Astérisque

JEAN-MARC FONTAINE

Exposé VIII : Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables

Astérisque, tome 223 (1994), Séminaire Bourbaki, exp. nº 8, p. 321-347
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__321_0>

Exposé VIII

REPRÉSENTATIONS ℓ–ADIQUES POTENTIELLEMENT SEMI–STABLES

par **Jean–Marc Fontaine**

Introduction

Dans tout cet exposé, K est un corps complet pour une valuation discrète, de caractéristique 0, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Pour toute extension L de K contenue dans $\overline{K}$, on note G_L le groupe de Galois de l'extension $\overline{K}/L$ et I_L son groupe d'inertie (i.e. le sous–groupe qui opère trivialement sur le corps résiduel).

Le but de cet exposé est de donner un traitement unifié des représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables de G_K, que le nombre premier ℓ soit ou non égal à p. C'est ainsi que, lorsque k est fini, on peut associer à une telle représentation une représentation du groupe de Weil–Deligne de G_K[1].

Au paragraphe 1, on introduit la notion de ℓ–module de Deligne. Pour $\ell \neq p$, c'est une variante de la notion de représentation du groupe de Weil–Deligne de K qui est commode pour étudier les représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables lorsque l'on ne fait aucune hypothèse sur k. Pour $\ell = p$, c'est essentiellement la notion de (φ, N, G_K)–module introduite dans [Exp. III] également pour l'étude des représentations semi–stables. Au paragraphe 2, on s'intéresse à ces représentations, on introduit un foncteur,

[1] Ceci jouera un rôle essentiel dans [FM94] où nous étudierons les **représentations ℓ–adiques géométriques** du groupe de Galois d'un corps de nombres (i.e. les représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables en toute place et non ramifiées en dehors d'un nombre fini d'entre elles). Cf. aussi [BK90] et [FP94].

pour $\ell \neq p$, qui permet de passer des ℓ–modules de Deligne aux représentations de G_K et qui doit être compris comme l'analogue de ce qui a été fait dans [Exp. III] pour $\ell = p$. On termine en énonçant des conjectures sur la cohomologie étale ℓ–adique.

Conventions

On note $\mathbb{Z}_\ell(1)$ le $\mathbb{Z}_\ell$–module libre de rang 1 qui est la limite projective des $\mu_{\ell^n}(\overline{K})$, $\mathbb{Q}_\ell(1) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_\ell(i) = \mathrm{Sym}^i_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(1)$ et $\mathbb{Q}_\ell(-i)$ le dual de $\mathbb{Q}_\ell(i)$. Si V est un $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel muni d'une action de G_K, on pose $V(i) = V \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Si G est un groupe profini, une **représentation ℓ–adique de G** est un $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G. On note $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$ la catégorie de ces représentations.

Comme dans [Exp. III], si $\mathcal{T}$ est une catégorie tannakienne sur un corps, une **sous–catégorie tannakienne de $\mathcal{T}$** est une sous–catégorie strictement pleine de $\mathcal{T}$ contenant un objet de dimension non nulle et stable par sous–objet, quotient, somme–directe, produit tensoriel et dual.

1. — Modules de Deligne

1.1. — Généralités

1.1.1. — Supposons $\ell \neq p$. Nous appelons **ℓ–module de Deligne** (relatif à $\overline{K}/K$) la donnée d'un $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel Δ muni d'une action linéaire de G_K et d'une application $\mathbb{Q}_\ell$–linéaire G_K–équivariante

$$N : \Delta \longrightarrow \Delta(-1)\,.$$

Notons P_0 le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel $\overline{k}$ de $\overline{K}$. Le corps P_0 est muni d'une action naturelle de G_K, l'action du groupe d'inertie I_K étant triviale, et d'un Frobenius σ (induit par $x \longmapsto x^p$ sur $\overline{k}$). Appelons **p–module de Deligne** (relatif à $\overline{K}/K$) la donnée d'un P_0–espace vectoriel Δ muni d'une action semi-linéaire de G_K, d'un Frobenius, i.e. d'une application injective, σ–linéaire,

$$\varphi : \Delta \longrightarrow \Delta\,,$$

commutant à l'action de G_K, et d'une application P_0–linéaire, G_K–équivariante

$$N : \Delta \longrightarrow \Delta$$

vérifiant $N\varphi = p\varphi N$.

1.1.2. — Posons $\mathbb{Q}'_\ell = \mathbb{Q}_\ell$ si $\ell = p$ et $\mathbb{Q}'_\ell = P_0$. La **dimension** d'un ℓ–module de Deligne est la dimension du $\mathbb{Q}'_\ell$–espace vectoriel sous–jacent. Les ℓ–modules de Deligne forment une catégorie : un morphisme est une application $\mathbb{Q}'_\ell$–linéaire qui commute à l'action de G_K, à celle de N et, si $\ell = p$, à celle de φ. On note $\underline{\mathrm{Del}}_\ell(G_K)$ la sous–catégorie pleine de la catégorie des ℓ–modules de Deligne dont les objets sont les Δ qui sont de dimension finie et vérifient

(*) l'action de G_K est continue et I_K opère à travers un quotient fini,

(**) l'opérateur de "monodromie" N est nilpotent (lorsque $\ell \neq p$, cela signifie que, si l'on note encore $N : \Delta(-i) \to \Delta(-i-1)$ l'application $N \otimes id_{\mathbb{Q}_\ell(-i)}$, l'application

$$N^r : \Delta \longrightarrow \Delta(-r)$$

est nulle pour r suffisamment grand).

1.1.3. — **Remarque.** Soit Δ un ℓ–module de Deligne de dimension finie :

i) Si $\ell = p$, l'application $\varphi : \Delta \to \Delta$ est bijective car, si Δ' désigne le P_0–espace vectoriel déduit de Δ par l'extension des scalaires σ, on peut voir φ comme une application P_0–linéaire injective de Δ' dans Δ et Δ et Δ' ont la même dimension.

ii) Toujours si $\ell = p$, Δ vérifie la condition (**) car, si r est suffisamment grand, il n'y a pas d'application P_0–linéaire non nulle N_0 de Δ dans lui–même telle que $N_0\varphi = p^r\varphi N_0$.

iii) Supposons maintenant $\ell \neq p$ et supposons aussi que le caractère donnant l'action de G_K sur $\mathbb{Q}_\ell(1)$ ne soit pas d'ordre fini (ce qui revient à dire que, si $\ell \neq 2$ (resp. $= 2$) et si k' est un corps obtenu en adjoignant au corps résiduel k les racines ℓ–ièmes (resp. quatrièmes) de l'unité, alors k' ne contient qu'un nombre fini de racines de l'unité d'ordre une puissance de

ℓ); alors Δ vérifie (**) car, pour r assez grand, il n'y a pas d'application $\mathbb{Q}_\ell$–linéaire G_K–équivariante non nulle de Δ dans $\Delta(-r)$.

1.1.4. — Si Δ_1 et Δ_2 sont deux ℓ–modules de Deligne, le produit tensoriel $\Delta_1 \otimes \Delta_2$ est le produit tensoriel des $\mathbb{Q}'_\ell$–espaces vectoriels sous–jacents, muni de son action naturelle de G_K, avec N défini par $N(a_1 \otimes a_2) = Na_1 \otimes a_2 + a_1 \otimes Na_2$ (en identifiant, lors $\ell \neq p$, $\Delta_1 \otimes \mathbb{Q}_\ell(-1) \otimes \Delta_2$ à $\Delta_1 \otimes \Delta_2 \otimes \mathbb{Q}_\ell(-1)$) et, lorsque $\ell = p$, φ défini par $\varphi(a_1 \otimes a_2) = \varphi a_1 \otimes \varphi a_2$.

On a aussi un objet–unité qui est $\mathbb{Q}'_\ell$ avec action naturelle de G_K (triviale si $\ell \neq p$), $N = 0$ et, si $\ell = p$, $\varphi = \sigma$; lorsque Δ_1 et Δ_2 sont de dimension finie, on a aussi une notion de **hom interne** : le ℓ–module de Deligne $\mathrm{Hom}(\Delta_1, \Delta_2)$ est le $\mathbb{Q}'_\ell$–espace vectoriel des applications $\mathbb{Q}'_\ell$–linéaires de Δ_1 dans Δ_2, muni de l'action naturelle de G_K, l'opérateur N étant défini par (avec des notations évidentes)

$$(N\eta)(a) = N(\eta(a)) - \eta(N(a)),$$

et, si $\ell = p$, on a $(\varphi\eta)(a) = \varphi(\eta(\varphi^{-1}(a)))$.

En particulier, ces opérations font de $\underline{Del}_\ell(G_K)$ une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_\ell$ (au sens, par exemple, de [De90], n° 2.8) ; lorsque $\ell \neq p$, celle–ci est neutre.

