

Astérisque

MICHEL RAYNAUD

Exposé VII : 1-motifs et monodromie géométrique

Astérisque, tome 223 (1994), Séminaire Bourbaki, exp. n° 7, p. 295-319

http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__295_0

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé VII

1-MOTIFS ET MONODROMIE GÉOMÉTRIQUE

par Michel Raynaud

§ 1. — Introduction.

Soit K le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet R . Dans cet exposé on considère un K -1-motif $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$, au sens de Deligne [5] et on étudie sa monodromie sur R , c'est-à-dire son défaut de bonne réduction. La situation est analogue à celle des variétés abéliennes. On trouve d'une part une **monodromie finie** qui conduit à une réduction semi-bonne de M_K . Lorsque cette réduction semi-bonne n'est pas bonne, il apparaît d'autre part une **monodromie infinie**. En utilisant une uniformisation rigide partielle "à la Tate" de G_K on peut modifier la réalisation de M_K dans une catégorie convenable, de façon que G_K ait maintenant potentiellement bonne réduction. La monodromie de M_K se lit alors sur le défaut de spécialisation de la flèche u_K et conduit à la **monodromie géométrique**.

On montre ensuite comment la connaissance de la monodromie géométrique permet de retrouver la monodromie dans sa réalisation en cohomologie étale ℓ -adique (ℓ nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle).

§ 2. — S -1-Motifs.

Soit S un schéma. Suivant la notion introduite par Deligne dans [5] 10.1, nous appelons S -1-motif la donnée suivante :

a) Un S -schéma en groupes Y qui, localement pour la topologie étale sur S , est isomorphe à un groupe constant $\mathbb{Z}^r$.

b) Un S -schéma en groupes (commutatif) G , extension d'un S -schéma abélien A par un tore T .

c) Un S -homomorphisme $u : Y \rightarrow G$.

Notons M le 1-motif $[u : Y \rightarrow G]$, que l'on considère comme un complexe de S -schémas en groupes avec Y en degré -1 et G en degré 0 . Alors M définit canoniquement un objet $\underline{M}$ de la catégorie dérivée $D^b(\text{fppf})$ des complexes bornés de faisceaux pour la topologie fidèlement plate localement de présentation finie, sur le petit site de base S . Ainsi M s'insère dans un

triangle distingué :

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ Y[1] & \xrightarrow[u]{+1} & G \end{array}$$

Supposons S connexe et soit s un point géométrique de S . Si S est géométriquement unibranche, la donnée de Y équivaut à la donnée d'une représentation finie du groupe fondamental $\Pi_1(S, s)$ dans $\mathbb{Z}^r$. Dans le cas général, Y correspond à la donnée d'une représentation du groupe fondamental élargi de S dans $\mathbb{Z}^r$.

2.1. — Exemple (cf. Deligne [5] 10.3).

Prenons pour S le spectre d'un corps K . Soit C une K -courbe séparée de type fini, géométriquement réduite. Notons $\overline{C}$ la compactification de C qui est normale aux points de $\overline{C} - C$. Pour tout point fermé x de $\overline{C}$, soit $\overline{C}_x^{hs}$ le spectre d'une hensélisé strict de $\overline{C}$ en x .

On fait les hypothèses suivantes :

i) Pour tout point fermé x de C , les composantes irréductibles $C_{x,i}^{hs}$ de C_x^{hs} sont essentiellement lisses sur K et C_x^{hs} se déduit des $C_{x,i}^{hs}$ par identification des corps résiduels (autrement dit les singularités de C sont, localement pour la topologie étale, des réunions d'axes de coordonnées).

ii) Les corps résiduels aux points de $\overline{C} - C$ sont étales sur K (en particulier $\overline{C}$ est lisse sur K à l'infini).

Alors la jacobienne G de $\overline{C}$ est une extension d'une variété abélienne par un tore [4] Chap. 9 § 2. Soit Y le faisceau étale engendré par les diviseurs D à support dans $\overline{C} - C$, dont le degré sur chacune des composantes irréductibles géométriques de $\overline{C}$ est nul. L'application $D \mapsto Cl(O_{\overline{C}}(D))$ fournit un morphisme $u : Y \rightarrow G$. D'où un 1-motif M qui est naturellement associé à la courbe (ouverte) C .

2.2. — La filtration par le poids.

De par sa définition, un 1-motif M admet une filtration croissante naturelle en 3 crans :

$$\begin{aligned} W_i(M) &= 0 \text{ pour } i \leq -3, \\ W_{-2}(M) &= T, \\ W_{-1}(M) &= G, \\ W_i(M) &= M \text{ pour } i \geq 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$Gr_{-2}(M) = T, \text{ le cran torique}$$

$$Gr_{-1}(M) = A, \text{ le cran abélien}$$

$$Gr_0(M) = Y[1], \text{ le cran étale.}$$

$$Gr_i(M) = 0 \text{ sinon.}$$

Cette filtration sera appelée la filtration en 3 crans du motif M .

2.3. — Morphismes de 1-motifs.

PROPOSITION 2.3.1. — Soient $M = [u : Y \rightarrow G]$ et $M' = [u' : Y' \rightarrow G']$ des S -1-motifs. Alors tout morphisme $a : \underline{M}' \rightarrow \underline{M}$ dans $D^b(\text{fppf})$ provient d'un unique morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{u'} & G' \\ a_{-1} \downarrow & & \downarrow a_0 \\ Y & \xrightarrow{u} & G \end{array} .$$

Démonstration (d'après L. Illusie). La filtration naïve des complexes M et M' donne naissance à une suite spectrale :

$$E_1^{pq} = \oplus_{p_2 - p_1 = p} \text{Ext}^q(\underline{M}'^{p_1}, \underline{M}^{p_2}) \implies \text{Ext}^*(\underline{M}', \underline{M}) .$$

Elle est concentrée dans la région $-1 \leq p \leq 1$, $q \geq 0$ et l'on s'intéresse au degré total 0. Pour les lignes $q = 1$ et $q = 0$, on a les diagrammes

$$\text{Ext}^1(G', Y) \longrightarrow \text{Ext}^1(G', G') \oplus \text{Ext}^1(Y', Y) \longrightarrow \text{Ext}^1(Y', G) ,$$

$$\text{Hom}(G', Y) \longrightarrow \text{Hom}(G', G) \oplus \text{Hom}(Y', Y) \longrightarrow \text{Hom}(Y', G) ,$$

avec les flèches évidentes (au signe près!).

LEMME 2.3.2. — On a $\text{Hom}(G', Y) = \text{Ext}^1(G', Y) = 0$.

La nullité de Hom résulte du fait que G' est à fibres connexes tandis que Y est étale. Prouvons que $\text{Ext}^1(G', Y) = 0$. Soit E une extension de G' par Y . Par descente fppf des schémas étales séparés, on voit que E est représentable par un S -schéma en groupes, nécessairement lisse sur S . Alors la composante neutre E^o de E fournit un scindage canonique de l'extension E .

Du lemme, on déduit que $\text{Ext}^o(\underline{M}', \underline{M}) = E_2^{oo} = \text{Ker}(\text{Hom}(G', G) \oplus \text{Hom}(Y', Y) \rightarrow \text{Hom}(Y', G)) = \text{Hom}_{\text{complexes}}(M', M)$.

COROLLAIRE 2.3.3. — *Deux S -1-motifs isomorphes dans $D^b(\mathrm{fppf})$ sont isomorphes.*

2.4.1. — Motif dual, description symétrique.

Soit Y^* le groupe des caractères du tore T , de sorte que Y^* est un schéma en groupes étale de même nature que Y . L'extension G de A par T est canoniquement associée à un morphisme $h^* : Y^* \rightarrow A^*$, où A^* est le schéma abélien dual de A . Notons $h : Y \rightarrow A$ le composé de $u : Y \rightarrow G$ et de la projection $G \rightarrow A$. Soit $\mathcal{P}$ le faisceau inversible rigidifié de Poincaré sur $A \times A^*$. Il lui correspond une biextension canonique, notée encore $\mathcal{P}$ de $A \times A^*$ par G_m .

Partant de l'extension G de A par T , associée au morphisme de groupes :

$$h^* : Y^* \rightarrow A^* ,$$

on en déduit une application biadditive :

$$h \times h^* : Y \times Y^* \rightarrow A \times A^* .$$

La donnée du relèvement u de Y à travers G équivaut alors à la donnée d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y^* & \xrightarrow{s} & \mathcal{P} \\ & \searrow h \times h^* & \downarrow \text{can.} \\ & & A \times A^* \end{array}$$

tel que s soit une application **biadditive** ce qui a un sens grâce aux lois de composition partielles sur la biextension $\mathcal{P}$). Il revient au même de dire que s est une trivialisaton de l'image réciproque de la biextension $\mathcal{P}$ par $h \times h^*$. Cette image réciproque s'identifie canoniquement à un élément de $\mathrm{Ext}^1(Y \otimes_{\mathbb{Z}} Y^*, G_m)$ ([8] SGA 7.1, exposé VII 3.6.5) et la donnée de s équivaut à une trivialisaton de cette extension.

