur  $\mathrm{Spec} B$ ).*

*Preuve* : Un morphisme de groupes formels lisses

$$X_1 \longrightarrow Y$$

dont la restriction à  $\text{Ker } \varphi$  est nulle admet une unique factorisation

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & X_2 & \end{array}$$

(cf. [Z], Satz (5.24)).

La suite

$$0 \longrightarrow M_{X_2} \longrightarrow M_{X_1} \longrightarrow \text{Ker } \varphi$$

est donc exacte.

Il résulte de ([Z] Satz (5.25)) qu'il existe un entier  $m$  et un morphisme

$$\psi : X_2 \longrightarrow \text{Fr}_*^m X_1$$

tel que le composé  $\psi \circ \varphi$  soit la  $m$ -ième puissance de l'isogénie de Frobenius

$$F : X_1 \longrightarrow \text{Fr}_* X_1.$$

Il résulte de ([Z] Satz (5.28)) que la suite

$$1 \longrightarrow \text{Ker } \varphi \longrightarrow \text{Ker } F^m \longrightarrow \text{Ker } \varphi \longrightarrow 1$$

est exacte (au sens de (2.1.4)). Le morphisme

$$M_{\text{Ker } F^m} \longrightarrow M_{\text{Ker } \varphi}$$

est donc surjectif. Le morphisme

$$M_1 \longrightarrow M_{\text{Ker } F^m}$$

n'est autre que

$$M_1 \longrightarrow \text{Coker}(F_{M_1}^m)$$

(où  $F_{M_1}$  est le morphisme (2.1.1.1)).

Le morphisme  $M_1 \longrightarrow M_{\text{Ker } \varphi}$  est donc surjectif, ce qui termine la preuve de (1).

Pour vérifier (2), on peut supposer que  $B$  est un corps parfait. Il résulte alors de ([Z], Satz (5.2)) que  $\text{Ker } \varphi$  est un sous-schéma en groupes de  $\mathbb{G}_{a,B}^N = X_1$  d'équations

$$u_1^{p^{h_1}} = 0, \dots, u_n^{p^{h_n}} = 0$$

( $u_i$  sont des coordonnées sur  $\mathbb{G}_{a,B}^N$ ).

Un calcul direct montre alors que le rang de  $M_{\text{Ker } \varphi}$  n'est autre que la hauteur  $h_1 + \dots + h_n$  de l'isogénie  $\varphi$ .  $\square$

2.2. — On applique maintenant ce qui précède au cas des  $\mathcal{O}$ -modules formels.

Soit  $B$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre dans laquelle l'image de  $\pi$  est nilpotente. On note maintenant

$$\mathrm{Fr}_p: B \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto x^p$$

le morphisme de Frobenius de la  $\mathbb{F}_p$ -algèbre  $B$  ;

$$\mathrm{Fr}_q: B \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto x^q$$

le morphisme de Frobenius de la  $\mathbb{F}_q$ -algèbre  $B$  ;

$$\tau_p: \mathbb{G}_{a,B} \longrightarrow \mathrm{Fr}_p^1 \mathbb{G}_{a,B}$$

et

$$\tau_q: \mathbb{G}_{a,B} \longrightarrow \mathrm{Fr}_* \mathbb{G}_{a,B}$$

les isogénies de Frobenius.

Soit  $X$  un  $\mathcal{O}$ -module formel sur  $B$ . Le  $B$ -module  $M_X$  est muni par fonctorialité d'une action de  $\mathcal{O}$ . Le  $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_p} B$ -module  $M_X$  est donc muni de deux actions de  $\mathbb{F}_q$ . Celles-ci induisent une graduation

$$M_X = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} M_i$$

(où  $r = [\mathbb{F}_q : \mathbb{F}_p]$ ) avec

$$M_i = \{m \in M_X \mid (\lambda^{p^i} \otimes 1)m = (1 \otimes \lambda)m\}.$$

La multiplication à gauche par  $\tau_p$  est de degré 1 pour cette graduation. Elle induit (cf. (2.1.1.1)) des morphismes  $B$ -linéaires

$$F_{p,i}: \mathrm{Fr}_p^* M_i \longrightarrow M_{i+1}.$$

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on notera

$$F_{p^n,i}: (\mathrm{Fr}_p^n)^* M_i \longrightarrow M_{i+n}$$

le morphisme

$$F_{p,i+n-1} \circ \mathrm{Fr}_p^* F_{p,i+n-2} \circ \cdots \circ (\mathrm{Fr}_p^{n-1})^* F_{p,i}$$

induit par la multiplication à gauche par  $\tau_p^n$ .

Les deux actions de  $\mathbb{F}_q$  sur  $(\mathrm{Lie} X)^\vee = \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathrm{Coker} F_{p,i}$  coïncident, et le  $B$ -module gradué  $(\mathrm{Lie} X)^\vee$  est donc concentré en degré zéro. Le morphisme  $F_{p,i}$

est injectif, et les morphismes  $F_{p,i}$  ( $0 \leq i \leq r-2$ ) sont donc des isomorphismes. Le  $B$ -module gradué  $M_X = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} M_i$ , muni du Frobenius (2.1.1.1)

$$F_p = \oplus F_{p,i} : \text{Fr}_p^* \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} M_i$$

s'identifie alors de manière évidente au  $B$ -module gradué  $\bigoplus_{i=0}^{r-1} (\text{Fr}_p^i)^* M_0$ , muni du Frobenius

$$\begin{aligned} \text{Fr}_p^* : \bigoplus_{i=0}^{r-1} (\text{Fr}_p^i)^* M_0 &\longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{r-1} (\text{Fr}_p^i)^* M_0 \\ (m_0, \dots, m_{r-1}) &\longmapsto (F(m_{r-1}), m_0, \dots, m_{r-2}). \end{aligned}$$

Soit  $\varphi : \xi \longrightarrow X$  une isogénie de  $\mathcal{O}$ -modules formels. Le morphisme  $M(\varphi)$  est un morphisme de modules gradués. Les morphismes

$$F_{p,i} : (\text{Fr}_p^i)^* \text{Coker } M(\varphi)_0 \longrightarrow \text{Coker } M(\varphi)_i \quad (0 \leq i \leq r-1)$$

sont des isomorphismes et les modules localement libres  $\text{Coker } M(\varphi)_i$  sont donc tous de même rang. La hauteur de  $\varphi$  est donc divisible par  $r$  et le rang de  $\text{Coker } M(\varphi)_0$  est la  $\mathcal{O}$ -hauteur de  $\varphi$ .

On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il revient au même de se donner  $(M, F)$  ou  $(M_0, F_0)$ . Les deux points de vue sont reliés par le dictionnaire suivant.

2.2.1. — *Dictionnaire :*

$M$		$M_0$
$B[[\tau_p]]$		$B[[\tau_q]]$
$D_p : \text{Coker } F_p \xrightarrow{\sim} (\text{Lie } X)^\vee$		$D_q : \text{Coker } F_q \xrightarrow{\sim} (\text{Lie } X)^\vee$
Le rang de $\text{Coker } M(\varphi)$		Le rang de $\text{Coker } M(\varphi)_0$
est la hauteur de $\varphi$		est la $\mathcal{O}$ -hauteur de $\varphi$

On laisse au lecteur le soin de traduire les résultats de (2.1) pour compléter le dictionnaire. Dans la suite, on utilisera librement cette nouvelle version de ces résultats.

Localement pour la topologie de Zariski sur  $\text{Spec } B$ , le  $B[[\tau_q]]$ -module  $M_X$  est libre (comme on le voit en remontant dans  $M_{X,0}$  une base de  $\text{Coker } F_{q,0}$ ). Le  $B$ -module  $M_{X,0}$  s'identifie donc à la limite projective des  $B$ -modules  $\text{Coker } F_{q^m,0}$  (localement, il existe un isomorphisme

$$\text{Coker } F_{q^m,0} \simeq B[[\tau_q]]^{\dim X} / B[[\tau_q]]^{\dim X} \cdot \tau_q^m).$$

Il résulte du fait que l'image de l'uniformisante  $\pi$  de  $\mathcal{O}$  dans  $B$  est nilpotente que l'action de  $\pi \otimes 1 \in \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_q} B$  sur  $\text{Coker } F_{q^m,0}$  est nilpotente. Le séparé complété  $\widehat{\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_q} B}$  de  $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_q} B$  pour la topologie  $\pi \otimes 1$ -adique agit donc encore sur la limite projective  $M_{X,0}$  des  $B$ -modules  $\text{Coker } F_{q^m,0}$ .

Grâce au dictionnaire (2.2.1), on n'utilisera plus  $M_X$ . Pour alléger les notations, on notera désormais

$$\text{Fr}, \tau, M_X, F^m$$

ce qu'auparavant on notait

$$\text{Fr}_q, \tau_q, M_{X,0}, F_{q^m,0}.$$

On considère maintenant la catégorie dont les objets sont les  $\widehat{\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_q} B}$ -modules  $M$  munis d'un morphisme de Frobenius

$$(\text{Id}_{\widehat{\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_q} B}} \text{Fr})^* M \longrightarrow M$$

et dont les morphismes sont définis de la manière évidente.

Le module des coordonnées  $M_X$  définit un foncteur de la catégorie des  $\mathcal{O}$ -modules formels sur  $B$  dans la catégorie ci-dessus.

**Proposition 2.2.2.** — *Le foncteur module des coordonnées est pleinement fidèle.*

*Preuve :* La catégorie des  $B[[\tau]]$ -modules localement sur  $\text{Spec } B$  pour la topologie de Zariski libres de rang fini est une sous-catégorie pleine de celle des  $B$ -modules  $M$  munis d'un morphisme  $\text{Fr}$ -semilinéaire  $M \rightarrow M$  (ou, ce qui revient au même, d'un morphisme  $\text{Fr}^* M \rightarrow M$ ). La proposition (2.2.2) résulte alors de la proposition (2.1.3).  $\square$

On va maintenant caractériser l'image essentielle du foncteur module de coordonnées restreint aux  $\mathcal{O}$ -modules formels de hauteur finie.

Soit  $X$  un  $\mathcal{O}$ -module formel de hauteur  $h$  sur  $B$ .

On note  $i$  le morphisme structural de la  $\mathcal{O}$ -algèbre  $B$  et  $\Gamma$  le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B &\longrightarrow B \\ a \widehat{\otimes} b &\longmapsto i(a) \cdot b \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.3.** — *Le module des coordonnées  $M_X$  vérifie les conditions suivantes.*

1. *Le  $\widehat{\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_q} B}$ -module  $M_X$  est localement libre de rang  $h$  ;*
2. *il existe un  $B$ -module localement libre de type fini  $\omega$  tel que*

$$\text{Coker } F = \Gamma_*(\omega);$$

3. *il existe un entier  $n$  tel que le morphisme*

$$F^n : (\text{Id}_{\widehat{\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_q} B}} \text{Fr}^n)^* M / \pi M \longrightarrow M / \pi M$$

*soit le morphisme nul.*

*Preuve* : On va d'abord démontrer les deux derniers points. Le point (2) est clair (on a  $\omega = (\text{Lie } X)^\vee$  cf. (2.2.1)).

D'après ([Z], Satz (5.25)), il existe un entier  $n$  et une isogénie  $\psi : X \rightarrow (\text{Fr}^n)_* X$  tels que le composé

$$X \xrightarrow{X(\pi)} X \xrightarrow{\psi} \text{Fr}_*^n X$$

soit l'isogénie de Frobenius  $F_X^n$ . On a  $M(F_X^n) = F^n$  et le dernier point en résulte.

Il résulte du point (2) que l'action de  $\pi \hat{\otimes} 1$  sur  $\text{Coker } F$  est nilpotente. On a donc pour un certain entier  $m$

$$\text{Im } F \supset (\pi^m \hat{\otimes} 1)M$$

et donc

$$\text{Im } F^k \supset (\pi^{mk} \hat{\otimes} 1)M.$$

La filtration  $(\text{Im } F^k)_k$  de  $M$  est séparée (localement,  $\text{Im } F^k$  s'identifie à  $B[[\tau]]^{\dim X} / B[[\tau]]^{\dim X} \tau^k$ ) et il en est donc de même de la filtration  $\pi \hat{\otimes} 1$ -adique.

Il résulte de (2.1.6) (via le dictionnaire (2.2.1)) que  $M_X$  est sans  $\pi \hat{\otimes} 1$ -torsion et que  $M_X / (\pi \hat{\otimes} 1)M_X$  est localement libre de rang  $h$ . La proposition (2.2.3) résulte alors du lemme suivant.

**Lemme 2.2.4.** — *Soit  $M$  un  $\mathcal{O} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -module séparé pour la topologie  $\pi \hat{\otimes} 1$ -adique. On suppose que*

1.  *$M$  est sans  $\pi \hat{\otimes} 1$ -torsion ;*
2. *le  $B$ -module  $M / (\pi \hat{\otimes} 1)M$  est localement libre.*

*Le  $\mathcal{O} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -module  $M$  est alors localement libre.*

*Preuve* : voir ([Bo] A. C. Ch. III § 2 n° 8 cor. 3).  $\square$

Considérons les catégories  $\text{Mod } \mathcal{F}$  et  $\text{Mod } \mathcal{C}$  suivantes. La catégorie  $\text{Mod } \mathcal{F}$  est la sous-catégorie pleine de la catégorie des  $\mathcal{O}$ -modules formels formée des  $\mathcal{O}$ -modules localement libres de hauteur finie.

La catégorie  $\text{Mod } \mathcal{C}$  est la sous-catégorie pleine de celle des  $\mathcal{O} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -modules localement libres munis d'un Frobenius

$$F : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* M \longrightarrow M$$

formée des objets vérifiant les conditions (2) et (3) de la proposition (2.2.3). Le foncteur module de coordonnées se restreint en un foncteur

$$M : \text{Mod } \mathcal{F} \longrightarrow \text{Mod } \mathcal{C}$$

**Théorème 2.2.6.** — *Le foncteur  $M$  est une anti-équivalence de catégories.*

*Preuve :* Il suffit de montrer que le foncteur  $M$  est essentiellement surjectif (cf. (2.2.2)).

Soit  $M \in \text{ObMod}\mathcal{C}$ . Il résulte de la condition (3) qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Im}F^m \subset \pi M$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le morphisme

$$F^{mn}(\text{Id}_{\mathcal{O}} \otimes \text{Fr}^{mn})^* M / \pi^n M \longrightarrow M / \pi^n M$$

est donc le morphisme nul. L'action de  $B[\tau]$  sur  $M$  définie en faisant agir  $\tau$  via le morphisme Fr-semilinéaire associé à  $F$  s'étend donc par continuité en une action de  $B[[\tau]]$  sur  $M$ .

On va montrer que le  $B[[\tau]]$ -module  $M$  est localement sur  $\text{Spec } B$  libre de type fini. On aura besoin des lemmes suivants.

Soit  $N$  un  $B[[\tau]]$ -module. La multiplication à gauche par  $\tau$  induit un morphisme de  $B$ -modules

$$F : \text{Fr}^* N \longrightarrow N.$$

Considérons la filtration  $\text{Fil}_\tau$  de  $N$  définie par

$$\text{Fil}_\tau^i N = \text{Im}F^i.$$

**Lemme 2.2.7.** — *Supposons que le  $B[[\tau]]$ -module  $N$  vérifie les conditions suivantes.*

1. *La filtration  $\text{Fil}_\tau^i$  est exhaustive ;*
2. *le morphisme  $F$  est injectif ;*
3. *Coker  $F$  est un  $B$ -module localement libre de type fini.*

*Localement sur  $\text{Spec } B$ , le  $B[[\tau]]$ -module  $M$  est alors libre de type fini.*

*Preuve :* voir ([Bo] A. C. Ch. III § 2 n° 8 cor. 3).  $\square$

*Remarque :* Ce lemme est l'analogue pour les  $B[[\tau]]$ -modules du lemme (2.2.4).

**Lemme 2.2.8.** — *Soient  $N$  un  $\mathcal{O}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -module localement libre de rang  $h$  et  $N'$  un sous  $\mathcal{O}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -module de  $N$ . Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées*

1. *Il existe un entier  $n$  tel que  $(\pi^n \widehat{\otimes} 1)N \subset N'$  ;*
2. *le  $B$ -module  $N/N'$  est localement libre de type fini.*

*Le  $\mathcal{O}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -module  $N'$  est alors localement libre de rang  $h$ .*

*Preuve :* Soit un entier  $n' \geq n$ . La suite exacte

$$0 \longrightarrow N' / (\pi^{n'} \widehat{\otimes} 1) N' \longrightarrow N / (\pi^{n'} \widehat{\otimes} 1) N' \longrightarrow N / N' \longrightarrow 0$$

est scindée, puisque le  $B$ -module  $N/N'$  est localement libre. Le  $B$ -module  $N' / (\pi^{n'} \widehat{\otimes} 1) N'$  est donc facteur direct du  $B$ -module localement libre de type fini  $N / (\pi^{n'} \widehat{\otimes} 1) N$  et est donc lui aussi localement libre de type fini.



Il résulte de la suite exacte

$$0 \longrightarrow N' / (\pi^n \hat{\otimes} 1) N \xrightarrow{\pi} N' / (\pi^{n+1} \hat{\otimes} 1) N \xrightarrow{\pi} N' / (\pi^n \hat{\otimes} 1) N' \longrightarrow 0$$

et de ([Bo] A. C. ch. I § 2 n° 5) que le  $B$ -module  $N' / (\pi^n \hat{\otimes} 1) N'$  est plat, de présentation finie.

Il résulte d'un comptage de rangs dans les deux suites exactes ci-dessus que le  $B$ -module localement libre  $N' / (\pi^n \hat{\otimes} 1) N'$  est de rang  $h$ .

Le  $\mathcal{O} \hat{\otimes}_{F_q} B$ -module  $N'$ , qui est un sous-module d'un  $\mathcal{O} \hat{\otimes}_{F_q} B$ -module localement libre, est séparé pour la topologie  $(\pi \hat{\otimes} 1)$ -adique et sans  $(\pi \hat{\otimes} 1)$ -torsion. Le lemme (2.2.8) résulte alors du lemme (2.2.4).  $\square$

**Lemme 2.2.9.** — *Soit un morphisme*

$$\varphi : N' \longrightarrow N$$

*de  $\mathcal{O} \hat{\otimes}_{F_q} B$  modules localement libres de rang  $h$ . Supposons que le conoyau de  $\varphi$  soit annulé par  $\pi^n \hat{\otimes} 1$  et localement libre de type fini en tant que  $B$ -module. Le morphisme  $\varphi$  est alors injectif et il existe un morphisme*

$$\psi : N \longrightarrow N'$$

*tel que  $\psi \circ \varphi = \pi^n \hat{\otimes} 1$ .*

*Preuve :* Le morphisme

$$\varphi : N' \twoheadrightarrow \text{Im} \varphi$$

est un morphisme surjectif de  $\mathcal{O} \hat{\otimes}_{F_q} B$ -modules localement libres de rang  $h$ . C'est donc un isomorphisme. Le morphisme composé

$$\psi : N \xrightarrow{\pi^n \hat{\otimes} 1} (\pi^n \hat{\otimes} 1) N \subset \text{Im} \varphi \xrightarrow{\sim} N'$$

est tel que  $\psi \circ \varphi = \pi^n \hat{\otimes} 1$ .  $\square$

Achevons la preuve du théorème.

Le  $B[[\tau]]$ -module  $M$  vérifie la condition (3) de la proposition (2.2.3). La filtration  $\text{Fil}_\tau M$  est donc exhaustive. Il vérifie aussi la condition (2) et il résulte alors du fait que l'image de  $\pi$  dans  $B$  est nilpotente qu'il existe un entier  $n$  tel que  $\text{Coker} F$  soit annulé par  $\pi^n \hat{\otimes} 1$ . En appliquant à  $F$  le corollaire (2.2.9) puis en utilisant le lemme (2.2.7), on voit que le  $B[[\tau]]$ -module  $M$  est localement sur  $\text{Spec } B$  libre de type fini.

Soit  $X$  le groupe formel avec action de  $\mathcal{O}$  correspondant à  $M$  (via (2.1.3) et (2.2.1)). De la condition (2), il résulte que  $X$  est un  $\mathcal{O}$ -module formel. De la condition (3), il résulte qu'il existe un morphisme

$$M(\psi) : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr}^n)^* M \longrightarrow M$$

tel que  $(\pi \hat{\otimes} 1) M(\psi) = F^n$ , et donc un morphisme

$$\psi : X \longrightarrow (\text{Fr}^n)_* X$$

tel que  $\psi \circ X(\pi)$  soit la  $n$ -ième puissance de l'isogénie de Frobenius du groupe formel  $X$ . Il résulte alors de ([Z], Satz 5.25) que  $X(\pi)$  est une isogénie. Le  $\mathcal{O}$ -module formel  $X$  est donc de hauteur finie.  $\square$

**Proposition 2.2.10.** — *La formation de  $M$  est compatible au changement de base dans le sens suivant : soient  $X$  un  $\mathcal{O}$ -module formel sur  $B$ ,  $C$  une  $B$ -algèbre et  $X \otimes C$  le  $\mathcal{O}$ -module formel sur  $C$  obtenu par extension des scalaires, on a*

$$\begin{aligned} M_{X \otimes C} &= C \widehat{\otimes}_B M \\ &= (\mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} C) \otimes_{(\mathcal{O} \widehat{\otimes}_B)} M. \end{aligned}$$

*Preuve :* Ceci résulte de (2.1.6) appliqué à l'isogénie  $X(\pi^n)$  puis de (2.1.4) et de l'isomorphisme

$$M_X \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n M_X / (\pi^n \widehat{\otimes} 1) M_X. \quad \square$$

**Proposition 2.2.11.** — *Soit*

$$\varphi : X \longrightarrow X'$$

*un morphisme de  $\mathcal{O}$ -modules formels. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *Le morphisme  $\varphi$  est une isogénie.*
2. *Le morphisme*

$$\varphi \otimes \text{Id}_K : M_{X'} \otimes_{\mathcal{O}} K \longrightarrow M_X \otimes_{\mathcal{O}} K$$

*est un isomorphisme.*

*Preuve :* C'est une reformulation de la proposition (1.3.3).  $\square$

2.2.12. — Avec les notations de la proposition précédente, se donner une quasiisogénie

$$\varphi : X \longrightarrow X'$$

revient à se donner un isomorphisme

$$M(\varphi) : M_{X'} \otimes_{\mathcal{O}} K \longrightarrow M_X \otimes_{\mathcal{O}} K$$

compatible aux Frobenius (c'est-à-dire tel que

$$(F_X \otimes \text{Id}_K) \circ (\text{Id}_K \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M(\varphi) = M(\varphi) \circ (F_{X'} \otimes \text{Id}_K).$$

2.3. — On rappelle qu'on identifie la  $\mathbb{F}_q$ -algèbre  $\mathcal{O}$  à  $\mathbb{F}_q[[\pi]]$  et la  $\mathcal{O}$ -algèbre  $\mathcal{O}_D$  à la  $\mathbb{F}_q$ -algèbre  $\mathbb{F}_{q^d}[[\Pi]]$  des séries formelles non commutatives en  $\Pi$  soumises à la relation  $\Pi\lambda = \lambda^q\Pi$  ( $\forall \lambda \in \mathbb{F}_{q^d}$ ), considérée comme une  $\mathcal{O}$ -algèbre via le morphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_q[[\pi]] &\longrightarrow \mathbb{F}_{q^d}[[\Pi]] \\ \pi &\longmapsto \Pi^d \end{aligned}$$

de  $\mathbb{F}_q$ -algèbres. On rappelle qu'on note  $\mathcal{O}_d$  la sous-extension maximale non ramifiée  $\mathbb{F}_{q^d}[[\pi]] \subset \mathcal{O}_D$ .

Soient une  $\mathcal{O}$ -algèbre  $B$  dans laquelle l'image de  $\pi$  est nilpotente et un  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $X$  de hauteur finie sur  $B$ . Le module de coordonnées  $M$  de  $X$  est muni par fonctorialité d'une action de  $\mathcal{O}_D$  qui en fait un  $\mathcal{O}_D \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -module à droite.

Supposons que  $B$  est muni d'une structure de  $\mathcal{O}_d$ -algèbre

$$\beta: \mathcal{O}_d \longrightarrow B$$

qui prolonge sa structure de  $\mathcal{O}$ -algèbre. Le module  $M$  est alors muni de deux actions de  $\mathbb{F}_{q^d}$ , obtenues en considérant les plongements  $\mathbb{F}_{q^d} \subset \mathcal{O}_D$  et  $\mathbb{F}_{q^d} \subset B$ . Celles-ci induisent une graduation

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M_i$$

(avec  $M_i = \text{Ker}(\lambda \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} \lambda^{q^i})$  pour  $\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}$ ,  $\mathbb{F}_q[\lambda] = \mathbb{F}_{q^d}$ ).

L'endomorphisme  $\Pi \widehat{\otimes} 1$  de  $M$  envoie  $M_i$  dans  $M_{i+1}$  et le morphisme  $F$  envoie  $(\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M_i$  dans  $M_{i+1}$ . Le morphisme  $\Pi \widehat{\otimes} 1$  injecte  $M_i$  dans  $M_{i+1}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . Les  $\mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -modules localement libres  $M_i$  sont donc tous de même rang. En particulier, la hauteur de  $X$  est multiple de  $d$ .

Soient maintenant  $i \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $nd \geq i$ . On note  $\langle i \rangle$  la classe de  $i$  modulo  $d$ . Le morphisme composé

$$M_{\langle i \rangle} \xrightarrow{\Pi^{nd-i}} M_o \xrightarrow{\pi^{-n} \otimes 1} M_o \otimes_{\mathcal{O}} K$$

ne dépend pas du choix de  $n$ . Soit  $\mathcal{M}_i$  son image. Les  $\mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -modules  $\mathcal{M}_i$  sont localement libres de même rang.

On vérifie de même que dans [B-C] ou [R] qu'il revient au même de se donner un  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $X$  de hauteur  $h = dh'$  sur  $B$  ou une suite  $(\mathcal{M}_i, \Pi_i, F_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  où  $\mathcal{M}_i$  est un  $\mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -module localement libre de rang  $h'$ ,

$$\Pi_i: \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}_{i+1}$$

et  $F_i: (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}_{i+1}$  sont des morphismes de  $\mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -modules, telle que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ :

1. le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \mathcal{M}_i & \xrightarrow{F_i} & \mathcal{M}_{i+1} \\ (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \Pi_i \downarrow & & \downarrow \Pi_{i+1} \\ (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \mathcal{M}_{i+1} & \xrightarrow{F_{i+1}} & \mathcal{M}_{i+2} \end{array}$$

est commutatif ;

2. l'image du morphisme composé

$$\mathcal{M}_i \xrightarrow{\Pi_i} \mathcal{M}_{i+1} \xrightarrow{\Pi_{i+1}} \dots \xrightarrow{\Pi_{i+d-1}} \mathcal{M}_{i+d}$$

est  $(\pi \widehat{\otimes} 1) \mathcal{M}_{i+d}$  ;

3. il existe un  $B$ -module localement libre  $\omega_i$  tel que  $\text{Coker } F_i = \Gamma_*(\omega_i)$   
(on rappelle qu'on note  $\Gamma$  le morphisme

$$\begin{aligned}\mathcal{O} \hat{\otimes} B &\longrightarrow B \\ a \hat{\otimes} b &\longmapsto \beta(a) \cdot b\end{aligned}$$

4. il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que le morphisme composé

$$\begin{aligned}(\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr}^n)^* \mathcal{M}_0 &\xrightarrow{(\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr}^{n-1})^* F_0} (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr}^{n-1})^* \mathcal{M}_1 \longrightarrow \dots \\ &\dots \xrightarrow{F_{n-1}} \mathcal{M}_n / (\pi \hat{\otimes} 1) \mathcal{M}_n\end{aligned}$$

soit le morphisme nul.

### 3 Théorie des déformations

3.1. — De manière analogue au cas des groupes  $p$ -divisibles [M], on va montrer que les relèvements de  $\mathcal{O}$ -modules formels de hauteur finie équivalent aux relèvements de la filtration « de Hodge ».

Considérons un module de coordonnées (2.2)  $(M, F)$  sur une  $\mathcal{O}$ -algèbre  $B$  dans laquelle l'image de  $\pi$  est nilpotente. Soit  $\gamma_\pi = \pi \hat{\otimes} 1 - 1 \hat{\otimes} \pi$ . Considérons les  $B$ -modules localement libres  $H = (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* M / \gamma_\pi (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* M$  et  $\omega = \text{Coker } F$ . On appellera module de cohomologie de de Rham le premier de ces modules. On va construire un plongement  $\omega \hookrightarrow H$  localement facteur direct, qu'on appellera filtration de Hodge.

Le conoyau  $\omega$  de  $F$  est annulé par  $\gamma_\pi$ , et l'image de  $F$  contient donc  $\gamma_\pi M$ . De plus, le morphisme  $F$  est injectif (2.2.9). Il existe donc un unique morphisme

$$V: M \longrightarrow (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* M$$

tel que  $F \cdot V = \gamma_\pi \text{Id}_M$ . Le plongement  $\omega \subset H$  est celui induit par  $V$ . La suite

$$0 \longrightarrow \text{Coker } V \longrightarrow M / \gamma_\pi M \longrightarrow \omega = \text{Coker } F \longrightarrow 0$$

est exacte. Le conoyau  $\alpha$  de  $V$  est donc un  $B$ -module localement libre et  $\omega \subset H$  est donc localement facteur direct.

*Remarque :* Il résulte d'un travail non publié de Anderson que la cohomologie de de Rham  $H$  et la filtration de Hodge  $\omega \subset H$  coïncident avec celles définies par Gekeler [G].

Soit  $I$  un idéal de  $B$  de puissance  $q$ -ième nulle. On note  $\bar{B} = B/I$ .

**Proposition 3.1.1.** — *Le  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -module  $M$ , et donc aussi le  $B$ -module  $H$ , ne dépendent à isomorphisme canonique près que de la réduction modulo  $I$  de  $M$ .*

Cette proposition résulte immédiatement de la construction suivante.

**Construction.** — Soit  $\varphi : N_1 \rightarrow N_2$  un morphisme de  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -modules localement libres. Le morphisme  $(\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* \varphi$  ne dépend que de la réduction  $\bar{\varphi}$  de  $\varphi$  modulo  $I$ . Soit

$$\bar{\varphi} : \bar{N}_1 = N_1 \otimes_B \bar{B} \rightarrow \bar{N}_2 = N_2 \otimes_B \bar{B}$$

un morphisme de  $\mathcal{O} \hat{\otimes} \bar{B}$ -modules. Localement sur  $\text{Spec } B$  pour la topologie de Zariski, les  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -modules  $N_1$  et  $N_2$  sont libres (cf. lemme(2.2.4)). En relevant localement  $\bar{\varphi}$ , on définit un relèvement

$${}^{\tau}\bar{\varphi} : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* N_1 \rightarrow (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* N_2$$

de  $(\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* \bar{\varphi}$ .

De même, soit  $\bar{N}$  un  $\mathcal{O} \hat{\otimes} \bar{B}$ -module localement libre. En relevant localement  $\bar{N}$ , on définit un relèvement  ${}^{\tau}\bar{N}$  de  $(\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* \bar{N}$ .

Soit  $\text{Hod}$  la catégorie dont les objets sont les couples  $(\bar{M}, \omega \subset H)$  où

1.  $\bar{M}$  est un module de coordonnées sur  $\bar{B}$

2.  $\omega$  est un sous- $B$ -module localement facteur direct de  $H = {}^{\tau}\bar{M} / \gamma_{\pi} {}^{\tau}\bar{M}$

relevant le sous- $\bar{B}$ -module  $\bar{\omega} = \text{Coker } \bar{F}$  de  $\bar{H} = H \otimes_B \bar{B}$  modulo  $I$ . La réduction modulo  $I$  et la filtration de Hodge d'un module de coordonnées sur  $B$  forment un objet de cette catégorie. Cette construction définit en fait un foncteur

$$dR : \text{Mod } \mathcal{C} \rightarrow \text{Hod}.$$

**Proposition 3.1.2.** — Le foncteur  $dR$  est une équivalence de catégories.

*Preuve :* On va d'abord prouver que le foncteur  $dR$  est pleinement fidèle.

Le lemme suivant est analogue à un lemme de Drinfeld ([D1] Lemme 3), voir aussi ([K1], Lemme (1.1.3)) et ([Z] Satz (4.47)).

**Lemme 3.1.3.** — Soient  $M = (F, F_M)$  et  $N = (N, F_N)$  deux modules de coordonnées sur  $B$ .

1. Les  $\mathcal{O}$ -modules

$$\text{Hom}_F(M, N) \text{ et } \text{Hom}_{\bar{F}}(\bar{M}, \bar{N})$$

sont sans torsion

2. Le morphisme de réduction

$$\text{Hom}_F(M, N) \rightarrow \text{Hom}_F(\bar{M}, \bar{N})$$

est injectif et s'inverse à torsion près en un morphisme de relèvement virtuel

$$\text{Hom}_F(\bar{M}, \bar{N}) \rightarrow \text{Hom}_F(M, N) \otimes_{\mathcal{O}} K$$

$$\bar{\varphi} \mapsto \text{"}\varphi\text{"}.$$

*Preuve* : Le premier point résulte du fait que les modules  $N$  et  $\overline{N}$  sont sans  $\pi \hat{\otimes} 1$ -torsion.

On rappelle qu'on a supposé que l'image de  $\pi$  dans  $B$  est nilpotente. La somme

$$\sum_{n \geq 0} \pi^{-(n+1)} \hat{\otimes} \pi^n$$

définit alors un inverse  $\gamma_\pi^{-1}$  de  $\gamma_\pi = \pi \hat{\otimes} 1 - 1 \hat{\otimes} \pi$  dans  $K \hat{\otimes} B$ . Le morphisme  $V_N$  admet donc

$$\gamma_\pi^{-1} F : (\text{Id}_\mathcal{O} \otimes \text{Fr})^* M \longrightarrow M \otimes_\mathcal{O} K$$

pour inverse à  $\pi \hat{\otimes} 1$ -torsion près.

Soit  $\varphi \in \text{Hom}_F(M, N)$ . Il résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ V_M \downarrow & & \downarrow V_N \\ {}^\tau \overline{M} & \xrightarrow{{}^\tau \overline{\varphi}} & {}^\tau \overline{N} \end{array}$$

que l'égalité

$$\varphi = \gamma_\pi^{-1} F_N \circ {}^\tau \overline{\varphi} \circ V_M$$

a lieu dans  $\text{Hom}_F(M, N \otimes_\mathcal{O} K) = \text{Hom}_F(M, N) \otimes_\mathcal{O} K$ . Le morphisme de relèvement virtuel n'est autre que

$$\overline{\varphi} \longmapsto \gamma_\pi^{-1} F_N \circ {}^\tau \overline{\varphi} \circ V_M. \quad \square$$

Soient maintenant deux modules de coordonnées  $M$  et  $N$  sur  $B$  et un morphisme

$$\overline{\varphi} : \overline{M} \longrightarrow \overline{N}.$$

Supposons que le morphisme

$$H(\overline{\varphi}) = {}^\tau \overline{\varphi} : H_M = {}^\tau \overline{M} / \gamma_\pi {}^\tau \overline{M} \longrightarrow H_N = {}^\tau \overline{N} / \gamma_\pi {}^\tau \overline{N}$$

préserve la filtration de Hodge (i.e.  $H(\overline{\varphi})(\omega_M) \subset \omega_N$ ). Le morphisme composé

$$M \xrightarrow{{}^\tau \overline{\varphi} \circ V_M} {}^\tau \overline{N} \rightarrow \alpha_N = \text{Coker } V_N$$

est alors nul. On a donc  ${}^\tau \overline{\varphi} \circ V_M(M) \subset V_N(N)$ , et donc " $\varphi$ "( $M$ )  $\subset N$ . Ceci prouve la pleine fidélité du foncteur.

Considérons maintenant une paire  $(\overline{M}, \omega \subset H) \in \text{ObHod}$ .

Soit  $M$  le noyau du morphisme composé

$${}^\tau \overline{M} \longrightarrow H \longrightarrow H/\omega = \alpha.$$

Il résulte du lemme (2.2.8) que  $M$  est un  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -module localement libre. Le  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -module  $\alpha = {}^\tau \overline{M}/M$  est annulé par  $\gamma_\pi$  et on a donc  $\gamma_\pi \cdot {}^\tau \overline{M} \subset M \subset {}^\tau \overline{M}$ .

Soit  $F$  le morphisme composé

$${}^{\tau}\overline{M} \xrightarrow{\gamma_{\pi}} \gamma_{\pi} \cdot {}^{\tau}\overline{M} \subset M.$$

La réduction modulo  $I$  de  $M$  n'est autre que  $\overline{M}$ , et ceci induit un isomorphisme  ${}^{\tau}\overline{M} \simeq (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M$ . Il résulte du fait que  $\text{Coker } F = \omega \subset H$  est annulé par  $\gamma_{\pi}$  que la paire

$$(M, F: (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M = \overline{M} \rightarrow M)$$

vérifie (2.2.3 (2)).

Soit  $m \geq 0$  un entier tel que l'image  $\pi_B$  de  $\pi$  dans  $B$  vérifie  $\pi_B^m = 0$ . Il résulte de (2.2.3 (3)) pour  $\overline{M}$  qu'il existe un entier  $n$  tel que

$$\overline{F}^n (\text{Id}_{\mathcal{O}} \otimes \text{Fr}^n)^* {}^{\tau}\overline{M} \subset (\pi^{m+1} \widehat{\otimes} 1)^{\tau} \overline{M}.$$

On a alors

$${}^{\tau}\overline{F}^n ((\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr}^n)^* {}^{\tau}\overline{M}) \subset (\pi^{m+1} \widehat{\otimes} 1)^{\tau} \overline{M}$$

et donc

$$F^n ((\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr}^n)^* M) \subset (\pi^{n+1} \widehat{\otimes} 1)^{\tau} \overline{M}.$$

Or on a l'inclusion  $\gamma_{\pi} {}^{\tau}\overline{M} \subset M$ , et donc

$$(\pi^{m+1} \widehat{\otimes} 1)^{\tau} \overline{M} \subset (\pi^{m+1} \widehat{\otimes} 1) \gamma_{\pi}^{-1} M \subset (\pi \widehat{\otimes} 1) M.$$

La condition (2.2.3 (3)) pour  $M$  en résulte, et  $M$  est donc un module de coordonnées.

□

3.2. — Le foncteur  $dR$  qu'on vient de définir admet la version modifiée (2.3) suivante. Les isomorphismes (2.3 (2))

$$\Pi^d: \mathcal{M}_i \longrightarrow \pi \widehat{\otimes} 1 \mathcal{M}_{i+d}$$

induisent des isomorphismes  $H_i \longrightarrow H_{i+d}$  qui envoient  $\omega_i = \text{Coker } F_i$  sur  $\omega_{i+d}$ . Le morphisme  $\Pi_i: H_i \longrightarrow H_{i+1}$  induit par  $\Pi_i: \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}_{i+1}$  envoie  $\omega_i$  dans  $\omega_{i+1}$ . Le composé  $H_i \xrightarrow{\Pi^d} H_{i+d} = H_i$  est la multiplication par  $\pi_B$ . Le foncteur  $dR$  modifié envoie alors la catégorie des modules de coordonnées modifiés sur  $B$  dans la catégorie des paires  $((\overline{\mathcal{M}}_i, \overline{\Pi}_i, \overline{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (\omega_i \subset H_i)_{i \in \mathbb{Z}})$  formées d'un module de coordonnées modifié  $(\overline{\mathcal{M}}_i, \overline{\Pi}_i, \overline{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  sur  $\overline{B}$  et d'une suite  $(\omega_i \subset H_i)$  de facteurs directs  $\omega_i$  des  $B$ -modules  $H_i = {}^{\tau}\overline{\mathcal{M}}_i / \gamma_{\pi} \cdot {}^{\tau}\overline{\mathcal{M}}_i$ , telle que  $\Pi_i(\omega_i) \subset \omega_{i+1}$  et que  $(\omega_i \subset H_i) = (\omega_{i+d} \subset H_{i+d})$ .

De la proposition (3.1.2) résulte la proposition suivante.

**Proposition 3.2.1.** — *Le foncteur  $dR$  modifié est une équivalence de catégories.* □

## 4 Le foncteur $G$ de Drinfeld

4.1. — Soit  $B$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre dans laquelle l'image de  $\pi$  est nilpotente.

**Définition 4.1.1.** — Un  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $X$  sur  $B$  est dit *spécial* lorsque l'action de  $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}_D$  induite sur l'espace tangent  $\text{Lie } X$  fait de  $\text{Lie } X$  un  $\mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} B$ -module inversible.

On suppose que  $B$  est muni d'une structure de  $\mathcal{O}_d$ -algèbre qui prolonge sa structure de  $\mathcal{O}$ -algèbre. Soit  $X$  un  $\mathcal{O}_D$ -module formel de hauteur finie sur  $B$ . On considère la suite  $(\mathcal{M}_i, F_i, \Pi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  associée à  $X$  (2.3) et la suite de  $B$ -modules localement libres  $\omega_i$  (2.3 (3)).

**Proposition 4.1.2.** — Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. le  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $X$  est spécial.
2. les  $B$ -modules localement libres  $\omega_i$  sont de rang 1.

*Preuve :* Le  $B$ -module  $\omega_i$  est naturellement isomorphe au  $B$ -module

$$(\text{Lie } X)_i^\vee = \{c \in (\text{Lie } X)^\vee / (\lambda \otimes 1)c = (1 \otimes \lambda^q)c, \forall \lambda \in \mathbb{F}_{q^d}\}. \quad \square$$

Soient  $X$  et  $Y$  deux  $\mathcal{O}_D$ -modules formels et

$$\rho: X \longrightarrow Y$$

une quasiisogénie. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $Y(\Pi^n) \circ \rho$  soit une isogénie (des  $\mathcal{O}$ -modules formels sous-jacents  $X$  et  $Y$ ). Les  $B$ -modules

$$C_i = \text{Coker}(\mathcal{M}_{\rho, i+n} \circ \Pi_Y^n: \mathcal{M}_{Y, i} \longrightarrow \mathcal{M}_{X, i+n})$$

(où pour simplifier les notations on a posé  $\Pi_Y^n = \Pi_{Y, i+n-1} \circ \cdots \circ \Pi_{Y, i}$ ) sont alors localement libres.

**Lemme 4.1.3.** — Supposons que les  $\mathcal{O}_D$ -modules formels  $X$  et  $Y$  soient spéciaux. Les  $B$ -modules localement libres  $C_i$  sont alors tous de même rang. En particulier, les  $B$ -modules localement libres  $\text{Coker } \Pi_{X, i}$  sont tous de même rang. La hauteur de  $X$  est le produit de ce rang par  $d^2$ .

