JEAN-YVES CHEMIN

Fluides parfaits incompressibles

Astérisque, tome 230 (1995)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1995__230__1_0>

230 ASTÉRISQUE

1995

FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

Jean-Yves CHEMIN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Classification AMS : 35L60, 35S50, 42B20, 76A05.

Table des Matières

Introduction

L'objet de ce livre est d'offrir un texte qui démontre quelques résultats récents ou nouveaux de mécanique des fluides. Ce texte se veut autocontenu pour un étudiant de maîtrise n'ayant point fui l'Analyse. Le premier résultat est le théorème de J.-M. Delort sur l'existence d'une solution aux équations d'Euler en dimension deux pour une donnée initiale du type nappe de tourbillon. Les autres résultats sont des théorèmes affirmant la persistance de la régularité du bord d'une poche de tourbillon. Le texte est divisé en neuf chapitres dont nous allons brièvement résumer le contenu.

Le premier chapitre est une description succinte des concepts de base liés aux équations d'Euler relatives à un fluide parfait incompressible. Tout d'abord, nous définissons un tel fluide en lui imposant d'évoluer le long d'une géodésique du groupe des difféomorphismes préservant la mesure.

Ensuite, traduisant cette définition lagrangienne en langage eulérien, nous établissons les équations d'Euler vérifiées par le champ des vitesses des particules du fluide. Puis, les quantités importantes liées à ces équations (pression, tourbillon) sont introduites. La loi fondamentale de Biot-Savart reliant un champ de vecteurs de divergence nulle à son rotationnel est démontrée. Enfin, la spécificité de la dimension deux d'espace est mise en évidence : c'est la conservation du tourbillon le long des lignes de flot du champ de vecteurs solution. Ce premier chapitre se conclut sur une formulation faible des équations d'Euler qui est spécifique à la dimension deux.

Le deuxième chapitre a pour but de présenter les bases de la théorie de Littlewood-Paley. Dans un premier temps, quelques inégalités simples sur les fonctions dont la transformée de Fourier est à support compact sont démontrées. Ensuite, nous construisons une partition de l'unité associée à un recouvrement de l'espace $\mathbf{R}^d$ par des couronnes dyadiques.

Puis, nous utilisons cette partition de l'unité pour caractériser les espaces de Sobolev et de Hölder. Une certaine place est accordée à l'étude des cas limites d'espaces de Hölder, essentiellement la classe de Zygmund $C^1_\star$. Les chapitres 5 et 9 en illustreront la nécessité.

Ensuite, nous présentons une version très rudimentaire du calcul paradifférentiel. Les résultats que nous démontrons ici seront abondamment utilisés dans toute la suite du livre.

Enfin, comme premier exemple d'application de ces techniques, nous démontrons quelques propriétés de la pression et de son champ de gradient.

Comme son nom l'indique, le troisième chapitre est dévolu à l'étude de la loi de Biot-Savart. Il s'agit de savoir en quoi une information sur le tourbillon peut se traduire sur le champ de vecteurs de divergence nulle associé.

Après la présentation de quelques cas très simples, nous étudions l'action des opérateurs du type $\partial_i\partial_j\Delta^{-1}$ sur les espaces L^p, c'est-à-dire que nous exposons le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz en contrôlant précisément les constantes en fonction de p. Les chapitres 5 et 9 montreront que ceci n'est pas une coquetterie.

Ensuite, le problème de l'action des opérateurs $\partial_i\partial_j\Delta^{-1}$ sur l'espace des fonctions bornées est abordé dans le cadre de la dimension deux. Nous étudions tout d'abord en détail deux exemples. Le premier montre qu'un champ de vecteurs de divergence nulle dont le tourbillon est une fonction bornée à support compact peut ne pas être lipschitzien. Le second exemple suggère que ce problème n'est pas sans relation avec la régularité tangentielle par rapport à une courbe suffisamment régulière.

Ce troisième chapitre se termine par la démonstration d'une inégalité relative à l'action des opérateurs $\partial_i\partial_j\Delta^{-1}$ sur l'ensemble des fonctions bornées. Cette inégalité sera à la base des démonstrations des théorèmes de persistance de la régularité du bord d'une poche de tourbillon exposées aux chapitre 5 et 9.

Le quatrième chapitre est consacré à la résolution des équations d'Euler pour des données initiales régulières, c'est-à-dire dans une classe de Hölder C^r avec r strictement supérieur à 1. Dans un premier temps, nous résolvons un problème modèle. Nous démontrons également une condition nécessaire pour que le temps d'existence maximal de la solution soit fini. Au passage, nous établissons une estimation de propagation de la régularité hölderienne pour les champs de vecteurs de divergence nulle, lipschitziens.

Nous revenons ensuite aux équations d'Euler en vérifiant qu'elles sont bien un cas particulier du modèle précédent. Nous concluons alors le chapitre en démontrant une condition de non existence globale dans les cas suivants : le cas d'une donnée initiale périodique, le cas où le gradient de la vitesse appartient à L^p et, enfin, celui où le champ de vecteurs est une perturbation d'énergie finie d'une solution stationnaire.

Le cinquième chapitre a pour objet l'étude des solutions à tourbillon borné en dimension deux d'espace. En premier lieu, nous démontrons le théorème de Yudovich d'existence globale pour des données à tourbillon borné. Bien qu'a priori non lischiptzien, le champ de vecteurs solution est quasi-lipschitzien. On démontre alors un raffinement du théorème de Cauchy-Lipschitz. Un tel champ de vecteurs possède un flot. La régularité en espace de ce flot est exponentiellement décroissante en temps. On exhibe ensuite un exemple montrant que le théorème de Yudovich est optimal.

Ensuite, nous présentons le problème dit des poches de tourbillon. Puis, nous le résolvons en démontrant un théorème de persistance de la régularité tangentielle par rapport à une famille de champs de vecteurs peu réguliers. La démonstration de ce théorème utilise le calcul paradifférentiel introduit dans le chapitre 2. Ce résultat doit être compris comme un théorème de propagation de la régularité, jusqu'à un temps quelconque, dans un système d'équations quasi-linéaires.

Le sixième chapitre est consacré au problème dit des nappes de tourbillon. Après avoir présenté le problème, nous énonçons le théorème de J.-M. Delort d'existence d'une solution lorsque le tourbillon du champ de vecteurs de divergence nulle initial est une mesure bornée de partie singulière positive.

Ce problème se réduit à un problème de passage à la limite dans une intégrale grâce à la formulation faible spécifique à la dimension deux établie à la fin du chapitre 1. La démonstration se conclut au prix de quelques lemmes de théorie de l'intégration.

Le septième chapitre est une digression sur le front d'onde. Après une présentation élémentaire de ce concept de base de l'analyse microlocale, sont exposées les relations étroites entre front d'onde, théorie de Littlewood-Paley et produit des distributions. Ensuite, les concepts de front d'onde analytique et de front d'onde Gevrey sont introduits. On démontre un résultat de type "ellipticité microlocale" dans le cadre du front d'onde analytique ou du front d'onde Gevrey pour des champ de vecteurs très peu réguliers. Ceci sera utilisé au chapitre suivant.

Le huitième chapitre expose un résultat de régularité analytique ou Gevrey en temps sur le flot d'une solution pas trop singulière du système d'Euler. L'idée essentielle consiste à étudier l'action répétée, sur le gradient de la pression, de la dérivation le long de lignes de flot. On déduit de cette étude une majoration du front d'onde analytique (ou Gevrey) de la solution.

Le neuvième et dernier chapitre revient sur l'étude du problème des poches de tourbillon. On s'intéresse ici au cas où le bord de la poche présente des singularités, par exemple des coins ou des cusps. Les résultats, nouveaux, qui y sont démontrés, généralisent ceux du chapitre 5 sur les poches de tourbillon à bord régulier. On démontre que la régularité de la courbe persiste en dehors des points singuliers produits par ceux existant à l'instant initial. Ce type de résultat montre que le système d'Euler relatif à un fluide parfait incompressible, bien que non local, se comporte vis-à-vis de la propagation des singularités, comme un système local.

Ce texte trouve sa source dans trois cours faits à l'Institut Nankaï de Tian-Jin en 1991, à l'Ecole Polytechnique en 1992, et à l'Ecole Normale supérieure de Cachan en 1992–1993. Je tiens à remercier ici ces trois institutions. A ces diverses occasions, G. Allain, N. Burq, B. Bidegaray, C. Cancelier, T. Colin, P. Gamblin, C. Guillopé, J. Hong, G. Lebeau, L. Nedelec, X. Saint-Raymond, L. Robbiano et C.J. Xu ont manifesté pour le sujet un intérêt qui fût pour moi un puissant encouragement à la rédaction de ce texte. Je leur exprime toute ma gratitude. Je remercie particulièrement B. Bidegaray, R. Danchin, T. Desjardins et P. Gamblin qui ont relu divers morceaux et versions antérieures de ce texte et en ont extirpé force fautes.

Je remercie P. Gérard et D. Serre avec qui j'ai eu des discussions aussi amicales que fructueuses à propos des résultats exposés ici.

Enfin, il est évident que nombre de résultats et techniques exposés dans ce texte trouvent leur source dans les idées introduites en analyse non linéaire par J.-M. Bony à la fin des années soixante-dix. J'ai eu avec lui de nombreuses, et ô combien fécondes, discussions à ce propos. Je lui exprime ma profonde reconnaissance.

Je voudrais conclure cette introduction en remerciant très chaleureusement le rapporteur ; il m'a fait de nombreuses remarques et suggestions qui ont beaucoup amélioré le texte initial.

Chapitre 1

Présentation des équations

1.1 Qu'est-ce-qu'un fluide parfait?

On cherche à décrire l'évolution d'un fluide parfait incompressible entre deux temps t_0 et t_1. Une particule de fluide située au point x à l'instant t_0 sera située au point $\psi_1(x)$ à l'instant t_1. L'incompressibilité du fluide se traduit par le fait que l'application ψ_1, supposée être un difféomorphisme, conserve la mesure, c'est-à-dire que son jacobien est de déterminant 1.

Dans toute la suite, nous supposerons que le fluide est indéfiniment étendu dans tout l'espace à d dimensions, d valant 2 ou 3. Ce choix provient d'une volonté de simplification. En effet, on peut aussi formuler la mécanique des fluides sur un domaine régulier (il faut alors introduire des conditions aux limites) ou encore sur une variété compacte (la formulation est alors un peu plus délicate). Ici, nous devrons simplement, en quelques endroits, prendre garde aux problèmes à l'infini.

Nous allons maintenant préciser les espaces fonctionnels avec lesquels nous allons modéliser un fluide parfait incompressible. Dans toute cette section, on se donne un difféomorphisme ψ_1 qui conserve le volume.

Définition 1.1.1 *Nous désignerons par $\mathcal{L}$ l'espace des fonctions continûment différentiables de $[t_0, t_1] \times \mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^d$ telles que $\psi(t_0) = \mathrm{Id}$ et $\psi(t_1) = \psi_1$, telles qu'à chaque instant t, la fonction $\psi(t)$ soit un difféomorphisme de $\mathbf{R}^d$ et enfin telles que $\partial_t\psi(t)$ soit continue de $[t_0, t_1]$ dans L^2.*

Nous désignerons par $\mathcal{L}_0$ l'espace des fonctions de $\mathcal{L}$ telles qu'à tout instant t, le difféomorphisme $\psi(t)$ préserve la mesure.

Une évolution, a priori possible, d'un fluide incompressible entre l'état à l'instant t_0 et l'état décrit à l'instant t_1 par le difféomorphisme ψ_1, est modélisée par une fonction ψ de l'espace $\mathcal{L}_0$.

Pour introduire un problème variationnel, il convient de définir une fonctionnelle dont les extrémales seront la clef du problème. Nous allons ici introduire l'action.

Définition 1.1.2 *On appellera action l'application $\mathcal{A}$ définie de $\mathcal{L}$ dans $\mathbf{R}_+$ par*

$$\mathcal{A}(\psi) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d} |\partial_t\psi(t,x)|^2 dxdt.$$

L'action est une forme quadratique. L'espace $\mathcal{L}$ est inclus dans un espace affine. Le calcul de la différentielle de l'action $\mathcal{A}$ est des plus élémentaires. On a

$$D\mathcal{A}_\psi h = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t \psi(t,x) \partial_t h(t,x) dt dx. \tag{1.1}$$

L'idée est de définir un fluide parfait incompressible comme un fluide incompressible évoluant suivant des extrémales de la fonctionnelle action $\mathcal{A}$ restreinte à l'espace $\mathcal{L}_0$. Pour cela, il faut définir la notion d'accroissement infinitésimal sur cet espace $\mathcal{L}_0$. Ce dernier est une partie d'un espace affine. En s'inspirant de la définition usuelle de l'espace tangent aux sous-variétés plongées dans un espace linéaire, on pose la définition suivante.

Définition 1.1.3 *On appellera accroissement infinitésimal en un point ψ de l'espace $\mathcal{L}_0$ la dérivée en 0 d'une quelconque fonction Θ continûment différentiable de $[0,1]$ dans $\mathcal{L}_0$ telle que $\Theta(0) = \psi$.*

A cause de problèmes de régularité, on ne peut décrire exactement l'ensemble des accroissements infinitésimaux. De plus, tenter de trop s'appuyer sur l'intuition née de la dimension finie doit être réfréné par le fait que, toujours à cause de problèmes de régularité, on ne sait pas démontrer que l'ensemble $\mathcal{L}_0$ est localement homéomorphe à l'ensemble des accroissements infinitésimaux tels que l'on vient de les définir. Cependant, la proposition ci-après nous suffira. Etant donné un champ de vecteurs $v = (v^1, \ldots, v^d)$, on posera

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{d} \partial_i v^i.$$

Proposition 1.1.1 *Désignons par $\mathcal{T}$ l'ensemble des champs de vecteurs τ dont les coefficients sont continûment différentiables sur $[t_0, t_1] \times \mathbf{R}^d$, tels que*

$$\tau(t_0) = \tau(t_1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]\,,\ \operatorname{div} \tau(t) = 0.$$

Soit alors θ un accroissement infinitésimal en un point ψ de $\mathcal{L}_0$; il existe un champ de vecteurs τ de l'espace $\mathcal{T}$ tel que

$$\theta(t,x) = \tau(t, \psi(t,x)).$$

Réciproquement, soient α une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur l'intervalle $]t_0, t_1[$ et τ un champ de vecteurs de divergence nulle dont les composantes appartiennent à l'espace $\mathcal{S}$; si

$$\theta(t,x) = \alpha(t) \tau(\psi(t,x)),$$

alors θ est un accroissement infinitésimal au point ψ.

La démonstration de cette proposition repose sur le très facile lemme suivant :

Lemme 1.1.1 *Si $w \in C^1(I \times \mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ et si θ est une fonction appartenant à $C^1(I \times \mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ et vérifiant $\partial_s \theta(s,x) = w(s, \theta(s,x))$, alors, pour tout $s \in I$, $\partial_s \det D_x \theta(s) = 0$ si et seulement si $\operatorname{div} w(s) = 0$ pour tout $s \in I$.*

Il suffit d'appliquer la formule de composition des différentielles. On a

$$\partial_s D_x\theta(s,x) = D_x w(s,\theta(s,x))D_x\theta(s,x).$$

D'où il vient, à nouveau en appliquant la formule de composition des différentielles,

$$\partial_s \det D_x\theta(s,x) = \sum_{j=1}^{d} \det(D_x\theta^1,\ldots,\partial_s D_x\theta^j,\ldots,D_x\theta^d).$$

En développant le déterminant, on obtient

$$\partial_s \det D_x\theta(s,x) = \sum_{j,k=1}^{d} \det(D_x\theta^1,\ldots,\partial_k w^j D_x\theta^k,\ldots,D_x\theta^d).$$

D'où enfin

$$\partial_s \det D_x\theta(s,x) = \operatorname{div} w(s,\theta(s,x)) \times \det(D_x\theta(s,x)),$$

et ainsi le lemme.

Revenons à la démonstration de la proposition. Soit θ un accroissement infinitésimal au point ψ. Par définition, il existe une fonction Θ continûment différentiable de $[0,1]$ dans $\mathcal{L}_0$ telle que

$$\partial_s\Theta(s,t,x)_{|s=0} = \theta(t,x) \quad \text{et} \quad \Theta(0,t,x) = \psi(t,x).$$

Comme pour tout s et tout t, $\Theta(s,t)$ est un difféomorphisme, on peut définir un champ de vecteurs $\tilde{\tau}(s,t,x)$ par

$$\tilde{\tau}(s,t,x) = \partial_s\Theta(s,t,\Theta^{-1}(s,t,x)).$$

D'après le lemme 1.1.1 ci-dessus, on a

$$\forall (s,t) \in [0,1]\times[t_0,t_1]\ ,\ \operatorname{div}\tilde{\tau}(s,t) = 0$$

Vu que $\partial_s\theta(0,t,x) = \tilde{\tau}(0,t,\theta(t,x))$, on a le premier point de la proposition en posant $\tau(t,x) = \tilde{\tau}(0,t,x)$.

Le second point est très facile. Il suffit de résoudre l'équation différentielle autonome suivante :

$$\begin{cases} \partial_s\Theta(s,t,x) &= \alpha(t)\tau(t,\Theta(s,t,x)), \\ \Theta(0,t,x) &= \psi(t,x). \end{cases}$$

On peut maintenant définir de manière précise ce qu'est un fluide parfait incompressible.

Définition 1.1.4 *On dit qu'un fluide incompressible est parfait s'il évolue entre le temps t_0 et l'état ψ_1 au temps t_1 suivant un élément ψ de $\mathcal{L}_0$ tel que, pour tout accroissement infinitésimal θ au point ψ, on ait*

$$D\mathcal{A}(\psi)\cdot\theta = 0.$$

La définition donnée ci-dessus peut être formulée de manière heuristique en disant qu'un fluide parfait incompressible évolue suivant les extrémales de la fonctionnelle action, qui est définie sur l'espace des courbes de difféomorphismes préservant la mesure.

1.2 De Lagrange à Euler

Nous nous sommes intéressés précédemment à la description de l'évolution d'un fluide incompressible par une courbe tracée sur l'espace des difféomorphismes préservant la mesure ; c'est le point de vue lagrangien. Une autre façon de décrire un fluide est d'étudier le champ des vitesses des particules du fluide ; c'est le point de vue eulérien, qui d'ailleurs nous occupera jusqu'à la fin de cet ouvrage. Lorsque les champs de vecteurs et les difféomorphismes considérés sont assez réguliers, l'équivalence entre les deux points de vue, modulo une perte de régularité en temps, n'est rien d'autre que la théorie élémentaire des équations différentielles ordinaires.

En effet, considérons un élément ψ de $\mathcal{L}_0$. On définit alors le champ des vitesses suivant :

$$v(t,x) = \partial_t\psi(t,\psi^{-1}(t,x)). \tag{1.2}$$

D'après le lemme 1.1.1, pour tout $t \in [t_0,t_1]$, $\operatorname{div} v(t,x) = 0$. Réciproquement, si v est un champ de vecteurs suffisamment régulier, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de définir un flot ψ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\psi(t,x) & = & v(t,\psi(t,x)) \\ \psi(0,x) & = & x. \end{array}\right. \tag{1.3}$$

On peut maintenant établir les familières équations d'Euler.

Théorème 1.2.1 *Soient ψ une évolution d'un fluide parfait incompressible et v le champ de vecteurs de divergence nulle associé à ψ par (1.2). Il existe alors une distribution tempérée p telle que, si l'on pose $v\cdot\nabla = \sum_{i=1}^d v^i\partial_i$, on ait*

$$\partial_t v + v\cdot\nabla v = -\nabla p.$$

Supposons que ψ soit une évolution d'un fluide parfait incompressible. D'après la définition 1.1.3, la proposition 1.1.1 et la relation (1.1), on a, pour tout $\alpha \in C_0^\infty(]t_0,t_1[)$ et tout champ de vecteurs de divergence nulle $\tau \in C^\infty([t_0,t_1];\mathcal{S}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d))$,

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_t\psi(t,x)\partial_t(\alpha(t)\tau(t,\psi(t,x)))dtdx = 0.$$

Or, d'après (1.3), il vient

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d} v(t,\psi(t,x))\partial_t(\alpha(t)\tau(t,\psi(t,x)))dtdx = 0.$$

Une intégration par parties en t assure

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_t(v(t,\psi(t,x)))\alpha(t)\tau(t,\psi(t,x))dtdx = 0.$$

Etant donné que $\partial_t(v(t,\psi(t,x)) = (\partial_t v + v\cdot\nabla v)(t,\psi(t,x))$, et que $\psi(t)$ est un difféomorphisme préservant la mesure, il vient, pour tout $\alpha \in C_0^\infty(]t_0,t_1[)$ et tout champ de vecteurs de divergence nulle τ,

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d}(\partial_t v + v\cdot\nabla v)(t,x)\alpha(t)\tau(t,x)dtdx = 0. \tag{1.4}$$

Comme $\partial_t v + v \cdot \nabla v$ est une fonction continue du temps, on a, pour tout champ de vecteurs τ de divergence nulle et pour tout temps t

$$\int_{\mathbf{R}^d} (\partial_t v + v \cdot \nabla v)(t,x)\tau(t,x)dx = 0. \tag{1.5}$$

La première partie du théorème va maintenant résulter de la proposition suivante, qui est des plus classiques en théorie des distributions.

Proposition 1.2.1 *Soit w un champ de vecteurs à coefficients distributions tempérées. L'existence d'une distribution tempérée p telle que $w = \nabla p$ équivaut à la nullité du rotationnel de w, c'est-à-dire aux relations $\partial_j w^i = \partial_i w^j$.*

La démonstration de cette proposition est un exercice de théorie des distributions. Donnons-nous une fonction f_0 indéfiniment différentiable à support compact de la variable réelle d'intégrale 1. Supposons que la dimension d vaille 1. On définit alors, pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$,

$$\Phi(\phi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\phi(y) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y')dy'\right) f_0(y)\right) dy.$$

Il est clair que $\Phi(\partial_x \phi) = \phi$ et que $\Phi(\phi)$ est une fonction indéfiniment différentiable à support compact. Mieux, l'application Φ définie ci-dessus est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans lui-même. En effet, si $x \leq -A$, avec A strictement positif, alors,

$$|\Phi(\phi)(x)| \leq \int_{-\infty}^{x} |\phi(y)|dy + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y')dy'\right| \int_{-\infty}^{x} |f_0(y)|dy.$$

Si $-x$ est strictement positif, on a donc, pour tout entier N plus grand que 2,

$$|\Phi(\phi)(x)| \leq \int_{-x}^{\infty} \left(\frac{\sup_{y\in\mathbf{R}} (1+|y|)^{N+1} |\phi(y)|}{(1+|y'|)^{N+1}} + \|\phi\|_{L^1} \frac{\sup_{y\in\mathbf{R}} (1+|y|)^{N+1} |f_0(y)|}{(1+|y'|)^{N+1}} \right) dy'.$$

En posant

$$\mathcal{N}_N(\phi) = \|\phi\|_{L^1} + \sup_{y\in\mathbf{R}^d} |(1+|y|)^{N+1}\phi(y)|,$$

il vient

$$|x|^N |\Phi(\phi)(x)| \leq C\mathcal{N}_N(\phi).$$

Or, comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi(y) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y')dy'\right) f_0(y)\right) dy = 0,$$

le même raisonnement est valide pour x strictement positif. Le fait que

$$\partial_x \Phi(\phi) = \phi - f_0 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y')dy'$$

achève la démonstration de la continuité de Φ sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Soit w une distribution tempérée sur $\mathbf{R}$; on définit alors p par

$$< p, \phi >= - < w, \Phi(\phi) > .$$

Comme Φ est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans lui-même, p est une distribution tempérée. De plus,

$$\begin{aligned} < \partial_x p, \phi > &= - < p, \partial_x \phi > \\ &= < w, \Phi(\partial_x \phi) > \\ &= < w, \phi > . \end{aligned}$$

D'où le résultat en dimension $d = 1$.

Supposons maintenant le résultat vrai en dimension $d \leq k-1$. Soit w un champ de vecteurs à coefficients distributions tempérées sur $\mathbf{R}^k$ vérifiant les hypothèses de la proposition. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on définit alors la distribution tempérée π sur $\mathbf{R}^{k-1}$ par

$$< \partial_i \pi, \theta >=< w^i, f_0 \otimes \theta > .$$

On peut alors définir la distribution tempérée sur $\mathbf{R}^k$ par

$$< p, \phi >= - < w^1, \Phi_k(\phi) > + < \pi, \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y_1) dy_1 >,$$

avec $\Phi_k(\phi)(x) = \Phi(\phi(\cdot, x_2, \ldots, x_k))(x_1)$. Il suffit maintenant de vérifier que $\partial_i p = w^i$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} < \partial_1 p, \phi > &= < w^1, \Phi_k(\partial_1 \phi) > - < \pi, \int_{-\infty}^{\infty} \partial_1 \phi(y_1) dy_1 > \\ &= < w^1, \phi > . \end{aligned}$$

Si $i \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} < \partial_i p, \phi > &= + < w^1, \Phi_k(\partial_i \phi) > - < \pi, \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i \phi(y_1) dy_1 > \\ &= - < \partial_i w^1, \Phi_k(\phi) > + < \partial_i \pi, \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y_1) dy_1 > \\ &= - < \partial_1 w^i, \Phi_k(\phi) > + < w^i, f_0 \otimes \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y_1) dy_1 > \\ &= < w^i, \partial_1 \Phi_k(\phi) > + < w^i, f_0 \otimes \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y_1) dy_1 > \\ &= < w^i, \phi > \end{aligned}$$

D'où la proposition. On peut en déduire trivialement les deux corollaires suivants :

Corollaire 1.2.1 *Soit w un champ de vecteurs à coefficients distributions tempérées tel que, pour tout champ de vecteurs u de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ de divergence nulle, on ait*

$$< w, u >= \sum_i < w^i, u^i >= 0.$$

Il existe alors une distribution tempérée p telle que $w = \nabla p$.

Corollaire 1.2.2 *Soit w un champ de vecteurs de divergence nulle sur $\mathbf{R}^2$ dont les coefficients sont des distributions tempérées. Il existe une distribution tempérée f telle que*

$$w \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla^\perp f = (-\partial_2 f, \partial_1 f).$$

Pour démontrer le premier corollaire, on considère une fonction ϕ de l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Lorsque i et j sont deux entiers positifs distincts inférieurs à d, on considère le champ de vecteurs u dont la $j$ème composante est $\partial_i\phi$, la $i$ème $-\partial_j\phi$, les autres étant identiquement nulles. Il est clair que u est un champ de vecteurs de divergence nulle. Donc par hypothèse

$$\begin{aligned} < w, u > &= < w^j, \partial_i\phi > - < w^i, \partial_j\phi > \\ &= < \partial_j w^i - \partial_i w^j, \phi > \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\partial_j w^i - \partial_i w^j = 0$; d'où le corollaire 1.2.1

Pour démontrer le second corollaire, on considère le champ de vecteurs de divergence nulle $\widetilde{w} = (-w^2, w^1)$. Il est clair que l'on a $\partial_1\widetilde{w}^2 - \partial_2\widetilde{w}^1 = \operatorname{div} w = 0$. Il existe donc une distribution tempérée f telle que $\widetilde{w} = (\partial_1 f, \partial_2 f)$. D'où le corollaire 1.2.2.

Revenons à la démonstration du théorème 1.2.1. Il résulte clairement du corollaire 1.2.1 ci-dessus et de la relation (1.4) que si ψ est une évolution d'un fluide parfait incompressible, alors le champ de vitesses associé à $\psi(t)$ par (1.2) vérifie

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p. \tag{1.6}$$

Réciproquement, soit v un champ de vecteurs vérifiant la relation (1.6) ci-dessus. On considère alors le flot ψ de v défini par (1.3) et θ un quelconque accroissement infinitésimal en ψ. Alors, on a

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_t\psi(t,x)\partial_t\theta(t,x)dtdx = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_t^2\psi(t,x)\theta(t,x)dtdx.$$

La proposition 1.1.1 assure l'existence d'un champ de vecteurs de divergence nulle τ tel que $\theta = \tau(t, \psi(t,x))$. Il en résulte que

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_t\psi(t,x)\partial_t\theta(t,x)dtdx = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d}(\nabla p)(\psi(t,x))\tau(t,\psi(t,x))dtdx.$$

Pour tout temps t, le difféomorphisme $\psi(t)$ conserve la mesure, ce qui conclut la démonstration du théorème.

Nous allons maintenant donner une formulation faible de l'équation (1.6). Cette formulation sera équivalente à celle de la relation (1.6) lorsque le champ de vecteurs solution sera suffisamment régulier. Néanmoins, il sera important d'avoir une formulation dite faible des équations, notamment dans le chapitre 6. Si v est un champ de vecteurs de divergence nulle continûment différentiable, on a $v \cdot \nabla a = \operatorname{div}(av)$ pour toute fonction a continûment différentiable. Il en résulte que

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v = \partial_t v + \operatorname{div} v \otimes v,$$

où $\operatorname{div} v \otimes v$ désigne le champ de vecteurs dont la ième coordonnée est $\sum_{j=1}^d \partial_j(v^i v^j)$. D'où la formulation suivante des équations d'Euler.

$$(E)\left\{\begin{aligned} \partial_t v + \operatorname{div} v \otimes v &= -\nabla p \\ \operatorname{div} v &= 0 \\ v_{|t=0} &= v_0. \end{aligned}\right.$$

1.3 Le tourbillon, la pression et la dimension 2.

Le tourbillon est la quantité clef pour comprendre le système d'Euler. Sur le tourbillon, transparaît très vite la différence capitale qu'il y a entre le cas où la dimension d vaut 2 et celui où elle vaut 3.

Définition 1.3.1 *Le tourbillon d'un champ de vecteurs (ou vorticity en anglais) est le rotationnel de ce champ de vecteurs.*

Convention *Lorsque la dimension est 2, on identifie les matrices antisymétriques avec les réels. Ainsi, on note*

$$\omega(v) = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$$

le tourbillon de v. En dimension supérieure, on note

$$\Omega(v) = (\Omega^i_j(v))_{1\leq i,j\leq d} \quad \text{avec} \quad \Omega^i_j(v) = \partial_j v^i - \partial_i v^j.$$

On omet de noter explicitement (v) en l'absence de toute ambiguïté.

L'importance du tourbillon dans l'étude des solutions du système d'Euler incompressible (E) vient du fait qu'il détermine le champ des vitesses. En effet, on a

$$\partial_j^2 v^i = \partial_j \Omega^i_j(v) + \partial_i \partial_j v^j.$$

Autrement dit,

$$\Delta v^i = \partial_i \operatorname{div} v + \sum_j \partial_j \Omega^i_j. \tag{1.7}$$

L'égalité ci-dessus entraîne immédiatement la proposition suivante.

Proposition 1.3.1 *Deux champs de vecteurs dont les coefficients sont des distributions tempérées et dont la divergence ainsi que le rotationnel coïncident, diffèrent d'un champ de vecteurs dont les coefficients sont des polynômes harmoniques.*

Dans le cas d'une solution du système (E), si l'on suppose en outre que le champ de vecteurs est nul à l'infini, il est alors exactement déterminé par son tourbillon.

Considérons maintenant un champ de vecteurs v appartenant à l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Désignons par E_d la solution fondamentale du laplacien nulle à l'infini si $d \geq 3$, c'est-à-dire

$$E_d(x) = -\frac{c_d}{|x|^{d-2}} \quad \text{avec} \quad c_d = \frac{2\pi^{(d+1/2)}}{\Gamma((d+1)/2)}.$$

Si $d = 2$, $E_d(x)$ désigne la fonction $(2\pi)^{-1}\log|x|$.

On pose alors

$$\widetilde{v}^i = \sum_k \partial_k E_d \star \Omega^i_k(v).$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\Omega(\widetilde{v})^i_j &= \sum_k \{\partial_k\partial_j E_d \star (\partial_k v^i - \partial_i v^k) - \partial_k \partial_i E_d \star (\partial_k v^j - \partial_j v^k)\} \\
&= \sum_k \{\partial_k^2 E_d \star \partial_j v^i - \partial_j E_d \star \partial_i\partial_k v^k - \partial_k^2 E_d \star \partial_i v^j + \partial_j E_d \star \partial_i \partial_k v^k\}.
\end{aligned}$$

D'où $\Omega(\tilde{v}) = \Omega(v)$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \tilde{v} &= \sum_{i,k} \partial_i \partial_k E_d \star (\partial_k v^i - \partial_i v^k) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc, en supposant par exemple que le champ de vecteurs v appartienne à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et soit de divergence nulle, on retrouve la fameuse loi dite de Biot-Savart :

$$v^i(x) = c_d \sum_k \int_{\mathbf{R}^d} \frac{x^k - y^k}{|x-y|^d} \Omega^i_k(y) dy. \tag{1.8}$$

Intéressons-nous maintenant à l'évolution du tourbillon. Pour cela, différentions le système d'Euler (E). Il vient alors

$$\partial_t \partial_j v^i + \sum_{k=1}^{d} \partial_j \partial_k (v^i v^k) = -\partial_i \partial_j p. \tag{1.9}$$

En prenant la partie antisymétrique de la matrice définie par les relations ci-dessus, il vient

$$\partial_t(\partial_j v^i - \partial_i v^j) + v \cdot \nabla(\partial_j v^i - \partial_i v^j) + \sum_{k=1}^{d} (\partial_j v^k \partial_k v^i - \partial_i v^k \partial_k v^j) = 0. \tag{1.10}$$

Or, on a

$$\partial_j v^k \partial_k v^i - \partial_i v^k \partial_k v^j = (\partial_j v^k - \partial_k v^j)\partial_k v^i + (\partial_k v^i - \partial_i v^k)\partial_k v^j.$$

D'où il vient

$$\partial_t \Omega^i_j + v \cdot \nabla \Omega^i_j + (\Omega \cdot \nabla v)^i_j = 0$$

en posant

$$(\Omega \cdot \nabla v)^i_j = \sum_{k=1}^{d} \Omega^k_j \partial_k v^i - \Omega^k_i \partial_k v^j.$$

Ainsi, en dimension quelconque,

$$\partial_t \Omega + v \cdot \nabla \Omega + \Omega \cdot \nabla v = 0, \tag{1.11}$$

Remarquons que la matrice $\Omega \cdot \nabla v$ n'est rien d'autre que la partie antisymétrique de la matrice $(\nabla v)^2$.

Mais, lorsque la dimension d vaut 2, il résulte de (1.10) que

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega + \partial_1 v^1 \partial_1 v^2 + \partial_1 v^2 \partial_2 v^2 - \partial_2 v^1 \partial_1 v^1 - \partial_2 v^2 \partial_2 v^1 = 0.$$

Il vient alors

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega + \omega \operatorname{div} v = 0.$$

Comme ici la divergence du champ de vecteurs est nulle, on obtient la relation bien connue

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0. \tag{1.12}$$

Cette relation est extrêmement importante. C'est sur cette relation que se distingue la dimension 2 de la dimension 3. Cette relation, associée à la nullité de la divergence du champ de vecteurs v, assurera que toutes les normes L^p sont conservées. Ceci sera la clef de tous les résultats spécifiques à la dimension 2 que nous allons démontrer dans ce livre. Remarquons pour conclure, qu'en dimension deux, la loi de Biot-Savart s'écrit

$$v = \nabla^\perp(E_2 \star \omega). \tag{1.13}$$

Aux chapitres 5 et 6, nous aurons besoin, contrairement aux chapitres précédents, du concept d'énergie cinétique ; c'est-à-dire que nous aurons à estimer des normes L^2 liées au champ de vecteurs solution du système d'Euler (E). Cependant, nous ne pourrons pas supposer que les champs de vecteurs que nous étudions sont d'énergie cinétique finie. Le bon cadre que nous précisons dès maintenant est l'étude de perturbation d'énergie cinétique finie de solutions stationnaires particulières.

Définition 1.3.2 *On appelle champ de vecteurs stationnaire et on note σ, tout champ de vecteurs de la forme*

$$\sigma = \Big(-\frac{x^2}{r^2}\int_0^r \rho g(\rho)d\rho, \frac{x^1}{r^2}\int_0^r \rho g(\rho)d\rho\Big) \quad \text{où} \quad g \in C_0^\infty(\mathbf{R}\setminus\{0\}).$$

On a la proposition suivante :

Proposition 1.3.2 *Tout champ de vecteurs stationnaire σ est une solution indéfiniment différentiable du système (E) dont le tourbillon est $g(r)$.*

En effet, en posant

$$f(r) = r^{-2}\int_0^r \rho g(\rho)d\rho,$$

par définition de σ, on a

$$\begin{aligned}
\sigma\cdot\nabla\sigma &= \begin{pmatrix} -x^2 f(r)\partial_1(-x^2 f(r)) + x^1 f(r)\partial_2(-x^2 f(r)) \\ -x^2 f(r)\partial_1(x^1 f(r)) + x^1 f(r)\partial_2(x^1 f(r)) \end{pmatrix}\\
&= -f^2(r)\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}\\
&= -\nabla(h(r)) \quad \text{avec} \quad h(r) = \int_0^r \rho f(\rho)d\rho.
\end{aligned}$$

Remarque

Supposons que la fonction g soit positive, bornée, à support compact, et non identiquement nulle. Il est alors clair que si $|x|$ est assez grand, on a

$$|\sigma(x)| \simeq \frac{C}{|x|}\cdot$$

En particulier, le champ de vecteurs σ n'appartient pas à l'espace $L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$. Par exemple au chapitre 6, nous considérerons systématiquement des perturbations d'énergie cinétique finie de champ de vecteurs de type σ. Une telle classe de fonctions est suffisamment vaste pour contenir les données initiales aussi peu régulières que celle du type "nappe de tourbillon" (voir le chapitre 6). Nous allons en effet démontrer le lemme suivant.

Lemme 1.3.1 *Considérons une mesure bornée μ telle que la mesure $(1+|x|)\mu$ le soit aussi. Si en outre μ appartient à $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$, alors il existe un unique champ de vecteurs de divergence nulle v appartenant à $\sigma + L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ pour un certain champ de vecteurs stationnaire σ et tel que $\omega(v)=\mu$.*

L'unicité est très facile à démontrer. Soient deux champs de vecteurs v et v' appartenant à un même espace $\sigma + L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ et ayant même tourbillon ω. Du corollaire 1.2.2 résulte l'existence de deux distributions tempérées f et f' telles que $v=\nabla^\perp f$ et $v'=\nabla^\perp f'$. La distribution tempérée $f-f'$ est harmonique, donc c'est un polynôme. Les composantes du champ de vecteurs $v-v'$ sont donc des polynômes. Or $v-v'$ est de carré intégrable, donc $v=v'$.

L'existence utilise l'hypothèse de décroissance à l'infini faite sur la mesure μ. On considère σ un quelconque champ de vecteurs stationnaire tel que

$$\int_{\mathbf{R}^2}\omega(\sigma)=\int_{\mathbf{R}^2}d\mu.$$

Par hypothèse, $\widehat{\mu}$ est une fonction continûment différentiable dont la différentielle est bornée. L'inégalité des accroissements finis assure que

$$|\widehat{\mu}(\xi)-\widehat{\omega}(\sigma)(\xi)|\leq C|\xi|\int_{\mathbf{R}^2}(1+|x|)d|\mu|(x).$$

La fonction

$$\bar{\xi}|\xi|^{-2}(\widehat{\mu}(\xi)-\widehat{\omega}(\sigma)(\xi))$$

est donc une fonction bornée sur $\mathbf{R}^2$. D'où la définition suivante de v :

$$v=\sigma+\mathcal{F}^{-1}\big(\chi(\xi)\bar{\xi}|\xi|^{-2}(\widehat{\mu}(\xi)-\widehat{\omega}(\sigma)(\xi))+(\mathrm{Id}-\chi(\xi))\bar{\xi}|\xi|^{-2}(\widehat{\mu}(\xi)-\widehat{\omega}(\sigma)(\xi))\big).$$

Le fait que μ appartienne à $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$ assure clairement le lemme.

Grâce à ce lemme, nous pouvons maintenant présenter la définition suivante.

Définition 1.3.3 *Soit m un réel. On désignera par E_m l'ensemble des champs de vecteurs de divergence nulle v du plan tel qu'il existe un champ de vecteurs stationnaire σ tel que*

$$\int_{\mathbf{R}^2}\omega(\sigma)=m \quad \textit{et} \quad v-\sigma\in L^2.$$

Le lemme 1.3.1 ci-dessus assure en particulier que $E_0=L^2$. Il en résulte que l'espace E_m peut se représenter comme $\sigma+L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ et que, si σ' est un autre champ de vecteurs stationnaire tel que l'on ait

$$\int_{\mathbf{R}^2}\omega(\sigma)=\int_{\mathbf{R}^2}\omega(\sigma'),$$

alors on sait que $\sigma+L^2=\sigma'+L^2$. L'espace E_m est donc, pour tout réel m, un espace affine dont l'espace vectoriel associé est L^2.

Pour clore cette section introductive à la dimension 2, nous allons établir une formulation plus faible que celle de la section 1.2. Cette formulation encore affaiblie, outre son intérêt propre, sera l'une des clefs de la démonstration du théorème 6.1.1 sur les nappes de tourbillon.

Pour cela, il nous faut calculer la pression. Utilisons la relation (1.9). En faisant la somme pour $i = j$ dans (1.9), on obtient

$$-\Delta p = \sum_{j,k=1}^{d} \partial_j \partial_k (v^j v^k), \tag{1.14}$$

cette formule étant bien entendu valable en toute dimension.

Nous avons choisi de supposer le fluide indéfiniment étendu dans tout l'espace à d dimensions, c'est-à-dire de travailler avec des fonctions définies sur tout $\mathbf{R}^d$. Ainsi, en imposant des conditions de (dé)croissance à l'infini sur la pression, nous pourrons la déterminer à partir du champ de vecteurs solution des équations d'Euler. Nous reviendrons sur ce problème dans la section 2.5.

Plaçons-nous à nouveau dans le cadre de la dimension 2 et considérons un champ de vecteurs v dans $L^\infty([0,T]; E_m)$ solution du système d'Euler (E). Par définition de l'espace E_m, les produits du type $v^i v^j$ appartiennent à $L^1 + L^2$. Donc les distributions $\mathcal{F}_x(v^i v^j)$ appartiennent à l'espace $L^\infty([0,T]; L^2 + L^\infty)$. Soit p' la fonction définie par

$$p' = -\mathcal{F}_x^{-1} \sum_{1 \leq i,j \leq 2} (|\xi|^{-2} \xi_i \xi_j \mathcal{F}_x(v^i v^j)). \tag{1.15}$$

Comme l'espace $L^2 + L^\infty$ ne contient la transformée de Fourier d'aucune distribution tempérée harmonique et non nulle, nous avons démontré l'assertion suivante :

Proposition 1.3.3 *Soit (v,p) une solution du système (E) appartenant à l'espace $L^\infty([0,T]; E_m) \times L^\infty([0,T]; \mathcal{F}^{-1}(L^2 + L^\infty))$. Si (v,p') est aussi solution du système (E) et appartient au même espace, alors $p = p'$ et la pression p se déduit du champ de vecteurs v par (1.15).*

On peut maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *Soient m un réel et v un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; E_m)$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe $p \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2))$ telle que $\mathcal{F}_x p \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2 + L^\infty)$ et telle que (v,p) soit solution du système (E).

(ii) Il existe $q \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2))$ telle que $\mathcal{F}_x q \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2 + L^\infty)$ et telle que (v,p) soit solution du système

$$\partial_t v + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_1 & 2\partial_2 \\ -\partial_2 & 2\partial_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v^1)^2 - (v^2)^2 \\ v^1 v^2 \end{pmatrix} = -\nabla q. \tag{1.16}$$

(iii) Le champ de vecteurs satisfait

$$\partial_t v + A(D) \begin{pmatrix} (v^1)^2 - (v^2)^2 \\ v^1 v^2 \end{pmatrix} = 0 \tag{1.17}$$

en définissant $A(D)$ par

$$A(\xi) = i \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2^2 |\xi|^{-2} & \xi_2(\xi_2^2 - \xi_1^2)|\xi|^{-2} \\ -\xi_1^2 \xi_2 |\xi|^{-2} & \xi_1(\xi_1^2 - \xi_2^2)|\xi|^{-2} \end{pmatrix}.$$

La démonstration du premier point du théorème est très simple. On commence par remarquer que

$$\operatorname{div} v \otimes v + \nabla p = \operatorname{div} v \otimes v - \frac{1}{2}\nabla(|v|^2) + \frac{1}{2}\nabla(|v|^2).$$

Il est clair que $\mathcal{F}(|v|^2)$ appartient à l'espace $L^2 + L^\infty$. La suite de calculs ci-après suffit à conclure.

$$\begin{aligned}
2\operatorname{div} v \otimes v - \nabla(|v|^2) &= \begin{pmatrix} 2\partial_1(v^1)^2 + 2\partial_2(v^1v^2) - \partial_1(v^1)^2 - \partial_1(v^2)^2 \\ 2\partial_1(v^1v^2) + 2\partial_2(v^2)^2 - \partial_2(v^1)^2 - \partial_2(v^2)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\partial_2(v^1v^2) + \partial_1(v^1)^2 - \partial_1(v^2)^2 \\ 2\partial_1(v^1v^2) - \partial_2(v^1)^2 + \partial_2(v^2)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_1 & 2\partial_2 \\ -\partial_2 & 2\partial_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v^1)^2 - (v^2)^2 \\ v^1v^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour démontrer le second point de ce théorème, on utilise bien entendu la proposition 1.3.3 ci-dessus. Notons par $\widetilde{\Delta}^{-1}$ l'opérateur de multiplication de la transformée de Fourier par $-|\xi|^{-2}$. Cet opérateur définit un inverse à gauche du laplacien, c'est-à-dire que l'on a $\widetilde{\Delta}^{-1}\Delta = \mathrm{Id}$. Il suffit alors de démontrer que, si p est la fonction définie par (1.15), alors

$$B \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{div} v \otimes v + \nabla p = \widetilde{\Delta}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_1\partial_2^2 & \partial_2(\partial_2^2 - \partial_1^2) \\ -\partial_1^2\partial_2 & \partial_1(\partial_1^2 - \partial_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v^1)^2 - (v^2)^2 \\ v^1v^2 \end{pmatrix}.$$

Par définition de la pression (1.15), il vient

$$B = \begin{pmatrix} \partial_1(v^1)^2 + \partial_2(v^1v^2) \\ \partial_1(v^1v^2) + \partial_2(v^2)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{i,j} \widetilde{\Delta}^{-1}\partial_1\partial_i\partial_j(v^iv^j) \\ \sum_{i,j} \widetilde{\Delta}^{-1}\partial_2\partial_i\partial_j(v^iv^j) \end{pmatrix}.$$

Comme $\widetilde{\Delta}^{-1}\Delta = \mathrm{Id}$, le champ de vecteurs B vaut

$$\widetilde{\Delta}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\partial_1(v^1)^2 + \Delta\partial_2(v^1v^2) - \partial_1^3(v^1)^2 - 2\partial_1^2\partial_2(v^1v^2) - \partial_1\partial_2^2(v^2)^2 \\ \Delta\partial_2(v^2)^2 + \Delta\partial_1(v^1v^2) - \partial_2^3(v^2)^2 - 2\partial_1\partial_2^2(v^1v^2) - \partial_1^2\partial_2(v^1)^2 \end{pmatrix}.$$

En écrivant que $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$, on trouve que B vaut

$$\widetilde{\Delta}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_1\partial_2^2(v^1)^2 - \partial_1^2\partial_2(v^1v^2) - \partial_1\partial_2^2(v^2)^2 + \partial_2^3(v^1v^2) \\ \partial_2\partial_1^2(v^2)^2 - \partial_1\partial_2^2(v^1v^2) - \partial_2\partial_1^2(v^1)^2 + \partial_1^3(v^1v^2) \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement que

$$B = \widetilde{\Delta}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_1\partial_2^2 & \partial_2(\partial_2^2 - \partial_1^2) \\ -\partial_1^2\partial_2 & \partial_1(\partial_1^2 - \partial_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v^1)^2 - (v^2)^2 \\ v^1v^2 \end{pmatrix}.$$

D'où le théorème.

1.4 Références et remarques

Les deux premières sections de ce chapitre suivent les grandes lignes de la présentation de la mécanique des fluides exposée par V. Arnold dans [5]. Cette approche a été reprise par E. Ebin et J. Marsden dans [38]. Elle a connu récemment un regain d'intérêt sous l'impulsion des travaux de Y. Brenier et A. Shnirelman. Dans [18], Y. Brenier généralise la notion de solution en relaxant le problème variationnel posé. Dans [62], A. Shnirelman étudie l'aspect "variété riemannienne" du groupe des difféomorphimes préservant la mesure. De plus, D. Serre utilise dans [61] cette démarche pour modéliser les fluides compressibles.

Dans la troisième section, les propriétés exposées sont tout à fait classiques, à l'exception de la formulation faible spécifique à la dimension deux, clairement dégagée par J.-M. Delort dans [34] et implicitement contenue dans [37] et [2].

Chapitre 2

Théorie de Littlewood-Paley

2.1 Découpage dyadique

L'idée de base consiste à échantillonner les fréquences à l'aide d'un découpage de leur espace en couronnes de taille 2^q, q décrivant l'ensemble des entiers naturels. L'intérêt de cette technique réside dans le comportement vis-à-vis de la dérivation des distributions tempérées dont la transformée de Fourier est à support compact. Si le support de $\widehat{u}$ est inclus dans une boule de centre 0 et de rayon λ, alors une dérivation coûte au plus λ ; si le support de $\widehat{u}$ est inclus dans une couronne de centre 0, de petit rayon $r_1\lambda$ et de grand rayon $r_2\lambda$, notée $\mathcal{C}(0, r_1\lambda, r_2\lambda)$, alors une dérivation coûte exactement λ. Plus précisement, on a le lemme suivant :

Lemme 2.1.1 *Soit (r_1, r_2) un couple de réels strictement positifs tels que $r_1 < r_2$. Il existe une constante C telle que, pour tout entier k, tout couple de réels (a, b) tel que $b \geq a \geq 1$ et toute fonction u de L^a, on ait*

$$\text{Supp } \widehat{u} \subset B(0, r_1\lambda) \Rightarrow \sup_{\alpha=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^b} \leq C^k \lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \|u\|_{L^a} \ ;$$
$$\text{Supp } \widehat{u} \subset \mathcal{C}(0, r_1\lambda, r_2\lambda) \Rightarrow C^{-k}\lambda^k \|u\|_{L^a} \leq \sup_{\alpha=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \leq C^k \lambda^k \|u\|_{L^a}.$$

Soit ϕ une fonction de C_0^∞ valant 1 près de la boule de centre 0 et de rayon r_1, désignons par g sa transformée de Fourier inverse. Il est clair que $\widehat{u}(\xi) = \phi(\lambda^{-1}\xi)\widehat{u}(\xi)$. On en déduit alors que

$$u(x) = \lambda^d \int g(\lambda y) u(x-y) dy.$$

Par dérivation, il vient, pour tout multi-entier α,

$$\partial^\alpha u(x) = \lambda^{d+|\alpha|} \int (\partial^\alpha g)(\lambda y) u(x-y) dy.$$

On utilise alors l'inégalité de convolution bien connue suivante :

$$\|f \star g\|_{L^b} \leq \|f\|_{L^c} \|g\|_{L^a} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c} = 1 + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}.$$

Il vient alors

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^b} \leq \lambda^{|\alpha|} \lambda^{d(1-\frac{1}{c})} \|\partial^\alpha g\|_{L^c} \|u\|_{L^a}.$$

Or, on a les majorations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\|\partial^\alpha g\|_{L^c} &\leq \|\partial^\alpha g\|_{L^\infty} + \|\partial^\alpha g\|_{L^1} \\
&\leq \|(1+|\cdot|^2)^d \partial^\alpha g\|_{L^\infty} \\
&\leq \|(\mathrm{Id}-\Delta)^d((\cdot)^\alpha \phi)\|_{L^1} \\
&\leq C^k.
\end{aligned}
$$

D'où le premier point du lemme. Pour démontrer le second, nous allons utiliser, de façon très élémentaire, les techniques de l'analyse microlocale. Nous allons considérer des intersections de couronnes et de cônes dans l'espace des fréquences.

Soit $(\theta_i)_{1\leq i\leq d}$ une suite de fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbf{S}^{d-1}$ vérifiant les propriétés ci-après. Pour tout i, le support de θ_i est inclus dans l'ensemble des ξ tels que $\xi_i \neq 0$. La somme $\sum_i \theta_i$ vaut identiquement 1. On désignera toujours par θ_i la fonction homogène de degré 0 sur $\mathbf{R}^d$ qui coïncide avec θ_i sur $\mathbf{S}^{d-1}$. On considère maintenant une fonction ϕ de $C_0^\infty(\mathbf{R}^d\backslash\{0\})$ valant 1 près de $\mathcal{C}(0,r_1,r_2)$. Désignons par g sa transformée de Fourier inverse. Il est clair que $\widehat{u}(\xi) = \phi(\lambda^{-1}\xi)\widehat{u}(\xi)$. Par définition de la suite $(\theta_i)_{1\leq i\leq d}$, on a

$$
\widehat{u}(\xi) = \sum_{i=1}^{d} \theta_i(\xi)\frac{\phi(\lambda^{-1}\xi)}{\xi_i^k}\mathcal{F}(D_i^k u)(\xi). \tag{2.1}
$$

Posons $\phi_{i,k}(\xi) = \xi_i^{-k}\theta_i(\xi)\phi(\xi)$; il est clair que $\phi_{i,k}$ est une fonction indéfiniment différentiable dont le support est un compact ne contenant pas l'origine. Donc, si $g_{i,k} = \mathcal{F}^{-1}\phi_{i,k}$, alors $g_{i,k} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. D'où

$$
\lambda^k u(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda^d \int g_{i,k}(\lambda y)(D_i^k u)(x-y)dy. \tag{2.2}
$$

Il en résulte que $\lambda^k\|u\|_{L^a} \leq \sum_{i=1}^d \|g_{i,k}\|_{L^1}\|D_i^k u\|_{L^a}$. Comme précédemment, on majore $\|g_{i,k}\|_{L^1}$ par C^k. Le lemme est ainsi démontré.

Après avoir justifié son introduction, définissons maintenant une partition de l'unité dyadique. Nous l'utiliserons tout au long de ce livre.

Proposition 2.1.1 *Désignons par $\mathcal{C}$ la couronne de centre 0, de petit rayon 3/4 et de grand rayon 8/3.Il existe alors deux fonctions positives radiales χ et φ appartenant respectivement à $C_0^\infty(B(0,4/3))$ et à $C_0^\infty(\mathcal{C})$ telles que :*

$$
\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1, \tag{2.3}
$$

$$
|p-q| \geq 2 \Rightarrow \mathrm{Supp}\ \varphi(2^{-q}\cdot) \cap \mathrm{Supp}\ \varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset, \tag{2.4}
$$

$$
q \geq 1 \Rightarrow \mathrm{Supp}\ \chi \cap \mathrm{Supp}\ \varphi(2^{-q}\cdot) = \emptyset, \tag{2.5}
$$

si $\widetilde{\mathcal{C}} = B(0,2/3) + \mathcal{C}$, alors $\widetilde{\mathcal{C}}$ est une couronne et l'on a

$$
|p-q| \geq 5 \Rightarrow 2^p\widetilde{\mathcal{C}} \cap 2^q\mathcal{C} = \emptyset, \tag{2.6}
$$

$$
\frac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1. \tag{2.7}
$$

Fixons ensuite un réel α dans l'intervalle $]1, 4/3[$ et notons $\mathcal{C}'$ la couronne de centre 0, de petit rayon α^{-1} et de grand rayon 2α. On choisit alors une fonction θ, radiale, à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, indéfiniment différentiable, supportée dans $\mathcal{C}$ et valant 1 près de $\mathcal{C}'$.

Le point important est le suivant. Pour tout couple d'entiers (p, q) on a

$$|p-q| \geq 2 \Rightarrow 2^q\mathcal{C} \cap 2^p\mathcal{C} = \emptyset. \tag{2.8}$$

En effet, supposons que $2^p\mathcal{C} \cap 2^q\mathcal{C} \neq \emptyset$, et que $p \geq q$. Il en résulte que $2^p \times 3/4 \leq 4 \times 2^{q+1}/3$, ce qui oblige $p - q$ à être inférieur ou égal à 1. Posons maintenant

$$S(\xi) = \sum_{q\in\mathbf{Z}} \theta(2^{-q}\xi).$$

D'après (2.8), cette somme est localement finie sur l'espace $\mathbf{R}^d\backslash\{0\}$. La fonction S est donc de classe C^∞ sur cet espace. Le réel α étant strictement supérieur à 1,

$$\bigcup_{q\in\mathbf{Z}} 2^q\mathcal{C}' = \mathbf{R}^d\backslash\{0\}.$$

Comme θ est positive et vaut 1 près de $\mathcal{C}'$, il résulte de la propriété de recouvrement ci-dessus que la fonction S est strictement positive. On pose alors

$$\varphi = \frac{\theta}{S}. \tag{2.9}$$

Vérifions que φ convient. Il est évident que $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{C})$. La fonction $1 - \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi)$ est, d'après (2.8), de classe C^∞. Or, vu le support de φ, on a

$$|\xi| \geq \frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1. \tag{2.10}$$

D'où les identités (2.3) et (2.4) en posant

$$\chi(\xi) = 1 - \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi). \tag{2.11}$$

L'identité (2.5) est une conséquence immédiate de (2.8) et de (2.10). Démontrons maintenant l'identité (2.6), qui nous sera utile dans la section 2.4. Il est clair que la couronne $\tilde{\mathcal{C}}$ est la couronne de centre 0, de petit rayon $1/12$ et de grand rayon $10/3$. Alors, il vient

$$2^p\tilde{\mathcal{C}} \cap 2^q\mathcal{C} \neq \emptyset \Rightarrow \Big(\frac{3}{4} \times 2^q \leq 2^p \times \frac{10}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{12} \times 2^p \leq 2^q\frac{8}{3}\Big).$$

D'où la relation (2.6).

Démontrons maintenant les inégalités (2.7). Comme χ et φ prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, il est clair que

$$\chi^2(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1. \tag{2.12}$$

Minorons les sommes de carrés. La notation $a \equiv b(2)$ signifiant que $a-b$ est paire, on a

$$1 = (\chi(\xi) + \Sigma_0(\xi) + \Sigma_1(\xi))^2 \quad \text{avec}$$
$$\Sigma_0(\xi) = \sum_{q\equiv 0(2), q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) \quad \text{et} \quad \Sigma_1(\xi) = \sum_{q\equiv 1(2), q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi).$$

Il en résulte que $1 \leq 3(\chi^2(\xi) + \Sigma_0^2(\xi) + \Sigma_1^2(\xi))$. Or, d'après (2.8), il vient

$$\Sigma_i^2(\xi) = \sum_{q\geq 0, q\equiv i(2)} \varphi^2(2^{-q}\xi).$$

D'où la proposition.

Nous allons maintenant fixer les notations qui nous serviront dans toute la suite de ce livre. On choisit une fois pour toutes deux fonctions χ et φ satisfaisant les propriétés (2.3)–(2.7).

Notations

$$h = \mathcal{F}^{-1}\varphi \quad \text{et} \quad \tilde{h} = \mathcal{F}^{-1}\chi,$$
$$\Delta_{-1}u = \chi(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\widehat{u}(\xi)),$$
$$\text{si } \; q \geq 0, \; \Delta_q u = \varphi(2^{-q}D)u = 2^{qd}\int h(2^q y)u(x-y)dy,$$
$$\text{si } \; q \leq -2, \; \Delta_q u = 0,$$
$$S_q u = \sum_{p\leq q-1} \Delta_p u = \chi(2^{-q}D)u = \int \tilde{h}(2^q y)u(x-y)dy.$$

Maintenant, nous allons faire opérer ce découpage sur les distributions tempérées, c'est-à-dire voir en quel sens on peut écrire

$$\mathrm{Id} = \sum_q \Delta_q.$$

Proposition 2.1.2 *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. On a alors, au sens de la convergence dans l'espace $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$,*

$$u = \lim_{q\infty} S_q u.$$

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. On a $< u - S_q u, f > = < u, f - S_q f >$. Il suffit donc de démontrer que l'on a, dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$,

$$f = \lim_{q\infty} S_q f.$$

La topologie usuelle de l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ peut être définie par les semi-normes

$$N_{n,\alpha}(f) = \sup_{\mathbf{R}^d}(1+|\xi|)^n|\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)|.$$

D'après la formule de Leibnitz, il vient

$$N_{n,\alpha}(f - S_q f) \leq \sup_{\xi\in\mathbf{R}^d}\Big\{(1+|\xi|)^n\Big(|1-\chi(2^{-q}\xi)| \times |\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)|\Big)$$
$$+ \sum_{0<\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta 2^{-q|\beta|}|(\partial^\beta\chi)(2^{-q}\xi)| \times |\partial^{\alpha-\beta}\widehat{f}(\xi)|\Big)\Big\}.$$

Comme χ vaut identiquement 1 près de l'origine, il en résulte que

$$N_{n,\alpha}(f - S_q f) \leq C_\alpha 2^{-q} \sup_{|\beta|\leq|\alpha|} N_{n+1,\beta}(f).$$

D'où la proposition.

2.2 Espaces de Sobolev

L'appartenance aux espaces de Sobolev va se traduire par des propriétés de décroissance en q de la norme L^2 de $\Delta_q u$. Avant toute chose, nous allons rappeler la définition des espaces de Sobolev.

Définition 2.2.1 *Etant donné un réel s, l'espace de Sobolev d'indice s, noté $H^s(\mathbf{R}^d)$ ou encore H^s en l'absence d'ambiguïté, est l'ensemble des u appartenant à $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ telles que*

$$\widehat{u} \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^d) \quad et \quad (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbf{R}^d).$$

Cet espace est bien entendu un espace de Hilbert muni de la norme

$$\tilde{|} u|_s^2 = \int_{\mathbf{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Proposition 2.2.1 *L'application définie par*

$$\phi \longrightarrow (u \longrightarrow < u, \overline{\phi} >)$$

est un anti-isomorphisme de $(H^s)'$ dans H^{-s}.

En effet, on a

$$< u, \overline{\phi} >= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \widehat{\overline{\phi}}(-\xi) d\xi.$$

L'application du classique théorème de représentation de Riesz conclut la démonstration de cette proposition.

Lorsque s est un entier, le fait que la transformée de Fourier soit, à homothétie près, une isométrie de l'espace L^2, assure que

$$H^s = \{u \in L^2 / \ \forall \alpha \in \mathbf{N}^d / \ |\alpha| \leq s, \partial^\alpha u \in L^2\}.$$

La norme $\tilde{|} \cdot |_s$ est alors équivalente à la norme

$$\Big(\sum_{\alpha/|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque s est un réel positif non entier, on peut donner une autre définition de l'espace H^s. Elle repose sur la proposition suivante.

Proposition 2.2.2 *Si s est un réel de l'intervalle $]0,1[$, alors H^s est l'ensemble des fonctions u de L^2 telles que l'intégrale*

$$\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d}\frac{|u(x)-u(x+y)|^2}{|y|^{d+2s}}dxdy$$

soit finie. De plus, la norme

$$\left(\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d}\frac{|u(x)-u(x+y)|^2}{|y|^{d+2s}}dxdy+\|u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme $\widetilde{|\cdot|}_s$.

La démonstration de cette proposition est simple. Posons $\tau_y u(x)=u(x+y)$. La transformation de Fourier étant, à une homothétie près, une isométrie de L^2, on a

$$\begin{aligned}I(u) &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d}\frac{|u(x)-u(x+y)|^2}{|y|^{d+2s}}dxdy\\ &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbf{R}^d}|\widehat{u}(\xi)|^2\int_{\mathbf{R}^d}\frac{|1-e^{-i(y|\xi)}|^2}{|y|^{d+2s}}dyd\xi.\end{aligned}$$

Pour tout ξ non nul, le changement de variable $z=|\xi|y$ assure que

$$\int_{\mathbf{R}^d}\frac{1-e^{-i(y|\xi)}}{|y|^{d+2s}}dy=|\xi|^{2s}\int_{\mathbf{R}^d}\frac{1-e^{-i(z|\frac{\xi}{|\xi|})}}{|z|^{d+2s}}dz.$$

L'intégrale apparaissant dans le terme de droite est une fonction homogène de degré 0, invariante par rotation ; elle est donc indépendante de ξ. Il en résulte que

$$I(u)=c_s\int_{\mathbf{R}^d}|\xi|^{2s}|\widehat{u}(\xi)|^2d\xi.$$

La proposition 2.2.2 est ainsi démontrée.