1.2. — Modules de Deligne et (φ, N, G_K)–modules

1.2.1. — Soit K_0^{nr} l'extension maximale non ramifiée de $K_0 = \mathrm{Frac}\, W(k)$ contenue dans $\overline{K}$. Si, dans la définition de la catégorie $\underline{Del}_p(G_K)$, on remplace P_0 par K_0^{nr}, on obtient la catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K)$ des (φ, N, G_K)–modules discrets de dimension finie définie dans [Exp.III], n° 4.2.

En fait, on a une équivalence naturelle entre ces deux catégories : losque k est algébriquement clos, $P_0 = K_0^{nr}$ et $\underline{Del}_p(G_K) = \underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K)$. Dans le cas général, P_0 s'identifie au complété de K_0^{nr} pour la topologie p–adique. Si D est un objet de $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K)$, l'action de G_K (resp. φ, N) s'étend par semi–linéarité (resp. semi–linéarité, linéarité) à $P_0 \otimes_{K_0^{nr}} D$ qui devient ainsi un objet de $\underline{Del}_p(G_K)$ que nous appelons le **complété de** D et notons $\underline{Co}(D)$. On peut considérer $\underline{Co}$ de manière naturelle comme un $\otimes$–foncteur

$$\underline{Co} = \underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K) \longrightarrow \underline{Del}_p(G_K).$$

PROPOSITION 1.2.2. — *Le foncteur*

$$\underline{Co} : \underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K) \longrightarrow \underline{Del}_p(G_K)$$

induit une $\otimes$*–équivalence entre ces deux catégories*

Preuve : considérons la catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(G_K)$ (resp. $\underline{\widehat{\mathrm{Mod}}}(G_K)$) des K_0^{nr}–espaces (resp. P_0–espaces) vectoriels de dimension finie munis d'une action semi–linéaire discrète de G_K (resp. continue de G_K, avec action discrète de I_K). On dispose d'un foncteur de complétion que nous notons encore

$$\underline{Co} : \underline{\mathrm{Mod}}(G_K) \longrightarrow \underline{\widehat{\mathrm{Mod}}}(G_K)\,.$$

Pour tout objet Δ de $\underline{\widehat{\mathrm{Mod}}}(G_K)$, notons $\underline{\mathrm{Déco}}(\Delta)$ le sous–ensemble de Δ formé des x dont le stabilisateur est ouvert dans G_K. On voit que $\underline{\mathrm{Déco}}(\Delta)$ est un sous–K_0^{nr}–espace vectoriel de Δ et que cette construction est fonctorielle. La proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 1.2.3. — i) *Si D est un objet de $\underline{\mathrm{Mod}}(G_K)$, l'inclusion de D dans $\underline{Co}(D)$ identifie $\underline{\mathrm{Déco}}(\underline{Co}(D))$ à D ;*

ii) *Si Δ est un objet de $\underline{\widehat{\mathrm{Mod}}}(G_K)$, $\underline{\mathrm{Déco}}(\Delta)$ est de dimension finie sur K_0^{nr} et la flèche naturelle $\underline{Co}(\underline{\mathrm{Déco}}(\Delta)) \to \Delta$ est un isomorphisme.*

Preuve : (i) Soit $d_1, d_2, \ldots, d_r$ une base de D sur K_0^{nr}. Si l'on identifie D à un sous–K_0^{nr}–espace vectoriel de $\Delta = \underline{Co}(D)$, les d_i forment aussi une base de Δ sur P_0. Soit $d = \sum\limits_{1 \leq i \leq r} \lambda_i d_i \in \Delta$, avec les $\lambda_i \in P_0$. Il s'agit de prouver que $d \in \underline{\mathrm{Déco}}(\Delta)$ si et seulement si $\lambda_i \in K_0^{nr}$ pour tout i. Il est clair que la condition est suffisante. Réciproquement, si $d \in \underline{\mathrm{Déco}}(\Delta)$, le stabilisateur de d et celui de chaque d_i sont ouverts dans G_K et il en est de même de l'intersection H de ces $r+1$ sous–groupes de G_K. Mais, si $h \in H$, $hd = d$ implique que $h(\lambda_i) = \lambda_i$, pour tout i. On a donc $\lambda_i \in (P_0)^H = (K_0^{nr})^H \subset K_0^{nr}$.

(ii) Choisissons une base $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r\}$ de Δ sur P_0. Pour tout $g \in G_K$, notons $\rho(g)$ la matrice dont la j–ième colonne est formée des composantes de $\rho(\delta_j)$ sur la base δ. Comme I_K opère sur Δ à travers un quotient fini, on peut trouver une extension finie galoisienne L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que le groupe d'inertie I_L opère trivialement sur Δ. La restriction de ρ à G_L se factorise à travers $G_L/I_L = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k_L)$ (où k_L est le corps résiduel de L) et définit un 1–cocycle continu de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k_L)$ à valeurs dans $GL_r(P_0)$. Comme $H^1_{cont}(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k_L), GL_r(P_0))$ est trivial (cf. [Se89], p. III–33), on peut, quitte à changer la base δ, supposer que $h\delta_i = \delta_i$ pour tout i et tout $h \in G_L$. Mais alors, pour tout $g \in G_K$ et tout $h \in G_L$, il existe $h' \in G_L$ tel que $hg = gh'$ et on doit avoir $\rho(hg) = \rho(h) \cdot h(\rho(g)) = h(\rho(g))$ qui doit aussi être égal à $\rho(gh') = \rho(g) \cdot g(\rho(h')) = \rho(g)$; les coefficients de $\rho(g)$ doivent donc être dans $(P_0)^{G_L} \subset K_0^{nr}$. On en déduit que le sous–K_0^{nr}–espace vectoriel D de Δ engendré par les δ_i est stable par G_K et est un objet de $\underline{\mathrm{Mod}}(G_K)$. On a alors $\Delta = \underline{Co}(D)$ et l'assertion résulte alors facilement de (i).

1.2.4. — Remarque. Le lemme montre que $\underline{\text{Déco}}$ est un quasi–inverse de

$$\underline{Co} : \underline{\mathrm{Mod}}(G_K) \longrightarrow \underline{\widehat{\mathrm{Mod}}}(G_K)\,.$$

Si Δ est un objet de $\underline{Del}_p(G_K)$, le sous–K_0^{nr}–espace vectoriel $\underline{\text{Déco}}(\Delta)$ de Δ est stable par G_K, φ et N et devient un objet de $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K)$. On peut aussi considérer $\underline{\text{Déco}}$ comme un quasi–inverse de

$$\underline{Co} : \underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K) \longrightarrow \underline{Del}_p(G_K)\,.$$

1.3. — Modules de Deligne et groupe de Weil–Deligne

Les numéros 1.3.1 à 1.3.3 sont, pour l'essentiel, une généralisation triviale mais naturelle de [De73], § 8 (cas où k est fini) dont le but est de traiter simultanément les deux cas intéressants : celui où k est fini et celui où il est algébriquement clos.

1.3.1. — On appelle **groupe de Weil** W_K (relatif à $\overline{K}/K$) le sous–groupe de G_K formé des éléments dont l'image dans $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ est une puissance entière du Frobenius absolu σ ; si $w \in W_K$, on note $\alpha(w)$ l'unique $a \in \mathbb{Z}$ tel que w agit sur $\overline{k}$ comme σ^a. On voit donc que

– si k est fini avec p^h éléments, le Frobenius géométrique relatif à k est un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et s'identifie à σ^{-h}, de sorte que l'on a suite exacte

$$1 \longrightarrow I_K \longrightarrow W_K \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \longrightarrow 1\,;$$

– sinon on a $W_K = I_K$ et $\alpha(w) = 0$ pour tout $w \in W_K$.

On considère W_K comme un schéma en groupes sur $\mathbb{Q}$, limite projective des schémas en groupes constants W_K/H, pour H parcourant les sous-groupes ouverts de I_K invariants dans G_K.

On note $'W_K$ **le groupe de Weil–Deligne** relatif à $\overline{K}/K$, c'est-à-dire le schéma en groupes sur $\mathbb{Q}$ qui est le produit semi-direct de W_K par le groupe additif $\mathbb{G}_a$, sur lequel W_K opère par

$$wxw^{-1} = p^{\alpha(w)}x\,.$$

Si k n'est pas fini, c'est donc le produit direct du groupe pro-algébrique constant I_K par $\mathbb{G}_a$; dans ce cas, si P est le complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$, on a $'W_K = {}'W_P$.