L'isomorphisme de bidualité $\tau : A \approx (A^*)^*$ s'étend en un isomorphisme des biextensions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$ relatives à A et A^* . Si alors on échange A et A^* , Y et Y^* , h et h^* , on obtient le **1-motif dual** $M^* = [u^* : Y^* \rightarrow G^*]$, où G^* est l'extension de A^* par $T^* = \text{Hom}(Y^*, G_m)$ définie par h et u^* est le relèvement de h^* défini par s .

3.1. — Réalisation ℓ -adique.

Soient S un schéma et $M = [u : Y \rightarrow G]$ un $S-1$ -motif, avec G extension d'un S -schéma abélien A par un tore T .

Soit n un entier. Pour tout faisceau F en groupes commutatifs, on note ${}_nF$ (resp. F_n) le noyau, (resp. conoyau) de la multiplication par n dans F .

Notons $C(M, n)$ le cône de la multiplication par n dans le motif M , c'est-à-dire le complexe :

$$\begin{aligned} M^{-1} &\rightarrow M^{-1} \oplus M^o \rightarrow M^o \\ x &\mapsto (-nx, -u(x)) \\ (x, y) &\mapsto u(x) - ny, \end{aligned}$$

en degrés respectifs $-2, -1, 0$.

Comme la multiplication par n est injective dans $M^{-1} = Y$ et est un épimorphisme fppf dans $M^o = G$, $C(M, n)$ a une cohomologie concentrée en degré -1 . Posons $T_n(M) = H^{-1}(C(M, n))$. Alors $C(M, n)$ est quasi-isomorphe à $T_n(M)[1]$. Et l'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow {}_nG \rightarrow T_n(M) \rightarrow Y_n \rightarrow 0.$$

Ainsi $T_n(M)$ est représentable par un S -schéma en groupes fini et plat sur S , qui est étale, si de plus n est inversible sur S .

Soit ℓ un nombre premier. Lorsque n parcourt les puissances de ℓ , le système inductif des $T_{\ell^n}(M)$ conduit à un S -groupe ℓ -divisible noté $T_{\ell^\infty}(M)$, qui est la réalisation ℓ -adique du 1-motif M . La filtration en trois crans de M conduit à une filtration en trois crans de $T_{\ell^\infty}(M)$:

$$0 \hookrightarrow T_{\ell^\infty}(T) \hookrightarrow T_{\ell^\infty}(G) \hookrightarrow T_{\ell^\infty}(M),$$

dont les quotients successifs sont $T_{\ell^\infty}(T)$, $T_{\ell^\infty}(A)$, $T_{\ell^\infty}(Y) = Y \otimes (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$.

§ 4. — 1-Motifs et Monodromie.

Dans la suite, S désigne le spectre d'un anneau de valuation discrète complet R . On note k le corps résiduel, $p \geq 0$ sa caractéristique, K le corps des fractions, π une uniformisante. On désigne par $\bar{K}$ une clôture algébrique de K .

Bonne et semi-bonne réduction d'un 1-motif.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$ un $K-1$ -motif. On dit que M_K a **bonne réduction sur R** , si M_K se prolonge en un $R-1$ motif $M = [u : Y \rightarrow G]$. Pour que M_K ait bonne réduction, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :

i) Le groupe localement constant Y_K est non ramifié sur R , c'est-à-dire est donné par une représentation finie non ramifiée de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ dans $\mathbb{Z}^r$ où r est le rang de Y_K . Alors Y_K se prolonge en un S -schéma en groupes localement constant Y .

ii) Le tore T_K de G_K a bonne réduction T sur R . Il revient au même de dire que T_K a un groupe de caractères $Y_K^* = \underline{\text{Hom}}(T_K, \mathbb{G}_m)$ non ramifié au sens précédent.

iii) Le quotient abélien A_K de G_K a bonne réduction sur R , c'est-à-dire se prolonge en un R -schéma abélien A .

Notons que dès que les conditions ii) et iii) sont satisfaites, G_K se prolonge canoniquement en une extension G de A par T . En effet, une telle extension est décrite par un morphisme du groupe des caractères de T_K dans la variété duale A_K^* de A et cette application se prolonge canoniquement sur R , par propriété de A^* .

iv) Le morphisme $u_K : Y_K \rightarrow G_K$ se prolonge en un morphisme $u : Y \rightarrow G$.

Notons que si M_K a bonne réduction M , celle-ci est unique à isomorphisme unique près.

On dit que le 1-motif M_K a **potentiellement bonne réduction**, s'il acquiert bonne réduction après extension finie de K , c'est-à-dire après remplacement de R par son normalisé dans une extension finie de K . Les conditions i) et ii) ci-dessus sont toujours satisfaites après extension finie étale de K ; pour que M_K ait potentiellement bonne réduction, il faut et il suffit donc que les conditions iii) et iv) soient réalisées après extension finie de K .

Rappelons qu'une K -variété abélienne A_K a une réduction semi-abélienne sur R , si A_K se prolonge en un R -schéma en groupes lisse A , dont la fibre spéciale est extension d'une variété abélienne par un tore.

On dit que le 1-motif M_K a **semi-bonne réduction** si Y_K a bonne réduction Y (condition i) ci-dessus) et si G_K se prolonge en un S -schéma en groupes G lisse, dont la fibre spéciale est extension d'un schéma abélien par un tore. Cette condition équivaut aux conditions suivantes :

ii) Le tore T_K a bonne réduction T .

iii) Le schéma abélien A_K a réduction semi-abélienne A sur R .

Pour établir cette équivalence établissons le lemme suivant :

LEMME 4.1.1. — *Soit G_K une extension d'une variété abélienne A_K par un tore T_K . Pour que G_K s'étende en un S -schéma en groupes lisse G , dont la fibre spéciale est extension d'une variété abélienne par un tore, il faut et il suffit que T_K ait bonne réduction T et que A_K ait réduction semi-abélienne A . De plus G est extension de A par T , G est unique et commute aux extensions*

finies de K .

Démonstration : Supposons que G_K se prolonge en G , R -schéma en groupes lisse dont la fibre spéciale est extension d'une variété abélienne par un tore. Le quotient de G par l'adhérence schématique $\overline{T}_K$ de T_K dans G est un schéma en groupes A , lisse sur R à fibre spéciale extension d'une variété abélienne par un tore, donc A_K a réduction semi-abélienne.

Examinons d'abord le cas où T_K est un tore déployé, donc se prolonge en un S -tore T . Montrons que l'extension G_K de A_K par T_K se prolonge en une extension de A par T . On est ramené au cas où $T_K = G_m$. Alors G_K est un torseur de base A_K , de groupe $(G_m)_K$; il se prolonge en un torseur de base A , de groupe G_m , comme il résulte du prolongement de A_K à A des faisceaux inversibles. Comme A est à fibre spéciale connexe, ce prolongement est essentiellement unique. Le même raisonnement appliqué à $A \times A$, montre que la structure de groupe s'étend au torseur prolongé; d'où l'existence d'un schéma en groupes G , extension de A par T , qui prolonge G_K .

Notons G' un schéma en groupes extension de A par T qui prolonge G_K et montrons que l'identité $G_K \approx G'_K$ se prolonge en un isomorphisme $G \approx G'$. Pour cela, considérons dans $G \times G'$ l'adhérence schématique Γ du graphe de l'identité sur la fibre générique. Notons que A est la composante neutre du modèle de Néron $\mathfrak{A}$ de A_K . Soit n un entier premier à p et à l'ordre du groupe des composantes connexes de $\mathfrak{A}_k/A_k$. Alors ${}_nG'$ est étale sur S et est le prolongement étale séparé maximal de ${}_nG'_K$. Par suite l'identité ${}_nG_K \approx {}_nG'_K$ se prolonge en un morphisme ${}_nG \rightarrow {}_nG'$ et donc la première projection $\Gamma \rightarrow G$ induit un isomorphisme : ${}_n\Gamma \approx {}_nG$. Lorsque n parcourt les entiers permis, la famille des groupes ${}_nG_k$ est schématiquement dense dans G_k , car G_k est extension d'une variété abélienne par un tore. On conclut alors que la première projection $\Gamma \rightarrow G$ est quasi-finie, puis, par le "main theorem de Zariski" ([7] 4.4.9), que la première projection $\Gamma \rightarrow G$ est un isomorphisme. D'où une flèche $G \rightarrow G'$ qui est nécessairement plate, comme on le voit en utilisant encore les points de torsion. Par suite $G \rightarrow G'$ est un isomorphisme.