Cette définition est commode pour étudier les propriétés d'invariance par difféomorphisme. On appelera k-difféomorphisme global une bijection ψ de $\mathbf{R}^d$ dans lui-même dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées et telle qu'il existe une constante C telle que $|\psi(x)-\psi(y)|\geq C|x-y|$.

Proposition 2.2.3 *Soit ψ un k-difféomorphisme global. Pour tout s tel que $0\leq s<k$, l'application Ψ définie par*

$$\Psi(f)=f\circ\psi$$

envoie continûment H^s dans lui-même.

D'après ce qui précède, il suffit de démontrer cela pour $0<s<1$. Ceci résulte simplement de l'identité

$$\begin{aligned}J(u) &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d}\frac{|u(\psi(x))-u(\psi(y))|^2}{|x-y|^{d+2s}}dxdy\\ &= \int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|\psi^{-1}(x)-\psi^{-1}(y)|^{d+2s}}|\det\psi(\psi^{-1}(x))|^{-1}|\det\psi(\psi^{-1}(y))|^{-1}dxdy\\ &\leq C\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2s}}dxdy.\end{aligned}$$

D'où la proposition.

Une autre proposition très simple nous sera utile.

Proposition 2.2.4 *Pour tout réel s et pour toute distribution u appartenant à l'espace H^s, on a, au sens de la convergence en norme dans l'espace H^s,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n u = u$$

Une fois remarqué que, pour tout ξ de $\mathbf{R}^d$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(S_n u - u)(\xi) = 0$$

et que

$$(1+|\xi|^2)^s|\mathcal{F}(S_n u - u)(\xi)|^2 \leq 2(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2,$$

le théorème de Lebesgue assure la proposition voulue.

Définissons maintenant une norme équivalente à la norme $\tilde{|}\cdot|_s$ en terme de décomposition dyadique. Comme le support de la transformée de Fourier de $\Delta_q u$ est inclus dans la couronne $2^q\mathcal{C}$, il est clair, d'après la définition de la norme sur H^s que l'on a

$$\frac{1}{C^{|s|+1}} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^2} \leq \tilde{|}\Delta_q u|_s \leq C^{|s|+1} 2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}. \tag{2.13}$$

D'après la relation (2.12), il vient

$$\frac{1}{3}\tilde{|}u|_s \leq \int \chi^2(\xi)(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{q\geq 0}\int \varphi^2(2^{-q}\xi)(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \tilde{|}u|_s.$$

Grâce à (2.13), on a démontré la proposition suivante :

Proposition 2.2.5 *Il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout réel s,*

$$\frac{1}{C^{|s|+1}}\tilde{|}u|_s^2 \leq \sum_q 2^{2qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2 \leq C^{|s|+1}\tilde{|}u|_s^2.$$

Dans toute la suite, on notera

$$|u|_s = \Big(\sum_q 2^{2qs}\|\Delta_q u\|_{L^2}^2\Big)^{1/2}.$$

Le théorème suivant nous sera fort utile.

Théorème 2.2.1 *Soient $\widetilde{\mathcal{C}}$ une couronne et B une boule. Il existe une constante C telle que l'on ait, pour tout réel s les propriétés suivantes.*

Soit $(u_q)_{q\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ telle que $\operatorname{Supp}\,\widehat{u}_q \subset 2^q\widetilde{\mathcal{C}}$. *Si la série $(2^{qs}\|u_q\|_{L^2})_{q\in\mathbf{N}}$ est de carré sommable, alors*

$$u = \sum_q u_q \in H^s \quad \text{et} \quad |u|_s^2 \leq C^{2|s|+2}\sum_q 2^{2qs}\|u_q\|_{L^2}^2.$$

Soit $(u_q)_{q\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ telle que $\operatorname{Supp}\,\widehat{u}_q \subset 2^q B$. *Si la série $(2^{qs}\|u_q\|_{L^2})_{q\in\mathbf{N}}$ est de carré sommable et si s est strictement positif, alors*

$$u \in H^s \quad \text{et} \quad |u|_s^2 \leq \frac{C^{2s+2}}{s^2}\sum_q 2^{2qs}\|u_q\|_{L^2}^2.$$

Il existe un entier N tel que l'on ait

$$|p-q| > N \Rightarrow 2^p\tilde{\mathcal{C}} \cap 2^q\mathcal{C} = \emptyset.$$

D'où il vient que

$$\Delta_q u = \sum_{|p-q|\leq N} \Delta_q u_p.$$

L'inégalité triangulaire assure que

$$\|\Delta_q u\|_{L^2} \leq \sum_{|p-q|\leq N} \|u_p\|_{L^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{q\geq 0} 2^{2qs}\|\Delta_q u\|^2_{L^2} &\leq \sum_{|p-q|\leq N} 2^{2(q-p)s}2^{2ps}\|u_p\|^2_{L^2} \\
&\leq \left(\sum_{p\geq 0} 2^{2ps}\|u_p\|^2_{L^2}\right)\left(\sum_{q/|p-q|\leq N} 2^{2(q-p)s}\right).
\end{aligned}$$

L'application de la proposition 2.2.5 conclut alors la démonstration du premier point du théorème.

Pour démontrer le second point, notons d'emblée que la série $(u_q)_{q\in\mathbf{N}}$ est une série absolument convergente dans l'espace L^2. Le support de la transformée de Fourier de u_q étant inclus dans $2^q B$, il existe un entier N tel que

$$\Delta_q u = \sum_{p/p\geq q-N} \Delta_q u_p.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^2} &\leq \sum_{p/p\geq q-N} 2^{qs}\|u_p\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{p/p\geq q-N} 2^{(q-p)s}2^{ps}\|u_p\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Le réel s étant strictement positif, on a :

$$\left(\sum_q 2^{2qs}\|\Delta_q u\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2^{Ns}}{1-2^{-s}}\left(\sum_p 2^{2ps}\|u_p\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui conclut la démonstration du théorème.

Comme première application de ce théorème, nous allons démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.2.6 *Soit k un entier supérieur ou égal à 1 et s un réel strictement supérieur à $k/2$. L'espace $H^s(\mathbf{R}^d)$ est inclus dans l'espace des fonctions continues et nulles à l'infini sur $\mathbf{R}^k$, à valeurs dans $H^{s-\frac{k}{2}}(\mathbf{R}^{d-k})$. De plus, il existe une constante C telle que, pour toute fonction f de $H^s(\mathbf{R}^d)$, on ait*

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^k;H^{s-\frac{k}{2}}(\mathbf{R}^{d-k}))} \leq \frac{C^s}{s-k/2}|f|_s.$$

Soit $\widetilde{\phi}$ une fonction indéfiniment différentiable à support compact, nulle près de l'origine et valant identiquement 1 près du support de ϕ. On pose

$$\widetilde{\Delta}_q = \widetilde{\phi}(2^{-q}D).$$

Pour toute fonction f de H^s, on a

$$\Delta_q f(x', x'') = \int_{\mathbf{R}^d} 2^{qd} h(2^q(x' - y', x'' - y''))\widetilde{\Delta}_q f(y', y'')dy'dy''.$$

L'inégalité de Schwarz assure que

$$\begin{aligned}|\Delta_q f(x', x'')| \leq 2^{qd} &\left(\int_{\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{d-k}} |h(2^q(x' - y', x'' - y''))|dy'dy''\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\int_{\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{d-k}} |h(2^q(x' - y', x'' - y''))| \times |\widetilde{\Delta}_q f(y', y'')|^2 dy'dy''\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que

$$|\Delta_q f(x', x'')| \leq 2^{qd/2} \left(\int_{\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{d-k}} |h(2^q(x' - y', x'' - y''))| \times |\widetilde{\Delta}_q f(y', y'')|^2 dy'dy''\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'intégration de cette inégalité sur l'espace $\mathbf{R}^{d-k}$ conduit à la suite de calculs ci-dessous.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^{d-k}} |\Delta_q f(x', x'')|^2 dx'' &\leq 2^{qd} \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^{d-k}} |h(2^q(x' - y', z''))|dz''\right) |\widetilde{\Delta}_q f(y', y'')|^2 dy'dy'' \\ &\leq 2^{qk} \|\widetilde{\Delta}_q f\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Or, par défintion de $\widetilde{\phi}$, on sait qu'il existe un entier N tel que

$$\|\widetilde{\Delta}_q f\|_{L^2} \leq \sum_{|p-q| \leq N} \|\Delta_p f\|_{L^2}.$$

On en déduit l'existence d'une constante C_s telle que, pour toute fonction f, il exite une suite $(c_q)_{q \in \mathbf{N}}$ dont la somme des carrés vaille 1 et vérifiant

$$\|\Delta_q f(x', \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^{d-k})} \leq C_s c_q 2^{-q(s - \frac{k}{2})} |f|_s.$$

Or, comme

$$(\mathcal{F}_{x''} \Delta_q f)(x', \xi'') = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{\mathbf{R}^k} e^{i(x'|\xi')} \mathcal{F} \Delta_q f(\xi', \xi'') d\xi',$$

le support de la transformée de la fonction $\mathcal{F}_{x''} \Delta_q f(x', \cdot)$ est inclus dans une boule de type $2^q B$. D'où l'inégalité voulue. La densité des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ dans H^s permet d'achever la démonstration.

2.3 Espaces de Hölder

Avant toute chose, nous allons rappeler la définition classique des espaces de Hölder.

Définition 2.3.1 *Soit r un réel strictement positif non entier.*

Si r appartient à l'intervalle $]0,1[$, on désigne par $C^r(\mathbf{R}^d)$, ou bien par C^r en l'absence d'ambiguïté, l'espace des fonctions u bornées sur $\mathbf{R}^d$ telles qu'il existe une constante C vérifiant, pour tout x et y de $\mathbf{R}^d$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^r.$$

Si $r > 1$, on désigne par $C^r(\mathbf{R}^d)$, ou bien par C^r en l'absence d'ambiguïté, l'espace des fonctions u telles que, pour tout multi-entier α de longueur plus petite que la partie entière de r, notée $[r]$, on ait

$$\partial^\alpha u \in C^{r-[r]}.$$

Il est clair que la norme

$$\widetilde{\|}u\|_r = \sum_{\alpha/|\alpha|\leq[r]} \left(\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^{r-[r]}} \right)$$

munit l'espace C^r d'une structure d'espace de Banach.

Comme dans le cas des espaces de Sobolev, la première des choses à faire est de définir une norme équivalente à la norme $\widetilde{\|} \cdot \|_r$. Néammoins, il faut remarquer que nous nous sommes pour l'instant limités à des espaces d'indice strictement positif et non entier. Nous verrons que définir des espaces de Hölder d'indice quelconque est utile. L'analogue de la proposition 2.2.5 est la suivante.

Proposition 2.3.1 *Il existe une constante C telle que, pour tout réel strictement positif non entier r et toute fonction u appartenant à C^r, on ait*

$$\sup_q 2^{qr} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq \frac{C^{r+1}}{[r]!} \widetilde{\|}u\|_r.$$

Soit B une boule de $\mathbf{R}^d$. Il existe alors une constante C telle que, pour tout réel r strictement positif non entier, on ait la propriété suivante :

Considérons une distribution tempérée u telle que

$$u = \sum_{q\geq 0} u_q \quad \textit{avec} \quad \mathrm{Supp}\ \hat{u}_q \subset 2^q B.$$

Si la suite $(2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty})_{q\in\mathbf{N}}$ est bornée, alors

$$\widetilde{\|}u\|_r \leq C\left(\frac{1}{r-[r]} + \frac{1}{[r]+1-r}\right) \sup_{q\geq 0} 2^{qr} \|u_q\|_{L^\infty}.$$

Pour démontrer le premier point, on commence par écrire l'opérateur Δ_q sous forme intégrale, ce qui donne

$$\Delta_q u(x) = 2^{qd} \int h(2^q(x-y))u(y)dy.$$

Le fait que la fonction φ soit identiquement nulle au voisinage de l'origine entraîne, par définition de h, que tous les moments de cette fonction sont nuls, c'est-à-dire que, pour tout multi-entier α,

$$\int x^\alpha h(x)dx = 0.$$

D'où il vient

$$\Delta_q u(x) = 2^{qd}\int h(2^q(x-y))\Big(u(y) - \sum_{k=1}^{[r]} \frac{1}{k!} D^k u(x)(y-x)^{(k)}\Big)dy. \tag{2.14}$$

Une formule de Taylor à l'ordre $[r]$ entraîne que

$$\begin{aligned} u(y) - \sum_{k=1}^{[r]} \frac{1}{k!} D^k u(x)(y-x)^{(k)}dy \\ = \int_0^1 \frac{(1-t)^{[r]-1}}{[r-1]!}(D^{[r]}u(x+t(y-x)) - D^{[r]}u(x)) \cdot (y-x)^{([r])}dt. \end{aligned}$$

Le fait que les fonctions $\partial^\alpha u$ soient dans l'espace $C^{r-[r]}$ assure que l'on a

$$\Big|u(y) - \sum_{k=1}^{[r]} \frac{1}{k!} D^k u(x)(y-x)^{(k)}dy\Big| \leq \frac{C}{[r]!}|y-x|^r \|u\|_r.$$

Il résulte alors de (2.14)

$$|\Delta_q u(x)| \leq \frac{C}{[r]!} 2^{qd} \|u\|_r \int |x-y|^r |h(2^q(x-y))|dy.$$

Ceci démontre le premier point de la proposition.

Le second point est une généralisation de la réciproque du premier. Remarquons tout d'abord que $\|u_q\|_{L^\infty} \leq C2^{-qr}$. Ceci entraîne, d'après le lemme 2.1.1, que la série $(\partial^\alpha u_q)_{q\in\mathbf{N}}$ est convergente dans l'espace L^∞, et ce pour tout multi-entier α de longueur plus petite que $[r]$. On a donc

$$\partial^\alpha u \in L^\infty \quad \text{et} \quad \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C \sup_{q\geq 0} 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty}. \tag{2.15}$$

Il nous reste donc à étudier le cas des dérivées partielles d'ordre $[r]$. Pour ce faire, on écrit

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq \sum_{q=0}^{N-1} |\partial^\alpha u_q(x) - \partial^\alpha u_q(y)| + \sum_{q\geq N} |\partial^\alpha u_q(x) - \partial^\alpha u_q(y)|\,;$$

l'entier N sera choisi judicieusement plus tard. On majore le premier terme de la somme en appliquant l'inégalité des accroissements finis ; d'où

$$|\partial^\alpha u_q(x) - \partial^\alpha u_q(y)| \leq C|x-y| \sup_{|\beta|=[r]+1} \|\partial^\beta u_q\|_{L^\infty}.$$

D'après le lemme 2.1.1, on a

$$|\partial^\alpha u_q(x) - \partial^\alpha u_q(y)| \leq C|x-y|2^{-q(r-[r]-1)} \sup_{q\geq 0} 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty}. \tag{2.16}$$

Les termes de la seconde somme s'estiment brutalement, c'est-à-dire que l'on écrit

$$|\partial^\alpha u_q(x) - \partial^\alpha u_q(y)| \leq 2^{1-qr} \sup_{q\geq 0} 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty}.$$

Il vient alors, en utilisant (2.16),

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq C(\sup_{q\geq 0} 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty})\Big(\sum_{q=0}^{N} 2^{-q(r-[r]-1)}|x-y| + \sum_{q\geq N+1} 2^{-q(r-[r])}\Big).$$

D'après (2.15), on peut supposer que $|x-y| \leq 1$. En posant

$$N = [-\log_2|x-y|] + 1,$$

l'inégalité ci-dessus conclut la démonstration de la proposition.

Comme nous le verrons dans la suite, il n'est pas sans intérêt de considérer l'espace des dérivées, bien sûr au sens des distributions, de fonctions de l'espace C^α lorsque α est un réel de l'intervalle $]0,1[$. Être capable de décrire simplement ces espaces en termes d'estimations sur les $\|\Delta_q u\|_{L^\infty}$ sera utile. On posera donc la définition suivante.

Définition 2.3.2 *Soit r un réel, on désigne par C^r l'ensemble des distributions tempérées qui vérifient*

$$\|u\|_r = \sup_q 2^{qr}\|\Delta_q u\|_{L^\infty} < \infty.$$

Il est tout à fait clair que ces espaces forment une chaîne décroissante d'espaces continûment inclus les uns dans les autres. De plus, la proposition 2.3.1 assure que, lorsque r est un réel strictement positif non entier, cette définition coïncide avec la définition 2.3.1.

C'est un exercice très facile laissé au lecteur que de démontrer que la norme $\|\cdot\|_r$ munit l'espace C^r d'une structure d'espace de Banach. La proposition suivante complète l'analogie avec les espaces de Sobolev étudiés dans la section précédente. Elle permet en outre d'affirmer que, si l'on choisit une autre décompositition dyadique, on trouve le même espace C^r muni d'une norme équivalente.

Proposition 2.3.2 *Soit $\widetilde{\mathcal{C}}$ une couronne de $\mathbf{R}^d$. Il existe alors une constante C telle qu'étant donnés un réel r et une série $(u_q)_{q\in\mathbf{N}}$, convergente vers u dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ et vérifiant* Supp $\widehat{u}_q \subset 2^q\widetilde{\mathcal{C}}$, *on ait*

$$\sup_{q\geq 0} 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty} < \infty \Rightarrow u \in C^r \quad et \quad \|u\|_r \leq C^{|r|+1}\sup_q 2^{qr}\|u_q\|_{L^\infty}.$$

Il faut majorer $\|\Delta_p u\|_{L^\infty}$. Vu les hypothèses sur le support de la transformée de Fourier de u_q, il existe un entier N tel que

$$\Delta_p u = \sum_{q/|p-q|\leq N} \Delta_p u_q.$$

Comme $\|\Delta_p u_q\|_{L^\infty} \leq \|u_q\|_{L^\infty}$, il vient

$$\|\Delta_p u\|_{L^\infty} \leq \sum_{q/|p-q|\leq N} \|u_q\|_{L^\infty}.$$

De plus, le fait que $|p-q| \leq N$ entraîne que $2^q \leq C2^p$. D'où la proposition.

On peut en déduire immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.1 *Pour tout réel s, l'opérateur ∂^α envoie C^s dans $C^{s-|\alpha|}$.*

Enonçons maintenant les classiques inclusions de Sobolev.

Proposition 2.3.3 *Pour un quelconque réel s, l'espace H^s est continûment inclus dans l'espace $C^{s-d/2}$.*

Démontrer cet énoncé est très simple. Comme le support de la transformée de Fourier de $\Delta_q u$ est inclus dans la couronne $2^q\mathcal{C}$ si $q \geq 0$ et dans $B(0, k_0)$ sinon, il vient, d'après le lemme 2.1.1,

$$\|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq C 2^{qd/2} \|\Delta_q u\|_{L^2}.$$

Une fois remarqué que la norme ℓ^2 d'une série est plus grande que sa norme ℓ^∞, il suffit d'appliquer les propositions 2.3.2 et 2.2.5 pour achever la démonstration.

Nous avons jusqu'à présent observé une relative discrétion quant aux cas des espaces de Hölder d'indice entier positif. Nous devrons cependant apprendre à les fréquenter quelque peu. Nous les verrons apparaître au chapitre 5. Avant tout, nous nous conformerons à l'usage voulant que, pour marquer leur étrangeté, on les note $C^k_\star$. Remarquons tout d'abord que l'espace L^∞ est inclus dans l'espace $C^0_\star$ d'après lemme 2.1.1. Il en résulte évidemment que l'espace des fonctions bornées à dérivées kième bornées, noté Lip_k est inclus dans $C^k_\star$. Cependant, cette inclusion est stricte. Des exemples importants en relation étroite avec la mécanique des fluides seront détaillés au chapitre 3. Nous laissons donc en exercice la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 2.3.4 *La distribution g définie sur* **R** *par*

$$g(x) = \sum_{q=0}^{\infty} e^{i2^q x}$$

appartient à $C^0_\star$ sans appartenir à L^∞.

Cependant, cette non-inclusion est relativement douce au sens suivant.

Proposition 2.3.5 *Il existe une constante C telle que, étant donnés un réel ϵ de l'intervalle $]0,1[$ et une fonction f appartenant à l'espace de Hölder C^ϵ, on ait*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon} \|f\|_0 \log\left(e + \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\right).$$

Pour démontrer cette proposition, on écrit f comme somme des $\Delta_q f$. D'où la majoration suivante :

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \sum_{q\leq N-1} \|\Delta_q f\|_{L^\infty} + \sum_{q\geq N} \|\Delta_q f\|_{L^\infty}.$$

En utilisant la définition des normes hölderiennes, il vient, pour tout entier strictement positif N,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq (N+1)\|f\|_0 + \frac{2^{-(N-1)\epsilon}}{2^\epsilon - 1}\|f\|_\epsilon.$$

En choisissant

$$N = 1 + \left[\frac{1}{\epsilon}\log_2 \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\right],$$

il vient

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|f\|_0\left(1 + \log \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\right).$$

D'où la proposition.

Nous allons maintenant étudier un peu plus précisément l'espace $C^1_\star$.

Proposition 2.3.6 *L'espace $C^1_\star$ est l'espace des fonctions bornées u telles qu'il existe une constante C qui vérifie, pour tout x et y dans $\mathbf{R}^d$,*

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C|y|.$$

Supposons que la fonction u appartienne à $C^1_\star$. Considérons alors un point y de $\mathbf{R}^d$ dont la distance à l'origine est inférieure à 1. En utilisant la décomposition dyadique de l'espace des fréquences et l'inégalité de Taylor à l'ordre 2 entre y et 0, il vient,

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C|y|^2 \sum_{q\leq N} \|D^2\Delta_q u\|_{L^\infty} + 4\sum_{q>N} \|\Delta_q u\|_{L^\infty}.$$

Le fait que u appartienne à $C^1_\star$, joint à l'application du lemme 2.1.1, assure que

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C\|u\|_1 \left(|y|^2 \sum_{q\leq N} 2^q + 4\sum_{q>N} 2^{-q}\right).$$

Donc, à nouveau en choisissant $N = [-\log_2 y] + 1$, on obtient

$$|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C\|u\|_1|y|.$$

Réciproquement, choisissons une fonction u telle que, pour tout y dans $\mathbf{R}^d$, on ait $|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C|y|$. Il s'agit de majorer $\|\Delta_q u\|_{L^\infty}$. Le fait que la fonction φ soit radiale, donc paire, entraîne que

$$2^{qd}(h(2^q\cdot) \star u)(x) = 2^{qd}\int h(2^q y)u(x+y)dy.$$

Le fait que φ soit nulle près de l'origine assure que h est d'intégrale nulle. Donc, on a

$$2^{qd}(h(2^q\cdot) \star u)(x) = 2^{qd-1}\int h(2^q y)(u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))dy.$$

Comme la fonction $z \mapsto |z|h(z)$ est intégrable, on a

$$\|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq C2^{-q} \sup_{y \in \mathbf{R}^d} \frac{|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)|}{|y|}.$$

D'où la proposition.

Les propriétés que nous démontrerons dans la section 5.2 laissent à penser que la proposition ci-dessous n'est pas sans intérêt.

Proposition 2.3.7 *Il existe une constante C telle que, pour toute fonction u de $C^1_\star$ et pour tout x et y de $\mathbf{R}^d$ tels que $|x-y| \leq 1$, on ait*

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_1 |x-y|(1 - \log|x-y|).$$

La démonstration est très semblable à celles qui précèdent. On écrit

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y| \sum_{q<N} 2^q \|\Delta_q u\|_{L^\infty} + C \sum_{q \geq N} \|\Delta_q u\|_{L^\infty}.$$

Il vient alors, par définition de $C^1_\star$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_1((N+1)|x-y| + 2^N).$$

En prenant, comme précédemment, $N = [-\log_2|x-y|]+1$, on conclut la démonstration de la proposition.

2.4 Calcul paradifférentiel

Dans cette section, on va s'intéresser à la façon dont opère le produit dans les espaces de Sobolev et de Hölder. Bien sûr, nous allons utiliser le découpage dyadique de l'espace des fréquences ainsi que les caractérisations des espaces de Sobolev et de Hölder exposées dans les sections précédentes.

La façon de les utiliser est la suivante. Etant données deux distributions tempérées u et v, on écrit

$$u = \sum_p \Delta_p u \quad \text{et} \quad v = \sum_q \Delta_q v.$$

De manière formelle, le produit, lorsqu'il existe, va s'écrire

$$uv = \sum_{p,q} \Delta_p u \Delta_q v.$$

On va maintenant introduire la décomposition de Bony, décomposition qui reconnaît trois parties dans le produit uv ; la première relative aux termes où les fréquences de u sont grandes devant celles de v, la deuxième relative aux termes où les fréquences de v sont grandes devant celles de u et enfin la troisième relative aux termes où les fréquences de u et de v sont de taille comparable. Plus précisément, nous allons donner les définitions suivantes.

Définition 2.4.1 *On appelle paraproduit de v par u et on note $T_u v$ l'opérateur bilinéaire suivant :*

$$T_u v = \sum_{p \leq q-2} \Delta_p u \Delta_q v = \sum_q S_{q-1} u \Delta_q v.$$

On appelle reste du produit uv et on note $R(u,v)$ l'opérateur bilinéaire symétrique suivant :

$$R(u,v) = \sum_{|p-q| \leq 1} \Delta_p u \Delta_q v.$$

Il est immédiat, par définition des opérateurs de paraproduit et de reste, que l'on a

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v). \tag{2.17}$$

De l'étude précise de la façon dont paraproduit et reste opèrent dans les espaces de Sobolev et de Hölder, va se dégager quelques principes généraux facilement énonçables :

- Le paraproduit est toujours défini pour deux distributions à support compact et la régularité de $T_u v$ est principalement déterminée par celle de v.

- Le reste par contre n'est pas toujours défini, mais lorsqu'il l'est, les régularités de u et de v s'ajoutent pour déterminer la sienne.

Passons maintenant aux énoncés précis.

Théorème 2.4.1 *Il existe une constante C telle qu'en désignant par $\mathcal{L}(A,B)$ la norme usuelle des applications linéaires continues entre les espaces vectoriels normés A et B, les cpérateurs T et R précédemment définis vérifient les propriétés suivantes.*

$$\begin{array}{rrcl}
\forall s, & \|T\|_{\mathcal{L}(L^\infty \times C^s; C^s)} & \leq & C^{|s|+1}, \\
\forall s, & \|T\|_{\mathcal{L}(L^\infty \times H^s; H^s)} & \leq & C^{|s|+1}, \\
\forall (s,t)/t<0, & \|T\|_{\mathcal{L}(C^t \times H^s; H^{s+t})} & \leq & \dfrac{C^{|s+t|+1}}{-t}, \\
\forall (s,t)/t<0, & \|T\|_{\mathcal{L}(C^t \times C^s; C^{s+t})} & \leq & \dfrac{C^{|s+t|+1}}{-t}, \\
\forall (s,t)/s+t>0, & \|R\|_{\mathcal{L}(C^t \times C^s; C^{s+t})} & \leq & \dfrac{C^{|s+t|+1}}{s+t}, \\
\forall (s,t)/s+t>0, & \|R\|_{\mathcal{L}(C^t \times H^s; H^{s+t})} & \leq & \dfrac{C^{|s+t|+1}}{s+t}, \\
\forall (s,t)/s+t>0, & \|R\|_{\mathcal{L}(H^t \times H^s; H^{s+t-d/2})} & \leq & \dfrac{C^{|s+t|+1}}{s+t-d/2}, \\
\forall (s,\epsilon)/\epsilon>0, & \|R\|_{\mathcal{L}(H^{-s} \times H^s; H^{-d/2-\epsilon})} & \leq & \dfrac{C}{\epsilon}.
\end{array}$$

Vu le travail effectué dans les sections précédentes, la démonstration de ce theorème est très aisée, à la seule exception des deux derniers points.

D'après la relation (2.6), la transformée de Fourier du terme général du paraproduit est donc supportée dans $2^q C'$, où C' est une couronne fixe. Il suffit alors de majorer des normes L^2 ou L^∞ pour démontrer les propriétés d'opérance du paraproduit. D'après le lemme 2.1.1, on a

$$\|S_{q-1} u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{L^\infty}.$$

Lorsque t est strictement négatif, on majore $\|S_{q-1}u\|_{L^\infty}$ différemment. Comme $S_{q-1}u = \sum_{p\leq q-2} \Delta_p u$, on a, par définition de la norme $\|\cdot\|_t$,

$$\|S_{q-1}u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_t \sum_{p\leq q-2} 2^{-pt} \leq \frac{C}{-t} 2^{-qt}\|u\|_t. \tag{2.18}$$

Les résultats relatifs au paraproduit découlent alors du théorème 2.2.1 et de la proposition 2.3.2.

Etudions maintenant l'opérateur de reste. On peut écrire

$$R(u,v) = \sum_q R_q \quad \text{avec} \quad R_q = \sum_{i=-1}^{1} \Delta_{q-i}u\Delta_q v.$$

Par définition de Δ_q, le support de la transformée de Fourier de R_q est inclus dans $2^q B(0,24)$. Il suffit de majorer les normes L^∞ ou les normes L^2. Comme

$$\|R_q\|_{L^2} \leq \|\Delta_q v\|_{L^2} \sum_{i=-1}^{1} \|\Delta_{q-i}u\|_{L^\infty},$$

il vient

$$\|R_q\|_{L^2} \leq \|\Delta_q v\|_{L^2} \sum_{i=-1}^{1} 2^{-(q-i)t}\|u\|_t.$$

Donc, on a

$$\|R_q\|_{L^2} \leq C2^{-qt}\|u\|_t\|\Delta_q v\|_{L^2}.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.2.1 pour conclure. La démonstration dans le cas des produits d'espaces de Hölder est strictement similaire et le résultat dans le cas des produits d'espaces de Sobolev se déduit immédiatement du cas des produits d'un espace de Sobolev et d'un espace de Hölder d'après la proposition 2.3.3.

Les deux derniers points sont un peu plus délicats. Les méthodes précédentes ne sauraient fonctionner car elles sont limitées au cas où l'indice de l'espace est strictement positif. Cette difficulté impose de réutiliser le découpage dyadique de l'espace des fréquences. Il s'agit de majorer convenablement $\|\Delta_p R_q\|_{L^2}$. Pour cela, on revient à la définition de Δ_p par convolution.

$$\begin{aligned}
\|\Delta_p R_q\|_{L^2} &\leq 2^{pd} \sum_{i=-1}^{1} \|h(2^p\cdot) \star (\Delta_{q-i}u\Delta_q v)\|_{L^2}\\
&\leq 2^{pd}\|h(2^p\cdot)\|_{L^2} \sum_{i=-1}^{1} \|\Delta_{q-i}u\Delta_q v\|_{L^1}\\
&\leq C2^{pd/2}2^{-q(s+t)} \sum_{i=-1}^{1} 2^{(q-i)s}\|\Delta_{q-i}u\|_{L^2}2^{qt}\|\Delta_q v\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Comme le support de φ est inclus dans la couronne $\mathcal{C}$, il existe un entier N tel que

$$q < p - N \Rightarrow \forall i \in \{-1,0,1\},\ \Delta_p(\Delta_{q-i}u\Delta_q v) = 0.$$

Donc, en posant $r_p = 2^{p(s+t-d/2)}\|\Delta_p R(u,v)\|_{L^2}$, il vient

$$r_p \leq (r^1 \star r^2)_p$$

avec

$$r_q^1 = 2^{-q(s+t)} \quad \text{si} \quad q \geq -N \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{sinon,}$$
$$r_q^2 = \sum_{i=-1}^{1} 2^{(q-i)s}\|\Delta_{q-i}u\|_{L^2}2^{qt}\|\Delta_q v\|_{L^2}.$$

Une inégalité de Hölder assure alors, via la proposition 2.2.5, que

$$|R(u,v)|_{s+t-d/2} \leq \frac{C^{s+t+1}}{s+t-d/2}|u|_s|v|_t.$$

La modification de la démonstration ci-dessus dans le cas où $t = -s$ est un exercice laissé au lecteur.

Nous allons maintenant déduire du théorème précédent les classiques estimations douces (ou tame estimates en anglais) relatives aux espaces de Sobolev et de Hölder.

Corollaire 2.4.1 *Il existe une constante C telle que, pour tout s strictement positif, on ait :*

$$\begin{aligned} \|uv\|_s &\leq C^{s+1}(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_s + \|u\|_s\|v\|_{L^\infty}), \\ |uv|_s &\leq C^{s+1}(\|u\|_{L^\infty}|v|_s + |u|_s\|v\|_{L^\infty}). \end{aligned}$$

La démonstration est extrêmement simple. On utilise la décomposition (2.17) en paraproduit et reste

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v).$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.4.1 ci-dessus. Puis, en se souvenant que, d'après la proposition 2.1.1, l'espace L^∞ est continûment inclus dans $C_\star^0$, on conclut la démonstration du corollaire.

Se pose maintenant la question, triviale pour les espaces de Sobolev, de savoir si les multiplicateurs de Fourier opèrent dans la chaîne des espaces de Hölder. La réponse est contenue dans le théorème ci-dessous.

Théorème 2.4.2 *Soit f une fonction indéfiniment différentiable sur $\mathbf{R}^d$. Supposons l'existence d'un réel strictement positif R et d'un réel m tels que, pour tout $\lambda \geq 1$ et pour tout ξ tel que $|\xi| \geq R$, on ait $f(\lambda\xi) = \lambda^m f(\xi)$.*

Pour tout réel r, $f(D)$ envoie continûment C^r dans C^{r-m} et H^s dans H^{s-m}.

De plus, il existe une constante C telle que, pour tout réel r et tout réel ρ strictement inférieur à 1, on ait les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \|[T_a, f(D)]u\|_{r-m+1} &\leq C^{|r|+|m|+1}\|\nabla a\|_{L^\infty}\|u\|_r \quad \text{et} \\ |[T_a, f(D)]u|_{r-m+1} &\leq C^{|r|+|m|+1}\|\nabla a\|_{L^\infty}|u|_r, \\ \|[T_a, f(D)]u\|_{r-m+\rho} &\leq \frac{C^{|r|+|m|+1}}{1-\rho}\|\nabla a\|_{\rho-1}\|u\|_r \quad \text{et} \\ |[T_a, f(D)]u|_{r-m+\rho} &\leq \frac{C^{|r|+|m|+1}}{1-\rho}\|\nabla a\|_{\rho-1}|u|_r. \end{aligned}$$

On considère un entier N tel que $2^{N-1} \geq R$. Vu les propriétés du support de χ, l'opérateur $\chi(2^{-N}D)f(D)$ est un opérateur de convolution par une fonction de $\mathcal{S}$. C'est-à-dire que cet opérateur $\chi(2^{-N}D)f(D)$ envoie continûment tout espace de Sobolev dans tout autre et tout espace de Hölder dans tout autre. Ce terme sera donc négligé dans la suite et on notera toujours $f(D)$ l'opérateur $(\mathrm{Id} - \chi(2^{-N}D))f(D)$.

Vu la localisation du support de φ et l'homogénéité de f, il vient, pour tout entier positif $q \geq N$,

$$f(D)\Delta_{q+N}u = 2^{(q+N)m}\mathcal{F}^{-1}\Big(\varphi(2^{-q-N}\xi)f(2^{-q-N}\xi)\widehat{u}(\xi)\Big).$$

D'où, en posant $\theta(\xi) = \varphi(2^{-N}\xi)f(2^{-N}\xi)$, on peut écrire

$$f(D)\Delta_{q+N}u = 2^{(q+N)m}\theta(2^{-q}D)u. \tag{2.19}$$

Vu la localisation du support de θ, il existe un entier M tel que

$$\theta(2^{-q}D)u = \sum_{p/|p-q|\leq M} \theta(2^{-q}D)\Delta_p u.$$

Il résulte alors de la proposition 2.1.1 que

$$\|\theta(2^{-q}D)u\|_{L^\infty} \leq C \sum_{p/|p-q|\leq M} \|\Delta_p u\|_{L^\infty}.$$

La proposition 2.3.2 appliquée avec $u_q = \theta(2^{-q}D)u$ assure alors le premier point du théorème.

Passons au cas des commutateurs. D'après (2.19),

$$[T_a, f(D)] = \sum_{q,q'} 2^{(q+N)m}[S_{q-1}a\Delta_q, \theta(2^{-q'}D)].$$

Comme le support de θ est inclus dans une couronne, il existe, par définition des opérateurs S_q et Δ_q, un entier N_1 tel que

$$|q-q'| > N_1 \Rightarrow [S_{q-1}a\Delta_q, \theta(2^{-q'}D)] = 0.$$

Les multiplicateurs de Fourier commutant, il vient :

$$[T_a, f(D)] = \sum_{|q-q'|\leq N_1} 2^{(q+N)m}[S_{q-1}a, \theta(2^{-q'}D)]\Delta_q.$$

En posant $\underline{h} = \mathcal{F}^{-1}\theta$, on déduit de la formule de Taylor de l'ordre 1 que

$$\begin{aligned}&[S_{q-1}a, \theta(2^{-q'}D)]v(x)\\ &\qquad = 2^{-q'}\sum_{i=1}^{d}\int_{\mathbf{R}^d}\int_0^1 z^i\underline{h}(z)\partial_i S_{q-1}a(x-2^{-q'}tz)v(x-z)dzdt.\end{aligned}$$

La fonction $\underline{h}$ appartenant à l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}\|[S_{q-1}a, \theta(2^{-q'}D)]v\|_{L^\infty} &\leq C\|\nabla S_{q-1}a\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty},\\ \|[S_{q-1}a, \theta(2^{-q'}D)]v\|_{L^2} &\leq C\|\nabla S_{q-1}a\|_{L^\infty}\|v\|_{L^2}.\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1.1, il vient

$$\|\nabla S_{q-1}a\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla a\|_{L^\infty}.$$

D'après (2.18), si $\rho < 1$,

$$\|\nabla S_{q-1}a\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{1-\rho}2^{q(1-\rho)}\|\nabla a\|_{\rho-1}.$$

D'où le théorème d'après le théorème 2.2.1 et la proposition 2.3.2.

2.5 La pression et son champ de gradient

Il s'agit ici de résoudre l'équation (1.14), c'est-à-dire

$$-\Delta p = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i\partial_j(v^i v^j).$$

En somme, le problème est de définir un inverse au Laplacien. Ceci impose de trouver des conditions aux limites à l'infini raisonnables, c'est-à-dire assurant l'unicité de p à une constante près. L'espace suivant convient bien.

Définition 2.5.1 *On appelle $C_L^\infty(\mathbf{R}^d)$ ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté C_L^∞, l'espace des fonctions u indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^d$ dont toutes les dérivées d'ordre strictement positif sont bornées et qui de plus vérifient*

$$|u(x)| \leq C(1 + \log < x >).$$

Cet espace est bien évidemment un espace de Fréchet pour les semi-normes

$$N_k(u) = \sup_{x\in\mathbf{R}^d, 0<|\alpha|\leq k}\left(|\partial^\alpha u(x)|, \frac{u(x)}{1+\log < x >}\right). \tag{2.20}$$

La justification de cette définition apparaît clairement dans le théorème suivant :

Théorème 2.5.1 *Pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,d\}^2$, il existe un opérateur $T_{i,j}$ qui, pour tout couple de réels (r,a), avec $a \in]1,+\infty[$, est continu de C^r dans $C^r + C_L^\infty$ et de $C^r \cap L^a$ dans lui-même. De plus, pour toute distribution w dans C^r, on a*

$$\Delta T_{i,j} w = \partial_i\partial_j w.$$

Enfin, les opérateurs $T_{i,j}$ sont uniques au sens suivant. Soit une famille $(T'_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ d'opérateurs vérifiant les propriétés ci-dessus. Il existe alors des formes linéaires $\lambda_{i,j}$ continues sur tous les espaces C^r, nulles sur les espaces $C^r \cap L^a$ et telles que

$$T_{i,j}w - T'_{i,j}w = \lambda_{i,j}(w)\mathbf{1} \quad avec \quad \mathbf{1}(x) = 1.$$

Le seul point qui pose quelque problème est la non-intégrabilité à l'infini des dérivées secondes de la solution fondamentale du Laplacien. Soit w une fonction bornée et indéfiniment différentiable. Posons

$$\begin{aligned} T_{i,j,k}w(x) &= \int_{\mathbf{R}^d} \big(\partial_i\partial_j\partial_k(1-\chi)E_d\big)(x-y)(1-\chi)\Big(\frac{x-y}{<x>}\Big)w(y)dy \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^d} \big(\partial_i\partial_j\partial_k(1-\chi)E_d\big)(x-y)\chi\Big(\frac{x-y}{<x>}\Big)w(y)dy. \end{aligned}$$

La formule de Leibnitz et le théorème de dérivation de Lebesgue assurent qu'en posant

$$\begin{aligned} T^{(2)}_{i,j,k}w(x) &= \int_{\mathbf{R}^d} \big(\partial_i\partial_j\partial_k((1-\chi)E_d)\big)(x-y)(1-\chi)\Big(\frac{x-y}{<x>}\Big)w(y)dy, \\ T^{(3)}_{i,j,k}w(x) &= \int_{\mathbf{R}^d} \big(\partial_i\partial_j((\chi-1)E_d)\big)(x-y)\partial_{x_k}\Big(\chi\Big(\frac{x-y}{<x>}\Big)\Big)w(y)dy \quad \text{et} \\ p^{(1)}_{i,j}w(x) &= \int_{\mathbf{R}^d} \big(\partial_i\partial_j((1-\chi)E_d)\big)(x-y)\chi\Big(\frac{x-y}{<x>}\Big)w(y)dy, \end{aligned}$$

il vient

$$T_{i,j,k}w(x) = T^{(2)}_{i,j,k}w + T^{(3)}_{i,j,k}w + \partial_k p^{(1)}_{i,j}w.$$

Vu que

$$|(\partial_i\partial_j(1-\chi)E_d)(z)| \leq \frac{C}{1+|z|^d},$$

il est clair que

$$|p^{(1)}_{i,j}w(x)| \leq C(1+\log <x>)\|w\|_{L^\infty}.$$

Le champ de vecteurs $(T_{i,j,k}w)_{1\leq k\leq d}$ est le gradient d'une fonction indéfiniment différentiable, $(T_{i,j,k}w - \partial_k p^{(1)}_{i,j}w)_{1\leq k\leq d}$ l'est aussi. Soit $p^{(2)}_{i,j}w$ la fonction indéfiniment différentiable nulle en 0, telle que

$$\partial_k p^{(2)}_{i,j}w = T_{i,j,k}w - \partial_k p^{(1)}_{i,j}w. \tag{2.21}$$

Parce que $|T^{(\ell)}_{i,j,k}w(x)| \leq C <x>^{-1} \|w\|_{L^\infty}$, l'inégalité des accroissements finis assure que

$$\begin{aligned} |p^{(2)}_{i,j}w(x)| &\leq C\|w\|_{L^\infty}|x|\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2|x|^2)^{\frac12}}dt \\ &\leq C\|w\|_{L^\infty}\int_0^{|x|} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac12}}dt \\ &\leq C\|w\|_{L^\infty}\log <x>. \end{aligned}$$

En posant

$$\widetilde{T}_{i,j}w = p^{(1)}_{i,j}w + p^{(2)}_{i,j}w, \tag{2.22}$$

on définit alors l'opérateur suivant :

$$\overline{T}_{i,j}w = (\chi E_d) \star \partial_i\partial_j w + \widetilde{T}_{i,j}w. \tag{2.23}$$

Vérifions maintenant que, pour toute distribution w appartenant à l'intersection des espaces C^r, on a

$$\Delta \overline{T}_{i,j} w = \partial_i \partial_j w.$$

Par définition de $\overline{T}_{i,j}$, on a

$$\Delta \overline{T}_{i,j} w = \Delta(\chi E_d) \star \partial_i \partial_j w + \Delta p^{(1)}_{i,j} w + \Delta p^{(2)}_{i,j} w. \tag{2.24}$$

La fonction w étant supposée indéfiniment différentiable, il vient

$$\Delta(\chi E_d) \star \partial_i \partial_j w = \partial_i \partial_j w + 2 \sum_k (\partial_k \chi \partial_k E_d) \star \partial_i \partial_j w + ((\Delta \chi) E_d) \star \partial_i \partial_j w.$$

Par définition de $\widetilde{T}_{i,j}$, il vient

$$\begin{aligned} \Delta \widetilde{T}_{i,j} w &= \sum_k \partial_k T_{i,j,k} w \\ &= \partial_i \partial_j \Delta((1-\chi)E_d) \star w \\ &= -2 \sum_k (\partial_k \chi \partial_k E_d) \star \partial_i \partial_j w + ((\Delta \chi) E_d) \star \partial_i \partial_j w. \end{aligned}$$

On a donc $\Delta \overline{T}_{i,j} = \partial_i \partial_j$. On définit maintenant $T_{i,j}$ par

$$T_{i,j} w = \overline{T}_{i,j} \chi(D) w + (\mathrm{Id} - \chi(D)) \Delta^{-1} \partial_i \partial_j w \tag{2.25}$$

D'après le théorème 2.4.2, on a, pour tout réel r, que

$$\|(\mathrm{Id} - \chi(D)) \Delta^{-1} \partial_i \partial_j w\|_r \leq C^{|r|+1} \|w\|_r.$$

De plus, la définition (2.20) des semi-normes N_k assure que

$$\begin{aligned} N_k(\overline{T}_{i,j} \chi(D) w) &\leq C \|\chi(D) w\|_{L^\infty} \\ &\leq C^{|r|} \|w\|_r. \end{aligned}$$

L'existence des formes linéaires $\lambda_{i,j}$ résulte simplement de la non-existence de fonctions harmoniques non constantes dans un quelconque espace $C^r + C^\infty_L$.

Supposons maintenant que w appartienne à un espace L^a, a étant un réel strictement supérieur à 1. Définissons alors les opérateurs $T'_{i,j}$ par

$$T'_{i,j} w = (\mathrm{Id} - \chi(D)) M_{i,j} w + \chi(D) M_{i,j} w,$$

où $M_{i,j}$ désigne le multiplicateur de Fourier par $-\xi_i \xi_j |\xi|^{-2}$.

D'après le théorème de continuité des multiplicateurs de Fourier sur les espaces L^a, que nous énoncerons de manière précise page 48 dans la section 3.1 (voir aussi [63] ou [64]), on a clairement

$$\|T'_{i,j} w\|_{L^a} \leq Ca \|w\|_{L^a} \quad \text{et} \quad \|\chi(D) M_{i,j} w\|_r \leq C^{|r|} \|w\|_{L^a}.$$

De plus, d'après le théorème 2.4.2 de continuité des multiplicateurs de Fourier sur les espaces C^r, on a

$$\|(\mathrm{Id} - \chi(D)) M_{i,j} w\|_r \leq C^r \|w\|_r.$$

Il n'existe de fonctions harmoniques non nulles dans aucun espace L^a. On peut donc faire coïncider les opérateurs $T_{i,j}$ et $T'_{i,j}$ sur les espaces $C^r \cap L^a$. Le théorème est ainsi démontré.

Ce théorème implique immédiatement un résultat d'unicité sur la pression dans l'équation d'Euler.

Corollaire 2.5.1 *On considère un champ de vecteurs de divergence nulle v appartenant à $L^\infty([0,T]\times \mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$. Soient p et $\tilde p$ deux fonctions appartenant à $L^\infty_{loc}([0,T];C^r+C^\infty_L)$ telles que (v,p) et $(v,\tilde p)$ soient solutions du système d'Euler (E). Il existe alors une fonction bornée sur l'intervalle $[0,T]$ telle que*

$$p-\tilde p = f(t)\mathbf{1}.$$

Dorénavant, lorsque nous dirons qu'il existe une unique solution v qui appartient à l'espace $L^\infty([0,T]\times \mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$, ceci signifiera que l'on considère la pression définie par

$$p = -\sum_{i,j=1}^{d} T_{i,j}(v^i v^j). \tag{2.26}$$

Nous allons maintenant nous intéresser au champ de gradient de la pression. C'est uniquement au travers de son champ de gradient qu'intervient la pression dans le système (E). Posons la définition suivante :

Définition 2.5.2 *On appelle π l'opérateur bilinéaire défini par*

$$\begin{aligned}
\pi(v,w) &= \pi_1(v,w)+\pi_2(v,w) \quad \text{avec}\\
\pi_1(v,w) &= \sum_{i,j} \nabla\Delta^{-1}(T_{\partial_i w^j}\partial_j v^i + T_{\partial_j v^i}\partial_i w^j) \quad \text{et}\\
\pi_2(v,w) &= \sum_{i,j} \nabla T_{i,j} R(v^i,w^j).
\end{aligned}$$

Cet opérateur est défini sur les couples de champs de vecteurs suffisamment réguliers et à valeurs dans les champs de vecteurs. Plus précisément, la manière dont π opère est décrite par le lemme ci-dessous.

Proposition 2.5.1 *Il existe une constante C telle que, pour tout r strictement supérieur à 1, on ait*

$$\|\pi(v,w)\|_r \le C^{r+1}(\|v\|_{Lip}\|w\|_r + \|w\|_{Lip}\|v\|_r).$$

De plus, si $r\in]-1,1[$, alors

$$\|\pi(v,w)\|_r \le C\left(\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1-r}\right)\min\{\|v\|_{Lip}\|w\|_r, \|v\|_r\|w\|_{Lip}\}.$$

Enfin, pour tout r strictement supérieur à 1, il existe une constante C telle que

$$\|\operatorname{div}\pi(v,v) - tr(Dv^2)\|_{L^\infty} \le C\|v\|_r\|\operatorname{div} v\|_{L^\infty}.$$

La démonstration de cette proposition est très facile. En effet, d'après le théorème 2.5.1, on a

$$\|\pi_2(v,w)\|_r \le \frac{C^{|r|+1}}{1+r}\sum_{i,j}\|R(v^i,w^j)\|_{r+1}.$$

Or, d'après le théorème 2.4.1, il vient

$$\|\pi_2(v,w)\|_r \leq \frac{C^{|r|+1}}{1+r}\|v\|_{Lip}\|w\|_r. \tag{2.27}$$

Enfin, d'après les théorèmes 2.4.2 et 2.4.1, il vient

$$\|\pi_1(v,w)\|_r \leq \frac{C^{|r|+1}}{r+1}(\|v\|_{Lip}\|w\|_r + \|w\|_{Lip}\|v\|_r).$$

De plus, si $r \in]-1,1[$, on a alors

$$\begin{aligned} \|T_{\partial_i w^j}\partial_j v^i\|_{r-1} &\leq C\|v\|_r\|w\|_{Lip} \quad \text{et} \\ \|T_{\partial_i w^j}\partial_j v^i\|_{r-1} &\leq \frac{C}{1-r}\|v\|_0\|w\|_r. \end{aligned}$$

Les deux premiers points de la proposition résultent alors de l'inégalité (2.27).

Pour démontrer le troisième point, calculons $\operatorname{div}\pi(v,v)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\pi(v,v) &= \sum_{i,j}\big(2T_{\partial_j v^i}\partial_i v^j + \partial_i\partial_j R(v^i,v^j)\big) \\ &= \sum_{i,j}\big(2T_{\partial_j v^i}\partial_i v^j + \partial_j R(v^i,\partial_i v^j)\big) + \sum_j \partial_j R(\operatorname{div} v, v^j) \\ &= \sum_{i,j}\partial_j v^i\partial_i v^j + \sum_j\big(\partial_j R(\operatorname{div} v, v^j) + R(\partial_j \operatorname{div} v, v^j)\big). \end{aligned}$$

L'application du théorème 2.4.1 achève la démonstration de la proposition.

La proposition conclusive de ce chapitre décrit le gradient de la pression comme un opérateur d'intégrale singulière. Cette proposition nous sera très utile au chapitre 8 pour démontrer des propriétés de régularité (analytique ou Gevrey) du flot d'une solution du système d'Euler.

Proposition 2.5.2 *Soit v un champ de vecteurs de divergence nulle de classe C^ϵ avec $\epsilon > 1/2$. Considèrons le champ de pression p associé à v par la relation (2.26) ; on a alors*

$$\partial_k p(x) = \sum_{i,j}\int_{\mathbf{R}^d}(\partial_i\partial_j\partial_k E_d)(x-y)(v^i(x)-v^i(y))(v^j(x)-v^j(y))dy.$$

Pour démontrer cette proposition, supposons tout d'abord le champ de vecteurs v indéfiniment différentiable. D'après (2.21), (2.22) et (2.23), on a

$$\begin{aligned} \partial_k p(x) &= p_k^1(x) + p_k^2(x) \quad \text{avec} \\ p_k^1(x) &= \sum_{i,j}\int_{\mathbf{R}^d}\partial_k(\chi E_d)(x-y)\partial_i\partial_j(v^i(y)v^j(y))dy \quad \text{et} \\ p_k^2(x) &= \sum_{i,j}\int_{\mathbf{R}^d}\partial_i\partial_j\partial_k((1-\chi)E_d)(x-y)v^i(y)v^j(y)dy \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que l'on a

$$\begin{aligned}
V(x,y) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i,j} \partial_{y_i}\partial_{y_j}(v^i(x)-v^i(y))(v^j(x)-v^j(y))\\
&= -\sum_{i,j} \partial_{y_i}\partial_{y_j}\Big(v^i(x)v^j(x)-2v^i(x)v^j(y)+v^i(y)v^j(y)\Big)\\
&= \sum_{i,j} \partial_i\partial_j(v^i(y)v^j(y)) - 2\sum_i v^i\partial_i \operatorname{div} v)(y).
\end{aligned}$$

La nullité de la divergence du champ de vecteurs v assure alors que

$$\sum_{i,j} \partial_{y_i}\partial_{y_j}(v^i(x)-v^i(y))(v^j(x)-v^j(y)) = \sum_{i,j} \partial_i\partial_j(v^i(y)v^j(y)). \tag{2.28}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
p_k^1(x) &= \sum_{i,j}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_k(\chi E_d)(x-y)\partial_{y_i}\partial_{y_j}(v^i(x)-v^i(y))(v^j(x)-v^j(y))dy\\
&= \sum_{i,j}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_i\partial_j\partial_k(\chi E_d)(x-y)(v^i(x)-v^i(y))(v^j(x)-v^j(y))dy.
\end{aligned}$$

A nouveau d'après (2.28), on a

$$\begin{aligned}
p_k^2(x) = {} & \sum_{i,j}\int_{\mathbf{R}^d}\partial_i\partial_j\partial_k((1-\chi)E_d)(x-y)(v^i(x)-v^i(y))(v^j(x)-v^j(y))dy\\
&+2\sum_{i,j} v^i(x)\int_{\mathbf{R}^d}\partial_i\partial_j\partial_k((1-\chi)E_d)(x-y)v^j(y)dy\\
&-\sum_{i,j} v^i(x)v^j(x)\int_{\mathbf{R}^d}\partial_i\partial_j\partial_k((1-\chi)E_d)(z)dz.
\end{aligned}$$

La fonction $\partial_i\partial_j\partial_k E_d$ est d'intégrale nulle sur la sphère ; la fonction χ est une fonction radiale. Donc le troisième terme de la somme ci-dessus est nul.

De plus, on a pour toute fonction indéfiniment différentiable à support compact θ,

$$\begin{aligned}
I(\theta) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i,j}\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \theta(x)\partial_i\partial_j\partial_k((1-\chi)E_d)(x-y)v^i(x)v^j(y)dxdy\\
&= -\sum_{i,j}\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} \theta(y)\partial_i\partial_j\partial_k((1-\chi)E_d)(x-y)v^i(y)v^j(x)dxdy\\
&= -I(\theta).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$p_k^2(x) = \sum_{i,j}\int_{\mathbf{R}^d}\partial_i\partial_j\partial_k((1-\chi)E_d)(x-y)(v^i(x)-v^i(y))(v^j(x)-v^j(y))dy.$$

D'où la proposition dans le cas où le champ de vecteurs v est indéfiniment différentiable. Sinon, on remplace v par $S_n v$. Comme la suite $(S_n v)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de C^ϵ qui converge vers v dans L^∞, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure la démonstration.

2.6 Références et remarques

La présentation de la théorie de Littlewood-Paley exposée dans la section 2.1 est très classique, voir par exemple [4], [31] et [65]. La caractérisation d'espaces fonctionnels classiques (ici les espaces de Sobolev et de Hölder) à l'aide du découpage en couronnes dyadiques de l'espace des fréquences date des années soixante-dix. Nous n'en avons présenté dans ce texte que des exemples simples qui suffisent à notre étude. Pour un éventail complet des espaces que l'on peut ainsi définir, nous renvoyons le lecteur à [65].

Ces techniques ont été introduites dans l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires hyberboliques par J.-M. Bony dans [15].

La section 2.4 consite en l'exposé d'une version simplifiée du calcul paradifférentiel introduit par J.-M. Bony dans ce même article [15] ; cette version du calcul paradifférentiel a été construite par P. Gérard et J. Rauch dans [45].

Dans la section 2.5, nous avons appliqué les techniques précédemment exposées à l'étude de la pression. Notons qu'un analogue du théorème 2.5.1 se trouve dans [57]. Enfin, l'opérateur bilinéaire défini par la proposition 2.5.2 sera utilisé au chapitre 8.

Chapitre 3

Autour de la loi de Biot-Savart

3.1 Estimations L^p

La description de l'appartenance à des espaces de type L^p d'un champ de vecteurs de divergence nulle à partir de son rotationnel est très simple.

Proposition 3.1.1 *Soient a et b deux réels tels que*

$$a < d \quad et \quad b > \frac{ad}{d-a}.$$

Il existe une constante C telle que, pour toute matrice antisymétrique Ω, à coefficients L^a, il existe un unique champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace $L^a + L^b$ de rotationnel Ω et vérifiant :

$$v = v_1 + v_2 \quad avec \quad \|v_1\|_{L^a} + \|v_2\|_{L^b} \leq C\|\Omega\|_{L^a}.$$

L'espace $\mathcal{S}$ étant dense dans L^a, on peut supposer que les coefficients de la matrice Ω appartiennent à $\mathcal{S}$. La loi de Biot-Savart (1.8) affirme que

$$v^i(x) = c_d \sum_m \int_{\mathbf{R}^d} \frac{x^m - y^m}{|x-y|^d} \Omega^i_m(y)dy.$$

On a alors

$$v^i(x) = c_d \sum_m \int_{\mathbf{R}^d} \chi(x-y)\frac{x^m - y^m}{|x-y|^d} \Omega^i_m(y)dy + c_d \sum_m \int_{\mathbf{R}^d} (1-\chi(x-y))\frac{x^m - y^m}{|x-y|^d} \Omega^i_m(y)dy.$$

La fonction $|\cdot|^{-d+1}\chi$ appartenant à L^c, on a, pour tout $a \geq 1$,

$$\|f \star |\cdot|^{-d+1}\chi\|_{L^a} \leq C\|f\|_{L^a}.$$

De plus, dès que

$$c > \frac{d}{d-1},$$

la fonction $(1-\chi)|\cdot|^{-d+1}$ appartient à L^c. Ainsi, pour tout b tel que

$$b > \frac{ad}{d-a},$$

on a l'inégalité suivante :

$$\|(1-\chi)|\cdot|^{-d+1}\star\Omega\|_{L^b}\leq C\|\Omega\|_{L^a}.$$

D'où la proposition voulue.

Cette section s'attache essentiellement à obtenir des majorations de la norme L^a du gradient d'un champ de vecteurs de divergence nulle v par la norme L^a de son tourbillon Ω. Ceci rélève de la théorie de Calderon-Zygmund. En effet, formellement, les dérivées de v s'obtiennent à partir de Ω par des multiplicateurs de Fourier homogènes de degré 0. Dans ce cas particulier, ce sont des opérateurs de convolution par des dérivées secondes de la solution fondamentale du laplacien.

Il est tout à fait clair qu'un tel opérateur envoie continûment L^2 dans lui-même. Nous allons démontrer qu'il envoie L^a dans L^a pour tout réel a strictement supérieur à 1. Plus précisement, cette section est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

Théorème 3.1.1 *Il existe une constante C telle que l'on ait la propriété suivante : Pour tout a appartenant à $]1,\infty[$ et pour tout champ de vecteurs de divergence nulle v dont le gradient est L^a, on a*

$$\|\nabla v\|_{L^a}\leq C\frac{a^2}{a-1}\|\Omega(v)\|_{L^a}.$$

Nous ne démontrerons pas ce théorème dans son intégralité. Ceci entraînerait en effet un développement sur la décomposition de Calderon-Zygmund, qui est traitée dans de nombreux et excellents ouvrages. Nous renvoyons le lecteur par exemple à [31] ou à [63] pour la démonstration du théorème suivant :

Théorème 3.1.2 *Il existe une constante C telle que, si $f\in L^1$, alors, en désignant par $m(A)$ la mesure de Lebesgue d'une partie borélienne de $\mathbf{R}^d$, on a*

$$\forall\lambda>0,\ m(|\partial_i\partial_j\Delta^{-1}f|\geq\lambda)\leq C\frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

Une fois ce théorème admis, nous n'avons plus qu'à démontrer le classique théorème d'interpolation, dit de Marcinkiewitch, en contrôlant les constantes avec un peu de soin. Dans toute la suite de cette section, nous noterons, comme dans le théorème ci-dessus, par $(f>\lambda)$ l'ensemble des points x de l'espace $\mathbf{R}^d$ pour lesquels $f(x)$ est strictement supérieur à λ et par $m(f>\lambda)$ sa mesure de Lebesgue ; de même pour les autres inégalités.

Théorème 3.1.3 *Soient C_1 et C_2 deux constantes. Il existe une constante C vérifiant l'assertion suivante.*

Soit T un opérateur formellement autoadjoint tel que, pour toute fonction f appartenant à $L^1\cap L^2$,

$$\|Tf\|_{L^2}\leq C_2\|f\|_{L^2}\quad et\quad m(|Tf|\geq\lambda)\leq C_1\frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

Alors, pour tout a supérieur ou égal à 1 et pour toute fonction f appartenant à L^a, on a

$$\|Tf\|_{L^a}\leq C\frac{a^2}{a-1}\|f\|_{L^a}.$$

Commençons par calculer la norme L^a de façon agréable lorsque a est strictement supérieur à 1. Le théorème de Fubini autorise à écrire que

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^a}^a &= \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|^a dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \int_0^{|f(x)|} a\lambda^{a-1} d\lambda dx \\ &= a \int_{\mathbf{R}^d \times [0,\infty[} \lambda^{a-1} \mathbf{1}_{(\lambda \leq |f|)} d\lambda dx \\ &= a \int_0^\infty \lambda^{a-1} m(\lambda \leq |f|) d\lambda.\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$f = f_{1,\lambda} + f_{2,\lambda} \quad \text{avec} \quad f_{1,\lambda} = f\mathbf{1}_{(|f|\geq\lambda)} \quad \text{et} \quad f_{2,\lambda} = f\mathbf{1}_{(|f|<\lambda)}.$$

Remarquons que si $Tf(x)$ est supérieur à λ, alors $Tf_{1,\lambda}(x)$ ou $Tf_{2,\lambda}(x)$ est supérieur à $\lambda/2$. Il en résulte que

$$\|Tf\|_{L^a}^a \leq a \int_0^\infty \lambda^{a-1} m\Big(|Tf_{1,\lambda}| \geq \frac{\lambda}{2}\Big) d\lambda + a \int_0^\infty \lambda^{a-1} m\Big(|Tf_{2,\lambda}| \geq \frac{\lambda}{2}\Big) d\lambda.$$

Observons que

$$\Big(|Tf_{2,\lambda}| \geq \frac{\lambda}{2}\Big) = \Big(|Tf_{2,\lambda}|^2 \geq \frac{\lambda^2}{4}\Big).$$

Une fois remarqué que

$$m(|g| \geq \lambda) \leq \frac{\|g\|_{L^1}}{\lambda},$$

on obtient l'inégalité suivante :

$$\|Tf\|_{L^a}^a \leq a \int_0^\infty \lambda^{a-1} m\Big(|Tf_{1,\lambda}| \geq \frac{\lambda}{2}\Big) d\lambda + 4a \int_0^\infty \|Tf_{2,\lambda}\|_{L^2}^2 \lambda^{a-3} d\lambda.$$

En utilisant les hypothèses disant que

$$\|Tf\|_{L^2} \leq C_2 \|f\|_{L^2} \quad \text{et} \quad m(|Tf| \geq \lambda) \leq C_1 \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda},$$

on obtient

$$\|Tf\|_{L^a}^a \leq 2C_1 a \int_0^\infty \|f_{1,\lambda}\|_{L^1} \lambda^{a-2} d\lambda + 4C_2^2 a \int_0^\infty \|f_{2,\lambda}\|_{L^2}^2 \lambda^{a-3} d\lambda.$$

Par définition des fonctions $f_{1,\lambda}$ et $f_{2,\lambda}$, il vient

$$\|Tf\|_{L^a}^a \leq 2C_1 a \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)| \int_0^{|f(x)|} \lambda^{a-2} d\lambda dx + 4C_2^2 a \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|^2 \int_{|f(x)|}^\infty \lambda^{a-3} d\lambda dx.$$

Si l'on suppose que a est strictement compris entre 1 et 2, alors

$$\|Tf\|_{L^a}^a \leq a\Big(\frac{2C_1}{a-1} + \frac{4C_2^2}{2-a}\Big) \|f\|_{L^a}^a.$$

En fixant un réel a_0 strictement compris entre 1 et 2, en appliquant l'estimation ci-dessus, puis l'interpolation classique entre L^{a_0} et L^2, il vient

$$\|Tf\|_{L^a} \leq \frac{C}{a-1} \|f\|_{L^a}.$$

Comme l'opérateur T est formellement autoadjoint, le théorème est démontré.