Pour tout corps E de caractéristique 0, on note $\underline{\mathrm{Rep}}_E('W_K)$ la catégorie des **représentations** E**–linéaires** de dimension finie de $'W_K \otimes E$. Un objet de cette catégorie peut être considéré comme un triplet (Δ, ρ_0, N) où Δ est un E–espace vectoriel de dimension finie, $\rho_0 : W_K \to \mathrm{Aut}_E(\Delta)$ un homomorphisme dont le noyau contient un sous-groupe ouvert de I_K et $N : \Delta \to \Delta$ une application linéaire vérifiant

$$\rho_0(w) \cdot N = p^{\alpha(w)} \cdot N \cdot \rho_0(w)\,, \text{ pour tout } w \in W_K\,.$$

On se propose de munir tout ℓ–module de Deligne d'une action $\mathbb{Q}'_\ell$–linéaire de $'W_K$.

1.3.2. — Dans la suite, si $\ell \neq p$, **on choisit** $t \in \mathbb{Q}_\ell(1)$ non nul. Pour tout ℓ–module de Deligne Δ, on note

$$N_t : \Delta \longrightarrow \Delta$$

l'application définie par $N\delta = N_t\delta \otimes t^{-1}$. Si $w \in W_K$ et $\delta \in \Delta$, on a $w(N\delta) = p^{\alpha(w)} \cdot N_t(w(\delta))$. Autrement dit le triplet $\underline{W}_{\ell,t}(\Delta) = \underline{W}_t(\Delta) = (\Delta, \rho_0, N_t)$, où $\rho_0 : W_K \to \mathrm{Aut}_E(\Delta)$ est la restriction de l'homomorphisme donnant l'action de G_K sur Δ, est une représentation $\mathbb{Q}_\ell$–linéaire de $'W_K$.

Il est clair que l'on peut considérer $\underline{W}_{\ell,t} = \underline{W}_t$ comme un $\otimes$–foncteur exact (et donc fidèle) de $\underline{Del}_\ell(G_K)$ dans $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}('W_K)$. Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion sur t, on écrit $\underline{W}$ (ou $\underline{W}_\ell$) au lieu de $\underline{W}_t$ (ou $\underline{W}_{\ell,t}$).

PROPOSITION 1.3.3. — *Supposons $\ell \neq p$.*

i) *Si t et t' sont deux éléments non nuls de $\mathbb{Q}_\ell(1)$ et si Δ est un objet de $\underline{Del}_\ell(G_K)$, $\underline{W}_t(\Delta)$ et $\underline{W}_{t'}(\Delta)$ sont isomorphes ;*

ii) *si k est algébriquement clos, le foncteur $\underline{W}_t$ est pleinement fidèle et induit une $\otimes$-équivalence entre $\underline{Del}_\ell(G_K)$ et $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}('W_K)$;*

iii) *si k est fini, choisissons $g_0 \in W_K$ tel que $g_0 \notin I_K$; le foncteur W_t est pleinement fidèle et induit une $\otimes$-équivalence entre $\underline{Del}_\ell(G_K)$ et la sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}('W_K)$ formée des Δ tels que les racines du polynôme caractéristique de $\rho_0(g_0)$ (dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$) sont des unités ℓ-adiques.*

Preuve : L'assertion (i) résulte du lemme 1.3.4 ci-dessous et (ii) est triviale. Si k est fini, et si f désigne un relèvement dans W_K du Frobenius géométrique, G_K est engendré topologiquement par f et I_K d'où (iii) lorsque $f = g_0$. Le cas général s'en déduit en remarquant que, si Δ est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}('W_K)$, il existe des entiers r, $s \neq 0$ tels que $\rho(g_0)^r = \rho(f)^s$.

LEMME 1.3.4. — *Supposons k algébriquement clos ou fini et $\ell \neq p$. Choisissons $t \in \mathbb{Q}_\ell(1)$ et $a \in \mathbb{Q}_\ell$ non nuls. Soit Δ un objet de $\underline{Del}_\ell(G_K)$. Pour tout $\delta \in \Delta$, posons $N\delta = N_t(\delta) \otimes t^{-1}$. Il existe un automorphisme τ du $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel Δ qui est G_K-équivariant et vérifie $N_t\tau = a\tau N_t$.*

Si k est algébriquement clos, l'action de $G_K = I_K$ se factorise à travers un quotient fini et est donc semi-simple. Quitte à décomposer Δ en somme directe, on se ramène au cas où Δ est irréductible, et on voit qu'alors, il existe une représentation simple Δ_0 de G_K et un entier r tel que $\Delta \simeq (\Delta_0)^r$, avec

$$N_t(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r) = (\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_r, 0)\,;$$

on peut alors choisir τ défini par

$$\tau(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r) = (\delta_1, a\delta_2, \ldots, a^{r-1}\delta_r)\,.$$

Si k est fini (cf. [De73]), lemme 8.4.3), pour tout $g \in G_K$, posons $gt = \chi_\ell(g)t$ et notons

$$\rho_0 : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta)$$

l'homomorphisme qui donne l'action de G_K sur Δ. Pour tout $g \in G_K$, il existe un entier $n > 0$ tel que $\rho_0(g^m u) = \rho_0(u g^m)$ pour tout $u \in G_K$ dès que n divise m ; ceci nous permet de choisir $g_0 \in G_K$ tel que $\chi_\ell(g_0)$ ne soit pas d'ordre fini et $\rho_0(g_0 u) = \rho_0(u g_0)$ pour tout $u \in G_K$. Choisissons une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_\ell}$ de $\mathbf{Q}_\ell$ et notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des orbites de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_\ell}/\mathbf{Q}_\ell)$ agissant sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, l'orbite de $\chi_\ell(g_0)\alpha$ ne dépend que de l'orbite c de α et nous la notons $\nu(c)$. Si, pour tout $c \in \mathcal{T}$, on note Δ_c le plus grand sous-espace vectoriel de Δ stable par g_0 sur lequel toutes les valeurs propres de $\rho_0(g_0)$ sont dans $\mathcal{T}$, on a $\Delta = \oplus_{c \in \mathcal{T}} \Delta_c$. Comme, pour tout $\delta \in \Delta$, on a $g_0(N_t\delta) = \chi_\ell(g_0) \cdot N_t(g_0\delta)$, on a $N_t(\Delta_c) \subset \Delta_{\nu(c)}$. Si, pour tout $c \in \mathcal{T}$ tel que $\Delta_c \neq 0$, on note $r(c)$ le plus grand entier r tel que $\Delta_{\nu^{-r}(c)} \neq 0$, on voit que l'on peut choisir τ défini par

$$\tau\delta = a^{r(c)}\delta \quad \text{si } \delta \in \Delta_c \, .$$

1.3.5. — Supposons maintenant $\ell = p$. Si Δ est un p-module de Deligne, on peut faire agir W_K linéairement sur Δ en posant

$$\rho_0(w) = w \cdot \varphi^{-\alpha(w)} \, ;$$

on vérifie que le triplet $\underline{W}_p(\Delta) = \underline{W}(\Delta) = (\Delta, \rho_0, N)$ est bien une représentation P_0-linéaire de $'W_K$. On obtient ainsi un $\otimes$-foncteur $\mathbf{Q}_p$-linéaire exact

$$\underline{W}_p = \underline{W} : \underline{Del}_p(G_K) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{P_0}('W_K) \, .$$

1.3.6. — La première catégorie est tannakienne sur $\mathbf{Q}_p$ et la seconde sur P_0. Le foncteur $\underline{W}$ n'est donc pas pleinement fidèle. On a :

PROPOSITION. — *Si Δ_1 et Δ_2 sont deux objets de $\underline{Del}_p(G_K)$, l'application naturelle*

$$P_0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Hom}_{\underline{Del}_p(G_K)}(\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)}(\underline{W}(\Delta_1), \underline{W}(\Delta_2))$$

est injective ; c'est un isomorphisme si k est fini.

Preuve : Si $\mathbb{1}$ (resp. $\mathbb{1}'$) est l'objet unité de $\underline{Del}_p(G_K)$ (resp. $\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)$), on a $\mathrm{Hom}_{\underline{Del}_p(G_K)}(\Delta_1, \Delta_2) = \mathrm{Hom}_{\underline{Del}_p(G_K)}(\mathbb{1}, \Delta_1^* \otimes \Delta_2)$ et

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)}(\underline{W}(\Delta_1), \underline{W}(\Delta_2)) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)}(\mathbb{1}', \underline{W}(\Delta_1)^* \otimes \underline{W}(\Delta_2)).$$

Comme $\underline{W}$ est un $\otimes$–foncteur, on est ramené, quitte à remplacer Δ_2 par $\Delta_1 \otimes \Delta_2$ au cas où $\Delta_1 = \mathbb{1}$. On a alors les identifications

$$\mathrm{Hom}_{\underline{Del}_p(G_K)}(\mathbb{1}, \Delta_2) = \{\delta \in \Delta_2 \mid \varphi\delta = \delta\,,\ g\delta = \delta \text{ si } g \in G_K\,,\ N\delta = 0\} \text{ et}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)}(\mathbb{1}', \Delta_2) = \{\delta \in \Delta_2 \mid \rho_0(w)(\delta) = \delta\,,\ \text{si } w \in W_K\,,\ N\delta = 0\}.$$

Quitte à remplacer Δ_2 par $(\Delta_2)_{N=0} \cap (\Delta_2)^{I_K}$, on peut supposer que I_K opère trivialement et que $N = 0$.