Dans le cas général où T_K n'est plus nécessairement déployé, il est immédiat par descente, de voir que si G existe, alors T_K a bonne réduction T et G est extension de A par T .

Revenons à la situation générale d'un $K - 1$ -motif M_K . Alors Y_K et T_K acquièrent bonne réduction après extension finie étale de K . De même, d'après un résultat fondamental de Grothendieck, ([8] SGA 7.1 th. 3.6) la variété abélienne A_K admet réduction semi-abélienne après extension finie de K et on peut choisir cette extension de K étale (confer [6] th. 5.15). Il en résulte que tout $K - 1$ -motif M_K acquiert une réduction semi-bonne après extension finie étale de K . En particulier, M_K a **potentiellement semi-bonne réduction**.

Nous reviendrons plus loin (4.7) sur la **monodromie finie** qui conduit à la réduction semi-bonne.

4.2. — Considérations de géométrie rigide.

Nous allons maintenant expliquer comment on peut remplacer un $K - 1$ -motif M_K , par un $K - 1$ -motif $M'_K = [u'_K : Y'_K \rightarrow G'_K]$, sans changer son image dans une catégorie dérivée convenable, de façon que G'_K ait **potentiellement bonne réduction**.

Plaçons-nous en géométrie analytique rigide sur le corps local K .

On dispose d'un foncteur du type "GAGA", qui associe à tout K -schéma localement de type fini X , un K -espace rigide analytique X_{rig} . Ce foncteur est plat, transforme suite exacte de K -schémas en groupes (pour la topologie fppf, resp. étale) en une suite exacte de K -groupes rigides (pour la topologie fppf resp. étale).

En particulier, partant d'un $K - 1$ -motif $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$, le foncteur "GAGA" lui associe un $K - 1$ -“motif rigide” :

$$M_{\text{rig}} = [u_{\text{rig}} : Y_{\text{rig}} \rightarrow G_{\text{rig}}] .$$

Ce foncteur est compatible avec la filtration en 3 crans du 1-motif.

Pour tout entier n , le cône de la multiplication par n dans $M : T_n(M_K)$ est un K -schéma en groupes fini, donc est inchangé par passage à la géométrie rigide. Il en résulte que le foncteur $M \mapsto M_{\text{rig}}$ induit un isomorphisme canonique sur les réalisations ℓ -adiques :

$$(*) \quad T_{\ell^\infty}(M_K) = T_{\ell^\infty}(M_{\text{rig}}) .$$

Rappelons que l'on dispose également d'un foncteur “fibre générique” qui à un R -schéma formel $\hat{X}$, topologiquement de type fini, complet pour la topologie π -adique (où π est une uniformisante de R), associe un K -espace rigide $\hat{X}_{\text{rig}}$. Si $\hat{X}$ est affine d'algèbre A topologiquement de type fini, il lui correspond l'affinoïde $\hat{X}_{\text{rig}}$ d'algèbre de Tate $A \otimes_R K$ [13].

Ceci étant, partons d'un $K - 1$ -motif $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$, où G_K est extension d'une variété abélienne A_K par un tore T_K . Supposons d'abord que M_K ait une réduction semi-bonne. En particulier G_K se prolonge en G extension d'un schéma semi-abélien A par un tore T (4.1).

Les assertions suivantes sont énoncées (lorsque $G = A$) dans [12] et démontrées dans [1] et [2], voir aussi [14]. Elles s'étendent sans difficulté au cas où G est extension de A par un tore T :

i) Soit T'_k le tore maximal de la fibre spéciale G_k de G ; il contient T_k et se relève canoniquement en un S -tore T' contenant T .

ii) Le complété formel $\widehat{G}$ de G le long de la fibre spéciale G_k est canoniquement extension d'un schéma abélien formel $\widehat{A}'$ par $\widehat{T}'$.

iii) Le schéma abélien formel $\widehat{A}'$ s'algébrise canoniquement en un S -schéma abélien A' . L'extension de $\widehat{A}'$ par $\widehat{T}'$ de ii) s'algébrise canoniquement en une extension G' de A' par T' . En particulier le complété formel $\widehat{G}'$ de G' , le long de sa fibre fermée, est canoniquement isomorphe à $\widehat{G}$. On a donc un isomorphisme canonique de schémas formels en groupes :

$$\widehat{h} : \widehat{G}' \approx \widehat{G}$$

(pour ii) et iii) confer [8] SGA 7.1 Lemme 7.2.1).

En particulier, les fibres génériques $\widehat{G}'_{\text{rig}}$ et $\widehat{G}_{\text{rig}}$ sont des sous-groupes rigides ouverts de G'_{rig} et G_{rig} et la fibre générique de $\widehat{h}$ est un isomorphisme $\widehat{h}_{\text{rig}} : \widehat{G}'_{\text{rig}} \approx \widehat{G}_{\text{rig}}$.

iv) $\widehat{h}_{\text{rig}}$ s'étend en un morphisme rigide $f : G'_{\text{rig}} \rightarrow G_{\text{rig}}$ étale surjectif de noyau un réseau Λ , de rang $s = \dim(T') - \dim(T)$.

Dans le cas général, G_K n'a plus nécessairement une réduction semi-bonne sur R , mais acquiert réduction semi-bonne après extension étale galoisienne K' de K . Par descente galoisienne, on peut encore construire canoniquement, un K -schéma en groupes G'_K , extension d'une variété abélienne A'_K ayant **potentiellement bonne réduction** par un tore T'_K , et un morphisme rigide $f : G'_{K,\text{rig}} \rightarrow G_{K,\text{rig}}$ étale surjectif, de noyau un K -groupe Λ qui est maintenant une forme tordue par une représentation finie de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ du groupe constant $\mathbb{Z}^s$ (conf. [12]).

Considérons alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow \Lambda \rightarrow G'_{K,\text{rig}} \xrightarrow{f} G_{K,\text{rig}} \rightarrow 0 ,$$

et l'image réciproque de cette extension de $G_{K,\text{rig}}$ par le morphisme $u_{K,\text{rig}} : Y_{K,\text{rig}} \rightarrow G_{K,\text{rig}}$ qui intervient dans la définition du 1-motif M_{rig} . On obtient alors une extension $Y'_{K,\text{rig}}$ de $Y_{K,\text{rig}}$ par Λ et un diagramme commutatif à

colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Lambda & = & \Lambda \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Y'_{K,\text{rig}} & \xrightarrow{u'_{K,\text{rig}}} & G'_{K,\text{rig}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Y_{K,\text{rig}} & \xrightarrow{u_{K,\text{rig}}} & G_{K,\text{rig}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}
 \quad .$$

(**)

Le groupe rigide étale $Y'_{K,\text{rig}}$ s'algébrise canoniquement en un groupe Y'_K qui, localement pour la topologie étale, est isomorphe à $\mathbb{Z}^{r+s}$, où r est le rang de Y_K . Comme Y'_K est localement fini sur K , le morphisme rigide $u'_{K,\text{rig}}$ s'algébrise canoniquement en un K -morphisme $u'_K : Y'_K \rightarrow G'_K$.

On obtient ainsi un nouveau $K-1$ -motif M'_K , canoniquement associé au motif M_K . Par construction G'_K a maintenant **potentiellement bonne réduction** et même bonne réduction si M_K a semi-bonne réduction.

THÉOREME 4.2.2. — *La construction précédente associe canoniquement et fonctoriellement à un $K-1$ -motif $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$, un $K-1$ -motif $M'_K = [u'_K : Y'_K \rightarrow G'_K]$ tel que G'_K ait potentiellement bonne réduction. De plus, on a un morphisme canonique de 1-motifs rigides :*

$$(\ast \ast \ast) \quad \text{can} : M'_{K,\text{rig}} \rightarrow M_{K,\text{rig}} ,$$

qui est un isomorphisme dans la catégorie dérivée $D_{\text{rig}}^b(\text{fppf})$. Il entraîne des isomorphismes canoniques :

$$T_\ell(M'_K) \approx T_\ell(M_K), \text{ pour tout nombre premier } \ell .$$

(on a noté $D_{\text{rig}}(\text{fppf})$, la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux pour la topologie fidèlement plate localement de présentation finie sur le petit site rigide de base $\text{Spec}(K)$)

La fonctorialité de la construction de M'_K à partir de M_K résulte, d'une part, du fait que tout morphisme de 1-motifs se réalise par un morphisme de complexes (2.3.1), d'autre part, du fait que la construction de l'extension $G'_{K,\text{rig}}$ de $G_{K,\text{rig}}$ est fonctorielle par rapport à G .

Le morphisme can. se lit sur le diagramme (**) et est clairement un isomorphisme dans D_{rig}^b . Les assertions sur les réalisations ℓ -adiques résultent alors de (*).