3.2 Estimations L^∞ : quelques exemples

Dans toute cette section, nous nous plaçons en dimension deux d'espace. Donnons tout d'abord un exemple de champ de vecteurs de divergence nulle dont le tourbillon est borné et dont certaines dérivées ne le sont pas. Ensuite, nous démontrerons élémentairement que, si le tourbillon est la fonction caractéristique d'un domaine borné dont le bord est de classe $C^{1+\epsilon}$, alors le champ de vecteurs associé est lipschitzien.

Nous allons supposer que ω est défini par

$$\omega(x) = H(x_1)H(1-x_1)H(x_2)H(1-x_2),$$

la fonction H étant la fonction caractéristique de $\mathbf{R}^+$. Désignons par v le champ de vecteurs appartenant à $L^1 + L^3$ dont le tourbillon est ω. Le manque de régularité de v au voisinage des coins du carré est décrit par la proposition suivante.

Proposition 3.2.1 *Il existe un voisinage V de l'origine et un réel strictement positif α tels que le champ de vecteurs v défini ci-dessus vérifie*

$$\forall x \in V\ ,\ |\nabla v(x)| \geq \alpha(1 - \log|x|).$$

Soit θ une fonction indéfiniment différentiable nulle en dehors de la boule unité et valant 1 près de la boule centrée à l'origine et de rayon 3/4. Comme on s'intéresse à l'allure du champ de vecteurs v près de l'origine, on supposera dans toute la suite de cette démonstration que $|x| \leq 1/2$. D'après la relation (3.1.1), on sait que

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^d} \theta(x-y)\frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\omega(y)dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^d}(1-\theta(x-y))\frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\omega(y)dy.$$

La fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}^d}(1-\theta(x-y))\frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\omega(y)dy$$

est, d'après le théorème de dérivation de Lebesgue, indéfiniment différentiable sur la boule centrée à l'origine et de rayon 1/2. Il reste donc à étudier, au voisinage de l'origine, le champ de vecteurs $\widetilde{v}$ défini par $\widetilde{v}(x) = \nabla^\perp E_2 \star (\theta\omega)$. Remarquons que $\theta(x)\omega(x) = \theta(x)H(x_1)H(x_2)$. Il vient donc, par définition de $\widetilde{v}$,

$$\begin{aligned}\partial_1\widetilde{v}^1 &= -\partial_1\partial_2(E_2 \star (\theta\omega))\\ &= -E_2 \star (\partial_1\partial_2(\theta\omega)).\end{aligned}$$

Le calcul de $\partial_1\partial_2(\theta\omega)$ donne

$$\partial_1\partial_2(\theta\omega)(x) = \delta_0 + H(x_1)H(x_2)\partial_1\partial_2\theta(x) + H(x_1)\partial_1\theta(x)\delta_{(x_2=0)} + H(x_2)\partial_2\theta(x)\delta_{(x_1=0)}.$$

Il résulte de ce calcul que

$$\begin{aligned}\partial_1\widetilde{v}^1(x) = -\frac{1}{2\pi}\log r - E_2 \star \Big(H(x_1)H(x_2)\partial_1\partial_2\theta\Big)\\ + E_2 \star H(x_1)\partial_1\theta(x)\delta_{(x_2=0)} + E_2 \star H(x_2)\partial_2\theta(x)\delta_{(x_1=0)}.\end{aligned}$$

La fonction définie par

$$x \mapsto H(x_1)H(x_2)\partial_1\partial_2\theta(x)$$

est une fonction bornée ; comme la fonction E_2 est localement intégrable, la fonction $E_2 \star (H(x_1)H(x_2)\partial_1\partial_2\theta)$ est localement bornée. De plus, on a

$$(E_2 \star H(x_2)\partial_2\theta(x)\delta_{(x_1=0)})(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}} \log(x_1^2 + (x_2 - y_2)^2)H(y_2)\partial_2\theta(0, y_2)dy_2.$$

Comme la fonction définie par

$$x \mapsto \log(x_1^2 + x_2^2)$$

appartient à $L^\infty(\mathbf{R}_{x_1}; L^1_{loc}(\mathbf{R}_{x_2}))$, la fonction

$$E_2 \star H(x_2)\partial_2\theta(x)\delta_{(x_1=0)}$$

appartient à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^2)$; d'où la proposition.

Le second exemple de cette section est destiné à introduire le théorème de la section suivante. Considérons une courbe γ fermée, continue, simple de classe $C^{1+\epsilon}$, où ϵ désigne un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et désignons par D le domaine intérieur. On s'intéresse au caractère lipschitzien du champ de vecteurs de divergence nulle v appartenant à $L^\infty + L^p$ dont le tourbillon est la fonction caractéristique de D.

La courbe γ est représentée par une fonction de classe $C^{1+\epsilon}$ du cercle dans le plan, fonction que, par abus, on note également γ. Dans toute la suite de cette étude, on identifie les fonctions définies sur le cercle aux fonctions 2π-périodiques.

Il existe une constante c_γ strictement positive telle que, pour tout $(\sigma, \sigma') \in \mathbf{S}^1$, on ait

$$\left|\frac{\gamma(\sigma) - \gamma(\sigma')}{\sigma - \sigma'}\right| \geq c_\gamma.$$

Il résulte de la proposition 3.1.1 que l'on a

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\nabla^\perp \int_D \log|x - y|dy.$$

La formule de Green implique que

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \log|x - y|((-e_2|N), (e_1|N))d\gamma,$$

où N désigne le vecteur normal unitaire extérieur à la courbe γ. Comme

$$N(\sigma) = \frac{1}{|T(\sigma)|}\Big(\frac{d}{d\sigma}\gamma_2, -\frac{d}{d\sigma}\gamma_1\Big) \quad \text{avec} \quad T(\sigma) = \Big(\frac{d}{d\sigma}\gamma_1, \frac{d}{d\sigma}\gamma_2\Big),$$

il en résulte que

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(\sigma)\log|x - \gamma(\sigma)|d\sigma. \tag{3.1}$$

Nous allons démontrer élémentairement la proposition suivante.

Proposition 3.2.2 *Le champ de vecteurs v est lipschitzien et il existe une constante C ne dépendant que de c_γ et de $\|\gamma\|_{1+\epsilon}$ telle que*

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C.$$

Faisons un peu de géométrie différentielle, plane et élémentaire. Soient x un point du plan et σ_0 un point du cercle tel que $d(x,\gamma) = |x - \gamma(\sigma_0)|$. On peut supposer que $\sigma_0 = 0$. Il est bien connu que

$$x = \gamma(0) \pm d(x,\gamma)N(0).$$

Pour tout σ du cercle, on a

$$\gamma(\sigma) = \gamma(0) + \sigma T(0) + R(\sigma) \quad \text{avec} \quad |R(\sigma)| \leq \|\gamma\|_{1+\epsilon}|\sigma|^{1+\epsilon}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} |x - \gamma(\sigma)| &= |\pm d(x,\gamma)N(0) - \sigma T(0) - R(\sigma)| \\ &\geq |\pm d(x,\gamma)N(0) - \sigma T(0)| - |R(\sigma)| \\ &\geq \frac{1}{2}(d(x,\gamma) + c_\gamma|\sigma|) - \|\gamma\|_{1+\epsilon}|\sigma|^{1+\epsilon}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|\sigma| \leq \alpha_\gamma \Rightarrow |x - \gamma(\sigma)| \geq \frac{d(x,\gamma) + c_\gamma|\sigma|}{4}, \tag{3.2}$$

en ayant posé

$$\alpha_\gamma = \left(\frac{c_\gamma}{4\|\gamma\|_{1+\epsilon}}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}. \tag{3.3}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} |x - \gamma(\sigma)| &\geq |\gamma(\sigma) - \gamma(0)| - |x - \gamma(0)| \\ &\geq c_\gamma|\sigma| - d(x,\gamma). \end{aligned}$$

D'où il vient

$$d(x,\gamma) \leq \frac{1}{2}c_\gamma\alpha_\gamma \Rightarrow \Big(|\sigma| \geq \alpha_\gamma \Rightarrow |x - \gamma(\sigma)| \geq \frac{1}{2}c_\gamma\alpha_\gamma\Big). \tag{3.4}$$

Si x n'appartient pas à la courbe γ, on peut écrire, en dérivant (3.1),

$$\nabla v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(\sigma)\frac{x - \gamma(\sigma)}{|x - \gamma(\sigma)|^2}d\sigma. \tag{3.5}$$

En désignant par $\ell(\gamma)$ la longueur de la courbe γ, il vient

$$d(x,\gamma) \geq \frac{\alpha_\gamma c_\gamma}{2} \Rightarrow |\nabla v(x)| \leq \frac{2\ell(\gamma)}{\alpha_\gamma c_\gamma}. \tag{3.6}$$

Supposons maintenant que $d(x,\gamma) \leq \alpha_\gamma c_\gamma/2$ et majorons la quantité

$$\begin{aligned} I_{i,j}(x) &= J_{i,j}(x) + \widetilde{J}_{i,j}(x) \quad \text{avec} \\ J_{i,j}(x) &= \int_{\sigma\in]-\alpha_\gamma,\alpha_\gamma[} \frac{x^j - \gamma^j(\sigma)}{|x-\gamma(\sigma)|^2} T^i(\sigma)d\sigma \quad \text{et} \\ \widetilde{J}_{i,j}(x) &= \int_{\sigma\notin]-\alpha_\gamma,\alpha_\gamma[} \frac{x^j - \gamma^j(\sigma)}{|x-\gamma(\sigma)|^2} T^i(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

D'après (3.4), il vient

$$|\widetilde{J}_{i,j}(x)| \leq \frac{2\ell(\gamma)}{\alpha_\gamma c_\gamma}.$$

Majorons maintenant $J_{i,j}(x)$.

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j}(x,\sigma) &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{x^j - \gamma^j(\sigma)}{|x-\gamma(\sigma)|^2} T^i(\sigma) - \frac{x^j - \gamma^j(0) - \sigma T^j(0)}{|x-\gamma(0)-\sigma T(0)|^2} T^i(0) \\ &= \frac{x^j - \gamma^j(\sigma)}{|x-\gamma(\sigma)|^2} (T^i(\sigma) - T^i(0)) + T^i(0) \biggl(\frac{x^j - \gamma^j(\sigma)}{|x-\gamma(\sigma)|^2} \\ &\qquad\qquad - \frac{x^j - \gamma^j(0) - \sigma T^j(0)}{|x-\gamma(0)-\sigma T(0)|^2} \biggr) \\ &= \frac{x^j - \gamma^j(\sigma)}{|x-\gamma(\sigma)|^2} (T^i(\sigma) - T^i(0)) + T^i(0) \frac{R^j(\sigma)}{|x-\gamma(0)-\sigma T(0)|^2} \\ &\qquad + T^i(0)(x^j - \gamma^j(\sigma)) \frac{|x-\gamma(\sigma)+R(\sigma)|^2 - |x-\gamma(\sigma)|^2}{|x-\gamma(\sigma)|^2 |x-\gamma(0)-\sigma T(0)|^2}. \end{aligned}$$

D'où il vient, d'après (3.2) et (3.3),

$$\begin{aligned} |\Delta_{i,j}(x,\sigma)| &\leq \frac{4}{c_\gamma} \|\gamma\|_{1+\epsilon} \sigma^{\epsilon-1} + |T^i(0)| \left(\frac{9}{c_\gamma^2} \|\gamma\|_{1+\epsilon} \sigma^{\epsilon-1} + \frac{4}{c_\gamma^3} \|\gamma\|_{1+\epsilon}^2 \sigma^{2\epsilon-1} \right) \\ &\leq \frac{13}{c_\gamma^2} \|\gamma\|_{1+\epsilon}^2 \sigma^{\epsilon-1} + \frac{4}{c_\gamma^3} \|\gamma\|_{1+\epsilon}^3 \sigma^{2\epsilon-1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Or, par raison de symétrie, on a

$$\begin{aligned} K^j(x) &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\alpha_\gamma}^{\alpha_\gamma} \frac{x^j - \gamma^j(0) - \sigma T^j(0)}{d(x,\gamma)^2 + \sigma^2 |T(0)|^2} d\sigma \\ &= \int_{-\alpha_\gamma}^{\alpha_\gamma} \frac{x^j - \gamma^j(0)}{d(x,\gamma)^2 + \sigma^2 |T(0)|^2} d\sigma. \end{aligned}$$

Un calcul trivial assure que

$$\begin{aligned} |K^j(x)| &\leq 2\int_0^{\alpha_\gamma} \frac{d(x,\gamma)}{d(x,\gamma)^2 + c_\gamma^2 \sigma^2} d\sigma \\ &\leq 2\int_0^{\frac{\alpha_\gamma c_\gamma}{d(x,\gamma)}} \frac{d\sigma'}{c_\gamma(1+\sigma'^2)} \\ &\leq \frac{2\pi}{c_\gamma}. \end{aligned}$$

Comme
$$J_{i,j}(x) = \int_{-\alpha_\gamma}^{\alpha_\gamma} \Delta_{i,j}(x,\sigma)d\sigma + T^i(0)K^j(x),$$
par intégration, il résulte de l'inégalité (3.7) et de l'inégalité ci-dessus que
$$|J_{i,j}(x)| \leq \frac{15\|\gamma\|_{1+\epsilon}}{\epsilon c_\gamma}.$$
D'où la proposition 3.2.2.

3.3 Opérateurs de Riesz et fonctions bornées

L'objet de cette section est de trouver une condition suffisante pour que, si une fonction u est bornée, les fonctions $\partial_i\partial_j\Delta^{-1}u$ le soient aussi. En termes de mécanique des fluides, ceci revient à trouver comment majorer les dérivées du champ des vitesses des particules à partir de la norme L^∞ du tourbillon. Comme le suggèrent les exemples traités dans la section précédente, le concept de régularité tangentielle par rapport à une structure géométrique ne semble pas étranger à cette question. D'autre part, il nous est apparu qu'une réelle compréhension du problème passe par la réponse à la question suivante : si l'on régularise la fonction caractéristique d'un domaine borné régulier, a-t-on des estimations uniformes (par rapport au paramètre de régularisation) sur le champ de vecteurs de divergence nulle associé au tourbillon régularisé? L'exemple de la fonction caractéristique d'un carré montre que certains fermés du plan peuvent être des points singuliers.

Ceci nous amène à introduire les définitions suivantes. Dans toute la suite de cette section, on désignera par ϵ un quelconque réel de l'intervalle $]0,1[$ et par Σ un quelconque fermé du plan (éventuellement vide).

Définition 3.3.1 *Soit $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence. Une telle famille est dite admissible en dehors de Σ si et seulement si l'on a*
$$I(\Sigma, X) = \inf_{x\notin\Sigma} \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_\lambda(x)| > 0.$$

Définissons maintenant la notion de régularité tangentielle par rapport à une telle famille de champs de vecteurs.

Définition 3.3.2 *Soit X une famille régulière de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence et admissible en dehors de Σ. On désigne par $C^\epsilon(\Sigma, X)$ l'ensemble des distributions u appartenant à L^∞ telles que, pour tout λ, on ait*
$$X_\lambda(x,D)u \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{div}(uX_\lambda) - u \operatorname{div} X_\lambda \in C^{\epsilon-1}.$$
Après avoir posé
$$\begin{aligned}
N_\epsilon(\Sigma, X) &= \frac{1}{\epsilon} \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_\lambda\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_\lambda\|_\epsilon}{I(\Sigma, X)},\\
\|u\|_{\Sigma,X}^{\epsilon,0} &= N_\epsilon(\Sigma, X)\|u\|_0 + \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_\lambda(x,D)u\|_{\epsilon-1}}{I(\Sigma, X)} \quad \text{et}\\
\|u\|_{\Sigma,X}^{\epsilon} &= N_\epsilon(\Sigma, X)\|u\|_{L^\infty} + \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_\lambda(x,D)u\|_{\epsilon-1}}{I(\Sigma, X)}\,;
\end{aligned}$$

énonçons le théorème principal de cette section.

Théorème 3.3.1 *Il existe une constante C telle que, pour tout ϵ de l'intervalle $]0,1[$, pour tout a supérieur ou égal à 1 et pour tout fermé Σ du plan, on ait la propriété suivante.*

Soit X une quelconque famille de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence ; on suppose que X est admissible en dehors de Σ. On considère alors une fonction ω appartenant à $C^\epsilon(\Sigma,X)\cap L^a$. Si v est le champ de vecteurs de divergence nulle, de gradient L^a et de tourbillon ω, alors le gradient de v est borné et l'on a

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma^c)} \leq C(a\|\omega\|_{L^a} + \|\omega\|_{L^\infty}) + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\omega\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X}}{\|\omega\|_0}\right).$$

Remarquons d'emblée que la fonction $x \mapsto x\log(e+\alpha/x)$ est une fonction croissante sur $\mathbf{R}^+_\star$ pour tout $\alpha \geq 0$. En dehors du fait que ceci sera constamment utilisé dans la suite, cela permet de donner immédiatement une version légèrement affaiblie du théorème ci-dessus, version que nous utiliserons aux chapitres 5 et 9.

Théorème 3.3.2 *Il existe une constante C telle que, pour tout ϵ de l'intervalle $]0,1[$, pour tout a supérieur ou égal à 1 et pour tout fermé Σ du plan, on ait la propriété suivante.*

Soit X une quelconque famille de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence ; on suppose que X est admissible en dehors de Σ. On considère alors une fonction ω appartenant à $C^\epsilon(\Sigma,X)\cap L^a$. Si v est le champ de vecteurs de divergence nulle, de gradient L^a et de tourbillon ω, alors le gradient de v est borné et l'on a

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma^c)} \leq Ca\|\omega\|_{L^a} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_{L^\infty} \log\left(e + \frac{\|\omega\|^{\epsilon}_{\Sigma,X}}{\|\omega\|_{L^\infty}}\right).$$

Nous allons, dans un premier temps, démontrer le théorème 3.3.2 dans un cas très particulier où apparaissent, sans surcharge technique, les deux idées essentielles de la démonstration. Supposons que la famille substantielle X soit réduite au seul champ de vecteurs ∂_1 et accessoirement, que le support de la transformée de Fourier de ω ne rencontre pas l'origine. Il est évident que $\Sigma = \emptyset$ et que $\|X\|_\epsilon = I(\Sigma, X) = 1$.

D'après la proposition 2.3.5, il est clair que l'on a, pour j valant 1 ou 2,

$$\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_\epsilon}{\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_0}\right).$$

D'après le théorème 2.4.2, il vient donc

$$\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\partial_1\omega\|_{\epsilon-1}}{\|\omega\|_0}\right). \tag{3.8}$$

Il reste maintenant à estimer $\|\partial_2^2\Delta^{-1}\omega\|_{L^\infty}$. Le fait que $\partial_2^2 = \Delta - \partial_1^2$ assure que

$$\|\partial_i\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_{L^\infty} \leq \|\omega\|_{L^\infty} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\partial_1\omega\|_{\epsilon-1}}{\|\omega\|_0}\right).$$

D'où le théorème dans ce cas très particulier.

Pour passer au cas général, une difficulté sérieuse se présente. Elle provient de la faible régularité des champs de vecteurs X_λ et de leur éventuelle tendance à s'annuler. L'un des points cruciaux est que toutes ces tendances à perturber l'inégalité n'apparaissent qu'atténuées par un logarithme.

Nous allons, dans un premier temps, nous concentrer sur les hautes fréquences, c'est-à-dire supposer que la transformée de Fourier de ω est identiquement nulle dans un voisinage de l'origine. Supposons de plus que ω est de classe $C^{1+\epsilon}$. La première étape consiste à majorer, pour un quelconque champ de vecteurs Y de classe C^ϵ, la quantité $\|Y(x,D)v\|_{L^\infty}$. Pour cela, démontrons une généralisation de la proposition 2.3.5.

Lemme 3.3.1 *Il existe une constante C vérifiant la propriété suivante. Soient w_1 et w_2 deux champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^d$ et ϵ un réel de l'intervalle $]0,1[$. Supposons que le champ de vecteurs w_1 soit de classe C^ϵ et que le champ de vecteurs w_2 soit borné. Si le produit scalaire $(w_1|w_2)$ des deux champs de vecteurs est une fonction C^ϵ, alors*

$$\|(w_1|w_2)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|w_1\|_{L^\infty}\|w_2\|_0 \log\Big(e + \frac{\|w_1\|_\epsilon\|w_2\|_0 + \|(w_1|w_2)\|_\epsilon}{\|w_1\|_{L^\infty}\|w_2\|_0}\Big).$$

La démonstration s'inspire bien sûr de celle de la proposition 2.3.5. Étant donné un entier strictement positif N, on écrit

$$(w_1|w_2) = S_N(w_1|w_2) + \sum_{q\geq N}\Delta_q(w_1|w_2).$$

Nous avons vu à la section 2.3 du chapitre 2 que

$$\|\sum_{q\geq N}\Delta_q(w_1|w_2)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}2^{-N\epsilon}\|(w_1|w_2)\|_\epsilon. \tag{3.9}$$

Pour étudier la partie "basses fréquences", utilisons le découpage en paraproduits et reste (voir 2.17). Pour tout entier N, on a

$$S_N\sum_{j=1}^d w_1^j w_2^j = S_N\sum_{j=1}^d\Big(T_{w_1^j}w_2^j + T_{w_2^j}w_1^j + R(w_1^j,w_2^j)\Big).$$

Le théorème 2.4.1 affirme que le paraproduit T envoie continûment $L^\infty\times C^0_\star$ dans $C^0_\star$. Il en résulte que

$$\|S_N(\sum_{j=1}^d T_{w_1^j}w_2^j)\|_{L^\infty} \leq CN\|w_1\|_{L^\infty}\|w_2\|_0. \tag{3.10}$$

D'après la relation 2.6, il vient

$$\begin{aligned}
S_{N,j} &\stackrel{\text{déf}}{=} S_N\Big(T_{w_2^j}w_1^j + R(w_1^j,w_2^j)\Big)\\
&= S_N\sum_{q\leq N+4}S_{q-1}w_2^j\Delta_q w_1^j + S_N\sum_{i\in\{-1,0,1\},q}\Delta_{q-i}w_2^j\Delta_q w_1^j\\
&= S_N\sum_{q\leq N+4}S_{q+2}w_2^j\Delta_q w_1^j + S_N\sum_{\substack{q\geq N+5\\ i\in\{-1,0,1\}}}\Delta_{q-i}w_2^j\Delta_q w_1^j.
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\|S_N \sum_{\substack{q\geq N+5\\ i\in\{-1,0,1\}}} \Delta_{q-i} w_2^j \Delta_q w_1^j\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon} 2^{-N\epsilon}\|w_1\|_\epsilon \|w_2\|_0. \tag{3.11}$$

Quant à l'autre terme, majorons-le à l'aide d'un regroupement d'Abel.

$$\begin{aligned}\sum_{q\leq N+4} S_{q+2} w_2^j \Delta_q w_1^j &= \sum_{q\leq N+4} (S_{q+1}w_1^j - S_q w_1^j) S_{q+2} w_2^j\\ &= S_{N+5} w_1^j S_{N+6} w_2^j - \sum_{q\leq N+3} S_{q+1} w_1^j \Delta_{q+1} w_2^j.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|\sum_{j=1}^{d} \sum_{q\leq N+4} \Delta_q w_1^j S_{q+2} w_2^j\|_{L^\infty} \leq C(N+2)\|w_1\|_{L^\infty}\|w_2\|_0. \tag{3.12}$$

On a donc, grâce aux inégalités (3.9)–(3.12),

$$\|(w_1|w_2)\|_{L^\infty} \leq C(N+2)\|w_1\|_{L^\infty}\|w_2\|_0 + \frac{C}{\epsilon}2^{-N\epsilon}(\|(w_1|w_2)\|_\epsilon + \|w_1\|_\epsilon\|w_2\|_0).$$

Le lemme résulte du choix

$$N = 1 + \left[\frac{1}{\epsilon}\log_2 \frac{\|(w_1|w_2)\|_\epsilon + \|w_1\|_\epsilon \|w_2\|_0}{\|w_1\|_{L^\infty}\|w_2\|_0}\right].$$

Revenons à la démonstration du théorème 3.3.2. En appliquant le lemme 3.3.1 avec $w_1 = Y$ et $w_2 = \nabla v^i$, il vient

$$\|Y(x,D)v\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|Y\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_0 \log\left(e + \frac{\|Y\|_\epsilon}{\|Y\|_{L^\infty}} + \frac{\|Y(x,D)v\|_\epsilon}{\|Y\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_0}\right).$$

La fonction $x \mapsto x\log(e+\alpha x^{-1})$ est croissante. Le théorème 2.4.2 affirme que l'on a

$$\|\nabla v\|_0 \leq C\|\omega\|_0.$$

On en déduit que

$$\|Y(x,D)v\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|Y\|_\epsilon}{\|Y\|_{L^\infty}} + \frac{\|Y(x,D)v\|_\epsilon}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_0}\right). \tag{3.13}$$

L'inégalité ci-dessus est l'analogue de l'inégalité (3.8). L'analogue de l'évidente relation $\partial_2^2 = \Delta - \partial_1^2$ est

$$\begin{aligned}|Y(x)|\partial_1^2 &= \frac{Y^1(x)Y(x,D)\partial_1 - Y^2(x)Y(x,D)\partial_2 + (Y^2(x))^2\Delta}{|Y(x)|},\\ |Y(x)|\partial_2^2 &= \frac{Y^2(x)Y(x,D)\partial_2 - Y^1(x)Y(x,D)\partial_1 + (Y^1(x))^2\Delta}{|Y(x)|},\\ |Y(x)|\partial_1\partial_2 &= \frac{Y^1(x)Y(x,D)\partial_2 + Y^1(x)Y(x,D)\partial_2 - Y^1(x)Y^2(x)\Delta}{|Y(x)|}.\end{aligned}$$

Comme $|Y^i(x)| \leq |Y(x)|$, il vient, pour tout point x du plan,

$$|Y(x)| \times |\nabla v(x)| \leq \|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty} + \frac{C}{\epsilon}\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_0 \times \log\left(e + \frac{\|Y\|_\epsilon}{\|Y\|_{L^\infty}} + \frac{\|Y(x,D)v\|_\epsilon}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_0}\right). \tag{3.14}$$

Nous allons maintenant appliquer l'inégalité ci-dessus à des champs de vecteurs Y_λ construits à partir des champs de vecteurs X_λ. Soient

$$U_\lambda = \{x \in \mathbf{R}^2 / 2|X_\lambda(x)| > I(\Sigma, X)\} \quad \text{et} \quad \delta = \left(\frac{I(\Sigma,X)}{4\widetilde{\|}X_\lambda\|_\epsilon}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}.$$

Considérons alors ρ une fonction positive d'intégrale 1 appartenant à $C_0^\infty(B(0,1))$. On pose alors

$$\theta_\lambda = \delta^{-2}\rho(\delta^{-1}\cdot) \star \mathbf{1}_{U_\lambda} \quad \text{et} \quad Y_\lambda = \frac{\theta_\lambda}{|X_\lambda|}X_\lambda.$$

Démontrons que

$$|X_\lambda(x)| \geq \frac{3I(\Sigma,X)}{4} \Rightarrow \theta_\lambda(x) = 1. \tag{3.15}$$

Par définition de la norme $\widetilde{\|}\cdot\|_\epsilon$ et par définition de δ, il vient, pour tout x et x' de $\mathbf{R}^2$ tels que $|x - x'| \leq \delta$,

$$|X_\lambda(x) - X_\lambda(x')| \leq \frac{I(\Sigma,X)}{4}.$$

Il en résulte que

$$|X_\lambda(x)| \geq \frac{3I(\Sigma,X)}{4} \Rightarrow x + B(0,\delta) \subset U_\lambda\,;$$

d'où l'implication (3.15).

Appliquons maintenant l'inégalité (3.14) à chaque champ de vecteurs Y_λ avec $\epsilon/2$. Comme $\|Y_\lambda\|_{L^\infty} = 1$, il en résulte que, pour tout x tel que

$$x \in V_\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{x \in \mathbf{R}^2 \,/\, |X_\lambda(x)| \geq \frac{3I(\Sigma,X)}{4}\right\},$$

on a

$$|\nabla v(x)| \leq \|\omega\|_{L^\infty} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + \|Y_\lambda\|_{\epsilon/2} + \frac{\|Y_\lambda(x,D)v\|_{\epsilon/2}}{\|\omega\|_0}\right). \tag{3.16}$$

Il suffit maintenant d'estimer les quantités $\|Y_\lambda\|_{\epsilon/2}$ et $\|Y_\lambda(x,D)v\|_{\epsilon/2}$. Majorons tout d'abord $\|Y_\lambda\|_\epsilon$. Par définition de Y_λ, il vient

$$|Y_\lambda(x) - Y_\lambda(y)| \leq |\theta_\lambda(x) - \theta_\lambda(y)| + 2|\theta_\lambda(y)|\frac{|X_\lambda(x) - X_\lambda(y)|}{|X_\lambda(x)|}.$$

Comme

$$\inf_{x \in \operatorname{Supp}\,\theta_\lambda} |X_\lambda(x)| \geq \frac{I(\Sigma,X)}{4} \quad \text{et} \quad \|\theta_\lambda\|_{L^\infty} = 1,$$

il vient

$$|Y_\lambda(x) - Y_\lambda(y)| \leq \|\theta_\lambda\|_\epsilon |x-y|^\epsilon + 8|\theta_\lambda(y)| \frac{|X_\lambda(x) - X_\lambda(y)|}{I(\Sigma, X)}.$$

Il résulte du fait que $\widetilde{\|}\theta_\lambda\|_\epsilon \leq C\delta^{-\epsilon}$ et de la définition de δ et de $N_\epsilon(\Sigma, X)$ que

$$\|Y_\lambda\|_\epsilon \leq C_1 \widetilde{\|} Y_\lambda\|_\epsilon \leq C \frac{\widetilde{\|} X_\lambda\|_\epsilon}{I(\Sigma, X)} \leq C N_\epsilon(\Sigma, X). \tag{3.17}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'écrire la démonstration, absolument analogue à la précédente, du fait que

$$\text{si} \quad \theta_{X,\lambda}(x) = \frac{\theta_\lambda(x)}{|X_\lambda(x)|}, \quad \text{alors} \quad \|\theta_{X,\lambda}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{I(\Sigma, X)}$$
$$\text{et} \quad \widetilde{\|}\theta_{X,\lambda}\|_\epsilon \leq C \frac{\widetilde{\|} X_\lambda\|_\epsilon}{I(\Sigma, X)^2} \leq \frac{C N_\epsilon(\Sigma, X)}{I(\Sigma, X)}.$$

De plus, en décomposant le produit en paraproduit et reste, puis en appliquant le théorème 2.4.1, il vient

$$\begin{aligned} \|Y_\lambda(x, D)v\|_{\epsilon/2} &\leq \|\theta_{X,\lambda}\|_{L^\infty} \|X_\lambda(x, D)v\|_{\epsilon/2} + \frac{C}{\epsilon} \|\theta_{X,\lambda}\|_\epsilon \|X_\lambda(x, D)v\|_{-\epsilon/2} \\ &\leq C \frac{\|X_\lambda(x, D)v\|_{\epsilon/2} + N_\epsilon(\Sigma, X)\|X_\lambda(x, D)v\|_{-\epsilon/2}}{I(\Sigma, X)}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Or, comme le champ de vecteurs v est de divergence nulle, on a

$$X_\lambda(x, D)v = \sum_j \left(T_{X_\lambda^j} \partial_j v + T_{\partial_j v} X^j \right) + \sum_j \partial_j R(v^j, X_\lambda^j).$$

En appliquant de nouveau le théorème 2.4.1, il vient

$$\begin{aligned} \|X_\lambda(x, D)v\|_{-\epsilon/2} &\leq \frac{C}{\epsilon} \|\nabla v\|_{-\epsilon/2} \|X_\lambda\|_\epsilon \\ &\leq \frac{C}{\epsilon} \|X_\lambda\|_\epsilon \|\omega\|_0. \end{aligned}$$

Il résulte alors de (3.18) que l'on a

$$\begin{aligned} \|Y_\lambda(x, D)v\|_{\epsilon/2} &\leq \frac{\|X_\lambda(x, D)v\|_{\epsilon/2}}{I(\Sigma, X)} + \frac{C}{\epsilon^2 I(\Sigma, X)} \|\omega\|_0 \|X_\lambda\|_\epsilon N_\epsilon(\Sigma, X) \\ &\leq \frac{\|X_\lambda(x, D)v\|_{\epsilon/2}}{I(\Sigma, X)} + C\|\omega\|_0 N_\epsilon(\Sigma, X)^3. \end{aligned}$$

D'après la majoration (3.16), il ressort que l'on a l'inégalité suivante :

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(V_\lambda)} \leq \|\omega\|_{L^\infty} + \frac{C}{\epsilon} \|\omega\|_0 \log\left(e + N_\epsilon(\Sigma, X) + \frac{\|X_\lambda(x, D)v\|_{\epsilon/2}}{I(\Sigma, X)\|\omega\|_0} \right). \tag{3.19}$$

Poursuivons la démonstration du théorème 3.3.2 en majorant, pour tout λ, la quantité $\|X_\lambda(x, D)v\|_\epsilon$ à l'aide de la quantité $\|X_\lambda(x, D)\omega\|_{\epsilon-1}$. Ceci fait l'objet du lemme ci-dessous.

Lemme 3.3.2 *Il existe une constante C et deux opérateurs bilinéaires W_1 et W_2 tels que, pour tout champ de vecteurs de divergence nulle v, on ait*

$$Y(x,D)v = W_1(Y,v) + W_2(Y,v) + W_3(Y,v) + \sum_{j=1}^{2} T_{\partial_j v} Y^j,$$

et tels que l'on ait, pour tout réel ϵ de l'intervalle $]0,1[$, les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|W_1(Y,v)\|_\epsilon &\leq C\|Y(x,D)\omega\|_{\epsilon-1},\\
\|W_2(Y,v)\|_\epsilon &\leq \frac{C}{\epsilon}\|Y\|_\epsilon\|\omega\|_0 \quad \textit{et}\\
\|W_3(Y,v)\|_\epsilon &\leq \frac{C}{\epsilon}\|\operatorname{div} Y\|_\epsilon\|\omega\|_0.
\end{aligned}$$

Tout d'abord, nous allons utiliser le découpage dyadique de l'ensemble des fréquences et la décomposition de Bony d'un produit pour établir que

$$Y(x,D)v = \sum_{i=1}^{5} V_i \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= (\mathrm{Id} - \chi(D))\nabla^\perp\Delta^{-1}Y(x,D)\omega,\\
V_2 &= \sum_{j=1}^{2}[T_{Y^j}, \nabla^\perp\Delta^{-1}]\partial_j\omega,\\
V_3 &= (\mathrm{Id} - \chi(D))\nabla^\perp\Delta^{-1}R(\omega, \operatorname{div} Y),\\
V_4 &= -(\mathrm{Id} - \chi(D))\nabla^\perp\Delta^{-1}\sum_{j=1}^{2}\big(T_{\partial_j\omega}Y^j + \partial_j R(\omega, Y_j)\big) \quad \text{et}\\
V_5 &= \sum_{j=1}^{2}\left(T_{\partial_j v}Y^j + R(\partial_j v, Y^j)\right).
\end{aligned}$$

En effet, d'après la décomposition de Bony d'un produit (voir (2.17)), on a

$$Y(x,D)v = \sum_{j=1}^{2} T_{Y^j}\partial_j v + V_5.$$

D'après la loi de Biot-Savart (1.8), il vient

$$Y(x,D)v = (\mathrm{Id} - \chi(D))\nabla^\perp\Delta^{-1}\sum_{j=1}^{2} T_{Y^j}\partial_j\omega + V_2 + V_5.$$

Utilisons à nouveau la décomposition de Bony.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2} T_{Y^j}\partial_j\omega &= \sum_j \partial_j\left(T_{Y^j}\omega\right) - T_{\operatorname{div} Y}\omega\\
&= \operatorname{div}(\omega Y) - \sum_j \left(\partial_j(T_\omega Y^j) + \partial_j R(Y^j, \omega)\right)\\
&\qquad\qquad - \omega \operatorname{div} Y + T_\omega \operatorname{div} Y + R(\omega, \operatorname{div} Y)\\
&= Y(x,D)\omega + R(\omega, \operatorname{div} Y) - \sum_{j=1}^{2}\left(T_{\partial_j\omega}Y^j + \partial_j R(\omega, Y_j)\right).
\end{aligned}$$

D'où la formule annoncée. Posons maintenant

$$\begin{aligned}
W_1(Y,v) &= V_1, \\
W_2(Y,v) &= V_2 + V_4 + V_5 - \sum_{j=1}^{2} T_{\partial_j v} X^j \quad \text{et} \\
W_3(Y,v) &= V_3
\end{aligned}$$

D'après les théorèmes 2.4.2 et 2.4.1, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|W_1(Y,v)\|_\epsilon &\leq C\|Y(x,D)\omega\|_{\epsilon-1}, \\
\|W_2(Y,v)\|_\epsilon &\leq \frac{C}{\epsilon}\|Y\|_\epsilon\|\omega\|_0 \quad \text{et} \\
\|W_3(Y,v)\|_\epsilon &\leq \frac{C}{\epsilon}\|\operatorname{div} Y\|_\epsilon\|\omega\|_0.
\end{aligned}$$

D'où le lemme 3.3.2 ci-dessus.

Reprenons le cours de la démonstration du théorème 3.3.2. Le théorème 2.4.1 implique

$$\|T_{\partial_j v} X^j_\lambda\|_{\epsilon/2} \leq \frac{C}{\epsilon}\|\nabla v\|_{-\epsilon/2}\|X_\lambda\|_\epsilon \leq \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0\|X_\lambda\|_\epsilon.$$

On déduit alors du lemme 3.3.2, que, pour tout λ, on a

$$\|X_\lambda(x,D)v\|_{\epsilon/2} \leq C\|X_\lambda(x,D)\omega\|_{\epsilon-1} + \frac{C}{\epsilon}(\|X_\lambda\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_\lambda\|_\epsilon)\|\omega\|_0. \tag{3.20}$$

Par définition de $\|\omega\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X}$, il vient

$$\frac{\|X_\lambda(x,D)v\|_{\epsilon/2}}{I(\Sigma,X)} \leq C\|\omega\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X}.$$

Il résulte alors de l'inégalité (3.19) que

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(V_\lambda)} \leq \|\omega\|_{L^\infty} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + N_\epsilon(\Sigma,X) + \frac{\|X_\lambda(x,D)\omega\|_{\epsilon-1}}{I(\Sigma,X)\|\omega\|_0}\right). \tag{3.21}$$

La famille $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ étant admissible en dehors de Σ, la réunion des ensembles V_λ est le complémentaire de Σ. Il en résulte que

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma^c)} \leq \|\omega\|_{L^\infty} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\omega\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X}}{\|\omega\|_0}\right),$$

ce qui est l'inégalité souhaitée dans le cas où la transformée de Fourier de ω est identiquement nulle près de l'origine.

Etudions maintenant le cas des basses fréquences. En posant $\widetilde{\omega} = (\operatorname{Id} - \chi(D))\omega$, il résulte de l'inégalité ci-dessus que

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma^c)} &\leq \|\chi(D)\nabla v\|_{L^\infty} + \|(\operatorname{Id} - \chi(D))\nabla v\|_{L^\infty} \\
&\leq \|\chi(D)\nabla v\|_{L^\infty} + \|\widetilde{\omega}\|_{L^\infty} + \frac{C}{\epsilon}\|\widetilde{\omega}\|_0 \log\left(e + \frac{\|\widetilde{\omega}\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X}}{\|\widetilde{\omega}\|_0}\right).
\end{aligned}$$

Comme $\|\tilde{\omega}\|_0 \leq C\|\omega\|_0$ et $\|\tilde{\omega}\|_{L^\infty} \leq C\|\omega\|_{L^\infty}$, il vient

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma^c)} \leq \|\chi(D)\nabla v\|_{L^\infty} + C\|\omega\|_{L^\infty} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\omega\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X}}{\|\omega\|_0}\right).$$

Pour tout λ, on a

$$X_\lambda(x,D)\tilde{\omega} = X_\lambda(x,D)\omega - X_\lambda(x,D)\chi(D)\omega.$$

On en déduit que

$$\|X_\lambda(x,D)\tilde{\omega}\|_{\epsilon-1} \leq \|X_\lambda(x,D)\omega\|_{\epsilon-1} + \|X_\lambda\|_\epsilon\|\omega\|_0.$$

D'où il vient,

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma^c)} \leq C\|\omega\|_{L^\infty} + \|\chi(D)\nabla v\|_{L^\infty} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\omega\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X}}{\|\omega\|_0}\right).$$

L'application du lemme 2.1.1 puis celle du théorème 3.1.1 assurent que

$$\begin{aligned}\|\chi(D)\nabla v\|_{L^\infty} &\leq C\|\nabla v\|_{L^a}\\ &\leq Ca\|\omega\|_{L^a}.\end{aligned}$$

Il en résulte l'estimation voulue

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma^c)} \leq C(a\|\omega\|_{L^a} + \|\omega\|_{L^\infty}) + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\omega\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X}}{\|\omega\|_0}\right).$$

En démontrant cette inégalité, nous avons suppposé (implicitement) que le champ de vecteurs v était régulier. Pour démontrer l'intégralité du théorème 3.3.2, il faut procéder par régularisation, puis passage à la limite.

On considère une fonction ω appartenant à l'espace $L^a \cap L^\infty \cap C^\epsilon(X)$. On peut appliquer l'inégalité ci-dessus à $S_n\omega$ et $S_n\nabla v$. Il vient alors

$$\|\nabla S_n v\|_{L^\infty(\Sigma^c)} \leq C(a\|S_n\omega\|_{L^a} + \|S_n\omega\|_{L^\infty}) + \frac{C}{\epsilon}\|S_n\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|S_n\omega\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X}}{\|S_n\omega\|_0}\right).$$

Le point essentiel est la majoration de $\|S_n\omega\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X}$. Majorons donc $\|X_\lambda(x,D)S_n\omega\|_\epsilon$. En utilisant la décomposition (2.17), il vient

$$\begin{aligned}A_n &= X_\lambda(x,D)S_n\omega - \sum_j [T_{X^j_\lambda}\partial_j, S_n]\omega\\ &= S_n(X_\lambda(x,D)\omega) + \sum_j\{T_{\partial_j S_n\omega}X^j_\lambda - S_n T_{\partial_j\omega}X^j_\lambda\}\\ &\quad + \sum_j \partial_j\{R(X^j_\lambda, S_n\omega) - S_nR(X^j_\lambda,\omega)\} + S_nR(\operatorname{div} X_\lambda,\omega) - R(\operatorname{div} X_\lambda, S_n\omega).\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.4.1 d'opérance du paraproduit et du reste, on écrit

$$\|X_\lambda(x,D)S_n\omega - \sum_j [T_{X^j_\lambda}\partial_j, S_n]\omega\|_\epsilon \leq CN_\epsilon(\Sigma,X)\|\omega\|_0.$$

D'après la définition 2.4.1 du paraproduit, on est fondé à écrire

$$[T_{X_\lambda^j}\partial_j, S_n]\omega = \sum_{q\leq n+5} [S_{q-1}X_\lambda^j, S_n]\partial_j\Delta_q\omega.$$

Or, avec les notations introduites page 23, l'opérateur S_n est l'opérateur de convolution par $2^{2n}\widetilde{h}(2^n\cdot)$; on en déduit que

$$[S_{q-1}X_\lambda^j, S_n]\partial_j\Delta_q\omega(x) = \int_{\mathbf{R}^2} 2^{2n}\widetilde{h}(2^n(x-y))(S_{q-1}X_\lambda(x) - S_{q-1}X_\lambda(y))\partial_j\Delta_q\omega(y)dy.$$

Une majoration évidente assure que

$$\|[S_{q-1}X_\lambda^j, S_n]\partial_j\Delta_q\omega\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{1-\epsilon}2^{q(2-\epsilon)}\|\omega\|_0\|X_\lambda\|_\epsilon.$$

D'après la caractérisation des espaces de Hölder donnée dans la proposition 2.3.2, on a, pour tout entier n et pour tout λ,

$$\|\sum_j [T_{X_\lambda^j}\partial_j, S_n]\omega\|_{\epsilon-1} \leq \frac{C}{1-\epsilon}\|\omega\|_0\|X_\lambda\|_\epsilon.$$

Il en résulte que, pour tout ϵ de l'intervalle $]0,1[$ et pour tout entier n, on a

$$\|S_n\omega\|_{\Sigma,X}^{\epsilon,0} \leq \frac{C}{1-\epsilon}(N_\epsilon(\Sigma,X)\|\omega\|_0 + \|\omega\|_{\Sigma,X}^{\epsilon,0}). \tag{3.22}$$

Or, il est clair que

$$\|S_n\omega\|_{L^\infty(\Sigma^c)} \leq C\|\omega\|_{L^\infty}, \quad \|S_n\omega\|_0 \leq C\|\omega\|_0 \quad \text{et} \quad \|S_n\omega\|_{L^a} \leq C\|\omega\|_{L^a}.$$

On en déduit que, pour tout entier n,

$$\|\nabla S_n v\|_{L^\infty} \leq C(a\|\omega\|_{L^a} + \|\omega\|_{L^\infty}) + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\omega\|_{\Sigma,X}^{\epsilon,0}}{\|\omega\|_0}\right). \tag{3.23}$$

Donc la suite $(\nabla v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de L^∞ qui est convergente dans L^a. Le théorème 3.3.2 est ainsi complètement démontré.

3.4 Références et remarques

La première section de ce chapitre est un résumé de résultats très classiques. Nous avons admis le fait que $\partial_i\partial_j\Delta^{-1}$ envoie L^p dans lui-même en renvoyant à [56]. Par contre, nous avons explicitement calculé les constantes dans le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, ce qui est fait par exemple dans [64] ; ceci pour mettre en valeur l'importance que prendra cette estimation aux chapitres 5 et 9.

Les deux exemples de la section 3.2 sont importants. Le premier montre qu'un champ de vecteurs de divergence nulle peut avoir un rotationnel borné à support compact sans être lipschitzien.

Quant au second, il sert d'introduction au théorème principal de la section 3.3. Notons que les calculs de cet exemple, convenablement raffinés, permettent à A. Bertozzi et P. Constantin de démontrer, postérieurement et dans le cas particulier où le tourbillon est la fonction caractéristisque d'un domaine borné et régulier, une estimation analogue à celle du théorème 3.3.2 (voir [14]).

La section 3.3 consiste en la démonstration d'une inégalité fondamentale pour la persistance de la régularité du bord d'une poche de tourbillon. Cette inégalité a été démontrée dans [27] et [29]. En s'inspirant de la généralisation de cette inégalité à la dimension trois, démontrée par P. Gamblin et X. Saint-Raymond dans [43], nous avons démontré ici plus simplement une version légèrement plus générale. De plus, le simplificateur lemme 3.3.1 est dû à P. Gérard (voir [44]).

Enfin, si l'exemple du champ de vecteurs de divergence nulle dont le tourbillon est la fonction caractéristique d'un carré justifie l'introduction de l'ensemble Σ dans le théorème 3.3.1, le chapitre 9 montre l'utilisation que l'on peut faire de cette localisation.

Chapitre 4

Cas d'une donnée initiale régulière

4.1 Résolution d'un problème modèle

Dans toute cette section, nous allons noter Π un opérateur bilinéaire défini sur l'ensemble des couples de champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^d$ et à valeurs dans les champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^d$. Cet opérateur Π est supposé vérifier l'estimation douce suivante : pour tout $r > 1$ pour la première inégalité, pour tout $r \in]-1,1[$ pour la seconde, il existe une constante $D(r)$ telle que

$$\begin{aligned} \|\Pi(v,w)\|_r &\leq D(r)(\|v\|_r\|w\|_{Lip} + \|w\|_r\|v\|_{Lip}), \\ \|\Pi(v,w)\|_r &\leq D(r)\min\{\|v\|_r\|w\|_{Lip}, \|w\|_r\|v\|_{Lip}\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Étant donné un champ de vecteurs v, non nécessairement de divergence nulle, on cherche à résoudre le problème modèle suivant :

$$(EM)\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t v + v\cdot\nabla v &=& \Pi(v,v) \\ v_{|t=0} &=& v_0. \end{array} \right.$$

Voici le théorème principal de la section.

Théorème 4.1.1 *Soient r un réel strictement supérieur à 1 et v_0 un champ de vecteurs appartenant à $C^r(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$. Il existe alors un unique $T^\star$ maximal et un unique champ de vecteurs v appartenant à $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d))$ solution de (EM). De plus, on a*

$$T^\star < +\infty \Rightarrow \int_0^{T^\star} \|v(t)\|_1 dt = \infty.$$

Démontrons ce théorème en utilisant un schéma itératif des plus standards. Pour cela, définissons la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ de champs de vecteurs dépendant du temps par la récurrence très simple suivante.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_1 &=& S_2 v_0 \\ \partial_t v_{n+1} + v_n\cdot\nabla v_{n+1} &=& \Pi(v_n,v_n), \\ v_{n+1|t=0} &=& S_{n+2}v_0. \end{array} \right. \tag{4.2}$$

L'existence de la solution est évidente. En effet, si ψ_n désigne le flot de v_n, on a alors

$$v_{n+1}(t,x) = S_{n+2}v_0(\psi_n^{-1}(t,x)) + \int_0^t \Pi(v_n(s),v_n(s))(\psi_n(s,\psi_n^{-1}(t,x)))ds. \qquad (4.3)$$

On procède maintenant en deux étapes. Premièrement, on démontre l'existence d'un temps T_1 strictement positif tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite bornée de $L^\infty([0,T_1];C^r(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d))$. Deuxièmement, on démontre l'existence d'un temps T_2 tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite de Cauchy de $L^\infty([0,T_2];C^{r-1}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d))$.

La première étape nécessite la démonstration d'estimations a priori sur les solutions des équations de transport.

Lemme 4.1.1 *Il existe une constante C vérifiant la propriété suivante. Soit v un champ de vecteurs de classe C^∞ dont les dérivées sont bornées sur $[0,T]\times\mathbf{R}^d$ pour tout T strictement positif. Considérons un réel r, différent de 1, strictement positif, ou bien strictement supérieur à -1 si, à tout instant, le champ de vecteurs $v(t)$ est de divergence nulle. On désigne par $V(t)$ une fonction telle que*

$$V(t) \geq \max\left\{\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \frac{\|\nabla v(t)\|_{r-1}}{r-1}\right\}.$$

Soient (f,g) appartenant à $L^\infty([0,T];C^r)\times L^1([0,T];C^r)$ deux fonctions telles que

$$g = g_1 + g_2 \quad \textit{avec} \quad \|g_2(t)\|_r \leq C(r)V(t)\|f(t)\|_r.$$

Si l'on a

$$\partial_t f + v\cdot\nabla f = g,$$

on peut écrire l'inégalité suivante :

$$\|f(t)\|_r \leq \|f(0)\|_r e^{C(r)\int_0^t V(\tau)d\tau} + \int_0^t \|g_1(\tau)\|_r e^{C(r)\int_\tau^t V(\tau')d\tau'}d\tau \qquad (4.4)$$

en posant

$$\begin{aligned}
C(r) &= C^r \quad \textit{si} \quad r>1,\\
C(r) &= C\Big(\frac{1}{r}+\frac{1}{1-r}\Big) \quad \textit{si} \quad 0<r<1,\\
C(r) &= C\Big(\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1-r}\Big) \quad \textit{si} \quad -1<r<1 \quad \textit{et} \quad \operatorname{div} v(t) = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on se contentait du cas des espaces de Hölder d'indice strictement compris entre 0 et 1, il suffirait de contrôler l'évolution de la norme Lipschitz ou de la norme $\|\cdot\|_r$ du flot d'un champ de vecteurs lipschitzien, ce qui est trivial. Dans le cas où r est strictement supérieur à 1, il suffit de contrôler l'évolution de la régularité hölderienne d'indice r du flot d'un champ de vecteurs de classe C^r, ce qui est élémentaire. Néanmoins, comme nous utiliserons une estimation sur l'évolution de la régularité hölderienne d'indice négatif pour l'étude du problème des poches de tourbillon, nous avons choisi d'exposer ici la méthode qui convient dans tous les cas.

Tout d'abord, remarquons qu'en posant $g = \partial_t f + v \cdot \nabla f$, il vient

$$f(t,x) = f_0(\psi^{-1}(t,x)) + \int_0^t g(s,\psi(s,\psi^{-1}(t,x)))ds. \tag{4.5}$$

Il en résulte de manière évidente que

$$\|f(t)\|_{L^\infty} \leq \|f_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|g(s)\|_{L^\infty} ds. \tag{4.6}$$

L'idée consiste à appliquer cette estimation L^∞ tout à fait élémentaire à des "morceaux" de f correspondant à une échelle de fréquences déterminée. Plus précisement, vu que f vérifie

$$(ET)\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla f &= g \\ f_{|t=0} &= f_0, \end{cases}$$

la fonction $\Delta_q f$ vérifie

$$(ET_q)\begin{cases} \partial_t \Delta_q f + v \cdot \nabla \Delta_q f &= \Delta_q g + [v \cdot \nabla, \Delta_q] f \\ \Delta_q f_{|t=0} &= \Delta_q f_0. \end{cases}$$

Le point important de la démonstration consiste en l'étude précise du commutateur $[v \cdot \nabla, \Delta_q]$. Supposons démontré que

$$\|[v \cdot \nabla, \Delta_q] f\|_{L^\infty} \leq C(r) 2^{-qr} \|f(t)\|_r V(t). \tag{4.7}$$

Il résulte alors de l'estimation L^∞ (4.6) ci-dessus, de l'équation (ET_q) et de l'hypothèse faite sur g que

$$\|\Delta_q f(t)\|_{L^\infty} \leq \|\Delta_q f_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|\Delta_q g_1(s)\|_{L^\infty} ds + C(r) 2^{-qr} \int_0^t V(s) \|f(s)\|_r ds.$$

Par multiplication par 2^{qr} et passage à la borne supérieure, il vient

$$\|f(t)\|_r \leq \|f_0\|_r + \int_0^t \|g_1(s)\|_r ds + C(r) \int_0^t V(s) \|f(s)\|_r ds.$$

Le lemme de Gronwall assure immédiatement le lemme 4.1.1.

Démontrons l'inégalité (4.7) sur le commutateur $[v \cdot \nabla, \Delta_q]$. Pour ce faire, utilisons la décomposition en paraproduit et reste (2.17). On en déduit

$$v \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^d \Big(T_{v^j} \partial_j u + T_{\partial_j u} v^j + \partial_j R(v^j, u) \Big) - R(\operatorname{div} v, u). \tag{4.8}$$

L'opération de commutation avec un opérateur donné étant linéaire, il suffit d'étudier la commutation avec chacun des quatre opérateurs ci-dessus.

D'après la définition 2.4.1 du paraproduit et d'après les propriétés (2.3) à (2.7) de la partition de l'unité dyadique choisie, il vient

$$[\Delta_q, T_{v^j} \partial_j] = \sum_{j=1}^d \sum_{|q-q'| \leq 4} [\Delta_q, S_{q'-1}(v^j)] \Delta_{q'} \partial_j.$$

Par définition des opérateurs Δ_q, il vient

$$[\Delta_q, S_{q'-1}(v^j)]u(x) = \int_{\mathbf{R}^d} h(y)\Big(S_{q'-1}(v^j)(x-2^{-q}y) - S_{q'-1}(v^j)(x)\Big)u(x-2^{-q}y)dy.$$

Comme la fonction qui, à z, associe $|z|h(z)$, est intégrable, on en déduit que

$$\|[\Delta_q, S_{q'-1}(v^j)]u\|_{L^\infty} \leq C2^{-q}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}.$$

En appliquant ceci avec $u = \Delta_{q'}\partial_j f(t)$, on peut écrire

$$\|[\Delta_q, S_{q'-1}(v^j(t))]\Delta_{q'}\partial_j f(t)\|_{L^\infty} \leq C^{r+1}2^{-qr}\|f(t)\|_r\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}.$$

D'où il résulte que

$$\|[\Delta_q, T_{v^j(t)}\partial_j]f(t)\|_{L^\infty} \leq C^{|r|+1}2^{-qr}\|f(t)\|_r\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \tag{4.9}$$

Etudions maintenant le deuxième terme, c'est-à-dire la commutation entre les opérateurs Δ_q et $T_{\partial_j \cdot}v^j(t)$. Les petites fréquences n'intervenant pas dans la définition du paraproduit, le théorème 2.4.1 dit que

$$\|T_a b\|_r \leq C^{|r|+1}\|a\|_{L^\infty}\|\nabla b\|_{r-1}$$

et que, si ρ est strictement négatif,

$$\|T_a b\|_{r+\rho} \leq \frac{C^{|\rho+r|+1}}{-\rho}\|a\|_\rho\|\nabla b\|_{r-1}.$$

D'où il vient que

$$\|\Delta_q T_{\partial_j f(t)}v^j(t)\|_{L^\infty} \leq C^{|r|+1}2^{-qr}\|\nabla f(t)\|_{L^\infty}\|\nabla v(t)\|_{r-1}, \tag{4.10}$$

et que, si r est strictement inférieur à 1,

$$\|\Delta_q T_{\partial_j f}v^j\|_{L^\infty} \leq \frac{C^{|r|+1}}{1-r}2^{-qr}\|\nabla f\|_{r-1}\|\nabla v\|_0. \tag{4.11}$$

D'après les propriétés de la partition de l'unité dyadique choisie, en particulier (2.6), on a

$$T_{\partial_j \Delta_q u}v^j = \sum_{q'\geq q} S_{q'-1}\Delta_q\partial_j u\Delta_{q'}v^j.$$

D'où, d'après le lemme 2.1.1,

$$\|T_{\partial_j \Delta_q f}v^j\|_{L^\infty} \leq C\|\Delta_q\partial_j f\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_0. \tag{4.12}$$

Il résulte des estimations (4.10)–(4.12) que

$$\|[\Delta_q, T_{\partial_j \cdot}v^j]f\|_{L^\infty} \leq C^r 2^{-qr}\|\nabla f\|_{L^\infty}\|\nabla v\|_{r-1} \quad \text{si} \quad r > 1, \tag{4.13}$$

$$\|[\Delta_q, T_{\partial_j \cdot}v^j]f\|_{L^\infty} \leq \frac{C^{r+1}}{1-r}2^{-qr}\|\nabla f\|_{r-1}\|\nabla v\|_0 \quad \text{si} \quad r < 1. \tag{4.14}$$

Les commutateurs du type $[\Delta_q, R(\operatorname{div} v, \cdot)]$ sont très faciles à étudier. En effet, on a, pour tout r strictement positif,

$$\begin{aligned}
\|\Delta_q R(\operatorname{div} v, u)\|_{L^\infty} &\leq 2^{-qr}\|R(\operatorname{div} v, u)\|_r \\
&\leq \frac{C^{r+1}}{r} 2^{-qr}\|\operatorname{div} v\|_0\|a\|_r.
\end{aligned}$$

De plus, on a, par définition de R,

$$R(\operatorname{div} v, \Delta_q u) = \sum_{\substack{|q'-q|\leq 1 \\ |q''-q'|\leq 1}} \Delta_{q''} \operatorname{div} v \Delta_{q'} \Delta_q u.$$

D'où il vient, pour tout r strictement positif,

$$\|[\Delta_q, R(\operatorname{div} v, \cdot)]u\|_{L^\infty} \leq \frac{C^{r+1}}{r} 2^{-qr}\|\operatorname{div} v\|_0\|u\|_r. \tag{4.15}$$

Si le champ de vecteurs v est de divergence nulle, ce terme n'intervient bien évidemment pas.

Etudions les commutateurs $[\Delta_q, \partial_j R(v^j, \cdot)]$. On écrit, pour tout r strictement supérieur à -1,

$$\begin{aligned}
\|\Delta_q \partial_j R(v^j, u)\|_{L^\infty} &\leq \frac{C^{|r|+2}}{1+r} 2^{-qr}\|R(v^j, u)\|_{r+1} \\
&\leq C_r 2^{-qr}\|v\|_1\|a\|_r.
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\partial_j R(v^j, \Delta_q u) = \sum_{\substack{|q'-q|\leq 2 \\ |q''-q'|\leq 1}} \partial_j(\Delta_{q''} \operatorname{div} v\, \Delta_{q'} \Delta_q u).$$

Comme le support de la transformée de Fourier de $\Delta_{q''} \operatorname{div} v \Delta_{q'} \Delta_q u$ est inclus dans une boule de rayon 2^q, on déduit du lemme 2.1.1 que

$$\|\partial_j R(v^j, \Delta_q u)\|_{L^\infty} \leq C 2^{-qr}\|v\|_1\|u\|_r.$$

Il en résulte que, pour tout r strictement supérieur à -1, on a

$$\|[\Delta_q, \partial_j R(v^j, \cdot)]u\|_{L^\infty} \leq \frac{C^{|r|+2}}{1+r} 2^{-qr}\|v\|_1\|u\|_r. \tag{4.16}$$

Cette inégalité ne convient pas. Il faut en effet remplacer $\|v\|_1$ par $\|\nabla v\|_0$. Mais, comme

$$\|(\operatorname{Id} - \chi(D))v\|_1 \leq C\|\nabla v\|_0,$$

il vient

$$\|[\Delta_q, \partial_j R((\operatorname{Id} - \chi(D))v^j, \cdot)]u\|_{L^\infty} \leq \frac{C^{|r|+1}}{1+r} 2^{-qr}\|\nabla v\|_0\|v\|_r. \tag{4.17}$$

Majorons maintenant $\|[\Delta_q, \partial_j R(\chi(D)v^j, \cdot)]u\|_{L^\infty}$. On a

$$\begin{aligned} R(\chi(D)v^j, u) &= \sum_{\substack{|j|=1\\ p\leq 1}} v_p u_{p-j} \quad \text{avec} \\ v_p &= \Delta_p \chi(D) v \quad \text{et} \quad u_{p-j} = \Delta_{p-j} u. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$[\Delta_q, \partial_j R((\mathrm{Id} - \chi(D))v^j, \cdot)]u(x) = 2^{qd} \int_{\mathbf{R}^d} h(2^q(x-y))(v_p(x) - v_p(y)) \cdot \nabla u_{p-j}(y) dy.$$

D'où il vient que

$$\|[\Delta_q, \partial_j R(\chi(D)v^j, \cdot)]u\|_{L^\infty} \leq C \|\chi(D)\nabla v\|_{L^\infty} \|u\|_r.$$

On déduit alors de l'inégalité (4.17) que

$$\|[\Delta_q, \partial_j R(v^j, \cdot)]u\|_{L^\infty} \leq \frac{C^{|r|+1}}{1+r} \|\nabla v(t)\|_0 \|u\|_r. \tag{4.18}$$

Il ressort alors des inégalités (4.9), (4.13)–(4.15) et (4.18) que l'on a

$$\|[v(t) \cdot \nabla, \Delta_q] f(t)\|_{L^\infty} \leq C(r) 2^{-qr} \|f(t)\|_r V(t),$$

ce qui n'est rien d'autre que l'estimation (4.7). Le lemme 4.1.1 est ainsi complètement démontré.