*Preuve :* Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* \mathcal{M}_{Y, i} & \xrightarrow{F_{Y, i}} & \mathcal{M}_{Y, i+1} \\ (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* (\mathcal{M}_{\rho, i+n} \circ \Pi_Y^n) \downarrow & & \downarrow \mathcal{M}_{\rho, i+n} \circ \Pi_Y^n \\ (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* \mathcal{M}_{X, i+n} & \xrightarrow{F_{X, i+n}} & \mathcal{M}_{X, i+n+1}. \end{array}$$



Notons  $\tilde{C}_i$  le conoyau de la flèche diagonale

$$(\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* \mathcal{M}_{Y,i} \longrightarrow \mathcal{M}_{X,i+n+1}.$$

Il résulte des suites exactes

$$0 \longrightarrow (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* C_i \longrightarrow \tilde{C}_i \longrightarrow \text{Coker } F_{X,i+n} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \text{Coker } F_{X,i} \longrightarrow \tilde{C}_i \longrightarrow C_{i+1} \longrightarrow 0$$

par comptage de rangs que les rangs des  $B$ -modules  $C_i$  et  $C_{i+1}$  coïncident. Pour  $X = Y$ ,  $\rho = \text{Id}$  et  $n = 1$ , on a (en notant  $\mathcal{O}\text{-ht}$  la  $\mathcal{O}$ -hauteur)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\text{-ht} X(\pi) &= d \cdot \mathcal{O}\text{-ht} X(\Pi) \\ &= d \sum_{i=0}^{d-1} \text{rg}_B C_i \\ &= d^2 \text{rg}_B C_0. \end{aligned}$$

4.2. — On va construire un  $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial  $\Phi$  de hauteur  $d^2$  sur la  $\mathcal{O}_d$ -algèbre  $\mathbb{F}_{q^d} = \mathcal{O}_d/\pi\mathcal{O}_d$ . En fait, les  $\mathcal{O}_D$ -modules formels spéciaux de hauteur  $d^2$  sur une extension algébriquement close  $k$  de  $\mathbb{F}_{q^d}$  sont tous isogènes ([D1] § 2A, voir aussi [B-C] II proposition (5.2)). Le  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $\Phi$  constitue donc un « exemple fondamental ».

On note  $P$  la matrice

$$\begin{pmatrix} & & \pi \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Considérons le  $\mathcal{O}$ -module  $\Phi_i = P^{-i}\mathcal{O}^d \subset K^d$  et les inclusions naturelles  $\Pi_i: \Phi_i \subset \Phi_{i+1}$ . La  $\mathcal{O}$ -algèbre des endomorphismes  $g$  du  $K$ -espace vectoriel  $K^d$  tels que  $g(\Phi_i) \subset \Phi_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$  est l'algèbre d'Iwahori

$$B = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \cdots & \pi\mathcal{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \cdots & \cdots & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

On considérera un tel endomorphisme comme une suite  $(g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , où  $g_i$  est un endomorphisme de  $\mathcal{O}$ -module de  $\Phi_i$ , vérifiant la condition  $\Pi_i \circ g_i = g_{i+1} \circ \Pi_i$ .

La suite  $(\Phi_i \widehat{\otimes} \mathbb{F}_{q^d}, \Pi_i \widehat{\otimes} \text{Id}_{\mathbb{F}_{q^d}}, F_i = \Pi_i \widehat{\otimes} \text{Fr})$  vérifie les conditions (2.3). Elle définit donc un  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $\Phi$ . On laisse au lecteur le soin de vérifier que  $\Phi$  est le  $\mathcal{O}_D$ -module formel suivant.

En tant que groupe formel,  $\Phi = \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_{q^d}}^d$ . On rappelle qu'on note  $\tau$  l'isogénie de Frobenius de  $\mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_{q^d}}$ . Une matrice carrée de taille  $d$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_{q^d}[[\tau]]$  définit donc de manière évidente un endomorphisme du groupe formel  $\mathbb{G}_a^d$ . Le morphisme

$$\Phi: \mathbb{F}_{q^d}[[\Pi]] = \mathcal{O}_D \longrightarrow \text{End } \mathbb{G}_a^d$$

est défini par

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \text{diag}(\lambda, \lambda^q, \dots, \lambda^{q^{d-1}}) \\ \Phi(\Pi) &= \tau \cdot \text{Id}. \end{aligned}$$

Un élément  $g$  de  $\mathcal{B}$  induit un endomorphisme du module de coordonnées modifié  $(\Phi_i \widehat{\otimes} \mathbb{F}_{q^d}, \Pi_i \widehat{\otimes} \text{Id}_{\mathbb{F}_{q^d}}, F_i)$ , et donc un endomorphisme de  $\Phi$ . Soit

$$T = \text{diag}(1, \tau, \dots, \tau^{d-1}) \in \text{gl}_d(\mathbb{F}_{q^d}[[\tau]]).$$

L'endomorphisme de  $\Phi$  associé à  $g$  est défini par la matrice

$$T \cdot {}^t g(\tau^d) \cdot T^{-1}$$

(on note  $g = g(\pi) = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i \pi^i \in \mathcal{B} \subset \text{gl}_d(\mathbb{F}_q[[\pi]])$  avec  $g_i \in \mathbb{F}_q$ , de sorte que

$$g(\tau^d) = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i \tau^{di}.$$

Les endomorphismes de  $\Phi$  sont en fait tous de cette forme. On identifie donc la  $\mathcal{O}$ -algèbre des endomorphismes de  $\Phi$  à l'algèbre opposée

$$\mathcal{B}^{\text{opp}} = {}^t \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} \\ \pi \mathcal{O} & & \\ \vdots & \ddots & \\ \pi \mathcal{O} & \cdots & \pi \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$$

de  $\mathcal{B}$  (on rappelle que le foncteur module de coordonnées est contravariant). On identifie de même le groupe des quasiisogénies de  $\Phi$  dans lui-même à  $\text{GL}_d(K)$ .

**Proposition 4.2.1.** —

1. Le  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $\Phi$  est spécial.
2. Sa hauteur est  $d^2$ .
3. Soit  $g \in \text{GL}_d(K)$ . La  $\mathcal{O}$ -hauteur de la quasiisogénie  $g$  est  $d \cdot v(\det g)$

(on rappelle qu'on note  $v$  la valuation de  $K$ ).

*Preuve* : (1) découle de (4.1.2).

(2) découle de (4.1.3).

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\pi^n g \in {}^t\mathcal{B}$ . L'endomorphisme  $\pi^n g$  de  $\Phi$  est alors une isogénie. Il résulte du lemme (4.1.3) que la hauteur de  $\pi^n g$  est  $d \cdot v(\det(\pi^n \cdot g)) = d^2 \cdot n + v(\det g)$ .  $\square$

4.3. — Considérons la catégorie Nilp des  $\mathcal{O}$ -algèbres  $B$  dans lesquelles l'image  $\pi_B$  de  $\pi$  est nilpotente. Pour une telle algèbre, on notera  $B_0 = B/(\pi_B)$ . Drinfeld définit le foncteur  $G$  suivant de la catégorie Nilp dans celle des ensembles.

**Définition 4.3.1.** — *Le foncteur  $G$  associe à  $B \in \text{ObNilp}$  l'ensemble des classes d'isomorphie de triplets  $(\beta, X, \rho)$  où*

*$\beta : \mathbb{F}_{q^d} \rightarrow B_0$  est un morphisme de  $\mathbb{F}_q$ -algèbres*

*$X$  est un  $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial de hauteur  $d^2$  sur  $B$*

*$\rho : \beta^*(\Phi) \rightarrow X_{B_0}$  est une quasiisogénie de hauteur nulle.*

Traduisons ceci en termes de modules de coordonnées. Soit  $B \in \text{ObNilp}$ . On note  $(\Phi_{i,B_0}, \Pi_{i,B_0}, F_{i,B_0})$  la suite de  $\mathcal{O} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B_0$ -modules

$$\Phi_i \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B_0$$

et de morphismes

$$\begin{aligned} \Pi_{i,B_0} &= \Pi_i \hat{\otimes} 1, \\ F_{i,B_0} \hat{\otimes} \text{Fr} &: (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* \Phi_{i,B_0} \rightarrow \Phi_{i+1,B_0}. \end{aligned}$$

Soit  $(\beta, X, \rho) \in G(B)$ . La construction (2.3) associe à  $(\beta, X)$  une suite  $(\mathcal{M}_i, \Pi_i, F_i)$  vérifiant les conditions (2.3 (1) ... (4)) et (4.1.2 (2)). Elle associe à la quasiisogénie  $\rho$  une suite d'isomorphismes

$$R_i : \mathcal{N}_{i,B} \rightarrow Y_{i,B}$$

(on note  $\mathcal{M}_{i,B} = \mathcal{M}_i \otimes_B B_0$ ,  $\mathcal{N}_{i,B_0} = \mathcal{M}_{i,B_0} \otimes_{\mathcal{O}} K$ ,  $\Psi_{i,B_0} = \Phi_{i,B_0} \otimes_{\mathcal{O}} K$ ) compatible aux morphismes  $\Pi_{i,B_0} \otimes \text{Id}_K$  et aux Frobenius  $F_{i,B_0} \otimes \text{Id}_K$ . La suite  $R_i$  se reconstruit à partir de l'isomorphisme  $R_0$  (par la règle

$$R_i = (\Pi_{B_0} \otimes \text{Id}_K)^i \circ R_0 \circ (\Pi_{B_0} \otimes \text{Id}_K)^{-i})$$

et la condition de compatibilité aux Frobenius pour la suite ainsi construite équivaut à la commutativité du diagramme

$$(4.3.2) \quad \begin{array}{ccc} (\text{Id}_K \hat{\otimes} \text{Fr})^* \mathcal{N}_{0,B_0} & \xrightarrow{F_{0,B_0} \otimes \text{Id}_K} & \mathcal{N}_{1,B_0} \\ (\text{Id}_K \otimes \text{Fr})^* R_0 \downarrow & & \downarrow \\ (\text{Id}_K \otimes \text{Fr})^* \Psi_{0,B_0} & \xrightarrow{F_{0,B_0} \otimes \text{Id}_K} & \Psi_{1,B_0} \end{array}$$

(où la flèche verticale de droite est le morphisme

$$(\pi_{1,B_0} \otimes \text{Id}_K) \circ R_0 \circ (\Pi_{0,B_0} \otimes \text{Id}_K)^{-1}.$$

La condition de hauteur pour la quasiisogénie  $\rho$  se traduit de la manière suivante. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\beta^*(\Phi)(\Pi^n) \circ \rho$  soit une isogénie. Les  $B$ -modules localement libres

$$\text{Coker}((\Pi \otimes \text{Id}_K)^n \circ R_i : \mathcal{M}_{i,B_0} \longrightarrow \Phi_{i+n,B_0})$$

sont alors tous de même rang (4.1.3) et dire que la quasiisogénie  $\rho$  est de hauteur nulle revient à dire que  $\text{Coker}((\Pi \otimes \text{Id}_K)^n \circ R_0)$  est de rang  $n$ .

Inversement, si la donnée  $(\mathcal{M}_i, \Pi_i, F_i, R_0)$  vérifie les conditions ci-dessus et si

$$\beta : \mathcal{O}_d \longrightarrow B$$

est un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres, la donnée  $(\mathcal{M}_i, \Pi_i, F_i)$  est le module des coordonnées modifié (2.3) d'un  $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial  $X$  et  $R_0$  détermine une quasiisogénie

$$\rho : \beta_0^*(\Phi) \longrightarrow X_{B_0}$$

de hauteur nulle.

L'oubli de  $(X, \rho)$  définit un morphisme de foncteurs

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \text{Spf} \mathcal{O}_d \\ (\beta, X, \rho) &\longmapsto \beta \end{aligned}$$

La discussion précédente montre qu'en tant que  $\mathcal{O}_d$ -foncteur,  $G$  provient par extension des scalaires du foncteur  $G_{\mathcal{O}}$  suivant, de la catégorie  $\text{Nilp}$  dans celle des ensembles.

**Définition 4.3.3.** — *Le foncteur  $G_{\mathcal{O}}$  associé à  $B \in \text{ObNilp}$  l'ensemble des classes d'isomorphie de couples  $((\mathcal{M}_i, \Pi_i, F_i)_{i \in \mathbb{Z}}, R_0)$ , où*

1. *les  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -modules localement libres  $\mathcal{M}_i$  sont de rang  $d$  ;*
2. *la suite  $(\mathcal{M}_i, \Pi_i, F_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  vérifie les conditions (2.3 (1),..., (4)) et (4.1.2 (2)) ;*
3. *l'isomorphisme*

$$R_0 : \mathcal{N}_{0,B_0} \longrightarrow \Psi_{0,B_0}$$

*rend commutatif le diagramme (4.3.2) ;*

4. *lorsque  $n \in \mathbb{N}$  est tel que*

$$R_0(\mathcal{M}_{0,B_0}) \subset \Phi_{n,B_0} \subset \Psi_{0,B_0},$$

*le  $B_0$ -module localement libre  $\Phi_{n,B_0}/R_0(\mathcal{M}_{0,B_0})$  est de rang  $n$ .*

Dans la suite, on oubliera l'indice 0 de  $R_0$ .

4.4. — On va donner une variante plus commode de la définition (4.3.3). La suite de  $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B$  modules  $\Phi_{i,B} = \Phi_i \widehat{\otimes}_{F_q} B$ , munie de  $\Pi_{i,B} = \Pi_i \widehat{\otimes}_{F_q} \text{Id}_B$  et du Frobenius

$$F_{i,B} = \Pi_i \widehat{\otimes} \text{Fr} : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \Phi_{i,B} \longrightarrow \Phi_{i+1,B}$$

ne vérifie pas les conditions (2.3 (1), ..., (4)). Le lemme (3.1.3) se généralise néanmoins de la façon suivante. Soit  $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_i, \Pi_i, F_i)$  un module de coordonnées modifié sur  $B$ . Soit  $I$  un idéal de  $B$  de puissance  $q$ -ième nulle. De même qu'en (3.1), on note  $\overline{B} = B/I$  et  $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes_B \overline{B}$ .

**Proposition 4.4.1.** —

1. Les  $\mathcal{O}$ -modules

$$\text{Hom}_{F,\Pi}(\mathcal{M}, \Phi_B) \text{ et } \text{Hom}_{\overline{F},\overline{\Pi}}(\overline{\mathcal{M}}, \Phi_{\overline{B}})$$

sont sans torsion.

2. Le morphisme de réduction

$$\text{Hom}_{F,\Pi}(\mathcal{M}, \Phi_B) \otimes_{\mathcal{O}} K \longrightarrow \text{Hom}_{\overline{F},\overline{\Pi}}(\overline{\mathcal{M}}, \Phi_{\overline{B}}) \otimes_{\mathcal{O}} K$$

est un isomorphisme.

*Preuve :* Le premier point résulte du fait que les  $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B$ -modules  $\mathcal{M}_i$  et  $\overline{\mathcal{M}}_i$  sont sans  $\pi \widehat{\otimes} 1$ -torsion. En associant à  $\overline{\varphi} \in \text{Hom}_{\overline{F},\overline{\Pi}}(\overline{\mathcal{M}}, \Phi_{\overline{B}}) \otimes_{\mathcal{O}} K$  le morphisme virtuel

$$(\gamma_{\pi}^{-1} F_{\Phi_{i-1}} \circ \tau_{\overline{\varphi}_{i-1}} \circ V_{m,i}),$$

on définit un inverse du morphisme de réduction, ce qui prouve le second point.  $\square$

Lorsque  $(\mathcal{M}, R) \in G(B)$ , en appliquant successivement la proposition (4.3.1) à  $B/(\pi), B/(\pi^q), \dots$  et au morphisme virtuel défini par  $R$ , on relève ce morphisme virtuel en un isomorphisme virtuel

$$R : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} K \longrightarrow \Phi_B \otimes_{\mathcal{O}} K$$

(compatible à  $\Pi$  et aux Frobenius).

**Variante 4.4.2 de la définition 4.3.3.** — L'ensemble  $G_{\mathcal{O}}(B)$  est celui des suites  $(\mathcal{M}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de sous- $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B$ -modules de  $(K \widehat{\otimes} B)^d$  telles que

1.  $\mathcal{M}_i \otimes_{\mathcal{O}} K = (K \widehat{\otimes} B)^d = \Phi_{i,B} \otimes_{\mathcal{O}} K$
2.  $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_{i+1}$  et  $\text{Id}_K \widehat{\otimes} \text{Fr}(\text{Id}_K \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_{i+1}$
3. la suite  $(\mathcal{M}_i)_i$ , munie de

$$\Pi_i : \mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}_{i+1}$$

et

$$F_i : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \mathcal{M}_i \longrightarrow \mathcal{M}_{i+1}$$

comme ci-dessus vérifie les conditions (2.3 (1) ... (4)) et (4.1.2 (2))

4. l'inclusion  $\mathcal{M}_0 \subset \Phi_{0,B} \otimes_{\mathcal{O}} K$  vérifie la condition (4.3.3 (4)).

*Remarque 4.4.3 :* La variante ci-dessus montre que les objets de  $G_{\mathcal{O}}$  n'ont pas d'automorphismes non triviaux.

4.4.4. — Soit  $\mathcal{X}$  une catégorie fibrée en groupoïdes au-dessus d'une catégorie de schémas [D-M]. Considérons une nilimmersion  $\bar{S} \hookrightarrow S$  et un objet  $\bar{x} \in \mathcal{X}(\bar{S})$ . On note  $\text{Déf}(S, \mathcal{X}, \bar{x})$  la catégorie des déformations de  $\bar{x}$  au-dessus de  $S$  (c'est-à-dire la catégorie formée des couples  $\mathbf{x} = (x, x \times_S \bar{S} \xrightarrow{\sim} \bar{x})$  où  $x \in \mathcal{X}(S)$ , avec pour morphismes de  $\mathbf{x}$  vers  $\mathbf{x}'$  les morphismes de  $x$  vers  $x'$  rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} x \times_S \bar{S} & & \bar{x} \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ x' \times_S \bar{S} & & \end{array}$$

commutatif).

Considérons un morphisme

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$$

de deux telles catégories fibrées. Lorsque  $\bar{S} \hookrightarrow S$  est une nilimmersion et  $\bar{x} \in \mathcal{X}(\bar{S})$ , le morphisme  $f$  induit un foncteur

$$\text{Déf } f : \text{Déf}(S, \mathcal{X}, \bar{x}) \rightarrow \text{Déf}(S, \mathcal{Y}, f(\bar{x})).$$

On dira que le morphisme  $f$  est formellement net (resp. formellement étale) lorsque pour toute nilimmersion  $\bar{S} \hookrightarrow S$  et tout  $\bar{x} \in \mathcal{X}(\bar{S})$ , le foncteur  $\text{Déf } f$  est pleinement fidèle (resp. est une équivalence de catégories).

Considérons la catégorie  $\text{Nilp}_{\mathcal{O}}$  des  $\mathcal{O}$ -algèbres où l'image de  $\pi$  est nilpotente et pour tout  $B \in \text{Nilp}_{\mathcal{O}}$  la catégorie  $\text{Mod}S(d)(B)$  des modules de coordonnées vérifiant (4.3.3 (1,2)). On définit ainsi une catégorie fibrée  $\text{Mod}S(d)$  au-dessus de la catégorie  $(\text{Nilp}_{\mathcal{O}})^0$  opposée à  $\text{Nilp}_{\mathcal{O}}$ .

On peut alors reformuler la proposition (4.4.1 (2)) sous la forme plus suggestive suivante :

**Proposition 4.4.5.** — *Le morphisme*

$$G_{\mathcal{O}}(4.4.2) \rightarrow \text{Mod}S(d)$$

*est formellement étale.*  $\square$

*Remarque :* Ceci montre en particulier que les catégories de déformations de  $\text{Mod}S(d)$  sont équivalentes à des catégories discrètes. On peut retrouver ce fait en utilisant (3.2.1).

4.5. — Drinfeld définit une action de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  sur le foncteur  $G$  de la manière suivante.

Soit  $\mathrm{GL}_d^0(K)$  le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_d(K)$  formé des éléments dont la valuation du déterminant est nulle. Remarquons que le groupe  $\mathrm{GL}_d(K)$  est engendré par  $\mathrm{GL}_d^0(K)$  et  ${}^tP$  (on rappelle que la matrice

$$\begin{pmatrix} & & & \pi \\ & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

est notée  $P$ ).

Soit  $B \in \mathrm{ObNilp}$ . Un élément  $g$  de  $\mathrm{GL}_d^0(K)$  associe au triplet  $(\beta, X, \rho)$  le triplet

$$(\beta, X, \rho \circ \beta^*(g^{-1})).$$

L'élément  ${}^tP$  associe au triplet  $(\beta, X, \rho)$  le triplet

$$(\beta \circ \mathrm{Fr}^{-1}, X, \rho \circ \beta^*({}^tP^{-1}) \circ \tau)$$

(on rappelle qu'on note

$$\tau : (\beta \circ \mathrm{Fr}^{-1})^* \Phi \longrightarrow \beta^* \Phi$$

l'isogénie de Frobenius).

Ceci définit une action de  $\mathrm{GL}_d(K)$  sur le foncteur  $G$ . Un élément  $g$  du centre de  $\mathrm{GL}_d(K)$  s'écrit  $\pi^n \cdot a \cdot \mathrm{Id} = ({}^tP)^{dn} \cdot a \cdot \mathrm{Id}$ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{\overline{B}} & \xrightarrow{X(a)} & X_{\overline{B}} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \beta^* \Phi & \end{array}$$

est commutatif, de sorte que  $(a \cdot \mathrm{Id})(\beta, X, \rho)$  est isomorphe à  $(\beta, X, \rho)$ . On a  $\beta^*({}^tP^d) = \tau^d$ , de sorte que l'action de  ${}^tP^d$  est elle aussi triviale. L'action de  $\mathrm{GL}_d(K)$  qu'on vient de définir est donc triviale sur le centre de  $\mathrm{GL}_d(K)$ .

On va définir une action de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  sur le foncteur  $G_{\mathcal{O}}$ . On précisera ensuite le lien entre ces deux actions.

Soit  $B \in \mathrm{ObNilp}$ . Un élément  $g \in \mathrm{GL}_d^0(K)$  associe à la suite  $(\mathcal{M}_i \subset (K \widehat{\otimes} B)^d)_i$  (4.4.2) la suite  $({}^t g^{-1} \widehat{\otimes} \mathrm{Id}_B(\mathcal{M}_i) \subset (K \widehat{\otimes} B)^d)_i$ . L'élément  ${}^tP$  associe à la suite  $(\mathcal{M}_i \subset (K \widehat{\otimes} B)^d)_i$  la suite  $(P^{-1} \widehat{\otimes} \mathrm{Id}_B(\mathcal{M}_{i-1}) \subset (K \widehat{\otimes} B)^d)_i$  (celle-ci vérifie encore la condition de hauteur (4.3.3 (4)) : cf. (4.1.3)). On vérifie de même que précédemment que l'action de  $\mathrm{GL}_d(K)$  ainsi définie est triviale sur le centre.

Soit  $\sigma$  l'automorphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbre de  $\mathcal{O}_d$  dont la réduction modulo  $\pi$  est l'automorphisme de Frobenius ( $x \mapsto x^q$ ) de  $\mathbb{F}_{q^d}$ . En faisant agir  $g \in \mathrm{PGL}_d(K)$  sur

$G_{\mathcal{O}} \times_{\mathrm{Spf} \mathcal{O}} \mathrm{Spf} \mathcal{O}_d$  via  $g \times \sigma^{v(\det g)}$ , on définit une nouvelle action de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  sur le foncteur  $G = G_{\mathcal{O}} \times_{\mathrm{Spf} \mathcal{O}} \mathrm{Spf} \mathcal{O}_d$ .

**Proposition 4.5.1.** — *Les deux actions de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  sur le foncteur  $G$  ainsi définies coïncident.*

*Preuve :* Il résulte immédiatement de la description (4.1) de l'action de  $\mathrm{GL}_d(K)$  sur  $\Phi_i$  et sur  $\Phi$  que les deux actions de  $\mathrm{GL}_d^{\circ}(K)$  coïncident. La construction du module de coordonnées modifié (2.3) de  $X$  subit un décalage de  $(-1)$  lors du changement de  $\beta$  en  $\beta \circ \mathrm{Fr}^{-1}$ . Les morphismes

$$\Psi_{i,B_0} \longrightarrow \Psi_{i,B_0}$$

et

$$\Psi_{i,B_0} \longrightarrow \Psi_{i+1,B_0}$$

induits respectivement par l'action sur  $\psi^* \Phi$  de  ${}^t P^{-1}$  et par  $\tau$  sont donnés respectivement par la multiplication par  $P^{-1}$  et par l'identité sur l'espace sous-jacent  $K^d \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B_0$ . Ceci prouve que les deux actions de  ${}^t P$  sur le foncteur  $G$  coïncident, et donc que les deux actions de  $\mathrm{GL}_d(K)$  coïncident aussi.  $\square$





## II. REPRÉSENTABILITÉ DU FONCTEUR $G$ : APPROCHE EXPLICITE

### 0 Introduction

On a défini dans le premier chapitre le problème de modules des  $\mathcal{O}_D$ -modules formels rigidifiés  $G$  et une  $\mathcal{O}$ -forme  $G_{\mathcal{O}}$ . On va représenter ce foncteur. Plus précisément, on va construire un Spf  $\mathcal{O}$ -schéma formel  $\widehat{G}$  et un pro-objet  $(M, R) \in \varprojlim_n G_{\mathcal{O}}(\widehat{G}/(\pi^n))$  tels que le morphisme fonctoriel

$$\widehat{G} \longrightarrow G_{\mathcal{O}}$$

induit par  $(M, R)$  soit une immersion ouverte et que les translatés de l'ouvert  $\widehat{G}$  de  $G_{\mathcal{O}}$  sous l'action (I. 4.5) de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  recouvrent le foncteur  $G_{\mathcal{O}}$ .

Pour ce faire, on procède en deux étapes.

1) Dans les deux premiers paragraphes, on réalise pour la fibre spéciale  $G_{\mathcal{O},0}$  du foncteur  $G_{\mathcal{O}}$  le programme ci-dessus.

2) Dans le troisième paragraphe, on construit  $\widehat{G}, (M, R)$  et on utilise la théorie des déformations (I. 3) pour montrer que  $(M, R)$  identifie  $\widehat{G}$  au complété de  $G_{\mathcal{O}}$  le long du sous-schéma ouvert  $\mathcal{G}_0$  de  $G_{\mathcal{O},0}$  obtenu au terme de l'étape précédente.

On abordera ensuite dans le dernier paragraphe la question du recollement, en déterminant l'intersection des translatés de l'ouvert  $\widehat{G}$ . Ce complément sera utile dans le troisième chapitre.

Donnons maintenant quelques précisions supplémentaires sur la première des deux étapes ci-dessus, qui constitue la partie la plus importante du chapitre.

Dans le premier paragraphe, on étudie une famille de sous-foncteurs fermés de la fibre spéciale  $G_{\mathcal{O},0}$ . On les représente explicitement en les plongeant dans une variété de drapeaux, où ils apparaissent comme l'adhérence d'une variété de Deligne-Lusztig. Ces sous-foncteurs, déjà considérés par Stuhler ([S] §4), sont en fait les composantes irréductibles de la fibre spéciale  $G_{\mathcal{O},0}$  (cf.(2.3.1)). Leur étude (inspirée de [loc.cit.]) illustre sur un cas plus simple les techniques utilisées dans le deuxième paragraphe. Elle servira lors de la preuve d'un des résultats les plus importants (2.7.1) de ce deuxième paragraphe.

Dans le paragraphe 2, on définit un sous-foncteur localement fermé  $G^0$  du foncteur

$G_{\mathcal{O},0}$ , qui sera en fait le sous-schéma ouvert  $\mathcal{G}_0$  dont il est question plus haut. On y utilise aussi deux étapes.

1) (2.2,...,2.7) On représente explicitement le foncteur  $G^0$  en le plongeant dans un produit de Grassmanniennes. Ce produit contient de manière naturelle une certaine union de variétés de drapeaux, qui sont en fait celles considérées dans le premier paragraphe. On détermine  $G^0$  en le comparant à l'union des adhérences de variétés de Deligne-Lusztig (§1) dans ces variétés de drapeaux.

2) (2.8) On montre ensuite que  $G^0$  est un sous-foncteur ouvert de  $G_{\mathcal{O},0}$  en utilisant le résultat final de la première étape et un lemme de théorie des déformations emprunté au paragraphe 3.

Dans les deux premiers paragraphes, où il n'est question que de la fibre spéciale du foncteur  $G_{\mathcal{O}}$ , toutes les  $\mathbb{F}_q$ -algèbres envisagées doivent être considérées comme des  $\mathcal{O}$ -algèbres via le morphisme

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}/(\pi) = \mathbb{F}_q$$

## 1 Les sous-foncteurs attachés aux sommets de l'immeuble

On va définir pour tout  $\mathcal{O}$ -réseau  $\Lambda \subset K^d$  un sous foncteur fermé  $G_\Lambda$  de  $G_{\mathcal{O},0}$ . On verra ultérieurement (§2) que les foncteurs  $G_\Lambda$  sont représentés par les composantes irréductibles de  $G_{\mathcal{O},0}$ . Notons  $i = [\Lambda : \mathcal{O}^d]$  l'indice virtuel de  $\mathcal{O}^d$  dans  $\Lambda$  (c'est la différence  $[\Lambda : \Lambda'] - [\mathcal{O}^d : \Lambda']$  des indices de  $\Lambda'$  dans  $\Lambda$  et  $\mathcal{O}^d$ , lorsque  $\Lambda'$  est un réseau contenu dans  $\Lambda$  et dans  $\mathcal{O}^d$ ).

**Définition 1.1 [S].** — *Le sous foncteur  $G_\Lambda$  de  $G_{\mathcal{O},0}$  est défini par*

$$G_\Lambda(B) = \{(M_i \subset K^d \widehat{\otimes} B) \in G_{\mathcal{O},0}(B) \text{ tels que } M_i = \Lambda \widehat{\otimes} B\}$$

*pour toute  $\mathbb{F}_q$ -algèbre  $B$ .*

**Proposition 1.2.** — *Soit  $B$  une  $\mathbb{F}_q$ -algèbre intègre. On a*

$$G_{\mathcal{O},0}(B) = \bigcup_{\Lambda \subset K^d} G_\Lambda(B)$$

*Preuve :* Soit  $(M_i \subset K^d \widehat{\otimes} B)_i \in G_{\mathcal{O},0}$ . Le morphisme composé

$$\text{Coker } F_0 \xrightarrow{\Pi_1} \text{Coker } F_1 \xrightarrow{\Pi_2} \dots \longrightarrow \text{Coker } F_d = \text{Coker } F_0$$

est l'endomorphisme de  $\text{Coker } F_0$  induit par la multiplication par  $\pi$ , et est donc nul. Il existe donc un entier  $i$  tel que le morphisme de  $B$ -modules inversibles

$$\Pi_i : \text{Coker } F_{i-1} \longrightarrow \text{Coker } F_i$$

soit nul. On a donc  $\text{Im } \Pi_i \subset \text{Im } F_i$ . Les  $B$ -modules  $\text{Coker } \Pi_i$  et  $\text{Coker } F_i$  sont par ailleurs inversibles. Le morphisme surjectif

$$\text{Coker } \Pi_i \longrightarrow \text{Coker } F_i$$

est donc un isomorphisme et on a donc  $\text{Im } F_i = \text{Im } \Pi_i$ . Il existe donc un entier  $N$  tel que

$$\pi^N \cdot \mathcal{O}^d \hat{\otimes} B \subset M_i \subset \pi^{-N} \cdot \mathcal{O}^d \hat{\otimes} B$$

Soit  $D_i = (M_i / \pi^N \mathcal{O}^d \hat{\otimes} B) \in \text{Grass}(Nd + i, \pi^{-N} \cdot \mathcal{O}^d \hat{\otimes} B / \pi^N \cdot \mathcal{O}^d \hat{\otimes} B)$ . Le point  $D_i$  est alors fixe par Frobenius. La  $\mathbb{F}_q$ -algèbre  $B$  est intègre, et le  $B$ -point  $D_i$  provient alors d'un point  $D_\Lambda$  à valeur dans  $\mathbb{F}_q$ . Il existe donc un  $\mathcal{O}$ -réseau  $\Lambda \subset K^d$  tel que  $M_i = \Lambda \hat{\otimes} B$ . L'indice virtuel de  $\mathcal{O}^d$  dans ce réseau  $\Lambda$  est  $i$  (cf. (I. 4.4.2 (3))).

Soient  $B$  une  $\mathbb{F}_q$ -algèbre dont le spectre est connexe et  $(M_i)_i \in G_{\mathcal{O},0}(B)$ .

**Définition 1.3.** — Un élément  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  est dit critique pour  $M$  lorsqu'il vérifie les conditions équivalentes suivantes.

1.  $\text{Im } F_i = \text{Im } \Pi_i$
2. Il existe un  $\mathcal{O}$ -réseau  $\Lambda \subset K^d$  tel que  $M_i = \Lambda \hat{\otimes} B$ .

On peut reformuler la proposition (1.2) en disant que si  $B$  est intègre, il existe (au moins) un indice critique pour  $M$ . On fixe maintenant un  $\mathcal{O}$ -réseau  $\Lambda \subset K^d$ . On va plonger le foncteur  $G_\Lambda$  dans une variété de drapeaux.

**Construction 1.4.** — Soit  $B$  une  $\mathbb{F}_q$ -algèbre. On note  $i = [\Lambda : \mathcal{O}^d]$  et  $\bar{\Lambda} = \pi^{-1}\Lambda / \Lambda$ . A la suite  $(M_i \subset K^d)_i \in G_\Lambda(B)$ , on associe la suite de  $B$ -modules

$$D_j = M_{i+j} / \Lambda \hat{\otimes} B \quad (0 \leq j \leq d)$$

**Proposition 1.5.** —

1. Les  $B$ -modules

$$(0) = D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_d = \bar{\Lambda} \otimes B$$

forment un drapeau;

2. La construction (1.4) établit une bijection entre  $G_\Lambda(B)$  et l'ensemble des drapeaux  $(D_j)_{0 \leq j \leq d} \in \text{Drap}_{\bar{\Lambda}}(B)$  tels que  $\text{Fr}(\text{Fr}^* D_j) \subset D_{j+1}$ .

*Preuve :* Le premier point résulte du fait que les  $B$ -modules

$$D_{j+1}/D_j = \text{Coker } \Pi_{i+j} \quad (0 \leq j \leq d-1)$$

sont localement libres de rang 1 (I. 4.1.3). Soit  $(D_j)_{0 \leq j \leq d}$  un drapeau vérifiant la condition (1.5 (2)). Pour  $j \in \mathbb{Z}$  et  $l$  la partie entière de  $j/d$ , considérons l'image réciproque  $M_{i+j}$  de  $D_{j-dl}$  par le morphisme

$$\pi^{-l+1} \cdot \Lambda \hat{\otimes} B \longrightarrow \frac{\pi^{-l+1} \cdot \Lambda \hat{\otimes} B}{\pi^{-l} \cdot \Lambda \hat{\otimes} B} = \bar{\Lambda} \otimes B.$$

Il résulte de (I. 2.2.8) que les  $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B$ -modules  $M_{i+j}$  sont localement libres de rang  $d$ . La condition (I. 4.1.2 (2)) pour  $(M_j)_j$  se vérifie en considérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Coker } F_j \longrightarrow \bar{\Lambda} \otimes B / Fr^* D_j \longrightarrow \bar{\Lambda} \otimes B / Fr^* D_{j+1} \longrightarrow 0$$

La condition de hauteur (I. 4.3.3 (4)) et les conditions (I. 2.3.(1...4)) se vérifient facilement pour  $(M_j \subset K^d \widehat{\otimes} B)_j$  et on a donc  $(M_j)_j \in G_\Lambda(B)$ .

En appliquant à  $(M_j)_j$  la construction (1.4), on obtient le drapeau  $(D_j)_{0 \leq j \leq d}$ , et les constructions (1.4) et  $(D_j)_j \mapsto (M_{j'})_{j'}$  sont donc inverses l'une de l'autre.  $\square$

Le foncteur  $G_\Lambda$  est donc représenté par un sous-schéma fermé d'une variété de drapeaux.

On va déterminer plus précisément ce sous schéma. Considérons la variété de Deligne-Lusztig  $X(w)$  associée à l'élément de Coxeter  $w = (1, \dots, d)$  du groupe de Weyl de  $GL(\bar{\Lambda})$  [D-L (2.2)]. Le schéma  $X(w)$  est le sous-schéma ouvert de  $G_\Lambda$  défini par la condition

$$\bar{\Lambda} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} Fr^i((Fr^i)^* D_1)$$

C'est aussi le sous -schéma ouvert de l'espace projectif  $\mathbb{P}^{d-1} = \mathbb{P}(\bar{\Lambda}^\vee)$  des droites de  $\bar{\Lambda}$  formé des droites  $D$  telles que

$$\bar{\Lambda} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} Fr^i((Fr^i)^* D_1)$$

Soit  $R_i$  la réunion des sous espaces rationnels sur  $\mathbb{F}_q$  de dimension  $i$  de  $\mathbb{P}^{d-1}$ . Soit  $\tilde{\mathbb{P}}^{d-1}$  le schéma obtenu en éclatant  $\mathbb{P}^{d-1}$  le long de  $R_0$ , puis en éclatant l'espace obtenu le long du transformé strict de  $R_1$ , et ainsi de suite.

**Proposition 1.6.** — *Il existe un (et un seul) isomorphisme*

$$\tilde{\mathbb{P}}^{d-1} \longrightarrow G_\Lambda$$

*rendant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{P}}^{d-1} & \xrightarrow{\quad} & G_\Lambda \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X(w) & \end{array}$$

*commutatif.*

Avant de démontrer la proposition (1.6), remarquons qu'il en résulte que  $G_\Lambda$  est intègre, et est donc l'adhérence de  $X(w)$  dans la variété de drapeaux.

*Preuve de la proposition (1.6) :* Nous aurons besoin du lemme suivant.

Soient  $\mathcal{E}$  un module localement libre de rang  $n$  sur un schéma  $Y$ ,  $s$  une section de  $\mathcal{E}$ ,  $X$  le lieu des zéros de  $s$  et  $\mathcal{I}$  le faisceau d'idéaux définissant le fermé  $X$  de  $Y$ . Par définition de  $\mathcal{I}$ , le morphisme  $s^\vee : \mathcal{E}^\vee \rightarrow \mathcal{O}_Y$  se factorise donc par  $\mathcal{E}^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{I}$ , ce qui induit un morphisme surjectif

$$\mathrm{Sym}(\mathcal{E}^\vee) \rightarrow \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{I}^m$$

et donc un plongement de l'éclaté  $Bl_X(Y)$  de  $Y$  le long de  $X$  dans  $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$  (voir par exemple [Fu] IV (2.2)).

Lorsque  $f : S \rightarrow Y$  est un  $Y$ -schéma, on considère  $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)(S)$  comme l'ensemble des quotients  $\varphi : f^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{F}$  de  $f^*(\mathcal{E})$  qui sont localement libres de rang  $n - 1$ . La condition  $\varphi \circ f^*(s) = 0$  définit un sous-schéma fermé  $B$  de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$ , d'idéal  $(s_i \cdot X_j - s_j \cdot X_i, 1 \leq i, j \leq n)$  (lorsqu'on dispose d'une trivialisatation locale de  $\mathcal{E}$ ; les  $(s_i)_i$  sont alors les coordonnées de  $s$  et les  $(X_j)_j$  des coordonnées homogènes locales de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$ ). Le plongement  $\psi : Bl_X(Y) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$  se factorise à travers  $B$ .

**Lemme 1.6.1.** — *Lorsque la section  $s$  est régulière (c'est à dire lorsque le complexe de Koszul de*

$$s^\vee : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_Y$$

*est exact), le morphisme*

$$\psi : Bl_X(Y) \rightarrow B$$

*est un isomorphisme.*

*Preuve :* Voir [Fu] IV Prop. (4.3) et Theorem (2.2).  $\square$

Revenons à la preuve de la proposition (1.6). Soit  $\tilde{\mathbb{P}}_i(\bar{\Lambda}^\vee)$  l'espace obtenu en éclatant  $\mathbb{P}(\bar{\Lambda}^\vee)$  le long de ses points rationnels, puis le long de l'union des transformés stricts de ses droites rationnelles,  $\dots$ , puis le long de l'union des transformés stricts de ses sous espaces rationnels de dimension  $i - 2$  (de sorte que  $\tilde{\mathbb{P}}_{d-1}(\bar{\Lambda}^\vee) = \tilde{\mathbb{P}}^{d-1}$  et  $\tilde{\mathbb{P}}_1(\bar{\Lambda}^\vee) = \mathbb{P}(\bar{\Lambda}^\vee)$ ).

Soit  $X_i(\bar{\Lambda})$  le sous schéma fermé du schéma des drapeaux

$$(0) = D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_i \subset \bar{\Lambda} (\mathrm{rg} D_j = j)$$

défini par la condition  $FD_j \subset D_{j+1}$  (on note  $FD_j = \mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}^* D_j)$ ).

On va construire par récurrence sur  $i$  un isomorphisme

$$\psi_i(\bar{\Lambda}) : \tilde{\mathbb{P}}_i(\bar{\Lambda}^\vee) \rightarrow X_i(\bar{\Lambda})$$

tel que l'image par  $\psi_i$  de la réunion des transformés stricts des sous espaces projectifs rationnels de dimension  $j \geq i - 1$  soit le fermé défini par la condition

$$F^{j-i+2} D_i \subset D_i + FD_i + \dots + F^{j-i+1} D_i.$$

Pour  $i = 1$ , le morphisme  $\psi_1(\bar{\Lambda})$  est l'identification évidente de  $\tilde{\mathbb{P}}_1(\bar{\Lambda}^\vee)$  à  $X_1(\bar{\Lambda})$ .

Soit  $1 \leq i \leq d-1$ . On suppose que pour tout  $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $\geq i+1$ , on a déjà construit un isomorphisme

$$\psi_i(V): \tilde{\mathbb{P}}_i(V^\vee) \longrightarrow X_i(V)$$

comme ci-dessus. L'union des transformés stricts des sous espaces projectifs rationnels de dimension  $i-1$  de  $\mathbb{P}(\bar{\Lambda}^\vee)$  est donc le lieu d'annulation du morphisme de  $\mathcal{O}_{X_i(\bar{\Lambda})}$ -modules localement libres

$$s: D_i/FD_{i-1} \longrightarrow \bar{\Lambda}/FD_i.$$

Le premier de ces  $\mathcal{O}_{X_i(\bar{\Lambda})}$ -modules est inversible, et on peut donc considérer le morphisme ci dessus comme une section du  $\mathcal{O}_{X_i(\bar{\Lambda})}$ -module

$$\mathcal{E} = (\bar{\Lambda}/FD_i) \otimes (D_i/FD_{i-1})^{-1}.$$

Le fermé défini par la condition

$$(1.6.1) \quad \varphi \circ f^*(s) = 0$$

s'identifie de manière évidente à  $X_{i+1}(\bar{\Lambda})$ , et le morphisme  $\psi$  (1.6.1) induit donc un morphisme

$$\psi_{i+1}(\bar{\Lambda}): \tilde{\mathbb{P}}_{i+1}(\bar{\Lambda}^\vee) \longrightarrow X_{i+1}(\bar{\Lambda}).$$

Le lemme suivant achève la construction, et la preuve de (1.6).