DÉFINITION 4.2.3. — Nous dirons que le 1-motif $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$ est **strict** si G_K a potentiellement bonne réduction.

Nous avons ainsi associé canoniquement et fonctoriellement à un $K - 1$ -motif M_K , un $K - 1$ -motif strict M'_K et ces deux motifs sont isomorphes dans $D_{\text{rig}}^b(\text{fppf})$.

La proposition suivante est l'analogue en géométrie rigide de 2.3.1. Elle ne sera pas utilisée dans la suite.

PROPOSITION 4.2.4. — Soient $M_i = [u_i : Y_i \rightarrow G_i]$, $i = 1, 2$ des $K - 1$ -motifs.

i) On suppose que M_1 est **strict**. Alors tout morphisme $a : \underline{M}_{1,\text{rig}} \rightarrow \underline{M}_{2,\text{rig}}$, dans $D_{\text{rig}}^b(\text{fppf})$ provient d'un morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{u_1} & G_{1,\text{rig}} \\ a_{-1} \downarrow & & \downarrow a_0 \\ Y_2 & \xrightarrow{u_2} & G_{2,\text{rig}} \end{array}$$

ii) Si M_1 et M_2 sont stricts, tout morphisme de complexes $\underline{M}_{1,\text{rig}} \rightarrow \underline{M}_{2,\text{rig}}$ est algébrisable et donc provient d'un morphisme $M_1 \rightarrow M_2$.

L'assertion i) se démontre comme 2.3.1 une fois établi que $\text{Hom}(G_{1,\text{rig}}, Y_2) = \text{Ext}^1(G_{1,\text{rig}}, Y_2) = 0$. La première assertion est claire, puisque $G_{1,\text{rig}}$ est connexe tandis que Y_2 est étale. La nullité du Ext^1 est plus délicate. Donnons tout au plus une esquisse de démonstration.

Nous considérons la catégorie des K -espaces rigides de type fini $\mathcal{X}_K$ comme équivalente à celle des R -schémas formels $\mathcal{X}$ topologiquement de type fini, localisée par les éclatements admissibles, c'est-à-dire, dont le centre est à support dans la fibre spéciale (confer [13] et [10]). Nous dirons que $\mathcal{X}$ est un modèle formel de l'espace rigide $\mathcal{X}_K$ et que $\mathcal{X}_K$ est la fibre générique du schéma formel $\mathcal{X}$. Ainsi la catégorie des K -espaces rigides de type fini apparaît comme une certaine pro-catégorie de schémas formels.

PROPOSITION 4.2.5. — Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel de type fini, dont la fibre générique $\mathcal{X}_K$ est normale. Soit α_K un élément de $H^1(\mathcal{X}_{K,\text{fppf}}, \mathbb{Z})$. Alors il existe un éclatement admissible $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$, tel que α_K se prolonge en un élément α de $H^1(\mathcal{X}'_{\text{ét}}, \mathbb{Z})$. En particulier α_K est représentable par un torseur sous $\mathbb{Z}$, de base $\mathcal{X}_K$, localement trivial pour la topologie étale. (En d'autres termes, après changement éventuel du modèle formel $\mathcal{X}$, α_K s'étend en un torseur formel α de base $\mathcal{X}$, de groupe $\mathbb{Z}$, localement trivial pour la topologie étale).

Démonstration : A défaut de fondements écrits de la théorie, nous considérerons que, par définition, il existe un morphisme d'espaces rigides $u_K : \mathcal{Z}_K \rightarrow \mathcal{X}_K$, fidèlement plat, **de type fini**, qui trivialise α_K . Par platification ([3] ou [10]), on peut alors, quitte à faire un éclatement admissible de $\mathcal{X}$, supposer que u_K est la fibre générique d'un morphisme de type fini, fidèlement plat de R -schémas formels $u : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$. En prenant une quasi-section, on se ramène au cas où, de plus, u est quasi-fini. Après localisation étale $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$, on peut alors supposer que u est fini et plat. Par descente finie fidèlement plate on voit alors que l'image réciproque α'_K de α_K sur $\mathcal{X}'$ est maintenant représentable par un $\mathcal{X}'_K$ -torseur $\mathcal{Y}'_K$ sous $\mathbb{Z}$.

Comme l'espace rigide $\mathcal{X}_K$ est supposé normal, on peut, quitte à normaliser $\mathcal{X}$ par un éclatement admissible, supposer $\mathcal{X}$ normal. Alors $\mathcal{X}'$ est normal. Le toseur $\mathcal{Y}'_K$ se prolonge canoniquement en un $\mathcal{X}'$ -schéma formel $\mathcal{Y}'$ localement fini normal, et l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{Y}'_K$ se prolonge en une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{Y}'$. A priori, cette action est ramifiée, mais le sous-groupe d'inertie en un point est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui est fini, donc nul. Par suite $\mathcal{Y}'$ est un toseur sous $\mathbb{Z}$, de base $\mathcal{X}'$, localement trivial pour la topologie étale. Finalement, par descente étale relativement au morphisme $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$, il existe un toseur $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{X}$, de groupe $\mathbb{Z}$, localement trivial pour la topologie étale, dont la fibre générique $\mathcal{Y}_K$ représente α_K . D'où la proposition.

PROPOSITION 4.2.6. — *Soit $\mathcal{X}$ un R -schéma formel de type fini, régulier. Alors tout élément α_K de $H^1(\mathcal{X}_{K,\text{fppf}}, \mathbb{Z})$ se prolonge en un toseur formel, de base $\mathcal{X}$ de groupe $\mathbb{Z}$.*

Pour tout entier $n > 0$, soit $\alpha_{n,K}$ l'image de α_K dans $H^1(\mathcal{X}_{K,\text{fppf}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ de sorte que $\alpha_{n,K}$ est représenté par un revêtement étale fini $\mathcal{Y}_{n,K}$ de $\mathcal{X}_K$, galoisien de groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. D'après 4.2.5, il existe un éclatement admissible $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$, que l'on peut supposer normal tel que α_K se prolonge en un toseur formel $\mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{X}'$, de groupe $\mathbb{Z}$, localement trivial pour la topologie étale. Pour tout entier n , $\mathcal{Y}_{n,K}$ se prolonge donc en un revêtement fini étale $\mathcal{Y}'_n$ de $\mathcal{X}'$. Comme $\mathcal{X}$ est régulier, donc normal, l'éclatement $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense de la fibre fermée $\mathcal{X}'_k$. Par suite le revêtement étale fini $\mathcal{Y}_{n,K}$ de $\mathcal{X}_K$ est non ramifié aux points génériques de $\mathcal{X}_k$. Comme $\mathcal{X}$ est régulier, il résulte alors du théorème de pureté de Zariski ([8] SGA 2 th. 3.4) que $\mathcal{Y}_{n,K}$ s'étend en un revêtement formel fini étale $\mathcal{Y}'_n$. Comme ceci est vrai pour tout n , on en déduit que le revêtement étale $\mathcal{Y}'_k \rightarrow \mathcal{X}'_k$ se descend en un revêtement de $\mathcal{X}_k$, puis que $\mathcal{Y}'$ lui-même se descend en un revêtement formel étale $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$.

COROLLAIRE 4.4.7. — *Soit $\mathcal{X}_K$ un espace rigide lisse. Alors $H^1(\mathcal{X}_{K,\text{fppf}}, \mathbb{Z})$ est nul dans chacun des cas suivants :*

- i) $\mathcal{X}_K$ admet un R -modèle formel lisse $\mathcal{X}$ de type fini.

ii) $\mathcal{X}_K$ admet un R modèle formel tel que $\mathcal{X}_k$ soit une courbe géométriquement réduite, ayant pour seules singularités des points doubles ordinaires et dont le graphe est un arbre.

iii) $\mathcal{X}_K$ est le groupe multiplicatif rigide $\mathbb{G}_{m,\text{rig}}$.

Le cas i) résulte de 4.4.6 et du fait qu'un k schéma lisse est géométriquement unibranche, donc n'admet pas de revêtement étale de groupe $\mathbb{Z}$ non trivial.

Dans le cas ii), quitte à faire un éclatement admissible de $\mathcal{X}$ qui introduit des chaînes de droites projectives, on peut supposer de plus que $\mathcal{X}$ est régulier et que les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_k$ sont lisses. Un revêtement étale de groupe $\mathbb{Z}$, de $\mathcal{X}_k$ est alors localement trivial pour Zariski et admet une description combinatoire au moyen du graphe de $\mathcal{X}_k$, en particulier, un tel revêtement est trivial si le graphe est un arbre.