Remarque Lorsque, dans le lemme 4.1.1, la fonction g_2 est nulle, on peut, à la place de l'inégalité (4.4), démontrer, pour $r > 1$, l'inégalité suivante.

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_r \leq\ & \|f_0\|_r \exp\Big(C^{r+1} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big) \\ & + C^{r+1} \|\nabla f(0)\|_{L^\infty} \Big(\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{r-1} d\tau\Big) \exp\Big(C^{r+1} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big) \\ & + \int_0^t \|g(\tau)\|_r \exp\Big(C^{r+1} \int_\tau^t \|\nabla v(\tau')\|_{L^\infty} d\tau'\Big) d\tau \\ & + C^{r+1} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{r-1} \int_0^\tau \|\nabla g(\tau')\|_{L^\infty} \exp\Big(\int_{\tau'}^t C^{r+1} \|\nabla v(\tau'')\|_{L^\infty} d\tau''\Big) d\tau' d\tau. \end{aligned}$$

En effet, d'après les inégalités (4.9), (4.13), (4.15) et (4.18), on sait que

$$\|[\Delta_q, v(t) \cdot \nabla] f(t)\|_{L^\infty} \leq C^{r+1} \left(\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \|f(t)\|_r + \|\nabla f(t)\|_{L^\infty} \|\nabla v(t)\|_{r-1} \right).$$

Ainsi, en suivant une démarche analogue à celle utilisée pour démontrer le lemme 4.1.1, on obtient

$$\begin{aligned} \|f(t)\|_r \leq \|f(0)\|_r + C^{r+1} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{r-1} \|\nabla f(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \\ + \int_0^t \|g(\tau)\|_r d\tau + C^{r+1} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} \|f(\tau)\|_r d\tau. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, on a

$$\begin{aligned}\|f(t)\|_r \;\leq\; & \|f(0)\|_r \exp\Big(C^{r+1}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big) \\ & + \int_0^t \|g(\tau)\|_r \exp\Big(C^{r+1}\int_\tau^t \|\nabla v(\tau')\|_{L^\infty}d\tau'\Big)d\tau \\ & + C^{r+1}\int_0^t \|\nabla f(\tau)\|_{L^\infty}\|\nabla v(\tau)\|_{r-1}\exp\Big(C^{r+1}\int_\tau^t \|\nabla v(\tau')\|_{L^\infty}d\tau'\Big)d\tau.\end{aligned} \tag{4.19}$$

En différentiant l'équation de transport, il vient,

$$\partial_t(\nabla f) + v\cdot\nabla(\nabla f) + \nabla v\cdot\nabla f = \nabla g.$$

D'où, par intégration

$$\|\nabla f(t)\|_{L^\infty} \leq \|\nabla f(0)\|_{L^\infty} + \int_0^t \|\nabla g(\tau)\|_{L^\infty}d\tau + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\|\nabla f(\tau)\|_{L^\infty}d\tau. \tag{4.20}$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned}\|\nabla f(t)\|_{L^\infty} \leq \|\nabla f(0)\|_{L^\infty} & \exp\Big(\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big) \\ & + \int_0^t \|\nabla g(\tau)\|_{L^\infty}\exp\Big(\int_\tau^t \|\nabla v(\tau')\|_{L^\infty}d\tau'd\tau\Big).\end{aligned}$$

D'où le résultat en remplaçant, dans l'inégalité (4.19), le terme $\|\nabla f(\tau)\|_{L^\infty}$ par le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus.

Malheureusement, cette amélioration ne peut être utilisée dans le contexte de l'équation d'Euler, car le terme de pression introduit un multiplicateur de Fourier pour lequel l'estimation (4.19) n'est d'aucun secours.

Démontrons maintenant une estimation uniforme en grande norme, c'est-à-dire l'existence du temps T_1 tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite bornée de $L^\infty([0,T_1];C^r)$.

Posons $a_0 = \|\widetilde{h}\|_{L^1}$ (la fonction $\widetilde{h}$ est définie page 24). Nous allons établir que, pour toute donnée initiale v_0, on a

$$\|v_n\|_{L^\infty([0,T_1];C^r)} \leq 8a_0\|v_0\|_r, \tag{4.21}$$

en posant

$$T_1 = \min\Big\{\frac{1}{32a_0D(r)\|v_0\|_r}, \frac{(r-1)\log 2}{16a_0C(r)\|v_0\|_r}\Big\}.$$

On démontre cette propriété par récurrence. Très clairement, on a que $\|v_1\|_r \leq a_0\|v_0\|_r$. Supposons l'estimation (4.21) ci-dessus satisfaite pour tout $j \leq n$. En appliquant l'estimation a priori pour $r > 1$ du lemme 4.1.1, il vient, par définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$,

$$\|v_{n+1}\|_r \leq \frac{\lambda}{\lambda - C(r)}\bigg(a_0\|v_0\|_r\exp\Big(\frac{8\lambda t\|v_0\|_r}{r-1}\Big) + 64a_0^2D(r)t\|v_0\|_r^2\bigg),$$

et ce, pour tout $\lambda > C(r)$. En appliquant l'inégalité ci-dessus avec $\lambda = 2C(r)$, il vient, par définition de T_1,

$$\|v_{n+1}\|_{L^\infty([0,T_1];C^r)} \leq 8a_0\|v_0\|_r.$$

Il en résulte que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de l'espace $L^\infty([0,T_1];C^r)$.

Démontrons maintenant l'existence d'un temps T_2 tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite de Cauchy de l'espace $L^\infty([0,T_2];C^{r-1})$. Pour cela, il faut estimer la quantité $\|v_{n+1}(t)-v_n(t)\|_{r-1}$. On sait que

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t v_{n+1}+v_n\cdot\nabla v_{n+1} & = & \Pi(v_n,v_n)\\ v_{n+1|t=0} & = & S_{n+2}v_0\end{array}\right.$$

et que

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t v_n+v_{n-1}\cdot\nabla v_n & = & \Pi(v_{n-1},v_{n-1})\\ v_{n|t=0} & = & S_{n+1}v_0.\end{array}\right.$$

D'où, par différence, il vient

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t(v_{n+1}-v_n)+v_n\cdot\nabla(v_{n+1}-v_n) & = & (v_{n-1}-v_n)\cdot\nabla v_n\\ & & \quad +\Pi(v_n-v_{n-1},v_n)+\Pi(v_{n-1},v_n-v_{n-1})\\ (v_{n+1}-v_n)_{|t=0} & = & \Delta_{n+1}v_0.\end{array}\right.$$

En posant $V(t)=V=8\|v_0\|_r$ et $\lambda=C(r)+1$ et en appliquant les estimations a priori du lemme 4.1.1 et les estimations douces du corollaire 2.4.1, on démontre l'existence d'une constante A_r telle que, pour tout $T\leq T_1$, on ait

$$\|v_{n+1}-v_n\|_{L^\infty([0,T];C^{r-1})}\leq A_r\Big(\|\Delta_{n+1}v_0\|_{r-1}e^{A_rT}+A_re^{A_rTV}TV\|v_n-v_{n-1}\|_{L^\infty([0,T];C^{r-1})}\Big).$$

Or, $\|\Delta_{n+1}v_0\|_{r-1}\leq C^r2^{-n}\|v_0\|_r$. Donc, en choisissant T_2 assez petit pour que l'on ait

$$A_r^2T_2Ve^{A_rT_2V}\leq\frac{1}{2},\tag{4.22}$$

on déduit de l'estimation ci-dessus l'existence d'une constante A'_r telle que

$$\|v_{n+1}-v_n\|_{L^\infty([0,T_2];C^{r-1})}\leq A'_r2^{-n}.$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty([0,T_2];C^{r-1})$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant bornée dans l'espace $L^\infty([0,T_2];C^r)$, c'est une suite de Cauchy dans l'espace $L^\infty([0,T_2];C^{r'})$ pour tout r' strictement inférieur à r. L'opérateur bilinéaire Π est continu sur $C^{r'}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)\times C^{r'}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$. Le produit est un opérateur bilinéaire continu sur $C^{r-1}\times C^{r-1}$; donc la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un champ de vecteurs solution du système modèle (EM).

Pour démontrer l'unicité, considérons v et w deux champs de vecteurs appartenant à l'espace $L^\infty([0,T];C^r(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d))$ et solutions du système (EM). Posons $V(t)=\|v(t)\|_r+\|w(t)\|_r$. Observons tout d'abord que, par différence, le champ de vecteurs $v-w$ vérifie

$$\begin{array}{rcl}\partial_t(v-w)+v\cdot\nabla(v-w) & = & (w-v)\cdot\nabla w+\Pi(v,v-w)+\Pi(v-w,v)\\ (v-w)_{|t=0} & = & v(0)-w(0).\end{array}$$

L'estimation douce (4.1) et le théorème 2.4.1 assure que l'on a

$$\|(w-v)\cdot\nabla w+\Pi(v,v-w)+\Pi(v-w,v)\|_{r-1}\leq V(t)\|(v-w)(t)\|_{r-1}.$$

Il suffit d'appliquer le lemme 4.1.1 pour obtenir que

$$\|(v-w)(t)\|_{r-1}\leq\|v_0-w_0\|_{r-1}\exp\Big(C\int_0^tV(\tau)d\tau\Big).\tag{4.23}$$

D'où l'unicité.

La condition nécessaire de non-existence globale repose sur l'inégalité logarithmique du lemme 2.3.5 et sur l'estimation a priori des solutions de (EM) que voici.

Lemme 4.1.2 *Pour tout réel r strictement positif et pour tout opérateur Π satisfaisant l'estimation douce (4.1), il existe une constante C vérifiant la propriété suivante. Soit v un champ de vecteurs appartenant à l'espace $L^\infty([0,T];Lip)$ une solution de (EM), alors, pour tout t de l'intervalle $[0,T]$, on a,*

$$\|v(t)\|_r \leq \|v_0\|_r \exp\Big(\frac{C^{r+1}}{r}\int_0^t \|v(\tau)\|_{Lip}d\tau\Big).$$

La démonstration de ce lemme se fait en relisant la démonstration des estimations a priori énoncées dans le lemme 4.1.1. Le champ de vecteurs $\Delta_q v$ vérifie

$$(EM_q)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\Delta_q v + v\cdot\nabla\Delta_q v & = & \Delta_q\Pi(v,v) + [v\cdot\nabla,\Delta_q]v \\ \Delta_q v_{|t=0} & = & \Delta_q v_0. \end{array}\right.$$

On utilise à nouveau la décomposition de Bony ; d'où

$$v\cdot\nabla u = T_{v^j}\partial_j u + T_{\partial_j u}v^j + R(v^j,\partial_j u).$$

D'après l'inégalité (4.9), il vient, pour tout $r>0$,

$$\|[\Delta_q, T_{v^j(t)}\partial_j]v(t)\|_{L^\infty} \leq C_r 2^{-qr}\|v(t)\|_r\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \tag{4.24}$$

De l'inégalité (4.13), on déduit pour tout $r>0$,

$$\|[\Delta_q, T_{\partial_j\cdot}v^j]v(t)\|_{L^\infty} \leq C2^{-qr}\|v(t)\|_r\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}. \tag{4.25}$$

Il résulte des inégalités (4.15) et (4.16) que

$$\|[\Delta_q, R(v^j,\partial_j\cdot)]v\|_{L^\infty} \leq \frac{C^{r+1}}{r}2^{-qr}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}\|\nabla v(t)\|_r. \tag{4.26}$$

D'où

$$\|[v\cdot\nabla,\Delta_q]v\|_{L^\infty} \leq \frac{C^{r+1}}{r}2^{-qr}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}\|v(t)\|_r.$$

Par intégration de (EM_q), par passage à la borne supérieure et par application de l'estimation douce (4.1), il vient

$$\|v(t)\|_r \leq \|v_0\|_r + C\int_0^t \|v(\tau)\|_{Lip}\|v(\tau)\|_r d\tau.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on obtient le lemme.

Nous allons maintenant démontrer la propriété intermédiaire suivante :

$$T^\star < \infty \Rightarrow \int_0^{T^\star} \|v(t)\|_{Lip}dt = +\infty.$$

En effet, si l'intégrale ci-dessus est finie, alors la fonction $\partial_t v$ appartient à l'espace $L^\infty([0,T^\star[;C^{r-1})$. Il en résulte que

$$\lim_{t\to T^\star} v(t) = v_{T^\star} \quad \text{existe dans} \quad C^{r-1}.$$

Comme, d'après le lemme 4.1.2, le champ de vecteurs v appartient à $L^\infty([0,T^\star[;C^r)$, la fonction $v(t)$ est une fonction continue de l'intervalle fermé $[0,T^\star]$ dans $C^{r'}$ pour tout r' strictement inférieur à r. Posons

$$M_{T^\star} = \|v\|_{L^\infty([0,T^\star];C^r)}.$$

Considérons alors un temps t_0 strictement inférieur au temps $T^\star$ tel que $T^\star - t_0$ soit strictement inférieur au temps minimal d'existence T_2 défini par la relation (4.22) appliquée avec $M = M_{T^\star}$. Il existe alors une unique solution $\tilde{v}$ de (EM) qui appartienne à $L^\infty([t_0, t_0+T_2];C^r)$ et telle que $\tilde{v}(t_0) = v(t_0)$. Donc, d'après l'unicité de la solution déduite de l'inégalité (4.23), on peut affirmer que $v = \tilde{v}$ sur l'intervalle $[t_0, T^\star[$. Le champ de vecteurs défini par v sur l'intervalle $[0,t_0]$ et par $\tilde{v}$ sur l'intervalle $[t_0, t_0+T_2]$ est une solution du système (EM). Ceci contredit la maximalité de $T^\star$.

Pour démontrer l'intégralité du théorème 4.1.1, il suffit maintenant de prouver que

$$\int_0^{T^\star} \|v(t)\|_1 dt < +\infty \Rightarrow \int_0^{T^\star} \|v(t)\|_{Lip} dt < +\infty.$$

Rappellons l'inégalité énoncée dans le lemme 2.3.5.

$$\|v(t)\|_{Lip} \leq \frac{C}{r-1}\|v(t)\|_1 \log\left(e + \frac{\|v(t)\|_r}{\|v(t)\|_1}\right).$$

Posons $V_1(t) = \max\{\|v(t)\|_1, \|v(0)\|_1\}$. Nous savons bien que, pour tout α strictement positif, la fonction

$$x \mapsto x\log\left(e + \frac{\alpha}{x}\right)$$

est une fonction croissante ; comme $V_1(t) \geq \|v(0)\|_1$, il vient,

$$\|v(t)\|_{Lip} \leq \frac{C}{r-1}V_1(t) \log\left(e + \frac{\|v(t)\|_r}{\|v(0)\|_1}\right).$$

D'après le lemme 4.1.2 ci-dessus,

$$\|v(t)\|_r \leq \|v_0\|_r \exp\left(C\int_0^t \|v(\tau)\|_{Lip} d\tau\right).$$

On a donc, pour r appartenant à l'intervalle $]1,2]$,

$$\|v(t)\|_{Lip} \leq \frac{C}{r-1}V_1(t) \log\left(e + \frac{\|v_0\|_r}{\|v_0\|_1}\exp\left(C\int_0^t \|v(\tau)\|_{Lip} d\tau\right)\right).$$

En posant

$$L_r(v_0) = \frac{C}{r-1}\log\left(e + \frac{\|v_0\|_r}{\|v_0\|_1}\right),$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{Lip} &\leq \frac{C}{r-1}V_1(t)\Big(\log\Big(e+\frac{\|v_0\|_r}{\|v_0\|_1}\Big)+\int_0^t \|v(\tau)\|_{Lip}d\tau\Big)\\ &\leq L_r(v_0)V_1(t)\Big(1+\int_0^t \|v(\tau)\|_{Lip}d\tau\Big).\end{aligned}$$

Par intégration, il en résulte immédiatement que

$$\int_0^t \|v(\tau)\|_{Lip}d\tau \leq e^{\int_0^t L_r(v_0)V_1(\tau)d\tau}-1. \tag{4.27}$$

Cette inégalité assure le théorème. On peut aussi en déduire un minoration du temps de vie $T^\star$ de la solution du système modèle (EM). Dans cette minoration, la norme C^r de la donnée initiale v_0 n'intervient qu'adoucie par un logarithme.

Proposition 4.1.1 *Il existe une constante c telle que, si v_0 est un champ de vecteurs de classe C^r avec r strictement supérieur à 1, le temps maximal $T^\star(v_0)$ d'existence de la solution du système (EM) vérifie*

$$T^\star \geq \frac{c}{\|v_0\|_1 L_r(v_0)} \quad \textit{avec} \quad L_r(v_0)=\frac{C}{r-1}\log\Big(e+\frac{\|v_0\|_r}{\|v_0\|_1}\Big).$$

L'inégalité (4.1.2) nous assure l'existence d'une constante C_1, indépendante de v_0, telle que

$$\|v(t)\|_1 \leq \|v_0\|_1 \exp\Big(C_1\int_0^t \|v(\tau)\|_{Lip}d\tau\Big). \tag{4.28}$$

Posons alors

$$T=\frac{e^{-C_1}\log 2}{\|v_0\|_1 L_r(v_0)}.$$

Nous allons démontrer que

$$\forall t\in[0,\min\{T,T^\star\}]\,,\ \|v(t)\|_1 \leq e^{C_1}\|v_0\|_1,$$

ce qui, compte tenu de la condition

$$T^\star<+\infty \Rightarrow \int_0^{T^\star}\|v(t)\|_1 dt=\infty,$$

entraînera que $T^\star$ est plus grand que T. Pour tout temps t plus petit que T, il résulte des inégalités (4.27) et (4.28) que

$$\|v(t)\|_1 \leq \|v_0\|_1 e^{C_1(\exp(TL_r(v_0)e^{C_1}\|v_0\|_1)-1)}.$$

D'après notre choix de T, nous avons

$$e^{C_1(\exp(TL_r(v_0)e^{C_1}\|v_0\|_1)-1)}=e^{C_1},$$

d'où la proposition.

4.2 Retour à l'équation d'Euler

Nous allons maintenant démontrer que, lorsque l'opérateur Π est l'opérateur π de la définition 2.5.2, alors toute solution du système (EM) est solution du système (E). Plus précisément, nous prouverons dans cette section le théorème d'existence locale suivant.

Théorème 4.2.1 *Soient r un réel strictement supérieur à 1 et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle de classe C^r. Il existe un unique réel strictement positif $T^\star$ et une unique solution (v,p) du système (E) appartenant à $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r \times (C^{r+1}+C^\infty_L))$. De plus, on a*

$$T^\star < +\infty \Rightarrow \int_0^{T^\star} \|v(t)\|_1 dt = +\infty.$$

D'après le théorème 4.1.1 d'existence locale de solutions régulières pour le système modèle (EM), on dispose d'un champ de vecteurs v tel que $v(0) = v_0$ et satisfaisant

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v = \pi(v,v).$$

Or, d'après la proposition 2.5.1, on a

$$\| \operatorname{div} \pi(v,v) - tr(Dv^2)\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_r \| \operatorname{div} v\|_{L^\infty}.$$

De plus, on sait que

$$\partial_t \operatorname{div} v + v \cdot \nabla \operatorname{div} v = \operatorname{div} \pi(v,v) - tr(Dv^2)$$

Comme $\| \operatorname{div} v_0\|_{L^\infty} = 0$, il en résulte que

$$\| \operatorname{div} v(t)\|_{L^\infty} \leq C \int_0^t \|v(s)\|_r \| \operatorname{div} v(s)\|_{L^\infty} ds.$$

On déduit de l'inégalité ci-dessus que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0,T^\star[$, $\operatorname{div} v(t) = 0$.

L'unicité de la pression a déja été démontrée ; elle est affirmée par le corollaire 2.5.1.

Ce théorème n'est pas satisfaisant ; il n'implique pas, par exemple, l'existence globale en dimension deux d'espace. Ceci vient du fait, qu'en l'absence de toute condition aux limites à l'infini, il est impossible de contrôler la norme dans l'espace $C^1_\star$ d'un champ de vecteurs de divergence nulle à partir de la norme de son tourbillon dans l'espace L^∞. Nous allons donner trois types de condition aux limites qui permettent de faire cela. Dans un premier temps, nous supposerons que le champ de vecteurs donné à l'instant initial est périodique ; ensuite, que son gradient appartient à un espace L^a pour un réel a strictement supérieur à 1 ; enfin, qu'il diffère d'un tourbillon stationnaire régulier (notion définie page 16) par un champ de vecteurs appartenant à l'espace L^2.

Théorème 4.2.2 *Soient r un réel strictement supérieur à 1 et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à C^r. On suppose qu'il existe un sous-groupe discret G de $\mathbf{R}^d$, de rang d, et tel que le champ de vecteurs v_0 soit G-périodique. Il existe alors un unique temps maximal $T^\star$ et une unique solution (v,p) de (E) qui est G-périodique à chaque instant t, et qui appartient à $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r \times C^{r+1})$. De plus, on a*

$$T^\star < +\infty \Rightarrow \int_0^{T^\star} \|\Omega(t)\|_{L^\infty} dt = +\infty.$$

Remarquons tout de suite qu'en dimension deux, la relation (1.12) de conservation du tourbillon entraîne le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.1 *Supposons que d vaille 2. Soient r un réel strictement supérieur à 1 et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à C^r. On suppose qu'il existe un sous-groupe discret G de $\mathbf{R}^2$, de rang 2, et tel que le champ de vecteurs v_0 soit G-périodique. Il existe alors une unique solution (v,p) de (E) qui est G-périodique à chaque instant t, et qui appartient à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+; C^r \times C^{r+1})$.*

Pour démontrer le théorème 4.2.2, considèrons l'unique solution (v,p) de (E) qui appartient à $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r) \times L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^{r+1}+C^\infty_L)$ telle que $v(t) = v_0$. On considère alors un élément g du groupe de période G. Désignons par (v_g, p_g) la solution de (E) qui appartient à l'espace $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r) \times L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^{r+1}+C^\infty_L)$ et de donnée initiale $v_g(0) = v_0(\cdot + g)$. Comme le champ de vecteurs v_0 est G-périodique, il résulte du théorème 4.2.1 que $v_g = v$.

Or, il est limpide que $(v(t,x+g), p(t,x+g))$ est solution de (E) avec comme donnée initiale $v(\cdot + g)$. L'unicité de la solution affirmée dans le théorème 4.2.1 ci-dessus assure qu'à chaque instant t, le couple $(v(t),p(t))$ est une fonction G-périodique.

On considère maintenant le groupe dual de G que l'on note $G^\star$. Rappelons que $G^\star$ est l'ensemble des éléments $g^\star$ de $\mathbf{R}^d$ tels que, pour tout élément g de G, on ait $(g|g^\star)$ appartient à $2\pi\mathbf{Z}$. Il est bien connu que $G^\star$ est lui aussi un sous-groupe discret de $\mathbf{R}^d$.

Il s'agit maintenant simplement de démontrer que, pour tout champ de vecteurs de divergence nulle G-périodique w appartenant à l'espace C^r, on a

$$\|w\|_1 \leq C\|\Omega(w)\|_0.$$

Ceci résulte du fait suivant. Si f est une distribution tempérée G-périodique de classe C^r, alors le support de sa transformée de Fourier est inclus dans $G^\star$. Si de plus $f = \partial\widetilde{f}$, alors la transformée de Fourier de f est identiquement nulle sur un voisinage de l'origine. Il résulte de ceci et de la loi de Biot-Savart (1.8) qu'il existe une fonction $\widetilde{\chi}$ indéfiniment différentiable à support compact valant 1 près de 0 et telle que

$$w^j = \sum_{k=1}^{d} (\mathrm{Id} - \widetilde{\chi}(D))\Delta^{-1}\partial_k \Omega(w)^j_k.$$

D'après le théorème 2.4.2 d'opérance des multiplicateurs de Fourier dans les espaces de Hölder, il vient

$$\|w\|_1 \leq C\|\Omega(w)\|_0.$$

D'où le théorème recherché.

Passons maintenant au cas où le gradient du champ de vecteurs solution appartient à l'espace L^a. Le théorème est le suivant.

Théorème 4.2.3 *Soient r et a deux réels strictement supérieurs à 1 et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace C^r. Supposons que ∇v_0 appartienne à L^a. Il existe alors un unique temps $T^\star$ maximal et une unique solution (v,p) de (E) dans l'espace $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r) \times L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^{r+1}+C^\infty_L)$ et telle que $(\nabla v, \nabla p)$ appartienne à l'espace $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;L^a)$. De plus, on a*

$$T^\star < +\infty \Rightarrow \int_0^{T^\star} \|\Omega(t)\|_{L^\infty} dt = +\infty.$$

Comme pour le théorème 4.2.2, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.2 *On suppose que $d = 2$. Soient r et a deux réels strictement supérieurs à 1 et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle de classe C^r. Supposons que ∇v_0 appartienne à L^a. Il existe alors une unique solution (v, p) de (E) dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+; C^r) \times L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+; C^{r+1} + C^\infty_L)$ et telle que $(\nabla v, \nabla p)$ appartienne à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+; L^a)$.*

Pour démontrer le théorème ci-dessus, démontrons tout d'abord que l'on peut résoudre le système (E) avec

$$\nabla v(t) \in L^\infty_{loc}([0, T^\star[; L^a).$$

Pour ce faire, on introduit le système suivant :

$$(DE) \quad \partial_t W^k_l + v \cdot \nabla W^k_l = -\sum_j \partial_l v^j W^k_j + T_{k,l} \sum_{i,j} \partial_i v^j W^i_j,$$

où $T_{k,l}$ désigne les opérateurs du théorème 2.5.1. Résoudre le système (linéaire) (DE), c'est trouver un point fixe à l'application Φ définie par

$$\Phi(W)^k_l(t,x) = \int_0^t (-\sum_j \partial_l v^j W^k_j + T_{k,l} \sum_{i,j} \partial_i v^j W^i_j)(s, \psi(s, \psi^{-1}(t,x)))ds.$$

D'après le théorème 2.5.1, on sait que

$$\|T_{k,l} w\|_{r-1} + \|T_{k,l} w\|_{L^a} \leq C(\|w\|_{r-1} + \|w\|_{L^a}).$$

Comme $v \in L^\infty_{loc}([0, T^\star[; C^r)$, et que $\psi(t)$ conserve la mesure, il existe une fonction $C(t) \in L^\infty_{loc}[0, T^\star[$ telle que l'on ait

$$\|\Phi(W)(t)\|_{r-1} + \|\Phi(W)(t)\|_{L^a} \leq C(t) \int_0^t (\|W(s)\|_{r-1} + \|W(s)\|_{L^a})ds. \tag{4.29}$$

Etant donné un réel $T \in]0, T^\star[$, désignons par $E_\lambda(T)$ l'espace de Banach des fonctions telles que

$$\|u\|_{E_\lambda(T)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t \in [0,T]} e^{-\lambda t}(\|u(t)\|_{r-1} + \|u(t)\|_{L^a}) < \infty.$$

Comme le champ de vecteurs v appartient à $L^\infty([0,T]; C^r)$, l'inégalité 4.29 assure que l'on a

$$\|(W \cdot \nabla v)(s, \psi(s, \psi^{-1}(t)))\|_{r-1} \leq C_T \|W(s)\|_{r-1}$$

Pour tout t, le difféomorphisme $\psi(t)$ conserve la mesure, donc

$$\|(W \cdot \nabla v)(s, \psi(s, \psi^{-1}(t)))\|_{L^a} \leq C_T \|W(s)\|_{L^a}$$

Il en résulte que

$$\|\Phi(W)\|_{E_\lambda(T)} \leq \frac{C(T)}{\lambda} \|W\|_{E_\lambda(T)}.$$

D'où l'existence (et donc l'unicité) d'une solution v telle que

$$v \in L^\infty_{loc}([0, T^\star[; C^r) \quad \text{et} \quad \nabla v \in L^\infty_{loc}([0, T^\star[; L^a).$$

Le seul problème restant est maintenant de démontrer une estimation sur la norme L^∞ du champ de vecteurs v. C'est uniquement un problème de basses fréquences. Utilisons tout d'abord l'équation (1.11), que nous rappelons :

$$\partial_t\Omega + v\cdot\nabla\Omega + \Omega\cdot\nabla v = 0$$

Vu que $\psi(t)$ préserve la mesure, on a

$$\|\Omega(t)\|_{L^a} \leq \|\Omega_0\|_{L^a} + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^a}\|\Omega(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.$$

D'après le théorème de continuité 3.1.1, on en déduit que

$$\|\nabla v(t)\|_{L^a} \leq Ca\|\Omega_0\|_{L^a} + Ca\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^a}\|\Omega(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.$$

Le lemme de Gronwall permet d'affirmer que

$$\|\nabla v(t)\|_{L^a} \leq Ca\|\Omega_0\|_{L^a}e^{\int_0^t\|\Omega(\tau)\|_{L^\infty}d\tau}. \tag{4.30}$$

Utilisons cette majoration pour estimer $\|\nabla p(t)\|_{L^a}$. On sait que

$$\partial_k p = 2\sum_{i,j} T_{i,j}(v^i\partial_k v^j).$$

D'après le théorème 2.5.1, on a

$$\begin{aligned}\|\nabla p(t)\|_{L^a} &\leq C\|v(t)\cdot\nabla v(t)\|_{L^a}\\ &\leq C\|v(t)\|_{L^\infty}\|\nabla v(t)\|_{L^a}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|\chi(D)\nabla p(t)\|_{L^\infty} \leq C\|v(t)\|_{L^\infty}\|\nabla v(t)\|_{L^a}. \tag{4.31}$$

Comme Ω appartient à $L^a\cap L^\infty$, on peut supposer a strictement supérieur à la dimension d'espace d. Le théorème 2.4.2 affirme la continuité des multiplicateurs de Fourier dans les espaces de Hölder ; le champ de vecteurs v étant à tout instant de divergence nulle, on peut alors écrire que

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{Id}-\chi(D))\nabla p(t)\|_{L^\infty} &\leq C\|(\mathrm{Id}-\chi(D))\nabla p(t)\|_{1-\frac{d}{a}}\\ &\leq C\sum_{i,j}\Big(\|T_{\partial_i v^j}\partial_j v^i\|_{-\frac{d}{a}} + \|\partial_j R(v^i,\partial_i v^j)\|_{-\frac{d}{a}}\Big).\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1.1, on a

$$\|S_{q-1}\partial_i v^j\|_{L^\infty} \leq C2^{\frac{qd}{a}}\|\nabla v(t)\|_{L^a},$$

ce qui implique que

$$\|S_{q-1}\partial_i v^j\Delta_q\partial_j v^i\|_{L^\infty} \leq C2^{\frac{qd}{a}}\|\nabla v(t)\|_{L^a}\|\Omega(t)\|_{L^\infty}.$$

Donc
$$\|T_{\partial_i v^j}\partial_j v^i\|_{-\frac{d}{a}} \leq C2^{\frac{qd}{a}}\|\nabla v(t)\|_{L^a}\|\Omega(t)\|_{L^\infty}.$$
A nouveau d'après le lemme 2.1.1 et la définition 2.3.2, on obtient
$$\|\Delta_q v^i \Delta_{q'}\partial_i v^j\|_{L^\infty} \leq C2^{\frac{qd}{a}-q}\|\nabla v(t)\|_{L^a}\|v(t)\|_1$$
De plus, on a
$$\begin{aligned}\|v(t)\|_1 &\leq \|\chi(D)v(t)\|_1 + \|(\mathrm{Id}-\chi(D))v(t)\|_1\\ &\leq \|v(t)\|_{L^\infty} + \|\Omega(t)\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$
On en déduit que
$$\|\partial_j R(v^i, \partial_i v^j)\|_{-\frac{d}{a}} \leq C\|\nabla v(t)\|_{L^a}(\|\Omega(t)\|_{L^\infty} + \|v(t)\|_{L^\infty}).$$
D'où
$$\|(\mathrm{Id}-\chi(D))\nabla p(t)\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla v(t)\|_{L^a}(\|\Omega(t)\|_{L^\infty} + \|v(t)\|_{L^\infty}).$$
En appliquant la majoration (4.31), on peut alors affirmer que
$$\|\nabla p(t)\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla v(t)\|_{L^a}(\|\Omega(t)\|_{L^\infty} + \|v(t)\|_{L^\infty}).$$
Par intégration de l'équation d'Euler (E), il vient alors
$$\|v(t)\|_{L^\infty} \leq \|v_0\|_{L^\infty} + C\int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^a}\|v(s)\|_{L^\infty}ds + \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^a}\|\Omega(s)\|_{L^\infty}ds.$$
L'inégalité de Gronwall assure alors que l'on a
$$\|v(t)\|_{L^\infty} \leq \Big(\|v_0\|_{L^\infty} + C\int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^a}\|\Omega(s)\|_{L^\infty}ds\Big) \times \exp\Big(C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^a}d\tau\Big).$$
D'où, en appliquant l'inégalité (4.30),
$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{L^\infty} \leq \Big(\|v_0\|_{L^\infty} &+ Ca\|\Omega_0\|_{L^a}\exp(Ca\int_0^t \|\Omega(\tau)\|_{L^\infty}d\tau)\Big)\\ &\times \exp\Big(\int_0^t Ca\|\Omega_0\|_{L^a}\exp\Big(Ca\int_0^s \|\Omega(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big)ds\Big).\end{aligned}$$
Comme $\|v(t)\|_1 \leq C(\|\Omega(t)\|_0 + \|v(t)\|_{L^\infty})$, le théorème 4.2.3 résulte de l'inégalité précédente.

Dans le troisième cas, le concept d'énergie est présent. Démontrons le théorème suivant :

Théorème 4.2.4 *Soient m un réel et r un réel strictement supérieur à 1. Considérons un champ de vecteurs de divergence nulle v_0 appartenant à l'espace $E_m \cap C^r$. Il existe alors une unique solution (v,p) globale du système (E) appartenant à l'espace*
$$L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^r) \cap C(\mathbf{R}; E_m) \times L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; H^1 \cap C^{r+1}).$$

Pour démontrer ce théorème, il s'agit essentiellement de démontrer que la solution (v, p) fournie par le théorème 4.2.1 appartient à l'espace

$$L^\infty_{loc}([0, T^\star[; C^r) \cap C([0, T^\star[; E_m) \times L^\infty_{loc}([0, T^\star[; H^1 \cap C^{r+1}),$$

ce qui entraînera que $T^\star = +\infty$. On sait qu'il existe une unique solution $\widetilde{v} = v - \sigma$ de l'équation

$$\partial_t(\widetilde{v} + \sigma) + v \cdot \nabla(\widetilde{v} + \sigma) = \pi(\widetilde{v} + \sigma, \widetilde{v} + \sigma)$$

associée à la donnée initiale $v_0 - \sigma$. Comme l'affirme la proposition 1.3.2, le champ de vecteurs σ est solution stationnaire du système d'Euler. Il en résulte que

$$\partial_t \widetilde{v} + v \cdot \nabla \widetilde{v} = 2\pi(\sigma, \widetilde{v}) + \pi(\widetilde{v}, \widetilde{v}) - \widetilde{v} \cdot \nabla\sigma.$$

Soit T un réel strictement positif ; désignons par F_λ l'espace des fonctions bornées sur l'intervalle $[0, T]$ à valeurs dans l'espace $C^r \cap L^2$. Muni de la norme

$$|u|_\lambda = \sup_{t \in [0,T]} \left(e^{-\lambda t} (\|u(t)\|_r + \|u(t)\|_{L^2}) \right),$$

l'espace F_λ est un espace de Banach. Soit maintenant Φ l'application linéaire définie par

$$\Phi(w)(t, x) = \int_0^t \Big(2\pi(\sigma, w(s)) + \pi(w(s), w(s)) - w(s) \cdot \nabla\sigma \Big)(\psi(s, \psi^{-1}(t, x)))ds.$$

Par un raisonnement strictement analogue à celui déjà fait dans le cas où l'on suppose que $\nabla v(t)$ appartient à l'espace L^a, on démontre l'existence d'une constante $C(T)$ telle que, pour tout λ, on ait

$$|\Phi(w)|_\lambda \leq \frac{C(T)}{\lambda} |w|_\lambda.$$

Donc, si λ est assez grand, l'application linéaire Φ est contractante dans F_λ. Il existe ainsi un unique champ de vecteurs $\widetilde{v}$ tel que

$$(\mathrm{Id} - \Phi)(\widetilde{v})(t, x) = \widetilde{v}_0(\psi^{-1}(t, x)).$$

Il en résulte que

$$v \in C(\mathbf{R}; E_m).$$

De plus, comme le champ de vecteurs v est un champ de vecteurs de divergence nulle, on a

$$\frac{d}{dt} \|v(t) - \sigma\|^2_{L^2} \leq \|\nabla\sigma\|_{L^\infty} \|v(t) - \sigma\|^2_{L^2}. \tag{4.32}$$

Par intégration, il vient que

$$\|v(t) - \sigma\|^2_{L^2} \leq \|v_0 - \sigma\|^2_{L^2} e^{t\|\nabla\sigma\|_{L^\infty}}. \tag{4.33}$$

Enfin, on sait que

$$v(t) = (\mathrm{Id} - \chi(D)) \nabla^\perp \Delta^{-1} \omega(t) + \chi(D)\sigma + \chi(D)(v(t) - \sigma).$$

On en déduit que

$$\|v(t)\|_1 \leq \|\omega_0\|_{L^\infty} + \|\sigma\|_{L^\infty} + C\|v_0 - \sigma\|_{L^2} e^{t\|\nabla\sigma\|_{L^\infty}} ;$$

d'où le théorème souhaité.

4.3 Références et remarques

La résolution locale en temps de l'équation d'Euler du point de vue lagrangien se résume à la résolution d'une équation différentielle ordinaire. Ceci a été observé par L. Lichtenstein à la fin des années vingt dans l'important travail qu'est [52]. Cette approche a été récemment remise à l'honneur par P. Serfati dans [57] qui en déduit des résultats d'holomorphie en temps sur le flot, résultats sur lesquels nous reviendrons au chapitre 8.

Le point de vue eulérien lui nécessite des techniques d'équations aux dérivées partielles non linéaires hyperboliques. Les résultats obtenus de ce point de vue sont donc plus récents, surtout en dehors du cadre des espaces de Sobolev, voir par exemple [48], [8] et [28]. Nous avons dans ce chapitre utilisé la théorie de Littlewood-Paley et avons établi au passage un résultat de propagation de la régularité hölderienne d'indice négatif par un champ de vecteurs de divergence nulle et lipschitzien. Ce résultat nous sera fort utile à la section 5.5. Des techniques voisines ont été utilisées par H. Bahouri et B. Dehman dans [7].

Nous avons aussi donné divers critères de non existence globale suivant la décroissance à l'infini du champ de vecteurs de divergence nulle initial. Pour certains de ces critères, on peut citer les résultats de [12].

Enfin, il y eut, dans les années trente, d'importants travaux sur l'équation d'Euler. Parmi ceux-ci, l'article [51] de J. Leray et l'article [66] de Wolibner où est démontrée l'existence globale de solutions régulières en dimension deux.

Chapitre 5

Quand le tourbillon est borné

5.1 Le théorème de Yudovitch

L'objectif de cette section est la démonstration d'un théorème d'existence et d'unicité pour le système d'Euler incompressible lorsque le champ de vecteurs à l'instant initial est à tourbillon borné et supporté dans un compact. Dans ce cas, et contrairement au chapitre précédent, nous utiliserons le concept d'énergie. En effet, l'espace où l'on doit inclure la donnée initiale est, d'après le lemme 1.3.1 page 17, un espace du type E_m (voir la définition 1.3.3 page 17). Enonçons maintenant le théorème.

Théorème 5.1.1 *Soient m un réel et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace E_m. Supposons en outre que ω_0 appartienne à $L^\infty \cap L^a$ avec $1 < a < +\infty$. Il existe alors une unique solution (v,p) de (E) appartenant à l'espace $C(\mathbf{R}; E_m) \times L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2)$ et telle que le tourbillon ω du champ de vecteurs v appartienne à $L^\infty(\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}; L^a(\mathbf{R}^2))$.*

De plus, ce champ de vecteurs v possède un flot. Plus précisément, il existe une unique application ψ continue de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ telle que

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(s,\psi(s,x))ds.$$

En outre, il existe une constante C telle que

$$\psi(t) - \mathrm{Id} \in C^{\exp(-Ct\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^a})}.$$

Nous allons, dans cette section, démontrer le premier point du théorème. Le second est un petit morceau de la théorie des équations différentielles ordinaires qui sera l'objet de la section suivante.

Commençons par démontrer l'unicité des solutions (v,p). Vu la proposition 1.3.3 page 18, la pression p est uniquement déterminée par le champ de vecteurs v grâce à l'appartenance à L^2 de la pression. Le point essentiel est donc le lemme suivant, qui mesure, dans l'espace L^2 et l'instant t, la distance entre deux solutions en fonction de la distance, toujours dans L^2, entre les données initiales, et ce en n'utilisant uniquement un contrôle sur la norme $L^\infty \cap L^a$ du tourbillon. Ce lemme entraîne l'unicité de manière évidente.

Lemme 5.1.1 *Etant donné un réel a strictement supérieur à 1, il existe une constante C vérifiant la propriété qui suit.*

Soient (v_1, p_1) et (v_2, p_2) deux solutions du système d'Euler incompressible (E). Supposons qu'elles appartiennent toutes deux à un même espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; E_m) \times L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2)$ et que ω_i appartienne à $L^\infty \cap L^a$. Posons

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \left(C \max_i \|v_i(0) - \sigma\|_{L^2} e^{t\|\nabla\sigma\|_{L^\infty}} + \max \|\omega_i\|_{L^\infty\cap L^a} + 1\right)^{\frac{2}{a}} \quad \textit{et}\\ \beta(t) &= e\int_0^t \alpha(s)ds.\end{aligned}$$

On a alors la relation suivante :

$$\begin{aligned}&\|v_1(0) - v_2(0)\|_{L^2}^2 \leq e^{-a(\exp\beta(t)-1)}\\ &\qquad\qquad \Rightarrow \|v_1(t) - v_2(t)\|_{L^2}^2 \leq \|v_1(0) - v_2(0)\|_{L^2}^{2\exp-\beta(t)} e^{a(1-\exp-\beta(t))}.\end{aligned}$$

Pour démontrer ce lemme, quelques précautions doivent être prises car $\partial_t v_i$ n'appartient pas nécessairement à l'espace L^2. Ceci n'empêchera cependant pas d'estimer la fonction

$$I(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \|(v_1 - v_2)(t)\|_{L^2}^2.$$

Un réel strictement positif ϵ étant donné, étudions la fonction

$$I_\epsilon(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x)|(v_1 - v_2)(t,x)|^2 dx.$$

Tout d'abord, il convient de remarquer que, pour tout $b \geq a$, $v \cdot \nabla v$ appartient à L^b. Or, on sait que

$$\nabla p = -\nabla \sum_{j,k} \partial_j \Delta^{-1}(v^k \partial_k v^j).$$

Le fait que les (v_i, p_i) soient des solutions du système (E) assure donc que

$$\forall\, b \geq a\,,\ \partial_t v_i \in L^b.$$

En posant $p = p_1 - p_2$, ceci donne un sens à la séquence de calculs qui suit.

$$\begin{aligned}I'_\epsilon(t) &= -\sum_j \int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x) v_1^j(t,x) \partial_j |(v_1 - v_2)(t,x)|^2 dx\\ &\qquad + 2\sum_{i,j}\int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x)(v_1 - v_2)^i(t,x)(v_1 - v_2)^j(t,x)\partial_j v^i(t,x)dx\\ &\qquad\qquad + \sum_i \int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x)(v_1 - v_2)^i(t,x)\partial_i p(t,x)dx\end{aligned}$$

Les champs de vecteurs v_i étant de divergence nulle, il résulte d'intégrations par parties que

$$\begin{aligned}I'_\epsilon(t) &\leq 2\int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x)|(v_1 - v_2)(t,x)|^2 |\nabla v_2(t,x)| dx + R_\epsilon(t) \quad \text{avec}\\ R_\epsilon(t) &= \epsilon \sum_j \int_{\mathbf{R}^2} |(v_1 - v_2)(t,x)|^2 v_1^j(t,x)(\partial_j\chi)(\epsilon x)dx\\ &\qquad\qquad + \epsilon\sum_i \int_{\mathbf{R}^2} (v_1 - v_2)^i(t,x)(\partial_i\chi)(\epsilon x)p(t,x)dx\end{aligned}$$

Le champ de vecteurs $v_1 - v_2$ appartient à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2 \cap L^\infty)$ et la pression à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2)$; il en résulte que

$$R_\epsilon(t) \leq C(t)\epsilon \quad \text{avec} \quad C \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}). \tag{5.1}$$

L'inégalité de Hölder implique que, pour tout $b \geq a$, on a

$$I'_\epsilon(t) \leq 2\Big(\int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x)|v_1(t,x) - v_2(t,x)|^{\frac{2b}{b-1}} dx\Big)^{1-\frac{1}{b}} \Big(\int_{\mathbf{R}^2} |\nabla v_2(t,x)|^b dx\Big)^{\frac{1}{b}} + R_\epsilon(t).$$

D'où il vient, pour tout $b \geq a$,

$$I'_\epsilon(t) \leq 2\|v_1(t) - v_2(t)\|_{L^\infty}^{\frac{2}{b}} I_\epsilon(t)^{1-\frac{1}{b}} \|\nabla v_2(t)\|_{L^b} + R_\epsilon(t).$$

D'après la loi de Biot-Savart, le théorème 3.1.1 et la conservation du tourbillon le long des lignes de flot, il vient, pour tout $b \geq a$,

$$\|\nabla v_2(t)\|_{L^b} \leq Cb\|\omega_2(0)\|_{L^a \cap L^\infty}.$$

De plus, on sait que

$$\begin{aligned}
\|v_i\|_{L^\infty} &\leq \|\chi(D)(v_i - \sigma)\|_{L^\infty} + \|\sigma\|_{L^\infty} + \|(\mathrm{Id} - \chi(D))v_i\|_{L^\infty} \\
&\leq C(\|v_i(t) - \sigma\|_{L^2} + \|\sigma\|_{L^\infty} + \|\omega_i(0)\|_{L^\infty}) \\
&\leq C(\|v_i(0) - \sigma\|_{L^2} e^{t\|\nabla\sigma\|_{L^\infty}} + \|\sigma\|_{L^\infty} + \|\omega_i(0)\|_{L^\infty}).
\end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout b supérieur ou égal à a, on a

$$I'_\epsilon(t) \leq \alpha(t) b I_\epsilon(t)^{1-\frac{1}{b}} + R_\epsilon(t). \tag{5.2}$$

Supposons maintenant que $\|v_1(0) - v_2(0)\|_{L^2}^2 < 1$. Soit η un réel tel que $0 < \eta < 1 - I(0)$. Posons

$$J_{\epsilon,\eta}(t) = \eta + I_\epsilon(t).$$

Toutes les inégalités écrites dans la suite seront valables uniquement sous l'hypothèse que $\eta + I_\epsilon(t) \leq 1$. Il résulte de l'inégalité (5.2) que

$$J'_{\epsilon,\eta}(t) \leq \alpha(t) b J_{\epsilon,\eta}(t)^{1-\frac{1}{b}} + R_\epsilon(t).$$

En prenant $b = a - \log J_{\epsilon,\eta}(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
J'_{\epsilon,\eta}(t) &\leq \alpha(t)(a - \log J_{\epsilon,\eta}(t)) J_{\epsilon,\eta}(t) \exp \frac{-\log J_{\epsilon,\eta}(t)}{a - \log J_{\epsilon,\eta}(t)} + R_\epsilon(t) \\
&\leq e\alpha(t)(a - \log J_{\epsilon,\eta}(t)) J_{\epsilon,\eta}(t) + R_\epsilon(t).
\end{aligned}$$

Il est aisé d'observer que, pour toute fonction dérivable f de $\mathbf{R}$ dans l'intervalle $]0,1[$, on a, pour tout $\lambda \in]0,1[$,

$$-\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}\log(1 - \lambda \log f(t)) = \frac{f'(t)}{f(t)(1 - \lambda \log f(t))}. \tag{5.3}$$

On en déduit que

$$-\frac{d}{dt}\log(a-\log J_{\epsilon,\eta}(t)) \leq e\alpha(t)+\frac{R_\epsilon(t)}{a\eta}.$$

Posons alors

$$\overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t)=\beta(t)+\int_0^t \frac{R_\epsilon(\tau)}{a\eta}d\tau.$$

Par définition de β, il vient, après intégration,

$$-\log\Big(1-\frac{1}{a}\log J_{\epsilon,\eta}(t)\Big)+\log\Big(1-\frac{1}{a}\log J_{\epsilon,\eta}(0)\Big)\leq \overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t).$$

Par passage à l'exponentielle, on en déduit que

$$\log J_{\epsilon,\eta}(t)\leq a(1-e^{-\overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t)})+e^{-\overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t)}\log J_{\epsilon,\eta}(0)$$

D'où, à nouveau en passant à l'exponentielle,

$$J_{\epsilon,\eta}(t)\leq e^{a(1-\exp(-\overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t)))}J_\epsilon(0)^{\exp(-\overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t))}.$$

Par définition de R_ϵ, on a

$$R_\epsilon(t)\leq C(t)\epsilon \quad \text{avec} \quad C\in L^\infty_{loc}.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, puis η vers 0 et en passant à la limite, on conclut la démonstration du lemme.

Achevons la preuve de la partie eulérienne du théorème 5.1.1. Pour démontrer l'existence, nous allons régulariser la donnée initiale et montrer que la suite de solutions ainsi obtenues est une suite de Cauchy dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};E_m)$.

Soit T un quelconque réel strictement positif. La régularisation de la donnée initiale est des plus classiques. On pose

$$v_{0,n}=\chi_n\star v_0 \quad \text{avec} \quad \chi_n(x)=(1+n)^2\chi((1+n)x). \tag{5.4}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} v_{0,n} &= \chi_n\star(v_0-\sigma)+\chi_n\star\sigma\\ &= \sigma+\chi_n\star(v_0-\sigma)+\chi_n\star\sigma-\sigma. \end{aligned}$$

D'après la définition de l'espace E_m (voir 1.3.3) et le lemme 2.2.4, le fait que la suite $(v_{0,n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers v_0 dans l'espace E_m résulte du lemme suivant :

Lemme 5.1.2 *Soit σ un champ de vecteurs tourbillonnaire stable. On considère une fonction ρ appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ d'intégrale 1. On définit alors la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $\sigma_n=\rho_n\star\sigma$ avec $\rho_n(x)=(1+n)^2\rho((1+n)x)$. On a alors*

$$\lim_{n\infty}\|\sigma-\sigma_n\|_{L^2}=0.$$

Comme $\widehat{\rho}(0) = 1$, il résulte de l'inégalité des accroissements finis que

$$|1 - \widehat{\rho}(\frac{\xi}{n+1})| \leq \frac{|\xi|}{1+n} \|D\widehat{\rho}\|_{L^\infty}.$$

Donc, par définition de σ,

$$|\widehat{\sigma}(\xi) - \widehat{\sigma}_n \widehat{\rho}(\xi)| \leq \frac{C}{1+n} \|D\widehat{\rho}\|_{L^\infty} |\widehat{\omega}(\sigma)(\xi)|.$$

En écrivant

$$\sigma_n - \sigma = \rho_n \star (\chi(D)\sigma) - \chi(D)\sigma + \rho_n \star (\mathrm{Id} - \chi(D))\sigma - (\mathrm{Id} - \chi(D))\sigma,$$

on déduit de la définition de σ que

$$\|\sigma_n - \sigma\|_{L^2} \leq \frac{C}{1+n} \|D\widehat{\rho}\|_{L^\infty} \|\widehat{\omega}(\sigma)\|_{L^2} + C\|\omega(\sigma) - \rho_n \star \omega(\sigma)\|_{L^2}.$$

Le lemme 2.2.4 permet alors de conclure.

D'après le théorème 4.2.4, on dispose d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de solutions du système d'Euler incompressible (E). D'après la loi de Biot-Savart, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie les estimations suivantes :

$$\forall b \geq a\,, \ \|\omega_n(t)\|_{L^b} = \|\omega_0\|_{L^b}, \tag{5.5}$$

$$\|v_n(t)\|_{L^\infty} \leq C\|v_0 - \sigma\|_{L^2} e^{t\|\nabla\sigma\|_{L^\infty}} + \|\omega_0\|_{L^\infty}. \tag{5.6}$$

En prenant n et m assez grands, on peut supposer que

$$\|v_n(0) - v_m(0)\|_{L^2} \leq e^{-a(\exp \beta(T) - 1)}.$$

Le lemme 5.1.1 assure alors que, si n et m sont assez grands, on a, pour tout t inférieur ou égal à T,

$$\|v_n(t) - v_m(t)\|_{L^2} \leq \|v_n(0) - v_m(0)\|_{L^2}^{\exp -\beta(t)}.$$

Il est clair alors que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $C(\mathbf{R}; E_m)$. L'unicité est une conséquence immédiate du lemme 5.1.1, ce qui conclut la démonstration de la première partie du théorème 5.1.1.

5.2 Sur les équations différentielles ordinaires

Il s'agit dans cette section de démontrer la partie lagrangienne du théorème de Yudovich (le théorème 5.1.1). Définissons tout d'abord l'espace des champs de vecteurs dits logarithmiquement lipschitziens (ou en abrégé log-lipschitziens).

Définition 5.2.1 *L'ensemble des champs de vecteurs log-lipschitziens sur $\mathbf{R}^d$, noté LL, est l'ensemble des champs de vecteurs bornés v tels que*

$$\|v\|_{LL} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{0<|x-x'|\leq 1} \frac{|v(t,x) - v(t,x')|}{|x-x'|(1 - \log|x-x'|)} < \infty.$$

Le théorème suivant entraîne immédiatement la partie lagrangienne du théorème de Yudovich.

Théorème 5.2.1 *Soit v un champ de vecteurs appartenant à l'espace $L^1_{loc}(\mathbf{R}; LL)$, il existe une unique application ψ continue de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ vérifiant*

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(s, \psi(s,x))ds.$$

De plus, le flot ψ est tel que, pour tout t,

$$\psi(t) - \mathrm{Id} \in C^{\exp - \int_0^t \|v(s)\|_{LL} ds}.$$

Plus précisement, on a

$$\begin{aligned}|x-y| \leq e^{1-\exp \int_0^t \|v(s)\|_{LL} ds} \Rightarrow |\psi(t,x) - \psi(t,y)| & \\ \leq |x-y|^{\exp - \int_0^t \|v(s)\|_{LL} ds} e^{1-\exp - \int_0^t \|v(s)\|_{LL} ds}&.\end{aligned}$$

Faisons une petite digression sur les équations différentielles ordinaires associées à des champs de vecteurs non-lipschitziens. Ceci nous conduira très simplement au théorème ci-dessus. Dans toute cette section, μ désignera une fonction de $\mathbf{R}^+$ dans lui-même, nulle en 0, strictement positive ailleurs, croissante et continue.

Définition 5.2.2 *Considérons deux espaces métriques (X,d) et (Y,δ). Nous désignerons par $C_\mu(X,Y)$ l'ensemble des u fonctions bornées de X dans Y telles qu'il existe C telle que, pour tout $x \in X$ et tout $y \in X$,*

$$\delta(u(x), u(y)) \leq C\mu(d(x,y)).$$

Remarque Si (Y,δ) est un espace de Banach (que l'on notera $(E, \|\cdot\|)$), l'espace $C_\mu(X,E)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_\mu = \|u\|_{L^\infty} + \sup_{(x,y)\in X\times X, x\neq y} \frac{\|u(x)-u(y)\|}{\mu(d(x,y))}.$$

Le théorème ci-dessous décrit sous quelles hypothèses simples nous avons existence et unicité des courbes intégrales pour une équation différentielle ordinaire.

Théorème 5.2.2 *Soient E un espace de Banach, Ω un ouvert de E , I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et (t_0, x_0) un élément de $I \times \Omega$. On considère une fonction F appartenant à $L^1_{loc}(I; C_\mu(\Omega; E))$. On suppose de plus que*

$$\int_0^1 \frac{dr}{\mu(r)} = +\infty. \tag{5.7}$$

Alors, il existe un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$ et tel que l'équation

$$(EDO)\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s))ds$$

admette une et une seule solution continue définie sur l'intervalle J.

Pour démontrer ce théorème, commençons donc par établir l'unicité des trajectoires. Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de (EDO) définies sur un voisinage $\widetilde{J}$ de t_0 avec la même donnée initiale x_0. On pose

$$\rho(t) = ||x_1(t) - x_2(t)||.$$

On déduit immédiatement de l'appartenance de F à $L^1_{loc}(I; C_\mu(\Omega, E))$ que

$$0 \leq \rho(t) \leq \int_{t_0}^t \gamma(s)\mu(\rho(s))ds \quad \text{avec} \quad \gamma \in L^1_{loc}(I) \quad \text{et} \quad \gamma \geq 0. \tag{5.8}$$

Le lemme clef est le suivant.

Lemme 5.2.1 *Soient ρ une fonction mesurable et positive, γ une fonction positive localement intégrable et μ une fonction continue ainsi que croissante. On suppose que, pour un réel positif a, la fonction ρ vérifie*

$$\rho(t) \leq a + \int_{t_0}^t \gamma(s)\mu(\rho(s))ds. \tag{5.9}$$

Si a est non nul, alors on a

$$-\mathcal{M}(\rho(t)) + \mathcal{M}(a) \leq \int_{t_0}^t \gamma(s)ds \quad \textit{avec} \quad \mathcal{M}(x) = \int_x^1 \frac{dr}{\mu(r)}. \tag{5.10}$$

Si a est nul et si μ vérifie (5.7), alors la fonction ρ est identiquement nulle.

Pour démontrer ce lemme, posons tout d'abord

$$R_a(t) = a + \int_{t_0}^t \gamma(s)\mu(\rho(s))ds.$$

La fonction R_a est une fonction continue et croissante. On a donc, au sens des distributions,

$$\dot{R}_a(t) = \gamma(t)\mu(\rho(t)).$$

Il résulte alors de la croissance de μ que

$$\dot{R}_a(t) \leq \gamma(t)\mu(R_a(t)). \tag{5.11}$$

Supposons que a soit strictement positif. La fonction R_a est alors strictement positive. Comme la fonction $\mathcal{M}$ est continûment différentiable sur l'ensemble des réels strictement positifs, il résulte de (5.11) que

$$-\frac{d}{dt}\mathcal{M}(R_a(t)) = \frac{\dot{R}_a(t)}{\mu(R_a(t))} \leq \gamma(t).$$

En intégrant cette inégalité, on obtient l'inégalité (5.10) en se souvenant que la fonction $-\mathcal{M}$ est croissante et que $\rho \leq R_a$.

Supposons maintenant a nul et ρ non identiquement nulle près de t_0. La croissance de μ autorise à remplacer ρ par la fonction (que l'on persistera à noter ρ) $\sup_{s\in[t_0,t]} \rho(s)$.

Il existe alors un réel t_1, strictement supérieur à t_0, tel que l'on ait $\rho(t_1) > 0$. Vu que la fonction ρ satisfait (5.9) pour $a = 0$, elle satisfait également cette inégalité pour tout a' strictement positif. Il vient alors de l'inégalité (5.10) que

$$\mathcal{M}(a') \leq \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\tau)d\tau + \mathcal{M}(\rho(t_1)),$$

et ce, pour tout a' strictement positif. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse faite sur la divergence en 0 de l'intégrale de l'inverse de μ ; la démonstration du lemme alors achevée.

Grâce à l'inégalité (5.8), l'unicité des courbes intégrales passant par un point donné est une conséquence immédiate du lemme 5.2.1. Démontrons l'existence. On considère le classique schéma de Picard

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, x_k(\tau))d\tau.$$

Nous omettons la vérification du fait que, pour J assez petit, on reste dans le domaine de définition de la fonction F et que la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $L^\infty(J)$. Nous allons démontrer que la suite ainsi définie est une suite de Cauchy dans l'espace des fonctions continues de l'intervalle J (choisi suffisamment petit) dans E. Pour cela, posons

$$\rho_{k+1,n}(t) = \|x_{k+1+n}(t) - x_{k+1}(t)\|.$$

Il vient

$$0 \leq \rho_{k+1,n}(t) \leq \int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\mu(\rho_{k,n}(\tau))d\tau$$

En posant $\rho_k(t) = \sup_n \|x_{k+1+n}(t) - x_{k+1}(t)\|$, on déduit de la croissance de μ que

$$0 \leq \rho_{k+1}(t) \leq \int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\mu(\rho_k(\tau))d\tau.$$

Grâce au lemme de Fatou et à la croissance de μ, on déduit de l'inégalité ci-dessus que

$$\widetilde{\rho}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \limsup_{k\to+\infty} \rho_k(t) \leq \int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\mu(\widetilde{\rho}(\tau))d\tau.$$

En appliquant à nouveau le lemme 5.2.1, on trouve que $\widetilde{\rho}(t)$ est identiquement nulle au voisinage de t_0, ce qui conclut la démonstration du théorème 5.2.2.

Pour démontrer l'intégralité du théorème de Yudovich, il suffit maintenant d'étudier la régularité en la variable x du flot ψ. Pour ce faire, considèrons deux courbes intégrales de v, notées $x_1(t)$ et $x_2(t)$, issues respectivement de deux points distincts x_1 et x_2 tels que

$$\|x_1 - x_2\| < 1.$$

Les inégalités écrites ci-après sont valables seulement si

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| < 1.$$

Par définition de l'espace C_μ, il vient

$$\begin{aligned}\|x_1(t) - x_2(t)\| &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_0^t \|v(\tau, x_1(\tau)) - v(\tau, x_2(\tau))\| d\tau \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} \times \mu(\|x_1(\tau) - x_2(\tau)\|) d\tau\end{aligned}$$

Appliquons alors le lemme 5.2.1 avec $\rho(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\|$, $a = \|x_1 - x_2\|$ et $\gamma(t) = \|v(t)\|_\mu$. Comme dans ce cas $\mu(r) = r(1 - \log r)$, il vient

$$-\log(1 - \log \|x_1(t) - x_2(t)\|) + \log(1 - \log \|x_1 - x_2\|) \leq \int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau.$$

En passant deux fois à l'exponentielle comme dans la précédente section, il vient

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\|^{\exp - \int_0^t \|v(s)\|_{LL} ds} e^{1 - \exp - \int_0^t \|v(s)\|_{LL} ds}, \tag{5.12}$$

ceci ayant lieu tant que $\|x_1(t) - x_2(t)\| < 1$. La preuve du théorème 5.2.2 (et donc celle du théorème de Yudovich) est ainsi achevée.

5.3 Un exemple

Le but de cette section est d'exhiber une solution du système d'Euler incompressible montrant le caractère optimal du théorème de Yudovich. Nous allons construire une solution vérifiant les propriétés suivantes :

- le tourbillon ω du champ de vecteurs v solution est, à chaque instant t, borné et nul en dehors d'un ensemble compact,
- à chaque instant t, le flot $\psi(t)$ de v n'appartient pas à la classe de Hölder $C^{\exp -t}$.

Construisons tout d'abord la donnée initiale. Soit ω_0 la fonction sur le plan $\mathbf{R}^2$ nulle en dehors de $[-1, 1] \times [-1, 1]$, impaire en les deux variables x_1 et x_2 et valant 2π sur $[0, 1] \times [0, 1]$. On considère le champ de vecteurs v_0 défini par

$$v_0(x_1, x_2) = \left| \begin{array}{l} -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \frac{x_2 - y_2}{|x - y|^2} \omega_0(y) dy \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \frac{x_1 - y_1}{|x - y|^2} \omega_0(y) dy. \end{array} \right.$$

Nous allons démontrer le théorème ci-dessous.