**Lemme 1.6.2.** —

1. Le morphisme  $\psi_{i+1}$  est un isomorphisme
2. L'image par  $\psi_{i+1}$  de la réunion des transformés stricts des sous espaces projectifs rationnels de dimension  $j \geq i$  est le fermé défini par la condition

$$F^{j-i+1}D_{i+1} \subset D_{i+1} + FD_{i+1} + \cdots + F^{j-i}D_{i+1}.$$

*Preuve :* La codimension du lieu d'annulation de la section  $s$  est le rang du  $\mathcal{O}_{X_i(\bar{\Lambda})}$ -module  $\bar{\Lambda}/FD_i$ . La section  $s$  est donc régulière, et (1) résulte alors du lemme (1.6.1). Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\bar{\Lambda}$  de dimension  $j+1 \geq i+1$ . L'isomorphisme  $\psi_{i+1}(V)$  identifie  $\tilde{\mathbb{P}}_{i+1}(V^\vee)$  au fermé  $X_{i+1}(V)$  de  $X_{i+1}(\bar{\Lambda})$  défini par la condition  $D_{i+1} \subset V$ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{i+1}(V) & \longrightarrow & X_{i+1}(\bar{\Lambda}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(V^\vee) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\bar{\Lambda}^\vee) \end{array}$$

est commutatif, et  $X_{i+1}(V)$  s'identifie donc via  $\psi_{i+1}(\bar{\Lambda})$  au transformé strict de  $\mathbb{P}(V^\vee)$  dans  $\tilde{\mathbb{P}}_{i+1}(\bar{\Lambda}^\vee)$ . Le fermé

$$\bigcup_{\substack{V \subset \bar{\Lambda} \\ \dim V = j+1}} X_{i+1}(V)$$

n'est autre que le fermé défini par la condition

$$F^{j-i+1}D_{i+1} \subset D_{i+1} + FD_{i+1} + \cdots + F^{j-i}D_{i+1},$$

ce qui achève la preuve du lemme (1.6.2), et donc aussi celle de la proposition (1.6).

□

*Remarque :* Dans le troisième chapitre (cf.(III. 3.2)), on aura besoin du fait suivant, qui résulte de la preuve du lemme (1.6.2) ci-dessus.

Soient  $\Lambda \subset \Lambda' \subset \pi^{-1}\Lambda$ ,  $V = \Lambda'/\Lambda \subset \bar{\Lambda} = \pi^{-1}\Lambda/\Lambda$  et  $n$  l'indice de  $\Lambda$  dans  $\Lambda'$ . L'image réciproque du fermé  $G_\Lambda \cap G_{\Lambda'}$  de  $G_\Lambda$  par l'isomorphisme

$$\psi : \tilde{\mathbb{P}}(\bar{\Lambda}^\vee) \longrightarrow G_\Lambda$$

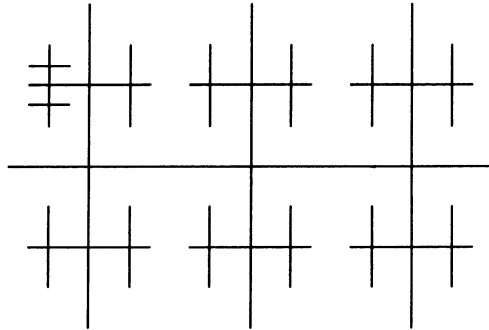
est l'image réciproque par la suite d'éclatements

$$\tilde{\mathbb{P}}(\bar{\Lambda}^\vee) \longrightarrow \tilde{\mathbb{P}}_{n-1}(\bar{\Lambda}^\vee)$$

du transformé strict de  $\mathbb{P}(V^\vee)$  dans  $\tilde{\mathbb{P}}_{n-1}(\bar{\Lambda}^\vee)$ .

## 2 Les sous foncteurs attachés aux simplexes maximaux de l'immeuble

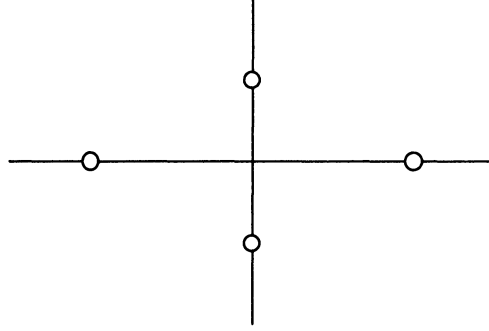
Les sous foncteurs  $G_\Lambda$  de  $G_{\mathcal{O},0}$  ne sont pas des sous foncteurs ouverts



(sur la figure, on a représenté une partie de  $G_{\mathcal{O},0}$  pour  $d = 2$  et  $q = 2$ ; les foncteurs  $G_\Lambda$  sont les composantes irréductibles de  $G_{\mathcal{O},0}$ ).

On va maintenant définir une autre famille  $(G_\Delta^0)_\Delta$  de sous-foncteurs de  $G_{\mathcal{O},0}$ , indicée par les simplexes maximaux  $\Delta$  de l'immeuble de  $\mathrm{PGL}_d(K)$ . Sur la figure ci-dessous, un tel foncteur  $G_\Delta^0$  est en fait représenté par la réunion de deux composantes irréductibles qui se coupent, privée des points en lesquels ces deux composantes irréductibles en rencontrent d'autres





(pour un énoncé plus précis, cf. le théorème (2.2.2)).

2.1. — Soient

$$\cdots \subsetneq \Delta_{-1} \subsetneq \Delta_0 \subsetneq \Delta_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \Delta_d \subsetneq \cdots \subsetneq K^d$$

des  $\mathcal{O}$ -modules libres de rang  $d$ . On suppose que l'indice virtuel  $[\Delta_0 : \mathcal{O}^d]$  est nul et que  $\Delta_{i+d} = \pi^{-1} \cdot \Delta_i, \forall i \in \mathbb{Z}$ . On définit d'abord un sous foncteur fermé  $G_\Delta$  de  $G_{\mathcal{O}}$ .

**Définition 2.1.1.** — *Le sous-foncteur  $G_\Delta$  de  $G_{\mathcal{O},0}$  est défini par*

$$G_\Delta(B) = \{(M_\bullet \subset K^d) \in G_{\mathcal{O},0}(B) \mid \text{tels que } \Delta_{i-d+1} \hat{\otimes} B \subset M_i \subset \Delta_{i+d-1} \hat{\otimes} B, \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

*pour toute  $\mathbb{F}_q$ -algèbre  $B$ .*

*Remarque :* Le sous-foncteur  $G_{\Delta_i}$  de  $G_{\mathcal{O},0}$  est inclus dans  $G_\Delta$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$

Le sous-foncteur  $G_\Delta$  est en fait assez compliqué. On travaillera plutôt avec le sous-foncteur  $G_\Delta^0$  qu'on va maintenant définir.

Soient  $\Lambda \subset K^d$  un  $\mathcal{O}$ -réseau et  $i_\Lambda = [\Lambda : \mathcal{O}^d]$ . L'intersection du sous foncteur  $G_\Lambda$  de  $G_{\mathcal{O},0}$  (1.1) et de  $G_\Delta$  est vide lorsque la condition  $\Delta_{i-d+1} \subset \Lambda \subset \Delta_{i+d-1}$  n'est pas vérifiée. Considérons l'ensemble fini

$$\mathcal{E}_\Delta = \{\Lambda \subset K^d \text{ tels que } 0 \leq i_\Lambda \leq d-1, \Delta_{i_\Lambda-d+1} \subset \Lambda \subset \Delta_{i_\Lambda+d-1}, \Lambda \neq \Delta_{i_\Lambda}\}$$

**Définition 2.1.2.** — *Le sous foncteur ouvert  $G_\Delta^0$  de  $G_\Delta$  est l'ouvert complémentaire des sous-foncteurs fermés  $G_\Lambda \cap G_\Delta, \Lambda$  décrivant  $\mathcal{E}_\Delta$ :*

$$G_\Delta^0(B) = \{(M_\bullet) \in G_\Delta(B) \mid \text{tels que } (M_\bullet)|_s \notin G_\Lambda(\kappa(s)), \forall s \in \text{Spec } B, \forall \Lambda \in \mathcal{E}_\Delta\}$$

*pour toute  $\mathbb{F}_q$ -algèbre  $B$ .*

**Proposition 2.1.3.** — *Soit  $k$  une extension de  $\mathbb{F}_q$ . On a*

$$G_{\mathcal{O},0}(k) = \bigcup_{\Delta} G_\Delta^0(k).$$

*Preuve* : Soient  $(M_\bullet) \in G_{\mathcal{O},0}(k)$  et

$$i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$$

la liste de ses indices critiques (1.3) compris entre 0 et  $d-1$ . Il existe des  $\mathcal{O}$ -réseaux  $\Lambda_{i_j} \subset K^d$  tels que  $M_{i_j} = \Lambda_{i_j} \hat{\otimes} k$ . Soit

$$\dots \subsetneq \Delta_{-1} \subsetneq \Delta_0 \subsetneq \Delta_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Delta_d \subsetneq \dots \subsetneq K^d$$

(avec  $[\Delta : \mathcal{O}^d] = 0$  et  $\Delta_{i+d} = \pi^{-1} \cdot \Delta_i, \forall i \in \mathbb{Z}$ ) un simplexe maximal de l'immeuble de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  tel que  $\Delta_{i_j} = \Lambda_{i_j}, \forall 1 \leq j \leq r$ . On a alors  $(M_\bullet) \in G_\Delta(k)$ .

Soit  $\Lambda \in \mathcal{E}_\Delta$ . Si  $[\Lambda : \mathcal{O}^d]$  n'est pas un indice critique pour  $(M_\bullet)$ ,  $(M_\bullet)$  n'appartient alors pas à  $G_\Lambda(k)$ . Si  $[\Lambda : \mathcal{O}^d] \in \{i_1; \dots; i_r\}$  il résulte de la définition de  $\mathcal{E}_\Delta$  que  $\Lambda \neq \Lambda_{i_j}$ , et  $(M_\bullet)$  n'est pas non plus élément de  $G_\Lambda(k)$ . Dans les deux cas, on a donc  $(M_\bullet) \in G_\Delta^0(k)$ .  $\square$

**Proposition 2.1.4.** — L'action (I. 4.5) de  $g$  sur  $G_{\mathcal{O},0}$  envoie  $G_\Delta^0$  sur  $G_{i_g^{-1} \cdot \Delta}^0$ .  $\square$

*Remarque 2.1.5* : L'action de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  sur son immeuble permute transitivement les simplexes maximaux. Il suffit donc de déterminer  $G_\Delta^0$  pour l'un d'entre eux. On utilisera pour cela le simplexe  $\Phi$  défini par  $\Phi_i = P^{-i} \cdot \mathcal{O}^d$  (cf. (I. 4.2)) et on notera  $G^0 = G_\Phi^0$ . L'action de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  sur  $G_{\mathcal{O},0}$  se restreint en une action de  ${}^t\mathcal{B}^\times$  (I. 4.2) sur  $G^0$ .

2.2. — On va maintenant plonger  $G_\Phi$  dans un produit de Grassmanniennes.

Soient  $B$  une  $\mathbb{F}_q$ -algèbre et  $(M_\bullet) \in G_\Phi(B)$ . Les  $B$ -modules  $V_i = M_i / \Phi_{i-d+1}$  ( $0 \leq i \leq d-1$ ) sont localement libres de rang  $d-1$  et facteurs directs de  $\tilde{\Phi}_i \otimes B = (\tilde{\Phi}_{i+d-1} / \tilde{\Phi}_{i-d+1}) \otimes B$ . Ils vérifient pour tout  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  les conditions

1.  $\Pi_i \otimes 1(V_i) \subset V_{i+1}$
2.  $\Pi_i \otimes \mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}^* V_i) \subset V_{i+1}$
3.  $\pi_i \otimes 1(V_{i+1}) \subset \Pi_i \otimes \mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}^* V_i)$

où  $\Pi_i : \tilde{\Phi}_i \rightarrow \tilde{\Phi}_{i+1}$  est pour  $0 \leq i \leq d-2$  le morphisme induit par l'inclusion naturelle  $\Phi_{i+d-1} \hookrightarrow \Phi_{i+d}$ ,  $\Pi_{d-1} : \tilde{\Phi}_{d-1} \rightarrow \tilde{\Phi}_0$  est le morphisme induit par le composé

$$\begin{aligned} \Phi_{2d-2} \hookrightarrow \Phi_{2d-1} &\longrightarrow \Phi_{d-1} \\ m &\longmapsto \pi \cdot m \end{aligned}$$

et  $\pi : \tilde{\Phi}_i \rightarrow \tilde{\Phi}_i$  est la multiplication par  $\pi$  sur  $\Phi_{i+d-1}$ . Pour simplifier les formules, on notera encore  $\Pi_i, F_i, \pi$  les morphismes  $\Pi_i \otimes B, F_i \otimes B, \pi \otimes B$ .

**Proposition 2.2.1.** — *L'application*

$$G_{\Phi}(B) \longrightarrow \left\{ (V_{\bullet}) \in \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \text{Grass}(d-1, \tilde{\Phi}_i)(B) \right. \\ \left. \text{tels que } \begin{cases} \Pi_i \otimes 1(V_i) \subset V_{i+1} \\ \Pi_i \otimes \text{Fr}(\text{Fr}^* V_i) \subset V_{i+1} \\ \pi_i \otimes 1(V_{i+1}) \subset \Pi_i \otimes \text{Fr}(\text{Fr}^* V_i) \end{cases} \right\}$$

*est une bijection.*

*Preuve :* Pour  $i \in \mathbb{Z}$ , considérons l'image réciproque  $M_i$  de  $V_i$  dans  $\Phi_{i+d-1} \hat{\otimes} B$  par le morphisme

$$\Phi_{i+d-1} \hat{\otimes} B \longrightarrow \Phi_{i+d-1} \hat{\otimes} B / \Phi_{i-d+1} \hat{\otimes} B = \tilde{\Phi}_i \otimes B.$$

Il résulte de (I. 2.2.8) que les  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -modules  $M_i$  sont localement libres de rang  $d$ . La condition (I. 4.4.2 (1)) se vérifie en utilisant les inclusions

$$\Phi_{i-d+1} \hat{\otimes} B \subset M_i \subset \Phi_{i+d-1} \hat{\otimes} B.$$

La condition (I. 4.4.2 (2)) découle des deux premières conditions imposées à  $(V_{\bullet})$ . Les conditions (I. 2.3 (1) et (2)) sont vérifiées par  $M_i$  car elles le sont par la suite  $(\Phi_i \hat{\otimes} B)_i$ . La condition (I. 2.3 (4)) (avec  $n = 3 \cdot d - 2$ ) découle des inclusions  $M_i \subset \Phi_{i+d-1} \hat{\otimes} B$  et  $\Phi_{i+d-1} \hat{\otimes} B \subset (\pi \hat{\otimes} 1) \cdot M_{i+3 \cdot d - 2}$ . La condition de hauteur (I. 4.3.3 (4)) est vérifiée par construction.

Pour démontrer la proposition, il reste à vérifier les conditions (I. 2.3.3 (3)) et (I. 4.1.2 (2)), c'est à dire à vérifier que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , il existe un  $B$ -module inversible  $\omega_i$  tel que

$$\text{Coker}(F_i : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* M_i \longrightarrow M_{i+1}) = \Gamma_*(\omega_i),$$

où  $\Gamma$  est le morphisme

$$\mathcal{O} \hat{\otimes} B \longrightarrow \mathcal{O} \hat{\otimes} B / (\pi \hat{\otimes} 1) = B.$$

Il résulte de la troisième condition imposée à  $(V_{\bullet})$  qu'il existe un  $B$ -module  $\omega_i$  tel que  $\text{Coker } F_i = \Gamma_*(\omega_i)$ . Les  $B$ -modules

$$\frac{\Phi_{i+d} \hat{\otimes} B}{M_{i+1}} = \frac{\tilde{\Phi}_{i+1} \otimes B}{V_{i+1}}$$

et

$$\frac{\Phi_{i+d-1} \hat{\otimes} B}{F_i((\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* M_i)} \simeq \text{Fr}^* \left( \frac{\tilde{\Phi}_i \otimes B}{V_i} \right)$$

sont localement libres de rang  $d - 1$ . Notons  $FM_i = F_i((\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* M_i)$ . Il résulte de l'exactitude des suites

$$0 \longrightarrow \frac{\Phi_{i+d-1} \hat{\otimes} B}{FM_i} \longrightarrow \frac{\Phi_{i+d} \hat{\otimes} B}{FM_i} \longrightarrow \left( \frac{\Phi_{i+d}}{\Phi_{i+d-1}} \right) \otimes B \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \frac{M_{i+1}}{FM_i} \longrightarrow \frac{\Phi_{i+d} \hat{\otimes} B}{FM_i} \longrightarrow \frac{\Phi_{i+d} \hat{\otimes} B}{M_{i+1}} \longrightarrow 0$$

que les  $B$ -modules  $\frac{\Phi_{i+d} \hat{\otimes} B}{FM_i}$  et  $\omega_i = \frac{M_{i+1}}{FM_i}$  sont localement libres de rang  $d$  et 1 respectivement. Ceci achève la preuve.  $\square$

2.2.2. — Il résulte immédiatement de ce qui précède que  $G_\Phi$  est représentable par un sous-schéma fermé de

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \text{Grass}(d-1, \tilde{\Phi}_i) = \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \text{Grass}_i = \underline{\text{Grass}}$$

L'action (2.1.5) de  ${}^t\mathcal{B}^\times$  est la restriction à  $G_\Phi$  d'une action de  ${}^t\mathcal{B}^\times$  sur  $\underline{\text{Grass}}$ , définie de la manière suivante. Un élément  $g$  de  $\mathcal{B}$  induit un endomorphisme  $g_i$  de  $\Phi_i$ , pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . Il induit donc un endomorphisme  $\tilde{g}_i$  de  $\tilde{\Phi}_i$ , pour tout  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . Si  $g \in \mathcal{B}^\times$ ,  $g$  induit alors un automorphisme de  $\underline{\text{Grass}}$ . On fait agir  $g \in {}^t\mathcal{B}^\times$  sur  $\underline{\text{Grass}}$  via l'automorphisme induit par  ${}^t g^{-1}$ .

2.3. — On s'intéresse au sous schéma ouvert  $G^0$  (2.1.5) de  $G_\Phi$ .

La suite du paragraphe 2 sera consacrée à la preuve du théorème qu'on va maintenant énoncer.

On rappelle que les sous-foncteurs fermés  $G_{\Phi_i}$  de  $G_{\mathcal{O},0}$  sont aussi des sous foncteurs fermés de  $G_\Phi$  (cf. la remarque 2.1.1). Considérons le sous-foncteur ouvert  $G_i^0 = G^0 \cap G_{\Phi_i}$  de  $G_{\Phi_i}$ .

**Théorème 2.3.1.** —

$$1. G^0 = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} G_i^0$$

2.  $G^0$  est un sous-foncteur ouvert du foncteur  $G_{\mathcal{O},0}$ .

(Cet énoncé est illustré par une figure ; voir la page suivante).

Avant d'entreprendre la preuve de ce théorème, on va faire quelques remarques et on indiquera les étapes principales de la preuve.

*Remarques :*

1) L'objet universel sur  $G_{\Phi_i}$  (et donc sur  $G_i^0$  et sur  $G^0$ ) s'obtient en appliquant (1.5) au drapeau universel sur  $G_{\Phi_i} \subset \text{Drap}(\pi^{-1} \cdot \Phi_i / \Phi_i)$ . On obtiendra ultérieurement une description plus explicite de l'objet universel sur  $G^0$  (cf. (2.7.2)). L'objet universel sur  $G_\Delta^0$  (où  $\Delta$  désigne un simplexe maximal de l'immeuble de  $\text{PGL}_d(K)$ ) s'en déduit par la remarque (2.1.5).

2) Dans le cours de la preuve du théorème, on plongera  $G^0$  dans une certaine variété  $\mathcal{G}$  où il sera un diviseur à croisements normaux, réunion des diviseurs lisses  $G_i^0$  (comme indiqué sur la figure (2.3.2)). Le complété formel de  $\mathcal{G}$  le long de  $G^0$  s'interprètera naturellement au paragraphe 3.

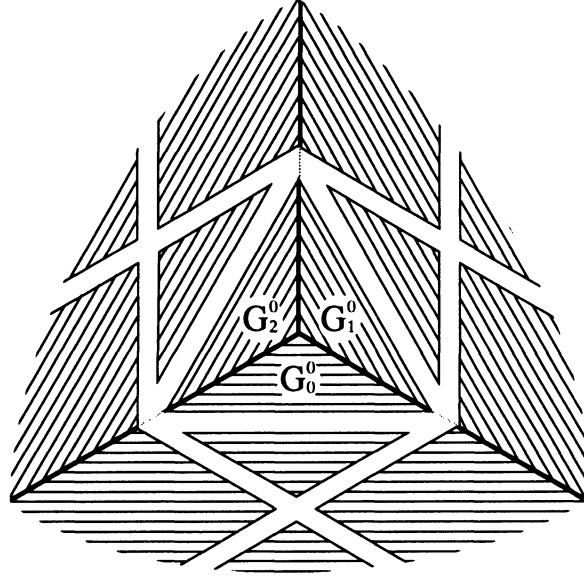


Fig. 2.3.2: Le schéma  $G^0$  (représenté pour  $d = 3$  et  $q = 2$ )

- 3) Il résulte de la proposition (1.2) et de la définition de  $G^0$  que pour toute extension  $k$  de  $\mathbb{F}_q$ , on a  $G^0(k) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} G_i^0(k)$ . On a donc  $G_{\text{red}}^0 = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} G_i^0$ , et la première partie du théorème revient à dire que  $G^0$  est réduit.
- 4) Il résulte de la proposition (2.1.3) et de la deuxième partie du théorème que  $(G_\Delta^0)_\Delta$  constitue un recouvrement ouvert de  $G_\mathcal{O}$ .

Les étapes de la preuve du théorème (2.3.1) sont les suivantes.

1<sup>ère</sup> ÉTAPE (2.4) — On construit pour tout  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  un plongement

$$\text{Drap}_i = \text{Drap}(\pi^{-1} \cdot \Phi_i / \Phi_i) \hookrightarrow \underline{\text{Grass}} = \prod_{j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \text{Grass}(d-1, \tilde{\Phi}_j)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Drap}_i & \hookrightarrow & \underline{\text{Grass}} \\ (1.5) \uparrow & & \uparrow (2.2.1) \\ G_{\Phi_i} & \hookrightarrow & G_\Phi \end{array}$$

soit commutatif.

2<sup>ème</sup> ÉTAPE (2.5) — On construit un ouvert affine de  $\underline{\text{Grass}}$  contenant l'image de  $G^0 \hookrightarrow \underline{\text{Grass}}$ .

3<sup>ème</sup> ÉTAPE (2.6) — Pour réduire le nombre de variables, on exprime une partie des conditions (2.2.1). On obtient ainsi un sous-schéma localement fermé  $\mathcal{A}$  de Grass contenant  $G^0$  et  $\bigcup_i \text{Drap}_i$ . On décrit un ouvert affine  $\mathcal{A}^0$  de  $\mathcal{A}$  contenant  $G_0$  comme sous-schéma fermé.

4<sup>ème</sup> ÉTAPE (2.7) — On obtient finalement des équations pour  $G^0 \subset \mathcal{A}^0$ . On en déduit la première partie du théorème. On donne une description plus commode de l'objet universel sur  $G^0$ .

5<sup>ème</sup> ÉTAPE (2.8) — En appliquant aux objets de  $G_{\mathcal{O},0}$  la théorie des déformations (I. 3) et en utilisant la description (2.7) de l'objet universel sur  $G^0$ , on prouve la deuxième partie du théorème.

2.4. — Considérons un drapeau

$$(0) \subset D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_j \subset \cdots \subset D_d = (\pi^{-1} \cdot \Phi_i / \Phi_i \otimes B)$$

élément de  $\text{Drap}_i(B)$ . L'image réciproque  $V_{i+j}$  de  $D_j$  par le morphisme

$$(\Phi_{i+d} / \Phi_{i+j-d+1}) \otimes B \longrightarrow (\Phi_{i+d} / \Phi_i) \otimes B$$

est pour  $1 \leq j \leq d-1$  un facteur direct de rang  $d-1$  de  $(\Phi_{i+d} / \Phi_{i+j-d+1}) \otimes B$ , et donc de  $(\Phi_{i+j+d-1} / \Phi_{i+j-d+1}) \otimes B = \tilde{\Phi}_{i+d}$ .

En posant  $V_i = \tilde{\Phi}_i \otimes B = (\Phi_i / \Phi_{i-d+1}) \otimes B \subset \tilde{\Phi}_i \otimes B$ , on définit un élément  $(V_{i+j})_{0 \leq j \leq d-1}$  de  $\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \text{Grass}(d-1, \tilde{\Phi}_i)(B)$  vérifiant la condition (2.2 (1)).

L'image du plongement

$$\text{Drap}_i \hookrightarrow \text{Grass}$$

ainsi défini est en fait le sous-schéma fermé de Grass défini par les conditions (2.2 (1)) et  $(V_i = \tilde{\Phi}_i)$ .

2.5. — Pour  $0 \leq i \leq d-1$  et  $E \in \text{Grass}_i(\mathbb{F}_q)$ , on note  $\mathcal{L}_i(E)$  le sous-schéma fermé de Grass formé des  $(V_j)_j$  tels que  $V_i = E$ . Soit  $\mathcal{V}$  l'ouvert de Grass complémentaire du fermé

$$\bigcup_{i,E} \mathcal{L}_i(E)$$

(où  $0 \leq i \leq d-1$  et  $E$  décrit  $\text{Grass}_i(\mathbb{F}_q) - \{\tilde{\Phi}_i\}$ ). On a  $G^0 = G_\Phi \cap \mathcal{V}$ . L'ouvert  $\mathcal{V}$  n'est cependant pas un ouvert affine de Grass.

Lorsque  $W_i \subset \tilde{\Phi}_i$  est un  $\mathbb{F}_q$ -sous-espace vectoriel de rang  $d-1$ , on considère l'ouvert affine  $(\text{Grass}_i)_0^{W_i}$  de  $\text{Grass}_i$  défini par la condition

$$V_i \rightarrow \tilde{\Phi}_i / W_i.$$

Fixons un tel sous-espace vectoriel  $W_i$ . On note  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\Phi_0 = \mathcal{O}^d$ . On munit le  $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel  $\tilde{\Phi}_i$  de la base  $(E_j[i])_{1 \leq j \leq 2 \cdot d - 2}$  définie par

$$\begin{aligned} E_j[i] &= P^{-i+j-d+1} \cdot e_1 \\ &= \begin{cases} P^{-i+d-1} \cdot e_j & \text{si } 1 \leq j \leq d \\ P^{-i+d-1} \cdot \pi \cdot e_{j-d} & \text{si } d+1 \leq j \leq 2 \cdot d - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

(où  $P$  est la matrice (I. 4.1); on a  $P^{r \cdot d - s} \cdot e_1 = \pi^r \cdot e_{s+1}$  pour  $r \in \mathbb{Z}$  et  $0 \leq s \leq d-1$ ). Ces bases vérifient les relations

$$\begin{aligned} \Pi_i E_j[i] &= E_{j+1}[i+1] \text{ pour } 1 \leq j \leq 2 \cdot d - 3 \\ \Pi_{2 \cdot d - 2} E_j[i] &= 0 \end{aligned}$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

Le  $\mathbb{F}_q$ -sous-espace vectoriel  $W_i$  de  $\tilde{\Phi}_i$  est alors celui engendré par les  $d-1$  premiers vecteurs de la base  $(E_j[i])_j$ .

**Proposition 2.5.1.** — *Le sous-schéma  $G^0$  de Grass est inclus dans l'ouvert  $\prod_i (\text{Grass}_i)_{W_i}^0(k)$*

*Preuve :* Il suffit de prouver que  $G^0(k) \subset \prod_i (\text{Grass}_i)_{W_i}^0(k)$  pour toute extension  $k$  de  $\mathbb{F}_q$ .

Soient  $(M_\bullet) \in G^0(k)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $i$  le plus grand indice critique  $\leq n$  de  $(M_\bullet)$  et  $j$  le plus petit indice critique  $\geq n$ . On veut montrer que  $M_n \cap (W_n \otimes k) = (0)$ . On va pour cela montrer que  $M_l \cap (W_l \otimes k) = (0)$  pour  $i \leq l \leq j$ .

Il résulte de la définition de  $G^0$  que  $M_i = \Phi_i \hat{\otimes} k$  et que  $M_j = \Phi_j \hat{\otimes} k$ . Considérons le drapeau

$$(0) = D_i \subset D_{i+1} \subset \cdots \subset D_j = (\Phi_j / \Phi_i) \otimes k$$

(avec  $D_l = M_l / (\Phi_i \otimes k)$  pour  $i \leq l \leq j$ ). On munit le  $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel  $\Phi_j / \Phi_i$  de la base  $(\mathcal{E}_m)_{1 \leq m \leq j-i}$  formée des images respectives des éléments

$$P^{-j} \cdot e_1, P^{-j+1} \cdot e_1, \dots, P^{-i} \cdot e_1$$

de  $\Phi_j$ . Il revient au même de dire que  $V_l$  est transverse à  $W_l \otimes k$  ou de dire que  $D_l$  est transverse au  $k$ -espace vectoriel  $W'_l$  engendré par les  $j-l$  premiers vecteurs de la base  $\mathcal{E}$ .

Considérons un vecteur non nul

$$\begin{pmatrix} d^1 \\ \vdots \\ d^{j-i} \end{pmatrix}$$

de la droite vectorielle  $D_{i+1}$ . Aucun entier strictement compris entre  $i$  et  $j$  n'est critique, et les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} d^1 & (d^1)^q & \dots & (d^1)^{q^s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d^{j-i} & (d^{j-i})^q & \dots & (d^{j-i})^{q^s} \end{pmatrix}$$

forment donc pour  $0 \leq s \leq j-i-1$  une base  $(\mathcal{D}_m)_{1 \leq m \leq s-1}$  de  $D_{i+s+1}$ .

On va établir par récurrence sur l'entier  $i \leq l \leq j$  que  $D_l$  est transverse à  $W'_l$ .

Pour  $l = i$ , on a  $D_i = (0)$ , de sorte que l'hypothèse de récurrence est trivialement vérifiée.

Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée par  $i \leq l \leq j-1$  mais pas par  $l+1$ . Soit

$$\delta = \sum_{m=1}^{j-l-1} \delta^m \cdot \mathcal{E}_m = \sum_{m=1}^{j-l} \Delta^m \cdot \mathcal{D}_m$$

un élément non nul de  $W'_{l+1} \cap D_{l+1}$ . Si  $\Delta^{j-l} = 0$ , l'élément  $\delta$  est déjà dans  $D_l$ , ce qui contredit l'hypothèse de récurrence pour l'entier  $l$ . On a donc  $\Delta^{j-l} \neq 0$ . Les vecteurs de la base  $(\mathcal{D}_m)_{1 \leq m \leq j-i}$  de  $D_j$  sont donc combinaisons linéaires des vecteurs-colonne de la matrice

$$\begin{pmatrix} d^1 & \dots & (d^1)^{q^{l-i}} & \delta^1 & \dots & (\delta^1)^{q^t} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \delta^t & \dots & (\delta^t)^{q^t} \\ d^{j-i} & \dots & (d^{j-i})^{q^{l-i}} & (0) & & \end{pmatrix}$$

(où  $t = j-l-1$ ). Ces vecteurs-colonne forment donc une base de  $D_j$ .

En particulier, les  $t+1$  derniers vecteurs-colonne forment une famille libre, ce qui contredit le fait qu'ils sont tous dans  $W'_l$ . Ceci termine la preuve de l'hypothèse de récurrence, et donc aussi la preuve de la proposition (2.5.1).  $\square$

Soit  $\underline{\text{Grass}}^0$  l'intersection des ouverts affines

$$\prod_j (\text{Grass}_j)_{E_j}^0$$

de  $\underline{\text{Grass}}$ ,  $(E_\bullet)$  décrivant  $\prod_j (\text{Grass}_j)_{\Phi_j}^0(\mathbb{F}_q)$ . Rappelons qu'on a défini au début de (2.5) un ouvert  $\mathcal{V}$  de  $\underline{\text{Grass}}$  vérifiant  $G^0 = G_\Phi \cap \mathcal{V}$ .

**Proposition 2.5.2.** — *L'ouvert  $\underline{\text{Grass}}^0$  vérifie les inclusions*

$$G^0 \subset \underline{\text{Grass}}^0 \subset \mathcal{V}.$$

*On a donc  $G^0 = G_\Phi \cap \underline{\text{Grass}}^0$ .*



*Preuve :* L'action (2.2.2) de  $g \in {}^t\mathcal{B}^\times$  sur  $\underline{\text{Grass}}$  envoie  $\prod_i (\text{Grass}_i)_{W_i}^0$  sur  $\prod_i (\text{Grass}_i)_{i_{g^{-1} \cdot W_i}}^0$ . L'inclusion  $G^0 \subset \underline{\text{Grass}}^0$  résulte donc de (2.5.1) et du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur.

**Lemme 2.5.3.** — *Les ensembles*

$$\{\tilde{g}_i \cdot W_i, g \in \mathcal{B}^\times / (1 + P^{2 \cdot d-2} \cdot \mathcal{B})\} \text{ et } (\text{Grass}_i)_{\tilde{\Phi}_i}^0(\mathbb{F}_q)$$

*coïncident,  $\forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .  $\square$*

L'inclusion  $\underline{\text{Grass}}^0 \subset \mathcal{V}$  résulte du lemme (2.5.3) et du fait que si  $E \in \text{Grass}_i(\mathbb{F}_q) - \{\tilde{\Phi}_i\}$ , il existe  $E' \in \text{Grass}_i(\mathbb{F}_q)$  tel que  $E' \cap \tilde{\Phi}_i = (0)$  et  $E \cap E' \neq (0)$ .  $\square$

2.6. — On identifie  $\tilde{\Phi}_i$  à  $\mathbb{F}_q^{2 \cdot d-2}$  par la base  $(E_j[i])_j$ . Le sous-espace  $W_i$  est donc celui engendré par les colonnes de la matrice  $\begin{pmatrix} \text{Id}_{d-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ . L'ouvert  $(\text{Grass}_i)_{W_i}^0$  de  $\text{Grass}_i$  est alors identifié à l'espace affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{(d-1)^2}$  des matrices carrées  $v[i]$  de taille  $d-1$  : si  $k$  est une extension de  $\mathbb{F}_q$  et si  $V_i \in (\text{Grass}_i)_{W_i}^0(k)$ ,  $V_i$  est le sous espace vectoriel de  $k^{2 \cdot d-2}$  engendré par les colonnes de la matrice  $\begin{pmatrix} v[i] \\ \text{Id}_{d-1} \end{pmatrix}$ .

Soit  $\mathcal{A}$  le sous-schéma fermé de  $\prod_i (\text{Grass}_i)_{W_i}^0$  défini par les conditions

$$\Pi_\bullet^j v_1[i-j] \in V_i \quad (1 \leq j \leq d-2)$$

(on note  $v_1[i]$  le premier vecteur-colonne de la matrice  $v[i]$ ). Le long du fermé  $\mathcal{A}$ , la famille

$$v_1[i], \Pi_\bullet v_1[i-1], \dots, \Pi_\bullet^{d-2} v_1[i-d+2]$$

des vecteurs-colonne de la matrice

$$\tilde{v}[i] = \begin{pmatrix} v_1^1[i] \\ \vdots & \ddots \\ v_1^{d-1}[i] & & v_1^1[i-d+2] \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \\ & \ddots & v_1^{d-1}[i-d+2] \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

constitue une base de  $V_i$ . Ceci identifie le schéma  $\mathcal{A}$  à l'espace affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d \cdot (d-1)} = \text{Spec } \mathbb{F}_q[v_1^j[i]] (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq d-1)$ .

Soit  $\mathcal{A}^0$  l'ouvert affine de  $\mathcal{A}$  complémentaire des fermés d'équation

$$1 - v_1^j[i]^{q-1} \quad (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq d-1)$$

**Proposition 2.6.1.** — On a  $G^0 = G_\Phi \cap \mathcal{A}^0$ .

*Preuve :* Le sous-schéma localement fermé  $G^0$  de Grass est inclus dans le sous-schéma fermé de  $\prod_i (\text{Grass}_i)_W^0$  défini par les conditions

$$\Pi_i(V_i) \subset V_{i+1} \quad (\forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}).$$

Il est donc inclus dans  $\mathcal{A}$ .

Pour  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ , soit  $\mathcal{W}_{i,j}(\lambda)$  le sous-espace de  $\tilde{\Phi}_i$  engendré par les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda \varepsilon_j \\ \text{Id}_{d-1} \end{pmatrix}$$

(où  $\varepsilon_j \in \text{gl}_{d-1}(\mathbb{F}_q)$  est la matrice ayant comme seul coefficient non nul 1 situé à l'intersection de la 1-ère ligne et de la  $j$ -ème colonne).

Soit  $\mathcal{U}_i$  l'intersection des ouverts

$$(\text{Grass}_i)_W^0|_{\mathcal{W}_{i,j}(\lambda)} \quad (1 \leq j \leq d-1, \lambda \in \mathbb{F}_q)$$

de  $\text{Grass}_i$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$ , on a

$$(\text{Grass}_i)_W^0 \cap (\text{Grass}_i)_W^0|_{\mathcal{W}_{i,j}(\lambda)} = (\text{Grass}_i)_W^0[(1 - \lambda^{-1} \cdot v_1^j[i])^{-1}]$$

et donc

$$\mathcal{U}_i = (\text{Grass}_i)_W^0[(1 - \lambda^{-1} \cdot v_1^j[i]^{q-1})^{-1}].$$

On note encore  $\underline{\mathcal{U}}$  l'ouvert  $\prod_i \mathcal{U}_i$  de Grass. On a alors  $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A} \cap \underline{\mathcal{U}}$ .

L'ouvert  $\underline{\mathcal{U}}$  vérifie l'inclusion  $\text{Grass}^0 \subset \underline{\mathcal{U}}$ . Montrons que  $\mathcal{A}^0$  vérifie aussi l'inclusion  $\mathcal{A}^0 \subset \mathcal{V}$  (2.5), ce qui suffira à prouver la proposition d'après (2.5.2).

Soient  $k$  une extension de  $\mathbb{F}_q$  et  $(V_j)_j \in \prod_j (\text{Grass}_j)_W^0(k)$ . On suppose que  $(V_j)_j \in \mathcal{A}^0(k)$  et  $V_i \in \text{Grass}_i(\mathbb{F}_q)$  pour un certain indice  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . On est alors ramené à prouver que  $V_i = \dot{\Phi}_i$ .

L'espace  $V_i$  est engendré par les colonnes de la matrice  $\begin{pmatrix} v[i] \\ \text{Id}_{d-1} \end{pmatrix}$  et aussi par celles de la matrice  $\tilde{v}[i]$ . On a donc

$$\tilde{v}[i] = \begin{pmatrix} v[i] \\ \text{Id}_{d-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

où la matrice triangulaire supérieure  $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$  ci-dessus est celle constituée par

les  $d-1$  dernières lignes de la matrice  $\tilde{v}[i]$ . La matrice  $v[i]$  est à coefficients dans  $\mathbb{F}_q$ . Les coefficients  $v_1^j[i]$  de sa première colonne vérifient l'inégalité  $1 - v_1^j[i]^{q-1} \neq 0$  et sont donc nuls. Soit  $1 \leq l \leq d-2$ . Supposons que les  $l$  premières colonnes de  $v[i]$  sont nulles. La  $(l+1)$ -ième colonne de la matrice  $\tilde{v}[i]$  est alors  $\begin{pmatrix} v_{l+1}[i] \\ * \end{pmatrix}$ . En utilisant le fait que les  $l$  premiers coefficients de cette colonne sont nuls et que les  $d-1$  suivants,  $v_1^m[i-l]$ , vérifient l'inégalité

$$1 - v_1^m[i-l]^{q-1} \neq 0,$$

on conclut que la  $(l+1)$ -ième colonne de la matrice  $v[i]$  est nulle, ce qui achève la preuve.

On oublie dorénavant l'indice 1 de  $v_1^j[i]$ , qu'on note donc plus simplement  $v^j[i]$ .

2.7. — La première partie du théorème (2.3.1) résulte de la proposition suivante.

**Proposition 2.7.1.** —

1. Le sous-schéma fermé  $G^0$  de  $\mathcal{A}^0$  est défini par les équations

$$v^j[i] - v^j[i]^q = (v^{d-1}[i] - v^{d-1}[i]^q) \cdot v^{j+1}[i+1] \\ (\forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq d-2)$$

et

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} v^{d-1}[i] = 0$$

2.  $G_i^0$  est le sous-schéma fermé de  $G^0$  d'équation  $v^{d-1}[i] = 0$ . On a donc

$$G^0 = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} G_i^0$$

(cf. figure (2.3.2)).

*Preuve :* Le long du fermé  $G^0 \subset \mathcal{A}^0$ , les conditions

$$F_i(\mathrm{Fr}^* V_i) \subset V_{i+1} \text{ et } \Pi_i(v[i]) \in V_{i+1}$$

sont vérifiées. En particulier, le vecteur

$$\begin{pmatrix} 0 \\ w^1[i] \\ \vdots \\ w^{d-1}[i] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(où  $w_j[i] = v^j[i] - v^j[i]^q$ ) appartient à  $V_{i+1}$ . Ceci se traduit par les équations suivantes

$$(\mathcal{E}_{i,j}) \quad w^j[i] = w^{d-1}[i] \cdot v^{j+1}[i+1] \quad (1 \leq j \leq d-2)$$

et

$$0 = w^{d-1}[i] \cdot v^1[i+1]$$

qui sont donc vérifiées le long de  $G^0$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

Soit  $u^j[i] = 1 - v^j[i]^{q-1}$ . L'identité

$$\prod_{j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} u^{d-1}[i+j] \cdot \prod_{j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} v^{d-1}[i+j] = 0,$$

conséquence des équations précédentes, est donc vérifiée le long de  $G^0$ . Les  $u^{d-1}[i]$  sont des unités, et le produit  $\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} v^{d-1}[i]$  est donc nul le long de  $G^0$ .

Considérons le sous-schéma fermé  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{A}^0$  défini par les équations  $\mathcal{E}_{i,j}$  ( $1 \leq j \leq d-2, i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ). On va d'abord montrer que  $G_i^0$  est le sous-schéma fermé de  $\mathcal{G}$  défini par l'équation  $v^{d-1}[i] = 0$ . On en déduira ensuite la proposition.