Dans le cas iii), on recouvre $\mathbb{G}_{m,\text{rig}}$ par les couronnes de coordonnée de Laurent t :

$\mathcal{X}_{n,K} : -n \leq \text{valuation}(t) \leq n$, qui admet comme modèle formel, le schéma formel affine d'équation $R\{x,y\}/xy - \pi^{2n}$. Par le cas ii), on conclut que $H^1(\mathcal{X}_{n,K,\text{fppf}}, \mathbb{Z}) = 0$, puis, par passage à la limite sur n que $H^1(\mathbb{G}_{m,\text{rig,fppf}}, \mathbb{Z}) = 0$.

Ceci étant, revenons à la démonstration de 4.2.4 et prouvons que $\text{Ext}^1(G_{1,\text{rig}}, T_2) = 0$ lorsque G_1 a potentiellement bonne réduction. Comme $\text{Hom}(G_{1,\text{rig}}, Y_2) = 0$, il suffit de le démontrer après extension finie galoisienne de K . On peut donc supposer que $Y_2 = \mathbb{Z}^r$ et que G_1 est extension d'un schéma abélien A_K ayant bonne réduction A , par un tore déployé T_K . Par dévissage, on est ramené au cas où $Y_2 = \mathbb{Z}$ et au cas où $G_1 = A_K$ où $G_{m,K}$ et il suffit clairement d'établir que $H^1(G_{1,\text{rig}}, \mathbb{Z}) = 0$. La conclusion résulte donc de 4.2.7 i) et iii).

Prouvons maintenant l'assertion ii) de 4.2.4. Il suffit de montrer que tout morphisme de $G_{1,\text{rig}} \rightarrow G_{2,\text{rig}}$ est algébrisable. Par descente finie, on peut supposer que $G_{i,K}$ a bonne réduction G_i extension d'un schéma abélien A_i par un tore déployé T_i ($i = 1, 2$).

Soit $\widehat{G}_i$ le complété formel de G_i le long de la fibre spéciale et soit $\widehat{G}_{i,\text{rig}}$ l'espace rigide fibre générique de $\widehat{G}_i$.

LEMME 4.2.8. — *Tout morphisme rigide $u_{\text{rig}} : G_{1,\text{rig}} \rightarrow G_{2,\text{rig}}$ provient d'un morphisme formel $\widehat{u} : \widehat{G}_1 \rightarrow \widehat{G}_2$.*

Considérons successivement :

- le graphe de u_{rig} ,
- son intersection avec l'ouvert $\widehat{G}_{1,\text{rig}} \times_K \widehat{G}_{2,\text{rig}}$,
- l'adhérence schématique Γ de cette intersection dans le schéma formel produit $\widehat{G}_1 \times_R \widehat{G}_2$. Alors Γ est un R -schéma formel en groupes, plat et

la première projection induit une immersion ouverte sur les fibres génériques. L'étude de u_{rig} sur les points de n -torsion $(n, p) = 1$, entraîne que la première projection $\Gamma \rightarrow \widehat{G}_1$ est un isomorphisme, d'où l'existence de $\widehat{u}$.

Si on réduit $\widehat{u}$ suivant les puissances de l'uniformisante π , on trouve que $\widehat{u}$ induit un morphisme $\widehat{t}$, entre les tores formels $\widehat{T}_i$ et un morphisme $\widehat{a}$ entre les schémas abéliens formels $\widehat{A}_i$. Alors $\widehat{t}$ s'algébrise uniquement en un morphisme $t : T_1 \rightarrow T_2$, provenant d'un morphisme sur les groupes de caractères $t^* : Y_2^* \rightarrow Y_1^*$, tandis que par ([7] 5.4.1), $\widehat{a}$ s'algébrise en un morphisme $a : A_1 \rightarrow A_2$. Finalement u_{rig} s'algébrise en un morphisme $u : G_1 \rightarrow G_2$, décrit par un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y_2^* & \xrightarrow{\text{can}} & A_2^* \\ t^* \downarrow & & \downarrow a^* \\ Y_1^* & \xrightarrow{\text{can}} & A_1^* \quad . \end{array}$$

4.3. — Monodromie Géométrique.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$ un $K - 1$ -motif strict (4.2.3). G_K est donc extension d'une variété abélienne A_K ayant potentiellement bonne réduction par un tore T_K . On note A_K^* la variété abélienne duale de A_K , Y_K^* le groupe des caractères de T_K .

Si $\mathcal{P}_K$ est la biextension de Poincaré de $A_K \times A_K^*$, on rappelle (2.4.1) que la donnée du 1-motif M_K équivaut à la donnée des morphismes $h_K : Y_K \rightarrow A_K$, $h_K^* : Y_K^* \rightarrow A_K^*$ et d'une trivialisatoin $s_K : Y_K \times Y_K^* \rightarrow \mathcal{P}_K$ de la biextension image réciproque de $\mathcal{P}_K$ par $h_K \times h_K^* : Y_K \times Y_K^* \rightarrow A_K \times A_K^*$.

Supposons d'abord que G_K et Y_K aient bonne réduction ; alors A_K a bonne réduction A , et $\mathcal{P}_K$ s'étend en une biextension $\mathcal{P}$ de $A \times A^*$ par G_m , ce qui définit une structure entière sur $\mathcal{P}_K$. Prenant la valuation de s_K , on obtient une application bilinéaire canonique

$$\mu_o : Y_K \times Y_K^* \rightarrow \mathbb{Z} ,$$

compatible avec l'action de Galois (ici non ramifiée) sur Y_K et Y_K^* .

Si l'on pose $Z_K = Y_K \otimes Y_K^*$, μ_o s'interprète aussi comme un morphisme de $Z_K \rightarrow \mathbb{Z}$, noté encore μ_o .

Dans le cas général où Y_K et G_K ont seulement potentiellement bonne réduction, on prolonge canoniquement la valuation de K à $\overline{K}$, avec groupe de valeurs $\mathbb{Q}$. En prenant la valuation de s , on obtient une application biadditive canonique :

$$\mu : Y_K \times Y_K^* \rightarrow \mathbb{Q} .$$

Cette application μ est compatible avec les actions de Galois, et se factorise à travers $\mathbb{Z}$ en redonnant μ_o lorsque Y_K et G_K ont bonne réduction. On peut aussi associer à μ un morphisme : $Z_K = Y_K \otimes Y_K^* \rightarrow \mathbb{Q}$ (noté encore μ). Nous dirons que μ est la **monodromie géométrique** du 1-motif M_K .

PROPOSITION 4.3.1. — Soit $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$ un $K - 1$ -motif strict (4.2.3)

i) Pour que M_K ait potentiellement bonne réduction, il faut et il suffit que la monodromie géométrique μ de M_K soit nulle.

ii) Supposons que Y_K et G_K aient bonne réduction. Pour que M_K ait bonne réduction il faut et il suffit que μ_o soit nulle.

Démonstration : Il suffit d'établir ii). Soient Y et G les bonnes réductions sur R de Y_K et G_K . Alors le $K - 1$ -motif M_K a bonne réduction si et seulement si u_K se prolonge en u de $Y \rightarrow G$, c'est-à-dire si et seulement si la trivialisation $s_K : Y_K \times Y_K^* \rightarrow \mathcal{P}_K$, se prolonge en une application $s : Y \times Y^* \rightarrow \mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si μ_o est nulle.

Enfin notons que si l'on remplace K par une extension finie K' , d'indice de ramification e sur K , la monodromie géométrique de $M_K \otimes_K K'$ devient $e\mu$. En particulier, si Y_K et G_K acquièrent bonne réduction après extension finie de K d'indice de ramification e , alors $e\mu$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

4.4. — Filtration par la monodromie.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$ un $K - 1$ -motif strict (4.2.3).

Notons qu'il existe un plus grand quotient Y_K'' de Y_K , et un plus grand quotient $Y_K''^*$ de Y_K^* , tels que la monodromie $\mu : Y_K \otimes Y_K^* \rightarrow \mathbb{Q}$ se factorise à travers $\mu'' : Y_K'' \otimes Y_K''^* \rightarrow \mathbb{Q}$. De plus, Y_K'' et $Y_K''^*$ sont sans torsion et μ'' est non-dégénéré des deux côtés (i.e. Y_K'' et $Y_K''^*$ ont même rang et l'application canonique $Y_K'' \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y_K''^*, \mathbb{Q})$, déduite de μ'' , est injective).

Soit $\tilde{Y}_K = \text{Ker}(Y_K \rightarrow Y_K'')$ et soit T_K'' le sous-tore du tore maximal T_K de G_K dont le groupe de caractères est $Y_K''^*$. Notons $\tilde{u}_K : \tilde{Y}_K \rightarrow G_K$ la restriction de u_K . Clairement $\tilde{M}_K = [\tilde{u}_K : \tilde{Y}_K \rightarrow G_K]$ est le "plus grand" sous-1-motif de M_K dont la monodromie est nulle, c'est-à-dire le plus grand sous-motif qui a potentiellement bonne réduction. Le motif quotient $M_K/\tilde{M}_K$ s'identifie au groupe étale $Y_K''[1]$.