L'injectivité de l'application résulte de ce que, comme φ est σ–linéaire, si des éléments de Δ_2 fixes par φ sont linéairement indépendants sur P_0, ils le sont aussi sur $(P_0)^\sigma = \mathbb{Q}_p$.

Si k est fini avec p^h éléments et si l'on choisit $g_0 \in G_K$ tel que $\alpha(g_0) = h$, on a $g_0 \in W_K$, $\rho_0(g_0) = \varphi^{-h}g$ et

$$D := \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)}(\mathbb{1}', \Delta_2) = \{\delta \in \Delta_2 \mid g_0\delta = \varphi^h\delta\} \text{ tandis que}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{Del}_p(G_K)}(\mathbb{1}, \Delta_2) = \{\delta \in \Delta_2 \mid g_0\delta = \varphi\delta = \delta\} = \{\delta \in D \mid \varphi\delta = \delta\}.$$

La continuité de l'action de G_K sur Δ_2 implique l'existence d'un réseau Λ du P_0–espace vectoriel Δ_2 stable par g_0 et g_0^{-1}. Alors $\Lambda_0 = \Lambda \cap D$ est un réseau de D stable par g_0 et g_O^{-1} ; sur ce réseau φ^h est bijectif; ceci implique que Δ est “de pente 0” donc, puisque le corps résiduel de P_0 est algébriquement clos, que Δ est engendré par les éléments fixes par φ, d'où la surjectivité.

1.3.7. — Disons qu'un ℓ–module de Deligne Δ est **semi–stable** si I_K opère trivialement sur Δ (ou sur $\underline{W}(\Delta)$, cela revient au même). De même, si L est une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$, on dit qu'un ℓ–module de Deligne **Δ devient semi–stable sur L** si I_L opère trivialement.

Si $p = \ell$ et si L/K est galoisienne, $\Delta_{st,L} = \Delta^{G_L}$ a une structure naturelle de $(\varphi, N, G_{L/K})$–module (cf. [Exp. II, n° 4.2); il porte une structure de représentation L_0–linéaire de dimension finie de $'W_K$ (avec action triviale de I_L) et on le note alors $\underline{W}_{st,L}(\Delta)$. L'application naturelle de $P_0 \otimes_{L_0} \Delta_{st,L}$ dans Δ est injective et est un isomorphisme si et seulement si Δ devient semi-stable sur L ; dans ce cas $\underline{W}(\Delta)$ s'identifie à la représentation P_0–linéaire de $'W_K$ déduite de $\underline{W}_{st,L}(\Delta)$ par l'extension des scalaires $L_0 \subset P_0$.

En particulier, lorsque Δ est semi–stable, la représentation P_0–linéaire $\underline{W}(G_K)$ provient par extension des scalaires de la représentation K_0–linéaire $\underline{W}_{st}(\Delta) := \underline{W}_{st,K}(\Delta)$.

2. — Représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables

On conserve les hypothèses et notations du paragraphe précédent.

2.1. — Les différents types de représentations ℓ–adiques

2.1.1. — On sait ce que signifie pour une représentation p–adique V de G_K d'être cristalline, semi–stable, potentiellement cristalline, potentiellement semi–stable (cf. [Exp. III], n° 5.1.4, 5.6.1, 5.6.8). Au lieu de dire que V est (potentiellement) cristalline, on dira aussi que V **a (potentiellement) bonne réduction**.

2.1.2. — Supposons $\ell \neq p$. Nous disons qu'une représentation ℓ–adique V de G_K

– **a bonne réduction** si elle est non ramifiée (i.e. si I_K opère trivialement) ;

– **est semi–stable** si l'action de I_K est unipotente ;

– **a potentiellement bonne réduction** (resp. **est potentiellement semi–stable**) s'il existe une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que V, en tant que représentation ℓ–adique de G_L a bonne réduction (resp. est semi–stable) ; cela revient à dire qu'il existe un sous–groupe ouvert de I_K qui opère trivialement (resp. de façon unipotente) sur V.

2.1.3. — Pour ℓ quelconque, la sous–catégorie pleine[2] $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,f}(G_K)$ (resp.

[2] La notation "f" pour les représentations qui ont bonne réduction est due à Kato qui y voit l'analogue, dans ce contexte, des représentations modulo ℓ que Serre appelle "finies".

$\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,st}(G_K)$, $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,pf}(G_K)$, $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,pst}(G_K)$) de la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell}(G_K)$ des représentations ℓ–adiques de G_K dont les objets sont les représentations qui ont bonne réduction (resp. sont semi–stables, ont potentiellement bonne réduction, sont potentiellement semi–stables) est une sous–catégorie tannakienne et on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,pf}(G_K) \arrow[dr] & & \\ \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,f}(G_K) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,pst}(G_K) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell}(G_K) \\ & \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,st}(G_K) \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

où les flèches sont des "inclusions", toutes strictes, sauf la dernière lorsque l'on a simultanément

i) $\ell \neq p$

ii) si k' est un corps obtenu en adjoignant à k les racines ℓ–ièmes (resp. 4–ièmes si $\ell = 2$) de l'unité, le corps k' ne contient qu'un nombre fini de racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ).

Lorsque $\ell = p$, on a $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_p,pst}(G_K) \subset \underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G_K)$ (catégorie des représentations de de Rham, cf. [Exp. III], n° 3.7). A notre connaissance, la question de savoir si cette inclusion est ou non stricte est un problème ouvert.

2.2. — Les anneaux Bst,ℓ

2.2.1. — Si $\ell \neq p$, on pose $B_\ell = \mathbf{Q}_\ell$ sur lequel on fait opérer G_K trivialement. Si $\ell = p$, on pose $B_p = B_{cris}$; c'est une P_0–algèbre (donc a fortiori une $\mathbf{Q}_p$–algèbre) munie d'une action de G_K et d'un Frobenius φ (cf. [Exp. II]).

2.2.2. — Choisissons un élément $q \in K$ qui n'est ni 0 ni une unité. Nous allons associer à q une B_ℓ–algèbre $B_{st,\ell}$ munie d'une action de G_K et d'une dérivation G_K–équivariante

$$N : B_{st,\ell} \longrightarrow B_{st,\ell}(-1)$$

dont le noyau est B_ℓ.

Pour cela, posons $V_{\ell,q} = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_{\ell,q}$, avec

$$T_{\ell,q} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} (\overline{K}/q^{\mathbb{Z}})_{\ell^n}\,.$$

Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T_{\ell,q}$, et si, pour tout n, on choisit un relèvement $\hat{a}_n$ de a_n dans $\overline{K}$, on a $\hat{a}_n^{\ell^n} = q^{r_n}$ avec $r_n \in \mathbb{Z}$ et la suite des r_n converge ℓ-adiquement dans $\mathbb{Z}_\ell$ vers une limite $\nu(a)$ qui est indépendante du choix des relèvements. L'application ν se prolonge en une application $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire, G_K-équivariante, de $V_{\ell,q}$ sur $\mathbb{Q}_\ell$, dont le noyau s'identifie à $\mathbb{Q}_\ell(1)$. Autrement dit, $V_{\ell,q}$ est une représentation ℓ-adique de dimension 2 de G_K et on a une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(1) \longrightarrow V_{\ell,q} \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow 0\,,$$

qui, en tensorisant avec $\mathbb{Q}_\ell(-1)$, donne naissance à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow V_{\ell,q}(-1) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(-1) \longrightarrow 0\,,$$

et nous notons encore ν la projection de $V_{\ell,q}(-1)$ sur $\mathbb{Q}_\ell(-1)$.

2.2.3. — Comme $V_{\ell,q}(-1)$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension 2, la $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_\ell} V_{\ell,q}(-1)$ est isomorphe à une algèbre de polynômes en deux indéterminées. On note $B_{\ell,q}$ le quotient de cette algèbre que l'on obtient en identifiant l'élément-unité de cette algèbre ("1 en degré 0") avec l'élément $1 \in \mathbb{Q}_\ell \subset V_{\ell,q}(-1) = \mathrm{Sym}^1 V_{\ell,q}(-1)$ ("1 en degré 1"). Si v est un élément de $V_{\ell,q}(-1)$ qui n'est pas dans $\mathbb{Q}_\ell$, $B_{\ell,q}$ est donc l'algèbre des polynômes, à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$, en l'indéterminée v.