Le sous-schéma fermé  $\text{Drap}_i \cap \prod_{j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (\text{Grass}_j)_{W_j}^0$  de  $\mathcal{A}$  est défini par le système d'équations

$$\begin{pmatrix} v^1[i] & & & \\ \vdots & & & \\ & v^1[i+d-1] & & \\ \vdots & & \ddots & \\ v^{d-1}[i] & v^{d-2}[i+d-1] & \cdots & v^1[i+2] \end{pmatrix} = (0).$$

La restriction à  $\text{Drap}_i \cap \prod_{j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (\text{Grass}_j)_{W_j}^0$  du drapeau

$$(0) = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_d = \pi^{-1}\Phi_i/\Phi_i$$

universel se décrit de la manière suivante. On munit le  $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel  $\bar{\Phi}_i = \pi^{-1}\Phi_i/\Phi_i$  de la base formée des images des vecteurs  $P^{-i}\pi^{-1}e_1, \dots, P^{-i}\pi^{-1}e_d$ . Le module  $D_j$  est alors celui engendré par les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & v^{d-1}[i+d-1] & \dots & v^1[i+1] \\ & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & v^{d-1}[i+1] \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

La condition  $F(\text{Fr}^* D_j) \subset D_{j+1}$  se traduit simplement par les équations  $(\mathcal{E}_{i,j})$  ( $l-i \leq j \leq d-1, i+1 \leq l \leq i+d-1$ ), et on a donc  $G_i^0 = \mathcal{G} \cap \text{Drap}_i$ . Les équations  $v^j[i+l] = 0$  ( $2 \leq l \leq d, 1 \leq j \leq l-1$ ) définissant le fermé  $G_i^0$  de  $\mathcal{G}$  découlent toutes de l'équation  $v^{d-1}[i] = 0$ , du fait que  $u^n[m] = 1 - v^n[m]^{q-1}$  est une unité le long de  $\mathcal{G}$  et de l'identité

$$v^j[i'] = \left( \prod_{k=0}^{d-2-j} \frac{u^{d-1}[i'+k]}{u^{j+k}[i'+k]} \cdot v^{d-1}[i'+k] \right) \cdot v^{d-1}[i'+d-1-j]$$

qui résulte des équations  $(\mathcal{E}_{n,m})$  (faire  $i' = i+l$ ). On a donc  $G_i^0 = \mathcal{G} \cap (v^{d-1}[i] = 0)$ .

Le morphisme

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d = \text{Spec } \mathbb{F}_q[v^{d-1}[i]]$$

induit par la projection naturelle  $\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d$  est étale. La réunion des fermés  $G_i^0$  d'équation  $v^{d-1}[i] = 0$  est donc le fermé d'équation  $\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} v^{d-1}[i] = 0$  (c'est un diviseur à croisements normaux, réunion des diviseurs lisses  $G_i^0$ ).

La proposition (2.7.1) résulte de l'égalité  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} G_i^0 = \mathcal{G}_0$  qu'on vient d'établir et des inclusions  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} G_i^0 \subset G^0 \subset \mathcal{G}_0$ .  $\square$

On va maintenant donner une description plus commode de l'objet universel sur  $G^0$ . On note  $A_0 = H^0(G^0, \mathcal{O}_{G^0})$ . La preuve de la proposition suivante est facile et laissée au lecteur.

**Proposition 2.7.2.** — *Pour tout  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ,*

1. *les vecteurs-colonne de la matrice  $R_i = R \cdot P^{-i}$ , où*

$$R = \text{Id} + \sum_{l=1}^{d-1} P^{-l} \cdot \text{diag}(v^{d-l}[-m], 0 \leq m \leq d-1)$$

*forment une base  $(r_j[i])_j$  du  $\mathcal{O} \hat{\otimes} A_0$ -module universel  $M_i \subset \Phi_{i+d-1} \hat{\otimes} A_0$  ;*

2. *si l'on identifie  $M_i$  et  $M_{i+1}$  à  $\mathcal{O}^d \hat{\otimes} A_0$  à l'aide des bases précédentes,*

(a) le morphisme

$$\Pi_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}$$

est  $P$ ;

(b) le morphisme

$$F_i : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M_i \longrightarrow M_{i+1}$$

s'écrit  $P^i \circ (F) \circ P^{-i} \circ \text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr}$ , où  $(F)$  est la matrice

$$P - \text{diag}(w[-j], 0 \leq j \leq d-1)$$

et  $w[j] = v^{d-1}[j] - v^{d-1}[j]^q$ ;

(c) le morphisme

$$M_i \longrightarrow \Phi_{i+d-1} \widehat{\otimes} A_0 \subset K^d \widehat{\otimes} A_0$$

est simplement  $R_i$ .  $\square$

Exemple : ( $d = 3$ )

$G^0 = \text{Spec } A_0$ , où  $A_0$  est le quotient de la  $\mathbb{F}_q$ -algèbre

$$\mathbb{F}_q[x_i, y_i, (1 - x_i^{q-1})^{-1}, (1 - y_i^{q-1})^{-1} \quad (i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})]$$

par l'idéal

$$((y_i - y_i^q) - (x_i - x_i^q) \cdot x_{i+1} \quad (i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}), x_0 \cdot x_1 \cdot x_2).$$

La matrice  $R$  est la suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & y_1 \\ \pi^{-1} \otimes y_0 & 1 & x_1 \\ \pi^{-1} \otimes x_0 & \pi^{-1} \otimes y_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $(F)$  est la suivante

$$\begin{pmatrix} x_0^q - x_0 & 0 & \pi \otimes 1 \\ 1 & x_2^q - x_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_1^q - x_1 \end{pmatrix}.$$

2.8. — Pour tout entier  $n \geq d-1$ , soit  $G_n$  le sous-schéma fermé de  $G_{\mathcal{O},0}$  défini par les conditions

$$\Phi_{i-n, G_{\mathcal{O},0}} \subset M_i \subset \Phi_{i+n, G_{\mathcal{O},0}} \quad (\forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}).$$

Le foncteur  $G^0$  est un sous-foncteur localement fermé du foncteur  $G_n$ . Il suffit pour prouver (2.3.1 (2)) de montrer que pour tout  $n \geq d-1$ ,  $G^0$  est un sous-foncteur ouvert de  $G_n$ .

Le foncteur  $G_n$  est clairement représentable par un sous-schéma fermé de  $\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \text{Grass}(n, \Phi_{i+n}/\Phi_{i-n})$  (raisonner comme dans la preuve de (2.2.1)). Le théorème (2.3.1 (2)) résulte alors de la proposition suivante (cf. [E.G.A. IV<sub>4</sub>] Théorème (17.9.1)).

**Proposition 2.8.1.** — *L'immersion*

$$G^0 \hookrightarrow G_n$$

*est étale*

*Preuve :* Les  $\mathbb{F}_q$ -schémas  $G^0$  et  $G_n$  sont de type fini. Il suffit donc de vérifier le critère infinitésimal ([E.G.A. IV<sub>4</sub>] (17.14.1)).

Soit  $\mathcal{F}_0$  le fermé de  $\text{Spec } \mathbb{F}_q[w[i](i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})]$  d'équation  $\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} w[i] = 0$ . Considérons le morphisme étale

$$\lambda_0 : G^0 \longrightarrow \mathcal{F}_0$$

composé du morphisme étale

$$G^0 \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{F}_q[v^{d-1}[i], (1 - v^{d-1}[i]^{q-1})^{-1}] / (\prod_i v^{d-1}[i])$$

défini par l'oubli des coordonnées  $v^j[i](j \leq d-2)$  et de la restriction au-dessus du fermé  $\mathcal{F}_0$  du morphisme étale

$$\text{Spec } \mathbb{F}_q[v^{d-1}[i], (1 - v^{d-1}[i]^{q-1})^{-1}] \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{F}_q[w[i]]$$

défini par l'égalité  $w[i] = v[i] - v[i]^q$ .

Le module de coordonnées  $(M_\bullet, F_\bullet, \Pi_\bullet)$  (2.7.2) sur  $G^0$  est l'image réciproque par  $\lambda_0$  d'un module de coordonnées  $(L_\bullet, F_\bullet, \Pi_\bullet)$  (défini par les formules (2.7.2.a,b)) sur  $\mathcal{F}_0$ .

On rappelle que si  $B$  est une  $\mathbb{F}_q$ -algèbre (considérée comme une  $\mathcal{O}$ -algèbre via le morphisme  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/(\pi) = \mathbb{F}_q$ ), on note  $\text{Mod}S(d)(B)$  la catégorie des modules de coordonnées spéciaux vérifiant (I. 4.3.3) (cf. (I. 4.4.4)). Considérons le morphisme de catégories fibrées

$$\mathcal{F}_0 \longrightarrow \text{Mod}S(d)$$

induit par  $(L_\bullet, F_\bullet, \Pi_\bullet)$ . Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la proposition (3.3.2) que nous démontrerons plus tard. On laissera au lecteur le soin de vérifier que la preuve de la proposition (3.3.2) ne fait pas appel aux résultats de (2.8).

**Lemme 2.8.2.** — *Le morphisme*

$$\mathcal{F}_0 \longrightarrow \text{Mod}S(d)$$

*est formellement étale (au sens de (I. 4.4.4)).*  $\square$

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_0 = G^0 & \xrightarrow{\text{net}} & G_n & \xrightarrow{\text{net}} & G_{\mathcal{O},0} \\ \downarrow \lambda_0 \text{ étale} & & & & \nearrow \\ \mathcal{F}_0 & & & & \\ \downarrow \text{formellement étale} & & \nearrow \text{formellement net} & & \\ (2.8.2) & & \text{(cf. (I. 4.4.5))} & & \\ \text{Mod } S(d) & & & & \end{array}$$

Les morphismes

$$G^0 \hookrightarrow G_{\mathcal{O},0} \quad \text{et} \quad G^0 \hookrightarrow G_n$$

sont alors formellement étales, ce qui achève la preuve de (2.8.1).  $\square$

### 3 Utilisation de la théorie des déformations

On rappelle que lorsque  $B$  est une  $\mathcal{O}$ -algèbre dans laquelle l'image de  $\pi$  est nilpotente, on note  $\text{Mod}S(d)(B)$  la catégorie des modules de coordonnées vérifiant (I. 4.3.3 (1, 2)) sur  $B$  (cf. (I. 4.4.4)).

Soient  $\widehat{G}^0$  le complété de  $G_{\mathcal{O}}$  le long de  $G^0$ . On va définir un Spf  $\mathcal{O}$ -schéma formel  $\widehat{\mathcal{G}}$  muni d'un pro-objet  $(M, R) \in \widehat{G}^0(\widehat{\mathcal{G}})$  se réduisant modulo  $\pi$  sur (2.7.2). On montrera ensuite en (3.3.1) que  $\widehat{\mathcal{G}}$  muni de l'objet universel  $(M, R)$  pro-représente le foncteur  $\widehat{G}^0$ .

Comme intermédiaire dans la construction de  $\widehat{\mathcal{G}}, M, R$  et surtout en vue de la preuve de (3.3.1), il sera commode d'introduire en même temps que  $\widehat{\mathcal{G}}$  un autre Spf  $\mathcal{O}$ -schéma formel  $\widehat{\mathcal{F}}$  muni de  $(L_{\bullet}, \Pi_{\bullet}, F_{\bullet}) \in \text{Mod}S(d)(\widehat{\mathcal{F}})$  et un morphisme étale  $\widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}$ . Le schéma formel  $\widehat{\mathcal{F}}$  est en fait un modèle local au sens de Rapoport [R] du foncteur  $G_{\mathcal{O}}$  pour la topologie étale (cf. (3.3.2)).

3.1. — Soit  $\mathcal{G}$  le sous-schéma fermé de

$$\text{Spec } \mathbb{F}_q[v^j[i], (1 - v^j[i]^{q-1})^{-1}] \quad (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq d-1)$$

défini par les équations

$$(\mathcal{E}_{i,j}) \quad v^j[i] - v^j[i]^q = (v^{d-1}[i] - v^{d-1}[i]^q) \cdot v^{j+1}[i+1]$$

pour  $(1 \leq j \leq d-2)$ .

Remarquons que  $\mathcal{G}$  peut aussi se construire de la manière suivante. Soient  $\mathcal{F}$  l'espace affine  $\text{Spec } \mathbb{F}_q[w[i]] (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$  et  $\mathcal{F}_{(n)} (1 \leq n \leq d-1)$  le sous-schéma fermé de  $\text{Spec } \mathbb{F}_q[v^j[i]] (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, d-n \leq j \leq d-1)$  défini par les équations  $(\mathcal{E}_{i,j}, d-n \leq j \leq d-2)$ . En oubliant les coordonnées  $v^{d-n-1}$ ,  $\mathcal{F}_{(n+1)}$  constitue pour  $n \leq d-2$  un revêtement étale de  $\mathcal{F}_{(n)}$ . En posant  $w[i] = v^{d-1}[i] - v^{d-1}[i]^q$ , on peut considérer  $\mathcal{F}_{(1)}$  comme un revêtement étale de  $\mathcal{F}$ . Le schéma  $\mathcal{G}$  est alors un sous-schéma ouvert de  $\mathcal{F}_{(d-1)}$ .

On notera  $\lambda$  le morphisme naturel  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ .

On munit  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  d'une structure de  $\mathbb{F}_q$ -schémas en posant  $\pi = \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} w[i]$ .

Considérons le point 0 de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^1 = \text{Spec } \mathbb{F}_q[\pi]$  défini par l'idéal  $(\pi)$ . La fibre  $\mathcal{G}_0$  de  $\mathcal{G}$  au-dessus de 0 n'est autre que  $G^0$  (2.7.1).

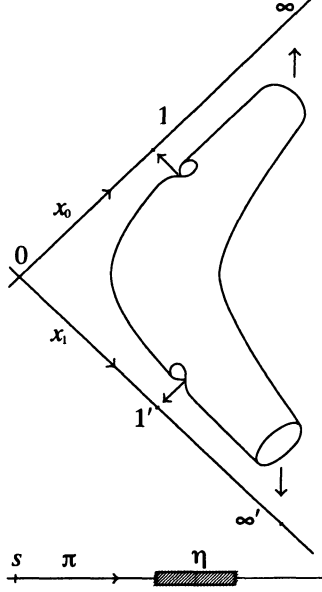
On rappelle qu'on a choisi une uniformisante  $\pi$  de l'anneau local  $\mathcal{O}$ , de sorte qu'on identifie  $\mathcal{O}$  à  $\mathbb{F}_q[[\pi]]$ . On notera  $\widehat{\mathcal{G}}$  et  $\widehat{\mathcal{F}}$  les Spf  $\mathcal{O}$ -schémas formels complétés  $(\pi)$ -adiques respectifs de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$ ,  $\widehat{\lambda}$  le complété du morphisme  $\lambda$  et

$$\lambda_0: \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0$$



la fibre au-dessus de 0 du morphisme  $\lambda$ .

Fig. 3.1.1. Le schéma formel  $\widehat{\mathcal{G}}^0$  (pour  $d = 2$  et  $q = 2$ ) (on pose pour simplifier  $x_i = w[i]$ ).



3.2. — Soit  $B$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre dans laquelle l'image de  $\pi$  est nilpotente. On note

$$M = (M_\bullet, F_\bullet, \Pi_\bullet) \in \text{Mod}S(d)(B)$$

les modules de coordonnées spéciaux (I. 4.3.3 (1, 2)) sur  $B$ . On a

$$\begin{aligned} \widehat{G}^0(B) &= \{(M, R) \in G_{\mathcal{O}}(B) \text{ tels que } M \otimes_B B_0 \in G^0(B_0)\} \\ &= \{(M, \overline{M}, R) \in \text{Mod}S(d) \times G^0(B_0) \text{ tels que } M \otimes_B B_0 = \overline{M}\} \end{aligned}$$

(on rappelle qu'on note  $B_0 = B/(\pi)$ ).

On note désormais  $\overline{M}$  le module de coordonnées universel (2.7.2) sur  $G^0 = \mathcal{G}_0$ . On a

$$\overline{M} = \lambda^*(\overline{L})$$

où  $\overline{L} \in \text{ObMod}S(d)(\mathcal{F}_0)$ . Pour construire un pro-objet  $(M, R)$  de  $\widehat{G}^0(\widehat{\mathcal{G}})$ , on va construire un pro-objet  $L \in \text{ObMod}S(d)(\widehat{\mathcal{F}})$ , et on prendra simplement  $M = \widehat{\lambda}^*(L)$ .

Soient

$$\tilde{L}_i = \mathbb{F}_q[\pi]^d \otimes \mathbb{F}_q[w[j]](j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$$

$$\tilde{\Pi}_i: \tilde{L}_i \longrightarrow L_{i+1}$$

le morphisme défini par la matrice  $P$ , et

$$\tilde{F}_i: (\text{Id}_{\mathbb{F}_q[\pi]} \otimes \text{Fr})^* \tilde{L}_i \longrightarrow \tilde{L}_{i+1}$$

le morphisme  $P^i \circ (F) \circ P^{-i} \circ (\text{Id}_{\mathbb{F}_q[\pi]} \otimes \text{Fr})$ , où  $(F)$  est la matrice

$$P - \text{diag}(w[-j], 0 \leq j \leq d-1).$$

On note  $L = (L_i, \Pi_i, F_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$  la suite de  $\mathcal{O} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\hat{\mathcal{F}}}$ -modules obtenue en complétant  $(\tilde{L}_i, \tilde{\Pi}_i, \tilde{F}_i)$  le long du fermé  $\{0\} \times \mathcal{F}_0$  de  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q[\pi]}^1 \times \mathcal{F}$ . On laisse au lecteur le soin de vérifier que pour tout entier  $n$ , la réduction de  $L$  modulo  $1 \otimes \pi^n$  est un objet de  $\text{Mod}S(d)(\mathcal{F}/(\pi^n))$ . La suite  $L$  définit donc un objet de  $\text{Mod}S(d)(\hat{\mathcal{F}})$ , et donc un morphisme de catégories fibrées

$$L: \mathcal{F} \longrightarrow \text{Mod}S(d).$$

L'image réciproque  $M = \hat{\lambda}^*(L)$  munie de

$$(2.7.2) \quad R: M/(1 \otimes \pi) = \overline{M} \longrightarrow \Phi_{\bullet+d-1}$$

définit un morphisme

$$\hat{\mathcal{G}} \longrightarrow \hat{\mathcal{G}}^0.$$

Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{G}} & \xrightarrow{(M,R)} & \hat{\mathcal{G}}^0 \hookrightarrow G_{\mathcal{O}} \\ \hat{\lambda} \downarrow & & \nearrow \text{oubli de } R \\ \hat{\mathcal{F}} & & \\ L \downarrow & & \\ \text{Mod } S(d) & & \end{array}$$

est commutatif.

**Théorème 3.3.1.** — *Le schéma formel  $\hat{\mathcal{G}}$ , muni de l'objet universel  $(M, R)$ , représente le foncteur  $\hat{\mathcal{G}}^0$ .*

Le théorème 3.3.1 résultera de la proposition suivante.

**Proposition 3.3.2.** — *Le morphisme de catégories fibrées*

$$L: \hat{\mathcal{F}} \longrightarrow \text{Mod}S(d)$$

*est formellement étale (au sens de (I. 4.4.4)).*

Avant de prouver la proposition 3.3.2, on va montrer qu'elle implique le théorème 3.3.1.

*Preuve de l'implication (3.3.2)  $\Rightarrow$  (3.3.1) :* Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\quad} & \widehat{G}^0 \\ & \searrow \text{pr}_1 \quad \swarrow \text{pr}_2 & \\ & \text{Mod } S(d) & \end{array}$$

Il résulte de (2.7.2) que la fibre spéciale du morphisme  $\widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \widehat{G}^0$  est un isomorphisme. Il résulte de (3.3.2) et du fait que le morphisme  $\widehat{\lambda}$  est étale que  $\text{pr}_1$  est étale.

Soit  $B$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre dans laquelle l'image de  $\pi$  est nilpotente; on note  $B_0 = B/(\pi)$ . Le morphisme  $\widehat{\mathcal{G}}(B_0) \rightarrow \widehat{G}^0(B_0)$  est un isomorphisme. Pour tout  $\bar{v} \in \widehat{\mathcal{G}}(B_0)$ , et pour tout  $(\bar{M}, R) \in \widehat{G}^0(B_0)$ , les morphismes de déformation (I. 4.4.4)

$$\text{Def } \text{pr}_1 : \text{Def}(B, \widehat{\mathcal{G}}, \bar{v}) \rightarrow \text{Def}(B, \text{Mod } S(d), \text{pr}_1(\bar{v}))$$

et

$$\text{Def } \text{pr}_2 : \text{Def}(B, \widehat{G}^0, (\bar{M}, R)) \rightarrow \text{Def}(B, \text{Mod } S(d), \bar{M})$$

associés aux flèches obliques sont aussi des isomorphismes (pour le deuxième d'entre eux, ceci résulte du fait que le morphisme  $G_{\mathcal{O}} \rightarrow \text{Mod } S(d)$  est formellement étale (I. 4.4.5) et de la définition de  $\widehat{G}^0$  comme complété de  $G^0$  le long de  $G_{\mathcal{O}}$ ; voir aussi la remarque 1 ci-dessous). Le morphisme

$$\widehat{\mathcal{G}}(B) \rightarrow \widehat{G}^0(B)$$

est donc encore un isomorphisme.  $\square$

*Remarques :*

1. Le morphisme  $\widehat{G}^0 \rightarrow \text{Mod } S(d)$  est en fait formellement étale (cf. (I. 4.4.5) et (2.8)).
2. Le raisonnement fait ci-dessus a déjà été utilisé pour montrer que le morphisme

$$G_{\mathcal{O}}(\text{I. 4.4.2}) \rightarrow G_{\mathcal{O}}(\text{I. 4.3.3})$$

est un isomorphisme (cf. variante (I. 4.4.2)).

*Preuve de la proposition 3.3.2 :* Il suffit en fait de montrer que les morphismes de déformation  $\text{Def } L$  (I. 4.4.4) sont des isomorphismes dans le cas où l'idéal  $I$  est de puissance  $q$ -ième nulle. On va pour cela utiliser la proposition (I. 3.2.1). La filtration

de Hodge du module  $(L_\bullet, \Pi_\bullet, F_\bullet)$  est la suivante. Pour  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , on a  $H_i = \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{F}}}^d$ . Le  $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{F}}}$ -module

$$H_i/\omega_i \simeq \frac{F_i((\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* L_i)}{(\pi \otimes 1 - 1 \otimes \pi) \cdot L_{i+1}}$$

s'identifie au sous-module de

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{F}}}^d \simeq \frac{L_{i+1}}{(\pi \otimes 1 - 1 \otimes \pi) \cdot L_{i+1}}$$

engendré par les colonnes de la matrice

$$(F_i) = P - \text{diag}(w[i-j], 0 \leq j \leq d-1)$$

(on note encore  $P$  la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \pi \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}$$

à coefficients dans la  $\mathcal{O}$ -algèbre  $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{F}}}$ ; le morphisme  $H_i \rightarrow H_i/\omega_i$  est celui induit par la matrice  $(F_i)$ . Son noyau  $\omega_i$  est engendré par le vecteur

$$\underline{w}_i = \begin{pmatrix} w[i+1] & \cdots & w[i+d-2] \\ \vdots & & \\ w[i+1] & w[i+2] & \\ w[i+1] & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in H_i.$$

Considérons maintenant un  $\overline{B}$ -point  $\overline{w} = (\overline{w}[i], i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$  de  $\widehat{\mathcal{F}}$ , un relèvement  $N$  du module de coordonnées  $\overline{w}^*(L)$  et le relèvement  $(\omega_\bullet \subset H_\bullet)$  associé à  $N$  de la filtration de Hodge  $(\overline{\omega}_\bullet \subset \overline{H}_\bullet)$  (I. 3). Rappelons que ce relèvement est tel que  $P\omega_i \subset \omega_{i+1}$  (cf. (I. 3.2)).

Le  $B$ -module  $\omega_i$  est engendré par un vecteur de la forme

$$\begin{pmatrix} * \\ w[i+1] \\ 1 \end{pmatrix}$$

(où  $w[i+1] \in B$  est un relèvement modulo  $I$  de  $\overline{w}[i+1]$ ). Il résulte alors de la condition  $P\omega_i \subset \omega_{i+1}$  que ce vecteur n'est autre que le vecteur  $\underline{w}_i$  ci-dessus et que le produit  $\prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} w[i]$  est  $\pi$ . Le  $d$ -uplet  $w = (w[i], i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$  est donc un  $B$ -point de

$\widehat{\mathcal{F}}$  relevant  $\overline{w}$  modulo  $I$  et il résulte de (I. 3.2.1) qu'il existe un unique isomorphisme de relèvements

$$w^*(L) \xrightarrow{\sim} N$$

induisant l'isomorphisme évident des filtrations de Hodge.  $\square$

3.4. — On va maintenant décrire le  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $X$  et la quasiisogénie  $\rho$  associés à  $(M_\bullet, \Pi_\bullet, F_\bullet, R)$  sur  $\widehat{G}^0 \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$  (cf. I. 1, I. 2.3, I. 4.2 et I. 4.3).

On rappelle qu'on note  $\tau$  l'isogénie de Frobenius ( $x \mapsto x^q$ ) du groupe formel  $\mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_q}$ . Lorsque  $B$  est une  $\mathbb{F}_q$ -algèbre, on identifiera alors  $\text{End}_{\mathbb{F}_q} \mathbb{G}_{a, B}^d$  à la  $\mathbb{F}_q$ -algèbre des matrices carrées de taille  $d$  à coefficients dans  $B[[\tau]]$  (le groupe additif formel  $\mathbb{G}_{a, B}$  est ici muni de l'action évidente de  $\mathbb{F}_q$ ). On rappelle qu'en choisissant une « uniformisante »  $\Pi$  de  $\mathcal{O}_D$ , on a identifié  $\mathcal{O}_D$  à l'anneau de séries formelles non-commutatives  $\mathbb{F}_q[[\Pi]]$  (cf. I).

La preuve de la proposition suivante est un calcul facile mais un peu long. Elle sera laissée au lecteur.

Considérons la matrice de permutation

$$C = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 3.4.1.** — *Le triplet universel  $(\beta, X, \rho)$  sur  $\widehat{G}^0 \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$  est le suivant*

- $\beta$  est la structure naturelle de  $\text{Spf } \mathcal{O}_d$ -schéma formel sur  $\widehat{G}^0 \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$ ;
- en tant que groupe formel,  $X = \mathbb{G}_a^d$  et l'action de  $\mathcal{O}_D = \mathbb{F}_q[[\Pi]]$  sur  $X$  est telle que

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= \text{diag}(\lambda, \lambda^q, \dots, \lambda^{q^{d-1}}) \text{ pour } \lambda \in \mathbb{F}_{q^d} \\ X(\Pi) &= \text{diag}(w[i], 0 \leq i \leq d-1) \cdot C^{-1} + \text{Id} \cdot \tau; \end{aligned}$$

- la quasiisogénie

$$\rho : \beta_0^* \Phi \longrightarrow X_{\mathcal{G}_0}$$

est définie par la congruence modulo  $\pi$

$$\rho \circ \beta_0^* \Phi(\Pi^{d-1}) \equiv \sum_{i=1}^{d-1} \text{diag}(v^i[j], 0 \leq j \leq d-1) \cdot C^i \cdot \tau^{i-1} + \text{Id} \cdot \tau^{d-1}. \quad \square$$

**Exemple ( $d = 3$ ) :** Considérons la  $\mathbb{F}_q$ -algèbre  $A$  quotient de

$$\mathbb{F}_q[x_i, y_i, (1 - x_i^{q-1})^{-1}, (1 - y_i^{q-1})^{-1} (i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})]$$

par l'idéal

$$(y_i - y_i^q = (x_i - x_i^q) \cdot x_{i+1} (i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})).$$

En posant

$$\pi = (x_0 - x_0^q) \cdot (x_1 - x_1^q) \cdot (x_2 - x_2^q),$$

on munit  $A$  d'une structure de  $\mathbb{F}_q[[\pi]]$ -algèbre. Le schéma formel  $\widehat{\mathcal{G}}$  est le spectre formel du complété  $\pi$ -adique de  $A$ .

Le  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $X$  est le groupe formel  $\mathbb{G}_a^3$ , sur lequel  $\lambda \in \mathbb{F}_{q^3} \subset \mathcal{O}_D$  agit via la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^q & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{q^2} \end{pmatrix}$$

et  $\Pi \in \mathcal{O}_D$  agit via la matrice

$$\begin{pmatrix} \tau & x_0 - x_0^q & 0 \\ 0 & \tau & x_1 - x_1^q \\ x_2 - x_2^q & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

La quasiisogénie  $\rho$  est définie par la congruence modulo  $\pi$

$$\rho \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_0 \cdot \tau^{-1} & y_0 \cdot \tau^{-2} \\ y_1 \cdot \tau^{-2} & 1 & x_1 \cdot \tau^{-1} \\ x_2 \cdot \tau^{-1} & y_2 \cdot \tau^{-2} & 1 \end{pmatrix}.$$

#### 4 Le recollement : les sous-foncteurs ouverts attachés aux simplexes de dimension arbitraire.

Considérons un simplexe  $\Delta$  de dimension  $\delta$  de l'immeuble de Bruhat-Tits [T] de  $\mathrm{PGL}_d(K)$ . On va associer au simplexe  $\Delta$  un sous-schéma fermé  $G_\Delta$  de la fibre spéciale de  $G_{\mathcal{O},0}$ , généralisant les sous-schémas  $G_\Lambda$  (1.1) et les sous-schémas  $G_\Delta$  associés aux simplexes maximaux de l'immeuble. On définira aussi un sous-schéma ouvert  $G_\Delta^0$  de  $G_\Delta$  (qui sera en fait aussi ouvert dans  $G_{\mathcal{O},0}$ ) généralisant de même les sous-schémas ouverts (2.1.2) de  $G_{\mathcal{O},0}$ .

Le but de cette généralisation est d'étudier les intersections des ouverts (2.1.2) de la fibre spéciale. Plus précisément, on démontrera la proposition suivante.

**Proposition 4.1.** — *Soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits de  $\mathrm{PGL}_d(K)$ .*

1. *Soit  $g \in \mathrm{PGL}_d(K)$ . L'action (I. 4.5) de  $g$  sur  $G_{\mathcal{O},0}$  envoie  $G_\Delta^0$  sur  $G_{t_g^{-1} \cdot \Delta}^0$ .*
2.  *$G_\Delta^0 \cap G_{\Delta'}^0 = G_{\Delta \cap \Delta'}^0$  (par convention,  $G_\emptyset^0$  est le schéma vide).*
3. *Si  $\Delta \subset \Delta'$ , l'inclusion  $G_\Delta^0 \subset G_{\Delta'}^0$  est une immersion ouverte.*

**Corollaire.** —  *$G_\Delta^0$  est ouvert dans  $G_{\mathcal{O},0}$ .*

Admettons momentanément la proposition 4.1, et déduisons en le corollaire.

Soit  $\Delta_{\max}$  un simplexe maximal contenant  $\Delta$ . Il résulte de (2.3.1 (2)) que  $G_{\Delta_{\max}}^0$  est ouvert dans  $G_{\mathcal{O},0}$ . Le corollaire s'en déduit en utilisant la troisième partie de la proposition 4.1.  $\square$

*Remarque :* On utilisera dans le troisième chapitre l'analogue (et corollaire) évident (4.1)' de la proposition 4.1 où  $G_{\Delta}^0$  est remplacé par le complété  $\widehat{G}_{\Delta}^0$  de  $G_{\mathcal{O}}$  le long de  $G_{\Delta}^0$ . On y utilisera aussi l'identité

$$G_{\mathcal{O}} = \varinjlim_{\Delta \in \text{BT}} \widehat{G}_{\Delta}^0$$

qui découle de (4.1)' et de (2.1.3) (on ordonne l'ensemble  $|\text{BT}|$  des simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits BT par l'inclusion des simplexes).

4.2. — On va maintenant donner la définition des sous schémas  $G_{\Delta}$  et  $G_{\Delta}^0$ , où  $\Delta$  est un simplexe de dimension  $\delta$  de l'immeuble de Bruhat-Tits de  $\text{PGL}_d(K)$ .

Il résulte de [G-I] que le simplexe  $\Delta$  peut être vu comme la donnée d'une chaîne

$$\cdots \subsetneq \pi\Lambda_{\delta} = \Lambda_{-1} \subsetneq \Lambda_0 \subsetneq \Lambda_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \Lambda_{\delta} \subsetneq \Lambda_{\delta+1} = \pi^{-1}\Lambda_0 \subsetneq \cdots$$

de réseaux dans  $K^d$  (avec  $\Lambda_{i+\delta+1} = \pi^{-1}\Lambda_i, \forall i \in \mathbb{Z}$ ).

On définit deux suites croissantes de réseaux  $\Delta_i^+$  et  $\Delta_i^-$  en posant

$$\Delta_i^+ = \Lambda_{i+} \text{ et } \Delta_i^- = \Lambda_{i-},$$

où

$$i^+ = \inf\{j \in \mathbb{Z} \text{ tel que } [\Lambda_j : \mathcal{O}^d] \geq j\}$$

et

$$i^- = \sup\{j \in \mathbb{Z} \text{ tel que } [\Lambda_j : \mathcal{O}^d] \leq j\}$$

([ : ] est l'indice virtuel du paragraphe 1). On note  $i_j = [\Lambda_j : \mathcal{O}^d]$ . On a alors  $\Delta_{i_j}^+ = \Delta_{i_j}^- = \Lambda_j$ . On notera  $\Delta_{i_j}$  le réseau  $\Lambda_j$ . La définition suivante généralise les définitions (1.1) et (2.1.1).

**Définition 4.2.1.** — *Le sous-schéma fermé  $G_{\Delta}$  de  $G_{\mathcal{O},0}$  est celui défini par les inclusions*

$$\Delta_{i-d+1}^+ \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{G_{\mathcal{O},0}} \subset M_i \subset \Delta_{i+d-1}^- \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{G_{\mathcal{O},0}} \quad (\forall i \in \mathbb{Z}).$$

(Il résulte de la périodicité des suites  $M, \Delta^+, \Delta^-$  que ces conditions sont en nombre fini).

De même que dans le paragraphe 2, on s'intéressera plutôt au sous-schéma ouvert  $G_{\Delta}^0$  de  $G_{\Delta}$  qu'on va maintenant définir (comparer à la définition (2.1.2)).

Soient  $\Lambda$  un  $\mathcal{O}$ -réseau de  $K^d$  et  $i = [\Lambda : \mathcal{O}^d]$ . L'intersection du sous-schéma  $G_{\Lambda}$  (1.1) de  $G_{\mathcal{O},0}$  et de  $G_{\Delta}$  est vide lorsque la condition

$$\Delta_{i_{\Lambda}-d+1}^+ \subset \Lambda \subset \Delta_{i_{\Lambda}+d-1}^-$$

n'est pas vérifiée. Considérons l'ensemble fini  $\mathcal{E}_{\Delta}$  formé des  $\mathcal{O}$ -réseaux  $\Lambda \subset K^d$  vérifiant les conditions

$$0 \leq i_{\Lambda} \leq d-1 \quad \Delta_{i_{\Lambda}-d+1}^+ \subset \Lambda \subset \Delta_{i_{\Lambda}+d-1}^- \quad \Lambda \notin \{\Delta_{i_j}, 0 \leq i_j \leq d-1\}$$

**Définition 4.2.2.** — *Le sous-schéma ouvert  $G_\Delta^0$  de  $G_\Delta$  est l'ouvert complémentaire des sous-schémas fermés  $G_\Delta \cap G_\Lambda$ ,  $\Lambda \in \mathcal{E}_\Delta$ .*

(Cette définition est illustrée par une figure; voir la page suivante).

4.3. — Preuve de la proposition 4.1

Soit  $g \in \mathrm{GL}_d(K)$ . Il résulte immédiatement de la définition de l'action (I. 4.5) et du fait que les constructions

$$\Delta \mapsto \Delta^+ \quad \Delta \mapsto \Delta^- \quad \text{et} \quad \Delta \mapsto \mathcal{E}_\Delta$$

sont  $\mathrm{GL}_d(K)$ -équivariantes que  $g$  envoie  $G_\Delta^0$  sur  $G_{t_{g^{-1}}\Delta}^0$ .

Pour démontrer (2) et (3), on va alors supposer que le simplexe  $\Delta$  est inclus dans le simplexe maximal  $\Phi$  (2.1.5), et on écrira

$$\begin{aligned} \Delta &= (\Phi_{i_j})_{j \in \mathbb{Z}} \quad (\text{avec } 0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_\delta \leq d-1) \\ &= (\dots \subset \pi\Phi_{i_\delta} \subset \Phi_{i_0} \subset \dots \subset \Phi_{i_\delta} \subset \dots). \end{aligned}$$

En même temps que (2) et (3), on démontrera aussi la proposition suivante, qui précise le corollaire de (4.1).

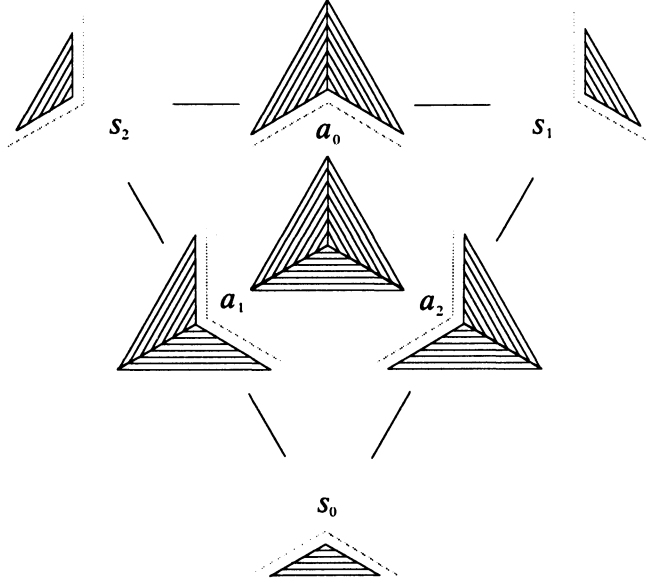
**Proposition 4.3.1.** — *Le schéma  $G_\Delta^0$  est le sous-schéma ouvert de  $G_\Phi^0$  complémentaire des fermés d'équations*

$$v^{d-1}[i] = 0 \quad (0 \leq i \leq d-1, i \notin \{i_0, \dots, i_\delta\}).$$

(On rappelle qu'on a noté  $G^0 = G_\Phi^0$  dans le paragraphe 2).



Figure 4.2.3: Les sous-schémas ouverts associés à une face de l'immeuble de  $\mathrm{PGL}_3(K)$ , aux arêtes de cette face et à ses sommets. On se contente de représenter un voisinage du point d'intersection des trois plans (cf. figure (2.3.2)).



On dispose au centre du simplexe maximal  $\Delta$  le schéma  $G_{\Delta}^0$ , sur les milieux des arêtes  $a_i$  les schémas  $G_{a_i}^0$ , et sur les sommets  $s_i$  les schémas  $G_{s_i}^0$ .

Revenons maintenant à la preuve. Lorsque  $\Delta''$  est un sous-simplexe de  $\Phi$ , on note  $\mathcal{E}_{\Phi, \Delta''}$  l'ensemble fini

$$\{\Lambda \subset K^d \text{ tel que } 0 \leq i_{\Lambda} \leq d-1, \Phi_{i_{\Lambda}-d+1} \subset \Lambda \subset \Phi_{i_{\Lambda}+d-1}\} - [\Delta'']$$

(on rappelle qu'on note  $i_{\Lambda} = [\Lambda : \mathcal{O}^d]$ ; on note  $[\Delta'']$  l'ensemble des sommets de  $\Delta''$ ). On note

$$G_{\Phi, \Delta''}^0 = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{E}_{\Phi, \Delta''}} (G_{\Lambda} \cap G_{\Phi}^0).$$

Il résulte de l'inclusion  $G_{\Delta}^0 \cap G_{\Delta'}^0 \subset G_{\Phi}^0$  et du fait que  $G_{\Delta}^0$  (resp.  $G_{\Delta'}^0$ ) ne rencontre pas  $G_{\Lambda}(\Lambda \subset K^d)$  lorsque  $\Lambda \notin [\Delta]$  (resp.  $\Lambda \notin [\Delta']$ ) que  $G_{\Delta}^0 \cap G_{\Delta'}^0 \subset G_{\Phi, \Delta \cap \Delta'}^0$ . On a par ailleurs l'inclusion  $G_{\Delta \cap \Delta'}^0 \subset G_{\Delta}^0 \cap G_{\Delta'}^0$ .

Le lemme suivant achève la preuve de (3).

**Lemme 4.3.2.** — On a

$$G_{\Phi, \Delta''}^0 \subset G_{\Delta''}^0$$

(et donc  $G_{\Phi, \Delta''}^0 = G_{\Delta''}^0$ ).

*Preuve* : On rappelle que

$$G_{\Phi}^0 = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} G_i^0 \subset \bigcup_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} G_{\Phi_i} \quad (2.3.1)$$

(on attire toutefois l'attention du lecteur sur le conflit de notations suivant :  $G_{\Phi_i}^0 \subsetneq G_i^0 = G_{\Phi}^0 \cap G_{\Phi_i}$ ).

On a donc l'inclusion

$$G_{\Phi, \Delta''}^0 \subset \bigcup_{\Phi_i \in [\Delta'']} G_{\Phi_i}$$

et donc  $G_{\Phi, \Delta''}^0 \subset G_{\Delta''}$ . On a par conséquent

$$G_{\Phi, \Delta''}^0 \subset G_{\Delta''} - \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{E}_{\Phi, \Delta''}} (G_{\Delta''} \cap G_{\Lambda}).$$

Ceci achève la preuve du lemme en remarquant que  $\mathcal{E}_{\Delta''} \subset \mathcal{E}_{\Phi, \Delta''}$ .  $\square$

Remarquons tout de suite que l'égalité  $G_{\Phi, \Delta''}^0 = G_{\Delta''}^0$ , qu'on vient d'obtenir entraîne aussi (2) (en choisissant  $\Delta' \subset \Delta \subset \Phi$ ), et achève donc la preuve de (4.1).

Finalement, on va prouver la proposition (4.3.1) en déterminant plus précisément  $G_{\Phi, \Delta}^0 = G_{\Delta}^0$ .

L'ensemble  $\mathcal{E}_{\Phi, \Delta}$  est la réunion disjointe de  $\mathcal{E}_{\Phi}$  et de  $[\Phi] - [\Delta]$ . On a donc

$$G_{\Phi, \Delta}^0 = G_{\Phi}^0 - \bigcup_{\Lambda \in [\Phi] - [\Delta]} (G_{\Lambda} \cap G_{\Phi}^0).$$

Lorsque  $\Lambda = \Phi_i \in [\Phi]$ , le fermé  $(G_{\Lambda} \cap G_{\Phi_i}^0)$  a pour équation  $v^{d-1}[i] = 0$  (cf. (2.7.1)), ce qui achève la preuve de (4.3.1).  $\square$

*Remarque* : On a  $\bigcup_{\Lambda \in [\Delta]} G_{\Lambda}^0 \subset G_{\Delta}^0 \subset \bigcup_{\Lambda \in [\Delta]} G_{\Lambda}$  (la deuxième inclusion résulte de (2.3.1)

et de (4.3.2)). L'adhérence de  $G_{\Delta}^0$  dans  $G_{\mathcal{O}, 0}$  est donc  $\bigcup_{\Lambda \in [\Delta]} G_{\Lambda}$ .

En revanche, pour  $d \geq 3$  et si le simplexe  $\Delta$  n'est pas réduit à un point, l'inclusion

$\bigcup_{\Lambda \in [\Delta]} G_{\Lambda} \subset G_{\Delta}$  est stricte.