4.5. — Monodromie et choix d'une uniformisante.

Partons d'un $K - 1$ -motif strict (4.2.3) $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$. Nous allons maintenant étudier des décompositions éventuelles de $u_K : Y_K \rightarrow G_K$ en une somme $u_K = u_K^1 + u_K^2$ telle que :

- le motif $M_K^1 = [u_K^1 : Y_K \rightarrow G_K]$ ait potentiellement bonne réduction.

- $u_K^2 : Y_K \rightarrow G_K$ se factorise à travers le tore T_K de G_K .

Supposons que la monodromie $\mu : Y_K \times Y_K^* \rightarrow \mathbb{Q}$ se factorise à travers $\mathbb{Z}$ et **choisissons une uniformisante π de R** . Si alors on modifie la section $s_K : Y_K \times Y_K^* \rightarrow \mathcal{P}_K$, associée au 1-motif M_K , en la section :

$$\begin{aligned} s_\pi^1 : Y_K \times Y_K^* &\rightarrow \mathcal{P}_K \\ (y, y^*) &\rightarrow \pi^{-\mu(y, y^*)} s(y, y^*) , \end{aligned}$$

il lui correspond un $K - 1$ -motif : $M_{K, \pi}^1 = [u_{K, \pi}^1 : Y_K \rightarrow G_K]$, dont la monodromie est clairement nulle et donc qui a potentiellement bonne réduction.

Si alors on pose $u_{K, \pi}^2 = u_K - u_{K, \pi}^1$, on obtient un morphisme de $Y_K \rightarrow G_K$ qui se factorise à travers T_K et a pour expression :

$$\begin{aligned} u_{K, \pi}^2 : Y_K &\rightarrow T_K = \underline{\text{Hom}}(Y_K^*, G_m) \\ (*) \quad y &\mapsto (y^* \mapsto \pi^{\mu(y, y^*)}) . \end{aligned}$$

En fait, avec les notations introduites dans 4.4, $u_{K, \pi}^2$ se factorise même en $Y_K \rightarrow Y_K'' \rightarrow T_K'' \rightarrow T_K$, où les applications extrêmes sont les surjections et injections canoniques et où l'application centrale est :

$$y'' \mapsto (y''^* \mapsto \pi^{\mu''(y'', y''^*)}) .$$

On a ainsi établi le résultat suivant :

PROPOSITION 4.5.1. — *Soit $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$ un $K - 1$ -motif strict dont la monodromie μ se factorise à travers $\mathbb{Z}$. Alors, à tout choix d'une uniformisante π de R on associe canoniquement une décomposition*

$$u_K = u_{K, \pi}^1 + u_{K, \pi}^2$$

où $u_{K, \pi}^2$ se factorise à travers le tore T_K de G_K et est donnée par la formule (*) tandis que le $K - 1$ -motif $M_{K, \pi}^1 = [u_{K, \pi}^1 : Y_K \rightarrow G_K]$ a potentiellement bonne réduction.

REMARQUES 4.5.2. —

i) Supposons que Y_K et G_K aient bonne réduction respective Y et G . Alors μ est évidemment à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et le 1-motif $M_{K, \pi}^1$, considéré ci-dessus, a bonne réduction $M_\pi^1 = [u_\pi^1 : Y \rightarrow G]$.

ii) Le 1-motif $M_{K, \pi}^1$ dépend de π . Quand π varie, on peut regrouper les diverses réalisations obtenues dans une construction universelle de la façon suivante :

Soit U le schéma formel en groupes des unités de R , c'est-à-dire le complété $(\widehat{\mathbf{G}}_m)$ de $\mathbf{G}_m$ le long de sa fibre fermée. Les uniformisantes π de R sont les sections sur R , d'un torseur Π sous U . Au-dessus de U , on peut appliquer à "l'uniformisante universelle", les constructions ci-dessus. Ainsi au-dessus de l'espace rigide Π_{rig} , fibre générique de Π , on obtient une décomposition canonique de $u_K \times_K \Pi_{\text{rig}}$ en $u^1 + u^2$, où u^2 se factorise à travers le tore T_K et est donné par la formule (*) où π désigne maintenant l'uniformisante universelle, tandis que u^1 correspond à un 1-motif sur Π_{rig} qui a potentiellement bonne réduction M^1 sur Π .

iii) Cherchons maintenant, indépendamment du choix d'une uniformisante π , à quelle condition on peut écrire $u_K = u_K^1 + u_K^2$ de façon que le $K - 1$ -motif $M_K^1 = [u_K^1 : Y_K \rightarrow G_K]$ ait potentiellement bonne réduction et que u_K^2 se factorise à travers le tore T_K .

Pour cela, il nous faut préciser les structures entières en jeu. Supposons d'abord que la partie abélienne A_K ait bonne réduction A . On dispose alors d'une biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $A \times A^*$ par $\mathbf{G}_m$. Par complétion le long de la fibre fermée, puis passage à la fibre générique on obtient une biextension $\mathcal{P}_{\text{rig}}$ de $A_{K,\text{rig}} \times A_{K,\text{rig}}^*$ par le groupe des unités U_{rig} . Dans le cas général où A_K a seulement potentiellement bonne réduction, il existe encore une telle extension canonique $\mathcal{P}_{\text{rig}}$, comme on le voit par descente. La biextension de Poincaré $\mathcal{P}_K$ se déduit alors de $\mathcal{P}_{\text{rig}}$ en la poussant de U_{rig} à $(\mathbf{G}_m)_{\text{rig}}$, puis en algébrisant.

Par image réciproque de $\mathcal{P}_{\text{rig}}$ par le morphisme

$$h_K \times h_K^* : Y_K \times Y_K^* \rightarrow A_K \times A_K^* ,$$

on obtient une biextension de $Y_K \times Y_K^*$ par U_{rig} , soit encore une extension $\mathcal{E}_{\text{rig}}$ de $Z_K = Y_K \otimes_Z Y_K^*$ par U_{rig} (confer 2.4.1). En composant avec l'immersion ouverte canonique $U_{\text{rig}} \rightarrow (\mathbf{G}_m)_{\text{rig}}$, on obtient une extension E_{rig} de Z_K par $(\mathbf{G}_m)_{\text{rig}}$.

Ceci étant, la donnée du 1-motif $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$ équivaut à une trivialisations $\sigma_K : Z_K \rightarrow E_{\text{rig}}$ de l'extension E_{rig} et le 1-motif M_K a potentiellement bonne réduction si et seulement si σ_K se factorise à travers $\mathcal{E}_{\text{rig}}$.

On en déduit immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION 4.5.3. — *Les décompositions $u_K = u_K^1 + u_K^2$ correspondent canoniquement aux trivialisations $\tau : Z_K \rightarrow \mathcal{E}_{\text{rig}}$ de l'extension $\mathcal{E}_{\text{rig}}$. Le morphisme $u_K^2 : Y_K \rightarrow T_K$ correspond alors au morphisme différence $\sigma_K \tau^{-1} : Z_K \rightarrow (\mathbf{G}_m)_{\text{rig}}$, (qui est automatiquement algébrisable).*

Notons que les points à valeur dans K du quotient $(\mathbf{G}_m)_{\text{rig}}/U_{\text{rig}}$ s'identifient canoniquement à $\mathbb{Q}$, via la valuation (avec action triviale de Galois $(\overline{K}/K)$).

On obtient alors la suite exacte :

$$\mathrm{Hom}(Z_K, \mathbb{G}_m) \rightarrow \mathrm{Hom}(Z_K, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Ext}(Z_K, U_{\mathrm{rig}}) \rightarrow \mathrm{Ext}(Z_K, \mathbb{G}_m) .$$

L'élément $\mathcal{E}_{\mathrm{rig}}$ de $\mathrm{Ext}(Z_K, U_{\mathrm{rig}})$ est l'image de la monodromie μ élément de $\mathrm{Hom}(Z_K, \mathbb{Q})$. Si $\mathcal{E}_{\mathrm{rig}}$ est triviale, μ provient d'un élément de $\mathrm{Hom}(Z_K, G_m) = \mathrm{Hom}(Y_K, T_K)$ qui correspond au facteur u_K^2 .