Le noyau de la projection de $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_\ell} V_{\ell,q}(-1)$ sur $B_{\ell,q}$ est stable par G_K qui opère donc sur $B_{\ell,q}$. En tant que $\mathbb{Q}_\ell[G_K]$-module, $B_{\ell,q}$ s'identifie à $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Sym}^n_{\mathbb{Q}_\ell} V_{\ell,q}(-1)$, l'application de transition de $\mathrm{Sym}^n V_{\ell,q}(-1)$ dans $\mathrm{Sym}^{n+1} V_{\ell,q}(-1)$ étant la multiplication par $1 \in V_{\ell,q}(-1)$.

On note $N : B_{\ell,q} \to B_{\ell,q}(-1)$ l'unique $\mathbb{Q}_\ell$-dérivation qui envoie $v \in V_{\ell,q}(-1)$ sur $1 \otimes \nu(v)$. Il est clair qu'elle est G_K-équivariante.

2.2.4. — On pose alors $B_{st,\ell,q} = B_{\ell,q}$ si $\ell \neq p$ et $B_{st,p,q} = B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{p,q}$. S'il n'y a pas de risque de confusion, on pose $B_{st,\ell} = B_{st,\ell,q}$. On identifie, comme on pense, B_{cris} et $B_{p,q}$ a des sous–anneaux de $B_{st,p}$. Ce dernier anneau est muni

– d'une action de G_K : on a $g(b \otimes c) = gb \otimes gc$ si $g \in G_K$, $b \in B_{cris}$, $c \in B_{p,q}$;

– d'une action du Frobenius φ : on a $\varphi(b \otimes c) = \varphi b \otimes c$ si $b \in B_{cris}$, $c \in B_{p,q}$;

– d'une dérivation $N : B_{st,p} \to B_{st,p}(-1)$: on a $N(b \otimes c) = b \otimes Nc$ si $b \in B_{cris}$, $c \in B_{p,q}$.

On voit que l'action de φ et celle de N commutent à celle de G_K. Si l'on fait agir φ sur $B_{st,p}(-1)$ par $\varphi(d \otimes a) = \varphi d \otimes a$, si $d \in B_{st,p}$ et $a \in \mathbb{Q}_p(-1)$, l'action de N commute à celle de φ.

2.2.5. — Soient R et $Fr\,R$ comme dans l'exposé II (n° 3.1). Choisissons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{K}$ vérifiant $a_0 = q$ et, pour tout n, $a_{n+1}^p = a_n$. Notons a (resp. α) l'élément de $Fr\,R$ (resp. $V_{p,q}$) qu'il définit. On peut considérer α comme un élément de $B_{st,p}$: si t est un élément non nul de $\mathbb{Q}_p(1) \subset B_{cris}$, on a $\alpha \otimes t^{-1} \in V_{p,q}(-1)$ et on peut écrire $\alpha = t \otimes (\alpha \otimes t^{-1})$. Il existe un unique homomorphisme λ_q de $(Fr\,R)^*$ dans le groupe additif de $B_{st,p}$ qui prolonge l'application

$$\lambda : R^* \longrightarrow B_{cris} \quad \text{(cf. [Exp. II], n° 3.1)}$$

et vérifie $\lambda_q(a) = \alpha$. L'application λ_q est indépendante du choix de la suite des a_n. La propriété universelle de l'anneau B_{st} (*loc. cit.*) implique qu'il existe donc un unique homomorphisme de la B_{cris}–algèbre B_{st} dans $B_{st,p}$ envoyant $\lambda(a)$ sur α et que cette application est un isomorphisme. Nous l'utilisons **pour identifier $B_{st,p}$ et B_{st}.**

Cette identification est compatible à l'action de G_K et à celle de φ. En ce qui concerne l'action de N, soit

$$i : B_{st,p}(-1) = B_{st}(-1) \longrightarrow B_{st}$$

l'isomorphisme canonique qui envoie $b \otimes t^{-1}$ sur bt^{-1}. Si v est la valuation normalisée par $v(q) = 1$ si q est entier (resp. $v(q) = -1$ si q n'est pas entier), et si $N_v : B_{st} \to B_{st}$ est l'opérateur de monodromie qui lui est associé ([Exp. II], n° 3.2), on a

$$N_v = i \circ N \ (\text{resp.} -i \circ N)$$

(l'application i commute à l'action de G_K mais pas à celle de φ (on a $i(\varphi(b \otimes t^{-1}) = \varphi b \cdot t^{-1} = p \cdot \varphi(bt^{-1}) = p \cdot \varphi(i(b \otimes t^{-1})$, ce qui explique que $N\varphi = \varphi N$ alors que $N_v\varphi = p\varphi N_v$.

2.2.6. — On voit donc que, si q et q' sont deux éléments de K qui ne sont ni 0 ni des unités, les anneaux $B_{st,p,q}$ et $B_{st,p,q'}$ sont canoniquement isomorphes (ils s'identifient tous deux à B_{st}), cet isomorphisme étant compatible avec l'action de G_K et celle de φ (mais pas celle de N si q/q' n'est pas une unité).

Pour tout corps E, posons $Kum_\ell(E) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} (\varprojlim E^*/(E^*)^{\ell^n})(= H^1(E, \mathbb{Q}_\ell(1)))$. Lorsque $\ell \neq p$, pour qu'il existe un isomorphisme G_K-équivariant de $B_{st,\ell,q'}$ sur $B_{st,\ell,q}$, il faut et il suffit que les images $\overline{q}'$ et $\overline{q}$ de q' et q dans $Kum_\ell(K)$ engendrent le même $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel (où le même $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, cela revient au même). S'il en est ainsi, si $\overline{q}' = a\overline{q}$, avec $a \in \mathbb{Q}$, si l'on choisit $t \in \mathbb{Q}_\ell(1)$ non nul et si l'on fixe un relèvement α de q dans $V_{\ell,q}$, les homomorphismes G_K-équivariants $\psi : B_{st,\ell,q'} \to B_{st,\ell,q}$ correspondent bijectivement aux relèvements α' de q dans $V_{\ell,q'}$ (via $\psi \longmapsto \psi(\alpha' \otimes t^{-1}) = a\alpha \otimes t^{-1}$) ; avec des notations évidentes, $\psi N' = aN\psi$.

Si q est choisi, $Kum_\ell(K)$ s'identifie à la somme directe du $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel engendré par l'image de q et de $Kum_\ell(k)$, ce qui fait que tous les $B_{st,\ell,q}$ sont isomorphes si et seulement si $Kum_\ell(k) = 0$. C'est en particulier le cas lorsque k est algébriquement clos où lorsque k est fini.

2.3. — Les foncteurs $\underline{\widehat{D}}_{pst}$ et $\underline{V}_{pst}$

Dans ce numéro, s'il n'y a pas de risque de confusion, on pose $B = B_{st,\ell}$. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-groupes ouverts de I_K.

2.3.1. — L'anneau B a une structure naturelle de ℓ-module de Deligne (lorsque $\ell = p$, comme on l'a déjà remarqué au n° 2.2.5, on peut indifféremment considérer N comme une application de B dans $B(-1)$ commutant à φ ou comme un endormorphisme de B vérifiant $N\varphi = p\varphi N$, via l'isomorphisme canonique de $B(-1)$ sur B qui envoie $b \otimes a$ sur ba si $b \in B$ et

$a \in \mathbb{Q}_p(-1) \subset B$).

2.3.2. — Pour toute représentation ℓ–adique V de G_K, le $\mathbb{Q}'_\ell$–espace vectoriel $B \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V$ a une structure naturelle de ℓ–module de Deligne : si $b \in B$ et $v \in V$, on a, pour tout $g \in G_K$, $g(b \otimes v) = gb \otimes gv$, $N(b \otimes v) = Nb \otimes v$ (en identifiant $B(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V$ à $(B \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V)(-1)$ si $\ell \neq p$) et, si $\ell = p$, $\varphi(b \otimes v) = \varphi b \otimes v$.

On pose

$$\widehat{\underline{D}}_{pst,q}(V) = \varinjlim_{H \in \mathcal{H}} (B \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V)^H \, ;$$

c'est de façon naturelle un ℓ–module de Deligne (sous–objet de $B \otimes V$). On écrit $\widehat{\underline{D}}_{pst}$ au lieu de $\widehat{\underline{D}}_{pst,q}$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

THÉORÈME. — *Soient V une représentation ℓ–adique de G_K et $\Delta = \widehat{\underline{D}}_{pst}(V)$. Alors*

i) *on a* $\dim_{\mathbb{Q}'_\ell} \Delta \leq \dim_{\mathbb{Q}_\ell} V$ *et Δ est un objet de $\underline{Del}_\ell(G_K)$;*

ii) *l'application naturelle*

$$\alpha_V : B \otimes_{\mathbb{Q}'_\ell} \Delta \longrightarrow B \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V$$

est injective ;

iii) *les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) $\dim_{\mathbb{Q}'_\ell} \Delta = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} V$,

(b) α_V *est un isomorphisme,*

(c) *la représentation V est potentiellement semi–stable.*

Preuve : Soit $H \in \mathcal{H}$. On a $B^H = \mathbb{Q}'_\ell$ (cf., si $\ell = p$, [Exp. III], prop. 5.1.2, appliquée au cas où le corps de base est le complété de $\overline{K}^H$; le cas $\ell \neq p$ est immédiat). Par ailleurs, l'anneau B est H–régulier (cf. [Exp. III], n° 1.4) :

– si $\ell = p$, c'est la proposition 5.1.2 de [Exp. III], appliquée au cas où le corps de base est le complété de $\overline{K}^H$;

– si $\ell \neq p$, l'anneau B est intègre, on a $B^H = (FracB)^H = \mathbb{Q}_\ell$; si $b \in B$ est un élément non nul tel que la $\mathbb{Q}_\ell$–droite engendrée par b est stable par H, $b \in \mathbb{Q}_\ell$ et est inversible dans B et cela résulte du corollaire 1.6.6 de [Exp. III].