### III. LE MORPHISME DE PÉRIODES

#### 0 Introduction

Soit  $\widehat{\Omega}^d$  le « demi-plan supérieur de Drinfeld » [D1] sur  $\mathcal{O}$ . Ce « demi-plan supérieur » est un  $\mathcal{O}$ -schéma formel localement de type fini muni d'une action de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  et lorsque  $L$  est une extension finie de  $K$  on a

$$\widehat{\Omega}^d(\mathcal{O}_L) = \mathbb{P}^{d-1}(L) - \bigcup_H H(L)$$

(dans la réunion ci-dessus,  $H$  décrit l'ensemble des hyperplans de  $\mathbb{P}^{d-1}$  définis sur  $K$ ). On renvoie pour plus de détails aux rappels du paragraphe 1.

Soit  $\mathcal{O}_d$  l'anneau des entiers de l'extension maximale non ramifiée de degré  $d$ ,  $K_d$ , de  $K$ . Drinfeld construit ([D1], cf. aussi [B-C]) un isomorphisme  $\mathrm{GL}_d(K)$ -équivariant

$$\xi : G \longrightarrow \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$$

(le foncteur  $G$  est le foncteur (I. 4); l'action de  $\mathrm{GL}_d(K)$  sur  $\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$  n'est pas l'action évidente (cf. [D1])).

On donne dans ce chapitre une autre construction de l'isomorphisme  $\xi$ , inspirée d'un travail de Anderson [A]. Plus précisément, on construit (cf. § 2 et § 3) un isomorphisme  $\mathrm{PGL}_d(K)$ -équivariant

$$\xi' : G_{\mathcal{O}} \longrightarrow \widehat{\Omega}^d,$$

ce qui induit un isomorphisme

$$\xi' \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d : G = G_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d \longrightarrow \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d.$$

On verra que cet isomorphisme est en fait celui de Drinfeld (cf. remarque (3.4)).

Considérons les  $\mathcal{O}$ -schémas formels  $G_{\mathcal{O}}$  et  $\widehat{\Omega}^d$  comme des foncteurs sur la catégorie des  $\mathcal{O}$ -algèbres sans torsion séparées complètes pour la topologie  $\pi$ -adique. Le morphisme  $\xi'$  est obtenu en construisant pour toute telle algèbre  $B$  un morphisme (compatible au changement de base)

$$\xi' : G_{\mathcal{O}}(B) \longrightarrow \widehat{\Omega}^d(B).$$

Exposons le principe de cette construction dans le cas particulier où  $B$  est l'anneau des entiers,  $\mathcal{O}_L$ , d'une extension finie  $L$  de  $K$ .

Soit  $(M_\bullet) \in G_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_L) = \varprojlim_n G_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_L/(\pi^n))$  (dans la partie I on a défini  $G_{\mathcal{O}}$  comme un foncteur sur la catégorie des  $\mathcal{O}$ -algèbres dans lesquelles l'image de  $\pi$  est nilpotente ; on considérera  $(M_\bullet)$  comme un pro-objet). En utilisant la variante (I. 4.4.2) de la définition de  $G_{\mathcal{O}}$ ,  $(M_\bullet)$  définit une suite  $(M_i)_i$  de sous  $\mathcal{O} \hat{\otimes} \mathcal{O}_L$ -modules libres de  $K^d \hat{\otimes} \mathcal{O}_L = \varprojlim_n K^d \hat{\otimes} \mathcal{O}_L/(\pi^n)$ .

Fixons une base de  $M_0$ . L'application  $\mathcal{O} \hat{\otimes} \mathcal{O}_L$ -linéaire  $M_0 \hookrightarrow K^d \hat{\otimes} \mathcal{O}_L$  définit alors une matrice  $R$  à coefficients dans  $K \hat{\otimes} \mathcal{O}_L$ .

Notons  $\varpi$  l'élément  $\pi \hat{\otimes} 1$  de  $K \hat{\otimes} \mathcal{O}_L$ . La  $\mathcal{O}_L$ -algèbre  $K \hat{\otimes} \mathcal{O}_L$  s'identifie alors à celle des séries  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i \varpi^i$  à coefficients dans  $\mathcal{O}_L$  telles que  $\lim_{i \rightarrow -\infty} b_i = 0$ . On montre (cf. (2.1.1) et la remarque suivant (2.2.2)) que les coefficients de la matrice  $R$  ci-dessus sont des séries convergentes sur la couronne ouverte rigide-analytique  $\{|\pi| < |\varpi| < 1\}$ , qui se prolongent en des fonctions méromorphes sur le disque épointé ouvert  $\mathbb{D}^* = \{|\varpi| < 1\} - \{0\}$ , avec des pôles (au plus) simples situés en les points  $\varpi = \pi, \pi^q, \dots$ .

Considérons le résidu en  $\varpi = \pi$  de la matrice  $R$  comme la matrice d'une application  $\mathcal{O}_L$ -linéaire  $M_0/(\varpi - \pi)M_0 \rightarrow L^d$ . On montre (cf. (2.1.2)) que ce morphisme s'annule sur le sous-module  $\text{Im } F_{-1}/(\varpi - \pi)M_0$  (de rang  $d - 1$ ). Cette matrice est donc au plus de rang 1. On montre (cf. (2.4)) qu'elle est exactement de rang 1, et que la  $L$ -droite vectorielle  $\xi'(M)$  engendrée par ses colonnes (qui ne dépend pas du choix de la base de  $M_0$  effectué plus haut) appartient à  $\hat{\Omega}^d(\mathcal{O}_L) \subset \mathbb{P}^{d-1}(L)$ .

La construction qui précède est directement issue de celle utilisée par Anderson [A] pour reconstruire le réseau de périodes d'un module de Drinfeld à partir du Shtuka qui lui est associé [D4] [Mu2]. On en donne aussi une variante (cf. (2.1.4)) qui la relie au morphisme de périodes de Gross-Hopkins-Rapoport-Zink. Cette variante utilise la filtration de Hodge (I. 3) de

$$H_{\text{DR},i} = (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* M_i / (\varpi - \pi)(\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* M_i$$

et l'évaluation de  $(\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* R$  en  $\varpi = \pi$  (celle-ci n'est autre que la Frobeniusée de l'évaluation de  $R$  en  $\varpi = \pi^{1/q}$ ).

Signalons finalement que pour tout entier  $n$  donné ( $n \geq 1$ ) on peut calculer explicitement le morphisme

$$\xi' \hat{\otimes} \mathcal{O} / (\pi^{q^n - n}) : G_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \mathcal{O} / (\pi^{q^n - n}) \longrightarrow \hat{\Omega} \hat{\otimes} \mathcal{O} / (\pi^{q^n - n}).$$

On se contente d'effectuer ce calcul pour  $n = 1$ , et on obtient ainsi explicitement la fibre spéciale du morphisme  $\xi'$  (cf. les remarques suivant (2.4.3)).

Le chapitre III s'organise de la manière suivante.

Dans le paragraphe 1, on rappelle une construction de  $\widehat{\Omega}^d$  due à Deligne (la définition de Drinfeld est en fait une variante de celle de Deligne, cf. ([B-C] ch. I) ou ([R] § 3 App. A)).

Dans le paragraphe 2, on donne la construction du morphisme  $\xi'$  esquissée ci-dessus.

Dans le paragraphe 3, on démontre que  $\xi'$  est un isomorphisme. Grâce à un lemme de Mumford ([Mu1], Lemma (4.18)), il suffit de montrer que la fibre spéciale de  $\xi'$  est un isomorphisme (on rappelle que le  $\mathcal{O}$ -schéma formel  $G_{\mathcal{O}}$  est plat). Ceci se fait en utilisant la description explicite de cette fibre spéciale mentionnée plus haut.

## 1 Rappels sur le schéma formel $\widehat{\Omega}^d$

Les notions qu'on va rappeler sont essentiellement dues à Deligne. La présentation qu'on en donne s'inspire d'un exposé de A.J. de Jong (Bielefeld, Déc. 92) et d'un cours de Th. Zink (U.C.L.A, Avr. 89).

Soit un simplexe  $\Delta$  de dimension  $\delta$  de l'immeuble de Bruhat-Tits de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  ([T]). De même que dans (II. 4), on considérera le simplexe  $\Delta$  comme la donnée d'une chaîne

$$\cdots \subset \Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \cdots \subset \Lambda_\delta \subset \cdots$$

de réseaux dans  $K^d$  vérifiant la condition de périodicité  $\Lambda_{j+(\delta+1)} = \pi^{-1}\Lambda_j$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ , ou encore comme celle d'une chaîne

$$\cdots \Delta_{i_j} \subset \Delta_{i_{j+1}} \subset \cdots$$

(avec  $[\Lambda_j : \mathcal{O}^d] = i_j$  et  $\Delta_{i_j} = \Lambda_j$ ).

1.1. — Considérons le foncteur  $H_\Delta$  suivant, de la catégorie des  $\mathcal{O}$ -algèbres vers celle des ensembles. Lorsque  $B$  est une  $\mathcal{O}$ -algèbre,  $H_\Delta(B)$  est l'ensemble des classes d'isomorphie de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} \pi\Lambda_\delta & \subset & \Lambda_0 & \subset & \cdots & \subset & \Lambda_\delta \\ \downarrow \alpha_\delta \pi^{-1} & & \downarrow \alpha_0 & & & & \downarrow \alpha_\delta \\ \mathcal{L}_\delta & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{L}_0 & \xrightarrow{\pi} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{L}_\delta \end{array}$$

où pour tout  $j \in \mathbb{Z}/(\delta+1)\mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{L}_j$  est un  $B$ -module inversible,  $\alpha_j : \Lambda_j \rightarrow \mathcal{L}_j$  est une application  $\mathcal{O}$ -linéaire et  $\Pi : \mathcal{L}_j \rightarrow \mathcal{L}_{j+1}$  est une application  $B$ -linéaire, tels que pour tout  $j \in \mathbb{Z}/(\delta+1)\mathbb{Z}$  le morphisme  $B$ -linéaire

$$\alpha_j \otimes \mathrm{Id}_B : \Lambda_j \otimes_{\mathcal{O}} B \longrightarrow \mathcal{L}_j$$

soit surjectif.

Nous utiliserons dans le paragraphe 2 la remarque suivante.

*Remarque :* Pour vérifier cette dernière condition, il suffit de le faire sur la fibre spéciale

$$\Lambda_j \longrightarrow \mathcal{L}_j \otimes_B B_0$$

du morphisme  $\alpha_j$  (on rappelle qu'on note  $B_0 = B/(\pi)$ ).

Lorsque  $\Delta' \subset \Delta$  est un sous-simplexe, on dispose d'un morphisme d'oubli

$$H_\Delta \longrightarrow H_{\Delta'}.$$

Lorsque  $g \in \mathrm{GL}_d(K)$  envoie le simplexe  $\Delta = (\Lambda_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  sur le simplexe  $\Delta' = (g\Lambda_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  on définit un isomorphisme

$$g : H_\Delta \longrightarrow H_{\Delta'}$$

en associant à une donnée  $(\alpha_j : \Lambda_j \rightarrow \mathcal{L}_j, \Pi)_{j \in \mathbb{Z}}$  comme ci-dessus la donnée

$$(g\Lambda_j \xrightarrow{g^{-1}} \Lambda_j \xrightarrow{\alpha_j} \mathcal{L}_j, \Pi)_{j \in \mathbb{Z}}.$$

On plonge le foncteur  $H_\Delta$  comme sous-foncteur fermé dans  $\prod_{0 \leq j \leq \delta} \mathbb{P}(\Lambda_j)$  en associant à un diagramme comme ci-dessus la suite des quotients

$$(\Lambda_j \otimes B \rightarrow \mathcal{L}_j)_{0 \leq j \leq \delta}.$$

Le foncteur  $H_\Delta$  est donc représentable par un sous-schéma fermé de  $\prod_{0 \leq j \leq \delta} \mathbb{P}(\Lambda_j)$ .

Mentionnons sans démonstration le fait suivant, qui est un analogue de la proposition (II. 1.6) et se prouve de la même manière.

*Fait :* Le schéma  $H_\Delta$  est celui obtenu à partir de  $\mathbb{P}(\Lambda_j)$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) en l'éclatant successivement le long du sous-schéma fermé  $\mathbb{P}(\Lambda_j/\Lambda_{j-1})$  de sa fibre spéciale, puis le long du transformé strict de  $\mathbb{P}(\Lambda_j/\Lambda_{j-2}), \dots$ , puis le long du transformé strict de  $\mathbb{P}(\Lambda_j/\Lambda_{j-\delta})$ . Le  $\mathcal{O}$ -schéma  $H_\Delta$  est donc un schéma régulier, dont la fibre spéciale est un diviseur à croisements normaux.

1.2. — On va maintenant définir un sous-schéma formel ouvert  $\widehat{\Omega}_\Delta^0$  du complété  $\pi$ -adique  $\widehat{H}_\Delta$  de  $H_\Delta$ .

**Définition 1.2.1.** —

1. Le sous-schéma ouvert  $\Omega_\Delta^0$  de la fibre spéciale  $H_{\Delta,0}$  de  $H_\Delta$  est le complémentaire des fermés

$$\{\alpha_j(m) = 0\} \quad (j \in \mathbb{Z}/(\delta+1)\mathbb{Z}, m \in \Lambda_j/\pi\Lambda_j - \Lambda_{j-1}/\pi\Lambda_j)$$

2. Le sous-schéma formel ouvert  $\widehat{\Omega}_\Delta^0$  de  $\widehat{H}_\Delta$  est la restriction de  $\widehat{H}_\Delta$  à  $\Omega_\Delta^0 \subset H_{\Delta,0}$ .

Lorsque  $\Delta' \subset \Delta$  est un sous-simplexe, on construit une immersion ouverte

$$\widehat{\Omega}_{\Delta'} \hookrightarrow \widehat{\Omega}_\Delta^0$$

rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Omega}_{\Delta}^0 & \longrightarrow & \widehat{H}_{\Delta} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \widehat{\Omega}_{\Delta'}^0 & \longrightarrow & \widehat{H}_{\Delta'} \end{array}$$

commutatif.

Pour décrire l'immersion ouverte ci-dessus, il suffit de le faire dans le cas où  $\Delta'$  s'obtient à partir du simplexe  $\Delta$  en oubliant le  $s$ -ième sommet  $\Delta_{i_s}$  ( $0 \leq s \leq \delta$ ). Lorsque  $B$  est une  $\mathcal{O}$ -algèbre dans laquelle l'image de  $\pi$  est nilpotente, l'immersion ouverte ci-dessus associe à un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc} \pi\Delta_{i_{\delta}} & \subset & \Delta_{i_0} & \subset & \cdots & \subset & \Delta_{i_{s-1}} & \subset & \Delta_{i_{s+1}} & \subset & \cdots & \subset & \Delta_{i_{\delta}} \\ \downarrow \alpha_{\delta}\pi^{-1} & & \downarrow \alpha_0 & & & & \downarrow \alpha_{s-1} & & \downarrow \alpha_{s+1} & & & & \downarrow \alpha_{\delta} \\ \mathcal{L}_{\delta} & \longrightarrow & \mathcal{L}_0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{L}_{s-1} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{s+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\delta} \end{array}$$

appartenant à  $\widehat{\Omega}_{\Delta}^0(B)$  le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc} \pi\Delta_{i_{\delta}} & \subset & \Delta_{i_0} & \subset & \cdots & \subset & \Delta_{i_{s-1}} & \subset & \Delta_{i_s} & \subset & \Delta_{i_{s+1}} & \subset & \cdots & \subset & \Delta_{i_{\delta}} \\ \downarrow \alpha_{\delta}\pi^{-1} & & \downarrow \alpha_0 & & & & \downarrow \alpha_{s-1} & & \downarrow \alpha_{s+1} & & \downarrow \alpha_{s+1} & & & & \downarrow \alpha_{\delta} \\ \mathcal{L}_{\delta} & \longrightarrow & \mathcal{L}_0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{L}_{s-1} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{s+1} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{s+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\delta} \end{array}$$

En ordonnant l'ensemble des simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits par l'inclusion, les immersions ci-dessus ferment un système inductif.

**Définition 1.2.2.** — Le schéma formel  $\widehat{\Omega}^d$  est la limite inductive  $\varinjlim_{\Delta \in |BT|} \widehat{\Omega}_{\Delta}^0$ .

*Remarque :*  $\widehat{\Omega}^d$  peut-être défini comme le complété  $\pi$ -adique du  $\mathcal{O}$ -schéma  $\Omega^d$  suivant.

Eclatons le schéma  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}}^{d-1} = \Omega_{(0)}$  le long des points rationnels de sa fibre spéciale, puis le long des transformés stricts des droites rationnelles,  $\dots$ , puis le long des transformés stricts des hyperplans rationnels de cette fibre spéciale. On obtient ainsi un  $\mathcal{O}$ -schéma  $\Omega_{(1)}$  (cf. figure (1.2.3)).

Les diviseurs exceptionnels  $\mathcal{E}_{1,m}$  de la suite d'éclatements  $\Omega_{(1)} \rightarrow \Omega_{(0)}$  sont des  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$  éclatés. Soit  $U_1$  l'ouvert complémentaire dans la fibre spéciale de  $\Omega_{(1)}$  du transformé strict de celle de  $\Omega_{(0)}$ . L'ouvert  $U_1$  est réunion disjointe des ouverts  $U_{1,m} = U_1 \cap \mathcal{E}_{1,m}$ , qui sont isomorphes en tant que  $\mathbb{F}_q$ -schémas à des ouverts d'espaces projectifs  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ .

On répète alors le long des ouverts  $U_{1,m}$  de la fibre spéciale de  $\Omega_{(1)}$  la suite d'éclatements le long des points rationnels, puis des transformés stricts des droites rationnelles,  $\dots$  décrite plus haut. On obtient ainsi un  $\mathcal{O}$ -schéma  $\Omega_{(2)}$ . En répétant le processus, on définit une suite

$$\cdots \longrightarrow \Omega_{(n+1)} \longrightarrow \Omega_{(n)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega_{(0)}$$



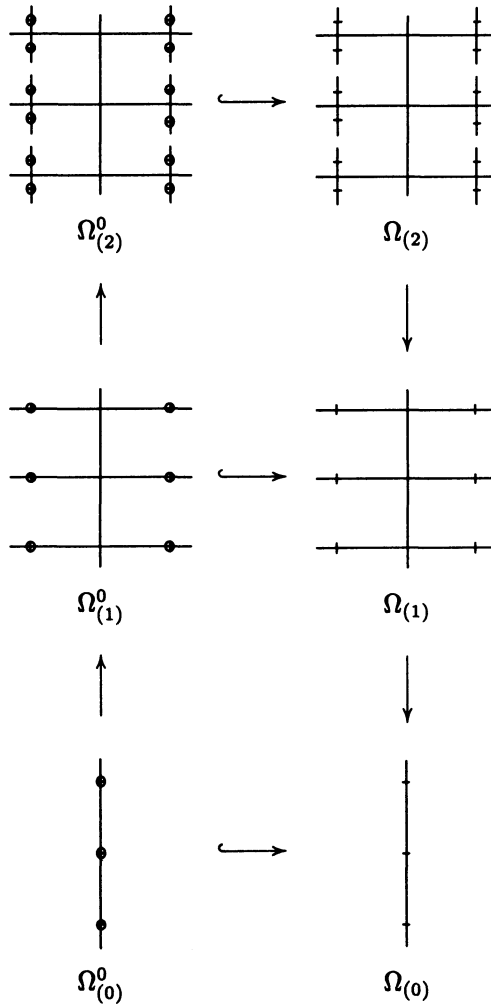
de  $\mathcal{O}$ -schémas, chacun obtenu à partir du précédent par une suite d'éclatements.

Si l'on prive  $\Omega_{(n)}$  des centres des prochains éclatement  $\Omega_{(n+1)} \rightarrow \Omega_{(n)}$ , on définit une suite d'immersions ouvertes

$$\Omega_{(1)}^0 \hookrightarrow \Omega_{(2)}^0 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \Omega_{(n)}^0 \hookrightarrow \Omega_{(n+1)}^0 \hookrightarrow \dots$$

Le  $\mathcal{O}$ -schéma  $\Omega^d$  est la limite inductive de cette suite.

Fig. 1.2.3. ( $d = 2$  et  $q = 2$ )



(les points marqués sont les centres des prochains éclatements ; les points cerclés sont ceux à enlever).

Si  $g \in \mathrm{GL}_d(K)$ , le complété

$$g : \hat{H}_\Delta \longrightarrow \hat{H}_{g\Delta}$$

de l'isomorphisme (1.1) envoie  $\hat{\Omega}_\Delta^0$  sur  $\hat{\Omega}_{g\Delta}^0$ . Ceci définit en fait une action de  $\mathrm{GL}_d(K)$  sur le système inductif  $(\hat{\Omega}_\Delta^0)_\Delta$ , et donc sur la limite inductive  $\hat{\Omega}^d$ .

*Fait* : L'action du centre de  $\mathrm{GL}_d(K)$  est triviale.

1.3. — On va donner une description plus explicite de  $\hat{\Omega}_\Delta^0$  et de la restriction à  $\hat{\Omega}_\Delta^0$  de l'objet universel de  $\hat{H}_\Delta$ .

On commence par le cas où le simplexe  $\Delta$  est maximal. On peut alors supposer que  $\Delta$  est le simplexe  $\Phi^\vee$  défini par  $\Phi_i^\vee = {}^t P^{-i} \mathcal{O}^d$ , ( $\forall i \in \mathbb{Z}$ ) (où  $P$  est la matrice (I. 4.2)).

On rappelle qu'on note  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathcal{O}^d$ .

On peut identifier le schéma formel  $\hat{\Omega}_{\Phi^\vee}^0$  au spectre formel du complété  $\pi$ -adique de

$$\mathcal{O}[c_i \ (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}), \alpha^{-1}] / \left( \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} c_i - \pi \right)$$

(on note  $\alpha = \prod \alpha_{\lambda, i}$ , où  $i$  parcourt  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  et  $\lambda$  parcourt  $\mathbb{F}_q^{d-1} - \{0\}$ , avec

$$\alpha_{\lambda, i} = 1 + \lambda_1 c_{i-1} + \lambda_2 c_{i-1} c_{i-2} + \dots + \lambda_{d-1} c_{i-1} \dots c_{1+i-d})$$

de telle sorte que la restriction à  $\hat{\Omega}_{\Phi^\vee}^0$  de l'objet universel sur  $\hat{H}_{\Phi^\vee}$  soit la suivante.

Le module  $\mathcal{L}_i$  est le module libre de base 1 ; l'application  $\alpha_i$  associe 1 à  ${}^t P^{-i} e_d$  et

$$c_{i-1} c_{i-2} \dots c_{j+i-d}$$

à  ${}^t P^{-i} e_j$  ( $1 \leq j \leq d-1$ ) ; l'application  $\prod : \mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}_{i+1}$  est la multiplication par  $c_i$ .

Le fait suivant sera utilisé dans le paragraphe 2.

*Fait* : Soient  $H_{\Phi^\vee}^0$  le sous-schéma ouvert de la fibre spéciale de  $H_{\Phi^\vee}$  complémentaire des fermés  $\{\alpha_i({}^t P^{-i} e_d) = 0\}$  et  $\hat{H}_{\Phi^\vee}^0$  le sous-schéma formel ouvert de  $\hat{H}_{\Phi^\vee}$  obtenu par restriction à  $H_{\Phi^\vee}^0$ . Le sous-schéma formel  $\hat{H}_{\Phi^\vee}^0$  de  $\hat{H}_{\Phi^\vee}$  contient  $\hat{\Omega}_{\Phi^\vee}^0$  comme sous-schéma formel ouvert. On peut encore identifier  $\hat{H}_{\Phi^\vee}^0$  au spectre formel du complété  $\pi$ -adique de

$$\mathcal{O}[c_i \ (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})] / \left( \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} c_i - \pi \right)$$

de telle sorte que la restriction à  $\hat{H}_{\Phi^\vee}^0$  de l'objet universel sur  $\hat{H}_{\Phi^\vee}$  admette la description ci-dessus.

Considérons l'action du sous-groupe d'Iwahori  ${}^t \mathcal{B}^\times$  (I. 4.2) sur  $\hat{H}_{\Phi^\vee}$ . Le sous-schéma formel  $\hat{\Omega}_{\Phi^\vee}^0$  de  $\hat{H}_{\Phi^\vee}$  n'est autre que  $\bigcap_{g \in {}^t \mathcal{B}^\times} g \hat{H}_{\Phi^\vee}^0$  (l'action sur la fibre spéciale de  $H_{\Phi^\vee}$

du sous-groupe ouvert  $1 + \pi {}^t \mathcal{B}$  de  $\mathcal{B}^\times$  est triviale, de sorte que l'intersection ci-dessus est finie).

*Remarque* : L'ouvert  $H_{\Phi^\vee}^0$  joue en fait un rôle analogue à celui de  $\prod_i (\text{Grass}_i)_{W_i}^0$  dans (II. 2.5).

Considérons maintenant le cas où le simplexe  $\Delta$  n'est plus forcément maximal.

On peut supposer que  $\Delta$  est le sous-simplexe

$$\pi\Phi_{i_\delta}^\vee \subset \Phi_{i_0}^\vee \subset \cdots \subset \Phi_{i_\delta}$$

( $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_\delta \leq d-1$ ) de  $\Phi^\vee$ . La fibre spéciale de  $\Omega_\Delta^0$  est alors l'ouvert de  $\Omega_{\Phi^\vee}^0$  complémentaire des fermés

$$\{\Pi : \mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}_{i+1} = 0\} \quad (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \{i_0, \dots, i_\delta\}).$$

La restriction à  $\widehat{\Omega}_\Delta^0$  de l'objet universel sur  $\widehat{H}_\Delta$  s'obtient par restriction à  $\widehat{\Omega}_\Delta^0 \subset \widehat{\Omega}_{\Phi^\vee}^0$  de l'objet universel décrit ci-dessus et par oubli de  $\Phi_i^\vee \rightarrow \mathcal{L}_i$  ( $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \{i_0, \dots, i_\delta\}$ ).

## 2 Le morphisme $\xi' : G_{\mathcal{O}} \rightarrow \widehat{\Omega}^d$

2.1. — On a construit deux systèmes inductifs munis d'actions de  $\text{PGL}_d(K)$ ,  $(\widehat{G}_\Delta^0)_{\Delta \in |\text{BT}|}$  (II. 4) et  $(\widehat{\Omega}_\Delta^0)_{\Delta \in |\text{BT}|}(1)$ , tous deux indexés par ensemble  $|\text{BT}|$  des simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits.

On construira dans ce paragraphe un morphisme  $\text{PGL}_d(K)$ -équivariant de systèmes inductifs

$$\xi' : (\widehat{G}_\Delta^0)_{\Delta \in |\text{BT}|} \longrightarrow (\widehat{\Omega}_\Delta^0)_{\Delta \in |\text{BT}|}$$

qui induira à la limite un morphisme  $\text{PGL}_d(K)$ -équivariant

$$\xi' : G_{\mathcal{O}} \longrightarrow \widehat{\Omega}^d.$$

L'action de  $\text{PGL}_d(K)$  sur l'ensemble d'indices du premier système n'est pas l'action usuelle sur  $|\text{BT}|$ , et en diffère par l'involution  $g \mapsto {}^t g^{-1}$  de  $\text{PGL}_d(K)$ . L'action de  $\text{PGL}_d(K)$  sur l'ensemble d'indices du second est l'action usuelle. L'endomorphisme d'ensemble ordonné de  $|\text{BT}|$  associé au morphisme  $\xi'$  ne sera donc pas l'identité. Ce sera en fait l'involution qui à un simplexe  $\Delta = (\Lambda_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  associe le simplexe dual  $\Delta^\vee = (\Lambda_{-j}^\vee)_{j \in \mathbb{Z}}$ , où on note

$$\Lambda^\vee = \{x^* \in K^d \mid \langle x^*, x \rangle \in \mathcal{O}, \forall x \in \Lambda\}$$

pour  $\Lambda \subset K^d$  (on identifie le  $K$ -espace vectoriel  $K^d$  à son dual de la manière évidente).

Pour définir le morphisme  $\xi'$ , on va considérer  $G_{\mathcal{O}}$  et  $\widehat{\Omega}^d$  - ou plus précisément les  $\widehat{G}_{\Delta^\vee}^0$  et  $\widehat{\Omega}_\Delta^0$  - comme des foncteurs sur la catégorie  $\text{STSC}_{\mathcal{O}}$  des  $\mathcal{O}$ -algèbres sans torsion séparées complètes pour la topologie  $\pi$ -adique, et construire un système inductif

$$(\xi'_\Delta : \widehat{G}_{\Delta^\vee}^0 \longrightarrow \widehat{\Omega}_\Delta^0)_{\Delta \in |\text{BT}|}$$

de morphismes fonctoriels.

On va maintenant énoncer une proposition sur laquelle repose la construction. En admettant momentanément cette proposition, on donnera ensuite la construction des morphismes  $\xi'_\Delta$ .

Soit  $B \in \text{STSC}_\mathcal{O}$ . On note  $K\widehat{\otimes} B$  le produit tensoriel complété vis-à-vis de la topologie  $\pi$ -adique sur les deux facteurs (dans le chapitre I, on considèrerait des produits tensoriels de cette sorte pour une  $\mathcal{O}$ -algèbre  $B$  dans laquelle l'image de  $\pi$  était nilpotente; on a en fait

$$K\widehat{\otimes} B = \varprojlim_n K\widehat{\otimes} B/(\pi^n).$$

On considèrera  $K\widehat{\otimes} B$  comme la  $\mathcal{O}\widehat{\otimes} B$ -algèbre des séries formelles

$$\mathbf{b} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi^i \otimes b_i$$

telles que  $\lim_{i \rightarrow -\infty} b_i = 0$ .

Lorsque  $\mathbf{b}$  est une telle série, on s'intéressera plus particulièrement à la série

$$\mathbf{b}(\pi) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi^i b_i$$

dont le terme général est calculé dans  $B[\pi^{-1}]$ . Cette série est en général divergente pour la topologie  $\pi$ -adique (voir cependant (2.1.1)).

En utilisant la variante (I. 4.4.2) de la définition de  $G_\mathcal{O}$ , un pro-objet  $(M_\bullet) \in G_\mathcal{O}(B)$  peut être vu comme une suite  $(M_i)_i$  de sous- $\mathcal{O}\widehat{\otimes} B$ -modules de  $(K\widehat{\otimes} B)^d$  dont la réduction modulo  $(1 \otimes \pi^n)$  vérifie (I. 4.4.2) pour tout entier  $n$ .

Le point-clé de la construction des morphismes  $\xi'_\Delta$  est alors

**Proposition 2.1.1.** — *Il existe un  $\mathcal{O}\widehat{\otimes} B$  sous-module  $\Theta_B$  de  $K\widehat{\otimes} B$  (ne dépendant que de  $B$ ) qui vérifie les conditions suivantes :*

(A) —

(a) Lorsque  $\mathbf{b} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi^i \widehat{\otimes} b_i$  appartient à  $\Theta_B$ , la série

$$\mathbf{b}^{(q)} = (\text{Id}_K \widehat{\otimes} \text{Fr}) \mathbf{b} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi^i \widehat{\otimes} b_i^q$$

appartient aussi à  $\Theta_B$ ;

(b) lorsque  $\mathbf{b}$  appartient à  $\Theta_B$ , la série  $(\gamma_\pi \mathbf{b})(\pi)$  (où on note, comme dans (I. 3),  $\gamma_\pi = \pi \otimes 1 - 1 \otimes \pi$ ) a son terme général dans  $\pi B$  et converge pour la topologie  $\pi$ -adique;

(c) en particulier, lorsque  $\mathbf{b}$  appartient à  $\Theta_B$ , la série  $\mathbf{b}^{(q)}(\pi)$  converge aussi (c'est le produit des séries convergentes  $\gamma_\pi^{- (q)}(\pi)$  et  $(\gamma_\pi \mathbf{b})^{(q)}(\pi)$ ); la série  $(\gamma_\pi \mathbf{b}^{(q)})(\pi)$  est alors de somme nulle.

(B) Pour tout simplexe  $\Delta = (\Delta_{i_j})_{j \in \mathbb{Z}}$  (cf. (II. 4.2)) et tout  $(M_\bullet) \in \widehat{G}_\Delta^0(B)$ , le sous- $\mathcal{O}\widehat{\otimes} B$ -module  $M_i$  de  $K^d \widehat{\otimes} B$  vérifie l'inclusion

$$M_i \subset \Delta_{i+d-1}^- \otimes_\mathcal{O} \Theta_B$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  (la notation  $\Delta^-$  est celle de (II. 4.2)).

Avant de donner la construction des morphismes  $\xi'_\Delta$ , on va encore faire une remarque

*Remarque :* La preuve de la proposition (2.1.1) sera constructive. On introduira d'abord (2.2.1) le sous-module  $\Theta_B$  de  $K \widehat{\otimes} B$ . On vérifiera ensuite respectivement dans la suite de (2.2) et dans (2.3) les propriétés (A) et (B).

2.1.2. — Construction des morphismes  $\xi'_\Delta$ .

Fixons un simplexe

$$\Delta = (\Lambda_j)_{j \in \mathbb{Z}} = (\Delta_{ij})_{j \in \mathbb{Z}} \in |BT|$$

de dimension  $\delta$ .

Le morphisme  $\mathcal{O}$ -linéaire

$$\begin{aligned} \Theta_B &\longrightarrow \pi B \\ \mathbf{b} &\longmapsto (\gamma_\pi \mathbf{b})(\pi) \quad (2.1.1A(b)) \end{aligned}$$

induit pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  un morphisme

$$\Lambda_{j+\delta+1} \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_B \longrightarrow \Lambda_{j+\delta+1} \otimes_{\mathcal{O}} (\pi B) = \Lambda_j \otimes_{\mathcal{O}} B.$$

On note  $\Delta^\vee = (\Delta_{ij}^\vee)_{j \in \mathbb{Z}}$  (cf. (II. 4.2)) (de sorte que  $\Delta_{ij}^\vee = (\Delta_{i(-j)})^\vee = \Lambda_{-j}^\vee$ ).

Soit  $(M_\bullet) \in \widehat{G}_{\Delta^\vee}^0(B)$ . En composant l'inclusion

$$(2.1.1B) \quad M_{i_j^\vee+1} \subset (\Delta^\vee)_{i_j^\vee+d}^- \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_B = \Lambda_{-j-\delta-1}^\vee \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_B$$

avec le morphisme

$$\Lambda_{-j-\delta-1}^\vee \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_B \longrightarrow \Lambda_{-j}^\vee \otimes_{\mathcal{O}} B$$

on obtient pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  un morphisme

$$A_j : M_{i_j^\vee+1} \longrightarrow \Lambda_{-j}^\vee \otimes_{\mathcal{O}} B.$$

Il résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M_{i_j^\vee} & \xrightarrow{F_{i_j^\vee}} & M_{i_j^\vee+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Delta^\vee)_{i_j^\vee+d-1}^- \otimes_{\mathcal{O}} (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \Theta_B & \xrightarrow{(2.1.1 A (a))} & \Lambda_{-j-\delta-1}^\vee \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_B \end{array}$$

et du fait que lorsque  $\mathbf{b} \in \Theta_B$ ,  $(\gamma_\pi \mathbf{b}^{(q)})(\pi) = 0$  (cf. (2.1.1 A (c))) que le morphisme composé

$$(\text{Id}_{\mathcal{O}} \otimes \text{Fr})^* M_{i_j^\vee} \xrightarrow{F_{i_j^\vee}} M_{i_j^\vee+1} \xrightarrow{A_j} \Lambda_{-j}^\vee \otimes_{\mathcal{O}} B$$

est nul. Le morphisme  $A_j$  induit donc un morphisme (encore noté de la même manière)

$$A_j : \omega_{i_j^\vee} = \text{Coker } F_{i_j^\vee} \longrightarrow \Lambda_{-j}^\vee \otimes_{\mathcal{O}} B.$$

Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on note  $\mathcal{L}_j$  le  $B$ -dual de  $\omega_{i_{(-j)}^\vee}$ ,  $\Pi$  le  $B$  dual du morphisme

$$\omega_{i_j^\vee} \longrightarrow \omega_{i_{j+1}^\vee}$$

induit par l'inclusion

$$M_{i_j^\vee} \xrightarrow{\pi_{i_j^\vee}} M_{i_{j+1}^\vee} \rightarrow \cdots \xrightarrow{\pi_{i_{j+1}^\vee}^{-1}} M_{i_{(j+1)}^\vee}$$

et

$$\alpha_j : \Lambda_j \otimes B \longrightarrow \mathcal{L}_j$$

le  $B$ -dual du morphisme  $A_{(-j)}$ .

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda_0 & \subset & \Lambda_1 & \subset & \cdots & \subset & \Lambda_\delta & \subset & \Lambda_{\delta+1} & \stackrel{=}{=} & \pi^{-1}\Lambda_0 \\ \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha_1 & & & & \downarrow \alpha_\delta & & \downarrow \alpha_{\delta+1} & & \downarrow \alpha_0 \cdot \pi \\ \mathcal{L}_0 & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{L}_1 & \xrightarrow{\pi} & \cdots & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{L}_\delta & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{L}_{\delta+1} & \stackrel{=}{=} & \mathcal{L}_0 \end{array}$$

est alors commutatif.

La proposition suivante achève la construction. Elle sera démontrée en (2.4).

**Proposition 2.1.3.** —

1. Pour tout  $(M_\bullet) \in \widehat{G}_{\Delta^\vee}^0(B)$ , le diagramme  $\xi'_\Delta(M_\bullet)$  appartient à  $\widehat{\Omega}_\Delta^0(B)$  ;
2. la famille de morphismes

$$(\xi'_\Delta : \widehat{G}_{\Delta^\vee}^0 \longrightarrow \widehat{\Omega}_\Delta^0)_{\Delta \in |BT|} \quad (\text{cf. (1)})$$

est un morphisme de systèmes inductifs ; ce morphisme est de plus  $\text{PGL}_d(K)$ -équivariant.

La construction qu'on vient d'exposer est inspirée d'un travail d'Anderson [A]. On va en donner une variante qui la rattache au morphisme de périodes de Gross-Hopkins (cf. [G-H] et [R-Z]) en la reliant à la cohomologie de de Rham.

2.1.4. — Variante de la définition des morphismes  $A_j$ .

Soient  $(M_\bullet) \in G_{\mathcal{O}}(B)$  et  $i \in \mathbb{Z}$ .

On rappelle qu'on note

$$H_{\text{DR}}(M_\bullet)_i = (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M_i / \gamma_\pi (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M_i$$

et que le morphisme

$$V_i : M_{i+1} \longrightarrow (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M_i$$

induit un morphisme

$$\omega_i = \text{Coker } F_i \longrightarrow H_{\text{DR}}(M_\bullet)_i \quad (\text{cf. (I. 3)})$$

Le morphisme (2.1.1 (c))

$$M_i \hookrightarrow K^d \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_B$$

induit d'autre part un morphisme

$$H_{\text{DR}}(M_\bullet)_i \longrightarrow K^d \otimes_{\mathcal{O}} (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \Theta_B / \gamma_\pi (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \Theta_B.$$

Considérons maintenant le morphisme  $B$ -linéaire

$$(\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \Theta_B / \gamma_\pi (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \Theta_B \longrightarrow B$$

défini par le morphisme Fr-semilinéaire (2.1.1 (b))

$$\begin{aligned} \Theta_B &\longrightarrow B \\ \mathbf{b} &\longmapsto b^{(q)}(\pi). \end{aligned}$$

En composant celui-ci (ou plutôt son tensorisé par  $K^d$ ) avec le morphisme précédent on obtient finalement des morphismes

$$\mathcal{H}_i: H_{\text{DR}}(M_\bullet)_i \longrightarrow K^d \otimes_{\mathcal{O}} B$$

$$\text{et } A'_i: \omega_i \hookrightarrow H_{\text{DR}}(M_\bullet)_i \xrightarrow{\mathcal{H}_i} K^d \otimes_{\mathcal{O}} B.$$

On revient maintenant aux notations utilisées lors de la construction des morphismes  $\xi'_\Delta$  : on fixe donc un simplexe  $\Delta$  et on suppose que  $(M_\bullet) \in \widehat{G}_{\Delta^\vee}^0(B)$ . Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , il résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_{i_j^\vee+1} & \xrightarrow{V_{i_j^\vee}} & (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M_{i_j^\vee} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda_{-j-\delta-1}^\vee \otimes \Theta_B & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda_{-j-\delta-1}^\vee \otimes \gamma_\pi \Theta_B & \longleftarrow (\Delta^\vee)_{i_j^\vee+d-1}^- \otimes_{\mathcal{O}} (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \Theta_B & \end{array}$$

$m \xrightarrow{\quad} \gamma_\pi m$

que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \omega_{i_j^\vee} & \hookrightarrow & H_{\text{DR}}(M_\bullet)_{i_j^\vee} \\ \downarrow A_{i_j^\vee} & & \downarrow A'_{i_j^\vee} \\ \Lambda_{-j}^\vee \otimes B & \hookrightarrow & K^d \otimes_{\mathcal{O}} B \end{array}$$

est lui aussi commutatif. Ceci fournit donc une autre construction du morphisme  $A_{i_j^\vee} \otimes B[\pi^{-1}]$ .

*Remarque* : Soient  $(M_\bullet), (N_\bullet) \in \text{Mod}S(d)(B)$  (I. 4.4.4) et

$$\varphi_0 : (M_\bullet) \otimes_B B_0 \longrightarrow (N_\bullet) \otimes_B B_0$$

un morphisme (on rappelle qu'on note  $B_0 = B/(\pi)$ ). En utilisant le lemme (I. 3.1.3), on voit que le morphisme  $\varphi_0$  possède un relèvement virtuel canonique

$$“\varphi” : (M_\bullet) \longrightarrow (N_\bullet) \otimes_{(\mathcal{O} \hat{\otimes} B)} (K \hat{\otimes} B).$$

La preuve (2.3) de la proposition (2.1.1 (c)) montre aussi que “ $\varphi$ ” se factorise à travers un morphisme

$$(M_\bullet) \longrightarrow (N_\bullet) \otimes_{(\mathcal{O} \hat{\otimes} B)} \Theta_B$$

qui induit alors un morphisme

$$“H”(\varphi_0) : H_{\text{DR},\bullet}(M_\bullet) \longrightarrow H_{\text{DR},\bullet}(N_\bullet)$$

de modules gradués.

L'idéal  $(\pi)$  de  $B$  est muni de puissances  $\pi$ -divisées ( $x \mapsto “x^q/\pi”$ ) [G-H] canoniques, et on peut considérer que ce fait traduit la nature cristalline de  $H_{\text{DR}}$ .

On peut en fait vérifier que le morphisme “ $H$ ”( $\varphi_0$ ) ci-dessus coïncide avec le morphisme  $H_{\text{crist}}(\varphi_0)$  défini par Gross et Hopkins [G-H] en adaptant la “théorie de Dieudonné explicite” (à base de quasi-logarithmes, cf. [K2]) dans le cadre des  $\mathcal{O}$ -modules formels.