4.6. — Monodromie et réalisation ℓ -adique.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$ un $K - 1$ -motif strict (4.2.3) et soit n un entier ≥ 1 . On a donc (3.1) une suite exacte de K -schémas en groupes finis :

$$0 \rightarrow {}_n G_K \rightarrow {}_n M_K \rightarrow Y_K / n Y_K \rightarrow 0 .$$

Passant à la limite projective sur les n qui sont des puissances d'un nombre premier ℓ , on obtient une suite exacte de groupes ℓ -divisibles :

$$0 \rightarrow T_\ell(G_K) \rightarrow T_\ell(M_K) \rightarrow Y_K \otimes Z_\ell \rightarrow 0 .$$

Supposons d'abord que Y_K et G_K aient bonne réduction et soit n un entier ≥ 1 premier à la caractéristique résiduelle p de R . Nous allons décrire l'action sur ${}_n M_K$ du sous-groupe d'inertie I de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Supposons d'abord R strictement hensélien, de sorte que $I = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Il existe alors une unique sous-extension K_n de $\overline{K}$, de degré n : l'extension modérée de degré n . Elle est galoisienne de groupe $\mu_n(K)$, le groupe des racines n èmes de 1 dans K . Plus précisément, si v_n est la valuation de K_n , de groupe $\mathbb{Z}$, il existe un morphisme canonique surjectif $t_n : I \rightarrow \mu_n = \mu_n(K)$, tel que, pour tout $x \in K_n$ et tout $\sigma \in I$ on ait :

$$(*) \quad \sigma(x) = x t_n(\sigma)^{v_n(x)} .$$

pour tout x de K_n tel que $x^n \in K$.

Lorsque R n'est plus supposé strictement hensélien, et que K_n désigne l'extension modérée de degré n de l'extension maximale non ramifiée K_{nr} de K , la formule ci-dessus reste valable pour x dans K_n et σ dans I . De plus, le morphisme t_n est équivariant sous l'action de $\mathrm{gal}(\overline{k}/k)$ opérant par automorphismes intérieurs sur I , et par son action naturelle sur $\mu_n(K) = \mu_n(k)$.

Un point de ${}_n M_K$ devient rationnel sur K_n et est représentable par un couple (y, g) , $y \in Y(K_n)$, $g \in G(K_n)$, tels que $u(y) = ng$. Le point de ${}_n M_K$ est nul si et seulement si (y, g) est de la forme $(nz, u(z))$, $z \in Y(K_n)$. L'application $(y, g) \mapsto y$, induit l'application canonique ${}_n M \rightarrow Y/nY$.

Soit σ dans le groupe d'inertie $\text{Gal}(K_n/K_{nr})$. Alors

$$(1) \quad {}^\sigma(y, g) = (y, {}^\sigma g) = (y, g) + (0, {}^\sigma g - g) .$$

Choisissons une uniformisante τ de K_n telle que $\tau^n = \pi$. Pour tout entier m , on a alors d'après (*):

$$(2) \quad \sigma(\tau^m) = \tau^m t_n(\sigma)^m .$$

Notons R_n l'anneau des entiers de K_n .

Soit H le sous-groupe de $T(K_n)$ formé des points h , tels que $\chi(h)$ soit une puissance de τ , pour tout caractère χ du tore T . Alors $T(K_n) = H \oplus T(R_n)$, et

$$G = H \oplus G(R_n) .$$

On peut donc décomposer g en :

$$g = h + a , \text{ avec } h \text{ dans } H \text{ et } a \text{ dans } G(R_n) .$$

Comme $u(y) = ng$, et ${}^\sigma y = y$, ${}^\sigma g - g$ est un élément de $G(K_n)$ annulé par n .

Par ailleurs, vu le choix de H et (*), ${}^\sigma h - h$ est un élément de $T(K_n)$ qui est annulé par n . Comme ${}^\sigma g - g = {}^\sigma h - h + {}^\sigma a - a$, on voit que ${}^\sigma a - a$ est lui aussi annulé par n . Mais l'élévation à la puissance n -ème est un morphisme étale dans G et ${}^\sigma a - a$ a une image nulle dans $G(k)$, donc ${}^\sigma a - a = 0$. Par suite

$$(3) \quad {}^\sigma g - g = {}^\sigma h - h .$$

Soit alors χ un caractère de T . Le caractère χ , composé avec la valuation de K_n , donne une application additive de $T(K_n)$ dans $\mathbb{Z}$. Celle-ci s'étend en une application additive $v_{n,\chi} : G(K_n) \rightarrow \mathbb{Z}$, qui s'annule sur $G(R_n)$. En particulier :

$$(4) \quad v_{n,\chi}(g) = v_{n,\chi}(h) .$$

D'après (*) et le choix de h , on a alors $\chi(\sigma h) = \chi(h) t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(h)}$, et donc, compte-tenu de (3) et (4) :

$$(5) \quad \chi({}^\sigma g - g) = \chi({}^\sigma h - h) = t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(h)} = t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(g)} .$$

Il résulte de la définition de la monodromie géométrique μ_0 (4.3), que pour tout y dans $Y(K)$ et tout χ caractère de T , on a :

$$(6) \quad v_{n,\chi}(u(y)) = n\mu_0(y \otimes \chi) ,$$

l'entier n qui figure à droite provenant de la ramification de K_n par rapport à K .

Avec les notations précédentes, on a $u(y) = ng$ et il vient donc : $v_{n,\chi}(g) = \mu_0(y \otimes \chi)$.

Finalement, on trouve :

$$(7) \quad \chi(\sigma g - g) = t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(g)} = t_n(\sigma)^{\mu_0(y \otimes \chi)} .$$

Nous sommes alors en mesure d'expliciter l'action de Galois sur les points d'ordre n du motif M , en fonction de la monodromie géométrique.

La donnée de la monodromie géométrique

$$\mu_o : Y \otimes Y^* \rightarrow \mathbb{Z} ,$$

équivalent à la donnée d'une application linéaire :

$$\begin{aligned} Y &\rightarrow \text{Hom}(Y^*, \mathbb{Z}) \\ y &\mapsto [\chi \mapsto \mu_o(y, \chi)] . \end{aligned}$$

Par tensorisation avec les racines n -èmes de l'unité, on obtient une application canonique :

$$\nu_n : Y \otimes \mu_n \rightarrow \text{Hom}(Y^*, \mu_n) = {}_nT .$$

Pour tout ℓ premier inversible sur R , on obtient de même une application canonique :

$$\nu_{\ell^\infty} : Y(1) = Y \otimes T_{\ell^\infty}(1) \rightarrow T_{\ell^\infty}(T) .$$

Les formules (1) et (7) obtenues ci-dessus entraînent alors :

Pour tout point x de ${}_nM$, d'image y dans Y/nY , on a

$$\sigma x = x + \nu_n(y \otimes t_n(\sigma)) .$$

Si l'on considère l'application composée

$$\mathcal{N}_n : {}_nM \otimes \mu_n \rightarrow Y/nY \otimes \mu_n \rightarrow {}_nT \rightarrow {}_nM ,$$

comme un "endomorphisme" nilpotent de carré nul, on peut écrire

$\sigma x = \text{Exp}(\mathcal{N}_n(x \otimes t_n(\sigma)))$ qui est la formule usuelle pour la monodromie.

En résumé :

PROPOSITION 4.6.1. — Soit $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$ un $K - 1$ -motif, tel que Y_K et G_K aient bonnes réductions respectives Y et G . Notons T le sous-tore de G et soit ℓ un nombre premier inversible sur R .

A l'entier ℓ et à la monodromie géométrique

$$\mu_o : Y \rightarrow \mathrm{Hom}(Y^*, \mathbb{Z}) ,$$

on associe canoniquement l'opérateur de carré nul :

$$\mathcal{N}_{\ell^\infty} : T_{\ell^\infty}(M)(1) \rightarrow Y \otimes \mathbb{Z}_{\ell^\infty}(1) \rightarrow T_{\ell^\infty}(T) \rightarrow T_{\ell^\infty}(M)$$

où les flèches extrêmes sont les surjections et injections canoniques et où la flèche médiane est ν_{ℓ^∞} , déduite de la monodromie géométrique.

Alors l'action de l'inertie I sur $T_{\ell^\infty}(M)$ se factorise à travers le caractère modéré t_{ℓ^∞} et est donnée par la formule :

$${}^\sigma x = \mathrm{Exp}(\mathcal{N}_{\ell^\infty}(x \otimes t_{\ell^\infty}(\sigma))) .$$

De plus, cette formule est compatible avec l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur les deux membres.

4.7. — Monodromie finie.

Soit de nouveau R un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K , de corps résiduel k de caractéristique $p \geq 0$. Soit $\overline{K}$ (resp. $\overline{k}$) une clôture algébrique séparable de K (resp. k). On note $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ qui est extension de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ par le groupe d'inertie I .

Soit $M_K = [u_K : Y_K \rightarrow G_K]$ un $K - 1$ -motif strict (4.2.3). Reprenons les notations de 4.4 :

- le plus grand sous-motif $\widetilde{M}_K = [\widetilde{u}_K : \widetilde{Y}_K \rightarrow G_K]$ de M_K ayant potentiellement bonne réduction.

- $Y''_K = Y_K/\widetilde{Y}_K$, Y''_K^* , T''_K et l'application non dégénérée :

$$\mu'' : Y''_K \otimes Y''_K^* \rightarrow \mathbb{Q} .$$

La discussion qui suit est directement inspirée de [16] .

Soit K' une extension finie étale galoisienne de K de groupe de Galois $\mathcal{G}'$ et soit R' la clôture intégrale de R dans K' . Supposons que $Y_{K'}$ et $G_{K'}$ aient respectivement bonne réduction Y' et G' sur R' . Alors $(\widetilde{M}_K) \otimes_K K' = \widetilde{M}_{K'}$ se réalise comme sous-motif $\widetilde{u}_{K'} : \widetilde{Y}_{K'} \rightarrow G_{K'}$ de $M_{K'}$ et a bonne réduction $\widetilde{M}' = [\widetilde{u}' : \widetilde{Y}' \rightarrow G']$ sur R' .

Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}'$, soit $\widetilde{M}_{K'}^{(\sigma)}$ (resp. $\widetilde{M}'^{(\sigma)}$) le motif déduit de $\widetilde{M}_{K'}$ (resp. $\widetilde{M}'$) par l'automorphisme de K' (resp. R') induit par σ . Comme $\widetilde{M}_{K'}$ provient

de $\widetilde{M}_K$, on a un isomorphisme canonique de descente $\alpha(\sigma) : \widetilde{M}_{K'} \approx \widetilde{M}_{K'}^{(\sigma)}$ qui satisfait à la condition de cocycle : $\alpha(\sigma\tau) = {}^\sigma\alpha(\tau)\alpha(\sigma)$. Ces isomorphismes se prolongent en des isomorphismes $\alpha(\sigma) : \widetilde{M}' \rightarrow \widetilde{M}'^{(\sigma)}$, vérifiant également la condition de cocycle $\alpha(\sigma\tau) = {}^\sigma\alpha(\tau)\alpha(\sigma)$. En particulier, si l'on restreint α à la fibre fermée de $\widetilde{M}'_{k'}$, au-dessus du corps résiduel k' de R' et si l'on restreint σ au sous-groupe d'inertie I' de G' , on obtient un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} I' &\rightarrow \text{Aut}(\widetilde{M}'_{k'}) \\ \sigma &\rightarrow \alpha(\sigma) . \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.7.1. —

i) *Il existe une extension finie étale K' de K , telle que $M_{K'}$ ait semi-bonne réduction.*

ii) *Si R est strictement hensélien, il existe une plus petite extension K' de K telle que $M_{K'}$ ait semi-bonne réduction. Cette extension est étale galoisienne et, avec les notations précédentes, son groupe de Galois est l'image de I' dans $\text{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$.*

Soit n un entier ≥ 3 et premier à p caractéristique de k .

iii) *Pour que M_K ait semi-bonne réduction il faut et il suffit que l'action de Galois sur $T_n(\widetilde{M}_K)$ soit non-ramifiée, en particulier il suffit que l'action de Galois sur $T_n(M_K)$ soit non ramifiée.*

Démonstration : L'assertion i) a déjà été notée et résulte du fait que si Y_K (resp. G_K) acquiert bonne réduction après extension radicielle de K , il a déjà bonne réduction, comme il résulte du critère de Néron-Ogg-Shafarevic (confer [16] th. 1).

Prouvons ii). Supposons R strictement hensélien. Si M_K a semi-bonne réduction, alors $\widetilde{M}_K$ a bonne réduction et donc l'image de I' dans $\text{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$ est nulle. Réciproquement, si l'image de I' dans $\text{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$ est nulle, pour ℓ premier distinct de p , l'action de G sur $T_\ell(\widetilde{M}_K)$ est non ramifiée et il résulte encore du critère de Néron-Ogg-Shafarevic que $\widetilde{M}_K$ a bonne réduction. En particulier, le sous-tore T''_K (4.4) a bonne réduction et donc l'action de Galois sur Y''_{K^*} est non ramifiée. Comme μ'' est non-dégénérée, il en résulte que l'action de Galois sur Y''_K est aussi non ramifiée. Après tensorisation par $\mathbb{Q}$, l'action de Galois sur Y_K devient semi-simple. Comme les actions de Galois sur $\widetilde{Y}_K$ et sur Y''_K sont non ramifiées, il en est de même de l'action de Galois sur Y_K et donc Y_K a bonne réduction. D'où ii).

Quant à l'assertion iii), elle résulte de l'analogue du critère de Serre [15].

On obtient ainsi un morphisme canonique $\rho : I \rightarrow \text{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$, d'image finie H : la **monodromie finie** du motif M_K .

Soit M_K un $K-1$ -motif strict et supposons R strictement hensélien. Alors tout $\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K)$ opère sur Y'_K , sur le groupe des caractères Y_K^* du tore T_K et sur la réduction A'_k du quotient abélien $A_{K'}$. On obtient dans les trois cas, des polynômes caractéristiques à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit $P(\sigma)$ le produit de ces trois polynômes.

PROPOSITION 4.7.3. — *Soit ℓ premier, distinct de la caractéristique résiduelle p . Alors pour tout σ dans le groupe d'inertie I , le polynôme caractéristique de σ opérant sur $T_{\ell^\infty}(M_K)$ est $P(\sigma)$ et est à coefficients entiers.*

Par dévissage, on se ramène au cas d'une filtration à un cran. Le cas torique et le cas étale sont immédiats; le cas abélien se déduit de Weil (confer [11] chap. IV th. 4).

PROPOSITION 4.7.4. — *Soit M_K un $K-1$ -Motif strict (4.2.3) et supposons que le corps résiduel k soit fini à q éléments. Notons σ un élément du groupe de Weil de K qui relève le Frobenius de k et soit ℓ premier, distinct de la caractéristique résiduelle de k . Alors le polynôme caractéristique de σ opérant sur $T_\ell(M_K)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et est indépendant de ℓ . Les valeurs absolues des racines sont respectivement $1, q, q^{1/2}$ sur les crans étales, toriques et abéliens du motif.*

Démonstration : On procède par dévissage pour se ramener à une filtration en un seul cran et on termine comme dans ([16] th. 3).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT. — Stable Reduction and uniformization of abelian varieties. I. *Math. Ann.* 270 (1985), 349-379, II. *Invent. Math.* 78 (1984), 257-297.
- [2] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT. — Degenerating abelian varieties. *Topology*, Vol. 30, N° 4 (1991), 653-698.
- [3] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT. — Formal and rigid Geometry II : Flattening Techniques (à paraître).
- [4] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD. — Néron models. *Ergebnisse* (1990).
- [5] P. DELIGNE. — *Théorie de Hodge III*, *Pub. Math. IHES* N° 44, 1975.
- [6] M. DESCHAMPS. — Réduction semi-stable p. 1-34, Séminaire Szpiro sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux. *Astérisque* N° 86 S.M.F. (1981).
- [7] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ. — *Eléments de géométrie algébrique III*, *Pub. Math. IHES* N° 11, 1961.
- [8] A. GROTHENDIECK. — Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie :
 SGA 1 (1960-61) : Revêtements Etales et Groupe Fondamental. *Lecture Notes in Mathematics* N° 224 (1971).
 SGA 2 (1962) : Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. *Advanced studies in Pure Mathematics*. Masson North-Holland (1968)
 SGA 7.1 (1967-1969) : Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique. *Lecture Notes in Mathematics* N° 288 (1972).
- [9] R. KIEHL. — Der Endlichkeitssatz für eigenetliche Abbildungen in der nicht-archimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.* 2, (1967), 191-214.
- [10] F. MEHLMANN. — Flache Homomorphismen affinoider Algebren. *Schriftenreihe des Math. Inst. Univ. Münster*, 2 Ser. 19 (1981).
- [11] D. MUMFORD. — *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1970.
- [12] M. RAYNAUD. — Variétés abéliennes et géométrie rigide, *Actes congrès intern. math. Nice* 1, (1970), 473-477.
- [13] M. RAYNAUD. — Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl, ... Table ronde d'analyse non archimédienne, *Mémoire de la Soc. Math. de France* 39-40, (1974), 319-327.

- [14] M. REVERSAT, M. Van der Put. — Construction analytique rigide de variétés abéliennes, *Bul. Soc. Math. de France* **117**, (1989), 415-444.
- [15] J.-P. SERRE. — Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon $n \geq 3$. Application à l'exposé 17 du séminaire Cartan 1960-61.
- [16] J.-P. SERRE, J. TATE. — Good reduction of abelian varieties, *Ann. of Math.* **88**, (1968), 492-517.

Michel Raynaud
URA D0752 du CNRS
Université de Paris-Sud
Mathématiques, bât. 425
91405 ORSAY Cédex (France)