Les résultats de ce théorème sont alors immédiats (cf. [Exp. III], prop. 1.4.2 et 1.8.2).

2.3.3. — **Remarque** : Rappelons que $B_\ell = \mathbb{Q}_\ell$ si $\ell \neq p$ et que $B_p = B_{cris}$. Pour toute représentation ℓ–adique, posons $\underline{\widehat{D}}_{st,q}(V) = \underline{\widehat{D}}_{st}(V) = (B \otimes V)^{I_K}$, $\underline{\widehat{D}}_{br}(V) = (B_\ell \otimes V)^{I_K}$ et $\underline{\widehat{D}}_{pbr}(V) = \varinjlim_{H \in \mathcal{H}} (B_\ell \otimes V)^H$.

Soient V une représentation ℓ–adique potentiellement semi–stable de G_K et $\Delta = \underline{\widehat{D}}_{pst}(V)$; alors

(a) V est semi–stable si et seulement si I_K opère trivialement sur Δ et alors $\Delta = \underline{\widehat{D}}_{st}(V)$,

(b) V a potentiellement bonne réduction si et seulement si $N = 0$ sur Δ et alors $\Delta = \underline{\widehat{D}}_{pbr}(V)$,

(c) V a bonne réduction si et seulement si $N = 0$ et I_K opère trivialement sur Δ, auquel cas $\Delta = \underline{\widehat{D}}_{br}(V)$.

2.3.4. — Les représentations ℓ–adiques (potentiellement) semi–stables sont donc les représentations qui sont (potentiellement) B–admissibles au sens de [Exp. III] (n° 1.5 et 1.8). En particulier, la restriction de $\underline{\widehat{D}}_{pst}$ à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,pst}(G_K)$ peut être considérée comme un $\otimes$–foncteur exact de cette catégorie dans $\underline{Del}_\ell(G_K)$.

Si Δ est un ℓ–module de Deligne, le produit tensoriel $B \otimes \Delta$ aussi (cf. n° 1.1.4).

Proposition. — *Supposons $\ell \neq p$.*

i) *Pour tout objet Δ de $\underline{Del}_\ell(G_K)$,*

$$\underline{V}_{pst}(\Delta) = \{v \in B \otimes \Delta \mid Nv = 0\}$$

est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,pst}(G_K)$.

ii) *Le foncteur $\underline{\widehat{D}}_{pst}$ induit une $\otimes$–équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,pst}(G_K)$ et $\underline{Del}_\ell(G_K)$. Le foncteur $\underline{V}_{pst}$ est un quasi–inverse.*

Preuve : On vérifie par récurrence sur la longueur de Δ que $\underline{V}_{pst}(\Delta)$ est un $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel de dimension finie égale à celle de Δ, avec action de

I_K potentiellement unipotente et que N est surjectif sur $B \otimes \Delta$ (lorsque Δ est simple, de dimension d sur $\mathbb{Q}_\ell$, $\underline{V}_{pst}(\Delta) = \Delta$ tandis que $B \otimes \Delta \simeq B^d$ en tant que B–module avec action de N et le résultat est évident). D'où (i). On voit aussi que l'application naturelle de $B \otimes \underline{V}_{pst}(\Delta)$ dans $B \otimes \Delta$ est un isomorphisme de B–modules compatible aussi bien avec les actions de G_K qu'avec les structures de ℓ–modules de Deligne. L'assertion (ii) résulte alors du théorème 2.3.2.

2.3.5. — Remarque : Lorsque $\ell = p$, comme on l'a vu dans l'exposé III, il faut rajouter une filtration sur $\widehat{\underline{D}}_{pst}(V)$ pour pouvoir retrouver V : de façon précise, si l'on note

$$\log_q : \overline{K}^* \longrightarrow \overline{K}$$

l'unique prolongement du logarithme usuel qui vérifie $\log_q(q) = 0$, le choix de ce logarithme définit un plongement de $B = B_{st,p,q} = B_{st}$ dans B_{dR} ([Exp. II]), n° 4.2) et permet, si V est une représentation p–adique potentiellement semi–stable, d'identifier $(\overline{K} \otimes_{K_0} \underline{D}_{pst}(V))^{G_K}$ à $\underline{D}_{dR}(V)$ et donc de le munir d'une structure de K–espace vectoriel filtré ([Exp. III], th. 5.6.7).

Rappelons que $P = KP_0 \subset C$, complété de $\overline{K}$ et notons $\overline{P}$ la fermeture algébrique de P dans C. Si V est comme ci–dessus et si $\Delta = \widehat{\underline{D}}_{pst}(V)$, on a aussi $(\overline{P} \otimes_{P_0} \Delta)^{G_K} = (\overline{K} \otimes_{K_0} \underline{D}_{pst}(V))^{G_K} = \underline{D}_{dR}(V)$ et le $\overline{P}$–espace vectoriel $\overline{P} \otimes_{P_0} \Delta$ s'identifie à $\overline{P} \otimes_K \underline{D}_{dR}(V)$; on le munit de la filtration déduite de celle de $\underline{D}_{dR}(V)$ par extension des scalaires. On voit alors que V *s'identifie au sous–$\mathbb{Q}_p$–espace vectoriel* $\underline{V}_{pst}(\Delta)$ de $B \otimes \Delta$ *formé des v vérifiant $\varphi v = v$, $Nv = 0$ et dont l'image dans $B_{dR} \otimes_{P_0} \Delta = B_{dR} \otimes_{\overline{P}} (\overline{P} \otimes \Delta)$ est dans le Fil^0 de ce $\overline{P}$–espace vectoriel filtré).*

On laisse au lecteur qui en éprouverait le besoin le soin de traduire en termes de "p–modules de Deligne filtrés" le théorème 5.6.7 de l'exposé III : le foncteur $\widehat{\underline{D}}_{pst}$ induit une $\otimes$–équivalence entre représentaitons p–adiques potentiellement semi–stables et "p–modules de Deligne filtrés admissibles", le foncteur $\underline{V}_{st}$ étant un quasi–inverse. Lorsque k est algébriquement clos cette dernière catégorie n'est autre que la catégorie $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$; dans le cas général, le foncteur $\underline{\text{Déco}}$ induit une $\otimes$–équivalence entre ces deux catégories.

PROPOSITION 2.3.6. — *Soient q et q' deux éléments de K qui ne sont ni nuls ni des unités, V une représentation ℓ–adique potentiellement semi–stable, $\Delta = \underline{\widehat{D}}_{pst,q}(V)$ et $\Delta' = \underline{\widehat{D}}_{pst,q'}(V)$: supposons que $\ell = p$ ou bien que k est algébriquement clos ou encore que k est fini. Alors, les ℓ–modules de Deligne Δ et Δ' sont isomorphes.*

Preuve : Lorsque $\ell = p$, Δ et Δ' s'identifient en tant que P_0–espaces vectoriels munis d'une action de G_K et de φ. Si l'action de N n'est pas, en général, la même, Δ et Δ' sont des p–modules de Deligne isomorphes (cf. [Exp. III], n° 5.2.3 et 5.6.8; en revanche Δ et Δ' ne sont en général pas isomorphes en tant que p–modules de Deligne **filtrés**).

Supposons maintenant $\ell \neq p$. Dans ce cas (n° 2.2.6), si r et s sont des entiers non nuls tels que $q'^s = q^r$ et si $a = r/s \in \mathbf{Q}$, il existe un isomorphisme $\psi : B_{st,\ell,q'} \to B_{st,\ell,q}$ commutant à G_K mais vérifiant $\psi N = aN\psi$. Si on l'utilise pour identifier Δ et Δ', on est ramené à vérifier qu'il existe un automorphisme τ du $\mathbf{Q}_\ell$–espace vectoriel Δ qui est G_K–équivariant et vérifie $\tau N = aN\tau$, ce qui n'est autre que le lemme 1.3.4.