Théorème 5.3.1 *Soit v la solution de l'équation d'Euler associée à la donnée initiale v_0 définie ci-dessus. A l'instant t, le flot $\psi(t)$ du champ de vecteurs v n'appartient à C^α pour aucun $\alpha > \exp -t$.*

Il convient d'étudier quelque peu le champ de vecteurs v_0. Ce champ n'est bien sûr pas lipschitzien. L'exemple construit dans la section 3.2 et dont les propriétés sont décrites par la proposition 3.2.1 montre que certaines dérivées partielles de v sont de taille équivalente au logarithme de la distance au coin du carré.

Ici, le champ de vecteurs v_0 présente des symétries. Ceci va nous permettre de le décrire plus explicitement. En effet, le champ de vecteurs v_0 est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Il en résulte que ce champ de vecteurs est tangent à ces deux axes et donc nul à l'origine. Nous allons démontrer la proposition suivante.

Proposition 5.3.1 *Il existe une constante C telle que, pour tout x_1 tel que $0 \leq x_1 \leq C$, on ait*

$$v_0^1(x_1, 0) \geq -2x_1 \log x_1.$$

En effet, en posant $\widetilde{\omega}_0(x_1) = 2H(x_1) - 1$ (H désignant la fonction de Heavyside), il vient

$$\begin{aligned} v_0^1(x_1, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{y_2}{|x-y|^2} \omega_0(y) dy \\ &= \int_{-1}^1 dy_1 \widetilde{\omega}_0(y_1) \int_0^1 \frac{2y_2}{(x_1 - y_1)^2 + y_2^2} dy_2. \end{aligned}$$

Par un calcul immédiat, on en déduit que

$$\begin{aligned} v_0^1(x_1, 0) &= \widetilde{v}_0^1(x_1, 0) + \overline{v}_0^1(x_1, 0) \quad \text{avec} \\ \widetilde{v}_0^1(x_1, 0) &= -\int_0^1 \log(x_1 - y_1)^2 dy_1 + \int_0^1 \log(x_1 + y_1)^2 dy_1 \quad \text{et} \\ \overline{v}_0^1(x_1, 0) &= \int_0^1 \log \frac{1 + (x_1 - y_1)^2}{1 + (x_1 + y_1)^2} dy_1. \end{aligned}$$

Il est évident que la fonction $x_1 \mapsto \overline{v}_0^1(x_1, 0)$ est une fonction impaire indéfiniment différentiable. De plus, un calcul d'intégrale des plus élémentaires assure que, pour $0 \leq x_1 < 1$, on a

$$\widetilde{v}_0^1(x_1, 0) = -4x_1 \log x_1 + 2(1 + x_1) \log(1 + x_1) - 2(1 - x_1) \log(1 - x_1).$$

Donc, lorsque $0 \leq x_1 < 1$, on a

$$v_0^1(x_1, 0) = -4x_1 \log x_1 + f(x_1),$$

où f désigne une fonction impaire indéfiniment différentiable sur $]-1, 1[$. Ceci assure la conclusion de la proposition.

Revenons maintenant à l'équation d'Euler et à sa solution v correspondant à la donnée initiale v_0. D'après le théorème de Yudovitch (le théorème 5.1.1), le flot du champ de vecteurs v est une fonction continue de la variable (t, x). De plus, on sait qu'à chaque instant, le champ de vecteurs v est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Donc ces deux axes sont globalement invariants par le flot. L'origine, qui est leur point d'intersection, est donc stable par le flot ψ du champ de vecteurs v. On a ainsi, pour tout t,

$$\psi(t, 0) = 0, \ \psi^1(t, 0, x_2) = 0 \quad \text{et} \quad \psi^2(t, x_1, 0) = 0. \tag{5.13}$$

Soit T un réel strictement positif arbitraire. Le tourbillon est conservé le long des lignes de flot (voir l'égalité (1.12)). La relation (5.13) ci-dessus assure donc l'existence d'un voisinage W de l'origine tel que l'on ait, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\omega(t)_{|W} = \omega_{0|W}.$$

Le champ de vecteurs de divergence nulle $\widetilde{v}(t) = v(t) - v_0$ est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Son tourbillon est identiquement nul sur W. Donc, il existe une constante A telle que l'on ait, pour tout $t \in [0,T]$,

$$|v(t,x) - v_0(x)| \leq A|x|.$$

De la proposition 5.3.1, il résulte l'existence d'une constante C' telle que, pour tout couple $(t,x_1) \in [0,T] \times [0,C']$, on ait

$$v(t,x_1,0) \geq -x_1 \log x_1.$$

Soit maintenant $x_1 \in [0,1[$ tel que, pour tout $t \in [0,T]$, on ait

$$\psi^1(t,x_1,0) \in [0,C'].$$

Il résulte de l'inégalité ci-dessus que l'on a

$$\psi^1(t,x_1,0) \geq x_1(t) \quad \text{avec} \quad \dot{x}_1(t) = -x_1(t) \log x_1(t).$$

Il en résulte alors que

$$\psi^1(t,x_1,0) \geq x_1^{\exp -t}.$$

Vu que $\psi(t,0) = 0$, le théorème 5.3.1 est démontré.

5.4 Le problème des poches de tourbillon

Le problème des poches de tourbillon est le suivant : supposons que le tourbillon soit, à l'instant initial, la fonction caractéristique d'un ouvert borné D_0 dont le bord est de classe de Hölder $C^{k+\epsilon}$ avec k un entier strictement positif et ϵ un réel de l'intervalle $]0,1[$. Nous nous restreindrons ici au cas où la régularité du bord est $C^{1+\epsilon}$. D'après le théorème 5.1.1, il existe un unique champ de vecteurs solution des équations d'Euler sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$, dont le tourbillon appartient à $L^\infty(\mathbf{R}^3)$. Cette solution est alors quasi-lipschitzienne. Un tel champ de vecteurs possède un flot ψ à régularité exponentiellement décroissante en fonction du temps, c'est-à-dire que $\psi(t)$ est un homéomorphisme de classe de Hölder $C^{\exp(-\alpha t)}$. D'après la relation (1.12) de conservation du tourbillon le long des lignes de flot, le tourbillon à l'instant t est alors la fonction caractéristique d'un ouvert borné D_t dont la topologie reste inchangée. Par contre, le bord de cet ouvert n'est plus a priori que de classe $C^{\exp(-\alpha t)}$. Deux questions très naturelles se posent alors : le bord de l'ouvert reste-t-il régulier à temps petit? si oui, que se passe-t-il pour les temps grands?

Dans le cas où le tourbillon à l'instant initial est la fonction caractéristique de l'intérieur d'une courbe du plan, fermée, simple et de classe $C^{1+\epsilon}$, on peut être tenté de suivre la démarche suivante. Soit γ_0 un plongement du cercle $\mathbf{S}^1$ de classe $C^{1+\epsilon}$ dont l'image est le bord de l'ouvert D_t. Le champ de vecteurs solution est alors complètement déterminé par le bord de l'ouvert. Cherchons alors un paramétrage de ce bord par la fonction γ définie par

$$\partial_t\gamma(t,s) = v(t,\gamma(t,s)). \tag{5.14}$$

Or, d'après la loi de Biot-Savart, le champ de vecteurs solution est défini par

$$v(t) = \nabla^\perp f(t) \quad \text{avec} \quad f(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{D_t} \log|x-y|dy.$$

En admettant que $\gamma(t,\cdot)$ soit un plongement de classe $C^{1+\epsilon}$ du cercle, il vient, par une formule de Green,

$$v(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|x-\gamma(t,\sigma)|\,\partial_\sigma\gamma(t,\sigma)d\sigma.$$

D'après (5.14), il s'agit de résoudre, dans l'ensemble des plongements de classe $C^{1+\epsilon}$, l'équation suivante :

$$\partial_t\gamma(t,s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\gamma(t,s)-\gamma(t,\sigma)|\,\partial_\sigma\gamma(t,\sigma)d\sigma. \tag{5.15}$$

Dans la section 5.5 suivante, nous allons démontrer un théorème qui entraînera en particulier le théorème ci-après.

Théorème 5.4.1 *Soient ϵ appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et γ_0 une fonction de l'espace $C^{1+\epsilon}(\mathbf{S}^1;\mathbf{R}^2)$ injective et dont la différentielle ne s'annule pas. Il existe alors une unique solution $\gamma(t,s)$ de l'équation (5.15) appartenant à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^{1+\epsilon}(\mathbf{S}^1;\mathbf{R}^2))$ et qui est, pour tout temps, un plongement du cercle.*

5.5 Démonstration de la persistance

Nous allons énoncer un théorème général de persistance des structures géométriques pour le système d'Euler incompressible. Ce théorème contiendra bien sûr le résultat d'existence globale pour le problème traditionnel des poches de tourbillon. Comme le théorème 3.3.2 le suggère, le concept important est celui de régularité tangentielle par rapport à une famille X de champs de vecteurs de classe C^ϵ, admissible en dehors de Σ. Ici, contrairement au chapitre 9, l'ensemble Σ sera toujours vide (on dira alors que la famille est admissible). On convient donc pour le reste de ce chapitre des notations suivantes :

$$\begin{aligned}
I(X) &= \inf_{x\in\mathbf{R}^2}\sup_{\lambda\in\Lambda}|X_\lambda(x)| \quad (>0),\\
N_\epsilon(X) &= \frac{1}{\epsilon}\sup_{\lambda\in\Lambda}\frac{\|X_\lambda\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_\lambda\|_\epsilon}{I(X)},\\
\|u\|_{\epsilon,X} &= N_\epsilon(X)\|u\|_{L^\infty} + \sup_{\lambda\in\Lambda}\frac{\|X_\lambda(x,D)u\|_{\epsilon-1}}{I(X)}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cette section.

Théorème 5.5.1 *Soient ϵ un réel de l'intervalle $]0,1[$, a un réel supérieur à 1 et $X_0 = (X_{0,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ une famille admissible de classe C^ϵ sur le plan. On considère un champ de vecteurs v_0 sur $\mathbf{R}^2$ appartenant à $C^1_\star$ et dont le gradient est dans L^a. Si ω_0 appartient à $C^\epsilon(X_0)$, alors, il existe une unique solution v de (E) telle que*

$$v \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; Lip) \quad et \quad \nabla v \in L^a.$$

De plus, si ψ désigne le flot de v, alors, pour tout λ,

$$X_{0,\lambda}(x,D)\psi \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^\epsilon).$$

Enfin, si $X_{t,\lambda} = \psi(t)^\star X_{0,\lambda}$, alors, la famille $X_t = (X_{t,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ est admissible et l'on a

$$N_\epsilon(X_t) \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}) \quad et \quad \|\omega(t)\|_{\epsilon,X_t} \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}).$$

Avant de démontrer ce théorème, nous allons vérifier qu'il entraîne bien le théorème 5.4.1. Soit f_0 une fonction de classe $C^{1+\epsilon}$ telle que, dans un voisinage de la courbe γ_0, celle-ci soit l'ensemble des zéros de f_0. Le gradient de la fonction f_0 est supposé ne pas s'annuller sur γ_0. Soit maintenant α une fonction à valeurs réelles valant identiquement 1 près de la courbe γ_0 et supportée dans un voisinage de γ_0 où le gradient de f_0 ne s'annulle pas. On définit alors les trois champs de vecteurs suivants :

$$X_{0,0} = \nabla^\perp f_0\,,\ X_{0,1} = (1-\alpha)\partial_1 \quad \text{et} \quad X_{0,2} = (1-\alpha)\partial_2.$$

Il est trivial de vérifier que la famille de champs de vecteurs définies ci-dessus est une famille substantielle de classe C^ϵ.

Comme ω_0 est la fonction caractéristique du domaine intérieur à la courbe γ_0, il est clair que $X_{0,i}(x,D)\omega_0 = 0$. Les hypothèses du théorème 5.5.1 sont donc satisfaites.

Soient σ_0 un élément du cercle et x_0 un élément de la courbe γ_0. Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_\sigma\widetilde{\gamma}_0(\sigma) & = & X_{0,0}(\widetilde{\gamma}_0(\sigma)) \\ \widetilde{\gamma}_0(\sigma_0) & = & x_0. \end{array}\right.$$

La fonction $\widetilde{\gamma}_0$ est un plongement du cercle de classe $C^{1+\epsilon}$. Soit $\widetilde{\gamma}(t)$ la fonction définie par $\widetilde{\gamma}(t,\sigma) = \psi(t,\widetilde{\gamma}_0(\sigma))$. D'après le théorème de persistance 5.5.1, on sait que

$$X_{0,0}(x,D)\psi \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^\epsilon).$$

En dérivant la relation de définition de $\widetilde{\gamma}$, il vient

$$\partial_\sigma\widetilde{\gamma}(t,\sigma) = (X_{0,0}(x,D)\psi)(t,\widetilde{\gamma}_0(\sigma)).$$

Donc $\partial_\sigma\widetilde{\gamma}$ appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^\epsilon)$. Le fait que ce soit un plongement du cercle résulte immédiatement du caractère lipschitzien de ψ. Le théorème 5.4.1 est ainsi démontré.

Démontrons le théorème de persistance 5.5.1. La démarche suivie est la même que celle qui inspire la preuve du théorème 5.1.1. Régularisons la donnée initiale. On pose

$$v_{0,n} = S_n v_0 \quad \text{et} \quad \omega_{0,n} = S_n\omega_0. \tag{5.16}$$

Le théorème 4.2.3 d'existence globale de solutions régulières affirme l'existence d'une solution globale v_n du système (E). Le point important de la présente démonstration consiste à démontrer une estimation a priori sur la norme Lipschitz d'une solution régulière du système (E), puis de passer à la limite.

Théorème 5.5.2 *Il existe une constante C vérifiant la propriété suivante. Soient ϵ un réel de l'intervalle $]0,1[$, a un réel supérieur à 1 et $X_0 = (X_{0,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ une famille admissible de classe C^ϵ sur le plan. Considérons un champ de vecteurs v solution du système d'Euler et appartenant à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^\infty_b)$. Alors, on a, pour tout temps t,*

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq \widetilde{N}(X_0, \epsilon, \omega_0) \exp \frac{Ct\|\omega_0\|_{L^\infty}}{\epsilon^2} \quad \textit{avec}$$
$$\widetilde{N}(X_0, \epsilon, \omega_0) = Ca\|\omega_0\|_{L^a} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty} \log \frac{\|\omega_0\|_{\epsilon,X_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}.$$

C'est ici qu'intervient la dynamique. L'idée est très simple ; on transporte les données géométriques, c'est-à-dire la famille admissible par le flot du champ de vecteurs v et l'on applique l'inégalité du théorème 3.3.2 à chaque instant.

Définissons donc la famille $X_t = (X_{t,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ par

$$X_{t,\lambda}(x) = \psi_\star(t)X_{0,\lambda}(x) = \big(X_{0,\lambda}(x,D)\psi(t)\big)(\psi^{-1}(t,x)). \tag{5.17}$$

Le point décisif de la démonstration est la majoration de la quantité $\|\omega(t)\|_{\epsilon,X_t}$. Le lemme clef est le suivant.

Lemme 5.5.1 *Il existe une constante C telle que*

$$I(X_t) \geq I(X_0)\exp - \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \tag{5.18}$$

$$\|X_{t,\lambda}(x,D)\omega(t)\|_{\epsilon-1} \leq C\|X_{0,\lambda}(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1} \exp\Big(\frac{C}{\epsilon}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big), \tag{5.19}$$

$$\|\operatorname{div} X_{t,\lambda}\|_\epsilon \leq \|\operatorname{div} X_{0,\lambda}\|_\epsilon \exp\Big(C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big), \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}\|X_{t,\lambda}\|_\epsilon \leq\ & C\Big(\|X_{0,\lambda}\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_{0,\lambda}\|_\epsilon + \frac{\epsilon\|X_{0,\lambda}(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}\Big)\\ &\times \exp\Big(\frac{C}{\epsilon}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big).\end{aligned} \tag{5.21}$$

Admettons momentanément ce lemme. Il résulte alors de la définition de $\|\cdot\|_{\epsilon,X_t}$ que

$$\frac{\|\omega(t)\|_{\epsilon,X_t}}{\|\omega(t)\|_{L^\infty}} \leq C\frac{\|\omega_0\|_{\epsilon,X_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}} \exp\Big(\frac{C}{\epsilon}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big).$$

Appliquons alors le théorème 3.3.2. On peut dès lors affirmer, grâce à la nullité de la divergence du champ de vecteurs v, que

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq Ca\|\omega_0\|_{L^a} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty} \log\Big(e + \frac{\|\omega_0\|_{\epsilon,X_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}} \exp\Big(\frac{C}{\epsilon}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big)\Big).$$

Comme le quotient

$$\frac{\|\omega_0\|_{\epsilon,X_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}$$

est supérieur à 1, il est légitime d'écrire

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq Ca\|\omega_0\|_{L^a} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty} \log \frac{\|\omega_0\|_{\epsilon,X_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}} + \frac{C}{\epsilon^2}\|\omega_0\|_{L^\infty}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.$$

Le lemme de Gronwall assure alors le théorème 5.5.2.

Prouvons le lemme 5.5.1 que nous avions provisoirement admis. Si l'on dérive l'équation de définition du flot le long du champ de vecteurs $X_{0,\lambda}$, il vient

$$\begin{cases} \partial_t X_{0,\lambda}(x,D)\psi(t,x) & = & \nabla v(t,\psi(t,x))X_{0,\lambda}(x,D)\psi(t,x) \\ X_{0,\lambda}(x,D)\psi(0,x) & = & X_{0,\lambda}(x). \end{cases} \tag{5.22}$$

En intégrant l'équation ci-dessus entre t et 0, il vient

$$|X_{0,\lambda}(x)| \leq |X_{0,\lambda}(x,D)\psi(t,x)| \exp \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.$$

Il en résulte, pour tout x du plan, que

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} |X_{0,\lambda}(x)| \leq \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_{0,\lambda}(x,D)\psi(t,x)| \exp \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.$$

Comme $X_{t,\lambda}(x) = (X_{0,\lambda}(x,D)\psi(t))(\psi^{-1}(t,x))$, la définition 3.3.1 de $I(X)$ assure l'inégalité (5.18).

La relation (5.22) peut s'écrire

$$\partial_t X_{t,\lambda} + v \cdot \nabla X_{t,\lambda} = X_{t,\lambda}(x,D)v. \tag{5.23}$$

Cette relation exprime que les deux champs de vecteurs $\partial_t + v \cdot \nabla$ et $X_{t,\lambda}$ commutent. Grâce à la conservation du tourbillon le long des lignes de flot de v, on en déduit que

$$\partial_t X_{t,\lambda}(x,D)\omega(t) + v \cdot \nabla X_{t,\lambda}(x,D)\omega(t) = 0.$$

L'estimation de propagation de la norme hölderienne établie au lemme 4.1.1 assure que

$$\|X_{t,\lambda}(x,D)\omega(t)\|_{\epsilon-1} \leq C\|X_{0,\lambda}(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1} \exp\Big(\frac{C}{\epsilon}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big),$$

ce qui n'est rien d'autre que l'inégalité (5.19).

En appliquant l'opérateur divergence à l'équation (5.23), il vient

$$\partial_t \operatorname{div} X_{t,\lambda} + v \cdot \nabla \operatorname{div} X_{t,\lambda} = X_{t,\lambda}(x,D) \operatorname{div} v.$$

Comme le champ de vecteurs v est solution de l'équation d'Euler, sa divergence est nulle. On a donc conservation de la divergence des champs de vecteurs $X_{t,\lambda}$ le long des lignes de flot, c'est-à-dire

$$\partial_t \operatorname{div} X_{t,\lambda} + v \cdot \nabla \operatorname{div} X_{t,\lambda} = 0. \tag{5.24}$$

L'inégalité (5.20) résulte immédiatement du lemme 4.1.1.

Pour démontrer l'estimation (5.21), légèrement plus délicate, on utilisera la relation (5.23) de transport de X_t et le lemme 3.3.2. Grâce à ce lemme, on peut soutenir que l'on a, avec ses notations,

$$\partial_t X_{t,\lambda} + v \cdot \nabla X_{t,\lambda} = W_1(X_{t,\lambda}, v(t)) + W_2(X_{t,\lambda}, v(t)) + A(t)X_{t,\lambda},$$

où $A(t)$ désigne un opérateur continue de C^ϵ dans lui-même tel que

$$\|A(t)\|_{\mathcal{L}(C^\epsilon;C^\epsilon)} \leq \frac{C}{\epsilon}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}.$$

De l'estimation de propagation du lemme 4.1.1, des majorations de W_1 et W_2 énoncées dans le lemme 3.3.2 et des inégalités (5.19) et (5.20), on déduit l'existence d'une constante C telle que l'on ait

$$\begin{aligned}\|X_{t,\lambda}\|_\epsilon \leq \|X_{0,\lambda}\|_\epsilon e^{\frac{C}{\epsilon}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau} \\ + \Big(C\|X_0(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1} + \frac{C}{\epsilon}\|\operatorname{div} X_{0,\lambda}\|_{\epsilon-1}\Big)\int_0^t e^{\frac{C}{\epsilon}\int_0^\tau \|\nabla v(\tau')\|_{L^\infty} d\tau'} d\tau.\end{aligned}$$

Il est clair que le dernier terme de l'inégalité ci-dessus peut être majorée par

$$Ct\Big(\|X_0(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1} + \frac{\|\operatorname{div} X_{0,\lambda}\|_\epsilon\|\omega_0\|_{L^\infty}}{\epsilon}\Big)e^{\frac{C}{\epsilon}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau}.$$

En observant que

$$\|\omega_0\|_{L^\infty} = \|\omega(t)\|_{L^\infty} \leq 2\|\nabla v(t)\|_{L^\infty},$$

on peut affirmer que

$$t \leq \frac{\epsilon}{C\|\omega_0\|_{L^\infty}} e^{\frac{C}{\epsilon}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau}.$$

On en déduit alors immédiatement que

$$\|X_{t,\lambda}\|_\epsilon \leq \Big(\|X_{0,\lambda}\|_\epsilon + C\|\operatorname{div} X_{0,\lambda}\|_\epsilon + \frac{C\epsilon\|X_{0,\lambda}(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}\Big)e^{\frac{C}{\epsilon}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau},$$

ce qui n'est rien d'autre que l'inégalité (5.21) voulue. Le lemme 5.5.1 et ainsi le théorème 5.5.2 sont démontrés.

Il s'agit maintenant de passer à la limite. Ceci sera très facile compte-tenu des inégalités précédemment démontrées. Considérons la suite de données intiales régularisées, définies par l'équation (5.16) au début de cette section. D'après le théorème 5.5.2 que nous venons de démontrer, on peut écrire

$$\|\nabla v_n(t)\|_{L^\infty} \leq C\widetilde{N}(X_0,\epsilon,\omega_{0,n}) \exp\frac{Ct\|\omega_{0,n}\|_{L^\infty}}{\epsilon^2}, \tag{5.25}$$

en se souvenant que

$$\widetilde{N}(X_0,\epsilon,\omega_{0,n}) = C(\|\omega_{0,n}\|_{L^\infty} + a\|\omega_{0,n}\|_{L^a}) + \frac{C}{\epsilon}\|\omega_{0,n}\|_{L^\infty}\log\frac{\|\omega_{0,n}\|_{\epsilon,X_0}}{\|\omega_{0,n}\|_{L^\infty}}.$$

L'inégalité (3.22) affirme que

$$\|S_n\omega\|_{\epsilon,X} \leq \frac{C}{1-\epsilon}(N_\epsilon(X)\|\omega\|_{L^\infty} + \|\omega\|_{\epsilon,X}).$$

Le fait que $\|\omega_{0,n}\|_{L^\infty} \leq C\|\omega_0\|_{L^\infty}$ et $\|\omega_{0,n}\|_{L^a} \leq C\|\omega_0\|_{L^a}$ entraîne alors que

$$\|\nabla v_n(t)\|_{L^\infty} \leq C\widetilde{N}(X_0,\epsilon,\omega_0) \exp\frac{Ct\|\omega_0\|_{L^\infty}}{\epsilon^2}. \tag{5.26}$$

Nous allons démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^{-\alpha})$ pour tout α de l'intervalle $]0,1[$. En effet, on a

$$\partial_t(v_n - v_m) + v_n \cdot \nabla(v_n - v_m) = \pi(v_n - v_m, v_n + v_m) + (v_m - v_n) \cdot \nabla v_m.$$

En découpant le terme $(v_m - v_n) \cdot \nabla v_m$ en paraproduit et reste, puis en utilisant le théorème 2.4.1 qui décrit la façon dont paraproduit et reste opèrent dans les espaces de Hölder, il vient

$$\|(v_n - v_m) \cdot \nabla v_m\|_{-\alpha} \leq C_{\alpha,\epsilon}\|\nabla v_m(t)\|_{L^\infty}\|v_n - v_m\|_{-\alpha}.$$

La proposition 2.5.1 affirme que

$$\|\pi(v_n - v_m, v_n + v_m)\|_{-\alpha} \leq C_{\alpha,\epsilon}(\|v_n(t)\|_{Lip} + \|v_m(t)\|_{Lip})\|v_n - v_m\|_{-\alpha}.$$

Posons

$$V(t) = C\widetilde{N}(X_0, \epsilon, \omega_0) \exp \frac{Ct\|\omega_0\|_{L^\infty}}{\epsilon^2}.$$

Appliquons l'estimation de propagation du lemme 4.1.1 ; il en résulte que

$$\|(v_n - v_m)(t)\|_{-\alpha} \leq \|v_{0,n} - v_{0,m}\|_{-\alpha} \exp\Big(C_{\alpha,\epsilon}\int_0^t V(\tau)d\tau\Big).$$

Par interpolation, on en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est, pour tout r strictement inférieur à 1, une suite de Cauchy de $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^r)$.

Le point important consiste maintenant à démontrer que la solution v du système d'Euler ainsi construite vérifie les propriétés de régularité tangentielle par rapport à une famille admissible de champs de vecteurs à définir.

La première étape est la démonstration d'une facile propriété de stabilité du flot dans le cadre des champs de vecteurs intoduits dans la section 5.2.

Lemme 5.5.2 *Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de $L^1([0,T]; C_\mu)$, où μ vérifie les hypothèses du théorème 5.2.2. On suppose en outre que*

$$\lim_{n\to\infty} F_n = F \quad \textit{dans} \quad L^1([0,T]; L^\infty).$$

Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des solutions de

$$\psi_n(t,x) = x + \int_0^t F_n(s, \psi_n(s,x))ds.$$

Alors, $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{Id} + L^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ *et sa limite ψ est solution de*

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t F(s, \psi(s,x))ds.$$

De plus, si la suite $(F_n)_{n\in N}$ est bonée dans $L^1([0,T]; Lip)$ (resp. $L^1([0,T]; LL)$), alors,

$$\forall \epsilon > 0\,, \lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi \quad \textit{dans} \quad L^\infty([0,T]; \mathrm{Id} + C^{1-\epsilon})$$

$$(\textit{resp.} \quad \textit{dans} \quad L^\infty([0,T]; \mathrm{Id} + C^{\exp\left(-\epsilon + \int_0^T \|v(\tau)\|_{LL} d\tau\right)}),$$

le même résultat étant vrai pour $(\psi_n^{-1})_{n\in\mathbf{N}}$ et ψ^{-1}.

La démonstration de ce lemme utilise les mêmes ingrédients que celle du théorème 5.2.2. On a

$$\begin{aligned}
|\psi_{n+k}(t,x) - \psi_n(t,x)| &\le \int_{t_0}^t \|F_{n+k}(s) - F_n(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t |F_n(s,\psi_{n+k}(s,x)) - F_n(s,\psi_n(s,x))| ds \\
&\le \int_{t_0}^t \|F_{n+k}(s) - F_n(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\quad + \int_{t_0}^t \mu(\|\psi_{n+k}(s) - \psi_n(s)\|_{L^\infty}) \|F_n(s)\|_{C_\mu} ds.
\end{aligned}$$

Posons alors

$$\rho_n(t) = \sup_{\substack{0\le\tau\le t\\ k\ge 0}} \|\psi_{n+k}(\tau) - \psi_n(\tau)\|_{L^\infty}.$$

De manière rigoureusement analogue à celle utilisée dans la démonstration du théorème 5.2.2, on obtient

$$\rho_n(t) \le a_n + \int_0^t \mu(\rho_n(s))\|F_n(s)\|_{C_\mu} ds \quad \text{avec} \quad a_n = \sup_{k\ge 0} \int_0^t \|F_{n+k}(s) - F_n(s)\|_{L^\infty} ds.$$

D'après l'inégalité (5.9), il vient

$$-\mathcal{M}(\rho_n(t)) + \mathcal{M}(a_n) \le \int_0^t \|F_n(s)\|_{C_\mu} ds.$$

Par hypothèse, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est majoré par une constante C, indépendante de n. D'où

$$\mathcal{M}(a_n) \le C + \mathcal{M}(\rho_n(t)).$$

Or la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, donc la suite $(\mathcal{M}(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers l'infini. Donc la suite $(\mathcal{M}(\rho_n(t)))_{n\in\mathbf{N}}$ aussi. Vu la définition de $\mathcal{M}$, ceci entraîne que la suite $(\rho_n(t))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0. Donc, on a

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi \quad \text{dans} \quad \mathrm{Id} + L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d).$$

La démonstration du lemme se conclut par une évidente interpolation.

Démontrons maintenant le premier point du théorème 5.5.1, à savoir que l'on a, pour tout λ,

$$X_{0,\lambda}(x,D)\psi \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^\epsilon).$$

On sait que

$$\begin{aligned}
X_{0,\lambda}(x,D)\psi_n &= X_{0,\lambda}(x,D)(\psi_n - \mathrm{Id}) \\
&= \sum_j \partial_j(X^j_{0,\lambda}(x)(\psi_n - \mathrm{Id})) - (\psi_n - \mathrm{Id})\,\mathrm{div}\, X_{0,\lambda} + X_{0,\lambda}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 5.5.2 de stabilité ci-dessus et d'après le caractère d'algèbre normée de l'espace C^ϵ, la suite $(X_{0,\lambda}(x,D)\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $X_{0,\lambda}(x,D)\psi$ dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^{\epsilon-1})$.

Or, l'inégalité (5.21) du lemme 5.5.1, jointe au fait que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};Lip)$, assure que, pour tout r strictement inférieur à ϵ,

$$\lim_{n\to\infty} X_{0,\lambda}(x,D)\psi_n = X_{0,\lambda}(x,D)\psi \quad \text{dans} \quad L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^r). \tag{5.27}$$

Il en résulte que

$$X_{0,\lambda}(x,D)\psi \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^\epsilon),$$

ce qui n'est rien d'autre que le premier point du théorème 5.5.1.

Pour démontrer l'intégralité de ce théorème, il reste maintenant à démontrer que la régularité supposée à l'instant initial se propage. La première des choses à faire est de définir, pour chaque instant t de l'évolution, une famille admissible de champs de vecteurs. Posons, pour tout λ,

$$X_{t,\lambda}(x) = (X_{0,\lambda}(x,D)\psi)(t,\psi^{-1}(t,x)).$$

Démontrons que, pour tout temps t, la famille de champs de vecteurs $(X_t) = (X_{t,\lambda})$ est une famille de classe C^ϵ, admissible. En effet, posons, pour tout λ,

$$X_{t,n,\lambda} = (X_{0,\lambda}(x,D)\psi_n)(t,\psi_n^{-1}(t,x)).$$

Par définition des champs de vecteurs $X_{n,t,\lambda}$ et $X_{t,\lambda}$, il vient

$$\begin{aligned} X_{t,n,\lambda}(x) - X_{t,\lambda}(x) \ = \ & (X_{0,\lambda}(x,D)\psi_n)(t,\psi_n^{-1}(t,x)) - (X_{0,\lambda}(x,D)\psi_n)(t,\psi^{-1}(t,x)) \\ & + (X_{0,\lambda}(x,D)\psi_n - X_{0,\lambda}(x,D)\psi)(t,\psi^{-1}(t,x)). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \|X_{t,n,\lambda} - X_{t,\lambda}\|_{L^\infty} \leq \ & \|X_{0,\lambda}(x,D)\psi_n\|_\epsilon (\|\psi_n^{-1}(t) - \psi^{-1}(t)\|_{L^\infty})^\epsilon \\ & + \|X_{0,\lambda}(x,D)\psi_n - X_{0,\lambda}(x,D)\psi\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

De plus, l'inégalité (5.21) du lemme 5.5.1 dit que la suite $(X_{t,n,\lambda})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^\epsilon)$. Il en résulte donc bien que, pour tout λ et tout r strictement inférieur à ϵ, on a

$$\lim_{n\to\infty} X_{t,n,\lambda} = X_{t,\lambda} \quad \text{dans} \quad L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^r).$$

Comme la suite $(X_{t,n,\lambda})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^\epsilon)$, les champs de vecteurs $X_{t,\lambda}$ sont localement bornés en temps, à valeurs dans C^ϵ. De même, grâce à l'inégalité (5.20), la fonction $\operatorname{div} X_{t,\lambda}$ appartient à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^\epsilon)$.

Enfin, comme la suite $(X_{t,n,\lambda})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $X_{t,\lambda}$ dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};L^\infty)$, il vient, d'après l'inégalité (5.18), que

$$I(X_t) \geq I(X_0)\exp - \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.$$

La famille de champs de vecteurs X_t est donc une famille admissible de champs de vecteurs de classe C^ϵ.

Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers v dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^r)$ pour tout r strictement inférieur à 1, il vient, pour tout r strictement négatif,

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = \omega \quad \text{dans} \quad L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^r).$$

Il résulte alors du théoréme 2.4.1 d'opérance du paraproduit et du reste que, pour tout λ, les suites $(\omega_n X_{t,n,\lambda})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\omega_n \operatorname{div} X_{t,n,\lambda})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent respectivement vers $\omega X_{t,\lambda}$ et $\omega \operatorname{div} X_{t,\lambda}$ dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^r)$ et ce, pour tout r strictement négatif. On en déduit donc que, pour tout λ,

$$\lim_{n\to\infty} X_{t,n,\lambda}(x, D)\omega_n = X_{t,\lambda}(x, D)\omega \quad \text{dans} \quad L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^r).$$

Vu l'estimation (5.19), la suite $(\|X_{t,n,\lambda}(x, D)\omega(t)\|_{\epsilon-1})_{n\in\mathbf{N}}$ est, pour tout λ, une suite bornée de fonctions localement bornées. L'égalité ci-dessus permet alors d'affirmer que

$$X_{t,\lambda}(x, D)\omega \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^{\epsilon-1}).$$

Ceci achève la démonstration du théorème 5.5.1.

5.6 Références et remarques

Le théorème 5.1.1 d'existence globale et d'unicité sous la seule hypothèse que le tourbillon à l'instant initial est borné a été démontré par V. Yudovich dans [67], pour l'équation d'Euler dans un domaine borné. L'adaptation au cas de l'espace $\mathbf{R}^2$ tout entier, présentée ici, reprend partiellement une section de [26].

Quant au théorème 5.2.1 d'existence d'un flot à régularité spatiale exponentiellement décroissante en temps, c'est un théorème d'équations différentielles ordinaires des plus classiques. L'approche présentée dans la section 5.2 reprend une partie de [30], qui est un travail de N. Lerner, en collaboration avec l'auteur). Un résumé historique très complet dû à T. Flett sur les diverses théorèmes d'existence et d'unicité relatifs à des équations différentielles ordinaires associées à des champ de vecteurs non-lipschitziens se trouve dans [40].

Quant à l'exemple de solution du système d'Euler à flot ayant une régularité Hölderienne exponentiellement décroissante, il est tiré d'un travail de H. Bahouri, écrit en collaboration avec l'auteur (voir [6]).

Toujours dans [67], V. Yudovich pose le problème des poches de tourbillon. Ce problème semble avoir connu un regain d'intérêt à la suite du texte de survol de A. Majda (voir [53]). Dans ce texte, on trouve développée l'approche par l'équation intégro-différentielle (5.15) sur le paramétrage du bord. Au vu du résultat d'expériences numériques exposé par N. Zabusky et ses collaborateurs dans [68], A. Majda conjecture dans [53] que le bord cesse d'être rectifiable en temps fini. L'approximation quadratique de l'équation (5.15) a été étudiée notamment par P. Constantin et E. Titi dans [32] ; dans [3], S. Alinhac montre que cette équation approximée développe des instabilités très proches de l'explosion en temps fini. Enfin, des modélisations numériques plus récentes, voir par exemple [19] et [20], renforçaient aussi l'idée d'apparition de singularités sur le bord en temps fini.

L'approche présentée ici est différente. On revient aux équations d'Euler et l'on démontre le théorème 5.5.1 de propagation de la régularité tangentielle dans le système d'Euler jusqu'à un temps arbitraire. La notion de régularité tangentielle par rapport à une famille de champs de vecteurs a été introduite pour l'étude des équations hyperboliques par J.-M. Bony dans [15] (voir aussi [17] pour un survol de ce sujet). Ensuite, cette notion a été raffinée pour être applicable aux équations aux dérivées partielles non semi-linéaires par S. Alinhac dans [1] et par l'auteur dans [21] (voir aussi [22] à [24]).

Ces techniques ont été appliquées une première fois dans [26] pour traiter le problème de la préservation de la régularité tangentielle à temps petit. Dans ce cadre de l'existence locale en temps, signalons que P. Serfati démontre dans [57] que, pour les petites perturbations du cercle (solution stationnaire évidente), l'équation (5.15) est une équation différentielle ordinaire de type analytique. Puis, dans [27] et [29], nous avons démontré un théorème général de persistance de la régularité de type tangentielle très proche du théorème 5.5.1. Postérieurement, A. Bertozzi et P. Constantin ont démontré dans [14] la persistance de la régularité du bord de la poche en s'appuyant sur un théorème d'existence démontré par A. Bertozzi dans [13]. Récemment, dans [58], P. Serfati donne une démonstration différente de notre théorème. Enfin, dans [43], X. Saint-Raymond et P. Gamblin ont généralisé l'approche présentée ici au cas de la dimension trois.

Enfin, nous avons démontré dans [26] un théorème qui, combiné au théorème de persistance 5.5.1, généralise le théorème 5.4.1 de la manière suivante :

Si γ_0 appartient à $C^{k+\epsilon}(\mathbf{S}^1,\mathbf{R}^2)$ où k est un entier strictement positif et ϵ appartient à l'intervalle $]0,1[$, alors la solution γ de l'équation (5.15) appartient à l'espace

$$L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^{k+\epsilon}(\mathbf{S}^1;\mathbf{R}^2))\cap\bigcap_{\epsilon'<\epsilon}C^\infty(\mathbf{R};C^{k+\epsilon'}(\mathbf{S}^1;\mathbf{R}^2)).$$

Chapitre 6

Les nappes de tourbillon

6.1 Présentation de la problématique

Le problème des nappes de tourbillon consiste à chercher une solution du système d'Euler incompressible (E) en dimension deux lorsque le tourbillon à l'instant initial est la mesure de longueur d'une courbe compacte de classe C^1. Ce problème est l'analogue du problème des poches de tourbillon avec un "cran" de singularité en plus.

Démontrer l'analogue du résultat sur les poches de tourbillon, à supposer qu'il soit vrai, semble hors de portée. En effet, cela impliquerait que le tourbillon à l'instant t soit la mesure de longueur d'une courbe compacte régulière.

La voie que nous allons emprunter est la suivante. Tout d'abord, trouver une classe large et stable de données initiales contenant les champs de vecteurs de divergence nulle dont le tourbillon est la mesure de longueur d'une courbe compacte régulière. Ensuite, régulariser une donnée initiale prise dans cette classe. Le théorème 4.2.4 assure l'existence de solutions globales associées aux données régularisées. Enfin, les estimations a priori d'énergie et de conservation du tourbillon nous permettront de passer à la limite et ainsi de construire une solution. Le résultat de cette démarche est le théorème suivant :

Théorème 6.1.1 *Soient m un réel et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace E_m. Supposons que ω_0, son tourbillon à l'instant initial, soit une mesure bornée de partie singulière positive. Il existe alors un couple (v, p) solution du système d'Euler (E) et appartenant à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; E_m) \times L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; \mathcal{F}^{-1}(L^2 + L^\infty))$.*

De plus, à chaque instant t, le tourbillon ω_t est une mesure bornée de partie singulière positive et de masse totale inférieure ou égale à celle de ω_0.

Avant toute chose, vérifions que les données initiales de type "nappe de tourbillon" satisfont les hypothèses du théorème 6.1.1. D'après le lemme 1.3.1, il suffit pour cela de démontrer que la mesure de longueur d'une courbe compacte γ de classe C^1 appartient à $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$. Il suffit de le démontrer localement près de chaque point de la courbe. Soit Ω un ouvert et Ψ un difféomorphisme de classe C^1 tel que $\Psi(\gamma \cap \Omega) = \Psi(\Omega) \cap \{x \in \mathbf{R}^2 \,/ x_1 = 0\}$. D'après les propositions 2.2.6 et 2.2.3, on peut définir, pour tout ϵ strictement positif, la forme linéaire suivante, sur l'espace des fonctions $H^{\frac{1}{2}+\epsilon}$,

$$f \mapsto \int [R_1(f \circ \Psi^{-1}) \circ \Psi] d\gamma(x),$$

où R_1 désigne la restriction sur la droite $x_1 = 0$. D'après la proposition 2.2.1, il en résulte que la mesure de longueur de la courbe γ est localement $H^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$.

Nous suivons la démarche annoncée. Soit ρ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ positive et d'intégrale 1. Avec les notations du chapitre 5, on pose

$$v_{0,n} = \rho_n \star v_0 \tag{6.1}$$

et on note $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des solutions associées. Lorsque l'on regarde le système d'Euler incompressible tel qu'il est formulé dans les équations (1.16) et (1.17) page 18, on ne peut s'empêcher de remarquer que, si l'on veut obtenir une solution, il suffit, non pas de passer à la limite sur tous les termes non linéaires v^iv^j, mais seulement sur les termes v^1v^2 et $(v^1)^2 - (v^2)^2$, un changement d'axes évident permettant de se ramener au seul cas de v^1v^2.

Remarque La convergence faible de $v_n^iv_n^j$ vers v^iv^j pour tout couple (i,j) équivaut, d'après la relation (1.16), à celle de $v_n^1v_n^2$ vers v^1v^2, de $(v_n^1)^2 - (v_n^2)^2$ vers $(v^1)^2 - (v^2)^2$ et de p_n vers p.

Les informations additionnelles dont nous disposons portent sur le tourbillon. Aussi, est-il naturel de chercher à exprimer la quantité $v_n^1v_n^2$ à partir du tourbillon de v. Le tourbillon ω_n appartient à $L^\infty \cap L^1$. D'après la loi de Biot-Savart telle qu'elle apparaît dans la relation (1.8) page 15, il vient, pour toute fonction g indéfiniment différentiable à support compact, définie sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned}\Delta(g,v_n) &\stackrel{\text{déf}}{=} \ < v_n^1v_n^2, g > \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}^7} \frac{z_2-y_2}{|z-y|^2}\frac{z_1-x_1}{|z-x|^2}\omega_n(t,x)\omega_n(t,y)g(t,z)dtdxdydz.\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini permet de reformuler les relations ci-dessus ainsi :

$$\Delta(g,v_n) = \int_{\mathbf{R}^5} G(t,x,y)d\mu_n(t,x,y)$$

$$\text{avec}\quad G(t,x,y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int \frac{z_2-y_2}{|z-y|^2}\frac{z_1-x_1}{|z-x|^2}g(t,z)dz \tag{6.2}$$

$$\text{et}\quad d\mu_n(t,x,y) = \omega_n(t,x)\omega_n(t,y)dtdxdy.$$

D'après la relation (1.12) de conservation du tourbillon le long des lignes de flot, la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de mesures bornées. On peut donc, quitte à extraire, supposer que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers une mesure bornée μ.[1]

On est ainsi ramené à passer à la limite dans une intégrale. Si la fonction G était une fonction continue, bornée et nulle à l'infini, il n'y aurait aucun problème. L'étude de cette fonction G, que nous allons mener maintenant, éclaire bien la nécessité de se restreindre à certaines non-linéarités.

[1]Dans toute la suite de ce chapitre, nous omettrons systématiquement de noter les extractions.

6.2 Etude de la fonction G

Le but de cette section est de démontrer que la fonction G est une fonction raisonnable pour le problème que l'on s'est posé. Ses propriétés sont décrites par le théorème suivant :

Théorème 6.2.1 *La fonction G définie par l'équation (6.2) est bornée, nulle à l'infini et continue sur $\mathbf{R}\times(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{D})$, $\mathbf{D}$ désignant la diagonale de $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$.*

Démontrer que G est nulle à l'infini est aisé. En effet, si t n'appartient pas à la projection sur $\mathbf{R}$ du support de g, alors $G(t,x,y)=0$. De plus, si $|x|$(resp. $|y|$) est assez grand devant le maximum de $|z|$ lorsque z parcourt la projection sur $\mathbf{R}^2$ du support de g, on a

$$|G(t,x,y)|\leq \frac{C}{|x|}\Big(\text{resp. } \frac{C}{|y|}\Big).$$

Ceci démontre la nullité de G à l'infini.

La fonction $|z|^{-1}$ étant localement intégrable dans $\mathbf{R}^2$, le théorème de continuité de Lebesgue entraîne la continuité de g en dehors de la diagonale.

Nous n'avons pas encore utilisé la particularité de la non-linéarité pour laquelle nous souhaitons passer à la limite. Cela jouera un rôle important pour démontrer que la fonction G est bornée. Posons

$$\widetilde{G}(t,y,w)=\int\frac{z_2}{|z|^2}\frac{z_1+w_1}{|z+w|^2}g(t,y+z)dz.$$

Par le changement de variable $z'=z-y$, il est immédiat de vérifier que

$$G(t,x,y)=-\frac{1}{4\pi^2}\widetilde{G}(t,y,y-x).$$

Le fait que G, donc $\widetilde{G}$, soit nulle à l'infini permet de supposer que (t,y,w) est dans un compact fixe K de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, il existe une fonction r indéfiniment différentiable à dérivées bornées vérifiant, pour tout triplet (t,y,w) appartenant à K,

$$g(t,y+z)=g(t,y)+r(t,y,z) \quad \text{et} \quad r(t,y,0)=0. \tag{6.3}$$

Soit maintenant B une boule contenant la somme de la projection sur $\mathbf{R}^2$ de K et de la projection sur $\mathbf{R}^2$du support de g. On considère une fonction θ indéfiniment différentiable à support compact, radiale, et valant 1 près de B. De la relation (6.3) ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned}\widetilde{G}&=\Theta(w)g(t,y)+\int\frac{z_2}{|z|^2}\frac{z_1+w_1}{|z+w|^2}\theta(z)r(t,y,z)dz\\ \text{avec}\quad \Theta(w)&=\int\frac{z_2}{|z|^2}\frac{z_1+w_1}{|z+w|^2}\theta(z)dz.\end{aligned}\tag{6.4}$$

D'après (6.3), pour tout (t,y,w) dans K, on a

$$r(t,y,z)\leq C|z|.$$

Il en résulte que, pour tout (t, y, w) dans K,

$$|\widetilde{G}(t,y,w) - g(t,y)\Theta(w)| \leq C. \tag{6.5}$$

On est donc ramené à démontrer que la fonction Θ est bornée. C'est ici, et seulement ici, que l'on va utiliser la forme particulière de la non-linéarité.

Soient w un élément du cercle et σ un réel de l'intervalle $]0,1]$. Par le changement de variable $z' = \sigma z$, on a

$$\Theta(\sigma w) = \int \frac{z_2}{|z|^2} \frac{z_1 + w_1}{|z+w|^2} \theta(\sigma z) dz.$$

La fonction θ est radiale et vaut 1 sur une boule. La fonction

$$\frac{z_1 z_2}{|z|^4}$$

est d'intégrale nulle sur tout cercle centré à l'origine. Donc, il existe deux réels strictement positifs c et C tels que

$$\Theta(\sigma w) - \Theta(w) = \int_{c \leq |z| \leq C/\sigma} \frac{z_2}{|z|^2} \left(\frac{z_1 + w_1}{|z+w|^2} - \frac{z_1}{|z|^2} \right) \Big(\theta(\sigma z) - \theta(z) \Big) dz.$$

Il existe une constante C_1 telle que, pour tout w appartenant à $\mathbf{S}^1$ et pour tout z tel que $|z| \geq 2$,

$$\left| \frac{z_1 + w_1}{|z+w|^2} - \frac{z_1}{|z|^2} \right| \leq \frac{C_1}{|z|^2}.$$

Donc, il existe une constante C telle que, pour tout réel σ de l'intervalle $]0,1]$ et tout point w du cercle, on ait

$$|\Theta(\sigma w) - \Theta(w)| \leq C.$$

D'après l'égalité (6.4) et l'inégalité (6.5), on en déduit que la fonction G est bornée. Ceci conclut la démonstration du théorème 6.2.1.

6.3 Passage à la limite

Dans cette dernière section, nous allons démontrer un théorème de convergence abstrait sur les suites de champs de vecteurs de divergence nulle. Énonçons-le.

Théorème 6.3.1 *Soient m un réel et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; E_m)$ convergeant faiblement vers v. Supposons que la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite bornée de l'espace $L^\infty(\mathbf{R}; L^1(\mathbf{R}^2))$ faiblement convergente vers ω.*

S'il existe une mesure diffuse ω^+ telle que $|\omega_n|$ converge faiblement vers ω^+, alors, on a, dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$,

$$\lim_{n\to\infty} v_n^1 v_n^2 = v^1 v^2.$$

Ensuite, pour démontrer le théorème 6.1.1, il suffira de vérifier que la suite de champs de vecteurs de divergence nulle, définie par la relation (6.1), satisfait aux hypothèses du théorème 6.3.1 ci-dessus.

La démonstration du théorème 6.3.1 que nous venons d'énoncer repose sur deux lemmes de théorie de la mesure. Énonçons et démontrons le premier.

Lemme 6.3.1 *Soit X un espace métrique localement compact dénombrable à l'infini. On considère une suite bornée de mesures bornées $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant faiblement vers une mesure μ.*

Si la suite $(|\mu_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers ν, alors, pour toute fonction borélienne bornée, nulle à l'infini et continue en dehors d'un fermé N, ν-négligeable, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

Soit ϵ un réel strictement positif. La fonction f étant nulle à l'infini, il existe une fonction ρ continue, à support compact et à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ telle que

$$\|(1-\rho)f\|_{L^\infty} \leq \frac{\epsilon}{8\|f\|_{L^\infty}\sup_n\|\mu_n\|_{\mathcal{M}}+1}\cdot \tag{6.6}$$

Désignons par N_p l'ensemble des points à distance inférieure à $1/p$ de l'ensemble $N\cap$ Supp ρ. Définissons alors la suite $(\theta_p)_{p\in\mathbf{N}}$ par

$$\theta_p(x) = \frac{d(x,N_{2p}^c)}{d(x,N_{2p}^c)+d(x,N_p)}\cdot$$

Clairement, on a, pour tout élement x de X,

$$\lim_{p\to\infty}\theta_p(x) = \mathbf{1}_{N\cap\text{Supp }\rho}(x).$$

Le fermé N étant ν-négligeable, il existe, d'après le théorème de convergence dominée, une fonction θ_p, que l'on notera simplement θ, telle que

$$\int \theta d\nu \leq \frac{\epsilon}{8\|f\|_{L^\infty}+1}\cdot \tag{6.7}$$

Mais, la suite $(|\mu_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ tend faiblement vers ν. Donc, il existe un entier n_0 tel que

$$n\geq n_0 \Rightarrow \int \theta d|\mu_n| \leq \frac{2\epsilon}{8\|f\|_{L^\infty}+1}\cdot \tag{6.8}$$

Ecrivons que

$$\begin{aligned}\int f d\mu_n - \int f d\mu = \int (1-\rho)f(d\mu - d\mu_n)\\ + \int \rho\theta f(d\mu-d\mu_n) + \int \rho(1-\theta)f(d\mu-d\mu_n).\end{aligned}$$

D'après les relations (6.6)–(6.8), on a

$$\Big|\int f d\mu_n - \int f d\mu - \int(1-\theta)\rho f(d\mu-d\mu_n)\Big| \leq \frac{3\epsilon}{4}\cdot \tag{6.9}$$

La fonction $(1-\theta)\rho f$ est bornée, à support compact et continue en tout point n'appartenant pas à N. Si x appartient à N, alors, pour tout y, on a, comme θ vaut identiquement 1 sur N,

$$\begin{aligned}\Big|(1-\theta(y))\rho(y)f(y)-(1-\theta(x))\rho(x)f(x)\Big| &\leq \|f\|_{L^\infty}|(1-\theta(y)|\\ &\leq \|f\|_{L^\infty}|(\theta(x)-\theta(y)|.\end{aligned}$$

Donc, la fonction $(1-\theta)\rho f$ est une fonction continue à support compact. Ainsi, il existe un entier n_1 tel que

$$n \geq n_1 \Rightarrow \Big|\int (1-\theta)\rho f(d\mu - d\mu_n)\Big| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Joint à l'inégalité (6.9), ceci achève la démonstration du lemme 6.3.1.

Concluons la démonstration du théorème 6.3.1. En utilisant la relation (6.2), il vient

$$< v_n^1 v_n^2, g >= \int_{\mathbf{R}^5} G(t,x,y) d\mu_n(t,x,y).$$

Comme

$$\mu_n = \omega_n(t) \otimes \omega_n(t) \otimes dt,$$

on a

$$|\mu_n| = |\omega_n(t)| \otimes |\omega_n(t)| \otimes dt.$$

Vu les hypothèses faites ici, il est clair que $d|\mu_n|$ tend faiblement vers

$$\nu = \omega_t^+ \otimes \omega_t^+ \otimes dt.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier que $\mathbf{D}$ est un ensemble ν-négligeable. Pour cela, observons que

$$\int_{\mathbf{D}} d\nu = \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2} \Big(\int_{\{x\}} d\omega_t^+(y)\Big) d\omega_t^+(x) dt.$$

Le fait que ω^+ soit diffuse assure, d'après le lemme 6.3.1, que

$$\lim_{n\to\infty} < v_n^1 v_n^2, g >= \int G(t,x,y) d\omega_t(x) d\omega_t(y) dt. \tag{6.10}$$

Reste à démontrer que le terme de droite de l'équation ci-dessus est égal à $< v^1 v^2, g >$. On régularise v par convolution par une fonction indéfiniment différentiable à support compact, positive. On obtient ainsi une suite $(\widetilde{v}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge fortement dans E_m.

Comme la mesure $|\omega|$ est majorée par une mesure diffuse ω^+, il en est de même des régularisées. D'où

$$\lim_{n\to\infty} < \widetilde{v}_n^1 \widetilde{v}_n^2, g >= \int G(t,x,y) d\omega_t(x) d\omega_t(y) dt.$$

La convergence forte de la suite $(\widetilde{v}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans E_m assure clairement la convergence forte des suites $(\widetilde{v}_n^i \widetilde{v}_n^j)_{n\in\mathbf{N}}$ dans L^1+L^2. Donc, d'après (6.10), le théorème 6.3.1 est démontré.

La seule chose restant à faire pour démontrer le théorème 6.1.1 est de démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie les hypothèses du théorème 6.3.1. Pour cela, démontrons que l'ensemble où la fonction G de la section précédente n'est pas continue, est négligeable pour la mesure limite. L'hypothèse d'appartenance du champ de vecteurs v_0 à un espace du type E_m assure que son tourbillon ω_0 appartient bien à l'espace $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$. En voici la traduction en termes de théorie de la mesure.

Lemme 6.3.2 *Soit μ une mesure bornée sur $\mathbf{R}^2$ appartenant à l'espace $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$. La mesure μ est alors diffuse, c'est-à-dire que, pour tout point x de $\mathbf{R}^2$, $\mu(\{x\}) = 0$.*

Soit g une fonction indéfiniment différentiable à support compact, positive, telle que $g(0) = 1$. On pose, pour λ strictement positif,

$$g_{\lambda,x}(y) = g\Big(\frac{x-y}{\lambda}\Big).$$

Il est clair que $\|g_{\lambda,x}\|_{L^2} = \lambda\|g\|_{L^2}$. De plus, pour toute fonction θ indéfiniment différentiable à support compact, on a

$$\begin{aligned} < \partial_i g_{\lambda,x}, \theta > &= \lambda \int \partial_i g(z)\theta(x - \lambda z)dz \\ &\leq \lambda\|\partial_i g\|_{L^1}\|\theta\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Ainsi donc, g_λ tend faiblement vers 0 dans $H^1(\mathbf{R}^2)$ lorsque λ tend vers 0. Comme μ appartient à l'espace $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$, il en résulte que

$$\lim_{\lambda\to 0} < \mu, g_\lambda >= 0.$$

Or, pour tout y appartenant à $\mathbf{R}^2$, on a

$$\lim_{\lambda\to 0} g_{\lambda,x} = \mathbf{1}_{\{x\}}(y).$$

De plus, la mesure μ est bornée. D'après la théorème de Lebesgue, il en résulte que

$$\mu(\{x\}) = \lim_{\lambda\to 0} < g_{\lambda,x}, \mu > .$$

D'où le lemme.

Les hypothèses du théorème 6.1.1 assurent que

$$\omega_0 = f_0^+ - f_0^- + \omega_0^s \quad \text{où} \quad f_0^\pm \in L^1,\ f_0^\pm \geq 0 \text{ et } \omega_0^s \geq 0.$$

D'après la relation (1.12) de conservation le long des lignes de flot et d'après la relation (6.1), on a

$$\begin{aligned} \omega_n(t,x) &= f_n^+(t,x) - f_n^-(t,x) + \omega_n^s(t,x) \\ \text{avec} \quad f_n^\pm(t,x) &= (\rho_n \star f_0^\pm)(\psi_n^{-1}(t,x)) \\ \text{et} \quad \omega_n^s(t,x) &= (\rho_n \star \omega_0^s)(\psi_n^{-1}(t,x)). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(\omega_n^s)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers une mesure notée ω^s et que les suites $(f_n^\pm)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent faiblement vers les mesures bornées $\mu^\pm$. Le point important est l'existence de fonctions $f^\pm$ de L^1 telles que $f_n^\pm$ tende vers $f^\pm$, faiblement dans L^1. Etant donné un ϵ strictement positif, on cherche un α strictement positif tel que l'on ait

$$\forall\varphi \in C_0^0(\mathbf{R}^3;\mathbf{R}^+) \ \int \varphi dtdx \leq \alpha \Rightarrow \int \varphi d\mu^\pm \leq \epsilon. \tag{6.12}$$

Les flots $\psi_n(t)$ conservant la mesure, on a

$$\int \varphi dtdx = \int \varphi(t, \psi_n(t,x))dtdx.$$

Pour démontrer l'assertion (6.12), il suffit d'établir que, pour toute fonction φ de $C_0^0(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^+)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int f_0^{\pm}(x)\varphi(t, \psi_n(t,x))dtdx = \lim_{n\to\infty} \int \varphi(t,x) f_n^{\pm}(t,x)dtdx.$$

Par définition, on sait que

$$f_n^{\pm}(t,x) = (\rho_n \star f_0^{\pm})(\psi_n^{-1}(t,x)).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\int \varphi(t,x) f_n^{\pm}(t,x)dtdx = \int f_0^{\pm}(\psi_n^{-1}(t,x))\varphi(t,x)dtdx \\ + \int (\rho_n \star f_0^{\pm} - f_0^{\pm})(\psi_n^{-1}(t,x))\varphi(t,x)dtdx.\end{aligned}$$

À nouveau d'après la conservation de la mesure, on a, pour toute fonction φ appartenant à $C_0^0(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^+)$,

$$\left|\int \varphi(t,x) f_n^{\pm}(t,x)dtdx - \int f_0^{\pm}(x)\varphi(t,\psi_n(t,x))dtdx\right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}\|\rho_n \star f^{\pm} - f_0^{\pm}\|_{L^1}.$$

Le prédicat (6.12) est ainsi démontré. D'après le théorème de Lebesgue-Nikodym (voir par exemple [35]), on peut affirmer l'existence de deux fonctions $f^{\pm}$ appartenant $L^\infty(\mathbf{R}; L^1(\mathbf{R}^2))$ telles que

$$f^{\pm}dxdt = d\mu^{\pm}.$$

Soit $(\omega_n^+)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par

$$\omega_n^+ = f_n^+ + f_n^- + \omega_n^s.$$

Comme par hypothèse, ω_n^s est positive, il est clair que $|\omega_n| \leq \omega_n^+$. D'après (6.11) et (6.12), on a, au sens de la convergence faible,

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n^+ = f^+ + f^- + \omega^s.$$

Or, nous savons que $\omega_n = f_n^+ - f_n^- + \omega_n^s$. Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = f^+ - f^- + \omega^s.$$

Mais, la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant bornée dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; H^{-1})$, la mesure ω appartient à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; H^{-1})$. Les fonctions $f^{\pm}$ étant localement intégrables, la mesure ω^s, et ainsi la mesure ω^+, sont diffuses.

Les hypothèses du théorème 6.3.1 de passage à la limite sont donc satisfaites. La démonstration du théorème 6.1.1 est ainsi terminée.

6.4 Références et remarques

Le problème originel des nappes de tourbillon est le cas particulier où le tourbillon initial est la mesure de surface d'une courbe régulière. Dans [49] et [50], R. Krasny expose des expériences numériques qui mettent en évidence le rôle du signe de la densité portée par une courbe régulière dans le comportement du tourbillon. En s'appuyant sur ces travaux, A. Majda conjecture dans [54] l'existence d'une solution pour une donnée initiale à tourbillon positif.

Les modifications par rapport à la démonstration originale de J.-M. Delort, exposée dans [34], sont essentiellement dans [44]. Une étape importante vers ce résultat avait été faite par R. Di Perna et A. Majda dans [37]. Des résultats décrivant l'allure des lieux où l'accumulation de tourbillon rend le passage à la limite impossible sont établis dans [2].

On peut citer aussi L. Evans et S. Müller qui, dans [39], précisent le théorème de J.-M. Delort en utilisant les espaces de Hardy dans le cas où le tourbillon est positif. Toujours dans ce cas, A. Majda donne, dans [55], une démonstration un peu différente du théorème de J.-M. Delort. Cette preuve est basée sur une estimation de la fonction maximale du tourbillon.

Chapitre 7

Le front d'onde et le produit

7.1 Présentation du front d'onde

Le concept de front d'onde d'une distribution est fondamental dans l'étude des propriétés de régularité des solutions des équations aux dérivées partielles, qu'elles soient linéaires ou non. Voici ce dont il s'agit. Soit u une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$ et x_0 un point de Ω. On considère une fonction f indéfiniment différentiable, nulle en dehors d'un petit voisinage de x_0 inclus dans Ω, et telle que $f(x_0) \neq 0$. Il est bien connu que la transformée de Fourier de fu, notée $\widehat{fu}$ est une fonction indéfiniment différentiable majorée en valeur absolue par un polynôme. Il est tout aussi connu que la régularité de fu, c'est-à-dire la régularité locale de u, est liée à des propriétés de décroissance de la fonction $\widehat{fu}$. Par exemple, si la fonction $\widehat{fu}$ est à décroissance rapide, c'est-à-dire

$$\forall N\,,\ \exists C \,/\, |\widehat{fu}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-N},$$

alors, la fonction fu est indéfiniment différentiable ; ou bien, si $\widehat{fu}$ est intégrable, alors fu est continue ou encore, si

$$\widehat{fu} \in L^2(\mathbf{R}^d, (1+|\xi|)^{2s} d\xi),$$

le lecteur sait que cela signifie que fu appartient à l'espace de Sobolev H^s. La fonction u est alors dite localement H^s près de x_0.

Le point commun à ces trois exemples est que la condition de décroissance exigée sur $\widehat{fu}$ est isotrope. Le concept de front d'onde va briser cette isotropie, ce qui amène aux définitions suivantes.

Tout d'abord, nous allons définir la notion d'ouverts et de fermés coniques de l'espace $\mathbf{R}^d$.