2.2. — On rappelle qu'on note  $\gamma_\pi$  l'élément  $\pi \otimes 1 - 1 \otimes \pi$  de  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$  (cf. (I. 3)). On notera aussi  $\gamma_\pi^{(q^n)}$  l'élément  $(\text{Id}_{\mathcal{O} \hat{\otimes} \text{Fr}^n})\gamma_\pi = \pi \otimes 1 - 1 \otimes \pi^{q^n}$  et

$$\gamma_\pi^{-(q^n)} = \sum_{i \geq 0} \pi^{-i+1} \otimes \pi^{iq^n}$$

l'inverse de  $\gamma_\pi^{(q^n)}$  dans  $K \hat{\otimes} B$ . On notera pour simplifier ( $n \geq 2$ )

$$\begin{aligned} \Gamma_\pi^{(n)} &= \gamma_\pi \cdots \gamma_\pi^{(q^{n-1})} \\ \Gamma_\pi^{-(n)} &= \gamma_\pi^{-1} \cdots \gamma_\pi^{-(q^{n-1})} = (\Gamma_\pi^{(n)})^{-1} \end{aligned}$$

et on posera  $\Gamma_\pi^{(1)} = \gamma_\pi$ ,  $\Gamma_\pi^{(0)} = 1$ .

**Définition 2.2.1.** —

1. Le sous  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -module  $\Theta_{B,n}$  de  $K \hat{\otimes} B$  est (pour  $n \geq 1$ ) le sous-module engendré par

$$1, \gamma_\pi^{-1}(1 \otimes \pi), \dots, \Gamma_\pi^{-(n)}(1 \otimes \pi^{q^{n-1}}).$$

2. Le sous  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -module  $\Theta_{B,n}$  de  $K \hat{\otimes} B$  est l'adhérence pour la topologie  $(1 \otimes \pi)$ -adique du sous-module  $\Theta_{B,\infty} = \bigcup_{n \geq 1} \Theta_{B,n}$ .



On voit immédiatement sur cette définition que  $\Theta_B$  vérifie la propriété (2.1.1.A (a)). On va maintenant prouver (2.1.1.A (a)). Il sera commode de noter  $\varpi = \pi \otimes 1$  et de considérer  $\mathbf{b} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i \varpi^i$  ( $b_i \in B, \forall i \in \mathbb{Z}$ ) comme une série en  $\varpi$ . Lorsque  $z$  est un élément de  $B[\pi^{-1}]^\times$ , on notera  $\mathbf{b}(z)$  la série (*a priori* divergente)

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i z^i$$

On note  $B_{t.n.}$  l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents (i.e. dont une puissance appartient à  $\pi B$ ) de  $B$ .

On considère pour tout entier  $n$  l'ensemble

$$C_n(B) = \{z \in B_{t.n.} \mid (\exists z' \in B_{t.n.}); zz' = \pi^{q^n}\}$$

et pour  $n \geq 1$  son sous-ensemble

$$C'_n(B) = \{z \in \pi^n B \mid (\exists z'' \in B); zz'' = \pi^{q^{n-1}}\};$$

La propriété (2.1.1.A (b)) résulte de la proposition suivante :

**Proposition 2.2.2.** — *Pour tout entier  $n \geq 0$ , pour tout  $z \in C_n(B)$  et pour tout  $\mathbf{b} \in \Gamma_\pi^{(n)} \Theta_B$ , la série  $\mathbf{b}(z)$  est convergente; son terme général appartient à  $B$ , et même à  $\pi^n B$  lorsque  $n \geq 1$  et  $z \in C'_n(B)$ .*

Avant de démontrer la proposition (2.2.2), qui est l'énoncé central de ce paragraphe, on va faire une remarque afin d'en éclairer le sens.

*Remarque :* Notons

$$\mathbb{D} = \{|\varpi| < 1\}$$

le disque unité ouvert rigide-analytique sur  $K$ ,

$$C_n \text{ la couronne ouverte } \{|\pi^{q^n}| < |\varpi| < 1\}$$

et

$$\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\} = \bigcup_{n \geq 0} C_n,$$

le disque épointé.

Considérons la fibre générique au sens de Berthelot  $(\mathrm{Spf} B)_K$  ([Be] (0.2.6)) du  $\mathcal{O}$ -schéma formel  $\mathrm{Spf} B$ , et notons encore

$$\mathbb{D}_{B[\pi^{-1}]}, C_{n,B[\pi^{-1}]} \text{ et } \mathbb{D}_{B[\pi^{-1}]}^*$$

les  $(\mathrm{Spf} B)_K$ -espaces rigides obtenus respectivement à partir de  $\mathbb{D}$ ,  $C_n$  et  $\mathbb{D}^*$  par le changement de base  $(\mathrm{Spf} B)_K \rightarrow \mathrm{Spm} K$ .

Il résulte alors de (2.2.2) que la série  $\Gamma_\pi^{(n)} \mathbf{b}$  définit sur  $\mathcal{C}_{n, B[\pi^{-1}]}$  une fonction holomorphe (dont les valeurs sont majorées en norme par 1, et même par  $|\pi^n|$  sur la couronne fermée  $\{|\pi^{q^{n-1}}| \leq |\varpi| \leq |\pi^n|\}$ ).

L'élément  $\mathbf{b}$  de  $\Theta_B$  définit donc sur  $\mathbb{D}_{B[\pi^{-1}]}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{C}_{n, B[\pi^{-1}]}$  une fonction méromorphe,

dont les pôles sont au plus simples et situés le long des hypersurfaces d'équations  $\varpi = \pi^{q^n}$  ( $n \geq 0$ ). La série  $(\gamma_\pi \mathbf{b})(\pi)$  utilisée dans (2.1) calcule simplement le résidu de la forme différentielle  $\mathbf{b}(\varpi) d\varpi$  le long de l'hypersurface d'équation  $\varpi = \pi$ , et on peut de même interpréter  $b^{(q)}(\pi)$  comme la puissance  $q$ -ième de  $\mathbf{b}(\pi^{1/q})$ .

L'espace des telles fonctions méromorphes et le résidu ci-dessus ont déjà considérés (dans le cas où  $B[\pi^{-1}]$  est le complété  $\pi$ -adique d'une clôture algébrique de  $K$ ) par G. Anderson [A] dans le cadre d'une construction déjà mentionnée dans l'introduction de ce chapitre.

*Preuve de la proposition (2.2.2) :*

On fixe un entier  $n \geq 0$ .

Rappelons qu'on note  $\mathbf{b} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i \varpi^i$  ( $b_i \in B, \forall i \in \mathbb{Z}$ ) les éléments de  $K \hat{\otimes} B$ .

Soit  $\mathcal{H}(C_n(B))$  l'ensemble des  $\mathbf{b} \in K \hat{\otimes} B$  vérifiant

1.  $b_0 \in \pi^n B$
2.  $b_{-i} \in \pi^{iq^n} B$ , pour tout entier  $i \geq 1$ .

Il résulte des inégalités  $n \leq q^n \leq 2q^n \leq \dots$  que  $\mathcal{H}(C_n(B))$  est un  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -module. De plus on vérifie facilement que  $\mathcal{H}(C_n(B))$  est fermé pour la topologie  $(1 \otimes \pi)$ -adique sur  $K \hat{\otimes} B$ . La proposition (2.2.2) résulte alors du lemme suivant :

**Lemme 2.2.3.** —

1. On a  $\Gamma_\pi^{(n)} \Theta_B \subset \mathcal{H}(C_n(B))$ .
2. Pour tout  $z \in C_n(B)$  et pour tout  $\mathbf{b} \in \mathcal{H}(C_n(B))$ , la série  $\mathbf{b}(\pi)$  est convergente. Son terme général appartient à  $B$ , et même à  $\pi^n B$  lorsque  $n \geq 1$  et  $z \in C'_n(B)$ .

*Preuve :* D'après ce qui précède, il suffit pour démontrer le premier point de vérifier que les éléments de la famille génératrice

$$\Gamma_\pi^{(n)}, \pi \gamma_\pi^{(q)} \dots \gamma_\pi^{(q^{n-1})}, \dots, \pi^{q^{n-1}}, \dots, \pi^{q^{N-1}} \gamma_\pi^{-(q^n)} \dots \gamma_\pi^{-(q^{N-1})}, \dots$$

du  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -module  $\Gamma_\pi^{(n)} \Theta_{B, \infty}$  appartiennent à  $\mathcal{H}(C_n(B))$ . Les  $(n+1)$  premiers d'entre eux

$$\Gamma_\pi^{(n)}, \pi \gamma_\pi^{(q)} \dots \gamma_\pi^{(q^{n-1})}, \dots, \pi^{q^{n-1}}$$

appartiennent à  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$  et ont leur terme constant dans  $\pi^n B$ , comme on le voit en utilisant l'inégalité  $\ell \leq q^{\ell-1}$  ( $\ell \geq 1$ ). Pour les éléments restants, on remarque que lorsque  $m \geq n$  la série

$$\pi^{q^n} \gamma_\pi^{-(q^m)} = \pi^{q^n} \sum_{i \geq 1} \pi^{(i-1)q^m} \varpi^{-i}$$

peut être considérée comme un élément de  $(\pi^{q^n} \varpi^{-1}) B[[\pi^{q^n} \varpi^{-1}]] \subset K \hat{\otimes} B$ . Il en est alors de même du produit

$$\pi^{(N-n)q^n} \gamma_\pi^{-(q^n)} \dots \gamma_\pi^{-(q^{N-1})} \quad (N \geq n+1)$$

qui appartient donc à  $\mathcal{H}(C_n(B))$ . On a pour  $N \geq n+1$  l'inégalité  $(N-n)q^n \leq q^{N-1}$  et  $\pi^{q^{N-1}} \gamma_{\pi}^{-(q^n)} \dots \gamma_{\pi}^{-(q^{N-1})}$  appartient donc aussi à  $\mathcal{H}(C_n(B))$ , ce qui achève la preuve du premier point.

La preuve du deuxième point est facile et laissée au lecteur.  $\square$

### 2.3. — Preuve de la proposition 2.1.1 B

Fixons un simplexe  $\Delta$  de l'ensemble de Bruhat-Tits de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  et considérons un pro-objet  $(M_{\bullet}) \in \widehat{G}_{\Delta}^0(B)$ .

On rappelle qu'on note  $B_0 = B/(\pi)$ . Il résulte de la définition (II. 4.2.2) de  $\widehat{G}_{\Delta}^0$  que la réduction  $R_{i,0}$  modulo  $(1 \widehat{\otimes} \pi)$  du morphisme

$$R_i: M_i \hookrightarrow K^d \widehat{\otimes} B$$

se factorise par  $\Delta_{i+d-1}^{-} \widehat{\otimes} B_0$ .

Choisissons un relèvement modulo  $(1 \widehat{\otimes} \pi)$

$$R_i^0: M_i \longrightarrow \Delta_{i+d-1}^{-} \widehat{\otimes} B_0$$

du morphisme de  $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B_0$ -modules  $R_{i,0}$ .

Il résulte de (I. 4.4.1) que la suite  $(R_i^n)_n$  définie par

$$R_i^{n+1} = \gamma_{\pi}^{-1} \mathrm{Id}_{K^d} \widehat{\otimes} \mathrm{Fr} \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{O} \widehat{\otimes} B} \mathrm{Fr})^* (R_i^n \circ \Pi_{M,i}) V_{M,i-1} \quad (n \geq 0)$$

(où la notation  $V$  est celle de (I. 3))

est telle que  $R_i \equiv R_i^n \pmod{(1 \otimes \pi^{q^n}) K \widehat{\otimes} B}$ . Le morphisme  $R_i^n$  appartient à

$$\Gamma_{\pi}^{-(n)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O} \widehat{\otimes} B}(M_i, \Delta_{i+d-1}^{-} \widehat{\otimes} B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O} \widehat{\otimes} B}(M_i, K^d \widehat{\otimes} B).$$

Il résulte alors de la congruence  $R_i^{m+1} \equiv R_i^m \pmod{(1 \widehat{\otimes} \pi^{q^m})}$  ( $\forall m \geq 0$ ) que

$$R_i^n \in \Theta_{B,n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O} \widehat{\otimes} B}(M_i, \Delta_{i+d-1}^{-} \widehat{\otimes} B) \quad (\forall n \geq 0)$$

(remarquer que

$$\Gamma_{\pi}^{-(m+1)} \mathcal{O} \widehat{\otimes} B \cap (1 \widehat{\otimes} \pi^{q^m}) K \widehat{\otimes} B = \Gamma_{\pi}^{-(m+1)} (1 \widehat{\otimes} \pi^{q^m}) \mathcal{O} \widehat{\otimes} B).$$

La limite  $R_i$  de la suite  $(R_i^n)_n$  appartient donc à  $\Theta_B \mathrm{Hom}_{\mathcal{O} \widehat{\otimes} B}(M_i, \Delta_{i+d-1}^{-} \widehat{\otimes} B)$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

### 2.4. — Preuve de la proposition 2.1.3

Le lemme suivant va permettre quelques réductions. Sa preuve (facile) sera laissée au lecteur.

**Lemme 2.4.1.** —

1. Si  $\Delta' \subset \Delta$  est une inclusion de simplexes et si  $(M_{\bullet}) \in \widehat{G}_{(\Delta')^{\vee}}^0(B)$ , le diagramme  $\xi'_{\Delta'}(M_{\bullet})$  (2.1.2) s'obtient par restriction à partir du diagramme  $\xi'_{\Delta}(M_{\bullet})$ .

2. Soient  $g \in \mathrm{GL}_d(K)$ ,  $(M_\bullet \in G_{\Delta^\vee}^0(B)$  et  $({}^t g^{-1} M_\bullet) \in \widehat{G}_{(g\Delta)^\vee}^0$  l'image de  $(M_\bullet)$  par le morphisme (II. 4.1)

$$\begin{aligned} g : \widehat{G}_{\Delta^\vee}^0 &\longrightarrow \widehat{G}^0 \\ (M_\bullet) &\longmapsto ({}^t g^{-1} M_\bullet). \end{aligned}$$

Le diagramme  $\xi'_{g \cdot \Delta}({}^t g^{-1} \cdot M_\bullet)$  n'est autre que

$$(g\Lambda_\bullet \longrightarrow \Lambda_\bullet \longrightarrow \mathcal{L}_\bullet)$$

(où  $(\Lambda_\bullet \rightarrow \mathcal{L}_\bullet)$  est le diagramme  $\xi'_\Delta(M_\bullet)$  (2.1.2)).  $\square$

Il résulte déjà de ce lemme que pour prouver la proposition (2.1.3), il suffit en fait de prouver (2.1.3 (1)). En effet, pour une inclusion de simplexes  $(\Delta' \subset \Delta)$ , en utilisant (2.4.1 (1)) et la commutativité du diagramme

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccc} \widehat{\Omega}_\Delta^0 & \hookrightarrow & H_\Delta \\ \uparrow & & \downarrow \text{restriction} \\ \widehat{\Omega}_{\Delta'}^0 & \hookrightarrow & H_{\Delta'} \end{array}$$

on voit que les morphismes  $\xi'_\Delta$  et  $\xi'_{\Delta'}$ , obtenus par (2.1.3 (1)) seront compatibles aux inclusions  $\widehat{G}_{(\Delta')^\vee}^0 \hookrightarrow \widehat{G}_{\Delta^\vee}^0$  et  $\widehat{\Omega}_{\Delta'}^0 \hookrightarrow \widehat{\Omega}_\Delta^0$ ; la  $\mathrm{PGL}_d(K)$ -équivariance s'obtient immédiatement à partir de (2.4.1 (2)).

Grâce à (2.4.1 (2)) et au fait que  $\mathrm{PGL}_d(K)$  agit transitivement sur les simplexes maximaux de son immeuble, on peut se contenter de prouver le cas particulier de (2.1.3 (1)) où le simplexe  $\Delta$  est supposé inclus dans le simplexe maximal  $\Phi^\vee$  (cf. 1).

Finalement, en utilisant la remarque (1.1) et le fait que  $\widehat{\Omega}_\Delta^0$  est ouvert dans  $\widehat{H}_\Delta$  (cf. (1.2)), on voit qu'il suffit de vérifier que lorsque  $(M_\bullet) \in \widehat{G}_{\Delta^\vee}^0(B)$ , la fibre spéciale

$$\xi'_{\Delta,0}(M_\bullet) = (\Lambda_\bullet \longrightarrow \mathcal{L}_\bullet \otimes_B B_0)$$

du diagramme  $\xi'_\Delta(M_\bullet)$  appartient à  $\widehat{\Omega}_\Delta^0(B_0)$  (on rappelle qu'on note  $B_0 = B/(\pi)$ ).

Ces réductions faites, on va maintenant calculer explicitement la fibre spéciale  $\xi'_{\Delta,0}(M_\bullet)$  du diagramme  $\xi'_\Delta(M_\bullet)$ . Le résultat obtenu permettra ensuite d'achever (cf. (2.4.4)) la preuve de la proposition (2.1.3).

Compte tenu du lemme (2.4.1 (1)), on peut se contenter de faire le calcul de  $\xi'_{\Delta,0}$  dans le cas où  $\Delta = \Phi^\vee$ . Le résultat obtenu est énoncé dans la proposition suivante.

On rappelle (cf. 1) que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\Phi_i^\vee$  est le  $\mathcal{O}$ -module libre de base  $({}^t P^{-i} e_1, \dots, {}^t P^{-i} e_d)$ .

Le  $\mathcal{O}$ -schéma formel  $\widehat{G}_\Phi^0$  est muni des coordonnées  $(v^j[i])$  ( $1 \leq j \leq d-1$ ,  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ) (II. 3.1). On pose, pour simplifier les notations

$$\begin{aligned} w[i] &= v^{d-1}[i] - v^{d-1}[i]^q \text{ (cf. (II. 3.2))}, \\ u_j[i] &= (1 - v^j[i]^{q-1})^{-1} (1 \leq j \leq d-1), \\ v^d[i] &= 1 \end{aligned}$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

On note  $G_\Phi^0$  (cf. II) la fibre spéciale de  $\widehat{G}_\Phi^0$ .

**Proposition 2.4.2.** — *Le diagramme  $\xi'_{\Phi^\vee, 0}(M_\bullet)$  est le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \subset & \Phi_i^\vee & \subset & \Phi_{i+1}^\vee & \subset & \cdots \\ & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \alpha_{i+1} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\pi_{i-1}} & \mathcal{O}_{G_\Phi^0} & \xrightarrow{\pi_i} & \mathcal{O}_{G_\Phi^0} & \xrightarrow{\pi_{i+1}} & \cdots \end{array}$$

*suivant.*

1. *L'application  $\mathcal{O}$ -linéaire  $\alpha_i$  a pour matrice*

$$(x_1[-i+1], \dots, x_d[-i+1])$$

*(où l'on pose*

$$x_\ell[j] = v^\ell[j] u_{\ell-1}[j-1] u_{\ell-2}[j-2] \cdots u_1[j-\ell+1]$$

*pour tous les  $\ell, j$ );*

2. *le morphisme  $\Pi_i$  est la multiplication par  $w[-i]$ .*

*Preuve :* Le schéma formel  $\widehat{G}_\Phi^0$  est affine (cf. (II. 3.1)). Dans ce qui suit, il sera commode de poser  $\widehat{G}_\Phi^0 = \text{Spf}(B_{\text{univ}})$ .

De plus, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on notera  $(\varepsilon_j[i])_{0 \leq j \leq d-1}$  la base (II. 3.2) du  $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B_{\text{univ}}$ -module  $M_i$ .

On rappelle que le diagramme

$$\xi'_{\Phi^\vee}(M_\bullet) \otimes_{\mathcal{O}} B_{\text{univ}} : (\Phi_\bullet^\vee \otimes_{\mathcal{O}} B_{\text{univ}} \xrightarrow{\alpha \otimes B_{\text{univ}}} \mathcal{L}_\bullet) \quad (2.1)$$

est obtenu par dualisation à partir du diagramme (2.1)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \subset & \Phi_i \otimes_{\mathcal{O}} B_{\text{univ}} & \subset & \Phi_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}} B_{\text{univ}} & \subset & \cdots \\ & & \uparrow A_i & & \uparrow A_{i+1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \omega_i & \longrightarrow & \omega_{i+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array} \quad (i \in \mathbb{Z})$$

Les flèches horizontales qui figurent dans le diagramme précédent sont induites par les inclusions  $\Pi_{i+1} : M_{i+1} \hookrightarrow M_{i+2}$ .

On va d'abord démontrer le deuxième point. Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $0 \leq j \leq d-1$ , on note  $\varepsilon'_j[i+1]$  l'image dans  $\text{Coker}(F_i : (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M_i \rightarrow M_{i+1})$  de  $\varepsilon_j[i+1]$ . Lorsque  $j \leq d-2$ , le vecteur

$$-w[i-j]\varepsilon_j[i+1] + \varepsilon_{j+1}[i+1]$$

appartient à l'image de  $F_i$ , et par conséquent

$$\varepsilon'_{j+1}[i+1] = w[i-j]\varepsilon'_j[i+1].$$

Le  $B_{\text{univ}}$ -module inversible  $\omega_i = \text{Coker } F_i$  est donc engendré par le vecteur  $\varepsilon'_0[i+1]$ , que nous utiliserons désormais pour identifier  $\omega_i$  à  $B_{\text{univ}}$ .

Le morphisme  $\omega_{i-1} \rightarrow \omega_i$  associe  $\varepsilon'_1[i+1] = w[i]\varepsilon'_0[i+1]$  à  $\varepsilon'_0[i]$ . Il s'identifie donc à la multiplication par  $w[i]$ .

On identifie aussi le  $B_{\text{univ}}$ -module  $\mathcal{L}_i = \omega_{-i}^\vee$  à  $B_{\text{univ}}$  de la manière évidente. Le morphisme

$$\mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}_{i+1}$$

dual de

$$\omega_{-i-1} \rightarrow \omega_{-i}$$

est alors la multiplication par  $w[-i]$ . Ceci achève la preuve du deuxième point.

Pour démontrer le premier point, on va calculer le morphisme

$$(2.1) \quad B_{\text{univ}} = \omega_i \xrightarrow{A_i} \Phi_i \otimes B_{\text{univ}}$$

modulo  $\pi$ .

1<sup>ère</sup> ÉTAPE : approximation des morphisme  $A_i$ . On va de nouveau utiliser la méthode d'approximation (2.3) qui a servi à établir la proposition (2.1.1.B) - ou plutôt sa variante où l'on pose

$$R_{i+1}^{n+1} = \gamma_\pi^{-1} \circ F_{\Phi,i} \circ (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* R_i^n \circ V_i.$$

Le lecteur désireux d'éviter cette variante peut aussi supposer qu'on a relevé la famille  $R_{i,0}$  en une famille  $R_i^0$  comptable aux inclusions  $M_i \rightarrow M_{i+1}$  et  $\Phi_{i+d-1} \subset \Phi_{i+d}$  (il n'y a pas d'obstruction à cela).

Soient  $n \geq 0$  et  $i \in \mathbb{Z}$ . De même qu'en (2.1.2), il résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M_i & \xrightarrow{F_i} & M_{i+1} \\ \downarrow (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* R_i^n & & \downarrow R_{i+1}^{n+1} \\ \Phi_{i+d-1} \otimes_{\mathcal{O}} (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* \Theta_{B_{\text{univ}}} & \longrightarrow & \Phi_{i+d} \otimes_{\mathcal{O}} \Theta_{B_{\text{univ}}} \end{array}$$

que le morphisme

$$A_i^{n+1} : M_{i+1} \longrightarrow \Phi_i \otimes_{\mathcal{O}} B_{\text{univ}}$$

induit par  $R_{i+1}^{n+1}$  et par le morphisme « résidu en  $\pi$  » (2.1.1.A (b))

$$\Theta_{B_{\text{univ}}} \longrightarrow \pi B_{\text{univ}}$$

vérifie  $A_i^{n+1} \circ F_i = 0$ . Celui-ci définit donc un morphisme

$$A_i^{n+1} : \text{Coker } F_i \longrightarrow \Phi_i \otimes_{\mathcal{O}} B_{\text{univ}}.$$

On va maintenant voir que les morphismes  $A_i^n$  ( $n \geq 1$ ) permettent de calculer des approximations des morphismes  $A_i$  (2.1).

Soit  $B$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre sans torsion séparée complète pour la topologie  $\pi$ -adique. Lorsque  $\mathbf{b} \in \gamma_\pi \Theta_B \cap (1 \otimes \pi^{q^n}) K \hat{\otimes} B$ , la somme  $\mathbf{b}(\pi)$  appartient à  $\pi^{q^n-n} B$  (cette propriété est en fait déjà vérifiée en remplaçant  $\gamma_\pi \Theta_B$  par le  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -module  $\mathcal{H}(C_1(B)) \supset \gamma_\pi \Theta_B$  introduit dans la preuve de (2.2.2)). De ceci et de la congruence

$$R_{i+1}^n \equiv R_{i+1}((1 \otimes \pi^{q^n}) K \hat{\otimes} B_{\text{univ}})$$

on déduit la congruence  $A_i^n \equiv A_i(\pi^{q^n-n-1})$

2<sup>ème</sup> ÉTAPE Pour calculer les approximations ci-dessus, on utilisera le relèvement  $R_i^0$  de  $R_{i,0}$  qui a pour matrice

$$P^{i+d-1} \sum_{\ell=0}^{d-1} P^{-\ell} \text{diag}(v^{d-\ell}[-j])_{0 \leq j \leq d-1} P^{-i}$$

(on rappelle qu'on note  $v^d[j] = 1$ )

en prenant  $(\varepsilon_j[i])_{0 \leq j \leq d-1}$  comme base de  $M_i$  (cf. le début de la preuve) et  $(P^{-i-d+1} e_j)_{1 \leq j \leq d}$  comme base de  $\Phi_{i+d-1}$ . A partir de maintenant, les morphismes  $R_{i+1}^n$  et  $A_i^n$  seront ceux calculés en utilisant ce relèvement  $R_i^0$ .

Pour ce choix particulier du relèvement  $R_i^0$ , le lemme suivant améliore la congruence  $A_i^1 \equiv A_i(\pi^{q-2})$  déjà obtenue.

**Lemme 2.4.3.** — *Le morphisme  $A_i^1$  satisfait la congruence  $A_i^1 \equiv A_i(\pi^{q-1})$ . En particulier, on a  $A_i^1 \equiv A_i(\pi)$  (même lorsque  $q = 2$ ).*

Admettons provisoirement ce lemme et terminons la preuve.

3<sup>ème</sup> ÉTAPE On va maintenant calculer les morphismes  $A_i^1$ .

Avec une notation évidente, le morphisme  $A_i^1$  n'est autre que  $\pi^{-1}(\gamma_\pi R_{i+1}^1)(\pi)$ .

On va donc calculer la matrice du morphisme

$$R_{i+1}^1 = \gamma_\pi^{-1} \circ F_{\Phi,i} \circ (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* R_i^0 \circ V_i$$

(cf. 1<sup>ère</sup> étape) dans les bases respectives  $(\varepsilon_j[i])_{0 \leq j \leq d-1}$  et  $(P^{-i-d+1} e_{j+1})_{0 \leq j \leq d-1}$  de  $M_i$  et  $\Phi_{i+d-1}$ .

Pour pouvoir écrire les morphismes  $F_{\Phi,i}, (\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^* R_i^0, V_i \dots$  comme des matrices, on identifiera les  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B_{\text{univ}}$ -modules libres  $(\text{Id}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes} \text{Fr})^*(\mathcal{O}^d \hat{\otimes} B_{\text{univ}})$  et  $\mathcal{O}^d \hat{\otimes} B_{\text{univ}}$  à l'aide de l'isomorphisme  $\text{Id}_{\mathcal{O}^d \hat{\otimes} \text{Fr}}$ . Lorsque

$$\mathbf{C} = (\mathbf{c}_i^j) \quad (0 \leq i \leq d-1, 0 \leq j \leq d-1, \mathbf{c}_i^j \in K \hat{\otimes} B_{\text{univ}})$$

est la matrice d'un tel morphisme, celle de  $(\text{Id} \otimes \text{Fr})^* \mathbf{C}$  sera alors

$$\mathbf{C}^{(q)} = \left( (c_i^j)^{(q)} \right)_{i,j}.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que le morphisme

$$V_i : M_{i+1} \longrightarrow (\text{Id}_O \widehat{\otimes} \text{Fr})^* M_i$$

n'est autre que

$$P^i \sum_{\ell=0}^{d-1} (P^{-1} \cdot \text{diag}(w[-j])_{0 \leq j \leq d-1})^\ell P^{-i+d-1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} R_{i+1}^1 &= \gamma_\pi^{-1} F_{\Phi,i} \circ (\text{Id}_O \widehat{\otimes} \text{Fr})^* R_i^0 \circ V_i \\ &= \gamma_\pi^{-1} P (R_i^0)^{(q)} V_i \\ &= \gamma_\pi^{-1} P^{i+d} S^1 P^{-i+d-1} \end{aligned}$$

en posant

$$S^1 = \sum_{\ell=0}^{d-1} P^{-\ell} \cdot \text{diag}(v^{d-\ell}[-j])_j \cdot \sum_{\ell'=0}^{d-1} (P^{-1} \cdot \text{diag}(w[-j'])_{j'})^{\ell'}$$

( $j$  et  $j'$  parcourent  $\{0, \dots, d-1\}$ )

4<sup>ème</sup> ÉTAPE Calculons la matrice  $S^1$ .

On a

$$\begin{aligned} S^1 &= \sum_{\ell=0}^{d-1} P^{-\ell} \text{diag}(v^{d-\ell}[-j])_j^q \cdot \sum_{\ell'=0}^{d-1} P^{-\ell'} \text{diag}\left(\prod_{m=0}^{\ell'-1} w[j' + m]\right)_{j'} \\ &= \sum_{0 \leq \ell, \ell' \leq d-1} P^{-(\ell+\ell')} \text{diag}(v^{d-\ell}[-j + \ell'])_j^q \prod_{m=0}^{\ell'-1} w[-j + m]_{j'}. \end{aligned}$$

On pose

$$\Delta(\ell, \ell') = \text{diag}(v^{d-\ell}[-j + \ell'])_j^q \prod_{m=0}^{\ell'-1} w[-j + m]_j$$

lorsque  $0 \leq \ell, \ell' \leq d-1$  et

$$\Delta(\ell, \ell') = 0$$

lorsque  $(\ell, \ell') \notin \{0, \dots, d-1\}^2$ .

On a alors



$$\begin{aligned} S^1 &= \sum_{L=0}^{d-1} P^{-L} \sum_{\ell+\ell'=L} \Delta(\ell, \ell') + \sum_{L'=0}^{d-2} P^{-L'-d} \sum_{\ell+\ell'=L'+d} \Delta(\ell, \ell') \\ &= \sum_{L=0}^{d-1} P^{-L} \left( \sum_{\ell+\ell'=L} \Delta(\ell, \ell') + (\pi^{-1} \widehat{\otimes} 1) \sum_{\ell+\ell'=L+d} \Delta(\ell, \ell') \right). \end{aligned}$$

(on rappelle qu'on note  $u_\ell[j] = (1 - v^\ell[j]^{q-1})^{-1}$ ).

En utilisant les équations (II. 3.1) de  $\widehat{G}_\Phi^0$  et les relations

$$v^{d-n}[j] = \prod_{m=d-n}^{d-L-1} w[j+m+n-d] u_m[j+m+n-d] v^{d-L}[j+n-L]$$

qui en découlent (pour  $0 \leq L \leq n \leq d-1$ ), on vérifie par récurrence sur  $n$  que

$$\sum_{\ell=0}^n v^{d-\ell}[j+(L-\ell)]^q \prod_{m=0}^{(L-\ell)-1} w[j+m] = v^{d-n}[j+L-n] \prod_{m=0}^{L-n-1} w[j+m]$$

pour  $0 \leq n \leq L \leq d-1$  et que

$$\sum_{\ell=L}^n v^{d-\ell}[j+(L+d-\ell)]^q \prod_{m=0}^{(L+d-\ell)-1} w[j+m] = \pi v^{d-L}[j] \prod_{m=d-n}^{d-L-1} u_m[j+L+m]$$

pour  $0 \leq L \leq n \leq d-1$ .

Lorsque  $L = n$ , la première somme n'est autre que  $v^{d-L}[j]$ ; lorsque  $n = d-1$ , la deuxième somme n'est autre que  $\pi x_{d-L}[j]$  ( $x_{d-L}[j]$  est l'élément de  $B_{\text{univ}}$  défini dans l'énoncé (2.4.2)). Les deux sommes  $\sum_{\ell+\ell'=L} \Delta(\ell, \ell')$  et  $\sum_{\ell+\ell'=L+d} \Delta(\ell, \ell')$  figurant dans l'expression de  $S^1$  sont alors respectivement égales à

$$\text{diag}(v^{d-L}[-j])_j \text{ et } \pi \text{diag}(x_{d-L}[-j] - v^{d-L}[-j])_j.$$

On a donc

$$S^1 = \sum_{L=0}^{d-1} P^{-L} \text{diag}(v^{d-L}[-j] + \pi^{-1} \widehat{\otimes} \pi(x_{d-L}[-j] - v^{d-L}[-j]))_j.$$

5<sup>ème</sup> ÉTAPE On va achever le calcul de  $A_i^1$ , et à partir de là la preuve de la proposition (2.4.2).

Le morphisme  $R_{i+1}^1$  est

$$(\pi \otimes 1) \gamma_\pi^{-1} \sum_{L=0}^{d-1} P^{-L+d-1} \text{diag}(v^{d-L}[i+1-j] + \pi^{-1} \otimes \pi(x_{d-L}[i+1-j] - v^{d-L}[i+1-j]))_j$$

Le morphisme  $A_i^1$  est alors

$$\sum_{L'=0}^{d-1} P^{-L'} \text{diag}(x_{L'+1}[-j])_{0 \leq j \leq d-1}$$

(en posant  $L' = d - 1 - L$ ).

On rappelle (cf. la preuve ci-dessus du deuxième point) qu'on a identifié  $\omega_i$  à  $B_{\text{univ}}$  à l'aide du vecteur  $\varepsilon'_0[i+1]$ . L'image de ce vecteur par  $A_i^1$  est la première colonne

$$\begin{pmatrix} x^1[i+1] \\ \vdots \\ x^d[i+1] \end{pmatrix}$$

de la matrice  $A_i^1$ . Le dual  $\alpha_i^1 \otimes B_{\text{univ}}$  du morphisme  $A_{-i}^1$  a donc pour matrice

$$(x_1[-i+1], \dots, x_d[-i+1]).$$

Ceci achève la preuve du premier point.  $\square$

*Preuve du lemme (2.4.3) :*

Pour tout  $q \geq 2$ , on a  $q^2 - 3 \geq q - 1$ . Il suffit donc de prouver que  $A_i^2 \equiv A_i^1(\pi^{q-1})$ , d'après les congruences  $A_i^n \equiv A_i(\pi^{q^n - n - 1})$  obtenues plus haut.

Remarquons d'abord que

$$R_i^1 - R_i^0 = \gamma_\pi^{-1}(1 \otimes \pi) P^{i+d-1} \sum_{\ell=0}^{d-1} P^{-\ell} \cdot \text{diag}(x_{d-\ell}[-j])_j P^{-i}$$

(où  $j$  parcourt  $\{0, \dots, d-1\}$ ).

Le calcul qu'on va maintenant faire est analogue à celui de  $R_{i+1}^1$  (étapes 3 et 4).

On a

$$\begin{aligned} R_{i+1}^2 - R_{i+1}^1 &= \gamma_\pi^{-1} \circ F_{\Phi, i} \circ (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^*(R_i^1 - R_i^0) \circ V_i \\ &= \gamma_\pi^{-1} \gamma_\pi^{-(q)} (1 \otimes \pi^q) P^{i+d} T P^{-i+d-1} \end{aligned}$$

en posant

$$T = \sum_{\ell=0}^{d-1} P^{-\ell} \text{diag}(x_{d-L}[-j])_j \sum_{\ell'=0}^{d-1} (P^{-1} \text{diag}(w[-j'])_{j'})^{\ell'}$$

( $j$  et  $j'$  parcourent  $\{0, \dots, d-1\}$ ).

On pose

$$\Delta'(\ell, \ell') = \text{diag}(x_{d-L}[-j + \ell']^q \prod_{m=0}^{\ell'-1} w[-j + m])_{0 \leq j \leq d-1}$$

lorsque  $0 \leq \ell, \ell' \leq d-1$  et

$$\Delta'(\ell, \ell') = 0$$

lorsque  $(\ell, \ell') \notin \{0, \dots, d-1\}^2$ .

On a alors

$$T = \sum_{L=0}^{d-1} P^{-L} \left( \sum_{\ell+\ell'=L} \Delta'(\ell, \ell') + (\pi^{-1} \widehat{\otimes} 1) \sum_{\ell+\ell'=L+d} \Delta'(\ell, \ell') \right).$$

Soient  $0 \leq \ell, \ell', L \leq d-1$  tels que  $\ell + \ell' = L + d$ . On va montrer que la matrice diagonale  $\Delta'(\ell, \ell')$  est à coefficients dans  $\pi B_{\text{univ}}$ .

Il résulte des égalités

$$\begin{aligned} v^{d-\ell}[j + \ell'] &= \prod_{m=d-\ell}^{d-L-1} w[j + m + L] u_m[j + m + L] v^{d-L}[j] \\ &= \prod_{m'=\ell'}^{d-1} w[j + m'] u_{m'-L}[j + m'] v^{d-L}[j] \end{aligned}$$

(cf. calcul de  $R_{i+1}^1$ ) que

$$v^{d-\ell}[j + \ell'] \prod_{m=0}^{\ell'-1} w[j + m] \in \pi v^{d-L}[j] B_{\text{univ}} \subset \pi B_{\text{univ}}.$$

Il résulte de la définition des  $x_{d-\ell}[j]$  que

$$x_{d-\ell}[j + \ell'] \in v^{d-\ell}[j + \ell'] B_{\text{univ}}.$$

On a donc

$$x_{d-\ell}[-j + \ell']^q \prod_{m=0}^{\ell'-1} w[j + m] \in \pi B_{\text{univ}},$$

d'où la propriété de  $\Delta'(\ell, \ell')$  qu'on a annoncée.

La matrice  $P^{i+d} T P^{-i+d-1}$  est donc de la forme

$$(\pi \widehat{\otimes} 1) \mathcal{T}_{i,1} + (1 \widehat{\otimes} \pi) \mathcal{T}_{i,2}$$

où  $\mathcal{T}_{i,1}$  et  $\mathcal{T}_{i,2}$  sont des matrices à coefficients dans  $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B_{\text{univ}}$ .

On a alors

$$\begin{aligned} A_i^2 - A_i^1 &= \pi^{-1} [\gamma_\pi(R_{i+1}^2 - R_{i+1}^1)](\pi) \\ &= \pi^{-1} (\pi - \pi^q)^{-1} \pi^q [(\pi \widehat{\otimes} 1) \mathcal{T}_{i,1} + (1 \widehat{\otimes} \pi) \mathcal{T}_{i,2}](\pi) \\ &= \pi^{q-1} (1 - \pi^{q-1})^{-1} (\mathcal{T}_{i,1}(\pi) + \mathcal{T}_{i,2}(\pi)) \end{aligned}$$

Les matrices  $\mathcal{T}_{i,1}(\pi)$  et  $\mathcal{T}_{i,2}(\pi)$  sont à coefficients dans  $B_{\text{univ}}$ , ce qui achève la preuve du lemme (2.4.3).  $\square$

*Remarque :* Lorsque  $q \geq 3$ , la congruence  $A_i^1 \equiv A_i(\pi)$  est déjà conséquence de la congruence  $A_i^1 \equiv A_i(\pi^{q-2})$ , de sorte qu'on peut dans ce cas se passer du lemme (2.4.3).  $\square$

2.4.4. — Fin de la preuve de la proposition (2.1.3)

Considérons maintenant un sous-simplexe

$$\Delta = (\Phi_{i_j}^\vee)_{j \in \mathbb{Z}} \quad (\text{cf. (II. 4.2)})$$

du simplexe maximal  $\Phi^\vee$ .

On rappelle (cf. (1.3)) que l'immersion ouverte

$$(1.2) \quad \hat{\Omega}_\Delta^0 \hookrightarrow \hat{\Omega}_{\Phi^\vee}^0$$

a pour image le sous-schéma formel ouvert de  $\hat{\Omega}_{\Phi^\vee}^0$  complémentaire des fermés le long desquels les morphismes

$$\Pi : \mathcal{L}_i \longrightarrow \mathcal{L}_{i+1} \quad (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \{i_j, j \in \mathbb{Z}\})$$

s'annulent.

On rappelle aussi qu'on note  $\Omega_\Delta^0$  et  $G_{\Delta^\vee}^0$  (cf. (1.2) et (II. 4)) les fibres spéciales respectives de  $\hat{\Omega}_\Delta^0$  et  $\hat{G}_{\Delta^\vee}^0$ .

On note  $(M_\bullet)$  l'objet universel sur  $\hat{G}_{\Delta^\vee}^0$ .

Compte tenu des réductions déjà faites, il reste à prouver que

$$\xi'_{\Delta,0}(M_\bullet) \in \Omega_\Delta^0(G_{\Delta^\vee}^0),$$

ou encore, ce qui revient au même en identifiant cette fois  $\Omega_\Delta^0$  à son image dans  $\Omega_{\Phi^\vee}^0$ , que

$$\xi'_{\Phi^\vee,0}(M_\bullet) \in \Omega_\Delta^0(G_{\Delta^\vee}^0) \subset \Omega_{\Phi^\vee}^0(G_{\Delta^\vee}^0).$$

Lorsque  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \{i_j, j \in \mathbb{Z}\}$ , les morphismes (2.4.2 (2))

$$\Pi_i : \mathcal{L}_i \longrightarrow \mathcal{L}_{i+1}$$

sont inversibles au-dessus de l'ouvert  $G_{\Delta^\vee}^0$  de  $G_{\Phi^\vee}^0$  (cf. (II. 4)). Ceci ramène finalement la preuve à celle du cas particulier de l'assertion ci-dessus où  $\Delta = \Phi^\vee$ .

On va maintenant faire cette preuve.

On rappelle (cf. (1.3)) qu'on a défini un sous-schéma formel ouvert  $\hat{H}_{\Phi^\vee}^0$  de  $\hat{H}_{\Phi^\vee}$  et que

$$\bigcap_{g \in {}^t\mathcal{B}^\times} g \cdot \hat{H}_{\Phi^\vee}^0 = \hat{\Omega}_{\Phi^\vee}^0$$

(le groupe  ${}^t\mathcal{B}^\times$  est le fixateur du simplexe  $\Phi^\vee$ ).

Considérons le diagramme  $\xi'_{\Phi^\vee,0}$  calculé dans la proposition (2.4.2). L'élément  $\alpha_i({}^tP^{-i}e_d)$  engendre  $\mathcal{O}_{G_\Phi^0}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , et ce diagramme appartient donc à  $\hat{H}_{\Phi^\vee}^0(G_\Phi^0)$ . Compte tenu de la propriété d'équivariance (2.4.1 (2)), on a donc

$$\xi'_{\Phi^\vee,0}(M_\bullet) \in \Omega_{\Phi^\vee}^0(G_\Phi^0).$$

Ceci achève la preuve de la proposition (2.1.3).  $\square$

*Remarques :*

1. On rappelle qu'on a plongé la fibre spéciale  $G_{\Phi}^0$  de  $\widehat{G}_{\Phi}^0$  dans un espace affine de coordonnées  $v^j[i]$  ( $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ,  $1 \leq j \leq d-1$ ) (cf. (II. 2.7.1)) et la fibre spéciale  $\Omega_{\Phi^{\vee}}^0$  de  $\widehat{\Omega}_{\Phi^{\vee}}^0$  dans un espace affine de coordonnées  $c_i$  ( $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ).  
Il résulte de (2.4.2) que la fibre spéciale  $\xi'_{\Phi^{\vee},0}$  de  $\xi'_{\Phi^{\vee}}$  est décrite dans ces coordonnées par les formules

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{x_{d-1}[-i]}{x_d[-i]} \\ &= v^{d-1}[-i] \frac{\prod_{1 \leq j \leq d-1} 1 - v^j \quad [-i - d + j]^{q-1}}{\prod_{2 \leq j \leq d-1} 1 - v^{j-1}[-i - d + j]^{q-1}} \quad (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

2. Considérons le diagramme  $\xi'_{\Phi^{\vee}}(M_{\bullet})$  ( $n \geq 1$ ) défini par les approximations  $A_i^n$  de  $A_i$  rencontrées dans la preuve de (2.4.2).  
Ce diagramme est calculable (si on fixe une valeur de  $n$ , on peut calculer explicitement  $\xi'_{\Phi^{\vee}}(M_{\bullet})$ ).  
Il est congru à  $\xi'_{\Phi^{\vee}}(M_{\bullet})$  modulo  $(\pi^{q^n - n - 1})$  (et en fait modulo  $(\pi^{q^n - n})$  : raisonner comme dans la preuve de (2.4.3)). En particulier, le diagramme  $\xi'_{\Phi^{\vee}}(M_{\bullet})$  a même fibre spéciale que  $\xi'_{\Phi^{\vee}}(M_{\bullet})$ , et appartient donc à  $\widehat{\Omega}_{\Phi^{\vee}}(\widehat{G}_{\Phi^{\vee}}^0)$ .  
Le diagramme  $\xi'_{\Phi^{\vee}}(M_{\bullet})$  détermine alors un morphisme (calculable)

$$\xi'_{\Phi^{\vee}} : \widehat{G}_{\Phi}^0 \longrightarrow \widehat{\Omega}_{\Phi^{\vee}}^0$$

congru à  $\xi'_{\Phi^{\vee}}$  modulo  $(\pi^{q^n - n})$ .

Il résultera des arguments du paragraphe 3 que le morphisme  $\xi'_{\Phi^{\vee}}$  est lui aussi un isomorphisme. Il n'a cependant pas les propriétés de  $({}^t\mathcal{B})^{\times}$ -équivariance du morphisme  $\xi'_{\Phi^{\vee}}$ .

### 3 Le morphisme $\xi'$ est un isomorphisme

3.1. — Le théorème suivant entraîne que  $\xi'$  est un isomorphisme.

**Théorème 3.1.1.** — *Pour tout simplexe  $\Delta$  de l'immeuble de Bruhat-Tits de  $PGL_d(K)$ , le morphisme*

$$\xi'_{\Delta} : \widehat{G}_{\Delta^{\vee}}^0 \longrightarrow \widehat{\Omega}_{\Delta}^0$$

*est un isomorphisme.*

Le reste du paragraphe 3 sera consacré à la preuve de ce théorème.

3.1.2. — On va montrer que la preuve du théorème se réduit à celle du cas particulier où  $\Delta = \Phi^{\vee}$  (on a déjà utilisé en (2.4) une réduction analogue pour prouver la proposition (2.1.3)).

Grâce à la  $PGL_d(K)$ -équivariance (2.1.3) du morphisme de systèmes inductifs  $(\xi'_{\Delta})_{\Delta \in |BT|}$  et au fait que  $PGL_d(K)$  agit transitivement sur l'ensemble des simplexes

maximaux de l'immeuble, il suffit de prouver le cas particulier de (3.1.1) où l'on suppose  $\Delta \subset \Phi^\vee$ . On notera  $\Delta = (\Phi_{i_j}^\vee)_{j \in \mathbb{Z}}$  (cf. (II. 4.2)) un tel simplexe.

On rappelle (cf. (II. 2.7.1) et (II. 2.3.1)) que la fibre spéciale  $G_\Phi^0$  de  $\widehat{G}_\Phi^0$  est réunion des composantes irréductibles  $G_i^0 = G_\Phi^0 \cap G_{\Phi_i}$  ( $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ), d'équations respectives  $v^{d-1}[i] = 0$ . Il résulte de (II. 4) que le sous-schéma formel ouvert  $\widehat{G}_{\Delta^\vee}^0$  de  $\widehat{G}_\Phi^0$  est le complémentaire du sous-schéma fermé

$$\bigcup_i G_i^0$$

où  $i$  parcourt  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \{-i_j, j \in \mathbb{Z}\}$ .

De manière analogue, il résulte de (1.3) que la fibre spéciale  $\Omega_{\Phi^\vee}^0$  de  $\widehat{\Omega}_{\Phi^\vee}^0$  est réunion de ses sous schémas fermés irréductibles  $\Omega_i^0$  définis par les conditions  $(\Pi_i = 0)$ , et que  $\widehat{\Omega}_\Delta^0$  est le complémentaire du sous-schéma fermé

$$\bigcup_i \Omega_i^0$$

où  $i$  parcourt  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \{i_j, j \in \mathbb{Z}\}$ .

*Remarque :* Il ne faut pas confondre le schéma  $\Omega_i^0$  ci-dessus avec les schémas  $\Omega_{(i)}^0$  introduits dans la remarque qui suit la définition (1.2.2).

Il résulte de (2.4.2) que l'image réciproque par le morphisme  $\xi'_{\Phi^\vee}$  du sous-schéma fermé  $\Omega_i^0$  de  $\Omega_{\Phi^\vee}^0$  est  $G_{-i}^0$ . L'image réciproque par ce morphisme du sous-schéma formel ouvert  $\widehat{\Omega}_\Delta^0$  est alors  $\widehat{G}_{\Delta^\vee}^0$ . Compte tenu de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G}_{\Delta^\vee}^0 & \xrightarrow{\xi'_\Delta} & \widehat{\Omega}_\Delta^0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{G}_\Phi^0 & \xrightarrow{\xi'_{\Phi^\vee}} & \widehat{\Omega}_{\Phi^\vee}^0 \end{array}$$

(cf. (2.1.3) (2)), ceci achève la réduction.

3.1.3. — On va maintenant indiquer les étapes de la suite de la preuve :

1<sup>ère</sup> ÉTAPE : (3.2) On démontre que la fibre spéciale

$$\xi'_{\Phi^\vee, 0} : G_\Phi^0 \longrightarrow \Omega_{\Phi^\vee}^0$$

du morphisme  $\xi'_{\Phi^\vee}$  est un isomorphisme.

Pour ceci, le point crucial est de vérifier que les morphismes

$$\xi'_i : G_{-i}^0 \longrightarrow \Omega_i^0$$

induits par  $\xi'_{\Phi^\vee, 0}$  sont des isomorphismes.

On en déduira ensuite que  $\xi'_{\Phi^\vee,0}$  est un isomorphisme en remarquant que si les composantes irréductibles d'un schéma  $S$  sont lisses et si  $S$  est localement pour la topologie étale isomorphe à une réunion d'hyperplans de coordonnées (c'est le cas de  $G_\Phi^0$  et  $\Omega_{\Phi^\vee}^0$ ),  $S$  peut être vu comme le "recollément" de ses composantes irréductibles le long de leurs intersections deux à deux (pour plus de précision, cf. lemme (3.2.4)).

2<sup>ème</sup> ÉTAPE : (3.3) Rappelons que le  $\mathcal{O}$ -schéma formel  $\widehat{G}_\Phi^0$  est plat. Il résultera alors d'un lemme de Mumford ([Mul], Lemma 4.18) et de la première étape que  $\xi'_{\Phi^\vee}$  est un isomorphisme. Pour la commodité du lecteur, on donnera une démonstration de ce lemme.

3.2. — Rappelons que le schéma  $G_i^0$  est un sous-schéma ouvert du schéma  $G_{\Phi_i}$  (II. 1) et que ce dernier est obtenu en éclatant un espace projectif  $\mathbb{P}(\Phi_i^\vee/\pi\Phi_i^\vee)$  (II. 1.6).

De même, le schéma  $\Omega_{\Phi^\vee}^0$  est un ouvert de la fibre spéciale  $H_{\Phi^\vee,0}$  de  $H_{\Phi^\vee}$  (cf. (1.1)) et les composantes irréductibles  $H_{\Phi^\vee,(i)}$  de  $H_{\Phi^\vee,0}$  (dont les  $\Omega_i^0$  sont des ouverts) sont obtenues en éclatant des espaces projectifs  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$ .

Pour vérifier que  $\xi'_i$  est un isomorphisme, on utilisera la proposition suivante

**Proposition 3.2.1.** — 1) *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} G_{-i}^0 & \xrightarrow{\xi'_i} & \Omega_i^0 \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee) & \end{array}$$

*est commutatif.*

2) *Il existe un morphisme*

$$\chi_i : \Omega_i^0 \longrightarrow G_{-i}^0$$

*rendant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_i^0 & \xrightarrow{\chi_i} & G_{-i}^0 \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee) & \end{array}$$

*commutatif.*

(dans les deux diagrammes ci-dessus, les flèches obliques sont induites par les éclatements).

Avant de démontrer cette proposition, on va en déduire que  $\xi'_i$  est un isomorphisme.

Considérons le morphisme composé

$$\chi_i \circ \xi'_i : G_{-i}^0 \longrightarrow G_{-i}^0.$$

Il existe un ouvert dense de  $G_{-i}^0$  qui s'envoie isomorphiquement sur son image dans  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$ . Sur cet ouvert  $\chi_i \circ \xi'_i$  est nécessairement l'identité et  $\chi_i \circ \xi'_i$  est donc en fait l'identité sur  $G_{-i}^0$ . On raisonne de même avec le morphisme composé  $\xi'_i \circ \chi_i$ ; les deux morphismes  $\xi'_i$  et  $\chi_i$  sont donc des isomorphismes.

*Preuve de la proposition 3.2.1 :*

Démontrons d'abord le premier point.

Soit  $B$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre dans laquelle l'image de  $\pi$  est nulle.

On rappelle (cf. (II. 1.5) et (II. 1.6)) que le morphisme

$$G_{\Phi_i} \longrightarrow \mathbb{P}(\Phi_i^\vee/\pi\Phi_i^\vee)$$

associe à  $(M_\bullet) \in G_{\Phi_i}(B)$  le  $B$ -module

$$M_{i+1}/(\Phi_i \widehat{\otimes} B) \in \text{Grass}(1, \pi^{-1}\Phi_i/\Phi_i)(B).$$

Il résulte alors de (II. 2.7.1) que ce morphisme associe à un point de  $G_i^0$  de coordonnées  $(v^j[\ell])$  ( $1 \leq j \leq d-1$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ) le point de  $\mathbb{P}(\Phi_i^\vee/\pi\Phi_i^\vee)$  de coordonnées homogènes

$$(v^1[i+1], \dots, v^{d-1}[i+1], 1).$$

Il résulte de (1.1) et du fait que  $H_{\Phi^\vee, (i)}$  est le transformé strict de  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$  dans  $H_{\Phi^\vee}$  que le morphisme

$$H_{\Phi^\vee, (i)} \longrightarrow \mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$$

associe à  $(\Phi_\bullet^\vee \longrightarrow \mathcal{L}) \in H_{\Phi^\vee, (i)}(B)$  le quotient

$$(\alpha_i \otimes B : \Phi_{-i}^\vee \otimes_{\mathcal{O}} B \longrightarrow \mathcal{L}_i) \in \mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)(B).$$

La commutativité du diagramme (3.2.1 (1)) résulte alors de (2.4.2) et du lemme suivant

**Lemme 3.2.2.** — *Le long de  $G_{-i}^0$ , on a les égalités*

$$x_j[-i+1] = v^j[-i+1] \quad (1 \leq j \leq d-1)$$

*Preuve :* Le long de  $G_{-i}^0$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} v^1[-i] & v^1[-i-1] & \cdots & v^1[-i-d+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & v^{d-2}[-i-1] & & \\ v^{d-1}[-i] & & & \end{pmatrix}$$

s'annule (cf. (II. 2.7.1)). Les termes  $u_{j-n}[-i+1-n]$  ( $j-n \geq 1$ ,  $n \geq 1$ ) figurant dans l'expression (2.4.2) de  $x_j[-i+1]$  sont donc tous égaux à 1.  $\square$



On va maintenant démontrer le deuxième point.

Il résulte de (1.3) que  $H_{\Phi^\vee, (i)}$  est le transformé strict de  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$  dans  $H_{\Phi^\vee}$  (cf. (1.1)). Le schéma  $H_{\Phi^\vee, (i)}$  est donc obtenu en éclatant  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$  le long de  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\Phi_{-i+1}^\vee)$ , puis le long du transformé strict de  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\Phi_{-i+2}^\vee), \dots$ , puis le long du transformé strict de  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\Phi_{-i+d-2}^\vee)$ .

Soit  $n$  un entier positif inférieur à  $d-1$ . On note  $P_n = \mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\Phi_{-i+n+1}^\vee)$  et  $H_i^{(n)}$  le schéma obtenu en éclatant  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$  le long de  $P_0, \dots$ , puis le long du transformé strict de  $P_{n-2}$ .

Il résulte encore de (1.3) que  $\Omega_i^0$  est le complémentaire dans  $H_{\Phi^\vee, (i)} = H_i^{(d-1)}$  du fermé  $Y$  suivant. Lorsque  $0 \leq n \leq d-2$  et lorsque  $P \subset \mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$  est un hyperplan rationnel contenant  $P_{n-1}$ , mais pas  $P_n$  (on pose  $P_{-1} = \emptyset$ ), on note  $\tilde{P}_H$  l'image réciproque dans  $H_i^{(d-1)}$  du transformé strict de  $P$  dans  $H_i^{(n+1)}$ . Le fermé  $Y$  est alors

$$\bigcup_P \tilde{P}_H$$

où  $P$  parcourt l'ensemble des hyperplans rationnels de  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$  différents de  $P_{d-1}$ .

Le schéma  $\Omega_i^0$  est aussi obtenu de la manière suivante. Notons  $\Omega_i^{(1),0}$  le complémentaire dans  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$  de la réunion des hyperplans rationnels ne passant pas par  $P_0$ . En éclatant ce schéma le long de  $P_0$ , puis en prenant l'ouvert complémentaire de la réunion des transformés stricts des hyperplans rationnels passant par  $P_0$  mais ne contenant pas  $P_1$ , on obtient un sous-schéma ouvert  $\Omega_i^{(2),0}$  de  $H_i^{(2)}$ . On éclate ensuite  $\Omega_i^{(2),0}$  le long du transformé strict de  $P_1$ , et on prive le schéma obtenu des transformés stricts des hyperplans rationnels contenant  $P_1$  mais pas  $P_2$ . Ceci définit un ouvert  $\Omega_i^{(3),0}$  de  $H_i^{(3)}$ . En répétant le processus, on définit pour tout  $n \leq d-1$  un sous-schéma ouvert  $\Omega_i^{(n),0}$  de  $H_i^{(n)}$ . L'ouvert  $\Omega_i^{(d-1),0}$  n'est autre que  $\Omega_i^0$ .

Lorsque  $1 \leq n \leq d-1$ , on note de même  $G_i^{(n)}$  le schéma obtenu en éclatant  $\mathbb{P}(\Phi_i^\vee/\pi\Phi_i^\vee)$  le long de ses points rationnels, puis des transformés stricts de ses droites rationnelles,  $\dots$ , puis des transformés stricts de ses sous-espaces rationnels de dimension  $n-2$  (de sorte que  $G_i^{(1)} = \mathbb{P}(\Phi_i^\vee/\pi\Phi_i^\vee)$  et  $G_i^{(d-1)} = G_{\Phi_i}$  (cf. (II. 1.6));  $G_i^{(n)}$  n'est autre que le schéma noté  $\tilde{P}_n(\Phi_i^\vee/\pi\Phi_i^\vee)$  dans (II. 1)).

Il résulte de la définition (II. 2.1) de  $G_{\Phi}^0$  et de la remarque à la fin de (II. 1) que  $G_i^0$  est le complémentaire dans  $G_{\Phi_i}$  du fermé  $Z$  suivant. Lorsque  $P \subset \mathbb{P}(\Phi_i^\vee/\pi\Phi_i^\vee)$  est un sous-espace rationnel de dimension  $n$ , on note  $\tilde{P}_G$  l'image réciproque dans  $G_{\Phi_i} = G_i^{(d-1)}$  du transformé strict de  $P$  dans  $G_i^{(n-1)}$ . Le fermé  $Z$  est alors

$$\bigcup_n \bigcup_P \tilde{P}_G$$

où  $n$  est compris entre 0 et  $d-2$  et  $P$  parcourt l'ensemble des sous-espaces rationnels de dimension  $n$  de  $\mathbb{P}(\Phi_i^\vee/\pi\Phi_i^\vee)$  différents de  $P_n$  (on rappelle qu'on note  $P_n = \mathbb{P}(\Phi_i^\vee/\Phi_{i+n}^\vee)$ ).

Le schéma  $G_i^0$  est donc aussi obtenu de la manière suivante. Notons  $G_i^{(1),0}$  le complémentaire dans  $\mathbb{P}(\Phi_i^\vee/\pi\Phi_i^\vee)$  de la réunion des points rationnels différents de  $P_0$ . En éclatant ce schéma le long de  $P_0$ , puis en prenant l'ouvert complémentaire de la réunion des transformés stricts de droites rationnelles différentes de  $P_1$ , on obtient un schéma  $G_i^{(2),0}$ , qui est à la fois un sous-schéma ouvert de  $G_i^{(2)}$  et de  $H_{-i}^{(2)}$ . On éclate ensuite  $G_i^{(2),0}$  le long du transformé strict de  $P_1$ , et on prive le schéma obtenu des transformés stricts des plans rationnels différents de  $P_2$ . Ceci définit un schéma  $G_i^{(3),0}$ , qui est à la fois un sous-schéma ouvert de  $G_i^{(3)}$  et de  $H_{-i}^{(3)}$ . En répétant le processus, on définit pour tout  $n \leq d-1$  un schéma  $G_i^{(n),0}$ , qui est à la fois un sous-schéma ouvert de  $G_i^{(n)}$  et de  $H_{-i}^{(n)}$ .

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & G_{-i}^{(n),0} & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 G_{-i}^{(n)} & & H_i^{(n)} \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & \mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee) &
 \end{array}$$

(où les deux flèches supérieures sont induites par les inclusions) est commutatif. La deuxième partie de la proposition résulte donc du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur.

**Lemme 3.2.3.** — *Pour tout  $0 \leq n \leq d-2$  et pour tout sous-espace projectif rationnel  $P$  de  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$  différent de  $P_n$ , il existe un hyperplan rationnel  $Q$  de  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$  contenant  $P$  et ne contenant pas  $P_n$ . En particulier, on a l'inclusion*

$$\Omega_i^{(n),0} \subset G_{-i}^{(n),0}$$

dans  $H_i^{(n)}$ .  $\square$

*Remarques :* 1) Considérons l'ouvert complémentaire de la réunion des hyperplans rationnels dans  $\mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$  (cet ouvert, déjà rencontré dans (II. 1), est la variété de Deligne-Lusztig associée à l'élément de Coxeter  $w = (1, \dots, d)$  [D-L] (2.2)).

Au-dessus de cet ouvert, les morphismes

$$\Omega_i^0 \longrightarrow \mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$$

et

$$G_{-i}^0 \longrightarrow \mathbb{P}(\Phi_{-i}^\vee/\pi\Phi_{-i}^\vee)$$

sont des isomorphismes.

2) Lorsque  $n \leq d - 2$ , l'immersion ouverte

$$\chi_i^{(n)} : \Omega_i^{(n),0} \hookrightarrow G_{-i}^{(n),0}$$

introduite dans la preuve ci-dessus est stricte.

3) On pourrait montrer directement (sans utiliser  $\xi'_i$ ) que l'inclusion  $\Omega_i^0 \subset G_{-i}^0$  qui donne naissance au morphisme  $\chi_i$  est une égalité.

On va maintenant démontrer que  $\xi'_{\Phi^\vee,0}$  est un isomorphisme.

Il résulte de (2.4.2) que l'image réciproque par  $\xi'_{\Phi^\vee,0}$  de  $\Omega_i^0$  est  $G_{-i}^0$ . Pour toute paire  $\{i, j\} \subset \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  ( $i \neq j$ ), l'image réciproque par  $\xi'_{\Phi^\vee,0}$  de  $\Omega_{i,j}^0 = \Omega_i^0 \cap \Omega_j^0$  est donc  $G_{-i,-j}^0 = G_{-i}^0 \cap G_{-j}^0$ , et il résulte de (3.2.1) que le morphisme

$$\xi'_{ij} : G_{-i,-j}^0 \longrightarrow \Omega_{i,j}^0$$

est un isomorphisme.

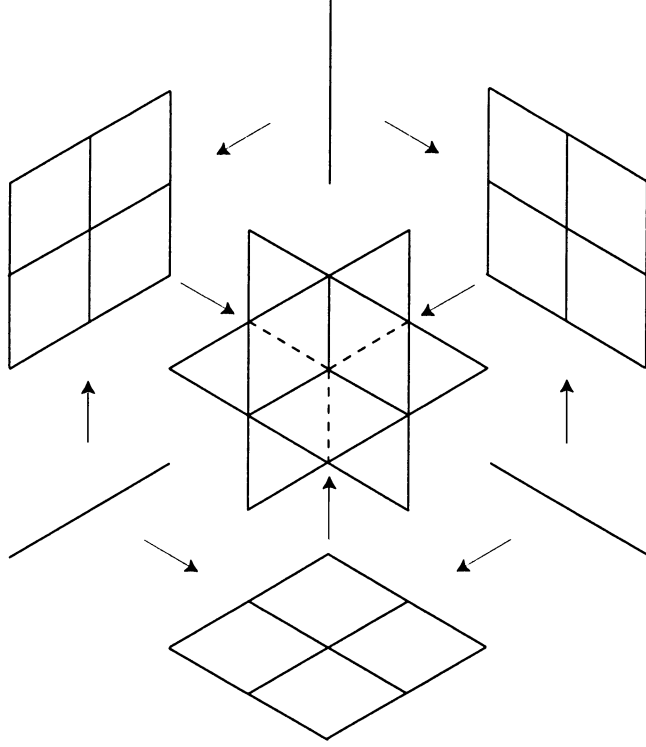
On conclut alors que  $\xi'_{\Phi^\vee,0}$  est un isomorphisme grâce au lemme suivant :

**Lemme 3.2.4.** — Soient  $k$  un corps et  $S$  un  $k$ -schéma de type fini. On suppose que les composantes irréductibles,  $S_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), de  $S$  sont lisses et que  $S$  est localement pour la topologie étale isomorphe à une réunion d'hyperplans de coordonnées dans un espace affine sur  $k$ .

Le schéma  $S$  est alors somme amalgamée des schémas  $S_h$  le long des immersions fermées

$$S_i \hookleftarrow S_{ij} \hookrightarrow S_j$$

( $1 \leq h, i, j \leq n$ ) (on note comme ci-dessus  $S_{ij} = S_i \cap S_j$ ).



*Preuve :* soit un entier  $r$ . On munit l'espace affine  $\mathbb{A}_k^{r+1}$  de coordonnées  $x_i$  ( $1 \leq i \leq r+1$ ). On note  $\mathcal{S}$  le sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}_k^{r+1}$  d'équation  $\prod_{1 \leq i \leq r+1} x_i = 0$  et  $\mathcal{S}_i$

( $1 \leq i \leq r+1$ ) la composante irréductible de  $\mathcal{S}$  d'équation  $x_i = 0$ .

Soient  $U \rightarrow S$  et  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  deux ouverts étales et  $U \rightarrow \mathcal{U}$  un  $k$ -isomorphisme. Les composantes irréductibles de  $S$  et de  $\mathcal{S}$  sont unibranches. Il existe donc une partie  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$  telle que les composantes irréductibles de  $U$  soient les  $U_i = U \times_S \mathcal{S}_i$  ( $i \in I$ ) et une injection  $\sigma$  de  $I$  dans  $\{1, \dots, r+1\}$  telle que  $U \rightarrow \mathcal{U}$  envoie  $U_i$  sur  $\mathcal{U}_{\sigma(i)} = \mathcal{U} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_{\sigma(i)}$ .

On laisse au lecteur le soin de vérifier que  $\mathcal{S}$  est somme amalgamée des  $\mathcal{S}_h$  le long des  $\mathcal{S}_{i,j}$  ( $1 \leq h, i, j \leq r+1$ ).

On a donc :

$$\mathcal{U} = \coprod_{U_{i,j}} \mathcal{U}_h \quad (h, i, j \in \sigma(I))$$

ou, ce qui revient au même

$$U = \coprod_{U_{i,j}} U_k \quad (h, i, j \in I)$$

Ceci achève la preuve en remarquant que la propriété d'être somme amalgamée se vérifie localement pour la topologie étale sur le but  $S$ .  $\square$

3.3. — On rappelle que le  $\mathcal{O}$ -schéma formel  $G_{\Phi, \mathcal{V}}^0$  est plat (cf. (II. 3.1) et (II. 3.3.1)). Le théorème (3.1.1) résulte alors du fait que  $\xi'_{\Phi, \mathcal{V}, 0}$  est un isomorphisme (cf. (3.2)) et du lemme suivant :

**Lemme 3.3.1.** (cf. [Mu1], Lemma (4.18)). — Soient  $\mathcal{V}$  un anneau local d'idéal maximal  $\mathfrak{M}$ , complet pour la topologie  $\mathfrak{M}$ -adique, et

$$f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$$

un morphisme de  $\mathcal{V}$ -schémas formels.

On suppose que les  $\mathcal{V}$ -schémas formels  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  sont  $\mathfrak{M}$ -adiques (i.e. que les idéaux  $\mathfrak{M} \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  et  $\mathfrak{M} \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$  sont respectivement des idéaux de définition pour  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ ) et que le  $\mathcal{V}$ -schéma formel  $\mathcal{X}$  est plat.

Si la fibre spéciale

$$f_0 : \mathcal{X}_0 \longrightarrow \mathcal{Y}_0$$

du morphisme  $f$  est un isomorphisme,  $f$  est un isomorphisme.

*Preuve :* les schémas formels  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  ont le même espace topologique sous-jacent,  $Z$ . On est donc ramené pour démontrer le lemme à prouver que lorsque  $P$  est un point de  $Z$ , le morphisme de  $\mathcal{V}$ -algèbres topologiques.

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, P} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}, P}$$

est un isomorphisme.

Il résulte du fait que

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_0, P} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0, P} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}, P} / \mathfrak{M} \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{X}, P}$$

est un isomorphisme et de ([Bo], A.C. Ch. II § 3 n° 2 prop. 4) que le morphisme

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, P} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}, P}$$

est surjectif.

Soit  $N$  le noyau de ce morphisme. Il résulte de la platitude (topologique) de la  $\mathcal{V}$ -algèbre topologique  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, P}$  que la suite

$$0 \longrightarrow N \widehat{\otimes}_{\mathcal{V}} \mathcal{V} / \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_0, P} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0, P} \longrightarrow 0$$

est exacte. On a donc  $N \widehat{\otimes}_{\mathcal{V}} \mathcal{V} / \mathfrak{M} = 0$  ou ce qui revient au même,  $\overline{\mathfrak{M} \cdot N} = N$  (on note  $\overline{\mathfrak{M} \cdot N}$  la fermeture topologique de  $\mathfrak{M} \cdot N$  dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, P}$ ). On a alors pour tout  $n \geq 0$

$$N = \overline{\mathfrak{M}^n N} \subset \mathfrak{M}^n \mathcal{O}_{\mathcal{Y}, P}$$

et donc  $N = 0$ . Le morphisme de  $\mathcal{V}$ -algèbres

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y},P} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X},P}$$

est donc un isomorphisme.

Les topologies sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{X},P}$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},P}$  sont respectivement définies par les idéaux  $\mathfrak{M} \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{X},P}$  et  $\mathfrak{M} \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{Y},P}$ , et cet isomorphisme est donc un isomorphisme topologique.  $\square$

3.4. — *Remarques* : 1) On rappelle qu'on note  $\mathcal{O}_d$  l'anneau des entiers de l'extension finie non ramifiée de degré  $d$ ,  $K_d$ , de  $K$  (cf. (I. 4) et l'introduction de ce chapitre).

Considérons le morphisme

$$\xi: G \longrightarrow \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$$

construit par Drinfeld [D1] (cf. aussi [B-C] pour  $d = 2$  et dans le contexte, différent du nôtre, où l'anneau  $\mathcal{O}$  est supposé d'inégale caractéristique).

Ce morphisme n'est autre que le morphisme

$$\xi' \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d: G \longleftarrow G_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d \longrightarrow \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d.$$

Les grandes lignes de la vérification de ce fait sont les suivantes.

Soit  $U_i$  l'ouvert de  $G_i^0$  introduit dans la remarque suivante (3.2.3). En adaptant la proposition ([B-C] II. 4.8) au contexte envisagé ici (cf. ci-dessus), on peut obtenir un calcul explicite de la restriction de  $\xi$  à  $U_i \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^d}$ . En utilisant la proposition (2.4.2) et le lemme (3.2.2), on vérifie alors que  $\xi$  et  $\xi' \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$  coïncident sur  $U_i \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^d}$ . Les fibres spéciales des morphismes ( $GL_d(K)$ -équivariants)  $\xi$  et  $\xi'$  coïncident donc.

Comme on le voit en utilisant ([S] § 5), ceci entraîne l'égalité  $\xi = \xi' \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$ .

2) On rappelle (cf. introduction et les introductions des chapitres I et II) que Stuhler [S] a déjà étudié le foncteur  $G_{\mathcal{O}}$ . Par une approche différente de celle de Drinfeld (et de la notre), Stuhler obtient lui aussi (cf. [S] § 7 theorem 1, corollary et § 9 theorem 1) un isomorphisme

$$G_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\Omega}^d.$$

Cet isomorphisme coïncide lui aussi avec  $\xi'$  (même argument que celui utilisé dans la remarque précédente).



## IV. REVÊTEMENT DE DRINFELD ET MORPHISME DÉTERMINANT

### 0 Introduction

En utilisant les points de  $\Pi^n$ -division du  $\mathcal{O}_D$ -module formel universel  $X$  sur  $\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$ , Drinfeld définit dans [D1] un pro-revêtement  $\Sigma^d$  de la fibre générique au sens de Raynaud  $\Omega^d$  de  $\widehat{\Omega}^d$ . Ce pro-revêtement est pro-étale pro-Galoisien, de pro-groupe de Galois  $D^\times / \pi^{\mathbb{Z}}$ .

On va dans ce chapitre construire un morphisme déterminant

$$\Sigma^d \longrightarrow \Sigma^1.$$

Considérons le pro-revêtement  $\Sigma^d$  comme un analogue du système projectif de courbes modulaires

$$Y(N')_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Y(N)_{\mathbb{Q}} \quad (N|N')$$

et rappelons que  $\Sigma^1$  est le spectre maximal de l'extension abélienne totalement ramifiée maximale de  $K$ . Le morphisme déterminant apparaît alors comme un analogue du morphisme

$$Y(N)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Spec} \mathbb{Q}(\zeta_N)$$

induit par l'accouplement de Weil. En particulier, comme on l'a déjà mentionné plus haut (voir l'introduction générale), les fibres géométriques du morphisme

$$\Sigma^d \longrightarrow \Sigma^1 \otimes_K K_d$$

induit par le déterminant (et par la  $K_d$ -structure naturelle sur  $\Sigma^d$ ) devraient être les composantes connexes géométriques de  $\Sigma^d$ . Le stabilisateur dans  $D^\times / \pi^{\mathbb{Z}}$  d'une telle composante connexe géométrique devrait donc être le noyau  $\mathrm{SL}_1(D)$  de la norme réduite

$$\mathrm{Nr} : D^\times / \pi^{\mathbb{Z}} \longrightarrow K^\times / \pi^{d\mathbb{Z}}$$

(on verra que le morphisme déterminant est  $D^\times$ -équivant lorsqu'on fait agir  $D^\times$  sur  $\Sigma^1$  via la norme réduite).



Ce dernier énoncé garde un sens lorsqu'on ne suppose plus nécessairement l'anneau local  $\mathcal{O}$  d'égale caractéristique, bien que notre construction du morphisme déterminant ne fonctionne que dans ce cas. Dans cette généralité (et pour  $d = 2$ ), Faltings a obtenu un résultat (cf. [F], § 4 Lemma 5) dont on dérive facilement l'énoncé suivant

**Théorème (Faltings).** — *Les stabilisateurs dans  $D^\times/\pi^\mathbb{Z}$  des composantes connexes géométriques de  $\Sigma^2$  contiennent le noyau de la norme réduite.*  $\square$

On va maintenant donner le principe de la construction du morphisme déterminant, qui s'inspire elle aussi de travaux d'Anderson et de Stuhler (cf. [A] et [S]) et repose de nouveau sur la théorie du « module de coordonnées ».

Soit  $(M_i, F_i, \Pi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  le module de coordonnées modifié (I. 2.3) d'un  $\mathcal{O}_D$ -module formel. Les données supplémentaires (du type quasiisogénie de hauteur nulle avec un  $\mathcal{O}_D$ -module formel fixé, point de division, structure de niveau) sur ce  $\mathcal{O}_D$ -module formel s'interprètent comme des morphismes gradués vérifiant certaines conditions (dont la compatibilité aux Frobenius et aux morphismes  $\Pi_\bullet$ ) de  $M_\bullet$  vers un modèle constant  $(N_\bullet, F_\bullet, \Pi_\bullet)$  convenable (cf. (I. 4) et (1)).

La suite des puissances extérieures maximales

$$(m_i = \Lambda^{\max} M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

est naturellement munie de Frobenius  $f_i$  et de morphismes  $\pi_i$ . Lorsque le  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $X$  considéré est spécial et de hauteur  $d^2$ , on démontrera que la suite  $(m_i, f_i, \pi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est à son tour le module de coordonnées modifié d'un  $\mathcal{O}$ -module formel spécial de hauteur 1 : le « déterminant » de  $X$ . Dans ce cas, on démontrera aussi que la puissance extérieure maximale des morphismes  $(M_i \rightarrow N_i)$  associés à une donnée supplémentaire sur  $X$  (des types envisagés ci-dessus) définit sur le déterminant de  $X$  une donnée supplémentaire du même type que celle de départ (pour les points de division et les structures de niveau, on omet momentanément un détail : cf. 2.4). Cela achèvera la construction du morphisme déterminant.

Ce chapitre s'organise de la manière suivante.

Dans le premier paragraphe, on rappelle d'abord la définition du revêtement de Drinfeld. On interprète ensuite en termes de modules de coordonnées les points de division et les structures de niveau. On utilise enfin la description locale explicite de l'objet universel sur le schéma formel  $G$  (II. 3) pour obtenir des équations locales de  $\Sigma^d$ .

Dans le deuxième paragraphe, on construit alors le morphisme déterminant. On démontre successivement (2.1, 2.2 et 2.3) les énoncés concernant le déterminant d'un  $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial de hauteur  $d^2$ , d'une quasiisogénie de hauteur nulle et d'une structure de niveau auxquels il est fait allusion ci-dessus. On donne ensuite en (2.4) des formules explicites permettant de calculer le déterminant en terme des coordonnées locales sur  $\Sigma^d$  du premier paragraphe.

## 1 Le revêtement de Drinfeld

1.1. — Soit  $X$  le  $\mathcal{O}_D$ -module universel sur  $\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$ . Pour tout entier  $n$ , le noyau  $X_n^d$  de l'isogénie  $X(\Pi^n)$  est un schéma formel en groupes fini et plat d'ordre  $q^{dn}$  au dessus de  $\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$  et est muni naturellement d'une action de  $\mathcal{O}_D/\Pi^n \mathcal{O}_D$ . On note

$$i: X_n^d \hookrightarrow X_{n+1}^d$$

l'immersion évidente, et

$$\Pi: X_{n+1}^d \longrightarrow X_n^d$$

le morphisme induit par la multiplication par  $\Pi$ .

Le morphisme  $i$  est compatible à l'action de  $\mathcal{O}_D$  sur  $X_n^d$  et  $X_{n+1}^d$ . En revanche, ce n'est pas le cas du morphisme  $\Pi$ . Pour y remédier, on considère le  $\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$ -schéma formel

$$Y_n^d = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_D}(\Pi^{-n} \mathcal{O}_D / \mathcal{O}_D, X_n^d),$$

muni lui aussi d'une action naturelle de  $\mathcal{O}_D$ . En tant que schéma formel  $Y_n^d$  s'identifie à  $X_n^d$  et l'élément  $a$  de  $\mathcal{O}_D$  agit alors sur  $Y_n^d$  comme  $\Pi^{-n} \cdot a \cdot \Pi^n$  sur  $X_n^d$ .

Nous aurons besoin de la proposition suivante

**Proposition 1.1.1.** — *Le module des différentielles relatives  $\Omega_{X_n^d / \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d}^1$  est annulé par  $\pi^m$  pour tout entier  $m \geq n/d$ .*

*Preuve :* (cf. aussi [B-C](II. 13.1)). Il résulte de la définition (I. 1.2) des  $\mathcal{O}_D$ -modules formels que l'application tangente à  $X(\pi^m)$  est la multiplication par  $\pi^m$ .

Lorsque  $m \geq n/d$ , l'endomorphisme  $X(\Pi^n)$  est le composé des morphismes

$$\Pi^n: X_n^d \longrightarrow \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$$

et

$$i: \widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d \longrightarrow X_n^d.$$

L'application tangente à  $X(\Pi^n)$  est donc nulle. Il en est de même *a fortiori* de l'application tangente à  $X(\pi^m)$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Soit  $\mathcal{X}_n^d$  (resp.  $\mathcal{Y}_n^d, \Omega^d$ ) la fibre générique au sens de Raynaud [Ra] de  $X_n^d$  (resp.  $Y_n^d, \widehat{\Omega}^d$ ). Il résulte de la proposition (1.1.1) et du fait que le morphisme naturel

$$X_n^d \longrightarrow \widehat{\Omega}^d$$

est fini que  $\mathcal{X}_n^d$  est un revêtement fini étale de  $\Omega^d$  (de degré  $q^{nd}$ ).

En utilisant l'inclusion

$$i: \mathcal{Y}_n^d \hookrightarrow \mathcal{Y}_{n+1}^d,$$

on peut considérer  $\mathcal{Y}_n^d$  comme un sous-espace rigide de  $\mathcal{Y}_{n+1}^d$ . Soit alors  $\Sigma_{n+1}^d$  la différence  $\mathcal{Y}_{n+1}^d - \mathcal{Y}_n^d$ . L'espace rigide  $\Sigma_{n+1}^d$  est fini étale de degré  $(q-1)q^{nd}$  sur  $\Omega^d \otimes_F F_d$ , et s'identifie au  $(\mathcal{O}_D/\Pi^{n+1}\mathcal{O}_D)^\times$ -torseur

$$\underline{\text{Isom}}_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{O}_D/\Pi^{n+1}\mathcal{O}_D, \mathcal{Y}_{n+1}^d).$$

En d'autres termes, le morphisme naturel

$$\Sigma_{n+1}^d \longrightarrow \Omega^d \otimes_F F^d$$

constitue donc un revêtement étale Galoisien de groupe de Galois  $(\mathcal{O}_D/\Pi^{n+1}\mathcal{O}_D)^\times$ . Le système projectif

$$(\Sigma^d) \quad \dots \xrightarrow{\Pi} \Sigma_{n+1}^d \xrightarrow{\Pi} \Sigma_n^d \xrightarrow{\Pi} \dots \xrightarrow{\Pi} \Sigma_0^d = \Omega^d \otimes_F F_d$$

forme alors un revêtement pro-étale pro-Galoisien de  $\Omega^d \otimes_F F_d$  de pro-groupe de Galois

$$\mathcal{O}_D^\times = \varprojlim (\mathcal{O}_D/\Pi^n \mathcal{O}_D)^\times.$$

1.2. — On rappelle que Drinfeld [D1] définit sur  $X_n^d$  (et donc aussi sur  $\Sigma_n^d = \underline{\text{Isom}}(\Pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D, \mathcal{X}_n^d)$ ) des actions de  $D^\times/\pi^\mathbb{Z}$  et de  $\text{GL}_d(K)/\pi^\mathbb{Z}$ ; ces actions sont les suivantes.

Soient  $B$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre dans laquelle l'image de  $\pi$  est nilpotente et

$$\beta: \mathcal{O}_d \longrightarrow B$$

un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbre. On note  $\sigma$  l'automorphisme de  $\mathcal{O}_d$  induisant l'automorphisme de Frobenius  $\sigma_0: x \mapsto x^q$  de  $\mathbb{F}_{q^d}$  et, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\tau^k: (\beta \circ \sigma_0^{-k})^*(\Phi) \longrightarrow \beta^*(\Phi)$$

la quasiisogénie de Frobenius (on rappelle qu'on note  $\Phi$  le  $\mathcal{O}_D$ -module formel (I. 4.2)).

Fixons  $(\beta, X, \rho) \in G(B)$  (cf. (I. 4.3)) et  $x \in \text{Ker } X(\Pi^n)$ .

Soient  $\delta \in D^\times$  et  $k$  la valuation de sa norme réduite. L'action de  $\delta$  sur  $X_n^d$  associe à  $(\beta, X, \rho, x) \in X_n^d(B)$  l'élément

$$(\beta \circ \sigma^{-k}, X(\delta^{-1} \bullet \delta), \rho \circ \delta^{-1} \circ \tau^k, x)$$

de  $X_n^d(B)$  (on note  $X(\delta^{-1} \bullet \delta)$  le  $\mathcal{O}_D$ -module formel qui a le même groupe formel sous-jacent que  $X$  et sur lequel  $a \in \mathcal{O}_D$  agit par  $X(\delta^{-1}a\delta)$ ; en particulier les points de  $\Pi^n$ -division de  $X$  et de  $X(\delta^{-1} \bullet \delta)$  sont les mêmes). On remarque que l'automorphisme  $X(\delta^{-1}\Pi^k)$  du groupe formel  $X$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_D$ -modules formels de  $X(\Pi^{-k} \bullet \Pi^k)$  sur  $X(\delta^{-1} \bullet \delta)$ . Par suite, le quadruplet  $\delta(\beta, X, \rho, x)$  est aussi isomorphe à

$$(\beta \circ \sigma^{-k}, X(\Pi^{-k} \bullet \Pi^k), \rho \circ \Pi^{-k} \circ \tau^k, X(\Pi^{-k}\delta)x).$$

L'action de  $\mathcal{O}_D^\times \subset D^\times$  ainsi obtenue est donc l'action naturelle sur  $X_n^d$ .

Soient  $g \in \mathrm{GL}_d(K)$  et  $k$  la valuation de son déterminant. L'action de  $g$  sur  $X_n^d$  associe à  $(\beta, X, \rho, x) \in X_n^d(B)$  l'élément

$$(\beta \circ \sigma^{-k}, X, \rho \circ \beta^* \Phi(g^{-1}) \circ \tau^k, x)$$

de  $X_n^d(B)$  (cf. l'action (I. 4.5) de  $\mathrm{PGL}_d(K)$  sur le foncteur  $G$ ).

Les deux actions qu'on vient de définir sont compatibles à

$$\Pi: \Sigma_{n+1}^d \longrightarrow \Sigma_n^d$$

et induisent donc des actions sur le pro-espace rigide  $\Sigma^d(1.1)$ .

1.3. — On va maintenant traduire ce qui précède dans le langage des modules de coordonnées modifiés (I. 2.3).

1.3.1. — Soient  $X$  un  $\mathcal{O}_D$ -module formel de hauteur finie sur  $B$  (cf. (I. 1.2.3)) et  $x$  un point de  $\Pi^n$ -division de  $X$ .

A la donnée de  $X$  est associé un morphisme de  $\mathcal{O}_D$ -modules à gauche

$$\underline{x}: \mathcal{O}_D / \Pi^n \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathrm{Ker} X(\Pi^n)$$

du groupe constant  $\mathcal{O}_D / \Pi^n \mathcal{O}_D$  vers  $\mathrm{Ker} X(\Pi^n)$ .

Le module de coordonnées (I. 2.1.3) du groupe fini constant  $\mathcal{O}_D / \Pi^n \mathcal{O}_D$  est le suivant.

Soit

$$\mathrm{Tr.r}: D \longrightarrow K$$

la trace réduite [Re]. On laisse au lecteur le soin de vérifier que pour tout couple  $(a_1, a_2) \in (\mathcal{O}_D)^2$  on a

$$\mathrm{Tr.r}(a_1 \cdot \Pi^{1-d} \cdot a_2) \in \mathcal{O},$$

et que le morphisme

$$\mathcal{D}: (\mathcal{O}_D \Pi^{1-d-n} / \mathcal{O}_D \Pi^{1-d}) \otimes_{\mathbb{F}_q} (\mathcal{O}_D / \Pi^n \mathcal{O}_D) \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

composé du morphisme

$$(\mathcal{O}_D \Pi^{1-d-n} / \mathcal{O}_D \Pi^{1-d}) \otimes_{\mathbb{F}_q} (\mathcal{O}_D / \Pi^n \mathcal{O}_D) \longrightarrow K / \mathcal{O}$$

et du morphisme

$$\mathrm{Rés}: K / \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

induit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_D$ -bimodules de  $(\mathcal{O}_D \Pi^{1-d-n} / \mathcal{O}_D \Pi^{1-d})$  vers le  $\mathbb{F}_q$ -dual  $(\mathcal{O}_D / \Pi^n \mathcal{O}_D)^\vee$  de  $(\mathcal{O}_D / \Pi^n \mathcal{O}_D)$ . Le module de coordonnées du groupe  $(\mathcal{O}_D / \Pi^n \mathcal{O}_D)$  sur  $B$  est alors le  $\mathcal{O}_D$ -bimodule

$$(\mathcal{O}_D \Pi^{1-d-n} / \mathcal{O}_D \Pi^{1-d}) \otimes_{\mathbb{F}_q} B,$$

muni du Frobenius

$$\mathrm{Id}_{(\mathcal{O}_D \Pi^{1-d-n} / \mathcal{O}_D \Pi^{1-d})} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Fr}$$

(on note  $\text{Fr}$  l'endomorphisme de Frobenius ( $x \mapsto x^q$ ) de la  $\mathbb{F}_q$ -algèbre  $B$ ).

Au morphisme

$$\underline{x}: \mathcal{O}_D / \Pi^n \mathcal{O}_D \longrightarrow \text{Ker } X(\Pi^n)$$

correspond alors un morphisme de  $\mathcal{O}_D \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -modules à droite

$$M(\underline{x}): M_X / \Pi^n M_X \longrightarrow (\mathcal{O}_D \Pi^{1-d-n} / \mathcal{O}_D \Pi^{1-d}) \otimes_{\mathbb{F}_q} B,$$

compatible aux Frobenius  $F_X$  et  $\text{Id} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \text{Fr}$  (on note  $M_X$  le module de coordonnées (I. 2.2) du  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $X$ ).

1.3.2. — Supposons que  $B$  est muni d'une structure de  $\mathcal{O}_d$ -algèbre

$$\beta: \mathcal{O}_d \longrightarrow B$$

prolongeant sa structure de  $\mathcal{O}$ -algèbre. Les constructions (I. 2.3) associent alors à  $(\mathcal{O}_D \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B, \text{Id}_{\mathcal{O}_D} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \text{Fr})$  la suite  $(\Delta_i^d, \Pi_i, F_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  suivante :

$$\Delta_i^d = \mathcal{O}^d \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$$

$$\Pi_i = P \widehat{\otimes} \text{Id}_B$$

$$F_i = \text{Id}_{\mathcal{O}^d} \widehat{\otimes} \text{Fr}$$

(on rappelle qu'on note  $P$  la matrice

$$\begin{pmatrix} & & \pi \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

cf. (I. 4.2)).

Considérons le module de coordonnées modifié  $M_\bullet$  de  $X$  (cf. (I. 2.3)). La construction (I. 2.3) associe à  $\underline{x}$  un morphisme de  $\mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} B$ -modules gradués

$$x_\bullet: M_\bullet / \Pi^n M_\bullet \longrightarrow \Delta_{\bullet+n+d-1}^d / \Delta_{\bullet+d-1}^d$$

compatible aux morphismes  $\Pi_\bullet$  et aux Frobenius  $F_\bullet$  sur les deux membres. Réciproquement, tout tel morphisme gradué provient d'un point de  $\Pi^n$ -division de  $X$  (ceci résulte de ([SGA3] VII<sub>A</sub> (7.4)) appliqué au dual de Cartier ; cf. la preuve de (I. 2.1.4))

1.3.3. — Il résulte alors de (I. 4.3) que lorsque  $B$  est une  $\mathcal{O}$ -algèbre,  $X_n^d(B)$  peut être vu comme l'ensemble des classes d'isomorphie de quadruplets

$$(\beta, (M_i, \Pi_i, F_i)_{i \in \mathbb{Z}}, R, x_\bullet),$$

où

$$\beta: \mathcal{O}_d \longrightarrow B$$

est un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres ; le couple  $(M_i, \Pi_i, F_i)_{i \in \mathbb{Z}}, R)$  appartient à  $G_{\mathcal{O}}(B)$  ; le morphisme de modules gradués  $x_{\bullet}$  est compatibles aux morphismes  $\Pi_{\bullet}$  et aux Frobenius  $F_{\bullet}$ .

De la même manière, on peut considérer  $Y_n^d(B)$  comme l'ensemble des classes d'isomorphie de quadruplets

$$(\beta, (M_i, \Pi_i, F_i)_{i \in \mathbb{Z}}, R, x_{\bullet}),$$

où  $(\beta, (M_i, \Pi_i, F_i)_{i \in \mathbb{Z}}, R)$  est comme ci-dessus un élément de  $G(B)$ , et où

$$x_{\bullet}: M_{\bullet}/\Pi^n M_{\bullet} \longrightarrow \Delta_{\bullet+d-1}^d / \Delta_{\bullet-n+d-1}^d$$

est un morphisme de modules gradués compatible aux morphismes  $\Pi_{\bullet}$  et aux Frobenius  $F_{\bullet}$  (on rappelle que

$$Y_n^d = \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_D}(\Pi^{-n} \mathcal{O}_D / \mathcal{O}_D, X_n^d);$$

la raison de ce décalage apparaîtra dans la paragraphe suivant (1.3.4), où on explicite en termes de modules de coordonnées les actions (1.2) de  $D^{\times}$  et  $\text{GL}_d(K)$ ).

1.3.4. — Considérons un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres

$$\beta: \mathcal{O}_d \longrightarrow B.$$

L'action à droite de  $\mathcal{O}_D$  sur le groupe constant  $\mathcal{O}_D$  munit le module gradué  $\Delta_{\bullet}^d$  d'une action à gauche  $\tilde{\beta}_{\bullet}^d$  de  $\mathcal{O}_D$ , compatible aux morphismes  $\Pi_{\bullet}$  et aux Frobenius  $F_{\bullet}$ . Explicitement, lorsque  $\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}$ ,  $\tilde{\beta}_i^d(\lambda)$  est l'endomorphisme

$$\text{diag}(\beta(\lambda^{q^i}), \beta(\lambda^{q^{i-1}}), \dots, \beta(\lambda^{q^{i-d+1}}))$$

de  $\Delta_i^d$  et  $\tilde{\beta}_i^d(\Pi)$  est l'endomorphisme  $P \widehat{\otimes} \text{Id}_B$ , où  $P$  est la matrice (I. 4.2).

*Remarque :* Si l'on identifie  $\Delta_i^d$  et  $\Delta_{i+n}^d$  à  $\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} B$  (cf. (1.3.2)), l'élément  $a$  de  $\mathcal{O}_D$  agit sur  $\Delta_i^d$  comme  $\Pi^{-n} \cdot a \cdot \Pi^n$  sur  $\Delta_{i+n}^d$ . Le décalage de la graduation (1.3.3) correspond donc simplement à une modification de l'action de  $\mathcal{O}_D$  par conjugaison.

Ceci permet de traduire en termes de modules de coordonnées l'action à gauche de  $\mathcal{O}_D$  sur les points de  $\Pi^n$ -division d'un  $\mathcal{O}_D$ -module formel  $X$  sur  $B$ . Lorsque  $a \in \mathcal{O}_D$ , le morphisme  $(ax)_{\bullet}$  (1.3.2) associé au point de  $\Pi^n$ -division  $ax$  est alors le composé

$$\tilde{\beta}_{\bullet+n+d-1}^d(a) \circ x_{\bullet}$$

Pour caractériser les actions (1.2) de  $D^{\times}$  et  $\text{GL}_d(K)$ , il sera commode d'utiliser la variante (I. 4.4.2) de la définition de  $G_{\mathcal{O}}$ , et de considérer plutôt  $G(B)$  comme l'ensemble des couples

$$(\beta, (M_i)_{i \in \mathbb{Z}})$$

(où  $\beta$  est comme ci-dessus un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres de  $\mathcal{O}_d$  vers  $B$  et où  $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est une suite de réseaux dans  $K^d \widehat{\otimes} B$  vérifiant les conditions (I. 4.4.2)).

Fixons un triplet

$$(\beta, (M_i)_{i \in \mathbb{Z}}, x_\bullet)$$

appartenant à  $Y_n^d(B)$ .

Soient  $\delta \in D^\times$  et  $k$  la valuation de sa norme réduite. On laisse au lecteur le soin de vérifier que  $\delta(\beta, M_\bullet, x_\bullet)$  est le triplet

$$(\beta' = \beta \circ \sigma^{-k}, M_\bullet, \tilde{\beta}'_{\bullet+d-1}(\Pi^{-k} \cdot \delta) \circ x_\bullet = \tilde{\beta}'_{\bullet+d-1}(\delta \cdot \Pi^{-k}) \circ x_\bullet).$$

Soient  $g \in \text{GL}_d(K)$  et  $k$  la valuation de son déterminant. On laisse au lecteur le soin de vérifier que  $g(\beta, M_\bullet, x_\bullet)$  est le triplet

$$(\beta' = \beta \circ \sigma^{-k}, M'_\bullet = ({}^t g^{-1} \widehat{\otimes} \text{Id}_B)(M_{\bullet-k}), x'_\bullet),$$

où  $x'_\bullet$  est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M'_\bullet / \Pi^n M'_{\bullet-n} & \xrightarrow[\iota_g]{\sim} & M_{\bullet-k} / \Pi^n M'_{\bullet-k-n} \\ \downarrow x'_\bullet & & \downarrow x_{\bullet-k} \\ \Delta_{\bullet+d-1}^d / \Pi^n \Delta_{\bullet+d-1-n}^d & \xrightarrow{\sim} & \Delta_{\bullet-k+d-1}^d / \Pi^n \Delta_{\bullet-k+d-1-n}^d \end{array}$$

(la flèche du bas étant simplement donnée par l'identité

$$\Delta_{\bullet+d-1}^d = \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} B = \Delta_{\bullet-k+d-1}^d).$$

1.3.5. — Soient maintenant  $U$  un ouvert affine de  $\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$ ,  $V$  un ouvert affine de  $Y_n^d$ , supposé fini au-dessus de  $U$ , et  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  les affinoïdes fibres génériques au sens de Raynaud de  $U$  et  $V$  respectivement. Soient  $B$  et  $C$  les algèbres affines de  $U$  et  $V$ . Les algèbres de Tate de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont alors respectivement  $\mathcal{B} = B[\pi^{-1}]$  et  $\mathcal{C} = C[\pi^{-1}]$ .

Soit  $x$  le morphisme

$$\Pi^{-n} \mathcal{O}_D / \mathcal{O}_D \longrightarrow \text{Ker } X(\Pi^n)$$

universel sur  $v \subset Y_n^d$ . Le morphisme

$$\Pi^{-n} \mathcal{O}_D / \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{X}_n^d \times_{(\widehat{\Omega}^d \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d)} \mathcal{V}$$

induit par  $x$  est un isomorphisme si et seulement si  $\mathcal{V} \subset \Sigma_n^d$ .

La preuve de la proposition suivante est laissée au lecteur.

**Proposition 1.3.5.1.** — *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1.  $\mathcal{V} \subset \Sigma_n^d$
2. Le morphisme

$$x_\bullet \otimes 1 : M_\bullet / \Pi^n M_{\bullet-n} \otimes_B \mathcal{C} \longrightarrow \Delta_{\bullet+d-1}^d / \Delta_{\bullet-n+d-1}^d \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{C}$$

est un isomorphisme.  $\square$

1.4. — On va maintenant décrire explicitement les points de division du  $\mathcal{O}_D$ -module formel universel sur  $\widehat{G}^0$  (II. 3) et les morphismes de modules gradués (1.3) qui leur correspondent.

Soient  $C_n$  l'algèbre affine du  $\mathcal{O}$ -schéma formel  $Y_{nd}^d(B) \times_{G^0} \widehat{G}^0$  et  $x_\bullet$  le morphisme

$$M_\bullet / \pi^n M_\bullet \longrightarrow \Delta_{\bullet+d-1}^d / \Delta_{\bullet+d-1}^d$$

universel sur ce  $\mathcal{O}$ -schéma formel. Il résulte de la compatibilité (1.3) de  $x_\bullet$  aux morphismes  $\Pi_\bullet$  sur  $M_\bullet$  et sur  $\Delta_{\bullet+d-1}^d$  que les matrices  $x_i$  appartiennent à la sous-algèbre d'Iwahori

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O} & \pi \mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O} & \cdots & \pi \mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \pi \mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O} \\ \mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O} & \cdots & \cdots & \mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O} \end{pmatrix} \otimes C_n$$

de  $\mathrm{gl}_d(\mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O} \otimes C_n)$  et qu'il existe un (unique)  $nd^2$ -uplet d'éléments de  $C_n$

$$x_k[j] \quad (0 \leq k \leq nd-1, j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$$

tel que

$$x_i = \sum_{k=0}^{nd-1} P^k \otimes \mathrm{diag}(x_k[j-i], 0 \leq j \leq d-1)$$

pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .

Il résulte alors de la compatibilité (1.3) de  $x_\bullet$  aux Frobenius sur  $M_\bullet$  et sur  $\Delta_{\bullet+d-1}^d$  que

$$x_k[j]^q = x_{k-1}[j] - x_k[j-1] \cdot w[-j]$$

(avec  $0 \leq k \leq nd-1$ ,  $j \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  et  $x_{-1}[j] = 0$  pour simplifier les notations).

Notons  $\underline{x}_k$  le vecteur-colonne

$$\begin{pmatrix} x_k[0] \\ x_k[-1] \\ \vdots \\ x_k[1-d] \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\underline{x}_{k-1} = X(\Pi) \underline{x}_k \quad (0 \leq k \leq nd-1 \text{ et } \underline{x}_{-1} = 0)$$

(cf. (II. 3.4.1)). Le vecteur  $\underline{x}_k$  est alors un point de  $\Pi^{k+1}$ -division du module formel  $X$ . On peut montrer que  $\underline{x}_k$  est l'image de  $\Pi^{-k-1}$  par le morphisme

$$x: \Pi^{-nd} \mathcal{O}_D / \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathrm{Ker} X(\Pi^{nd})$$

associé à  $x_\bullet$ .



## 2 Morphisme déterminant

On va maintenant construire le morphisme déterminant.

2.1.4. — Soit  $\text{Mod}S(d)$  la catégorie fibrée des modules de coordonnées spéciaux de hauteur  $d^2$  (cf. (I. 4)) ; lorsque  $B$  est une  $\mathcal{O}$ -algèbre dans laquelle l'image de  $\pi$  est nilpotente,  $\text{Mod}S(d)(B)$  est la catégorie des triplets  $(M_\bullet, \Pi_\bullet, F_\bullet)$  vérifiant les conditions (1) et (2) de (I. 4.3.3).

On va d'abord construire un foncteur

$$\Lambda^d: \text{Mod}S(d) \longrightarrow \text{Mod}S(1).$$

Soient  $B$  une  $\mathcal{O}$ -algèbre comme ci-dessus et  $(M_\bullet, \Pi_\bullet, F_\bullet)$  un élément de  $\text{Mod}S(d)(B)$ . Soit  $(m_i, \pi_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  la suite définie par

$$\begin{aligned} m_i &= \Lambda^d M_i \\ \pi_i &= \Lambda^d \Pi_i: m_i \rightarrow m_{i+1} \end{aligned}$$

et

$$f_i = \Lambda^d F_i: (\text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr})^* m_i \longrightarrow m_{i+1}.$$

**Proposition 2.1.1.** — *La suite  $(m_i, \pi_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est un objet de  $\text{Mod}S(1)(B)$ .*

*Preuve :* Les  $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B$ -modules  $m_i$  sont localement libres de rang 1 et vérifient donc la condition (I. 4.3.3 (1)).

Les conditions (I. 2.3 (1) et (4)) sont évidemment vérifiées.

Pour vérifier les conditions (I. 2.3 (2) et (3)) et (I. 4.1.2 (2)), nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.1.2.** — *On suppose que  $B$  est local, d'idéal maximal  $\mathfrak{M}$ . Soient  $M$  et  $M'$  deux  $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B$ -modules libres de rang  $d$  et*

$$\varphi: M \longrightarrow M'$$

*un morphisme dont le conoyau est libre de rang 1 en tant que  $B$ -module et tué par une puissance de  $\pi$ . Il existe alors des bases de  $M$  et  $M'$  dans lesquelles la matrice associée à  $\varphi$  est de la forme*

$$\text{diag}(1, \dots, 1, \pi \otimes 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \pi^i \otimes m_i),$$

où  $m_i \in \mathfrak{M}$ .

*Preuve :* Soit  $k$  le corps résiduel de  $B$ . Le conoyau du morphisme  $\varphi \otimes \text{Id}_k$  est un  $k$ -module libre de rang 1.

Les  $\mathcal{O} \hat{\otimes} k$ -modules  $M \otimes_B k$  et  $M' \otimes_B k$  sont localement libres de rang  $d$  et  $\mathcal{O} \hat{\otimes} k$  est un anneau principal, de sorte qu'on peut appliquer le théorème des diviseurs élémentaires. Il existe donc des bases de  $M \otimes_B k$  et  $M' \otimes_B k$  dans lesquelles la matrice de  $\varphi \otimes \text{Id}_k$  est  $\text{diag}(1, \dots, 1, \pi \otimes 1)$ . En relevant ces bases, on obtient donc des bases de  $M$  et  $M'$  (l'idéal  $\mathcal{O} \hat{\otimes} \mathfrak{M}$  de  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$  est contenu dans l'idéal maximal de  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ !). La matrice  $M_\varphi$  de  $\varphi$  dans ces bases est alors

$$M_\varphi = \text{diag}(1, \dots, 1, \pi \otimes 1) + M_{\mathfrak{M}},$$

où la matrice  $M_{\mathfrak{M}}$  est à coefficients dans  $\mathcal{O} \hat{\otimes} \mathfrak{M}$ . Les  $d - 1$  premiers coefficients diagonaux de la matrice  $M_\varphi$  sont alors inversibles. Le lemme se prouve alors en appliquant un argument classique d'algèbre linéaire (voir par exemple [Bo] Alg. Ch. III §10 n° 13 lemme 1).  $\square$

Achevons la preuve de (2.1.1).

On peut supposer pour vérifier les conditions (I. 2.3 (2) et (3)) et (I. 4.1.2 (2)) que l'anneau  $B$  est local. Les  $B$ -modules  $\text{Coker } \Pi_i$  et  $\text{Coker } F_i$  sont libres de rang 1 (cf. (I. 4.1.2) et (I. 4.1.3)). Le lemme (2.1.2) identifie alors  $\text{Coker } \pi_i$  (resp.  $\text{Coker } f_i$ ) à  $\text{Coker } \Pi_i$  (resp.  $\text{Coker } F_i$ ), ce qui termine la preuve.  $\square$

2.2.4. — Notons désormais  $G_{\mathcal{O}}^d$  le foncteur  $G_{\mathcal{O}}$  (cf. (I. 4.4.2)).

Soit  $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in G_{\mathcal{O}}^d(B)$ . On va montrer que les sous  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -modules  $m_i = \Lambda^d M_i$  de  $K \hat{\otimes} B$  définissent un objet de  $G_{\mathcal{O}}^1(B)$ .

Les sous-modules  $m_i$  vérifient évidemment les conditions (1) et (2) de (I. 4.4.2), et il découle de la proposition (2.1.1) qu'ils vérifient (I. 4.4.2 (3)).

Il résultera immédiatement du lemme suivant que les modules  $m_i$  vérifient aussi la condition (I. 4.4.2).

**Lemme 2.2.1.** — Soient  $M$  et  $M'$  deux  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -modules localement libres de rang  $d$  et

$$\varphi : M \longrightarrow M'$$

un morphisme injectif dont le conoyau est tué par une puissance de  $\pi$ . On a alors

1. le  $B$ -module  $\text{Coker } \varphi$  est localement libre;
2.  $\text{rg } \text{Coker } \varphi = \text{rg } \text{Coker } \Lambda^d \varphi$  (égalité de fonctions localement constantes sur  $\text{Spec } B$ ).

*Preuve :* Démontrons d'abord le premier point.

Soit  $n$  un entier tel que  $\pi^n \hat{\otimes} 1 \text{Coker } \varphi = (0)$ .

La suite

$$M/(\pi^n \hat{\otimes} 1)M \longrightarrow M'/(\pi^n \hat{\otimes} 1)M' \longrightarrow M'/M \longrightarrow 0$$

est exacte. Le  $B$ -module  $M'/M$  est donc de présentation finie, et il suffit donc de démontrer qu'il est plat.

Nous aurons besoin des lemmes suivants, dont les démonstrations sont laissées au lecteur.

**Lemme 2.2.2.** — Si le  $B$ -module  $E$  est plat, il en est de même du  $B$ -module  $\mathcal{O} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} E$ .  $\square$

**Lemme 2.2.3.** — Pour tout idéal  $B$  de  $B$ , on a l'égalité

$$(\pi^n \hat{\otimes} B) \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} B = (1 \hat{\otimes} B) \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} B \cap (\pi^n \hat{\otimes} 1) \cdot \mathcal{O} \hat{\otimes} B. \quad \square$$

**RÉDUCTION :** En appliquant le lemme (2.2.2) au cas du changement de base vers un anneau local  $B_{\mathfrak{M}}$  de  $B$  et en utilisant ([Bo] A. C. Ch II §3 corollaire de la proposition 15), on voit qu'il suffit en fait de démontrer que  $M'/M$  est un  $B$  module plat en se plaçant dans la cas particulier où l'anneau  $B$  est local. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Les  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -modules  $M$  et  $M'$  sont localement libres et donc plats. Il résulte du lemme (2.2.2) qu'ils sont alors plats en tant que  $B$ -modules. Pour démontrer que le  $B$ -module  $M'/M$  est plat, il suffit alors de vérifier que pour tout idéal  $B$  de  $B$ , on a l'égalité

$$(*) \quad (1 \hat{\otimes} B) \cdot M = (1 \hat{\otimes} B) \cdot M' \cap M.$$

Soit  $m \in (1 \hat{\otimes} B) \cdot M' \cap M$ . Il résulte des inclusions

$$\pi^n M' \subset M \subset M'$$

que  $(\pi^n \hat{\otimes} 1)m \in (1 \hat{\otimes} B) \cdot M \cap (\pi^n \hat{\otimes} 1) \cdot M$ . Le  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$ -module  $M$  est libre de rang  $d$  (ceci résulte du fait que  $B$  est local et du lemme (I. 2.2.4), ou plutôt, de sa preuve). L'égalité (\*) est alors une conséquence directe du lemme (2.2.3). Ceci achève la preuve du premier point.

Pour démontrer le deuxième point, on peut supposer que  $B$  est un corps. L'anneau  $\mathcal{O} \hat{\otimes} B$  est alors un anneau de valuation discrète, et l'égalité des rangs résulte alors du théorème des diviseurs élémentaires ([Bo] Alg. Ch VII §4 n° 5 prop. 4).  $\square$

**2.3.** — On va maintenant s'intéresser aux points de division.

Soient  $\varepsilon \in \mathcal{O}_d$  tel que  $\varepsilon^{q-1} = (-1)^{d-1}$  et

$$\beta: \mathcal{O}_d \longrightarrow B$$

un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres. On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(\beta, i, k)}: \Delta_i^d &\longrightarrow \Delta_{i+k}^1 \\ x &\longmapsto ((-1)^{i(d-1)} \hat{\otimes} \beta(\varepsilon)) \cdot x \end{aligned}$$

(où  $\Delta_i^d$  est le module (1.3.2)) identifie pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  les suites

$$(\Lambda^d \Delta_i^d, \Lambda^d \Pi_i, \Lambda^d F_i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

et

$$(\Delta_{i+k}^1, \Pi_{i+k}, F_{i+k})_{i \in \mathbb{Z}}.$$

On définit alors un morphisme

$$\begin{aligned} \det_\varepsilon: Y_{nd}^d(B) &\longrightarrow Y_n^1(B) \\ (M_\bullet, x_\bullet) &\longmapsto (\lambda^d M_\bullet, \varepsilon_{(\beta, \bullet+d-1, 1-d)} \circ \Lambda^d x_\bullet). \end{aligned}$$

La preuve (facile) de la proposition suivante est laissée au lecteur.

**Proposition 2.3.1.** — *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} Y_{(n+1)d}^d & \xrightarrow{\Pi^d} & Y_{nd}^d \\ \downarrow \det_\varepsilon & & \downarrow \det_\varepsilon \\ Y_{n+1}^1 & \xrightarrow{\pi} & Y_n^1 \end{array}$$

est commutatif.  $\square$

2.3.2. — On note encore

$$\det_\varepsilon: \mathcal{Y}_{nd}^d \longrightarrow \mathcal{Y}_n^1$$

la fibre générique du morphisme de schémas formels  $\det_\varepsilon$ . Il résulte alors immédiatement de la proposition (1.3.5.1) que

$$\det_\varepsilon(\Sigma_{nd}^d) \subset \Sigma_n^1.$$

Les morphismes rigides

$$\det_\varepsilon: \Sigma_{nd}^d \longrightarrow \Sigma_n^1$$

ainsi obtenus forment finalement un morphisme de systèmes projectifs

$$\det_\varepsilon: \Sigma^d \longrightarrow \Sigma^1,$$

comme on le voit en utilisant la proposition (2.3.1).

2.4. — Le système projectif  $\Sigma^d$  (resp.  $\Sigma^1$ ) est muni d'actions de  $D^\times/\pi^\mathbb{Z}$  et de  $\mathrm{GL}_d(K)/\pi^\mathbb{Z}$  (resp. de deux actions de  $F^\times$  ; on laisse au lecteur le soin de vérifier qu'elles coïncident).

Faisons agir  $\delta \in D^\times/\pi^\mathbb{Z}$  sur  $\Sigma^1$  via  $\mathrm{Nr}(\delta)$  et  $g \in \mathrm{GL}_d(K)/\pi^\mathbb{Z}$  via  $\det(g)$ .

**Proposition 2.4.1.** — *Le morphisme*

$$\det_\varepsilon: \Sigma^d \longrightarrow \Sigma^1$$

est  $D^\times/\pi^\mathbb{Z} \times \mathrm{GL}_d(K)/\pi^\mathbb{Z}$ -équivariant.

*Preuve :* Il suffit de prouver l'analogie évident pour le morphisme

$$\det_\varepsilon: Y_{nd}^d \longrightarrow Y_n^1.$$

La  $\mathrm{GL}_d(K)$ -équivariance suit immédiatement de la caractérisation (1.3.4) de l'action de  $\mathrm{GL}_d(K)$ .

Pour montrer que le morphisme  $\det_\varepsilon$  est  $D^\times$ -équivariant, nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.4.2.** — *En identifiant  $\Lambda^d \Delta_{i+d-1}^d$  à  $\Delta_i^1$  via le morphisme  $\varepsilon_{(\beta, i+d-1, 1-d)}$ , on a*

$$\Lambda^d \tilde{\beta}_{i+d-1}^d(\delta) = \tilde{\beta}_i^1(\text{Nr } \delta) \quad (\forall \delta \in \mathcal{O}_D^\times).$$

*Preuve :* Il suffit de prouver cette identité pour  $B = \mathcal{O}_d$  et  $\beta = \text{Id}_{\mathcal{O}_d}$ . Celle-ci est alors simplement la définition de la norme réduite figurant dans [Re].  $\square$

En remarquant que  $\Pi \in D^\times / \pi^\mathbb{Z}$  agit sur  $\Sigma^1$  via  $\varepsilon^{q-1} = (-1)^{d-1}$  et que

$$\text{Nr}(\Pi) = (-1)^{d-1} \pi,$$

la proposition s'ensuit.  $\square$

On va maintenant formuler une conséquence de la  $D^\times$ -équivariance du morphisme  $\text{dét}_\varepsilon$ .

**Proposition 2.4.3.** — *Il existe un (unique) morphisme*

$$\text{dét}_\varepsilon : \Sigma_{nd-d+1}^d \longrightarrow \Sigma_n^1$$

*rendant commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{nd}^d & & \\ \downarrow \Pi^{d-1} & \searrow \text{dét}_\varepsilon & \\ & & \Sigma_n^1 \\ \uparrow & \nearrow \text{dét}_\varepsilon & \\ \Sigma_{nd-d+1}^d & & \end{array}$$

*Preuve :* Soit  $\mathcal{O}_{D,n} = 1 + \Pi^n \mathcal{O}_D$  ( $n \geq 1$ ). On a

$$\Sigma_n^d = \Sigma^d / \mathcal{O}_{D,n} = \Sigma_{n'}^d / (\mathcal{O}_{D,n} / \mathcal{O}_{D,n'}) \quad (n' \geq n)$$

La proposition (2.4.3) résulte alors du lemme suivant.

**Lemme 2.4.4.** — *On a l'inclusion*

$$\text{Nr}(\mathcal{O}_{D,nd-d+1}) \subset 1 + \pi^n \mathcal{O}.$$

*Preuve :* Ceci résulte de la définition de la norme réduite figurant dans [Re] et de ([C], lemme (2.9)).  $\square$

**2.5.** — On va maintenant calculer explicitement le morphisme déterminant  $\text{dét}_\varepsilon$  en utilisant la détermination (II. 3) de l'objet universel sur  $G_{\mathcal{O}}$ .

Soit  $B_{\text{univ}}$  l'algèbre affine du  $\mathcal{O}$ -schéma formel  $\widehat{G}^0$  (II. 3.3.1).

**Proposition 2.5.1.** — *Le déterminant (2.2) de l'objet universel*

$$(M_\bullet, \Pi_\bullet, F_\bullet, R) \in G_{\mathcal{O}}(B_{\text{univ}})$$

*est l'objet  $(m_\bullet, \pi_\bullet, f_\bullet, r)$  suivant. Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\begin{aligned} m_i &= \mathcal{O} \widehat{\otimes} B_{\text{univ}}, \\ \pi_i &= (-1)^{d-1} \pi \widehat{\otimes} 1 \end{aligned}$$

*et*

$$f_i = (-1)^{d-1} (\pi \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} \pi) \text{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \text{Fr}.$$

*Le morphisme*

$$r: \overline{m}_0 = \mathcal{O} \widehat{\otimes} (B_{\text{univ}}/(\pi)) \hookrightarrow K \widehat{\otimes} (B_{\text{univ}}/(\pi))$$

*est l'inclusion naturelle.*

*Preuve :* On laisse au lecteur le soin de vérifier que les modules  $m_i$ , ainsi que les morphismes  $\pi$  et  $f_i$ , sont ceux décrits ci-dessus.

L'inclusion  $r$  (assimilée à un élément de  $K \widehat{\otimes} (B_{\text{univ}}/(\pi))$ ) vérifie

$$\text{Id}_K \widehat{\otimes} \text{Fr}(r) = r$$

(cf. la condition (3) de (I. 4.3.3)). On a donc

$$r = \rho \widehat{\otimes} 1 \quad (\rho \in K).$$

Pour calculer  $r$ , il suffit dans ces conditions de le faire après réduction modulo l'idéal  $(v^j[i])$  (II. 2.7.2). Un calcul direct montre alors que  $r = 1$ .  $\square$

*Remarque :* Le morphisme

$$\begin{aligned} m_i &\longrightarrow \mathcal{O} \widehat{\otimes} B_{\text{univ}} \\ x &\longmapsto (-1)^{i(d-1)} \cdot x \end{aligned}$$

identifie ainsi  $(m_\bullet, \pi_\bullet, f_\bullet, r)$  à l'image réciproque de l'objet universel sur  $\widehat{G}_{\mathcal{O}}^1 = \text{Spf } \mathcal{O}$  par le morphisme structural

$$\lambda: \widehat{G}^0 \longrightarrow \text{Spf } \mathcal{O}.$$

**Corollaire 2.5.2.** — *Le déterminant de l'objet universel  $(\beta, X, \rho)$  sur  $\widehat{G}^0 \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_d$  (II. 3.4.1) est le couple  $(\det X, \det \rho)$  suivant.*

Le  $\mathcal{O}$ -module formel  $\det X$  est celui dont le groupe formel sous-jacent est  $\mathbb{G}_a$  et pour lequel on a

$$\det X(\pi) = \pi + \tau$$

(on rappelle qu'on note  $\tau$  l'endomorphisme de Frobenius de  $\mathbb{G}_a$ ). La quasiisogénie  $\det p$  est simplement l'isomorphisme

$$\Phi^1 = \mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a = \det X$$

(on note  $\Phi^d$  le  $\mathcal{O}$ -module formel (I. 4.2)).  $\square$

On rappelle qu'on note  $C_n$  l'algèbre affine du  $\mathcal{O}$ -schéma formel  $Y_{nd}^d(B) \times_{G_{\mathcal{O}}} \widehat{G}^0$  (cf. (1.4)). Notons

$$\varepsilon_{(\beta, i+d-1, 1-d)} \circ \Lambda^d x_i = \det_{\varepsilon}(x_{\bullet})_i = \sum_{k=0}^{n-1} \pi^k \otimes \xi_k \quad (\xi_k \in C_n)$$

(cf. (2.3)).

La preuve de la proposition suivante est alors une conséquence immédiate de (1.4).

**Proposition 2.5.3.** — *L'égalité*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi^k \otimes \xi_k = (1 \otimes \beta(\varepsilon)) \cdot \det \left( \sum_{k=0}^{nd-1} P^k \otimes \text{diag}(x_k[j-i], 0 \leq j \leq d-1) \right)$$

est vérifiée dans  $\mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O} \otimes C_n$ .  $\square$

*Remarque :* La formule (2.5.3) exprime  $\xi_{n-1}$  comme un polynôme en les  $x_k[j]$  ( $0 \leq j \leq d-1, 0 \leq k \leq nd-1$ ). De l'égalité

$$\sum_{k=0}^{nd-1} P^k \otimes \text{diag}(x_k[j-i]) = P^i \cdot \left( \sum_{k=0}^{nd-1} P^k \otimes \text{diag}(x_k[j]) \right) \cdot P^{-i}$$

(où les deux membres sont considérés comme des éléments de  $\mathbb{F}_q[\pi] \otimes \mathbb{F}_q[x_k[j], 0 \leq j \leq d-1, 0 \leq k \leq nd-1]$ ), il résulte que ce polynôme est indépendant de  $i$ . La matrice

$$\sum_{k=0}^{nd-1} P^k \otimes \text{diag}(x_k[j-i]) \in \text{gl}_d(\mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O} \otimes \mathbb{F}_q[x_k[j]])$$

ne dépend pas des quantités

$$\begin{array}{cccc} x_{(n-1)d+1}[(d-1)-i] & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{nd-1}[(d-1)-i] & \cdots & x_{nd-1}[1-i] \end{array}$$

(lorsque  $1 \leq s \leq r \leq d$ , le terme situé à l'intersection de la  $r$ -ième ligne et de la  $s$ -ième colonne est  $x_{(n-1)d+r}[d-i+s]$ ).

En faisant varier  $i$ , on voit que le polynôme exprimant  $\xi_{n-1}$  ne dépend que des  $x_k[j]$  (avec  $0 \leq j \leq d-1$  et  $0 \leq k \leq (n-1)d$ ). Le morphisme

$$\det_\epsilon : Y_{nd}^d \longrightarrow Y_n^1$$

se factorise donc à travers le morphisme d'oubli des coordonnées  $x_k[j]$  ( $0 \leq j \leq d-1, (n-1)d+1 \leq k \leq nd-1$ ),

$$\Pi^{d-1} : Y_{nd}^d \longrightarrow Y_{(n-1)d+1}^d.$$

Ceci redémontre (et précise) la proposition (2.4.3).

Alain GENESTIER  
Université de Paris-Sud  
Mathématiques  
Bâtiment 425  
91405 Orsay  
France





## BIBLIOGRAPHIE

- [A] ANDERSON (G). —  $t$ -motives, *Duke Math. Journal* **53**, (1986), 457-502.
- [B-C] BOUTOT (J.-F) et CARAYOL (H). — Uniformisation  $p$ -adique des courbes de Shimura: les théorèmes de Čerednik et de Drinfeld, *Astérisque* **196-197**, 45-149 (1991).
- [Be] BERTHELOT (P). — Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre, *en préparation*.
- [Bo] BOURBAKI (N). — *Eléments de Mathématique*, (Masson).
- [C] CARAYOL (H). — Représentations cuspidales du groupe linéaire, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* **4<sup>e</sup> série**, t. **17**, (1984), 191-225.
- [D-L] DELIGNE (P) et LUSZTIG (G). — Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. Math.* **103**, (1976), 103-161.
- [D-M] DELIGNE (P) et MUMFORD (D). — The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. I.H.E.S.* **36**, (1969), 123-165.
- [D1] DRINFELD (V.G). — Coverings of  $p$ -adic symmetric regions, *functional analysis and its applications* **10**, (1976), 107-115.
- [D2] DRINFELD (V.G). — Lettre à H. Carayol du 12-1-80.
- [D3] DRINFELD (V.G). — Elliptic modules, *Math. USSR Sbornik* **23**, (1974), 561-592.
- [D4] DRINFELD (V.G). — Commutative subrings of some noncommutative rings, *functional analysis and its applications* **11**, (1977), 9-12.
- [EGA IV] GROTHENDIECK (A). — *Eléments de Géométrie Algébrique, quatrième chapitre*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S. **20** et **24**, 1964-65.
- [F] FALTINGS (G). — The trace formula and Drinfeld's upper half plane, *Duke Math. Jour.* **76**, (1994), 467-482.
- [Fu] FULTON (W). — *Intersection Theory*, Springer-Verlag, 1984.
- [G-H] GROSS (B) et HOPKINS (M). — Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space, *Contemp. Math.* **158**, (1994), 23-88.
- [G-I] GOLDMAN (O) et IWAHORI (N). — The space of  $p$ -adic norms, *Acta. Math.* **109**, (1963), 137-177.

- [G] GEKELER (E.U). — de Rham cohomology and the Gauss-Manin connection for Drinfeld modules, dans *Proc. Conf. on  $p$ -adic Analysis*, Trento 1989, Lecture Notes in Math. **1454**, Springer-Verlag 1990.
- [Ge1] GENESTIER (A). — Ramification du revêtement de Drinfeld, thèse, Université Paris-Sud 1992.
- [Ge2] GENESTIER (A). — Irréductibilité du revêtement de Drinfeld, *Comptes Rendus Acad. Sci. série I* **313**, (1991), 91-94.
- [H] HAZEWINDEL (M). — *Formal Groups and Applications*, Acad. Press, 1978.
- [K1] KATZ (N). — Serre Tate local moduli, dans *Surfaces Algébriques*, Lecture Notes in Math. **868**, 138-202, Springer-Verlag 1981.
- [K2] KATZ (N). — Crystalline cohomology, Dieudonné modules and Jacobi sums, dans *Automorphic forms, representation theory and Arithmetic*, Tata institute of fundamental research, Bombay 1981.
- [M] MESSING (W). — *The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes*, Lecture notes in Math. **264**, Springer Verlag, 1972.
- [Mu1] MUMFORD (D). — An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, *Comp. Math.* **24**, (1972), 129-174.
- [Mu2] MUMFORD (D). — An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg-de Vries equation and related nonlinear equations, dans *Int. Symp. on Alg. Geom.*, Kyoto 1977, 115-153.
- [R-Z] RAPOPORT (M) et ZINK (T). — Period spaces for  $p$ -divisible groups, prépublication (Bergische Universität Wuppertal et Universität Bielefeld, Novembre 1994) .
- [R] RAPOPORT (M). — On the bad reduction of Shimura varieties, dans L. Clozel et J. S. Milne (ed), *Automorphic forms, Shimura varieties and  $L$ -functions* vol. II, Persp. in Math. **11**, 253-321, Acad. Press Boston (1990).
- [Ra] RAYNAUD (M). — Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl ... , dans *Table ronde d'analyse non Archimédienne*, Bull. Soc. Math. Fr., *mém.* **39-40**, 319-327 (1974).
- [Re] REINER (C). — *Maximal orders*, Acad. Press, 1975.
- [S] STUHLER (U). —  $p$ -adic homogeneous spaces and moduli problems, *Math. Zeitschrift* **192**, (1986), 491-540.
- [SGA 3] DEMAZURE (M) et GROTHENDIECK (A). — *Schémas en groupes*, Lecture Notes in Math. **151**, **152** et **153**, Springer-Verlag 1972-73.
- [T] TITS (J). — Reductive groups over local fields, dans *Automorphic forms, representations, and  $L$ -functions*, Proc. Symp. Pure Math. **33** vol 1, 29-70 (1977).
- [Z] ZINK (T). — *Cartiertheorie kommutativer formaler Gruppen*, Teubner Texte zur Mathematik **68**, Leipzig 1984.