2.3.7. — En composant avec le foncteur $\underline{W}$ (cf. n° 1.3.2 et 1.3.5), on obtient un foncteur

$$\underline{W\widehat{D}}_{pst} = \underline{W} \circ \underline{\widehat{D}}_{pst} : \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell}(G_K) \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}'_\ell}('W_K)$$

(ou, s'il y a risque de confusion, $\underline{W\widehat{D}}_{pst,q,t_\ell}$ si $\ell \neq p$, $\underline{W\widehat{D}}_{pst,q}$ si $\ell = p$), dont la restriction à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,pst}(G_K)$ est un $\otimes$–foncteur exact.

On peut le décrire "directement" en disant que

$$\underline{W\widehat{D}}_{pst}(V) = \varinjlim_{H\in\mathcal{H}} (B' \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} V)^H ,$$

où $B' = B'_{st,\ell}$ est une $\mathbf{Q}'_\ell$–algèbre munie d'une action $\mathbf{Q}_\ell$–linéaire de I_K, d'une dérivation N commutant à l'action de I_K et d'une action de W_K via un homomorphisme

$$\rho_0 : W_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{Q}_{\ell'}\text{–algèbres}}(B') ,$$

tel que, si $w \in W_K$, on ait $\rho_0(w) \cdot N = p^{\alpha(w)} \cdot N \cdot \rho_0(w)$ et, si $h \in H \in \mathcal{H}$, $\rho_0(w^{-1})h\rho_0(w) \in H$.

Si $\ell \neq p$, on prend $B' = B$ avec l'action naturelle de $I_K \subset G_K$, $N = N_t$ (si $N : B \to B$ est l'opérateur déjà défini, on a $Nb = N_t b \otimes t^{-1}$, pour tout $b \in B$) et ρ_0 étant obtenu en composant l'inclusion de W_K dans G_K avec l'action naturelle de G_K.

Si $\ell = p$, c'est un tout petit peu plus subtil : on prend $B' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n(B)$ (si v est comme au n° 2.2.3, on a $B' = B'_{cris} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n(B_{cris})$) de sorte que φ est bijectif sur B'. L'action de I_K et celle de N sont induites par celles que l'on a sur B (on a $g(B') = B'$ pour tout $g \in I_K$ et $N(B') \subset B'$). Enfin ρ_0 est défini par $\rho_0(w) = \varphi^{-\alpha(w)}w$.

On récupère alors les structures que l'on cherche sur chaque $(B' \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V)^H$ en faisant agir I_K, N et W sur $B' \otimes V$ par

$$g(b\otimes x) = gb\otimes gx, \quad N(b\otimes x) = Nb\otimes x \quad \text{et} \quad \rho_0(w)(b\otimes x) = \rho_0(w)\otimes w(x)\,.$$

Bien sûr, pour tout ℓ, on a aussi

$$\underline{W\widehat{D}}_{pst}(V) = \varinjlim_{H\in\mathcal{H}} (B\otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V)^H)\,,$$

mais, si $\ell = p$, seul les $\rho_0(w)$ pour $\alpha(w) \leq 0$ opèrent sur $B \otimes V$ (sur chaque $(B\otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V)^H$, ils induisent des bijections et on peut donc définir $\rho_0(w)$ pour $\alpha(w) > 0$ par $\rho_0(w) = (\rho_0(w^{-1})^{-1})$.

2.3.8. — Supposons $\ell \neq p$. Habituellement le dictionnaire entre représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables et ℓ-modules de Deligne se fait sans utiliser l'anneau $B_{st,\ell}$ (cf. [De73], lorsque k est fini) : choisissons un 1-cocycle continu

$$c \in Z^1_{cont}(G_K, \mathbb{Q}_\ell(1))$$

dont la classe dans $H^1_{cont}(G_K, \mathbb{Q}_\ell(1))$ est la classe d'isomorphisme de l'extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(1) \longrightarrow V_{\ell,q} \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow 0\,.$$

Pour tout objet Δ de $\underline{Del}_\ell(G_K)$, N est un 0-cocycle continu de G_K à valeurs dans le $\mathbb{Q}_\ell[G_K]$-module des applications $\mathbb{Q}_\ell$-linéaires de Δ dans $\Delta(-1)$ qui s'identifie à $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta)(-1)$. Le cup-produit $N \cup c \in Z^1_{cont}(G_K, \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta))$;

comme son image est formée d'éléments nilpotents, on peut considérer le 1–cocycle

$$e^{N \cup c} : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta)\,.$$

Notons $\underline{V}_{\ell,q,c}(\Delta)$ le $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel Δ muni de l'action de G_K

$$\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta)$$

définie par $\rho(g) = g \circ e^{N \cup c}(g) = g \circ e^{(N \cup c)(g)}$. Si l'on choisit $t \in \mathbb{Q}_\ell(1)$ non nul, si l'on pose $c(g) = c_t(g)t$, pour tout $g \in G_K$, et si l'on note N_t l'endomorphisme nilpotent de Δ défini par $N\delta = N_t\delta \otimes t^{-1}$, on a $\rho(g) = \exp(c_t(g)N_t)$.

On peut considérer $\underline{V}_{\ell,q,c}$ comme un foncteur de $\underline{Del}_\ell(G_K)$ dans $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)$.

2.3.9. — Les foncteurs $\underline{V}_{\ell,q,c}$ et $\underline{V}_{\ell,pst}$ sont naturellement équivalents. Plus précisément, se donner c revient à se donner une section $\mathbb{Q}_\ell$–linéaire $s : \mathbb{Q}_\ell \to V_{\ell,q}$ de la projection canonique de $V_{\ell,q}$ sur $\mathbb{Q}_\ell$ (et alors $c(g) = g(s(1)) - s(1)$, pour tout $g \in G_K$). Posons $\beta = s(1) \otimes t^{-1} \in V_{\ell,q}(-1)$ (où t est comme ci–dessus).

Soient Δ un objet de $\underline{Del}_\ell(G_K)$ et $V = \underline{V}_{\ell,st}(\Delta)$. On peut voir Δ et V comme des sous $\mathbb{Q}_\ell$–espaces vectoriels de $B \otimes \Delta = B \otimes V$. Soit alors $\eta : \Delta \to B \otimes \Delta$ l'application définie par

$$\eta(\delta) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\beta^i}{i!} \cdot N_t^i \delta\,.$$

Proposition. — *Avec les notations ci–dessus, η est une bijection de Δ sur V. Si ξ est la bijection réciproque, si $g \in G_K$ et $v \in V$,*

$$\xi(gv) = \rho(g)(\xi(v))\,.$$

Preuve : standard.

2.4. — Cohomologie étale ℓ–adique

2.4.1. — Rappelons, cf. [De73], n° 8.7) que si F est une extension d'un corps E de caractéristique 0 et si Δ est une représentation F–linéaire de $'W_K$, on dit que Δ **est définie sur** E si, étant donnés une E–structure D de Δ et un corps algébriquement clos Ω contenant F, la représentation Ω–linéaire de $'W_K$ que l'on déduit de Δ par extension des scalaires est isomorphe à ses conjuguées sous $\mathrm{Aut}(\Omega/E)$, (agissant sur $\Omega \otimes_F \Delta = \Omega \otimes_E D$ via $\tau(\omega \otimes d) = \tau(\omega) \otimes d)$; cette condition est indépendante des choix de D et Ω.

Si Δ **est rationnelle sur** E (i.e. s'il existe une représentation E–linéaire D de $'W_K$ telle que Δ soit isomorphe à $F \otimes_E D$), Δ est définie sur E mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

2.4.2. — Soient E un corps de caractéristique 0. Rappelons que (cf. [De73], dans le cas particulier où k est fini) si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'extensions de E et, pour chaque i, Δ_i est une représentation E_i–linéaire de $'W_K$, on dit que $(\Delta_i)_{i\in I}$ est **une famille compatibles de représentations de** $'W_K$ si chaque Δ_i est définie sur E et si, quelque soient $i, j \in I$, si Ω est un corps algébriquement clos contenant E_i et E_j les représentations Ω–linéaires de $'W_K$ déduites par extensions des scalaires de Δ_i et Δ_j sont isomorphes.

2.4.3. — Choisissons $q \in K$ qui n'est ni 0 ni une unité et, pour chaque $\ell \neq p$, un élément non nul $t_\ell \in \mathbb{Q}_\ell(1)$.

Soient X une variété algébrique propre et lisse sur K et $m \in \mathbb{N}$. Pour chaque ℓ,

$$H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

est une représentation ℓ–adique de G_K. On pose (cf. n° 2.3.7)

$$H^m_{pst,\ell}(X) = \underline{W\widehat{D}}_{pst}(H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

(ou, s'il y a risque de confusion, $H^m_{pst,\ell,q,t_\ell}(X)$ si $\ell \neq p$, $H^m_{pst,p,q}(X)$ si $\ell = p$).