Définition 7.1.1 *Une partie Γ de $\mathbf{R}^d$ est appelée ouvert (resp. fermé) conique si et seulement si*

- *l'ensemble $\Gamma \cap \mathbf{S}^{d-1}$ est un ouvert (resp. un fermé) de $\mathbf{S}^{d-1}$,*
- *pour tout réel strictement positif λ, $\lambda \cdot \Gamma$ est inclus dans Γ.*

Maintenant, nous pouvons donner la définition du front d'onde d'une distribution.

Définition 7.1.2 *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et u une distribution sur Ω, on considère un couple (x_0, ξ_0) de $\Omega \times \mathbf{R}^d \backslash \{0\}$. On dira que (x_0, ξ_0) n'appartient pas au front d'onde de u, noté $WF(u)$ (pour Wave Front set en anglais) si et seulement si il existe une fonction f indéfiniment différentiable dont le support est un compact de Ω, f ne s'annullant pas au point x_0, et un ouvert conique Γ contenant ξ_0 tels que :*

$$\forall N \in \mathbf{N}\,,\ \exists C > 0 \,/\, \forall \xi \in \Gamma\,,\ |\widehat{fu}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-N}.$$

On peut, d'une manière analogue, définir la notion de front d'onde H^s.

Définition 7.1.3 *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et u une distribution sur Ω, on considère un couple (x_0, ξ_0) de $\Omega \times \mathbf{R}^d \backslash \{0\}$. On dira que (x_0, ξ_0) n'appartient pas au front d'onde H^s de u, noté $WF_{H^s}(u)$, si et seulement si il existe une fonction f indéfiniment différentiable dont le support est un compact de Ω, f ne s'annullant pas au point x_0, et un ouvert conique Γ contenant ξ_0 tels que :*

$$\widehat{fu} \in L^2(\Gamma, (1+|\xi|^2)^s d\xi).$$

Le front d'onde ayant pour but de décrire finement les propriétés de régularité locale des distributions, il importe de vérifier la stabilité du front d'onde d'une distribution après multiplication par une fonction indéfiniment différentiable. Cette vérification découle du lemme suivant.

Lemme 7.1.1 *Soient Γ un ouvert conique de $\mathbf{R}^d$, s et N_0 deux nombres réels et u une distribution appartenant à H^{-N_0}. Supposons que, pour tout fermé conique Γ' inclus dans Γ, on ait*

$$\forall N \in \mathbf{N}\,,\ \exists C > 0 \,/\, \forall \xi \in \Gamma'\,,\ |\widehat{u}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-N}$$
$$(\textit{resp. } \widehat{u} \in L^2(\Gamma', (1+|\xi|^2)^s d\xi)).$$

Alors, pour toute fonction f indéfiniment différentiable à support compact et pour tout fermé conique Γ' inclus dans Γ, on a

$$\forall N \in \mathbf{N}\,,\ \exists C > 0 \,/\, \forall \xi \in \Gamma'\,,\ |\widehat{fu}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-N}$$
$$(\textit{resp. } \widehat{fu} \in L^2(\Gamma', (1+|\xi|^2)^s d\xi)).$$

Pour démontrer ce lemme, considérons un quelconque fermé conique Γ' inclus dans Γ. Il existe un réel strictement positif ϵ (que l'on peut toujours supposer strictement inférieur à 1) et un fermé conique Γ'', inclus dans Γ, tel que

$$|\xi - \eta| \leq \epsilon|\eta| \quad \text{et} \quad \xi \in \Gamma' \Rightarrow \eta \in \Gamma''. \tag{7.1}$$

De plus, f est indéfiniment différentiable à support compact. Il en résulte que

$$\forall N \in \mathbf{N}\,,\ \exists C > 0 \,/\, \forall \xi \in \mathbf{R}^d\,,\ |\widehat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-N}.$$

Enfin, u appartenant à H^{-N_0}, il existe une fonction g de l'espace L^2 telle que

$$|\widehat{u}(\eta)| \leq C(1+|\eta|)^{N_0} g(\eta).$$

On en déduit que, pour tout M et tout ξ de Γ',

$$\begin{aligned}\widehat{fu}(\xi) &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbf{R}^d}\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{u}(\eta)d\eta\\ &\leq C_{N,\epsilon}\int_{\{\eta/\epsilon|\eta|\leq|\xi-\eta|\}}(1+|\xi-\eta|)^{-M+N_0}g(\eta)d\eta\\ &\qquad + \int_{\{\eta\,/\,|\xi-\eta|\leq\epsilon|\eta|\}}(1+|\xi-\eta|)^{-M}|\widehat{u}(\eta)|d\eta. \end{aligned}\tag{7.2}$$

Remarquons maintenant que

$$|\xi-\eta|\leq\epsilon|\eta| \Rightarrow (1-\epsilon)|\eta|\leq|\xi|\leq(1+\epsilon)|\eta|. \tag{7.3}$$

D'où il vient que

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^N|\widehat{fu}(\xi)| \leq C_{N,\epsilon}&\int_{\{\eta/\epsilon|\eta|\leq|\xi-\eta|\}}(1+|\xi-\eta|)^{-M+N+N_0}g(\eta)d\eta\\ &+\int_{\Gamma''}(1+|\xi-\eta|)^{-M}(1+|\eta|)^N|\widehat{u}(\eta)|d\eta.\end{aligned}$$

En prenant $M = N+N_0+d+1$, on a, pour tout ξ de Γ',

$$(1+|\xi|)^N|\widehat{fu}(\xi)|\leq C_{N,\epsilon}.$$

La démonstration relative au front d'onde H^s est très proche. En effet, comme on a

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\leq 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}(1+|\eta|^2)^{s/2},$$

on peut écrire, d'après l'inégalité (7.2),

$$\begin{aligned}F_s(\xi) &\stackrel{\text{déf}}{=} (1+|\xi|^2)^{s/2}|\widehat{fu}(\xi)|\\ &\leq C_{N,\epsilon}(1+|\xi|^2)^{s/2}\biggl(\int_{\eta\in\Gamma''}(1+|\xi-\eta|)^{-M}|\widehat{u}(\eta)|d\eta\\ &\qquad+\int_{\{\eta\,/\,\eta\leq\frac{|\xi-\eta|}{\epsilon}\}}(1+|\xi-\eta|)^{-M+N_0'}(1+|\eta|^2)^{-N_0'/2}|\widehat{u}(\eta)|d\eta\biggr)\\ &\leq C_{s,N,\epsilon}\int_{\mathbf{R}^d}(1+|\xi-\eta|)^{-M+N_0'+s}g(\eta)d\eta\\ &\qquad+C_{s,N,\epsilon}\int_{\eta\in\Gamma''}(1+|\xi-\eta|)^{-M+|s|}(1+\eta^2)^{s/2}|\widehat{u}(\eta)|d\eta.\end{aligned}\tag{7.4}$$

On choisit alors $M = n+1+|s|+N_0$; la convolution par un élément de L^1 étant un opérateur continu de L^2 dans L^2, on a alors

$$\|\widehat{fu}\|_{L^2(\Gamma',(1+|\xi|^2)^s d\xi)}\leq C|u|_{-N_0}+C\|\widehat{u}\|_{L^2(\Gamma'',(1+|\xi|^2)^s d\xi)}.$$

D'où la proposition.

De ce lemme, on déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 7.1.1 *Pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$, pour toute distribution u sur Ω, pour tout réel s et toute fonction indéfiniment différentiable f sur Ω, on a*

$$WF(fu)\subset WF(u) \quad \text{et} \quad WF_s(fu)\subset WF_s(u).$$

On peut aussi déduire de ce lemme une définition légèrement différente du front d'onde. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 7.1.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et u une distribution sur Ω. Considérons alors un couple (x_0, ξ_0) de $\Omega \times (\mathbf{R}^d \backslash \{0\})$. Le point (x_0, ξ_0) n'appartient pas au front d'onde de u si et seulement si il existe un voisinage ω de x_0 et un ouvert conique Γ contenant ξ_0 tel que, pour toute fonction f indéfiniment différentiable à support compact et nulle en dehors de ω, on ait,*

$$\forall N\,,\ \exists C\ \forall \xi \in \Gamma\,,\ |\widehat{fu}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-N}.$$

Supposons que (x_0, ξ_0) n'appartienne pas au front d'onde de u. Soit f satisfaisant la condition de la définition 7.1.2. Considérons alors un ouvert ω contenant x_0 tel que f ne s'annulle pas sur ω et une fonction $\widetilde{f}$ indéfiniment différentiable à support compact nulle en dehors de ω. Il est clair que

$$\widetilde{f}u = \frac{\widetilde{f}}{f} fu.$$

Or, la fonction $\widetilde{f}/f$ est une fonction indéfiniment différentiable. Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente pour obtenir la proposition, l'implication réciproque étant triviale.

Il faut également de vérifier que, si, pour une distribution u et un point x_0 de Ω, il n'y a pas de directions singulières ξ_0, alors u est une fonction indéfiniment différentiable près de x_0.

Corollaire 7.1.2 *Soient u une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$ et x_0 un point de Ω. Si, pour tout ξ de $\mathbf{R}^d \backslash \{0\}$, le couple (x_0, ξ) n'appartient pas au front d'onde de u, alors u est indéfiniment différentiable au voisinage de x_0.*

D'après la proposition 7.1.1, on sait que, pour tout ξ de la sphère $\mathbf{S}^{d-1}$, il existe un ouvert conique Γ_ξ contenant ξ et un ouvert ω_ξ de $\mathbf{R}^d$ contenant x_0 tel que, pour toute fonction ϕ indéfiniment différentiable et supportée dans ω_ξ, on ait

$$\forall N,\ \exists C/\,\forall \eta \in \Gamma_\xi\,,\ |\widehat{\phi u}(\eta)| \leq C(1+|\eta|)^{-N}.$$

La sphère $\mathbf{S}^{d-1}$ étant compacte, il existe une famille finie d'ouverts coniques $(\Gamma_i)_{i\in\{1,\ldots,M\}}$ recouvrant $\mathbf{R}^d \backslash \{0\}$ et une famille finie d'ouverts $(\omega_i)_{i\in\{1,\ldots,M\}}$ telles que, pour toute fonction f indéfiniment différentiable et supportée dans ω_i, on ait

$$\forall N,\ \exists C/\,\forall \eta \in \Gamma_i\,,\ |\widehat{fu}(\eta)| \leq C(1+|\eta|)^{-N}.$$

On en déduit que, pour toute fonction f indéfiniment différentiable et supportée dans $\omega = \cap_{i=1}^M \omega_i$, on a

$$\forall N,\ \exists C/\,\forall \eta \in \mathbf{R}^d \backslash \{0\}\,,\ |\widehat{fu}(\eta)| \leq C(1+|\eta|)^{-N},$$

ce qui signifie exactement que u est indéfiniment différentiable près de x_0.

Nous allons donner une troisième définition du front d'onde de type Sobolev, définition qui a l'avantage d'être généralisable à d'autres espaces que l'espace de Sobolev.

Proposition 7.1.2 *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et u une distribution sur Ω. Considèrons alors un couple (x_0, ξ_0) de $\Omega \times (\mathbf{R}^d \backslash \{0\})$. Le point (x_0, ξ_0) n'appartient pas au front d'onde H^s de u si et seulement si il existe deux distributions u_1 et u_2 sur $\mathbf{R}^d$ telles que*

$$u = u_1 + u_2 \quad \textit{près de } x_0\,, \ u \in H^s \quad \textit{et} \quad (x_0, \xi_0) \notin WF(u_2).$$

Pour démontrer cela, considérons une fonction f indéfiniment différentiable et valant identiquement 1 près de x_0 ainsi qu'un ouvert conique Γ contenant ξ_0 et tels que l'on ait

$$\widehat{fu} \in L^2(\Gamma, (1 + |\xi|)^{2s} d\xi).$$

On pose alors

$$u_1 = \mathbf{1}_\Gamma(D)(fu) \quad \text{et} \quad u_2 = \mathbf{1}_{\Gamma^c}(D)(fu) + (1-f)u.$$

Il est clair que $u_1 + u_2 = fu$, donc que $u_1 + u_2 = u$ au voisinage de x_0. Il est évident que u_1 appartient à l'espace H^s. Enfin, on déduit du lemme 7.1.1 que (x_0, ξ_0) n'appartient pas au front d'onde de u, d'où la proposition.

On peut ainsi définir d'autres notions de front d'onde, par exemple une notion de front d'onde Hölder.

Définition 7.1.4 *Soient r un réel, u une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^d$ et (x_0, ξ_0) un élément de $\Omega \times \mathbf{R}^d$. On dit que (x_0, ξ_0) n'appartient pas au front d'onde Hölder de u si et seulement si il existe deux distributions u_1 et u_2 telle que l'on ait*

$$u = u_1 + u_2 \quad \textit{près de } x_0 \quad \textit{avec} \quad u_1 \in C^r \quad \textit{et} \quad (x_0, \xi_0) \notin WF(u_2).$$

Nous allons maintenant étudier la stabilité du front d'onde H^s par troncature en fréquences. Plus précisement, nous allons démontrer le lemme suivant, qui nous sera utile dans la section suivante.

Lemme 7.1.2 *Soit u une distribution à support compact dans $\mathbf{R}^d$ telle que (x_0, ξ_0) n'appartienne pas au front d'onde de u. Il existe alors un ouvert ω contenant x_0 et un ouvert conique Γ contenant ξ_0 tel que, pour toute fonction f indéfiniment différentiable et nulle en dehors de ω, on ait*

$$\lim_{q \to \infty} \mathcal{F}(f S_q(u)) = \widehat{fu} \quad \textit{dans} \quad L^2(\Gamma, (1 + |\xi|^2)^s d\xi).$$

Pour démontrer cela, considérons un ouvert ω et un ouvert conique Γ comme dans le corollaire précédent. Une fonction f indéfiniment différentiable supportée dans ω étant donnée, considérons une fonction $\widetilde{f}$ indéfiniment différentiable, supportée dans ω et valant identiquement 1 près du support de f. On se donne alors un fermé conique Γ'' et un réel strictement positif ϵ vérifiant (7.1). D'après l'inégalité (7.4) appliquée à la fonction $(\mathrm{Id} - S_q)(\widetilde{f}u)$, il vient

$$\begin{aligned} F_q(\xi) &\stackrel{\text{déf}}{=} (1 + |\xi|^2)^{s/2} |\mathcal{F}(f(\mathrm{Id} - S_q)\widetilde{f}u)(\xi)| \\ &\leq C_{s,N,\epsilon} \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi - \eta|)^{-M + N_0' + s} (1 + |\eta|^2)^{-N_0'} \\ &\qquad\qquad \times (1 - \chi(2^{-q}\eta)) |\mathcal{F}(\widetilde{f}u)(\eta)| d\eta \\ &\quad + C_{s,N,\epsilon} \int_{\eta \in \Gamma''} (1 + |\xi - \eta|)^{-M + |s|} (1 + \eta^2)^{s/2} \\ &\qquad\qquad \times (1 - \chi(2^{-q}\eta)) |\mathcal{F}(\widetilde{f}u)(\eta)| d\eta. \end{aligned}$$

Le théorème de la convergence dominée ainsi que l'appartenance de $\tilde{f}u$ à H^{-N_0} entraîne que

$$\lim_{q\to\infty} \mathcal{F}(fS_q(\tilde{f}u)) = \widehat{\tilde{f}u} \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma', (1+|\xi|^2)^s d\xi).$$

Pour conclure la démonstration du lemme, démontrons que, pour tout réel s,

$$\lim_{q\to\infty} fS_q((1-\tilde{f})u) = 0 \quad \text{dans} \quad H^s.$$

Pour ce faire, posons $(1-\tilde{f})u = g$. Considérons alors une fonction indéfiniment différentiable ρ, nulle pour tout x tel que $2|x| \geq d(\text{Supp } f, \text{Supp } g)$ et valant 1 près de 0. On a, avec les notations définies page 24,

$$\begin{aligned} fS_q g &= f(\tilde{h}(2^q\cdot) \star g) \\ &= f(\tilde{h}(2^q\cdot)(1-\rho) \star g). \end{aligned}$$

Pour tout multientier α, on a

$$\partial^\alpha\Big(f(\tilde{h}(2^q\cdot)(1-\rho)) \star g\Big) = \sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta(\tilde{h}(2^q\cdot)(1-\rho)) \star g.$$

De plus, on a

$$\|\partial^\beta(\tilde{h}(2^q\cdot)(1-\rho)) \star g\|_{L^\infty} \leq |g|_{-N_0} |(\tilde{h}(2^q\cdot)(1-\rho))|_{|\alpha|+N_0}.$$

Or, pour tout multientier β, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\partial^\beta(\tilde{h}(2^q\cdot)(1-\rho))\|_{L^2}^2 &\leq C \sup_{\gamma\leq\beta} 2^{q(|\beta-\gamma|+d)} \\ &\qquad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\partial^{\beta-\gamma}\tilde{h}(2^q y)|^2 |\partial^\gamma(1-\rho)(y)|^2 dy\right) \\ &\leq C \sup_{\gamma\leq\beta} 2^{q(|\beta-\gamma|+d-M)} \\ &\qquad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} 2^{qM}|y|^M |\partial^{\beta-\gamma}\tilde{h}(2^q y)|^2 \frac{|\partial^\gamma(1-\rho)(y)|^2}{|y|^M} dy\right) \\ &\leq C_{\beta,M} 2^{-qM}. \end{aligned}$$

Il en résulte donc que

$$\|\partial^\beta(\tilde{h}(2^q\cdot)(1-\rho)) \star g\|_{L^\infty} \leq C2^{-qM},$$

ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Les arguments ci-dessus seront utilisés de manière plus approfondie au chapitre 9, lorsque nous étudierons dans quelle mesure la théorie de Littlewood-Paley a un caractère local.

7.2 Quand peut-on définir un produit?

Le but de cette section est de trouver des conditions sur le front d'onde H^s de deux distributions pour que l'on puisse définir de manière raisonnable leur produit. Pour cela, définissons l'ensemble suivant.

Définition 7.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$; on désignera par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des couples (u,v) de distributions tels que, pour tout couple (x,ξ) de $\Omega \times \mathbf{R}^d \backslash \{0\}$, il existe un réel s tel que*

$$(x,\xi) \notin WF_{H^s}(u) \quad \text{et} \quad (x,-\xi) \notin WF_{H^{-s}}(v).$$

Nous allons démontrer que, sur cet ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$, on peut définir une notion de produit prolongeant la notion usuelle. Voici l'énoncé précis.

Théorème 7.2.1 *Il existe une application bilinéaire π de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que, si u et v sont deux fonctions indéfiniment différentiables, on ait*

$$\pi(u,v)(x) = u(x)v(x).$$

De plus, l'application π est continue (et donc unique) en sens suivant :

$$\forall (\alpha,\beta) \in (C_0^\infty(\Omega))^2 \quad \lim_{\substack{q\to\infty \\ q'\to\infty}} \pi(S_q(\alpha u), S_{q'}(\beta v)) = \pi(\alpha u, \beta v).$$

La démonstration de ce théorème mélange l'échantillonage en fréquences (la théorie de Littlewood-Paley) et la localisation conique issue du concept de front d'onde. Le lecteur se souvient très certainement qu'au chapitre 2, nous avions décomposé le produit de deux distributions à support compact en la somme de trois termes. Rappelons ici la formule (2.17) de décomposition de Bony disant que

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v).$$

Comme nous l'avions vu alors, les deux parties de type paraproduit, c'est-à-dire $T_u v$ et $T_v u$ sont toujours définies. Par contre, il n'en est pas de même pour le terme dit de reste $R(u,v)$. Néammoins, lorsque les fréquences de u et de v qui sont de taille équivalente ne sont localisées pas dans des directions opposées, leur interaction n'empêche pas la définition du terme de reste donc pas celle du produit. Précisons ceci grâce au lemme suivant.

Lemme 7.2.1 *Soient Γ et Γ' deux fermés coniques tels que Γ et $-\Gamma'$ soient d'intersection vide. Pour tout couple de réels (s,t), il existe alors une constante C telle que*

$$|R(\mathbf{1}_\Gamma(D)u, \mathbf{1}_{\Gamma'}(D)v)|_{s+t-\frac{d}{2}} \leq C|u|_s|v|_t.$$

En effet, par définition de l'opérateur de reste, on a

$$R(a,b) = \sum_{j=-1}^{1} \Delta_{q-j} a \Delta_q b.$$

Définissons maintenant l'application Σ par

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{ccc} (\Gamma \cap \cup_{j=-1}^{1} 2^{-j}\mathcal{C}) \times (\Gamma' \cap \mathcal{C}) & \rightarrow & \mathbf{R}^d \\ (\xi, \eta) & \mapsto & \xi + \eta. \end{array} \right.$$

Cette application Σ est continue et, par hypothèse, ne s'annulle pas. Vu que l'ensemble $(\Gamma \cap \cup_{j=-1}^{1} \mathcal{C}) \times (\Gamma' \cap \mathcal{C})$ est compact, il existe une constante C telle que l'on ait

$$\forall (\xi, \eta) \in (\Gamma \cap \cup_{j=-1}^{1} 2^{-j}\mathcal{C}) \times (\Gamma' \cap \mathcal{C})\,,\ C^{-1} \leq |\xi + \eta| \leq C.$$

Par homogénéité, il en résulte que

$$\forall (\xi, \eta) \in (\Gamma \cap \cup_{j=-1}^{1} 2^{q-j}\mathcal{C}) \times (\Gamma' \cap 2^q\mathcal{C})\,, \quad 2^q C^{-1} \leq |\xi + \eta| \leq C 2^q.$$

Ainsi, le support de la transformée de Fourier de la distribution

$$\sum_{j=-1}^{1} (\Delta_{q-j} \mathbf{1}_\Gamma(D) u)(\Delta_q \mathbf{1}_{\Gamma'}(D) v)$$

est inclus dans la couronne $2^q\widetilde{\mathcal{C}}$, $\widetilde{\mathcal{C}}$ désignant la couronne de centre 0, de rayon C^{-1} et de grand rayon C. De plus, on a

$$\|(\Delta_{q-j} \mathbf{1}_\Gamma(D) u)(\Delta_q \mathbf{1}_{\Gamma'}(D) v)\|_{L^2} \leq c_q 2^{q(s+t-\frac{d}{2})} |u|_s |v|_t.$$

L'application du théorème 2.2.1 conclut la démonstration de ce lemme.

Revenons à la démonstration du théorème. Il est maintenant clair que le seul obstacle à la définition du reste réside dans le manque de régularité microlocale dans des directions opposées. L'hypothèse contenue dans la définition de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ assure la définition du produit dans ce cas défavorable. En effet, le théorème 2.4.1 affirme que l'opérateur de reste R envoie continûment $H^s \times H^{-s}$ dans $H^{-\epsilon-d/2}$ pour tout ϵ strictement positif.

Formalisons tout cela. Soit $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un recouvrement localement fini de Ω. On considère alors deux suites de fonctions indéfiniment différentiables $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\widetilde{\theta}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que l'on ait

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \theta_n^2 = 1, \tag{7.5}$$

$$\text{Supp } \widetilde{\theta}_n \subset \omega_n \quad \text{et} \quad \widetilde{\theta}_n \equiv 1 \quad \text{près de Supp } \theta_n. \tag{7.6}$$

Une suite d'entiers $(N_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant donnée, on considère également un recouvrement ouvert $(\Gamma_{n,m} \times \widetilde{\Gamma}_{n,m})_{1\leq m\leq N_n}$ de $\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{S}^{d-1}$ tel que

$$\Gamma_{n,m} \cap -\widetilde{\Gamma}_{n,m} \neq \emptyset \Rightarrow \Gamma_{n,m} = -\widetilde{\Gamma}_{n,m}. \tag{7.7}$$

On considère alors, pour tout entier n, une partition de l'unité indéfiniment différentiable $(\Theta_{n,m} \otimes \widetilde{\Theta}_{n,m})_{n,\,1\leq m\leq N_n}$ subordonnée à $(\Gamma_{n,m} \times \widetilde{\Gamma}_{n,m})_{1\leq m\leq N_n}$. On se donne enfin une suite de réels $(s_{n,m})_{n\in\mathbf{N},1\leq m\leq N_n}$.

Considérons maintenant deux distributions u et v sur Ω telles que, pour tout couple d'entiers (n,m) vérifiant $m \leq N_n$, on ait

$$\Gamma_{n,m} = -\widetilde{\Gamma}_{n,m} \;\Rightarrow\; \Theta_{n,m}\widehat{\theta_n u} \in L^2(\mathbf{R}^d, (1+|\xi|^2)^{s_{n,m}} d\xi) \text{ et } \widetilde{\Theta}_{n,m}\widehat{\theta_n v} \in L^2(\mathbf{R}^d, (1+|\xi|^2)^{-s_{n,m}} d\xi). \tag{7.8}$$

Pour deux telles distributions u et v, on peut définir l'opérateur π par

$$\pi(u,v) = \sum_{n\in\mathbf{N}} (\widetilde{\theta}_n T_{\theta_n u}\theta_n v + \widetilde{\theta}_n T_{\theta_n v}\theta_n u) + \sum_{\substack{n\in\mathbf{N} \\ m\in\{1,\ldots,N_n\}}} \widetilde{\theta}_n R(\Theta_{n,m}(D)(\theta_n u), \widetilde{\Theta}_{n,m}(D)(\theta_n v)) \tag{7.9}$$

Vérifions maintenant que l'opérateur π est bien défini. La somme ci-dessus est localement finie, donc il suffit de vérifier que chaque terme est bien défini. D'après le théorème 2.4.1, le terme

$$\widetilde{\theta}_n T_{\theta_n u}\theta_n v + \widetilde{\theta}_n T_{\theta_n v}\theta_n u$$

l'est toujours. Quant au terme de reste, on peut, lorsque $\Gamma_{n,m} \cap -\widetilde{\Gamma}_{n,m} = \emptyset$, appliquer le lemme 7.2.1. Sinon, d'après l'hypothèse (7.7) sur le recouvrement $(\Gamma_{n,m} \times \widetilde{\Gamma}_{n,m})_{1\leq m\leq N_n}$ et l'hypothèse (7.8) faite sur u et v, on sait qu'alors

$$\Theta_{n,m}(D)(\theta_n u) \in H^{s_{n,m}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\Theta}_{n,m}(D)(\theta_n u) \in H^{-s_{n,m}}.$$

Comme l'opérateur R envoie continûment $H^s \times H^{-s}$ dans $H^{-\epsilon-d/2}$, l'opérateur π donné par l'équation (7.9) est bien défini sur les couples de distributions vérifiant (7.8).

Il nous faut maintenant démontrer que, pour tout couple de distributions (u,v) de $\mathcal{P}(\Omega)$, il existe des suites $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\widetilde{\theta}_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(N_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\Gamma_{n,m} \times \widetilde{\Gamma}_{n,m})_{n\in\mathbf{N},\, m\in\{1,\ldots,N_n\}}$ et $(\Theta_{n,m} \otimes \widetilde{\Theta}_{n,m})_{n,\,1\leq m\leq N_n}$ telles que les relations (7.5)–(7.9) soient satisfaites. Considérons donc un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Comme le couple (u,v) appartient à $\mathcal{P}(\Omega)$, on peut, pour chaque point (x,ξ,η) de $\Omega \times \mathbf{R}^d\backslash\{0\} \times \mathbf{R}^d\backslash\{0\}$, se donner un ouvert $\omega_{x,\xi,\eta}$, deux ouverts coniques $\Gamma_{x,\xi,\eta}$ et $\widetilde{\Gamma}_{x,\xi,\eta}$ contenant respectivement ξ et η ainsi qu'un réel $s_{x,\xi}$ tels que

$$\begin{aligned} \xi \neq -\eta &\;\Rightarrow\; \Gamma_{x,\xi,\eta} \cap -\widetilde{\Gamma}_{x,\xi,\eta} = \emptyset, \\ \xi = -\eta &\;\Rightarrow\; \Gamma_{x,\xi,\eta} = -\widetilde{\Gamma}_{x,\xi,\eta}, \end{aligned}$$

et enfin, pour toute fonction f dans $C_0^\infty(\omega_{x,\xi,-\xi})$,

$$\widehat{fu} \in L^2(\Gamma_{x,\xi,-\xi}, (1+|\zeta|^2)^{s_{x,\xi}} d\zeta) \quad \text{et} \tag{7.10}$$

$$\widehat{fv} \in L^2(-\Gamma_{x,\xi,-\xi}, (1+|\zeta|^2)^{-s_{x,\xi}} d\zeta). \tag{7.11}$$

Pour tout point x de Ω, on a défini un recouvrement du produit $\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{S}^{d-1}$ par les ouverts $\Gamma_{x,\xi,\eta} \times \widetilde{\Gamma}_{x,\xi,\eta}$. On en extrait un sous-recouvrement fini $(\Gamma_{x,m} \times \widetilde{\Gamma}_{x,m})_{1\leq m\leq N_x}$. Notons $\omega_{x,m}$ l'ouvert correspondant. Posons alors

$$\omega_x = \bigcap\nolimits_{1\leq m\leq N_x, m/\Gamma_{x,m}=-\widetilde{\Gamma}_{x,m}} \omega_{x,m}.$$

Il est évident que la réunion des ω_x est l'ouvert Ω tout entier. On extrait donc de ce recouvrement un sous-recouvrement localement fini dénombrable que l'on note $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On désigne par $(N_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite d'entiers associée et par $(s_{n,m})_{(n,m)\in\mathbf{N}\times\{1,\ldots,N_n\}}$ la suite des indices de régularité associée. La suite $(\Gamma_{n,m}\times\widetilde{\Gamma}_{n,m})_{(n,m)\in\mathbf{N}\times\{1,\ldots,N_n\}}$ associée vérifie la relation (7.7) par construction. On se donne alors deux suites de fonctions $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\widetilde{\theta}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant (7.5) et (7.6) ainsi qu'une partition de l'unité indéfiniment différentiable $(\Theta_{n,m}\otimes\widetilde{\Theta}_{n,m})_{n,1\leq m\leq N_n}$ subordonnée à $(\Gamma_{n,m}\times\widetilde{\Gamma}_{n,m})_{1\leq m\leq N_n}$. D'après les relations (7.10) et (7.11), on a bien la relation (7.8). Considérons maintenant l'opérateur π donné par la relation (7.9). Il est bien défini pour le couple (u,v).

Remarquons tout d'abord que, lorsque les distributions u et v sont des fonctions localement H^σ, avec $\sigma>d/2$, l'opérateur π coïncide avec le produit numérique. En effet, pour tout entier n, on a

$$\sum_{m=1}^{N_n}\Theta_{n,m}(\xi)\widetilde{\Theta}_{n,m}(\eta)=1.$$

On en déduit que

$$\sum_{m=1}^{N_n}R(\Theta_{n,m}(D)(\theta_n u),\widetilde{\Theta}_{n,m}(D)(\theta_n v))=R(\theta_n u,\theta_n v).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\pi(u,v) &= \sum_n \widetilde{\theta}_n(T_{\theta_n u}\theta_n v+T_{\theta_n v}\theta_n u+R(\theta_n u,\theta_n v))\\ &= \sum_n \widetilde{\theta}_n\theta_n^2 uv\\ &= uv.\end{aligned}$$

Cependant, notre définition de l'opérateur π dépend d'un nombre inquiétant de choix arbitraires. Pour assurer la cohérence de sa définition, il convient de démontrer que le résultat $\pi(u,v)$ ne dépend pas des suites $(\omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(N_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(s_{n,m})_{n\in\mathbf{N},m\in\{1,\ldots,N_n\}}$, $(\Gamma_{n,m}\times\widetilde{\Gamma}_{n,m})_{n\in\mathbf{N},m\in\{1,\ldots,N_n\}}$, $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\widetilde{\theta}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\Theta_{n,m}\otimes\widetilde{\Theta}_{n,m})_{n,1\leq m\leq N_n}$ choisies. Pour ce faire, il suffit de démontrer que, pour tout couple (α,β) de fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ on a :

$$\lim_{\substack{q\to\infty\\ q'\to\infty}}\pi(S_q(\alpha u),S_{q'}(\beta v))=\pi(\alpha u,\beta v).$$

Les distributions αu et βv sont à support compact. On peut donc les supposer appartenant toutes deux au même espace de Sobolev H^t. La proposition 2.2.4 et le théorème 2.4.1 assurent que l'on a

$$\lim_{\substack{q\to\infty\\ q'\to\infty}}T_{\theta_n S_q(\alpha u)}\theta_n S_{q'}(\beta v)=T_{\theta_n(\alpha u)}(\theta_n\beta v)\quad\text{dans}\quad H^{\min\{t,2t-d/2\}}.\tag{7.12}$$

Le même argument, en remplaçant le théorème 2.4.1 par le lemme 7.2.1 est bien sûr valable pour démontrer que, lorsque $\Gamma_{n,m}\cap\widetilde{\Gamma}_{n,m}=\emptyset$, on a

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{q\to\infty\\ q'\to\infty}}R(\Theta_{n,m}(D)(\theta_n S_q(\alpha u)),\widetilde{\Theta}_{n,m}(D)(\theta_n S_{q'}(\beta v)))\\ &\qquad\qquad = R(\Theta_{n,m}(D)(\theta_n\alpha u),\widetilde{\Theta}_{n,m}(D)(\theta_n\beta v))\quad\text{dans}\quad H^{\min\{t,2t-d/2\}}.\end{aligned}$$

Dans le cas où $\Gamma_{n,m}=-\Gamma_{n,m}$, il suffit d'appliquer le lemme 7.1.2 pour conclure la démonstration de ce théorème.

7.3 Front d'onde analytique et Gevrey

Commençons par rappeller ce qu'est une fonction de classe de Gevrey d'indice s, s étant un réel supérieur ou égal à 1.

Définition 7.3.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et x_0 un point de Ω. On désigne par $G^s_{x_0}$ l'ensemble des fonctions u indéfiniment différentiables au voisinage de x_0 telles qu'il existe deux constantes η et C vérifiant*

$$\forall k \in \mathbf{N}, \sup_{|x-x_0|\leq\eta} \sup_{|\alpha|\leq k} |\partial^\alpha u(x)| \leq C^k (k!)^s. \tag{7.13}$$

Lorsque $s = 1$, le lecteur aura bien sûr reconnu la définition des fonctions analytiques au point x_0. Nous allons microlocaliser cette notion de régularité grâce à la définition suivante.

Définition 7.3.2 *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et u une distribution sur Ω. On appelle front d'onde Gevrey s (resp. analytique si $s = 1$) et l'on note $WF_{G^s}(u)$ (resp. $WF_a(u)$) le complémentaire de l'ensemble des points (x_0, ξ_0) vérifiant la propriété suivante :*

Il existe un voisinage V du point x_0, un voisinage conique Γ de ξ_0 et une suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$, bornée dans $\mathcal{E}'$, coïncidant avec u dans V, et telle qu'il existe une constante C vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N}\,,\ \forall \xi \in \Gamma\,,\ |\widehat{u}_k(\xi)| \leq C^k (k!)^s |\xi|^{-k}. \tag{7.14}$$

Nous allons vérifier l'analogue des propriétés du front d'onde C^∞. Pour cela, le lemme suivant nous sera très utile.

Lemme 7.3.1 *Soient K un compact de Ω et r un réel strictement positif. Il existe une constante C et une suite $(\chi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifiant, pour tout entier k,*

$$\forall j \,/\, j \leq k \ \sup_{|\alpha|=j} \|\partial^\alpha \chi_k\|_{L^\infty} \leq C(Ck)^j\,, \tag{7.15}$$

$$\chi_k \equiv 1 \textit{ sur } K \quad \textit{et} \quad \operatorname{Supp} \chi_k \subset \{x /\, d(x,K) \leq r\}.$$

Il s'agit essentiellement de construire une suite de fonctions réelles de la variable réelle $(\rho_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que l'on ait

$$\int_{\mathbf{R}} \rho_k(x)dx = 1\,,\ \rho_k \geq 0\,,\ \rho_k \equiv 1 \text{ près de } 0\,, \tag{7.16}$$

$$\operatorname{Supp}\ \rho_k \subset [-1,1] \quad \text{et} \quad \|\rho_k^{(j)}\|_{L^\infty} \leq (4k)^j. \tag{7.17}$$

Pour cela, définissons la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ en prenant pour u_k la puissance $k+1$ème, au sens de la convolution, de la moitié de la fonction caractéristique de l'intervalle $[-1,1]$. Il est clair que le support de u_k est contenu dans l'intervalle $[-(k+1), k+1]$ et que u_k est d'intégrale 1. De plus, pour tout entier j inférieur ou égal à k, on a

$$u_k^{(j)}(x) = 2^{-j} \overbrace{(\delta_{-1} - \delta_1) \star \cdots \star (\delta_{-1} - \delta_1)}^{j \text{ fois}} \star u_{k-j}.$$

Ainsi, pour tout $j \leq k$, on a

$$u_k^{(j)}(x) = \int_{-\infty}^{x} u_k^{(j+1)}(y)dy.$$

On trouve donc que

$$\begin{aligned} |u_k^{(j)}(x)| &\leq \int_{\mathbf{R}} u_{k-j-1}(x)dx \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Soit ρ une fonction indéfiniment différentiable, positive, d'intégrale 1, valant 1 sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, et nulle en dehors de $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$, on pose

$$\rho_k = u_k(4(k+1)\cdot) \star \rho.$$

Il est clair que ρ_k vérifie les conditions (7.16) et (7.17). On prend la liberté de désigner encore par ρ_k la fonction définie (sur $\mathbf{R}^d$) par $c_d\rho_k(|x|)$, la constante c_d étant choisie de manière à assurer que l'intégrale vaille 1. Il est alors immédiat de vérifier que

$$\chi_k = \left(\frac{4}{\epsilon}\right)^d \rho_k\left(\frac{4}{\epsilon}\cdot\right) \star \mathbf{1}_{K_{\epsilon/2}}$$

convient.

Nous allons maintenant démontrer un résultat de type "ellipticité microlocale" dans le cadre du front d'onde Gevrey. Il est bien connu que, si une distribution u vérifie, pour tout x_0 dans Ω, $Pu \in G^s_{x_0}$, où P est un opérateur différentiel

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha,$$

dont les coefficients $(a_\alpha)_{|\alpha|\leq m}$ sont de classe G^s, alors,

$$WF_{G^s}(u) \subset \{(x,\xi) \,/\, p_m(x,\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = 0\}.$$

Au chapitre suivant, nous démontrerons un résultat de ce type pour le système d'Euler. Sa démonstration est en partie basée sur le théorème ci-dessous, qui affirme qu'une suite d'estimations "stables" suffit pour obtenir des propriétés sur le front d'onde Gevrey.

Théorème 7.3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et $z(x,\xi) = -i\sum z^j(x)\xi_j$. On note $\mathcal{Z}$ l'opérateur défini par*

$$\mathcal{Z} = \sum z^j(x)\partial_j.$$

On considère une fonction u, continue sur Ω. On suppose qu'il existe une suite de champs de vecteurs indéfiniment différentiables $(z_n(x,\xi))_{n\in\mathbf{N}}$, convergeant vers z dans l'espace $L^\infty_{loc}(\Omega)$ et une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, indéfiniment différentiables, convergeant vers u dans $L^\infty_{loc}(\Omega)$ et vérifiant les propriétés ci-après.

Il existe un réel s supérieur ou égal à 1, tel que, pour tout compact K de Ω, il existe une constante C vérifiant, pour tout couple d'entiers (k,n),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}_n^k z_n^j\|_{L^\infty(K)} &\leq C^{k+1}(k!)^s, \\ \|\mathcal{Z}_n^k \operatorname{div} \mathcal{Z}_n\|_{L^\infty(K)} &\leq C^{k+1}(k!)^s, \\ \|\mathcal{Z}_n^k u_n\|_{L^\infty(K)} &\leq C^{k+1}(k!)^s. \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, on a

$$WF_{G^s}(u) \subset \{(x,\xi) \in \Omega \times (\mathbf{R}^d \backslash \{0\}) \,/\, z(x,\xi) = 0\}.$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons établir les inégalités assurant la localisation du front d'onde Gevrey uniformément en n. Soit (x_0,ξ_0) tel que $z(x_0,\xi_0) \neq 0$. Il existe un voisinage compact K de x_0, un voisinage conique Γ de ξ_0 et une constante C tels que, pour tout (x,ξ) appartenant à $K \times \Gamma$, on ait

$$|z_n(x,\xi)| \geq C|\xi|. \tag{7.18}$$

On applique maintenant le lemme 7.3.1, disposant ainsi d'une suite de fonctions $(\chi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de fonctions indéfiniment différentiables à support compact vérifiant les relations (7.15). Posons alors $u_{k,n} = \chi_k u_n$. On a

$$\widehat{u}_{k,n}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x|\xi)} u_{k,n}(x)dx.$$

Observons que

$$\mathcal{Z}(e^{-i(\cdot|\xi)}) = z(\cdot,\xi)e^{-i(\cdot|\xi)}.$$

En posant

$$R_{n,\xi} w = \mathcal{Z}_n\Big(\frac{w}{z_n(\cdot,\xi)}\Big) + i\,\frac{w \operatorname{div} \mathcal{Z}_n}{z_n(\cdot,\xi)}, \tag{7.19}$$

on démontre à l'aide d'intégrations par parties successives que

$$\widehat{u}_{k,n}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x|\xi)} R_{n,\xi}^k(u_{k,n})(x)dx. \tag{7.20}$$

L'opérateur différentiel $R_{n,\xi}$ est homogène de degré -1 en ξ ; il fait donc gagner des puissances de ξ. Supposons démontré qu'il existe une constante C telle que, pour tout couple d'entiers (k,n), on ait

$$\forall\, \xi \in \Gamma\,, \quad \|R_{n,\xi}^k(u_{k,n})\|_{L^\infty} \leq C^k(k!)^s|\xi|^{-k}. \tag{7.21}$$

Comme la fonction $R_{n,\xi}^k(\chi_k u_n)$ est à support dans le compact K, on a, pour tout couple d'entiers (k,n) et pour tout ξ appartenant à Γ,

$$|\widehat{u}_{k,n}(\xi)| \leq C^k(k!)^s|\xi|^{-k}.$$

Par hypothèse, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_{k,n} = \chi_k u$$

dans L^∞, donc dans L^1. Par passage à la limite, il en résulte que

$$|\widehat{\chi_k u}(\xi)| \leq C^k (k!)^s |\xi|^{-k},$$

ce qui, vu le choix de la suite $(\chi_k)_{k\in\mathbf{N}}$, conclut la démonstration du théorème.

Démontrons l'inégalité (7.21). Pour alléger les notations, nous omettrons l'indice n dans le reste de la preuve. Durant toute la preuve de l'inégalité (7.21) ainsi que tout au long du chapitre 8, nous utiliserons les notations suivantes ;

- On notera z la fonction $z(x,\xi)$ (la notation de la dépendance en ξ est omise) et l'on posera
$$\mathcal{Z}z = -i\sum_{j=1}^{d} z^j(x)\partial_j z(x,\xi).$$
- Soient q un entier strictement positif et α un élément de $\mathbf{N}^q$, on pose
$$\mathcal{Z}^\alpha \cdot u = \prod_{\ell=1}^{q} (\mathcal{Z}^{\alpha_\ell} u).$$
- Il sera commode de convenir que, lorsque $q = 0$, $\mathbf{N}^q$ n'a qu'un seul élément α et que $\mathcal{Z}^\alpha u = 1$.
- Pour tout entier j, on définit l'ensemble d'indice $I(j)$ qui est l'ensemble des (k,p,α,β) tels que $k \in \mathbf{N}^2$ et $|k| \leq j$, $p \in \mathbf{N}^2$ et $(\alpha,\beta) \in (\mathbf{N}^\star)^{p_1} \times (\mathbf{N}^\star)^{p_2}$ et
$$|\alpha| + |\beta| + p_1 + |k| = j.$$
- Soit α un élément de $\mathbf{N}^p$ et q un entier plus petit que p, on pose
$$\begin{aligned}
\alpha\hat{+}q &= (\alpha_1,\cdots,\alpha_{q-1},\alpha_q+1,\alpha_{q+1},\cdots,\alpha_p),\\
\alpha\hat{-}q &= (\alpha_1,\cdots,\alpha_{q-1},\alpha_q-1,\alpha_{q+1},\cdots,\alpha_p),\\
\widehat{\alpha}^q &= (\alpha_1,\cdots,\alpha_{q-1},0,\alpha_q,\alpha_{q+1},\cdots,\alpha_p)\ (\widehat{\alpha}_q \in \mathbf{N}^{p+1}) \quad \text{et}\\
\widetilde{\alpha}^q &= (\alpha_1,\cdots,\alpha_{q-1},\alpha_{q+1},\cdots,\alpha_p)\ (\widetilde{\alpha}^q \in \mathbf{N}^{p-1}).
\end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer le lemme qui décrit algébriquement l'action répétée de l'opérateur R.

Lemme 7.3.2 *Si R désigne l'opérateur défini par*

$$Rw = \mathcal{Z}\left(\frac{w}{z}\right) + i\,\frac{w \operatorname{div}\mathcal{Z}}{z},$$

alors il existe, pour tout entier j, des réels $(A^j_{k,p,\alpha,\beta})_{(k,p,\alpha,\beta)\in I(j)}$ tels que

$$R^j(w) = \sum_{(k,p,\alpha,\beta)\in I(j)} A^j_{k,p,\alpha,\beta} \frac{(\operatorname{div}\mathcal{Z})^{k_1}\mathcal{Z}^{k_2} w(\mathcal{Z}^\alpha\cdot\operatorname{div}\mathcal{Z})(\mathcal{Z}^\beta\cdot z)}{z^{j+p_2}}$$

$$\textit{et}\quad |A^j_{k,p,\alpha,\beta}| \leq \frac{3^j (j!)^2}{k!\alpha!\beta!p!(j-p_2)!}.$$

Pour démontrer ce lemme, nous allons procéder par récurrence. La propriété au rang 1 n'est autre que la définition de l'opérateur R. Supposons-la vraie au cran j. On a alors

$$\begin{aligned}
\widehat{R}^{j+1}_{k,p,\alpha,\beta} &\stackrel{\text{déf}}{=} R\left(\frac{(\operatorname{div} \mathcal{Z})^{k_1} \mathcal{Z}^{k_2} w(\mathcal{Z}^\alpha \cdot \operatorname{div} \mathcal{Z})(\mathcal{Z}^\beta \cdot z)}{z^{j+p_2}}\right) \\
&= \mathcal{Z}\left(\frac{(\operatorname{div} \mathcal{Z})^{k_1} \mathcal{Z}^{k_2} w(\mathcal{Z}^\alpha \cdot \operatorname{div} \mathcal{Z})(\mathcal{Z}^\beta \cdot z)}{z^{j+1+p_2}}\right) \\
&\quad + i\frac{(\operatorname{div} \mathcal{Z})^{k_1+1} \mathcal{Z}^{k_2} w(\mathcal{Z}^\alpha \cdot \operatorname{div} \mathcal{Z})(\mathcal{Z}^\beta \cdot z)}{z^{j+1+p_2}}\cdot
\end{aligned}$$

La formule de Leibnitz assure que l'on a

$$\begin{aligned}
\widehat{R}^{j+1}_{k,p,\alpha,\beta} &= k_1\frac{(\mathcal{Z} \operatorname{div} \mathcal{Z})(\operatorname{div} \mathcal{Z})^{k_1-1} \mathcal{Z}^{k_2} w(\mathcal{Z}^\alpha \cdot \operatorname{div} \mathcal{Z})(\mathcal{Z}^\beta \cdot z)}{z^{j+1+p_2}} \\
&+ \frac{(\operatorname{div} \mathcal{Z})^{k_1} \mathcal{Z}^{k_2+1} w(\mathcal{Z}^\alpha \cdot \operatorname{div} \mathcal{Z})(\mathcal{Z}^\beta \cdot z)}{z^{j+1+p_2}} \\
&+ \sum_{\ell=1}^{p} \frac{(\operatorname{div} \mathcal{Z})^{k_1} \mathcal{Z}^{k_2} w(\mathcal{Z}^{\widehat{\alpha+\ell}} \cdot \operatorname{div} \mathcal{Z})(\mathcal{Z}^\beta \cdot z)}{z^{j+1+p_2}} \\
&+ \sum_{m=1}^{p} \frac{(\operatorname{div} \mathcal{Z})^{k_1} \mathcal{Z}^{k_2} w(\mathcal{Z}^{\alpha} \cdot \operatorname{div} \mathcal{Z})(\mathcal{Z}^{\widehat{\beta+m}} \cdot z)}{z^{j+1+p_2}} \\
&- \frac{(j+1+p_2)(\operatorname{div} \mathcal{Z})^{k_1} \mathcal{Z}^{k_2} w(\mathcal{Z}^\alpha \cdot \operatorname{div} \mathcal{Z})(\mathcal{Z}^\beta \cdot z)\mathcal{Z}z}{z^{j+2+p_2}} \\
&+ i\frac{(\operatorname{div} \mathcal{Z})^{k_1+1} \mathcal{Z}^{k_2} w(\mathcal{Z}^\alpha \cdot \operatorname{div} \mathcal{Z})(\mathcal{Z}^\beta \cdot z)}{z^{j+1+p_2}}\cdot
\end{aligned}$$

En regroupant les termes d'ordre $j+1$ correspondant à un même indice de $I(j+1)$, il vient

$$\begin{aligned}
|A^{j+1}_{k,p,\alpha,\beta}| \leq\ & \sum_{\ell_1\,/\,\alpha_{\ell_1}\geq 2} |A^j_{k,p,\alpha\widehat{-}\ell_1,\beta}| + \sum_{\ell_2\,/\,\beta_{\ell_2}\geq 2} |A^j_{k,p,\alpha,\beta\widehat{-}\ell_2}| \\
&+ \sum_{m_1\,/\,\alpha_{m_1}=1} \frac{k_1+1}{p_1} |A^j_{(k_1+1,k_2),(p_1-1,p_2),\widetilde{\alpha}^{m_1},\beta}| \\
&+ \sum_{m_2\,/\,\beta_{m_2}=1} \frac{j+p_2}{p_2} |A^j_{k,(p_1,p_2-1),\alpha,\widetilde{\beta}^{m_2}}| \\
&+ |A^j_{(k_1,k_2-1),p,\alpha,\beta}| + |A^j_{(k_1-1,k_2),p,\alpha,\beta}|.
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\left|A^j_{(k_1+1,k_2),(p_1-1,p_2),\widetilde{\alpha}^{m_1},\beta}\right| \leq \frac{p_1}{k_1+1} \times \frac{3^j(j!)^2}{k!\alpha!\beta!p!(j-p_2)!}\cdot$$

Ainsi donc

$$\left|\sum_{m_1\,/\,\alpha_{m_1}=1} \frac{k_1+1}{p_1} A^j_{(k_1+1,k_2),(p_1-1,p_2),\widetilde{\alpha}^{m_1},\beta}\right| \leq p_1 \frac{3^j(j!)^2}{k!\alpha!\beta!p!(j-p_2)!}\cdot \tag{7.22}$$

De façon analogue, on a

$$\left|A^j_{k,(p_1,p_2-1),\alpha,\widetilde{\beta}^{m_2}}\right| \leq p_2 \frac{3^j (j!)^2}{k!\alpha!\beta!p!(j+1-p_2)!}.$$

On en déduit que

$$\left|\sum_{m_2\,/\,\beta_{m_2}=1} \frac{j+p_2}{p_2} A^j_{k,(p_1,p_2-1),\alpha,\widetilde{\beta}^{m_2}}\right| \leq (j+p_2)p_2 \frac{3^j (j!)^2}{k!\alpha!\beta!p!(j+1-p_2)!}. \tag{7.23}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned}
|A^j_{k,p,\alpha\hat{-}\ell_1,\beta}| &\leq \alpha_{\ell_1} \frac{3^j (j!)^2}{k!\alpha!\beta!p!(j-p_2)!} \quad \text{et}\\
|A^j_{k,p,\alpha,\beta\hat{-}\ell_2}| &\leq \beta_{\ell_2} \frac{3^j (j!)^2}{k!\alpha!\beta!p!(j-p_2)!}.
\end{aligned}$$

Enfin, on a

$$|A^j_{(k_1,k_2-1),p,\alpha,\beta}| + |A^j_{(k_1-1,k_2),p,\alpha,\beta}| \leq |k| \frac{3^j (j!)^2}{k!\alpha!\beta!p!(j-p_2)!}.$$

Il résulte alors des inégalités (7.22) et (7.23) que

$$|A^{j+1}_{k,p,\alpha,\beta}| \leq \frac{3^j ((j+1)!)^2}{k!\alpha!\beta!p!(j+1-p_2)!} \left(\frac{j+1-p_2}{j+1} + \frac{(j+p_2)p_2}{(j+1)^2}\right).$$

D'où le lemme.

Il reste maintenant à majorer $\mathcal{Z}^\ell \chi_N$. Démontrons par récurrence que l'on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^\ell \chi_N &= \sum_{(p,\alpha)\in J(\ell)} B^\ell_{p,\alpha} \sum_{\beta\in\{1,\cdots,d\}^p} \left(\prod_{q=1}^{p} (\mathcal{Z}^{\alpha_q} z^{\beta_q})\right) \partial_{\beta_1}\cdots\partial_{\beta_q}\chi_N \quad \text{avec}\\
B^\ell_{p,\alpha} &\leq \frac{2^\ell(\ell+1-p)!}{\alpha!} \quad \text{et}\\
J(\ell) &= \{(p,\alpha)\,/\,p\geq 1\,,\ \alpha\in\mathbf{N}^p\,,\ |\alpha|+p=\ell\}.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

La formule ci-dessus est évidemment vraie pour $\ell = 1$. Supposons-la vraie pour ℓ. La formule de Leibnitz assure que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{\alpha,\beta} &\overset{\text{déf}}{=} \mathcal{Z}\left(\prod_{q=1}^{p} (\mathcal{Z}^{\alpha_q} z^{\beta_q})\right) \partial_{\beta_1}\cdots\partial_{\beta_q}\chi_N\\
&= \sum_{q=1}^{p} \mathcal{Z}^{\alpha_q+1} z^{\beta_q} \left(\prod_{m=1, m\neq q}^{p} (\mathcal{Z}^{\alpha_m} z^{\beta_m})\right) \partial_{\beta_1}\cdots\partial_{\beta_q}\chi_N\\
&\qquad\qquad + \left(\prod_{q=1}^{p} (\mathcal{Z}^{\alpha_q} z^{\beta_q})\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{d} z^\lambda \partial_\nu \partial_{\beta_1}\cdots\partial_{\beta_q}\chi_N\right).
\end{aligned}$$

En regroupant les termes, il vient

$$B^{\ell+1}_{p,\alpha} = \sum_{q=1}^{p} B^\ell_{p,\alpha\hat{-}q} + \sum_{q\,/\,\alpha_q=0} \frac{1}{p} B^\ell_{p-1,\widetilde{\alpha}^q}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} B^{\ell}_{p,\alpha\hat{-}q} &\leq \frac{2^{\ell}\alpha_q(\ell+1-p)!}{\alpha!} \quad \text{et} \\ B^{\ell}_{p-1,\tilde{\alpha}^q} &\leq \frac{2^{\ell}(\ell+2-p)!}{\alpha!}. \end{aligned}$$

D'où il vient

$$\begin{aligned} B^{\ell+1}_{p,\alpha} &\leq \frac{2^{\ell}|\alpha|(\ell+1-p)!}{\alpha!} + \frac{2^{\ell}(\ell+2-p)!}{\alpha!} \\ &\leq \frac{2^{\ell+1}(\ell+2-p)!}{\alpha!}. \end{aligned}$$

D'où la relation (7.24). Nous pouvons maintenant conclure la démonstration de l'inégalité (7.21). Par hypothèse, on a

$$\|\mathcal{Z}^{\alpha_\ell} z^{\beta_\ell}\|_{L^\infty(\text{Supp }\chi_N)} \leq C^{\alpha_\ell}\frac{(\alpha_\ell!)^s}{(\alpha_\ell+1)^2}.$$

Ainsi, en posant, pour $\alpha \in \mathbf{N}^p$,

$$\Pi^{(2)}_\alpha = \prod_{q=1}^{p} \frac{1}{(\alpha_q+1)^2}, \tag{7.25}$$

on a

$$\prod_{q=1}^{p} \|\mathcal{Z}^{\alpha_q} z^{\beta_q}\|_{L^\infty(\text{Supp }\chi_N)} \leq C^p(\alpha!)^s\Pi^{(2)}_\alpha.$$

D'après l'inégalité (7.24), il vient

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}^{\ell}\chi_N\|_{L^\infty} &\leq C^N \sum_{(p,\alpha)\in J(\ell)} \frac{p!(k+1-p)!(\alpha!)^s}{\alpha!(p+1)^2}\Pi^{(2)}_\alpha \\ &\leq C^N\frac{(j!)^s}{(j+1)^2}(j+1)^2\Bigg(\sum_{p,\alpha\in J(\ell)}\frac{\Pi^{(2)}_\alpha}{(p+1)^2}\Bigg). \end{aligned} \tag{7.26}$$

La majoration suivante, très classique en théorie des fonctions analytiques, nous sera utile également lors du chapitre suivant.

Lemme 7.3.3 *Il existe une constante C telle que, pour tout couple d'entiers strictement positifs (δ, m), on ait*

$$N_\delta(m) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{\mu\in\mathbf{N}^\delta \\ |\mu|=m}} \Pi^{(2)}_\mu \leq \frac{C^\delta}{(m+1)^2}.$$

Procédons par récurrence sur δ en observant que l'inégalité ci-dessus est triviale pour $\delta = 1$, pour une quelconque constante C supérieure ou égale à 1. De plus, on a

$$\begin{aligned} N_{\delta+1}(m) &= \sum_{\ell=0}^{m} \Big(\sum_{\substack{\mu \in \mathbf{N}^\delta \\ |\mu| = m-\ell}} \frac{1}{(\ell+1)^2} \prod_{q=1}^{\delta} \frac{1}{(\mu_q+1)^2} \Big) \\ &= \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{(\ell+1)^2} N_\delta(m-\ell). \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, il vient

$$N_{\delta+1}(m) \leq C^\delta \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{(\ell+1)^2(m-\ell+1)^2}\cdot$$

Or, il est clair que

$$\frac{1}{(\ell+1)^2(m-\ell+1)^2} \leq \frac{4}{(m+1)^2} \Big(\mathbf{1}_{\{\ell \leq m/2\}} \frac{1}{(\ell+1)^2} + \mathbf{1}_{\{\ell > m/2\}} \frac{1}{(m-\ell+1)^2} \Big)\cdot \tag{7.27}$$

D'où il résulte que

$$N_{\delta+1}(m) \leq \frac{8C^\delta}{(m+1)^2} \Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(\ell+1)^2} \Big)\cdot$$

Le lemme est ainsi démontré.

Il résulte de ce lemme que l'on a

$$\sum_{(p,\alpha)\in J(\ell)} \frac{\Pi_\alpha^{(2)}}{(p+1)^2} \leq C^\ell \sum_{p=0}^{\ell} \frac{1}{(p+1)^2(\ell+1-p)^2}\cdot$$

L'inégalité (7.27) permet de conclure que l'on a bien, pour tout $\ell \leq N$,

$$\|\mathcal{Z}^\ell \chi_N\|_{L^\infty} \leq C^\ell \frac{(\ell!)^s}{(\ell+1)^2}\cdot$$

Grâce à la formule de Leibnitz, on en déduit que

$$\|\mathcal{Z}(\chi_N u)\|_{L^\infty} \leq C^\ell \frac{(\ell!)^s}{(\ell+1)^2}\cdot$$

En utilisant le lemme 7.3.2, on en déduit, que, pour tout $j \leq N$, on a,

$$\begin{aligned} \|R_\xi^j(\chi_N u)\|_{L^\infty} &\leq C^N \Big(\sum_{(k,p,\alpha,\beta)\in I(j)} \frac{(j!)^2 \Pi_\alpha^{(2)} \Pi_\beta^{(2)} (\alpha!)^s (\beta!)^s}{k!\alpha!\beta!p!(j-p_2)!} \Big) \\ &\leq C^N (j!)^s |\xi|^{-j} \Big(\sum_{(k,p,\alpha,\beta)\in I(j)} \frac{1}{p_1!} \Pi_\alpha^{(2)} \Pi_\beta^{(2)} \Big). \end{aligned}$$

L'application du lemme 7.3.3 permet d'affirmer que

$$\|R_\xi^j(\chi_N u)\|_{L^\infty} \leq C^N (j!)^s |\xi|^{-j},$$

ce qui n'en rien d'autre que l'inégalité (7.21). Le théorème 7.3.1 est ainsi démontré.

7.4 Références et remarques

Ce chapitre est un peu marginal par rapport au sujet du livre. Le lecteur souhaitant approndir la notion de front d'onde, et étudier des exemples d'applications à la description des lieux singuliers des solutions d'équations aux dérivées partielles pourra consulter par exemple le livre de S. Alinhac et P. Gérard (voir [4]) ou bien le traité de L. Hörmander (voir [47]).

La deuxième section combine les théorèmes sur les produits de distributions H^s, tels que nous les avons énoncés au chapitre 2, avec le résultat sur les conditions portant sur le front d'onde C^∞ que l'on trouve par exemple dans [47], tome 1, page 267. La méthode présentée ici associe localisation conique et localisation dans les couronnes dyadiques. L'intersection d'un cône et d'une couronne dyadique est un objet analogue à une boule pour la métrique

$$g_\xi(d\xi) = \frac{d\xi^2}{1+|\xi|^2},$$

qui est la partie "en $d\xi$" de la métrique dite "métrique $(1,0)$" en calcul de Weyl-Hörmander et qui est définie par

$$g_{x,\xi}(dx, d\xi) = dx^2 + \frac{d\xi^2}{1+|\xi|^2}.$$

Le lecteur intéressé à approfondir ce concept pourra consulter le troisième tome de [47].

La troisième section est essentiellement tirée d'un travail de P. Gamblin (voir [42]). La formulation du théorème 7.3.1, qui est un résultat de type "ellipticité microlocale", est particulièrement bien adaptée au cas des équations d'Euler. Remarquons que, comme le montre P. Gamblin dans [42], ce théorème convient aussi très bien au cas des équations non linéaires traité par N. Hanges et F. Trêves dans [46].

Chapitre 8

Analyticité et régularité Gevrey

8.1 Enoncé des théorèmes.

Le but de ce chapitre est de décrire quelques propriétés relatives aux régularités d'ordre élevé dans l'équation d'Euler. Les deux théorèmes principaux que nous allons y démontrer sont relatifs à la régularité en temps du flot d'une solution du système d'Euler (E). Voilà ce dont il s'agit.

Théorème 8.1.1 *Soit r un réel strictement supérieur à 1. Il existe alors une constante C telle que l'on ait, pour toute solution v du système (E) appartenant à $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r)$, les propriétés suivantes.*

Pour tout entier k, la fonction $(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v$ appartient à $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r)$ et l'on a, pour tout $T < T^\star$,

$$\|(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v\|_{L^\infty([0,T];C^r)} \leq C^k k!(\|v\|_{L^\infty([0,T];C^r)})^{k+1}. \tag{8.1}$$

La fonction $t \mapsto \psi(t)$ est une fonction analytique de $[0,T^\star[$ dans l'espace $\mathrm{Id} + C^r$.

Dans le cadre des solutions de Yudovich, nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème 8.1.2 *Il existe une constante C vérifiant les assertions suivantes. Soit v une solution du système d'Euler (E) appartenant à l'espace des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans l'espace E_m et dont le tourbillon appartient $L^\infty(\mathbf{R};L^a(\mathbf{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbf{R}^3)$. On sait alors que, pour tout $\epsilon \in]0,1[$ et pour tout entier k, la fonction $(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v$ appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^{1-\epsilon})$ et l'on a, pour tout réel T,*

$$\|(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v\|_{L^\infty([0,T];C^{1-\epsilon})} \leq \left(\frac{C}{\epsilon}\right)^{2k} (k!)^3(\|v\|_{L^\infty([0,T];C^1_\star)})^{k+1}. \tag{8.2}$$

Pour tout ϵ strictement positif, la fonction $t \mapsto \psi(t)$ est une fonction de classe Gevrey 3 de $\mathbf{R}$ dans l'espace $\mathrm{Id} + C^{1-\epsilon}$.

La démonstration de ces deux théorèmes fera l'objet des deux sections suivantes. Présentement, nous allons énoncer deux résultats relatifs à l'ellipticité microlocale pour le système d'Euler incompressible. Ces énoncés découlent, sinon des deux théorèmes ci-dessus, du moins de certaines étapes de leur démonstration.

Corollaire 8.1.1 *Soit r un réel strictement supérieur à 1 et v une solution du système (E) appartenant à $L^\infty_{loc}([0, T^\star[; C^r)$. Alors, on a*

$$WF_a(v) \subset \{(t, x; \tau, \xi) \,/\, \tau + (v(t, x)|\xi) = 0\}.$$

De même, dans le cadre des solutions de Yudovich, on a le

Corollaire 8.1.2 *Soit v une solution du système d'Euler (E) appartenant à l'espace des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans l'espace E_m et dont le tourbillon appartient à l'espace $L^\infty(\mathbf{R}; L^a(\mathbf{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbf{R}^3)$. Dans ce cas, on a*

$$WF_{G^3}(v) \subset \{(t, x; \tau, \xi) \,/\, \tau + (v(t, x)|\xi) = 0)\}.$$

8.2 Opérateurs multilinéaires

Regardons l'opérateur "gradient de pression" comme opérateur bilinéaire à noyau, comme nous l'avons fait dans la section 2.5. Nous avions alors démontré que $\partial_k p(x)$ valait

$$\sum_{i,j} \int_{\mathbf{R}^d} (\partial_i \partial_j \partial_k E_d)(x-y)(v^i(x) - v^i(y))(v^j(x) - v^j(y))dy. \tag{8.3}$$

Il s'agit étudier l'action répétée du champ de vecteurs $\partial_t + v \cdot \nabla$ sur le gradient de la pression. Nous verrons dans la section suivante que cette action se décrit commodément au moyen d'opérateurs multilinéaires.

Définissons a priori ces opérateurs. On commence par définir la classe de leur "noyau".

Définition 8.2.1 *On désigne par $\mathcal{S}_0^m(\mathbf{R}^d \backslash \{0\})$ l'ensemble des fonctions g localement bornées sur $\mathbf{R}^d \backslash \{0\}$ telles que*

$$\mathcal{N}_0^m(g) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{z \in \mathbf{R}^d \backslash \{0\}} |z|^{-m} |g(z)| < \infty.$$

On désigne par $\mathcal{S}^m(\mathbf{R}^d \backslash \{0\})$ l'ensemble des fonctions g indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^d \backslash \{0\}$ telles que, pour tout entier k, on ait

$$\mathcal{N}_k^m(g) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{z \in \mathbf{R}^d \backslash \{0\}} |z|^{-m+|\alpha|} |\partial^\alpha g(z)| < \infty.$$

On convient de la notation suivante :

$$\text{soient } r \in (\mathbf{R}_\star^+)^p \text{ et } u \in \prod_{\ell=1}^p C^{r_q}(\mathbf{R}^d), \text{ on pose } \|u\|_r^{(p)} = \prod_{\ell=1}^p \|u^\ell\|_{r_\ell}.$$

On peut maintenant définir les opérateurs multilinéaires qui nous seront utiles.

Définition 8.2.2 *Soient p un entier strictement positif, g une fonction appartenant à $\mathcal{S}_0^{-d-p+1}(\mathbf{R}^d \backslash \{0\})$ et $u \in C^r(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^p)$. On définit l'opérateur p-linéaire $g \underset{p}{\star} u$ par*

$$(g \underset{p}{\star} u)(x) = \int_{\mathbf{R}^d} g(z) \prod_{\ell=1}^p (u^\ell(x) - u^\ell(x-z))dz.$$

Par exemple, la formule (8.3) peut s'écrire

$$\sum_{i,j}(\partial_i\partial_j\partial_k E_d)\underset{2}{\star}(v^i, v^j).$$

L'action de ces opérateurs sur les espaces $C^r(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^p)$ est décrite par le théorème suivant.

Théorème 8.2.1 *Il existe une constante C telle que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, pour toute suite $(\epsilon_\ell)_{1\leq\ell\leq p}$ de $]0,1[^p$ telle que*

$$\epsilon = \sum_{\ell=1}^{p}\epsilon_\ell \leq \frac{1}{2},$$

on ait

$$\|g\underset{p}{\star}u\|_{1-\epsilon} \leq \left(\prod_{\ell=1}^{p}\frac{C}{\epsilon_\ell}\right)\left(1+\sum_{\ell=1}^{p}\frac{\epsilon_\ell}{\epsilon-\epsilon_\ell}\right)\mathcal{N}_0^{-d-p+1}(g)\|u\|^{(p)}_{(1-\epsilon_m)}. \tag{8.4}$$

Si de plus, pour tout α appartenant à $\mathbf{N}^d$ et de longueur $p-1$, on a

$$\int_{\mathbf{S}^{d-1}} x^\alpha g(x)d\sigma(x) = 0, \tag{8.5}$$

alors, on peut affirmer l'existence, pour tout $r>1$, d'une constante C_r telle que, pour tout ϵ strictement positif, on ait

$$\|g\underset{p}{\star}u\|_r \leq \frac{C_r}{\epsilon}\mathcal{N}_1^{-d-p+1}(g)\max_{\substack{1\leq\ell,m\leq p\\ \ell\neq m}}\left\{\|u^\ell\|_r\|u^m\|_{1+\epsilon}\prod_{\substack{n=1\\ n\neq\ell,n\neq m}}^{p}\|u^n\|_{Lip}\right\}. \tag{8.6}$$

Démontrons tout d'abord l'inégalité (8.4). Pour cela, on utilise les couronnes dyadiques. On écrit

$$\begin{aligned}
\Delta_q(g\underset{p}{\star}u) &= \Delta_q^{(1)}(g,u)+\Delta_q^{(2)}(g,u) \quad \text{avec}\\
\Delta_q^{(1)}(g,u) &= \int_{\mathbf{R}^d}\chi(2^q z)g(z)\Delta_q\prod_{\ell=1}^{p}(u^\ell-\tau_{-z}u^\ell)dz \quad \text{et}\\
\Delta_q^{(2)}(g,u) &= \int_{\mathbf{R}^d}(1-\chi(2^q z))g(z)\Delta_q\prod_{\ell=1}^{p}(u^\ell-\tau_{-z}u^\ell)dz.
\end{aligned}$$

Pour $\Delta_q^{(1)}(g,u)$, on observe que, d'après la proposition 2.3.1, qui fait le lien entre la définition usuelle des espaces de Hölder et la définition en couronnes dyadiques, on a, comme $\epsilon_\ell\leq 1/2$,

$$\|u^\ell-\tau_{-z}u^\ell\|_{L^\infty}\leq\frac{C}{\epsilon_\ell}|z|^{1-\epsilon_\ell}\|u^\ell\|_{1-\epsilon_\ell}.$$

D'où il vient que

$$\|\Delta_q^{(1)}(g,u)\|_{L^\infty}\leq C\mathcal{N}_0^{-d-p+1}(g)\left(\prod_{\ell=1}^{p}\frac{1}{\epsilon_\ell}\right)\left(\int_{B(0,2^{-q+1})}|z|^{-d+1-\epsilon}dz\right)\|u\|^{(p)}_{(1-\epsilon_\ell)}.$$

On en déduit que

$$\|\Delta_q^{(1)}(g,u)\|_{L^\infty} \leq C\mathcal{N}_0^{-d-p+1}(g)\left(\prod_{\ell=1}^{p}\frac{C}{\epsilon_\ell}\right)2^{-q(1-\epsilon)}\|u\|^{(p)}_{(1-\epsilon_\ell)}.$$

Pour majorer $\|\Delta_q^{(2)}(g,u)\|_{L^\infty}$, nous utiliserons les estimations douces du corollaire 2.4.1 convenablement itérées.

Lemme 8.2.1 *Il existe une constante C vérifiant la propriété suivante. Soit $(\sigma_\ell)_{1\leq\ell\leq p}$ une suite telle que $\sigma_\ell \geq 1/2$. On considère une suite $(a^\ell)_{1\leq\ell\leq p}$ telle que $a^\ell \in C^{\sigma_\ell}$. On a*

$$\prod_{\ell=1}^{p} a^\ell = \sum_{\ell=1}^{p} A^\ell \quad \textit{avec} \quad \|A^\ell\|_{\sigma_\ell} \leq (C^{\max\sigma_\ell})^p\|a^\ell\|_{\sigma_\ell}\prod_{\substack{m=1\\m\neq\ell}}^{p}\|a^m\|_{L^\infty}.$$

La propriété est évidente pour $p=1$. Supposons-la vraie jusqu'au cran p et posons $\Pi^p(a)=\prod_{\ell=1}^p a^\ell$. La décomposition de Bony en opérateurs de paraproduit et de reste nous dit que

$$\Pi^{p+1}(a)=\Pi^p(a)a^{p+1}=T_{a^{p+1}}\Pi^p(a)+T_{\Pi^p(a)}a^{p+1}+R(\Pi^p(a),a^{p+1}).$$

Comme $\sigma_{p+1}\geq 1/2$, on a, d'après le théorème 2.4.1, on a

$$\|T_{\Pi^p(a)}a^{p+1}+R(\Pi^p(a),a^{p+1})\|_{\sigma_{p+1}} \leq C^{1+\sigma_{p+1}}\|a^{p+1}\|_{\sigma_{p+1}}\prod_{\ell=1}^{p}\|a^\ell\|_{L^\infty}.$$

Ce même théorème 2.4.1 affirme que, pour tout ρ,

$$\|T_u v\|_\rho \leq C^{1+|\rho|}\|u\|_{L^\infty}\|v\|_\rho.$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, ceci assure le résultat en prenant

$$A^\ell = T_{a_{p+1}}\widetilde{A}^\ell \quad \text{avec} \quad \Pi_{\ell=1}^p a_\ell = \sum_{l=1}^{p}\widetilde{A}^\ell \quad \text{et}$$
$$A^{p+1}=T_{\Pi^p(a)}a^{p+1}+R(\Pi^p(a),a^{p+1}).$$

Revenons à la démonstration du théorème. Le lemme 8.2.1 ci-dessus permet d'affirmer que

$$\|\Delta_q\prod_{\ell=1}^{p}(u^\ell-\tau_{-z}u^\ell)\|_{L^\infty} \leq C\|u\|^{(p)}_{(1-\epsilon_\ell)}\sum_{\ell=1}^{p}\left(\prod_{\substack{m=1\\m\neq\ell}}^{p}\frac{C}{\epsilon_m}\right)|z|^{p-1-\epsilon+\epsilon_\ell}2^{-q(1-\epsilon_\ell)}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\|\Delta_q^{(2)}(g,u)\|_{L^\infty} &\leq C\mathcal{N}_0^{-d-p+1}(g)\|u\|^{(p)}_{(1-\epsilon_\ell)}\sum_{\ell=1}^{p}2^{-q(1-\epsilon_\ell)}\left(\prod_{\substack{m=1\\m\neq\ell}}^{p}\frac{C}{\epsilon_m}\right)\int_{2^{-q}}^{+\infty}r^{-1-\epsilon+\epsilon_\ell}dr\\ &\leq C\mathcal{N}_0^{-d-p+1}(g)\|u\|^{(p)}_{(1-\epsilon_\ell)}\sum_{\ell=1}^{p}2^{-q(1-\epsilon_\ell)}\left(\prod_{\substack{m=1\\m\neq\ell}}^{p}\frac{C}{\epsilon_m}\right)\frac{1}{\epsilon-\epsilon_\ell}.\end{aligned}$$

Le fait que $\epsilon_\ell \leq \epsilon$ assure l'inégalité (8.4).

Démontrons maintenant l'inégalité (8.6). Commençons par écrire que

$$
\begin{aligned}
\Delta_q(g \underset{p}{\star} u) &= \Delta_q^{(1)}(g,u) + \Delta_q G_q^{(2)}(u) + \Delta_q G^{(3)}(u) \quad \text{avec} \\
\Delta_q^{(1)}(g,u) &= \int_{\mathbf{R}^d} \chi(2^q z) g(z) \Delta_q \prod_{\ell=1}^{p} (u^\ell - \tau_{-z} u^\ell) dz, \qquad (8.7) \\
G_q^{(2)}(u) &= \int_{\mathbf{R}^d} (\chi(z) - \chi(2^q z)) g(z) \prod_{\ell=1}^{p} (u^\ell - \tau_{-z} u^\ell) dz \quad \text{et} \\
G^{(3)}(u) &= \int_{\mathbf{R}^d} (1 - \chi(z)) g(z) \prod_{\ell=1}^{p} (u^\ell - \tau_{-z} u^\ell) dz.
\end{aligned}
$$

Le terme $\|\Delta_q G^{(3)}(u)\|_{L^\infty}$ est très facile à majorer. En vertu du lemme 8.2.1, on a

$$
\| \prod_{\ell=1}^{p} (u^\ell - \tau_{-z} u^\ell) \|_r \leq p C^p \max_{1 \leq \ell \leq p} \Big\{ \|u^\ell\|_r \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq \ell}}^{p} \|u^m\|_{L^\infty} \Big\}.
$$

La fonction $(1-\chi)g$ étant intégrable, on a

$$
\|\Delta_q G^{(3)}(u)\|_{L^\infty} \leq C^p 2^{-qr} \mathcal{N}_0^{-d-p+1}(g) \max_{1 \leq \ell \leq p} \Big\{ \|u^\ell\|_r \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq \ell}}^{p} \|u^m\|_{L^\infty} \Big\}. \qquad (8.8)
$$

Majorons maintenant $\|\Delta_q^{(1)}(g,u)\|_{L^\infty}$. Le lemme 8.2.1 nous dit que, pour tout réel σ supérieur à $1/2$, on a

$$
\| \prod_{\ell=1}^{p} (u^\ell - \tau_{-z} u^\ell) \|_\sigma \leq C^p |z|^{p-1} \max_{1 \leq \ell \leq p} \Big\{ \|u^\ell - \tau_{-z} u^\ell\|_\sigma \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq \ell}}^{p} \|\nabla u^m\|_{L^\infty} \Big\}. \qquad (8.9)
$$

On utilise alors le lemme suivant.

Lemme 8.2.2 *Il existe une constante C telle que, pour tout σ, pour tout ϵ de l'intervalle $]0,1[$, et pour toute fonction $a \in C^{\sigma+\epsilon}$, on ait*

$$
\|a - \tau_{-z} a\|_\sigma \leq C^{|\sigma|+1} |z|^\epsilon \|a\|_{\sigma+\epsilon}.
$$

La démonstration de ce lemme est très simple. Par définition des espaces de Hölder, on a

$$
\|\Delta_q(a - \tau_{-z} a)\|_{L^\infty} \leq 2^{1-q(\sigma+\epsilon)} \|a\|_{\sigma+\epsilon}.
$$

De plus, on sait que

$$
\begin{aligned}
|\Delta_q a(x) - \Delta_q \tau_{-z} a(x)| &\leq |z| \times \|\nabla \Delta_q a\|_{L^\infty} \\
&\leq C^{|\sigma|+1} |z| \times 2^{-q(\sigma-1+\epsilon)} \|a\|_{\sigma+\epsilon}.
\end{aligned}
$$

Par interpolation, il vient

$$
\|\Delta_q(a - \tau_{-z} a)\|_{L^\infty} \leq C^{|\sigma|+1} |z|^\epsilon \times 2^{-q\sigma} \|a\|_{\sigma+\epsilon}.
$$

Ce qui conclut la démonstration du lemme.

En appliquant ce lemme, par exemple pour $\epsilon = 1/2$, à l'inégalité (8.9), il vient

$$\|\Delta_q \prod_{\ell=1}^{p}(u^\ell - \tau_{-z}u^\ell)\|_{L^\infty} \leq C^p 2^{-q(r-\frac{1}{2})}|z|^{p-\frac{1}{2}} \max_{1\leq\ell\leq p}\Big\{\|u^\ell\|_r \prod_{\substack{m=1\\ m\neq\ell}}^{p}\|\nabla u^m\|_{L^\infty}\Big\}.$$

D'où il résulte que

$$\begin{aligned}\|\Delta_q^{(1)}(g,u)\|_{L^\infty} &\leq C^p 2^{-q(r-\frac{1}{2})}\mathcal{N}_0^{-d-p+1}(g)\Big(\int_0^{2^{-q+1}} r^{-\frac{1}{2}}dr\Big) \max_{1\leq\ell\leq p}\Big\{\|u^\ell\|_r \prod_{\substack{m=1\\ m\neq\ell}}^{p}\|\nabla u^m\|_{L^\infty}\Big\}.\\ &\leq C^p 2^{-qr}\mathcal{N}_0^{-d-p+1}(g) \max_{1\leq\ell\leq p}\Big\{\|u^\ell\|_r \prod_{\substack{m=1\\ m\neq\ell}}^{p}\|\nabla u^m\|_{L^\infty}\Big\}. \qquad (8.10)\end{aligned}$$

La majoration de $\|\Delta_q G_q^{(2)}(u)\|_{L^\infty}$ nécessite l'hypothèse (8.5) d'annulation des moments (sur la sphère) d'ordre $p-1$. On décompose le produit des translatés suivant la taille relative des fréquences, mais sans nous soucier de la localisation spectrale dans des couronnes, puisque nous travaillons ici dans des espaces de Hölder d'indice positif. Il vient

$$\begin{aligned}\prod_{\ell=1}^{p}(u^\ell - \tau_{-z}u^\ell) &= \sum_{q'}\sum_{\ell=1}^{p}(\Delta_{q'}u^\ell - \tau_{-z}\Delta_{q'}u^\ell)\Pi_{q'}^\ell(x,z) \quad \text{avec}\\ \Pi_{q'}^\ell(x,z) &= \prod_{m<\ell}(S_{q'}u^m(x) - S_{q'}u^m(x-z))\prod_{m>\ell}(S_{q'+1}u^m(x) - S_{q'+1}u^m(x-z)).\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}G_q^{(2)}(u) &= \sum_{q'}\sum_{\ell=1}^{p}\Big(G_{q,q',\ell}^{(21)}(u)\Delta_{q'}u^\ell + G_{q,q',\ell}^{(22)}(u)\Big) \quad \text{avec}\\ G_{q,q',\ell}^{(21)}(u) &= \int_{\mathbf{R}^d}(\chi(z) - \chi(2^q z))g(z)\Pi_{q'}^\ell(x,z)dz \quad \text{et} \qquad (8.11)\\ G_{q,q',\ell}^{(22)}(u) &= -\int_{\mathbf{R}^d}(\chi(z) - \chi(2^q z))g(z)(\Delta_{q'}u^\ell)(x-z)\Pi_{q'}^\ell(x,z)dz.\end{aligned}$$

Pour étudier le terme $G_{q,q',\ell}^{(22)}(u)$, on utilise la formule (2.2) de la page 22, qui affirme que

$$\begin{aligned}\Delta_{q'}u &= \sum_{\lambda=1}^{d} 2^{-q'}\partial_\lambda\Delta_{q'}^{(\lambda)}u \quad \text{avec}\\ \Delta_{q'}^{(\lambda)} &= 2^{q'd}\int_{\mathbf{R}^d} h^{(\lambda)}(2^{q'}(x-y))u(y)dy \quad \text{et}\\ h^{(\lambda)} &= \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\theta_\lambda(\xi)}{\xi_\lambda}\varphi(\xi)\Big).\end{aligned}$$

En posant $g_q(z) = (\chi(z) - \chi(2^q z))g(z)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}G_{q,q',\ell}^{(22)}(u) = 2^{-q'}\sum_{\lambda=1}^{d}\Big(&\int_{\mathbf{R}^d}(\partial_\lambda g_q)(z)\Pi_{q'}^\ell(x,z)(\Delta_{q'}^\lambda u)(x-z)dz\\ &+ \int_{\mathbf{R}^d} g_q(z)\partial_{z_\lambda}(\Pi_{q'}^\ell(x,z))(\Delta_{q'}^\lambda u)(x-z)dz\Big).\end{aligned}$$

Comme on a

$$\begin{aligned} \|\Pi^{\ell}_{q'}(\cdot, z)\|_{L^\infty} &\leq |z|^{p-1} \prod_{\substack{m=1\\ m\neq \ell}}^{p} \|u^m\|_{Lip} \quad \text{et} \qquad (8.12)\\ \|\partial_{z_\lambda}(\Pi^{\ell}_{q'}(\cdot, z))\|_{L^\infty} &\leq |z|^{p-2} \prod_{\substack{m=1\\ m\neq \ell}}^{p} \|u^m\|_{Lip}, \qquad (8.13)\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} \|G^{(22)}_{q,q',\ell}(u)\|_{L^\infty} &\leq C^p 2^{-q'(1+r)} \mathcal{N}_1^{-d-p+1}(g) \Big(\int_{2^{-q}}^{+\infty} r^{-d-1} dr\Big) \|u^\ell\|_r \prod_{\substack{m=1\\ m\neq \ell}}^{p} \|u^m\|_{Lip}\\ &\leq C^p 2^{q-q'(1+r)} \mathcal{N}_1^{-d-p+1}(g) \|u^\ell\|_r \prod_{\substack{m=1\\ m\neq \ell}}^{p} \|u^m\|_{Lip}. \qquad (8.14)\end{aligned}$$

C'est la majoration de $\|G^{(21)}_{q,q',\ell}(u)\|_{L^\infty}$ qui utilise l'hypothèse (8.5). Posons

$$R^\ell_q(x,z) = S_q u^\ell(x) - S_q u^\ell(x-z) - z\cdot \nabla S_q u^\ell(x).$$

En convenant que, si l'ensemble d'indice est vide, le produit vaut 1, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \Pi^{\ell}_{q'}(x,z) &= \sum_{\substack{m=1\\ m\neq \ell}}^{p} \Pi^{\ell,m}_{q'}(x,z) \quad \text{avec}\\ \Pi^{\ell,m}_{q'}(x,z) &= \prod_{\substack{n<\ell\\ n\leq m}} R^n_{q'}(x,z) \prod_{\substack{n>\ell\\ n\leq m}} R^n_{q'+1}(x,z)\\ &\times \prod_{\substack{n<\ell\\ n> m}} z\cdot \nabla S_{q'} u^n(x) \prod_{\substack{n>\ell\\ n> m}} z\cdot \nabla S_{q'+1} u^n(x).\end{aligned}$$

La fonction χ étant radiale, la propriété d'annulation (8.5) permet d'affirmer que

$$\int_{\mathbf{R}^d} g_q(z) \Pi^{\ell,0}_{q'}(x,z)dz = 0.$$

L'inégalité des accroissements finis assure, pour tout q', que

$$|R^n_{q'}(x,z)| \leq C|z|^{1+\epsilon} \|u^n\|_{1+\epsilon} \quad \text{et} \quad |R^n_{q'}(x,z)| \leq C|z| \|u^n\|_{Lip}.$$

On en déduit que, pour m strictement positif,

$$|\Pi^{\ell,m}_{q'}(x,z)| \leq C^p |z|^{p-2+\epsilon} \max_{n\neq \ell}\Big\{ \|u^n\|_{1+\epsilon} \prod_{\substack{n'=1\\ n'\neq n, n'\neq \ell}}^{p} \|u^{n'}\|_{Lip}\Big\}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \|G^{(21)}_{q,q',\ell}(u)\|_{L^\infty} &\leq C^p 2^{-q'} \mathcal{N}_0^{-d-p+1}(g) \Big(\int_{2^{-q}}^{+\infty} r^{-d+\epsilon} dr\Big) \max_{n\neq \ell}\Big\{ \|u^n\|_{1+\epsilon} \prod_{\substack{n'=1\\ n'\neq n, n'\neq \ell}}^{p} \|u^{n'}\|_{Lip}\Big\}\\ &\leq \frac{C^p}{\epsilon} 2^{q-q'} \mathcal{N}_1^{-d-p+1}(g) \max_{n\neq \ell}\Big\{ \|u^n\|_{1+\epsilon} \prod_{\substack{n'=1\\ n'\neq n, n'\neq \ell}}^{p} \|u^{n'}\|_{Lip}\Big\}.\end{aligned}$$

Or, le support de la transformée de Fourier de $G^{(22)}_{q,q',\ell}(u)$ est inclus dans la boule

$$p2^{q'}B\Big(0,\frac{4}{3}\Big)\cdot$$

Donc on ne retient que les indices q' tels que $q' \geq q - C\log_2 p$. Ainsi, d'après les inégalités (8.14), (8.15) et la définition (8.11), on a

$$\|\Delta_q G^{(2)}_q(u)\|_{L^\infty} \leq \Big(\sum_{q'\geq q-C\log_2 p} 2^{q-q'(1+r)}\Big)\mathcal{N}_1^{-d-p+1}(g)$$
$$\times \max_{\substack{1\leq \ell,m\leq p\\ \ell\neq m}}\Big\{\|u^\ell\|_r\|u^m\|_{1+\epsilon}\prod_{\substack{n=1\\ n\neq\ell,n\neq m}}^{p}\|u^n\|_{Lip}\Big\}.$$

Vu les inégalités (8.8) et (8.10), la démonstration du théorème 8.2.1 est achevée.

Nous allons montrer que le théorème 8.2.1 s'applique pour des noyaux qui sont des dérivées d'ordre au moins trois de la solution fondamentale du laplacien. La proposition suivante décrit les propriétés qui nous seront utiles.

Proposition 8.2.1 *Il existe une constante C vérifiant la propriété suivante. Soit g une quelconque dérivée d'ordre $1+p$ de E_d. Alors g appartient à $\mathcal{S}^{-d-p+1}(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ et, pour tout entier k,*

$$\mathcal{N}_k^{-d-p+1}(g) \leq C^{k+p+1}((k+p-4)^+)!, \tag{8.15}$$

en convenant que $n^+ = \max\{0,n\}$. De plus, pour tout α de $\mathbf{N}^d$ tel que $|\alpha|\leq p$, on a

$$\int_{\mathbf{S}^{d-1}} z^\alpha g(z)d\sigma(z) = 0. \tag{8.16}$$

Il suffit de majorer $\partial^\beta|x|^{-d}$ pour tout multientier de longueur p. La formule de Faa di Bruno affirme que

$$\partial^\beta(|x|^{-d}) = \sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_p=\beta\\ |\beta_q|\geq 1}} |x|^{-d-2p}\Big(\prod_{q=1}^{p}\partial^{\beta_q}(|x|^2)\Big)\Big(\prod_{\ell=1}^{p}\Big(-\frac{d}{2}-\ell+1\Big)\Big).$$

Comme les multientiers β_q sont nécessairement du type $(0,\cdots,\epsilon,\cdots,0)$ avec ϵ valant 1 ou 2, on a

$$|\partial^\beta(|x|^{-d})| \leq |x|^{-d-|\beta|}C^{|\beta|+1}|\beta|!,$$

ce que l'on peut aussi écrire, quitte à changer la constante,

$$|\partial^\beta(|x|^{-d})| \leq |x|^{-d-|\beta|}C^{|\beta|+1}((|\beta|-4)^+)!,$$

d'où l'inégalité (8.15).

Pour démontrer les relations (8.16), nous allons tout d'abord démontrer que, pour tout $\alpha\in\mathbf{N}^d$, il existe un polynôme harmonique P_α, homogène de dégré $|\alpha|$, tel que

$$\partial^\alpha E_d(x) = P_\alpha(x)|x|^{-d+2-2|\alpha|}.$$

C'est évidemment vrai si $|\alpha| = 1$. Supposons la propriété vraie lorsque $|\alpha| = k$. Soit α un élément de $\mathbf{N}^d$ de longueur $k+1$ et $\ell \in \{1, \cdots, d\}$ tel que $\alpha_\ell \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} \partial^\alpha E_d(x) &= \partial_\ell \partial^{\alpha \hat{-} \ell} E_d(x) \\ &= \partial_\ell (P_\ell(x)|x|^{2-d-2k}) \\ &= |x|^{2-d-2(k+1)}(|x|^2 \partial_\ell P_\ell(x) + (2-d-2k)x_\ell P_\ell). \end{aligned}$$

Posons $Q_\ell = |x|^2 \partial_\ell P_\ell(x) + (2-d-2k)x_\ell P_\ell$. Le polynôme P_ℓ étant harmonique et homogène de degré k, le polynôme $\partial_\ell P_\ell$ est harmonique et homogène de dégré $k-1$. Il en résulte que

$$\Delta Q_\ell = \sum_{\lambda=1}^{d} 4x_\lambda \partial_\lambda \partial_\ell P_\ell + 2d\partial_\ell P_\ell + 2(2-d-2k)\partial_\ell P_\ell = 0.$$

De plus, un polynôme homogène non constant est nul en 0. Donc, s'il est harmonique, il est d'intégrale nulle sur la sphère.

Soit maintenant (P_j) la propriété suivante :

$$\begin{gathered} \forall k \geq j+1,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^d \times \mathbf{N}^d \ / \ |\alpha| \leq j,\ |\beta| = k, \\ \int_{\mathbf{S}^{d-1}} x^\alpha \partial^\beta E_d(x) dx = 0. \end{gathered}$$

Nous venons de voir que le prédicat (P_0) est vrai. Supposons (P_j). Soient k un entier plus grand que $j+2$, β un multientier de longueur k et α un multientier de longueur $j+1$. Soit ℓ un élément de $\{1, \cdots, d\}$ tel que $\alpha_\ell \neq 0$. On a, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta) &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{S}^{d-1}} x^{\alpha \hat{-} \ell} x_\ell \partial^\beta E_d(x) d\sigma x \\ &= R^{-1} \int_{R\mathbf{S}^{d-1}} x^{\alpha \hat{-} \ell} x_\ell \partial^\beta E_d(x) d\sigma_R x \\ &+ \int_{1 \leq |x| \leq R} \partial_\ell (x^{\alpha \hat{-} \ell}) \partial^\beta E_d(x) dx \\ &+ \int_{1 \leq |x| \leq R} x^{\alpha \hat{-} \ell} \partial^{\beta \hat{+} \ell} E_d(x) dx. \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence assure que les deux derniers termes sont nuls. L'homogénéité entraîne que

$$\lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_{R\mathbf{S}^{d-1}} x^{\alpha \hat{+} \ell} \partial^\beta E_d(x) d\sigma_R(x) = 0.$$

D'où la proposition.

8.3 Régularité le long des lignes de flot

Il s'agit de démontrer les inégalités (8.1) et (8.2) des théorèmes 8.1.1 et 8.1.2. Avant toute chose, régularisons la donnée initiale de manière à ce que l'on ait une solution indéfiniment différentiable du système (E) sur $[0, T] \times \mathbf{R}^d$.

Dans tout ce chapitre, on posera, pour tout réel T strictement positif et pour tout réel r,

$$\|a\|_{T,r} = \|a\|_{L^\infty([0,T];C^r)}.$$

Nous allons démontrer les estimations a priori suivantes.

Théorème 8.3.1 *Il existe une constante C_0 vérifiant les propriétés suivantes, pour toute solution v du système d'Euler, indéfiniment différentiable sur $[0, T] \times \mathbf{R}^d$.*

Pour tout réel r strictement supérieur à 1, pour tout entier k,

$$\|(\partial_t + v \cdot \nabla)^k v\|_{T,r} \leq \left(\frac{C_0}{r-1}\right)^k (\|v\|_{T,r})^{k+1} \frac{k!}{(k+1)^2}. \tag{8.17}$$

Pour tout réel ϵ et pour tout entier k tels que

$$\epsilon < \frac{1}{2(k+1)},$$

on a

$$\|(\partial_t + v \cdot \nabla)^k v\|_{T,1-\epsilon(k+1)} \leq \left(\frac{C}{\epsilon}\right)^k (\|v\|_{T,1-\epsilon})^{k+1} \frac{(k!)}{(k+1)^2}. \tag{8.18}$$

La démonstration de ce théorème repose en grande partie sur l'étude de l'action répétée de l'opérateur

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_t + v \cdot \nabla$$

sur le gradient de la pression. Comme nous l'avons suggéré dans la section précédente, cette action répétée de $\mathcal{V}$ se décrit à l'aide des opérateurs multilinéaires alors introduits. Voici comment.

Proposition 8.3.1

$$\mathcal{V}^k(\nabla p(v,v)) = \sum_{(p,\mu)\in J(k)} A^k_{(p,\mu)} \sum_{\nu\in\{1,\cdots,d\}^{p+2}} \partial_{(\nu)} \nabla E_d \underset{p+2}{\star} (\mathcal{V}^{(\mu)} \cdot v^{(\nu)})$$

$$avec \quad 0 \leq A^k_{(p,\mu)} \leq \frac{k!}{\mu! p!},$$

$$\partial_{(\nu)} = \prod_{q=-1}^{p} \partial_{\nu_q}, \quad \mathcal{V}^{(\mu)} \cdot v^{(\nu)} = \prod_{q=-1}^{p} \mathcal{V}^{\mu_q} v^{\nu_q}$$

$$et \quad J(k) = \{(p,\mu) \,/\, \mu \in \mathbf{N}^{p+2}, \ |\mu| + p = k\}.$$

La preuve de cette proposition repose sur le lemme suivant, qui décrit l'action de $\mathcal{V}$ sur un opérateur multilinéaire du type $g \underset{p}{\star} a$.

Lemme 8.3.1

$$V_p \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{V}(g \underset{p}{\star} a) = \sum_{q=1}^{p} g \underset{p}{\star} (a^1, \cdots, a^{q-1}, \mathcal{V}a^q, a^{q+1}, \cdots, a^p) + \sum_{\lambda=1}^{d} (\partial_\lambda g) \underset{p+1}{\star} (a, v^\lambda).$$

Pour démontrer cela, on commence par régulariser le noyau g en posant

$$g_\epsilon(z) = \Big(1 - \chi\big(\frac{z}{\epsilon}\big)\Big) g(z).$$

De plus, la dérivation en temps opère simplement suivant la règle de Leibnitz ; aussi, allons-nous l'ignorer dans la démonstration. Par définition de $g\underset{p}{\star}a$, on a

$$V_p = v \cdot \nabla \int_{\mathbf{R}^d} g_\epsilon(x-y) \prod_{q=1}^{p} (a^q(x) - a^q(y))dy.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda (g_\epsilon \underset{p}{\star} a) &= \partial_\lambda \int_{\mathbf{R}^d} g_\epsilon(x-y) \prod_{q=1}^{p} (a^q(x) - a^q(y))dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} (\partial_\lambda g_\epsilon)(x-y) \prod_{q=1}^{p} (a^q(x) - a^q(y))dy \\
&\qquad + \sum_{q=1}^{p} \int_{\mathbf{R}^d} g_\epsilon(x-y)(\partial_\lambda a^q)(x) \prod_{r=1, r\neq q}^{p} (a^r(x) - a^r(y))dy.
\end{aligned}$$

En observant que

$$\sum_{q=1}^{p} (\partial_\lambda a^q)(y) \prod_{r\neq q} (a^r(x) - a^r(y))dy = -\partial_{y_\lambda} \prod_{q=1}^{p} (a^q(x) - a^q(y)),$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
V_p &= \sum_{q=1}^{p} g_\epsilon \underset{p}{\star} (a^1, \cdots, a^{q-1}, \mathcal{V}a^q, a^{q+1}, \cdots, a^p) + \sum_{\lambda=1}^{d} (\partial_\lambda g_\epsilon) \underset{p+1}{\star} (a, v^\lambda) \\
&\qquad + \int_{\mathbf{R}^d} v^\lambda(y) \left(\prod_{q=1}^{p} (a^q(x) - a^q(y)) \right) (-\partial_{y_\lambda})(g_\epsilon(x-y))dy \\
&\qquad - \int_{\mathbf{R}^d} v^\lambda(y) g_\epsilon(x-y) \partial_{y_\lambda} \prod_{q=1}^{p} (a^q(x) - a^q(y))dy.
\end{aligned}$$

Le champ de vecteurs v étant de divergence nulle, une intégration par parties conclut la démonstration de ce lemme.

Revenons à la démonstration de la proposition. Le lemme 8.3.1 ci-dessus assure bien évidemment la propriété au rang 1. Supposons-la vérifiée au rang j. Le lemme entraîne que

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\partial_{(\nu)} \nabla E_d \underset{p+2}{\star} (\mathcal{V}^{(\mu)} \cdot v^{(\nu)})) = \sum_{q=-1}^{p} \partial_{(\nu)} \nabla E_d \underset{p+2}{\star} (\mathcal{V}^{(\widehat{\mu+q})} \cdot v^{(\nu)}) \\
+ \sum_{\lambda=1}^{d} \partial_\lambda \partial_{(\nu)} \nabla E_d \underset{p+3}{\star} (\mathcal{V}^{(\mu)} \cdot v^{(\nu)}, v^\lambda).
\end{aligned}$$

D'où il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu \in \{1,\cdots,d\}^{p+2}} \mathcal{V}(\partial_{(\nu)} \nabla E_d \underset{p+2}{\star} (\mathcal{V}^{(\mu)} \cdot v^{(\nu)})) &= \sum_{\nu \in \{1,\cdots,d\}^{p+2}} \sum_{q=-1}^{p} \partial_{(\nu)} \nabla E_d \underset{p+2}{\star} (\mathcal{V}^{(\widehat{\mu+q})} \cdot v^{(\nu)}) \\
&+ \sum_{\nu \in \{1,\cdots,d\}^{p+3}} \frac{1}{p+3} \sum_{q=-1}^{p+1} \partial_{(\nu)} \nabla E_d \underset{p+3}{\star} (\mathcal{V}^{(\widehat{\mu^q})} \cdot v^{(\nu)}).
\end{aligned}$$

En regroupant les termes, on trouve

$$A^{j+1}_{(p,\mu)} = \sum_{q=-1}^{p} A^{j}_{(p,\mu \widehat{-} q)} + \frac{1}{p+3} \sum_{q/\mu_q=0} A^{j}_{(p-1,\widetilde{\mu}^q)}.$$

Il y a au plus $p+3$ indices q tels que μ_q soit nul. En utilisant l'hypothèse de récurrrence, on en déduit que

$$\begin{aligned} A^{j+1}_{(p,\mu)} & \leq \sum_{q=-1}^{p} \mu_q \frac{j!}{\mu! p!} + p \frac{j!}{\mu! p!} \\ & \leq (|\mu| + p) \frac{j!}{\mu! p!} \\ & \leq \frac{(j+1)!}{\mu! p!}. \end{aligned}$$

D'où la proposition.

D'après les propriétés de la solution fondamentale du Laplacien décrites dans la proposition 8.2.1, on a

$$\|\partial_{(\nu)} \nabla E_d \underset{p+2}{\star} (\mathcal{V}^{(\mu)} \cdot v^{(\nu)})\|_{L^\infty([0,T];C^r)} \leq C_1^{p+2} ((p-2)^+)! C_0^{|\mu|} (\|v\|_{T,r})^{|\mu|+p+2} \mu! \Pi^{(2)}_{\mu}.$$

Il en résulte que l'on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}^{j+1} v\|_{T,r} & \leq (C_1 d)^2 j! C_0^j \sum_{(p,\mu) \in J(j)} \Pi^{(2)}_{\mu} \left(\frac{C_1 d}{C_0} \right)^p \frac{((p-2)^+)!}{p!} \\ & \leq \frac{(C_1 d)^2}{C_0} C_0^{j+1} (\|v\|_{T,r})^{j+2} \frac{(j+1)!}{(j+1)^2} \\ & \qquad \times (j+1)^2 \sum_{(p,\mu) \in J(j)} \Pi^{(2)}_{\mu} \left(\frac{C_1 d}{C_0} \right)^p \frac{((p-2)^+)!}{p!}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 7.3.3, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}^{j+1} v\|_{T,r} \leq \frac{(C_1 d)^2}{C_0} C_0^{j+1} (\|v\|_{T,r})^{j+2} & \frac{j!}{(j+1)^2} \\ & \times \sum_{p=0}^{j} \left(\frac{C_1 C_2}{C_0} \right)^p \frac{((p-2)^+)!}{p!} \left(\frac{j+2}{j+1-p} \right)^2. \end{aligned}$$

Il est évident que

$$\sum_{p=0}^{2} \left(\frac{C_1 C_2}{C_0} \right)^p \frac{((p-2)^+)!}{p!} \left(\frac{j+2}{j+1-p} \right)^2 \leq C_3.$$

De plus, l'inégalité (7.27) permet d'affirmer, que, si $C_1 C_2 \leq C_0$, alors, on a

$$\sum_{p=0}^{j} \left(\frac{C_1 C_2}{C_0} \right)^p \frac{((p-2)^+)!}{p!} \left(\frac{j+2}{j+1-p} \right)^2 \leq C_4.$$

En prenant C_0 suffisamment grande par rapport aux constantes C_i, i compris entre 1 et 4, on obtient

$$\|\mathcal{V}^{j+1}v\|_{T,r} \leq C_0^{j+1}(\|v\|_{T,r})^{j+2}\frac{(j+1)!}{(j+2)^2},$$

ce qui est l'estimation (8.17) au cran $j+1$.

Dans le cas Gevrey, nous allons démontrer, toujours par récurrence, l'estimation suivante : il existe une constante C_0 telle que, pour tout ϵ de l'intervalle $]0,1/2]$, pour tout entier k tel que $2\epsilon(k+1) \leq 1$, on ait, pour tout $j \leq k$,

$$\|\mathcal{V}^j v\|_{T,1-j\epsilon} \leq \left(\frac{C_0}{\epsilon}\right)^{2j}(\|v\|_{T,1-\epsilon})^{j+1}\frac{j!}{(j+1)^2}. \tag{8.19}$$

L'inégalité ci-dessus est clairement vraie pour $j=1$. Supposons la vraie pour j. On utilise la proposition 8.3.1 et le theorème 8.2.1 avec $(\epsilon_q)_{-1\leq q\leq p}$ définie par $\epsilon_q = \epsilon(\mu_q+1)$; on en déduit que

$$\begin{aligned}\|\partial_{(\nu)}\nabla E_d \underset{p+2}{\star} \mathcal{V}^{(\mu)}\cdot v^{(\nu)}\|_{T,1-\epsilon(k+2)} &\leq \left(\frac{C_1}{\epsilon}\right)^{p+2}((p-2)^+)! \\ &\times\left(\sum_{q=-1}^{p}\frac{1}{k+2-\mu_q}\right)\prod_{q=-1}^{p}\|\mathcal{V}^{\mu_q}v^{\nu_q}\|_{T,1-\epsilon_q}.\end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{q=-1}^{p}\frac{1}{k+2-\mu_q} \leq \frac{p+2}{k+2-|\mu|}.$$

Comme $|\mu| = k-p$, il vient

$$\sum_{q=-1}^{p}\frac{1}{k+2-\mu_q} \leq 1.$$

Ainsi, en rappelant que

$$\Pi_\alpha^{(2)} = \prod_{q=1}^{p}\frac{1}{(\alpha_q+1)^2},$$

on a, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}&\|\partial_{(\nu)}\nabla E_d \underset{p+2}{\star} \mathcal{V}^{(\mu)}\cdot v^{(\nu)}\|_{T,1-\epsilon(k+2)} \\ &\qquad\leq \left(\frac{C_1}{\epsilon}\right)^{p+2}((p-2)^+)!\left(\frac{C_0}{\epsilon}\right)^{2|\mu|}\mu!(\|v\|_{T,1-\epsilon})^{|\mu|+p+2}\Pi_\mu^{(2)}.\end{aligned}$$

En remarquant que $2|\mu|+p+2 \leq 2(k+1)$, on déduit de l'inégalité (7.3.3) et de la proposition 8.3.1 que

$$\begin{aligned}\|\partial_{(\nu)}\nabla E_d \underset{p+2}{\star} \mathcal{V}^{(\mu)}\cdot v^{(\nu)}\|_{T,1-\epsilon(k+2)} &\leq \frac{C_2(C_1 d)^2}{C_0}(\|v\|_{T,1-\epsilon})^{k+2} \\ \times\left(\frac{C_0}{\epsilon}\right)^{2(k+1)}\frac{(k+1)!}{(k+2)^2}&\sum_{p=0}^{k}\left(\frac{C_1C_2}{C_0}\right)^p\frac{((p-2)^+)!}{p!}\left(\frac{(k+2)^2}{(k+1-p)^2}\right).\end{aligned}$$

Comme précédemment, on conclut en prenant C_0 assez grand.

Corollaire 8.3.1 *Il existe une constante C_0 vérifiant les propriétés suivantes, pour toute solution v du système d'Euler, indéfiniment différentiable sur $[0,T] \times \mathbf{R}^d$. Pour tout réel ϵ de l'intervalle $]0,1/2]$ et pour tout entier k, on a*

$$\|(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v\|_{T,1-\epsilon} \leq \left(\frac{C}{\epsilon}\right)^{2k} (\|v\|_{T,1})^{k+1}(k!)^3.$$

En effet, soit k un quelconque entier strictement positif. On pose

$$\epsilon_k = \frac{\epsilon}{k+1}$$

et l'on applique l'inégalité (8.18) avec ϵ_k. Il en résulte que

$$\|(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v\|_{T,1-\epsilon} \leq \left(\frac{C_0(k+1)}{\epsilon}\right)^{2k} (\|v\|_{T,1-\epsilon_k})^{k+1} k!.$$

Comme il est clair que $\|a\|_{1-\epsilon_k} \leq \|a\|_1$, on obtient ainsi le corollaire.

Pour conclure la démonstration des théorèmes 8.1.1 et 8.1.2, il suffit de faire un passage à la limite itéré dans les expressions du type

$$(\partial_t + v_n\cdot\nabla)^k v_n.$$

Il suffit bien sûr de le faire dans le cas des estimations de type Gevrey. A nouveau, on procède par récurrence. Supposons que, pour tout $j \leq k$ et pour tout ϵ strictement positif, on ait

$$\lim_{n\to\infty} (\partial_t + v_n\cdot\nabla)^k v_n = (\partial_t + v\cdot\nabla)^k v \quad \text{dans} \quad L^\infty([0,T];C^{1-\epsilon}).$$

Les champs de vecteurs v_n étant de divergence nulle, on a

$$\begin{aligned}(\partial_t + v_n\cdot\nabla)^{k+1} v_n^\nu &= (\partial_t + v_n\cdot\nabla)((\partial_t + v_n\cdot\nabla)^k v_n^\nu)\\ &= \partial_t((\partial_t + v_n\cdot\nabla)^k v_n^\nu) + \mathrm{div}(v_n^\nu(\partial_t + v_n\cdot\nabla)^k v_n).\end{aligned}$$

Les espaces $C^{1-\epsilon}$ étant des algèbres, on a

$$\lim_{n\to\infty} v_n^\nu(\partial_t + v_n\cdot\nabla)^k v_n = v^\nu(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v \quad \text{dans} \quad L^\infty([0,T];C^{1-\epsilon}).$$

Donc la suite $((\partial_t + v_n\cdot\nabla)^{k+1} v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans l'espace des distributions et elle est bornée dans $L^\infty([0,T];C^{1-\epsilon})$ et ce, pour tout ϵ strictement positif. Donc, on a bien $(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v \in L^\infty([0,T];C^{1-\epsilon})$ et

$$\|(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v\|_{T,1-\epsilon} \leq \left(\frac{C}{\epsilon}\right)^{k} (\|v\|_{T,1})^{k+1}(k!)^2.$$

8.4 Références et remarques

Les résultats de régularité en temps semblent être implicitement contenus dans les travaux de Lichtenstein datant des années trente et exposés dans [52], les méthodes utilisées étant de type lagrangiennes. Cependant, c'est dans [26] et [28] que la régularité C^∞ est explicitement démontrée, à la fois pour les solutions régulières en toute dimension, et pour les solutions de Yudovich en dimension deux, et ce avec des méthodes de type eulériennes. On y ajoute le fait que le front d'onde C^∞ de la solution est inclus dans

$$\{(t,x;\tau,\xi)\ /\ \tau + (v(t,x)|\xi) = 0\}.$$

L'analyticité en temps du flot a été explicitement démontré, grâce à des méthodes lagrangiennes, par P. Serfati dans [57], en ce qui concerne les solutions régulières, c'est-à-dire de classe C^r avec r strictement supérieur à 1. P. Gamblin a redémontré ce résultat dans [42] par une méthode de type eulérienne lui permettant de démontrer la régularité Gevrey 3 en temps du flot pour une solution dont le tourbillon est borné. Dans ce cas, la méthode de P. Serfati permet d'obtenir l'analyticité en temps du flot dans des cas particuliers de régularité tangentielle par rapport à des familles de surfaces ou des courbes. Ces résultats sont annoncés dans [59] et des détails sont exposés dans [57]. Signalons que P. Serfati a aussi démontré, dans [57], l'analyticité en temps petit du flot dans le cas de poches de tourbillon qui sont de petites perturbations d'un cercle.

Enfin, nous n'avons pas abordé le problème de la propagation de l'analyticité en espace. Pour des résultats à ce sujet, nous renvoyons le lecteur aux travaux pionniers de S. Baouendi et C. Goulaouic (voir [9]), à ceux de C. Bardos et S. Benachour (voir [10] et [11]) et à celui plus récent de J.-M. Delort(voir [33]).

Chapitre 9

Poches de tourbillon singulières

9.1 Présentation du problème

Dans ce chapitre final, nous allons nous intéresser au cas où dégénère la structure géométrique qui, aux chapitres 3 et 5, permettait de démontrer que le champ de vecteurs de divergence nulle associé à un tourbillon borné et tangentiellement régulier par rapport à cette structure était lipschitzien.

Nous avons déjà rencontré ce cas lorsque nous avons considéré des tourbillons qui étaient constants sur des carrés. Les sommets de ces carrés sont bien évidemment des singularités de la géométrie. Le but de cet ultime chapitre est d'étudier de manière générale ce type de situation. Les exemples des sections 3.2 et 5.3 semblent indiquer que les dérivées du champ de vecteurs croissent, au voisinage du point singulier, comme le logarithme de la distance au point singulier. On démontre facilement à partir du théorème 3.3.1 que ce fait est général. Cette croissance logarithmique sera l'un des points clefs de la démonstration de la persistance des structures géométriques singulières dont l'énoncé est le but de cette section.

Avant d'énoncer le théorème général, nous allons exposer un cas particulier. Soient f_0 une fonction réelle du plan de classe $C^{1+\epsilon}$ et Γ_0 une réunion finie de courbes fermées continues simples se coupant en un nombre fini de points. On suppose que Γ_0 est l'ensemble des zéros de f_0. Désignons par Σ_0 l'ensemble singulier de Γ_0, c'est-à-dire l'ensemble des points de Γ_0 où le gradient de f_0 s'annule. Pour éviter la présence d'arcs tangents entre eux à l'ordre infini, on suppose l'existence d'un voisinage V_0 de Γ_0 telle que, pour tout point x de V_0, on ait

$$|\nabla f_0(x)| \geq d(x, \Sigma_0)^{-\gamma_0}.$$

Considérons maintenant ω_0 la fonction caractéristique de la réunion des intérieurs des courbes constituant Γ_0. Le problème sur lequel nous allons nous pencher pour conclure ce livre est le suivant : soit v_0 le champ de vecteurs de divergence nulle dont le tourbillon est ω_0 ; désignons par v la solution de Yudovich du système d'Euler. Le tourbillon $\omega(t)$ est-il, à l'instant t, la fonction caractéristique d'un domaine du même type?

La réponse sera moins définitive que lorsque le bord du domaine est régulier. Néanmoins, nous obtiendrons le résultat suivant :

Théorème 9.1.1 *Soit D_0 un domaine borné du plan dont le bord Γ_0 est une courbe de classe $C^{1+\epsilon}$ en dehors d'un fermé Σ_0. Considérons la solution de Yudovich associée au champ de vecteurs v_0 de l'espace E_m (espace dont la définition est donnée page 17) tel que $\omega(v_0) = \mathbf{1}_{D_0}$.*

A l'instant t, le domaine $D(t) = \psi(t, D_0)$ a un bord $\Gamma(t)$ qui est de classe $C^{1+\epsilon}$ en dehors du fermé $\Sigma(t) = \psi(t, \Sigma_0)$.

Nous n'allons bien sûr pas démontrer un tel théorème sous cette forme. La méthode employée s'inspire de celle utilisée pour démontrer les théorèmes du chapitre 5. Quelques difficultés supplémentaires apparaissent. En effet, comme le montrent les exemples des chapitres 3 et 5, il est vain d'espérer que le champ de vecteurs solution, ou même son flot, soit lipschitzien. Transporter une structure géométrique, c'est-à-dire des champs de vecteurs, par un champ de vecteurs non lipschitzien ne paraît pas des plus raisonnables. Cependant, comme le laisse penser le théorème 3.3.1, le champ de vecteurs v solution du système d'Euler sera lipschitzien en dehors du lieu singulier.

Pour parer à cette difficulté née du manque de régularité du champ de vecteurs v, nous allons étudier le champ de vecteurs v et la structure géométrique liée au bord du domaine, en restant prudemment à une distance strictement plus grande que h de l'ensemble singulier Σ, h étant un petit paramètre strictement positif. Tout le travail consiste alors à démontrer des inégalités du type de celles du chapitre 5, en contrôlant soigneusement la dépendance en h.

Il est maintenant temps d'introduire les données géométriques, puis d'énoncer le théorème général relatif à leur persistance, et enfin d'expliquer comment ce théorème implique le théorème 9.1.1.

Rappelons que, si A est un ensemble du plan, et α un réel strictement positif, on désignera par A_α l'ensemble des points du plan à distance inférieure ou égale à α de A. De plus, dans toute la suite, on conviendra, dans le but d'éviter d'inutiles paranthèses, que A^c_α est l'ensemble des points à distance plus grande que α de A.

Définition 9.1.1 *Soient Σ un fermé du plan et Ξ un triplet (α, β, γ) de réels; on considère une famille $\mathcal{X} = (X_{\lambda,h})_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]}$ de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence. On pose $\mathcal{X}_h = (X_{\lambda,h})_{\lambda\in\Lambda}$.*

La famille $\mathcal{X}$ sera dite Σ-admissible d'indice Ξ si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\forall (\lambda, h) \in \Lambda\times]0, e^{-1}]\,,\ \text{Supp}\ X_{\lambda,h} \subset \Sigma^c_{h^\alpha}\,; \tag{9.1}$$

$$\mathcal{I}_\gamma(\Sigma, \mathcal{X}) \overset{\text{déf}}{=} \inf_{h\in]0,e^{-1}]} h^\gamma I(\Sigma_h, \mathcal{X}_h) > 0\,; \tag{9.2}$$

$$\mathcal{N}_\epsilon(\mathcal{X}) \overset{\text{déf}}{=} \sup_{h\in]0,e^{-1}]} h^{-\beta} N_\epsilon(\Sigma_h, \mathcal{X}_h) < \infty, \tag{9.3}$$

où, comme au chapitre 5, on définit $I(\Sigma_h, \mathcal{X}_h)$ et $N_\epsilon(\Sigma_h, \mathcal{X}_h)$ par

$$\begin{aligned} I(\Sigma_h, \mathcal{X}_h) &= \inf_{x\notin\Sigma_h} \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_{\lambda,h}(x)| \quad \textit{et} \\ N_\epsilon(\Sigma_h, \mathcal{X}_h) &= \frac{1}{\epsilon} \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_{\lambda,h}\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_{\lambda,h}\|_\epsilon}{I(\Sigma_h, \mathcal{X}_h)}. \end{aligned}$$

Remarque De telles familles étant censées décrire des géométries singulières dont le lieu singulier est Σ, il est naturel de penser β et γ comme deux nombres strictement négatifs, ce qui sera toujours le cas.

Introduisons maintenant la notion de régularité tangentielle par rapport à une telle famille.

Définition 9.1.2 *Soient Σ un fermé du plan et $\mathcal{X}$ une famille Σ-admissible d'indice $\Xi = (\alpha, \beta, \gamma)$. On dit qu'une fonction u appartient à l'espace $C^{\epsilon,\beta}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ si et seulement si la fonction u est bornée et*

$$\|u\|^{\epsilon,\beta}_{\Sigma,\mathcal{X}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{h\in]0,e^{-1}]} h^{-\beta}\|u\|^{\epsilon}_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h} < \infty,$$

où, comme au chapitre 5, $\|u\|^{\epsilon}_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h}$ est définie par

$$\|u\|^{\epsilon}_{\Sigma_h,X_h} = N_\epsilon(\Sigma_h, \mathcal{X}_h)\|u\|_{L^\infty} + \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_{\lambda,h}(x, D)u\|_{\epsilon-1}}{I(\Sigma_h, \mathcal{X}_h)}.$$

Nous allons maintenant énoncer le théorème de persistance des structures géométriques singulières qui contient le théorème 9.1.1 précédent.

Théorème 9.1.2 *Soient Σ_0 un fermé du plan et m un réel. On considère un champ de vecteurs de divergence nulle v_0 appartenant à E_m et dont le tourbillon ω_0 est borné et à support compact. Désignons par v la solution de Yudovitch du système d'Euler, par ψ son flot et posons $\Sigma(t) = \psi(t, \Sigma_0)$. On se donne alors une famille $\mathcal{X}_0$ de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence. On suppose que cette famille est d'indice $\Xi_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ et que*

$$\omega_0 \in C^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}.$$

Pour tout temps t, il existe une famille $\mathcal{X}(t)$ de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence ; cette famille $\mathcal{X}(t)$ est $\Sigma(t)$-admissible d'indice $\Xi(t)$ et l'on a

$$\omega(t) \in C^{\epsilon,\beta(t)}_{\Sigma(t),\mathcal{X}(t)},$$

l'indice $\Xi(t)$ étant donné par

$$\begin{aligned}
\Xi(t) &= (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \quad \textit{avec}\\
\alpha(t) &= \alpha_0 \exp(Ct\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1}),\\
\beta(t) &= \left(\beta_0 - \frac{C}{\epsilon}L(\omega_0, t)\right)\exp(Ct\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1}),\\
\gamma(t) &= \left(\gamma_0 - \frac{C}{\epsilon}L(\omega_0, t)\right)\exp(Ct\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1}) \quad \textit{et}\\
L(\omega_0, t) &= \left(\log\left(e + \frac{\|\omega_0\|^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1}}\right) - \beta_0\right)\left(e^{\frac{1}{\epsilon}\exp(Ct\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1})} - e^{\frac{1}{\epsilon}}\right).
\end{aligned}$$

De plus, on sait que, pour tout $(\lambda, h) \in \Lambda\times]0, e^{-1}]$, on a

$$X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x, D)\psi(t, x) \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^\epsilon).$$

Enfin, le champ de vecteurs $v(t)$ est lipschitzien en dehors de $\Sigma(t)$; plus précisément, on a

$$\sup_{h\in]0,e^{-1}]} \frac{\|\nabla v(t)\|_{L^\infty((\Sigma(t))_h^c)}}{-\log h} \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}).$$

La démonstration de ce théorème est l'objet de la fin de ce livre. Nous allons tout d'abord vérifier qu'il implique bien le théorème 9.1.1. Pour cela, considérons une équation f_0 de classe $C^{1+\epsilon}$ du bord de D_0 telle que, sur un voisinage V_0 du bord de D_0, on ait

$$|\nabla f_0(x)| \geq d(x,\Sigma_0)^{-\gamma_0}.$$

Soit $(\theta_h)_{h\in]0,e^{-1}]}$ une famille de fonctions indéfiniment différentiables valant 1 sur $(\Sigma_0)_h^c$ et supportées dans $(\Sigma_0)_{h^\alpha}^c$ et telle que, pour tout réel strictement positif r, on ait

$$\|\theta_h\|_r \leq C_r h^{-r}.$$

On se donne enfin une fonction $\widetilde{\theta}$, indéfiniment différentiable, et valant 1 près de V_0. Posons

$$\begin{aligned} X_{0,1,h} &= \nabla^\perp(\theta_h f_0), \\ X_{0,2,h} &= \theta_h(1-\widetilde{\theta})\partial_1 \quad \text{et} \\ X_{0,3,h} &= \theta_h(1-\widetilde{\theta})\partial_2. \end{aligned}$$

Il est clair que la famille $\mathcal{X}_0$ définie par

$$\mathcal{X}_0 = (X_{0,j,h})_{j\in\{1,2,3\}\times]0,e^{-1}]}$$

est Σ_0-admissible. Le théorème ci-dessus affirme qu'alors

$$X_{0,j,\delta(t,h)}(x,D)\psi(t,x) \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^\epsilon).$$

Nous allons en déduire que le bord de $D(t)$ est, en dehors de $\Sigma(t)$, une courbe de classe $C^{1+\epsilon}$. L'argument est analogue à celui utilisé page 95 dans le cas des poches à bord régulier. Rappelons brièvement cet argument. Soit x_0 un point de $\Gamma_0 \setminus \Sigma_0$; désignons alors par γ_0 la solution de

$$\begin{cases} \partial_\sigma\gamma_0(\sigma) &= \nabla^\perp f_0(\gamma_0(\sigma)) \\ \gamma_0(0) &= x_0. \end{cases}$$

On considère la fonction

$$\gamma(t,\sigma) = \psi(t,\gamma_0(\sigma)).$$

D'après le théorème de persistance ci-dessus, on a, pour tout h de l'intervalle $]0,e^{-1}]$,

$$X_{0,1,h}(x,D)\psi(t,x) \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^\epsilon).$$

En prenant h assez petit et en différenciant la relation de définition de γ, on en déduit, pour σ assez proche de 0, que

$$\partial_\sigma\gamma(t,\sigma) = (\nabla^\perp f_0)(t,\gamma_0(\sigma)).$$

Il en résulte que $\gamma(t,\cdot)$ est de classe $C^{1+\epsilon}$ localement près de 0. De plus, le fait que le flot $\psi(t)$ soit lipschitzien près de x_0 assure que $\gamma(t,\cdot)$ est, localement près de $\psi(t,x_0)$, un paramétrage $C^{1+\epsilon}$ de $\Gamma(t)\setminus\Sigma(t)$, d'où le théorème 9.1.1.

9.2 Théorie de Littlewood-Paley locale.

Le but de cette section est la démonstration de quelques lemmes qui montrent le caractère "pseudo-local" de la théorie de Littlewood-Paley. Dans toute la suite, nous utiliserons divers espaces fonctionnels que nous allons définir dès maintenant.

Définition 9.2.1 *Un réel a plus grand que 1 étant donné, on appelle L (nous omettrons toujours de noter la dépendance en a) l'espace des fonctions u telles que*

$$\|u\|_L \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{b \geq a} \frac{\|u\|_{L^b}}{b} < \infty.$$

Soient Σ un fermé du plan et h_0 un réel de l'intervalle $]0, e^{-1}]$, on appelle $L(\Sigma)$ l'espace des fonctions u telles que

$$\|u\|_{L(\Sigma)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{h \leq e^{-1}} \frac{\|u\|_{L^\infty(\Sigma_h^c)}}{-\log h} < \infty \ ;$$

on appelle $LL(\Sigma)$ l'espace $L \cap L(\Sigma)$ et l'on pose

$$\|u\|_{LL(\Sigma)} = \|u\|_L + \|u\|_{L(\Sigma)} \ ;$$

et enfin, on appelle $LL^0(\Sigma)$, l'espace $LL(\Sigma) \cap C^0_\star$ et l'on pose

$$\|u\|_{LL^0(\Sigma)} = \|u\|_{LL(\Sigma)} + \|u\|_0.$$

Le premier lemme que nous allons démontrer, fort simple, nous sera néammoins utile.

Lemme 9.2.1 *Il existe une constante C telle que, étant donné un fermé K de $\mathbf{R}^d$, une fonction g de S et une fonction u de L nulle en dehors de K, on ait, en posant*

$$g_\lambda(x) = \lambda^d g(\lambda x) \quad et \quad N(g) = \|(1 + |\cdot|)g\|_{L^1 \cap L^\infty},$$

les inégalités suivantes, et ce pour tout $(\lambda, h) \in [e, \infty[\times]0, e^{-1}]$;

$$\|g_\lambda \star u\|_{L^\infty} \leq edN(g)\|u\|_L \log \lambda \quad et \quad \|g_\lambda \star u\|_{L^\infty(K_h^c)} \leq -edN(g)\|u\|_L \log h.$$

L'inégalité de Hölder et la définition de l'espace L assurent que

$$\begin{aligned} \|g_\lambda \star u\|_{L^\infty} &\leq \|g_\lambda\|_{L^{\frac{b}{b-1}}} \|u\|_{L^b} \\ &\leq \lambda^{\frac{d}{b}} \|g\|_{L^1 \cap L^\infty} \|u\|_{L^b} \\ &\leq b\lambda^{\frac{d}{b}} \|g\|_{L^1 \cap L^\infty} \|u\|_L. \end{aligned} \tag{9.4}$$

On choisit $b = d \log \lambda$. Il vient alors

$$\|g_\lambda \star u\|_{L^\infty} \leq d\|g\|_{L^1 \cap L^\infty} \|u\|_L \log \lambda \times \lambda^{\frac{1}{\log \lambda}}.$$

D'où il vient que

$$\|g_\lambda \star u\|_{L^\infty} \leq ed\|g\|_{L^1 \cap L^\infty} \|u\|_L \log \lambda.$$

Supposons $e \leq \lambda \leq h^{-1}$; il résulte de l'inégalité ci-dessus que

$$\|g_\lambda \star u\|_{L^\infty} \leq -ed\|g\|_{L^1\cap L^\infty}\|u\|_L \log h. \tag{9.5}$$

Passons maintenant au cas des grandes fréquences, c'est-à-dire celui où $\lambda \geq h^{-1} \geq e$. Comme x n'appartient pas à K_h, on a, en posant $\widetilde{g}(x) = |x| \times |g(x)|$,

$$\begin{aligned} |(g_\lambda \star u)(x)| &= \left|\int_{|x-y|\geq h} g_\lambda(x-y)u(y)dy\right| \\ &\leq \int_{|x-y|\geq h} \frac{|x-y|}{h}|g_\lambda(x-y)| \times |u(y)|dy \\ &\leq (\lambda h)^{-1}(\widetilde{g}_\lambda \star |u|)(x). \end{aligned}$$

Il en résulte, grâce à l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned} \|g_\lambda \star u\|_{L^\infty(K_h^c)} &\leq (\lambda h)^{-1}\lambda^{\frac{d}{b}}\|\widetilde{g}\|_{L^1\cap L^\infty}\|u\|_{L^b} \\ &\leq bh^{-\frac{d}{b}}(\lambda h)^{\frac{d}{b}-1}\|\widetilde{g}\|_{L^1\cap L^\infty}\|u\|_L. \end{aligned}$$

Comme on a supposé que $\lambda h \geq 1$, il vient, pour $b \geq d$,

$$\|g_\lambda \star u\|_{L^\infty(K_h^c)} \leq bh^{-\frac{d}{b}}\|\widetilde{g}\|_{L^1\cap L^\infty}\|u\|_L.$$

En prenant $b = -d\log h$, on conclut la démonstration du lemme.

Le lemme suivant exprime de quelle manière la convolution est (presque) locale.

Lemme 9.2.2 *Soit g une fonction de $\mathcal{S}$. Un réel strictement positif λ étant donné, on posera $g_\lambda(x) = \lambda^d g(\lambda x)$. Pour tout réel positif N et pour tout réel r, il existe une constante C telle que, pour tout fermé K et pour toute distribution u appartenant à C^r et supportée dans K, on ait*

$$\|g_\lambda \star u\|_{L^\infty(K_h^c)} \leq C\lambda^{-r}(\lambda h)^{-N}\|u\|_r,$$

et ce pour tout couple de réels (λ, h) tel que λ et $\lambda h \geq 1$.

Soit ρ une fonction indéfiniment différentiable, positive, supportée dans la boule unité et valant identiquement 1 sur la boule de rayon 1/2 centrée à l'origine. Il est alors clair que

$$\begin{aligned} (g_\lambda \star u)(x) &= \lambda^d \int_{\mathbf{R}^d} g(\lambda(x-y))u(y)dy \\ &= \lambda^d \int_{\mathbf{R}^d} g(\lambda(x-y))(1-\rho)\left(\frac{\lambda(x-y)}{\lambda d(x,K)}\right)u(y)dy. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Posons

$$\mu = \lambda d(x,K)\,, \quad q_\lambda = [\log_2 \lambda] \quad \text{et} \quad \widetilde{g}^\mu(x) = g(x)(1-\rho)\Big(\frac{x}{\mu}\Big)\cdot$$

Remarquons que, pour tout α de $\mathbf{N}^d$ et tout couple d'entiers positifs (N, M), il existe une constante C telle que l'on ait

$$\||\cdot|^M\partial^\alpha\widetilde{g}^\mu\|_{L^1} \leq C\mu^{-N}. \tag{9.7}$$

D'après l'égalité (9.6) ci-dessus, il vient, pour tout x n'appartenant pas à K,

$$(g_\lambda \star u)(x) = (\tilde{g}^\mu_\lambda \star u)(x).$$

De plus, pour tout x n'appartenant pas à K, on a

$$(g_\lambda \star u)(x) = \lambda^d \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{g}^\mu(\lambda(x-y))(u(y)-u(x))dy.$$

En décomposant u suivant la taille par rapport à λ de ses fréquences, il vient alors, pour tout x n'appartenant pas à K,

$$\begin{aligned}
(g_\lambda \star u)(x) &= \sum_{j=1}^{3} I^j_\lambda(x) \quad \text{avec}\\
I^1_\lambda(x) &= (\tilde{g}^\mu_\lambda \star (\mathrm{Id} - S_{q_\lambda})u)(x), \\
I^2_\lambda(x) &= \lambda^d \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{g}^\mu(\lambda(x-y))(S_{q_\lambda}u(y) - S_{q_\lambda}u(x))dy \quad \text{et}\\
I^3_\lambda(x) &= -((\mathrm{Id} - S_{q_\lambda})u)(x) \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{g}^\mu(y)dy.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Majorons $I^1_\lambda(x)$. Remarquons tout d'abord que

$$I^1_\lambda(x) = < (\tilde{g}^\mu)_\lambda(x-\cdot), (\mathrm{Id} - S_{q_\lambda})u > .$$

Les multiplicateurs de Fourier réels sont auto-adjoints et invariants par translation, donc

$$I^1_\lambda(x) = < ((\mathrm{Id} - S_{q_\lambda})(\tilde{g}^\mu)_\lambda)(x-\cdot), u > .$$

Par construction des opérateurs Δ_q, on a

$$|I^1_\lambda(x)| \leq \sum_{\substack{q \geq q_\lambda \\ |j| \leq 1}} \|\Delta_q((\tilde{g}^\mu)_\lambda(x-\cdot))\|_{L^1} \|\Delta_{q-j} u\|_{L^\infty}.$$

Par définition des espaces de Hölder, il vient

$$|I^1_\lambda(x)| \leq C\|u\|_r \sum_{q \geq q_\lambda} 2^{-qr} \|\Delta_q((\tilde{g}^\mu)_\lambda(x-\cdot))\|_{L^1}.$$

Majorons maintenant la quantité

$$\sum_{q \geq q_\lambda} 2^{-qr} \|\Delta_q(\tilde{g}^\mu)_\lambda\|_{L^1} = \sum_{q \geq q_\lambda} 2^{-qr} \int_{\mathbf{R}^d} \Big| \int_{\mathbf{R}^d} 2^{qd} \lambda^d h(2^q(x-y)) \tilde{g}^\mu(\lambda y) dy \Big| dx.$$

On utilise le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' &=& \lambda y \\ q' &=& q - q_\lambda \\ x' &=& \lambda x \; ; \end{array} \right.$$

d'où il ressort que

$$\sum_{q \geq q_\lambda} 2^{-qr} \|\Delta_q(\tilde{g}^\mu)_\lambda\|_{L^1} \leq C\lambda^{-r} \sum_q 2^{-qr} \|\Delta_q \tilde{g}^\mu\|_{L^1}.$$

Vu la définition de $\tilde{g}^\mu$, le lemme 2.1.1 assure que

$$\sum_q 2^{-qr}\|\Delta_q \tilde{g}^\mu\|_{L^1} \leq C \sum_{|\alpha|\leq \max\{0,[r]+1\}} \|\partial^\alpha \tilde{g}^\mu\|_{L^1},$$

ce qui, d'après (9.7), assure que

$$\sum_q 2^{-qr}\|\Delta_q \tilde{g}^\mu\|_{L^1} \leq C_N(\lambda d(x,K))^{-N}.$$

D'où il vient que, pour tout réel r, on a

$$|I^1_\lambda(x)| \leq C\lambda^{-r}(\lambda d(x,K))^{-N}\|u\|_r.$$

Supposons maintenant r strictement négatif. Il est clair que

$$\begin{aligned} |I^2_\lambda(x) + I^3_\lambda(x)| &= (\tilde{g}^\mu)_\lambda \star S_{q_\lambda}u(x)\\ &\leq \|\tilde{g}^\mu\|_{L^1}\|S_{q_\lambda}u\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

D'après les inégalités (9.7) et (2.18), il en résulte que

$$|I^2_\lambda(x) + I^3_\lambda(x)| \leq C_{N,r}\|u\|_r\lambda^{-r}(\lambda d(x,K))^{-N}, \tag{9.9}$$

ce qui entraine que, pour tout réel r strictement négatif,

$$\|(g_\lambda \star u)\|_{L^\infty(K^c_h)} \leq C\lambda^{-r}(\lambda d(x,K))^{-N}\|u\|_r. \tag{9.10}$$

Supposons maintenant r positif. D'après la formule (2.2), il existe une suite de fonctions $(g^\alpha)_{|\alpha|=[r]+1}$ dont les transformées de Fourier sont supportées dans une couronne fixe et telle que, pour tout entier q, on ait

$$\Delta_q u = \sum_{|\alpha|=[r]+1}^{d} 2^{-q([r]+1)}(g^\alpha)_{2^q} \star \partial^\alpha u.$$

Comme le support de $\partial^\alpha u$ est inclus dans celui de u, et que $r-[r]-1$ est strictement négatif, il résulte de l'inégalité (9.10) que, pour tout N et pour tout réel r,

$$|\Delta_q u(x)| \leq C_N 2^{-qr}(2^q d(x,K))^{-N}\|u\|_r. \tag{9.11}$$

Majorons $|I^2_\lambda(x)|$. Pour cela, remarquons que, pour tout α de $\mathbf{N}^d$ et tout x n'appartenant pas au support de u, on a

$$\begin{aligned} S_q\partial^\alpha u(x) &= S_q\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(x)\\ &= \sum_{p\geq q}\partial^\alpha\Delta_p u(x). \end{aligned}$$

On déduit de l'inégalité (9.11) ci-dessus que

$$|S_q\partial^\alpha u(x)| \leq C_{\alpha,N}2^{-q(r-|\alpha|)}(2^q d(x,K))^{-N}\|u\|_r.$$

L'inégalité de Taylor à l'ordre $[r]+1$ assure que

$$|S_{q_\lambda}u(y) - S_{q_\lambda}u(x)| \leq \sum_{j=0}^{[r]} C_j |y-x|^j \sup_{|\alpha|=j} |S_{q_\lambda}\partial^\alpha u(x)|$$
$$+ C_r|y-x|^{[r]+1} \sup_{|\alpha|=[r]+1} \|S_{q_\lambda}\partial^\alpha u\|_{L^\infty}.$$

Grâce aux inégalités (9.7) et (9.11) ci-dessus, on a, comme $\lambda h \geq 1$,

$$|I_\lambda^2(x)| \leq C\|u\|_r \lambda^{-r} \int_{\mathbf{R}^d} (1+|y|)^{[r]+1} |\tilde{g}^\mu(y)| dy,$$

ce qui, d'après l'inégalité (9.7), entraîne que

$$|I_\lambda^2(x)| \leq C\|u\|_r \lambda^{-r} (\lambda d(x,K))^{-N}.$$

Le terme $|I_\lambda^3(x)|$ est très facile à majorer. En effet, d'après l'inégalité (9.11), on a, comme x est supposé ne pas appartenir à K,

$$|(\mathrm{Id} - S_{q_\lambda})u(x)| \leq C_{N,r}\|u\|_r d(x,K)^{-N} \sum_{q \geq q_\lambda} 2^{-q(r+N)}.$$

D'où, en prenant $r+N$ strictement positif, il vient, pour tout r positif ou nul, pour tout N positif (strictement positif si $r=0$)

$$|I_\lambda^3(x)| \leq C\|u\|_r \lambda^{-r} (\lambda d(x,K))^{-N}.$$

Le lemme 9.2.2 est ainsi complètement démontré.

Enfin, si l'on se réfère au lemme 3.3.2, ainsi qu'à l'utilisation qui en est faite par exemple page 98 dans la démonstration du théorème 5.5.1, la nécessité du lemme suivant apparaît.

Lemme 9.2.3 *Soit r un réel, $\underline{h}$ une fonction telle que la fonction $\underline{\varphi} = \widehat{\underline{h}}$ soit indéfiniment différentiable à support compact et nulle près de l'origine, et N_0 un entier tel que $B(0, 2^{-N_0} \times 2/3) + \mathrm{Supp}\ \underline{\varphi}$ ne contienne pas l'origine. On définit alors l'opérateur $\underline{T}$ par*

$$\underline{T}_u f = \sum_q S_{q-N_0}(u) \underline{\varphi}(2^{-q}D) f.$$

Considérons alors un fermé Σ et une distribution f de C^r tels que $h = d(\mathrm{Supp}\ f, \Sigma)$ appartienne à l'intervalle $]0, e^{-1}]$. On a alors

$$\begin{aligned} \|\underline{T}_u f\|_r &\leq -C(\log h)\|u\|_{LL(\Sigma)}\|f\|_r \quad \textit{et} \\ \|[\Delta_q, \underline{T}_u]f\|_{L^\infty} &\leq -C(\log h) 2^{-q(r+1)} \|\nabla u\|_{LL^0(\Sigma)} \|f\|_r. \end{aligned}$$

Pour démontrer la première inégalité, majorons

$$\|S_{q-N_0}(u)\underline{\varphi}(2^{-q}D)f\|_{L^\infty}.$$

Remarquons tout d'abord que, si $q \leq -\log_2 h$, le lemme 9.2.1 entraîne que,

$$\begin{aligned} \|S_{q-N_0}u\|_{L^\infty} &\leq C(q+2)\|u\|_L \\ &\leq -C(\log h)\|u\|_L. \end{aligned}$$

Donc, si $q \leq -\log_2 h$, on a

$$\|S_{q-N_0}(u)\underline{\varphi}(2^{-q}D)f\|_{L^\infty} \leq -C(\log h)2^{-qr}\|u\|_L\|f\|_r. \tag{9.12}$$

Supposons maintenant que l'on ait $2^q h \geq 1$. Ecrivons alors

$$\begin{aligned} S_{q-N_0}(u)\underline{\varphi}(2^{-q}D)f &= \sum_{j=1}^{3} T^j_{q,h}(u,f) \quad \text{avec} \qquad (9.13)\\ T^1_{q,h}(u,f) &= S_{q-N_0}(\mathbf{1}_{\Sigma^c_{h/2}}u)\underline{\varphi}(2^{-q}D)f, \\ T^2_{q,h}(u,f) &= S_{q-N_0}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\mathbf{1}_{\Sigma^c_{3h/4}}\underline{\varphi}(2^{-q}D)f \quad \text{et} \\ T^3_{q,h}(u,f) &= S_{q-N_0}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\mathbf{1}_{\Sigma_{3h/4}}\underline{\varphi}(2^{-q}D)f. \end{aligned}$$

L'opérateur S_{q-N_0} est un opérateur de convolution par une fonction dont la norme L^1 est indépendante de q ; il en résulte que

$$\begin{aligned} \|S_{q-N_0}(\mathbf{1}_{\Sigma^c_{h/2}}u)\|_{L^\infty} &\leq C\|\mathbf{1}_{\Sigma^c_{h/2}}u\|_{L^\infty} \\ &\leq -C(\log h)\|u\|_{L(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\|T^1_{q,h}(u,f)\|_{L^\infty} \leq -C(\log h)2^{-qr}\|u\|_{L(\Sigma)}\|f\|_r. \tag{9.14}$$

Majorons maintenant $T^2_{q,h}(u,f)$. Appliquons le lemme 9.2.1 avec $K = \Sigma_{h/2}$, $h' = h/4$ et $\lambda = 2^q$; ce qui donne

$$\begin{aligned} \|S_{q-N_0}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\|_{L^\infty(\Sigma^c_{3h/4})} &\leq -C(\log h)\|\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u\|_L \\ &\leq -C(\log h)\|u\|_L. \end{aligned}$$

D'où il vient

$$\|T^2_{q,h}(u,f)\|_{L^\infty} \leq -C(\log h)2^{-qr}\|u\|_L\|f\|_r. \tag{9.15}$$

L'étude de $T^3_{q,h}(u,f)$ est légèrement plus délicate. C'est là que nous allons utiliser l'hypothèse sur le support de f. D'après l'inégalité (9.4), on a, pour tout $b \geq a$,

$$\begin{aligned} \|S_{q-N_0}(\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u)\|_{L^\infty} &\leq Cb2^{\frac{qd}{b}}\|\mathbf{1}_{\Sigma_{h/2}}u\|_L \\ &\leq Cb2^{\frac{qd}{b}}\|u\|_L. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Le point important est la majoration de $\|\underline{\varphi}(2^{-q}D)f\|_{L^\infty(\Sigma_{3h/4})}$. D'après le lemme 9.2.2, on a

$$\forall N,\ \exists C_N \ /\ \|\underline{\varphi}(2^{-q}D)f\|_{L^\infty(\Sigma_{3h/4})} \leq C_N 2^{-qr}(2^q h)^{-N}\|f\|_r.$$

D'où l'on déduit, pour tout N, l'existence d'une constante C_N telle que

$$\begin{aligned} \|T^3_{q,h}(u,f)\|_{L^\infty} &\leq C_N b 2^{\frac{qd}{b}} 2^{-qr}(2^q h)^{-N}\|u\|_L\|f\|_r \\ &\leq C_N b 2^{-qr} h^{-\frac{d}{b}}(2^q h)^{\frac{d}{b}-N}\|u\|_L\|f\|_r. \end{aligned}$$

On prend $b = -a \log h$. D'où il résulte que

$$\|T^3_{q,h}(u,f)\|_{L^\infty} \leq -C(\log h)2^{-qr}(2^q h)^{-\frac{d}{a\log h}-N}\|u\|_L\|f\|_r. \tag{9.17}$$

Comme $h \leq e^{-1}$ et $a \geq 1$, on a

$$-\frac{d}{a\log h} \leq d.$$

De plus, on a supposé que $2^q h \geq 1$; on en déduit que

$$\|T^3_{q,h}(u,f)\|_{L^\infty} \leq -C(\log h)2^{-qr}\|u\|_L\|f\|_r \ ;$$

ce qui, compte tenu des inégalités (9.12)–(9.17) assure la première partie du lemme.

Pour démontrer la seconde, commençons par écrire

$$[\Delta_q, \underline{T}_u]f = \sum_{|q'-q|\leq N_1} [\Delta_q, S_{q'-N_0}(u)]\underline{\varphi}(2^{-q'}D)f.$$

Par définition des opérateurs Δ_q, il vient

$$\begin{aligned} C_{q,q'}(u,f) &\stackrel{\text{déf}}{=} [\Delta_q, S_{q'-N_0}(u)]\underline{\varphi}(2^{-q'}D)f \\ &= \int_{\mathbf{R}^d}(S_{q'-N_0}(u)(x-2^{-q}y) - S_{q'-N_0}(u)(x))h(y)\underline{\varphi}(2^{-q'}D)f(x-2^{-q}y)dy. \end{aligned}$$

Une formule de Taylor à l'ordre deux assure que l'on a

$$\begin{aligned} C_{q,q'}(u,f) &= -2^{-q}\sum_{j=1}^{d} S_{q'-N_0}(\partial_j u)(x)\int_{\mathbf{R}^d} y^j h(y)\underline{\varphi}(2^{-q'}D)f(x-2^{-q}y)dy \\ &\quad + 2^{-2q}\sum_{j,k=1}^{d}\int_{\mathbf{R}^d\times[0,1]} y^j y^k h(y) S_{q'-N_0}(\partial_j\partial_k u)(x-t2^{-q}y) \\ &\qquad \times \underline{\varphi}(2^{-q'}D)f(x-2^{-q}y)dydt. \end{aligned}$$

En posant $\varphi_j = -i\partial_j\varphi$, il vient

$$\begin{aligned} C_{q,q'}(u,f) &= -2^{-q}\sum_{j=1}^{d} S_{q'-N_0}(\partial_j u)(x)\varphi_j(2^{-q}D)\underline{\varphi}(2^{-q'}D)f \\ &\quad + 2^{-2q}\sum_{j,k=1}^{d}\int_{\mathbf{R}^d\times[0,1]} y^j y^k h(y) S_{q'-N_0}(\partial_j\partial_k u)(x-t2^{-q}y) \\ &\qquad \times \underline{\varphi}(2^{-q'}D)f(x-2^{-q}y)dydt. \end{aligned}$$

Or, on sait que

$$\|S_{q'-N_0}(\partial_j\partial_k u)\|_{L^\infty} \leq C2^q\|\nabla u\|_0.$$

En appliquant la première partie du lemme, on en déduit que

$$\|C_{q,q'}(u,f)\|_{L^\infty} \leq -C(\log h)2^{-q(r+1)}\|\nabla u\|_{LL^0(\Sigma)}\|f\|_r.$$

D'où le lemme.

Nous allons maintenant donner un corollaire de ce lemme.

Corollaire 9.2.1 *Il existe une constante C vérifiant les propriétés suivantes. Soient ϵ un réel de l'intervalle $]0,1[$, Σ un fermé du plan, X un champ de vecteurs du plan de classe C^ϵ ainsi que sa divergence, et v un champ de vecteurs de divergence nulle dont le tourbillon ω est borné et dont le gradient appartient à l'espace $LL(\Sigma)$. Alors*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Supp} X \subset \Sigma_h^c &\Rightarrow X(x,D)v = Z_1(X,v) + Z_2(X,v) \quad \textit{avec} \\
\|Z_1(X,v)\|_\epsilon &\leq C\|X(x,D)\omega\|_{\epsilon-1} + \frac{C}{\epsilon}\|\operatorname{div} X\|_\epsilon\|\omega\|_0 \quad \textit{et} \\
\|Z_2(X,v)\|_\epsilon &\leq \frac{C}{\epsilon}\|X\|_\epsilon(\|\omega\|_0 - \|\nabla v\|_{LL(\Sigma)}\log h).
\end{aligned}$$

La démonstration de ce corollaire est tout à fait simple. D'après le lemme 3.3.2, on a

$$\begin{gathered}
X(x,D)v = W_1(X,v) + W_2(X,v) + W_3(X,v) + \sum_{j=1}^{2} T_{\partial_j v}X^j \quad \text{avec} \\
\|W_1(X,v)\|_\epsilon \leq C\|X(x,D)\omega\|_{\epsilon-1}, \\
\|W_2(X,v)\|_\epsilon \leq \frac{C}{\epsilon}\|X\|_\epsilon\|\omega\|_0 \quad \text{et} \\
\|W_3(X,v)\|_\epsilon \leq \frac{C}{\epsilon}\|\operatorname{div} X\|_\epsilon\|\omega\|_0.
\end{gathered}$$

Le lemme 9.2.3 affirme que, si le support de X est à distance supérieure à h de Σ, alors

$$\|T_{\partial_j v}X^j\|_\epsilon \leq -C\|\nabla v\|_{LL(\Sigma)}\|X\|_\epsilon \log h.$$

D'où le corollaire en posant

$$\begin{aligned}
Z_1(X,V) &= W_1(X,v) + W_3(X,v) \quad \text{et} \\
Z_2(X,v) &= W_2(X,v) + \sum_{j=1}^{2} T_{\partial_j v}X^j.
\end{aligned}$$

9.3 Dynamique des poches singulières

Dans cette section, nous allons étudier le transport de la géométrie singulière par un champ de vecteurs solution de l'équation d'Euler et dont le tourbillon est tangentiellement régulier par rapport à cette géométrie singulière.

Le premier problème à résoudre, très simple, est la minoration de la distance à l'ensemble singulier. Démontrons donc le lemme suivant :

Lemme 9.3.1

$$\psi(t,(\Sigma_0)_h^c) \subset (\Sigma_t)_{\delta(t,h)}^c \quad \textit{avec} \quad \delta(t,h) = h^{\exp\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL}d\tau},$$

$$\psi(\tau,\psi^{-1}(t,(\Sigma(t))_h^c)) \subset (\Sigma(\tau))_{\delta(\tau,t,h)}^c \quad \textit{avec} \quad \delta(\tau,t,h) = h^{\exp\int_\tau^t \|v(\tau')\|_{LL}d\tau'}.$$

En effet, soit x appartenant à $\psi(t,(\Sigma_0)^c_h)$; on considère alors le point du plan x' tel que $\psi(t,x') = x$. Par définition, on a, pour tout y' de Σ_0, $|x'-y'| \geq h$. Définissons alors ψ_{-1} par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_\tau \psi_{-1}(\tau,x) & = & v(\tau,\psi_{-1}(\tau,x)) \\ \psi_{-1}(t,x) & = & x. \end{array}\right.$$

Alors, d'après l'inégalité (5.12) énoncée page 91, il vient, si $y = \psi(t,y')$,

$$|x-y| \leq e^{1-\exp\int_0^t \|v(s)\|_{LL}ds} \Rightarrow |x'-y'| \leq |x-y|^{\exp - \int_0^t \|v(s)\|_{LL}ds} e^{1-\exp - \int_0^t \|v(s)\|_{LL}ds}.$$

Il en résulte que

$$h \leq |x-y|^{\exp - \int_0^t \|v(s)\|_{LL}ds}.$$

D'où la première assertion du lemme. La seconde se démontre de manière strictement analogue.

Si l'on se réfère à la démonstration du théorème sur les poches de tourbillon à bord régulier faite au chapitre 5, il est nécessaire de démontrer un théorème de propagation de la régularité höldérienne négative pour des équations de transport relatives à des champs de vecteurs de divergence nulle. Comme le montre l'exemple de la section 5.3, ces champs de vecteurs peuvent ne pas être lipschitziens. Ceci ne facilite pas la tâche. Heureusement, des conditions de support vont nous aider. Le lemme suivant est une variante du lemme de propagation de la régularité hölderienne par une équation de transport (le lemme 4.1.1 page 66).

Lemme 9.3.2 *Soit v un champ de vecteurs de divergence nulle indéfiniment différentiable. Posons*

$$V(t) = \|\nabla v\|_{LL(\Sigma_t)} + \|\omega_0\|_{L^\infty} \quad et \quad W(t) = V(t)\exp\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL}d\tau.$$

Considérons une fonction f appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^r)$, avec r dans l'intervalle $]-1,1[$ solution de

$$(T)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t f + \operatorname{div}(fv) & = & g_1(t)+g_2(t) \\ f_{|t=0} & = & f_0. \end{array}\right.$$

Si le support de f_0 est inclus dans $(\Sigma_0)^c_h$, si, pour tout temps t, le support de $g_1(t)+g_2(t)$ est inclus dans $(\Sigma_t)^c_{\delta(t,h)}$, et si l'on a

$$\|g_2(t)\|_r \leq -C(r)W(t)\|f(t)\|_r \log h,$$

alors, la fonction f vérifie l'inégalité suivante :

$$\|f(t)\|_r \leq \|f_0\|_r h^{-C(r)\int_0^t W(\tau)d\tau} + \int_0^t h^{-C(r)\int_\tau^t W(\tau')d\tau'}\|g_1(\tau)\|_r d\tau.$$

La démarche de la démonstration est tout à fait analogue à celle du lemme 4.1.1. Tout d'abord, observons que les hypothèses faites sur le support de f_0 et $g_1(t)+g_2(t)$ assurent que le support de $f(t)$ est inclus dans $(\Sigma_t)^c_{\delta(t,h)}$. De plus, la fonction $\Delta_q f$ vérifie

$$\partial_t \Delta_q f + v\cdot\nabla\Delta_q f = \Delta_q(g_1+g_2) - [\Delta_q, v\cdot\nabla]f.$$

D'après les estimations (4.14) et (4.18), il vient

$$\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]f-[\Delta_q,T_v\cdot\nabla]f\|_{L^\infty}\leq C(r)2^{-qr}\|\nabla v\|_0\|f\|_r. \tag{9.18}$$

Le lemme 9.2.3 affirme que

$$\|[\Delta_q,T_v\cdot\nabla]f\|_{L^\infty}\leq -C(r)2^{-qr}\|\nabla v\|_{LL^0(\Sigma_t)}\|f\|_r\log\delta(t,h). \tag{9.19}$$

Il en résulte que

$$\|[\Delta_q,v\cdot\nabla]f\|_{L^\infty}\leq -C(r)2^{-qr}\|\nabla v\|_{LL^0(\Sigma_t)}\|f\|_r\log\delta(t,h). \tag{9.20}$$

Or, par définition de $\delta(t,h)$, on a

$$\begin{aligned}\log(\delta(\tau,h))V(\tau) &= (\log h)V(\tau)\exp\int_0^\tau\|v(\tau')\|_{LL}d\tau'\\ &= (\log h)W(\tau).\end{aligned}$$

Donc, par intégration et par hypothèse sur la fonction g_2, il en résulte alors que

$$\|\Delta_q f(t)\|_{L^\infty}\leq\|\Delta_q f_0\|_{L^\infty}+\int_0^t\|\Delta_q g_1(\tau)\|_{L^\infty}d\tau-C(r)\int_0^t 2^{-qr}\log(\delta(\tau,h))V(\tau)\|f(\tau)\|_r d\tau.$$

En multipliant par 2^{qr} et en passant à la borne supérieure, il vient,

$$\|f(t)\|_r\leq\|f_0\|_r+\int_0^t\|g_1(\tau)\|_r d\tau-C(r)\int_0^t\log(\delta(\tau,h))V(\tau)\|f(\tau)\|_r d\tau.$$

D'où

$$\|f(t)\|_r\leq\|f_0\|_r+\int_0^t\|g_1(\tau)\|_r d\tau-C(r)\int_0^t(\log h)W(\tau)\|f(\tau)\|_r d\tau.$$

L'application du lemme de Gronwall conclut la démonstration de ce lemme.

Nous allons maintenant appliquer ce lemme à l'estimation de la norme hölderienne d'un champ de vecteurs transporté par le flot associé à un champ de vecteurs v solution de l'équation d'Euler. Soit donc v un champ de vecteurs indéfiniment différentiable solution du système d'Euler (E) ; on considère un champ de vecteurs X_0 de classe C^ϵ ainsi que sa divergence. On suppose en outre son support inclus dans $(\Sigma_0)^c_h$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 9.3.1 *Il existe une constante C, telle que, pour tout ϵ de l'intervalle* $]0,1[$, *et pour tout champ de vecteurs X_0 comme ci-dessus, si X est solution de*

$$(TG)\left\{\begin{aligned}\partial_t X+v\cdot\nabla X &= X(t,x,D)v\\ X_{|t=0} &= X_0,\end{aligned}\right.$$

on ait

$$\|X(t,x,D)\omega(t)\|_{\epsilon-1}\leq\|X_0(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1}h^{-\frac{C}{\epsilon}\int_0^t W(\tau)d\tau} \tag{9.21}$$

$$\|\operatorname{div}X(t)\|_\epsilon\leq\|\operatorname{div}X_0\|_\epsilon h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau} \tag{9.22}$$

$$\|X(t)\|_\epsilon\leq C\Big(\|X_0\|_\epsilon+\|\operatorname{div}X_0\|_\epsilon+\epsilon\frac{\|X_0(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}\Big)h^{-\frac{C}{\epsilon}\int_0^t W(\tau)d\tau}. \tag{9.23}$$

La démonstration de cette proposition est très simple. Le système (TG) exprime que les champ de vecteurs X et $\partial_t + v \cdot \nabla$ commutent. La relation (1.12) de conservation du tourbillon entraîne alors que

$$\partial_t X(t,x,D)\omega + v \cdot \nabla X(t,x,D)\omega = 0. \tag{9.24}$$

En appliquant le lemme 9.3.2 avec $r = \epsilon - 1$ ($C(r)$ valant alors C/ϵ), $f_0 = X_0(x,D)\omega$ et $g_1 = g_2 = 0$, on obtient immédiatement l'inégalité (9.21).

La relation (5.24) de conservation de la divergence le long des lignes de flot du champ de vecteurs v et le lemme 9.3.2 assure de la même manière l'inégalité (9.22).

Pour démontrer la troisième inégalité, on utilise le corollaire 9.2.1 qui affirme, grâce à la définition de $\delta(t,h)$, que

$$\begin{aligned} X(t,x,D)v &= g_1(t) + g_2(t) \quad \text{avec} \\ \|g_1(t)\|_\epsilon &\leq \frac{C}{\epsilon}(\|\omega\|_{L^\infty}\|\operatorname{div} X(t)\|_\epsilon + \epsilon\|X(t,x,D)\omega(t)\|_{\epsilon-1}) \quad \text{et} \\ \|g_2(t)\|_\epsilon &\leq -\frac{C\log h}{\epsilon} W(t)\|X(t)\|_\epsilon. \end{aligned}$$

Le lemme 9.3.2 assure alors que

$$\begin{aligned} \|X(t)\|_\epsilon \leq \ & \|X_0\|_\epsilon h^{-\frac{C}{\epsilon}\int_0^t W(\tau)d\tau} + \frac{C}{\epsilon}\int_0^t \|\omega_0\|_{L^\infty}\|\operatorname{div} X(\tau)\|_\epsilon h^{-\frac{C}{\epsilon}\int_\tau^t W(\tau')d\tau'} d\tau \\ & + C\int_0^t \|X(\tau,x,D)\omega(\tau)\|_{\epsilon-1} h^{-\frac{C}{\epsilon}\int_\tau^t W(\tau')d\tau'} d\tau. \end{aligned}$$

Il résulte immédiatement de l'inégalité ci-dessus et des inégalités (9.21) et (9.22) que

$$\begin{aligned} \|X(t)\|_\epsilon \leq \|X_0\|_\epsilon h^{-\frac{C}{\epsilon}\int_0^t W(\tau)d\tau} + & \frac{Ct\|\omega_0\|_{L^\infty}}{\epsilon} \\ & \times \Big(\|\operatorname{div} X_0\|_\epsilon + \epsilon\frac{\|X_0(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}\Big) h^{-\frac{C}{\epsilon}\int_0^t W(\tau)d\tau}. \end{aligned}$$

Or, par définition de la fonction W, on a

$$\frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty} \leq -\frac{C\log h}{\epsilon} W(t)\exp\Big(-\frac{C\log h}{\epsilon}\int_0^t W(\tau)d\tau\Big)$$

Par intégration, on a donc

$$\frac{Ct\|\omega_0\|_{L^\infty}}{\epsilon} \leq h^{-\frac{C}{\epsilon}\int_0^t W(\tau)d\tau},$$

et ainsi la proposition.

Nous allons maintenant étudier le problème du transport par un champ de vecteurs v appartenant, pour tout temps t, à $LL(\Sigma(t))$ et tel que

$$\|\nabla v(t)\|_{LL(\Sigma(t))} \in L^1_{loc}(\mathbf{R}).$$

Le principal problème est celui de la définition de la famille à l'instant t. Le caractère non lipschitzien, ou, ce qui revient au même, l'absence de contrôle sur la norme Lipschitz du champ de vecteurs au voisinage de l'ensemble singulier $\Sigma(t)$, impose un décalage sur le petit paramètre h.

Considérons une famille $\mathcal{X}_0$, Σ_0-admissible et un champ de vecteurs v indéfiniment différentiable. On définit alors le champ de vecteurs $\widetilde{X}_{t,\lambda,h}(s)$ par le système suivant :

$$(TG')\left\{\begin{array}{rcl} \partial_s \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(s) + v(s,x)\cdot\nabla \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(s) & = & \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(s,x,D)v(s,x) \\ \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(0,x) & = & X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x). \end{array}\right.$$

On définit alors $\mathcal{X}(t)$ par

$$X_{t,\lambda,h}(x) = \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(t,x) \quad \text{et} \quad \mathcal{X}(t) = (X_{t,\lambda,h})_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]}. \tag{9.25}$$

Les estimations que nous allons obtenir sont énoncées dans le théorème ci-dessous.

Théorème 9.3.1 *Il existe une constante C vérifiant les assertions suivantes. Soient v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle de E_m, Σ_0 un fermé du plan et $\mathcal{X}(0)$ une famille Σ_0-admissible d'indice $\Xi_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Supposons que*

$$\omega_0 \in L^\infty_0 \cap C^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}(0)}.$$

Alors, on a les propriétés suivantes.

- *Les champs de vecteurs $X_{t,\lambda,h}$ définis par la relation (9.25) appartiennent, pour tout couple $(\lambda,h) \in \Lambda\times]0,e^{-1}]$ à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^\epsilon)$.*
- *La famille $\mathcal{X}(t)$ définie par la relation (9.25) est une famille $\Sigma(t)$-admissible d'indice $\Xi(t) = (\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))$ avec*

$$\begin{array}{rcl} \alpha(t) & = & \alpha_0 E(\omega_0,t), \\ \beta(t) & = & \Big(\beta_0 - \dfrac{C}{\epsilon}L(\omega_0,t)\Big)E(\omega_0,t), \\ \gamma(t) & = & \Big(\gamma_0 - \dfrac{C}{\epsilon}L(\omega_0,t)\Big)E(\omega_0,t), \\ E(\omega_0,t) & = & \exp(Ct\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1}) \quad \textit{et} \\ L(\omega_0,t) & = & \Big(\log\Big(e + \dfrac{\|\omega_0\|^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1}}\Big) - \beta_0\Big)\Big(e^{\frac{1}{\epsilon}E(\omega_0,t)} - e^{\frac{1}{\epsilon}}\Big). \end{array}$$

- *Enfin, la régularité de $\omega(t)$ est ainsi décrite :*

$$\omega(t) \in C^{\epsilon,\beta(t)}_{\Sigma(t),\mathcal{X}(t)} \quad \textit{et} \quad \|\omega(t)\|^{\epsilon,\beta(t)}_{\Sigma(t),\mathcal{X}(t)} \le C\|\omega_0\|^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}.$$

Pour démontrer ce théorème, on suppose tout d'abord que le champ de vecteurs v est indéfiniment différentiable. Démontrons des estimations a priori. Estimons tout d'abord $I((\Sigma(t))_h, (\mathcal{X}(t))_h)$. En différenciant l'équation du flot le long de $X_{0,\lambda,\delta(t,h)}$, il vient

$$\partial_s X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\psi(s,x) = Dv(s,\psi(s,x))X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\psi(s,x).$$

En intégrant cette équation entre t et 0, on trouve que

$$|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x)| \le |X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\psi(t,x)| \times \exp\Big(\int_0^t |Dv(\tau,\psi(\tau,x))|d\tau\Big).$$

De la relation (9.25) de définition de $\mathcal{X}(t)$, il résulte que

$$|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\psi^{-1}(t,x))| \leq |X_{t,\lambda,\delta(t,h)}(x)| \times \exp\Big(\int_0^t |Dv(\tau,\psi(\tau,\psi^{-1}(t,x)))d\tau\Big).$$

On en déduit immédiatement que

$$\inf_{x\in(\Sigma(t))_h^c} \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\psi^{-1}(t,x))| \leq I(\Sigma(t))_h, (\mathcal{X}(t))_h)$$
$$\times \exp \int_0^t \|\nabla v(\tau,\psi(\tau,\psi^{-1}(t,\cdot)))\|_{L^\infty((\Sigma(t))_h^c)} d\tau.$$

D'après le lemme 9.3.1, on a

$$\psi(\tau,\psi^{-1}(t,(\Sigma(t))_h^c)) \subset (\Sigma(\tau))^c_{\delta(\tau,t,h))}.$$

D'où il vient que

$$\|\nabla v(\tau,\psi(\tau,\psi^{-1}(t,\cdot)))\|_{L^\infty((\Sigma(t))_h^c)} \leq -(\log h)\|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))} \exp \int_0^t \|v(\tau')\|_{LL} d\tau'.$$

Ainsi, on a

$$\exp\int_0^t \|\nabla v(\tau,\psi(\tau,\psi^{-1}(t,\cdot)))\|_{L^\infty((\Sigma(t))_h^c)} d\tau \leq h^{-(\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))}d\tau)\times \exp\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL}d\tau}.$$

Il en résulte que

$$\inf_{x\in(\Sigma(t))_h^c} \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\psi^{-1}(t,x))| \leq I(\Sigma(t))_h, (\mathcal{X}(t))_h)$$
$$\times\, h^{(\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))}d\tau)\times \exp\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL}d\tau}.$$

Or, d'après le lemme 9.3.1 et la définition de $\mathcal{I}_\gamma(\Sigma,\mathcal{X})$, on a

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in(\Sigma(t))_h^c} \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\psi^{-1}(t,x))| &\geq \inf_{y\in(\Sigma_0)^c_{\delta(t,h)}} \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(y)| \\
&\geq \mathcal{I}_{\gamma_0}(\mathcal{X}_0,\Sigma_0)(\delta(t,h))^{-\gamma_0} \\
&\geq \mathcal{I}_{\gamma_0}(\mathcal{X}_0,\Sigma_0)h^{-\gamma_0 \exp\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL}d\tau}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$I((\Sigma(t))_h, (\mathcal{X}(t))_h) \geq \mathcal{I}_{\gamma_0}(\Sigma(0),\mathcal{X}(0))h^{(-\gamma_0+\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))}d\tau)\times \exp\int_0^t \|v(\tau)\|_{LL}d\tau}.$$

Comme nous avons supposé que ω_0 appartient à $L^\infty\cap L^1$, on a

$$\|v(\tau)\|_{LL} \leq C\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1}. \tag{9.26}$$

En posant

$$\gamma(t) = \Big(\gamma_0 - \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))}d\tau\Big)E(\omega_0,t), \tag{9.27}$$

il vient

$$\mathcal{I}_{\gamma(t)}(\Sigma(t),\mathcal{X}(t)) \geq \mathcal{I}_{\gamma_0}(\Sigma(0),\mathcal{X}(0)). \tag{9.28}$$

Majorons maintenant $\|X_{t,\lambda,h}(x,D)\omega(t)\|_{\epsilon-1}$. Le support de $X_{0,\lambda,\delta(t,h)}$ est inclus dans $(\Sigma(0))^c_{\delta(t,h)^{\alpha_0}}$. L'inégalité (9.21) de la proposition 9.3.1, permet donc d'affirmer que l'on a

$$\|\widetilde{X}_{s,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\omega(s)\|_{\epsilon-1} \leq \|\widetilde{X}_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1}\delta(t,h)^{-\frac{C\alpha_0}{\epsilon}\int_0^s W(\tau)d\tau}.$$

En particulier, en prenant $s=t$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\|X_{t,\lambda,h}(x,D)\omega(t)\|_{\epsilon-1} \leq \|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1}h^{-\frac{C\alpha_0}{\epsilon}(\int_0^t W(\tau)d\tau)\exp\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{LL}d\tau}.$$

Vu l'inégalité (9.26) et la définition de W donnée dans l'énoncé du lemme 9.3.2, on a

$$\|X_{t,\lambda,h}\omega(t)\|_{\epsilon-1} \leq \|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}\omega_0\|_{\epsilon-1}h^{-\frac{C\alpha_0}{\epsilon}(\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))}d\tau)E(\omega_0,t)}. \tag{9.29}$$

La majoration de $\|\operatorname{div} X_{t,\lambda,h}\|_\epsilon$ se démontre de manière analogue. En utilisant l'inégalité (9.22) de la proposition 9.3.1 au point $s=t$, il vient

$$\|\operatorname{div} X_{t,\lambda,h}\|_\epsilon \leq \|\operatorname{div} X_{0,\lambda,\delta(t,h)}\|_\epsilon h^{-\frac{C\alpha_0}{\epsilon}(\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))}d\tau)E(\omega_0,t)}. \tag{9.30}$$

La majoration de $\|X_{t,\lambda,h}\|_\epsilon$ découle directement de la définition de $\widetilde{X}(s,\lambda,\delta(t,h))$ par le système (TG') et de l'estimation (9.23) de la proposition 9.3.1. De cette inégalité, il vient,

$$\begin{aligned}\|X_{t,\lambda,h}\|_\epsilon \leq C(&\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_{0,\lambda,\delta(t,h)}\|_\epsilon + \epsilon\|X_{0,\lambda,h}(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1})\\ &\times h^{-\frac{C\alpha_0}{\epsilon}(\int_0^t W(\tau)d\tau)\exp\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{LL}d\tau}.\end{aligned}$$

Dans notre cas particulier, cela donne, compte tenu de l'inégalité (9.26),

$$\begin{aligned}\|X_{t,\lambda,h}\|_\epsilon \leq C(&\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_{0,\lambda,h}\|_\epsilon + \epsilon\|X_{0,\lambda,h}(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1})\\ &\times h^{-\frac{C\alpha_0}{\epsilon}(\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))}d\tau)E(\omega_0,t)}.\end{aligned}$$

Des inégalités (9.28)-(9.30) et de l'inégalité ci-dessus, on déduit

$$\|\omega(t)\|^\epsilon_{(\Sigma(t))_h,(\mathcal{X}(t))_h} \leq C\|\omega_0\|^\epsilon_{(\Sigma_0)_{\delta(t,h)},(\mathcal{X}_0)_{\delta(t,h)}} \times h^{-\frac{C\alpha_0}{\epsilon}(\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))}d\tau)E(\omega_0,t)}.$$

Or, par définition de $\|\omega_0\|^\epsilon_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}$, on a

$$\|\omega_0\|^\epsilon_{(\Sigma_0)_{\delta(t,h)},(\mathcal{X}_0)_{\delta(t,h)}} \leq \|\omega_0\|^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}(\delta(t,h))^{\beta_0}.$$

Comme β_0 est négatif, il en résulte que

$$\|\omega(t)\|^{\epsilon,\beta(t)}_{\Sigma(t),\mathcal{X}(t)} \leq C\|\omega_0\|^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0} \quad \text{avec}$$

$$\beta(t) = \Big(\beta_0 - \frac{C}{\epsilon}\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))}d\tau\Big)E(\omega_0,t). \tag{9.31}$$

Il s'agit maintenant d'en déduire une majoration de

$$V_{\Sigma(t)} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))} d\tau.$$

Les estimations (9.28)–(9.31) montrent que cela entraînera un contrôle sur l'évolution de la structure géométrique singulière. Pour majorer $V_{\Sigma(t)}$, nous allons utiliser le théorème 3.3.2. On en déduit que, pour tout réel h de l'intervalle $]0, e^{-1}]$, on a

$$\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty((\Sigma(t))^c_h)} \leq \frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1} \log\Big(e + \frac{\|\omega(t)\|^\epsilon_{(\Sigma(t))^c_h, (\mathcal{X}(t))_h}}{\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1}}\Big).$$

Mais, d'après l'inégalité (9.31), on a

$$\|\omega(t)\|^\epsilon_{(\Sigma(t))^c_h, (\mathcal{X}(t))_h} \leq C\|\omega_0\|^{\epsilon, \beta_0}_{\Sigma_0, \mathcal{X}_0} h^{\beta(t)}.$$

En posant

$$NL(\omega_0) = \log\Big(e + \frac{\|\omega_0\|^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0, \mathcal{X}_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1}}\Big),$$

on en déduit que

$$\log\Big(e + \frac{\|\omega(t)\|^\epsilon_{(\Sigma(t))^c_h, (\mathcal{X}(t))_h}}{\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1}}\Big) \leq NL(\omega_0) + \beta(t) \log h.$$

Il vient alors, par définition de $\beta(t)$,

$$\begin{aligned}\frac{\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty((\Sigma(t))^c_h)}}{-\log h} \leq {} & \frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1}(NL(\omega_0) - \beta_0) E(\omega_0, t) \\ & + \frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1}\Big(\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))} d\tau\Big) E(\omega_0, t).\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\|\nabla v(t)\|_{L(\Sigma(t))} & \leq h(t) + g(t) \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))} d\tau \quad \text{avec} \\ h(t) & = \frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1}(NL(\omega_0) - \beta_0) E(\omega_0, t) \quad \text{et} \\ g(t) & = \frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1} E(\omega_0, t).\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall assure que l'on a

$$\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))} d\tau \leq (NL(\omega_0) - \beta_0)\Big(e^{\frac{1}{\epsilon}E(\omega_0,t)} - e^{\frac{1}{\epsilon}}\Big). \tag{9.32}$$

Il suffit, pour conclure la démonstration du théorème 9.3.1, d'appliquer les estimations (9.28)–(9.31). Remarquons que l'on ne contrôle

$$\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L(\Sigma(\tau))} d\tau$$

que par une quantité dont la croissance est doublement exponentielle en temps.

Il s'agit maintenant de conclure la démonstration du théorème 9.1.2 par un passage à la limite. Soit v_0 un champ de vecteurs vérifiant les hypothèses du théorème 9.1.2. On pose $v_{0,n} = S_n v_0$ et on désigne par v_n la solution du système d'Euler associée à la donnée initiale v_0. On appelle ψ_n le flot associé à v_n et $\Sigma_n(t)$ l'image de Σ_0 par ψ_n. On note $\mathcal{X}_{n,t}$ la famille de champs de vecteurs définis par la relation (9.25). Le théorème 9.3.1 entraîne que

$$\|\omega_n(t)\|^{\epsilon,\beta(t)}_{\Sigma_n(t),\mathcal{X}_n(t)} \leq C\|\omega_{0,n}\|^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}. \tag{9.33}$$

Nous allons tout d'abord déduire de l'inégalité ci-dessus l'existence d'une fonction localement bornée $\sigma(t)$ telle que

$$\Big(\sup_{(h,\lambda)\in]0,e^{-1}]\times\Lambda} h^{\sigma(t)}\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\psi_n(t)\|_\epsilon\Big)_{n\in\mathbf{N}}$$

soit une suite bornée de $L^\infty_{loc}(\mathbf{R})$.

D'après les inégalités (9.22) et (9.23), on sait que les suites

$$\Big(\sup_{(h,\lambda)\in]0,e^{-1}]\times\Lambda} h^{\beta(t)}\|X_{t,\lambda,h}\|_\epsilon\Big)_{n\in\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad \Big(\sup_{(h,\lambda)\in]0,e^{-1}]\times\Lambda} h^{\beta(t)}\|\operatorname{div} X_{t,\lambda,h}\|_\epsilon\Big)_{n\in\mathbf{N}}$$

sont deux suites bornées de $L^\infty_{loc}(\mathbf{R})$. Or, par définition de $X_{t,\lambda,h}$ (voir la relation (9.25)), on sait que

$$X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\psi_n(t,x) = X_{t,\lambda,h}(\psi_n(t,x)).$$

Mais, on a

$$|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\psi_n(t,x) - X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\psi_n(t,x')| \leq \frac{C}{\epsilon}\|X_{t,\lambda,h}\|_\epsilon|\psi_n(t,x)-\psi_n(t,x')|^\epsilon.$$

De plus, l'inégalité des accroissements finis assure que

$$|\psi_n(t,x)-\psi_n(t,x')| \leq |x-x'|\sup_{z\in[x,x']}|D\psi_n(t,z)|.$$

Supposons que l'on ait $|x-x'|\leq h/2$. Dans ce cas, il est clair que

$$\sup_{z\in[x,x']}|D\psi_n(t,z)| \leq \|D\psi_n(t)\|_{L^\infty((\Sigma(t))^c_{h/2})}.$$

En dérivant l'équation du flot, et en intégrant, il vient

$$\|D\psi_n(t)\|_{L^\infty((\Sigma(t))^c_{h/2})} \leq \exp\int_0^t \|\nabla v_n(\tau)\|_{L^\infty((\Sigma(\tau))^c_{\delta(\tau,h/2)})}d\tau.$$

Grâce à l'inégalité (9.32), on en déduit l'existence d'une fonction $\sigma(t)$ que

$$\Big(\sup_{h\in]0,e^{-1}]} h^{\sigma(t)}\|D\psi_n(t)\|_{L^\infty((\Sigma(t))^c_{h/2})}\Big)_{n\in\mathbf{N}}$$

soit une suite bornée de $L^\infty_{loc}(\mathbf{R})$.

Enfin, il est évident que

$$|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x,D)\psi_n(t,x)-X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x',D)\psi_n(t,x')|\leq 2\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\cdot,D)\psi_n(t,\cdot)\|_{L^\infty((\Sigma(t))^c_h)}$$

Or, si $|x-x'|\geq h/2$, on a

$$\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\cdot,D)\psi_n(t,\cdot)\|_{L^\infty((\Sigma(t))^c_h)}\leq 2^\epsilon|x-x'|^\epsilon h^{-\epsilon}\|D\psi_n(t)\|_{L^\infty((\Sigma(t))^c_h)}.$$

Donc, une existe une fonction localement bornée σ telle que la suite

$$\Big(\sup_{(h,\lambda)\in]0,e^{-1}]\times\Lambda} h^{\sigma(t)}\|X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\cdot,D)\psi_n(t,\cdot)\|_\epsilon\Big)_{n\in N}$$

soit bornée dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R})$. Or, par définition

$$X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\cdot,D)\psi^j_n(t,x\cdot)=\operatorname{div}(\psi^j_n X_{0,\lambda,\delta(t,h)})-\psi^j_n\operatorname{div}X_{0,\lambda,\delta(t,h)}.$$

D'après les lemme 5.1.1 et 5.5.2, on sait que

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n=\psi\quad\text{dans}\quad \mathrm{Id}+L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d).$$

Par interpolation, on en déduit que, pour tout couple (h,λ) appartenant à $]0,e^{-1}]\times\Lambda$ et tout réel ϵ' strictement inférieur à ϵ,

$$\lim_{n\to\infty}X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\cdot,D)\psi_n=X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(\cdot,D)\psi\quad\text{dans}\quad L^\infty([0,T];C^{\epsilon'}).$$

Le passage à la limite se conclut alors de manière analogue à celle du cas des poches de tourbillon à bord régulier.

Bibliographie

[1] S. Alinhac, Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, **21**, 1988, pages 91–133.

[2] S. Alinhac, Un problème de concentration évanescente pour les flots non stationnaires et incompressibles en dimension deux, *Communication in Mathematical Physics*, **127**, 1990, pages 585–596.

[3] S. Alinhac, Remarques sur l'instabilité du problème des poches de tourbillon, *Journal of Functionnal Analysis*, **98**(2), 1991, pages 361–379.

[4] S. Alinhac et P. Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, Savoirs actuels, Interéditions, 1991.

[5] V. Arnold, Sur la géométrie différentiable des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Annales de l'Institut Fourier*, **16**, 1966, pages 319–361.

[6] H. Bahouri et J.-Y. Chemin, Equations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides, *Archiv for Rationnal Mechanics and Analysis*,**127**, 1994, pages 159–182.

[7] H. Bahouri et B. Dehman, Propagation du front d'onde C^ρ pour des équations non linéaires, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **67**, 1988, pages 115–130.

[8] H. Bahouri et B. Dehman, Remarques sur l'apparition de singularités dans les écoulements Eulériens incompressibles à données initiales Hölderiennes, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **73**, 1994, pages 335–346.

[9] S. Baouendi et C. Goulaouic, Problèmes de Cauchy pseudo-différentiels analytiques, *Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique*, 1975–1976.

[10] C. Bardos et S. Benachour, Domaine d'analyticité des solutions de l'équation d'Euler dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **4**(04), 1977, pages 647–687.

[11] S. Benachour, Analyticité des solutions des équations d'Euler, *Archiv for Rationnal Mechanics and Analysis*, **71**(3), 1979, pages 271–299.

[12] J. Beale, T. Kato et A. Majda, Remarks on the breakdown of smoothness for the 3-D Euler equations, *Communication in Mathematical Physics*, **94**, 1984, pages 61–66.

[13] A. Bertozzi, Existence, uniqueness and a characterization of solutions to the contour dynamics equation, *Thèse de l'université de Princeton*, 1991.

[14] A. Bertozzi et P. Constantin, Global regularity for vortex patches, *Communication in Mathematical Physics*, **152**(1), 1993, pages 19–28.

[15] J.-M. Bony, Propagation des singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires, *Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique*, 1979–1980.

[16] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, **14**, 1981, pages 209–246.

[17] J.-M. Bony, Analyse microlocale et singularités non linéaires, *Nonlinear Hyperbolic Problems*, Proceddings Bordeaux, 1988 Lecture Notes, **1042**, Springer Verlag, pages 114–127.

[18] Y. Brenier, The least action principle and the related concept of generalized flow for incompressible perfect fluids, *Journal of the American Mathematical Society*, **2**(2), 1989, pages 225–255.

[19] T. Buttke, The observation of singularities in the boundary of patches of vorticity, *Physical fluids A*, **1**(7), 1989, pages 1283–1285.

[20] T. Buttke, A fast adaptative vortex method for patches of constant vorticity, *Journal of Computationnal Physics*, **89**, 1990, pages 161–186.

[21] J.-Y. Chemin, Calcul paradifférentiel précisé et application à des équations aux dérivées partielles non linéaires, *Duke Mathematical Journal*, **56**(1), 1988, pages 431–469.

[22] J.-Y. Chemin, Régularité de la solution d'un problème de Cauchy non linéaire à données singulières en un point, *Annales de l'Institut Fourier*, **39**(1), 1989, pages 101–122.

[23] J.-Y. Chemin, Evolution d'une singularité ponctuelle dans des équations strictement hyperboliques non linéaires, *American Journal of Mathematics*, **112**, 1990, pages 805–860.

[24] J.-Y. Chemin, Evolution d'une singularité ponctuelle dans un écoulement compressible, *Communication in Partial Differential Equations*, **15**(9), 1990, pages 1237–1263.

[25] J.-Y. Chemin, Remarques sur l'apparition de singularités fortes dans les écoulements compressibles, *Communication in Mathematical Physics*, **133**, 1990, pages 323–329.

[26] J.-Y. Chemin, Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait, incompressible, bidimensionnel, *Inventiones Mathematicae*, **103**, 1991, pages 599–629.

[27] J.-Y. Chemin, Persistance des structures géométriques liées aux poches de tourbillon, *Séminaire Equations aux Dérivées Partielles de l'Ecole Polytechnique*, 1990-1991.

[28] J.-Y. Chemin, Régularité des trajectoires des particules d'un fluide incompressible remplissant l'espace, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **71**(5), 1992, pages 407–417.

[29] J.-Y. Chemin, Persistance de structures géométriques dans les fluides incompressibles bidimensionnels, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, **26**(4), 1993, pages 1–26.

[30] J.-Y. Chemin et N. Lerner, Flot de champs de vecteurs non-lipschitziens et équations de Navier-Stokes, *Prépublication de l'Ecole Polytechnique n^0 1062*, 1993, à paraître au Journal of Differential Equations.

[31] R. Coifman et Y. Meyer, Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, *Astérisque*, **57**, 1978.

[32] P. Constantin et E. Titi, On the evolution of nearly circular vortex patches, *Communications in Mathematical Physics*, **119**, 1988, pages 177–198.

[33] J.-M. Delort, Estimations fines pour des opérateurs pseudo-differentiels analytiques sur un ouvert à bord de $\mathbf{R}^n$. Application aux équations d'Euler, *Communications in Partial Differential Equations*, **10**(12), 1985, pages 1465–1525.

[34] J.-M. Delort, Existence de nappes de tourbillon en dimension deux, *Journal of the American Mathematical Society*, **4**(3), 1991, pages 553–586.

[35] J. Dieudonné, *Eléments d'Analyse tome 2*, Gauthier Villars, 1974.

[36] R. Di Perna et P.-L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Inventiones Mathematicae*, **98**(3), 1989, pages 511–549.

[37] R. Di Perna et A. Majda, Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flows, *Communication in Pure and Applied Mathematics*, **40**, 1987, pages 301–345.

[38] D. Ebin et J. Marsden, Group of diffeomorphism and the motion of an incompressible fluid, *Annals of Mathematics*, **92**(2), 1970, pages 102–163.

[39] L. Evans et S. Müller, Hardy spaces and the two-dimensionnal Euler equations with non-negative vorticity, *Journal of the Americal Mathematical Society*, **7**, 1994, pages 199–220.

[40] T.M. Fleet, *Differential analysis*, Cambridge University Press, 1980.

[41] P. Gamblin, Régularité de solutions d'équations de la dynamique des gaz et de la mécanique des fluides, *Thèse de l'Université d'Orsay*, 1993.

[42] P. Gamblin, Système d'Euler incompressible et régularité microlocale analytique, *à paraître aux Annales de l'Institut Fourier*, **44**(5), 1994.

[43] P. Gamblin et X. Saint-Raymond, On three-dimensionnal vortex patches, *Prépublication de l'Université d'Orsay*, 1993, à paraître au Bulletin de la Société Mathématique de France.

[44] P. Gérard, Résultats récents sur les fluides parfaits incompressibles bidimensionnels (d'après J.-Y. Chemin et J.-M. Delort), *Séminaire Bourbaki*, **757**, 1992.

[45] P. Gérard et J. Rauch, Propagation de la régularité locale de solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales de l'Institut Fourier*, **37**(3), 1987, pages 65–84.

[46] N. Hanges et F. Trêves, On the analyticity of solutions of first order non linear partial differential equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, **331**, pages 627–638.

[47] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential equations*, Springer Verlag, 1983.

[48] T. Kato et G. Ponce, Well-posedness of the Euler and Navier-Stokes equations in the Lebesgue spaces $L^p_s(\mathbf{R}^2)$, *Revista Matemática Iberoamericana*, **2**, 1986, pages 73–88.

[49] R. Krasny, Desingularization of periodic vortex sheet roll-up, *Journal of Computationnal Physics*, **65**, 1986, pages 292–313.

[50] R. Krasny, Computation of vortex sheet roll-up in the Treffitz plane, *Journal of Fluid Mechanics*, **184**, 1987, pages 123–155.

[51] J. Leray, Etude de diverses équations intégrales non linéaires et quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **9**(12),1933, pages 1–82.

[52] L. Lichtenstein, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogenerunzusammendrückbarer, reibungsloser Flüßigkeiten und die Helmoltzochen Wirbelsatze, *Mathematische Zeitschrift*, **23**, 1925, pages 89–154 ; **26**, 1927, pages 196–323 ; **28**, 1928, pages 387–415 et **32**, 1930, pages 608–725.

[53] A. Majda, Vorticity and the mathematical theory of an incompressible fluid flow, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **38**, 1986, pages 187–220.

[54] A. Majda, The interaction of nonlinear analysis and modern applied mathematics, *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, **1**, Kyoto 1990, pages 175–191, Springer Verlag.

[55] A. Majda, Remarks on weak solutions for vortex sheets with a distinguished sign, *Indiana University Mathematics Journal*, **42**(3), 1993, pages 921–939.

[56] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs tome 2*, Herman, 1991.

[57] P. Serfati, Etude mathématique de flammes infiniment minces en combustion. Résultats de structure et de régularité pour l'équation d'Euler incompressible, *Thèse de l'Université de Paris VI*, 1992.

[58] P. Serfati, Une preuve directe d'existence globale des vortex patches 2D, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **318**, Série I, 1993, pages 515–518.

[59] P. Serfati, Régularité stratifiée et équation d'Euler à temps grand, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **318**, Série I, 1993, pages 925–928.

[60] D. Serre, Ecoulement parfait incompressible à rotationnel croissant avec le temps, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **312**, Série I, 1991, pages 315–318.

[61] D. Serre, Sur le principe variationnel des équations de la mécanique des fluides parfaits, *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, **27**, 1993, pages 739–758.

[62] A.I. Shnirelman, On the geometry of the group of diffeomorphisms and the dynamics of an ideal incompressible fluid, *Mat. USSR Sbornik* **56**(1), 1987, pages 79–105.

[63] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press (1970).

[64] A. Torchinsky, *Real variable methods in harmonic analysis*, Pure and Applied Mathematics, **123**, Academic Press, New York.

[65] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North Holland (1978).

[66] W. Wolibner, Un théorème d'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long, *Mathematische Zeitschrift*, **37**, 1933, pages 698–726.

[67] V. Yudovich, Non stationnary flows of an ideal incompressible fluid, *Zh. Vych. Math.* **3**, 1963, pages 1032–1066.

[68] N. Zabusky, M. Hughes et K. Roberts, Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions, *Journal of Computationnal Physics*, **30**, 1979, pages 96–106.