Conjecture $C_{WD}(X, m)$. — *Supposons q et les t_ℓ choisis comme ci-dessus. Soient X une variété algébrique propre et lisse sur K et $m \in \mathbb{N}$. Alors les $H^m_{pst,\ell}(X)$ pour ℓ premier, forment un système compatible de représentations de $'W_K$.*

Il résulte des propositions 1.3.3 et 2.3.6 que cette conjecture est indépendante du choix de q et des t_ℓ.

Remarquons aussi que si k n'est pas fini, cette conjecture ne donne des renseignements que sur l'action du groupe d'inertie sur la cohomologie étale. Autrement dit, elle est équivalente à celle que l'on obtient en remplaçant K par P, complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$, et X par $X \otimes P$.

2.4.4. — On conjecture aussi que $H^m_{pst,\ell}$ est F–semi–simple (au sens de Deligne, [De73], n° 8.6), i.e. que l'action de W_K sur $H^m_{pst,\ell}(X)$ est semi–simple. Lorsque le corps résiduel n'est pas fini, W_K opère à travers un quotient fini et ceci est automatique. Lorsque k est fini, cela peut s'énoncer ainsi :

CONJECTURE $C_{\ell,ss}(X,m)$. — *Supposons k fini et choisissons $w_0 \in G_K$ tel que $w_0 \notin I_K$. Soient X une variété algébrique propre et lisse sur K et $m \in \mathbb{N}$. Alors l'automorphisme du $\mathbb{Q}'_\ell$–espace vectoriel $H^m_{pst,\ell}(X)$ donnant l'action de w_0 est semi–simple.*

2.4.5. — Rappelons ([De80], n° 1.6) que si Δ est une espace vectoriel sur un corps, muni d'un endomorphisme nilpotent N, la filtration de Jacobson–Morosov sur Δ est l'unique filtration finie croissante $(F_i^{JM}\Delta)_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $N(F_i^{JM}\Delta) \subset F_{i-2}^{JM}\Delta$ et que N induise un isomorphisme

$$N^i : Gr_i^{JM}\Delta \longrightarrow Gr_{-i}^{JM}\Delta\,.$$

CONJECTURE $C_{WD}(X,m)_{\text{faible}}$. — *Sous les hypothèses de la conjecture $C_{WD}(X,m)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le caractère de la représentation de W_K sur $Gr_i^{JM}H^m_{pst,\ell}(X)$ est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et indépendant de ℓ.*

On vérifie (cf. [De73], prop. 8.9) que $C_{WD}(X,m)_{\text{faible}} \Longrightarrow C_{WD}(W,m)$ et que l'on a l'implication inverse dès que l'action de W_K sur les $H^m_{pst,\ell}(X)$ est semi–simple, ce qui est automatique si le corps résiduel n'est pas fini.

2.4.6. — **Remarques** : i) Hormis ce qui se passe pour $\ell = p$, les conjectures ci–dessus sont "classiques" (cf. [De73] dans le cas où k est fini).

ii) Le théorème de monodromie ℓ–adique de Grothendieck (cf. [Exp. I]) nous assure que, si $\ell \neq p$, la représentation ℓ–adique $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est potentiellement semi–stable; en particulier la dimension sur $\mathbb{Q}_\ell$ de $H^m_{pst,\ell}(X)$ est égale au m–ième nombre de Betti $b^m(X)$ de X et est indépendante de ℓ; cette conjecture implique donc que $\dim_{P_0} H^m_{pst,p}(X) = b^m(X) = \dim_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ donc que la représentation p–adique $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ doit être potentiellement semi–stable, ce qui est la "conjecture de monodromie p–adique" (cf. [Exp. III], n° 6.2).

iii) Toutes ces conjectures sont connues lorsque X est une courbe ou une variété abélienne (cf. [Exp. VII] et [Fo94]).

iv) Lorsque X a bonne réduction, $C_{WD}(X,m)_{\text{faible}}$ est connue : pour tout ℓ, la représentation $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ a bonne réduction et l'action de I_K sur $H^m_{\ell,pst}(X)$ est triviale tandis que $N = 0$; si k n'est pas fini, la conjecture ne dit rien de plus; si k est fini, elle revient à affirmer que le polynôme caractéristique de Frobenius est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et indépendant de ℓ (cf. [De74] pour $\ell \neq p$, [KM74] pour $\ell = p$).

v) Nous renvoyons à [Exp.I], §3 et [RZ82] pour les quelques résultats partiels connus dans le cas où X admet un modèle semi–stable sur l'anneau des entiers de K. Dans ce cas, I_K agit trivialement sur les $H^m_{\ell,pst}(X)$ pour $\ell \neq p$. Si en outre $\dim X < (p-1)/2$, les résultats de Kato [Exp.VI] impliquent que l'action de I_K est aussi triviale sur $H^m_{p,pst}(X)$ et que $\dim_{P_0} H^m_{pst,p}(X) = b^m(X)$.

vi) Utilisant la notion de "log–motif" sur un corps fini, nous reviendrons dans [Fo94] sur une version plus "motivique" des conjectures ci–dessus ainsi que sur des variantes avec poids et nous démontrerons ces conjectures pour les 1–motifs.

2.4.7. — Comme dans [ExpIII], n° 6.3, faisons semblant de savoir ce qu'est un **motif mixte sur K à coefficients dans $\mathbb{Q}$.**

Pour chaque nombre premier ℓ, un tel motif M a une réalisation ℓ–adique $H_\ell(M)$ de G_K dont la dimension $b(M)$ est indépendante de ℓ. Il est raisonnable de conjecturer que celle–ci est *potentiellement semi–stable*; on dispose donc, pour chaque ℓ, d'une représentation $\mathbb{Q}'_\ell$–linéaire de dimension $b(M)$ de $'W_K$

$$H_{pst,\ell}(M) = \underline{W\widehat{D}}_{pst}(H_\ell(M))\,.$$

On conjecture encore que *chaque $H_{pst,\ell}(M)$ est F–semi–simple, définie sur*

$\mathbb{Q}$ *et que les* $H_{pst,\ell}(M)$ *forment un système compatible de représentations de* $'W_K$. Bien sûr, ceci peut encore se réinterpréter comme au n° 2.4.4.

Remarquons que *ces conjectures sont des théorèmes pour les* 1*–motifs* (cf. [Exp.VII] et [Fo94]).

BIBLIOGRAPHIE

[BK90] S. BLOCH and K. KATO. — *L-functions and Tamagawa numbers of motives,* in the Grothendieck Festschrift, vol. 1, Prog. in Math. 86, Birkhaüser, Boston (1990), 333–400.

[De73] P. DELIGNE. — *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L,* in Modular Functions of One Variable, vol. 2, Lecture Notes in Math. 349, Springer (1973), 501–595.

[De74] P. DELIGNE. — *La conjecture de Weil I,* Pub. Math. I.H.E.S. 43 (1974), 273–307.

[De80] P. DELIGNE. — *La conjecture de Weil II,* Pub. Math. I.H.E.S. 52 (1980), 137–252.

[De90] P. DELIGNE. — *Catégories tannakiennes,* in The Grothendieck Festschrift, vol. II, Birkhaüser, Boston (1990), 111–195.

[Fa89] G. FALTINGS. — *Crystalline cohomology and p-adic étale cohomology,* in Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins Univ. Press (1989), 25–80.

[Fo94] J.-M. FONTAINE. — Log*-motifs et* 1*-motifs,* en préparation.

[FM94] J.-M. FONTAINE and B. MAZUR. — *Geometric Galois representations,* en préparation.

[FP94] J.-M. FONTAINE et B. PERRIN-RIOU. — *Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L,* in Motives, Proceedings of the Seattle conference, à paraître.

[KM74] N. KATZ et W. MESSING. — *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields,* Inv. Math. 23 (1974), 73–77.

[RZ82] M. RAPOPORT und T. ZINK. — *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Characteristik,* Inv. Math. 68 (1982), 21–201.

[Se89] J.-P. SERRE. — *Abelian ℓ-adic Representations and Elliptic Curves,* 2ème éd., Addison–Wesley, Redwood City 1989.

[Exp.I] L. ILLUSIE. — *Autour du théorème de monodromie locale,* exposé I, dans ce volume.

[Exp.II] J.-M. FONTAINE. — *Le corps des périodes p-adiques,* exposé II, dans ce volume.

[Exp.III] J.-M. FONTAINE. — *Représentations p-adiques semi-stables,* exposé III, dans ce volume.

[Exp.VI] K. KATO. — *P-adic étale cohomology in the semi-stable reduction case,* exposé VI, dans ce volume.

[Exp.VII] M. RAYNAUD. — 1-*Motifs et monodromie géométrique,* exposé VII, dans ce volume.

Jean-Marc Fontaine
URA D0752 du C.N.R.S.
Mathématiques, Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE