JEAN-MARC FONTAINE (éd.)

Périodes p-adiques - Séminaire de Bures, 1988

Astérisque, tome 223 (1994)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223_>

223 **ASTÉRISQUE**

1994

PÉRIODES p-ADIQUES

Séminaire de Bures, 1988

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ce volume est dédié à la mémoire d'Osamu Hyodo

Table des matières

Introduction

Ce volume contient essentiellement la rédaction des exposés du séminaire sur les périodes p–adiques organisé à l'I.H.E.S., à Bures–sur–Yvette, en 1988[1] et je voudrais commencer par présenter mes plus plates excuses pour le délai ridiculement long qui se sera écoulé entre ce séminaire et sa parution, délai dont je suis en très grande partie responsable.

Je renvoie à [3] et [5] pour un historique du sujet mais je voudrais faire ici un bref historique du séminaire lui–même, qui trouve son origine dans une conjecture de Jannsen.

Soient K un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, K_0 le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. J'avais conjecturé (cf. [2], conj. C_{dR}) l'existence, pour toute

---

[1] Le programme de ce séminaire avait été le suivant :

1. (2/2/88) J.–M. Fontaine : Exposé introductif.
2. (16/2/88) J.–P. Wintenberger : Le corps des périodes p–adiques.
3. (23/2/88) B. Mazur : Monodromie p–adique pour les formes modulaires.
4. (1/3/88) J.–M. Fontaine : Représentations p–adiques semi–stables et monodromie.
5. (8/3/88) L. Illusie : Autour du théorème de monodromie ℓ–adique.
6. (15/3/88) B. Perrin–Riou : Représentations p–adiques ordinaires.
7. (22/3/88) J.–M. Fontaine : Décomposition de Hodge–Tate pour les 1–motifs.
8. (12/4/88) et 9. (19/4/88) L. Illusie : Variétés semi–stables ordinaires, d'après Hyodo.
10. (26/4/88) et 11. (3/5/88) K. Kato : On Fontaine's “de Rham conjecture”.
12. (10/5/88) M. Raynaud : Réalisation de de Rham des 1–motifs.
13. (17/5/88) J.–P. Wintenberger : Variation de structures de Hodge p–adiques.
14. (17/5/88, à Orsay) J.–M. Fontaine : Représentations galoisiennes potentiellement semi–stables.

variété X projective et lisse sur K, d'un isomorphisme de comparaison entre la cohomologie étale p-adique $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ et la cohomologie de de Rham $H^m_{dR}(X/K)$, i.e. d'un isomorphisme canonique, fonctoriel et compatible avec toutes les structures

$$B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \simeq B_{dR} \otimes_K H^m_{dR}(X/K),$$

où B_{dR} est le "corps des périodes p-adiques". J'avais conjecturé aussi que dans le cas de bonne réduciton, on devait pouvoir faire mieux (conj. C_{cris}), c'est-à-dire récupérer la cohomologie étale p-adique à partir de la cohomologie cristalline de la fibre spéciale – considérée comme un K_0-espace vectoriel D muni d'un Frobenius et d'une filtration sur $K \otimes_{K_0} D$ grâce à la comparaison avec la cohomologie de de Rham – et vice versa.

Après des résultats partiels dus à divers auteurs, Faltings [1] prouvait les conjectures C_{cris} et C_{dR}[2]. Peu de temps auparavant, Jannsen [6], motivé par ses recherches sur la cohomologie galoisienne des représentations ℓ-adiques associées aux variétés algébriques sur les corps de nombres, suggérait que, dans le cas de mauvaise réduction, il devait exister des structures supplémentaires, en particulier un opérateur de monodromie comme dans le cas ℓ-adique. Ceci m'amena à construire l'anneau B_{st} qui contient l'anneau B_{cris} utilisé pour formuler C_{cris}. La conjecture de Jannsen se reformule alors (conj. C_{st}) en affirmant l'existence, pour une variété X comme ci-dessus, lorsqu'elle a "réduction semi-stable", d'une cohomologie qui généralise la cohomologie cristalline et d'un isomorphisme de comparaison entre cette cohomologie et la cohomologie étale p-adique. En utilisant les théorèmes de comparaison dans le cas de bonne réduction et le théorème de réduction semi-stable, je pus prouver C_{st} pour les variétés abéliennes (et même pour les 1-motifs).

Ceci nous conduisit à mettre sur pieds un séminaire autour de C_{dR}, C_{cris} et C_{st} et nous eûmes la chance de voir le sujet se développer au fur et à mesure que le séminaire avançait. En particulier,

– la conjecture C_{st} fut confortée par les travaux de Mazur, Tate et Teitelbaum [7] sur la représentation p-adique associée à une forme modulaire

[2] Du moins dans le cas de bonne réduction. Il y a un point obscur dans la preuve de C_{dR} et il n'est pas clair que la démonstration s'applique sans hypothèse restrictive.

de poids > 2 dont le niveau est exactement divisible par p : on comprenait comment cette représentation de dimension 2 pouvait être irréductible, malgré l'existence d'un opérateur de monodromie qui semblait décomposer l'espace de la représentation en somme directe de deux droites, on découvrait aussi une interprétation galoisienne conjecturale du nouvel invariant qu'ils avaient mis en évidence[3] ;

– nous fûmes conduit, B. Mazur et moi, à conjecturer que les représentations ℓ–adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ qui "proviennent de la géométrie algébrique" sont exactement celles qui sont non ramifiées en dehors d'un nombre fini de places et sont potentiellement semi–stables en $p = \ell$ (cf. [4] pour un énoncé précis et pour une discussion de quelques travaux récents qui semblent étayer cette conjecture) ;

– mais surtout, alors que nous venions d'expliquer, Luc Illusie et moi, à Kazuya Kato qui se trouvait être à Orsay, ce qu'était la conjecture C_{st}, son élève, Osamu Hyodo, resté à Tokyo, lui écrivait pour lui dire comment, en utilisant un "complexe de de Rham–Witt à pôles logarithmiques", il pensait pouvoir construire une cohomologie qui s'avéra être celle que nous cherchions. Dès lors, on travailla dur, à Bures–Orsay et à Tokyo, et on aboutit aux exposé V et VI du présent volume qui, sans démontrer C_{st} en général, donnent toutefois des résultats substantiels sur la question.

Voici maintenant un très bref aperçu du contenu de chacun des exposés rédigés :

– Dans l'exposé I, Luc Illusie décrit quelques aspects, tournant autour du théorème de monodromie locale de Grothendieck, des analogues ℓ–adiques et analytiques complexes de certains des problèmes qui sont abordés dans la suite dans le cadre p–adique.

– Dans l'exposé II, on construit et on étudie quelques propriétés du corps des périodes p–adiques B_{dR} et de quelques–uns de ses sous–anneaux (en particulier B_{dR}^{+}, B_{cris} et B_{st}). Dans un appendice, Pierre Colmez montre que

[3] L'exposé de B. Mazur sur ce sujet n'a pas été rédigé. On ne sait toujours pas prouver que la représentation associée à une telle forme modulaire est bien semi–stable.

la clôture algébrique $\overline{K}$ de K est dense dans B_{dR}^{+}.

– L'exposé III a pour but l'étude des représentations p–adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$: on introduit une hiérarchie entre ces représentations : cristallines $\Longrightarrow$ semi–stables $\Longrightarrow$ potentiellement semi–stables $\Longrightarrow$ de Rham $\Longrightarrow$ Hodge–Tate ; on explique quel genre de structure algébrique est associé à une telle représentation (par exemple, dans le cas semi–stable, on obtient ce qu'on appelle un (φ, N)–module filtré) ; on montre que lorsque la représentation est potentiellement semi–stable, elle est déterminée par cette structure.

– Dans l'exposé IV, Bernadette Perrin–Riou définit les représentations p–adiques ordinaires, montre qu'elles sont semi–stables et déterminent les (φ, N)–modules filtrés auxquelles elles correspondent. Dans un appendice, Luc Illusie explique les résultats de Bloch et Kato (cas de bonne réduction) et de Hyodo (cas de réduction semi–stable) qui montrent que la cohomologie étale p–adique d'une variété propre et lisse sur K "ayant réduction ordinaire" est ordinaire.

– Dans l'exposé V, Osamu Hyodo et Kazuya Kato définissent la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques. Ceci leur permet en particulier d'associer à une variété propre et lisse X sur K munie d'un modèle sur les entiers à réduction semi–stable et à tout entier $m \geq 0$ un (φ, N)–module filtré D qui dans le cas où le modèle a bonne réduction n'est autre que le m–ième groupe de cohomologie cristalline de la fibre spéciale munie de la filtration fournie par la comparaison entre cette cohomologie et la cohomologie de de Rham de la fibre générique.

– Dans l'exposé VI, Kazuya Kato démontre la conjecture C_{st} pour une variété X comme ci–dessus lorsque sa dimension est $< (p-1)/2$; autrement dit, il montre que le module D ci–dessus détermine une représentation p–adique semi–stable de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (via la recette expliquée dans l'exposé III) et que celle–ci s'identifie à $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$.

– Dans l'exposé VII, Michel Raynaud étudie les 1–motifs sur le corps K. Il montre que, du point de vue rigide analytique, tout 1–motif est canoniquement quasi–isomorphe à un 1–motif dont la variété semi–abélienne sous–jacente a potentiellement bonne réduction. Ceci lui permet d'étudier la monodromie de ce 1–motif ainsi que ses réalisations ℓ–adiques.

– L'exposé VIII donne une représentation unifiée de l'étude des représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (avec $\ell =$ ou $\neq p$). En particulier, on explique comment, lorsque le corps résiduel est fini, on peut associer à une telle représentation une représentation du groupe de Weil–Deligne de K, même lorsque $\ell = p$.

– Dans l'exposé IX enfin, Jean–Pierre Wintenberger donne une version relative du théorème de comparaison entre cohomologie étale p–adique et cohomologie de de Rham pour un schéma abélien, moyennant des hypothèses assez générales. Sa construction utilise une version relative de l'anneau B_{dR}^{+} construit dans l'exposé II.

RÉFÉRENCES

[1] G. Faltings. — Crystalline cohomology and p–adic Galois representations, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins University Press, 1989, 25–80.

[2] J.–M. Fontaine. — Sur certains types de représentations p–adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti–tate, *Ann. of Maths*, 115 (1982), 529–577.

[3] J.–M. Fontaine and L. Illusie. — p–adic periods : a survey *in* Proceedings of the Indo–French Conference on Geometry, NBHM, Hindustan Book Agency, Dehli (1993), 57–93.

[4] J.–M. Fontaine and B. Mazur. — Geometric Galois Representations, *en préparation*.

[5] L. ILLUSIE. — Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p–adique [d'après G. Faltings, J.–M. Fontaine et al.] Séminaire Bourbaki n° 726, juin 1990, **Astérisque** 189–190 (1990), 325–374.

[6] U. JANNSEN. — On the ℓ–adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology, *in* Galois Groups over $\mathbb{Q}$, MSRI Pub. 16, Springer (1989), 315–360.

[7] B. MAZUR, J. TATE and J. TEITELBAUM. — On p–adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton–Dyer, *Inv. Math.* 84 (1986), 1–48.

Je voudrais remercier tous ceux qui m'ont aidé à la mise au point de ce séminaire et tout particulièrement Luc Illusie. Il est peu de dire que ce volume n'aurait jamais vu le jour sans son aide efficace, constante et généreuse.

Mes remerciements vont également à Mmes Bonnardel et Le Bronnec qui ont assuré avec leur compétence habituelle et une patience infinie la frappe des différentes versions des différents manuscrits.

Je ne peux pas terminer cette introduction sans évoquer la mémoire d'Osamu Hyodo. Peu de temps après la fin du séminaire, il vint passer quelques temps à Orsay et nous eûmes le plaisir de faire sa connaissance. C'était l'un des plus brillants mathématiciens de sa génération mais c'était surtout quelqu'un de très ouvert, curieux de tout et toujours souriant. Malgré les différences d'âge et de culture, je le considérais comme un ami. Le 22 avril 1989, il décidait de mettre fin à ses jours. Près de cinq ans après, c'est toujours avec la même émotion que nous évoquons son souvenir.

A Orsay, le 30 mars 1994

Jean–Marc Fontaine

Exposé I

AUTOUR DU THÉORÈME DE MONODROMIE LOCALE

par **Luc Illusie**

0. Introduction.

Cet exposé ne contient aucun résultat original. On se borne à décrire quelques aspects du théorème de monodromie locale, qui, à des titres divers, ont inspiré les constructions de Hyodo-Kato (exp. V) et Fontaine (exp. VIII). On rappelle d'abord très brièvement, au n° 1, l'énoncé et les principaux corollaires du théorème de monodromie locale ℓ-adique de Grothendieck, en suivant de près la présentation de Deligne dans (SGA 7 I) et [11, 1.7]. Au n° 2, on travaille sur $\mathbb{C}$. On explique la démonstration géométrique de la variante du théorème de monodromie locale pour les espaces analytiques complexes, puis l'on étudie en détail le cas de la réduction semi-stable. Pour S un disque ouvert de centre 0 dans $\mathbb{C}$ et $f : X \to S$ un morphisme projectif d'espaces analytiques complexes, lisse en dehors de 0, et ayant réduction semi-stable en 0 (2.1.1), l'unipotence de la monodromie T de $H^*(X_t, \mathbb{C})$ ($t \in S^* = S - \{0\}$)) a une interprétation classique en termes de la connesion de Gauss-Manin sur la cohomologie de de Rham relative $R^*f_*\Omega^\cdot_{X^*/S^*}$ (où $X^* = f^{-1}(S^*)$). On rappelle plus précisément comment, d'après Steenbrink, peuvent se calculer, à l'aide de complexes de de Rham à pôles logarithmiques relatifs, le complexe des cycles évanescents $R\Psi(\mathbb{C})$ et le logarithme N de T. La théorie de Steenbrink fournit de plus une structure de Hodge mixte H_0^*, limite, en un certain sens, pour $t \to 0$, des structures de Hodge pures des $H^*(X_t)$, et dont N est un endomorphisme nilpotent de type $(-1, -1)$. On explique en 2.3 le principe de la construction. Sur H_0^* on dispose alors, *a priori*, de deux filtrations : la filtration par le poids (de la structure de Hodge mixte) et la filtration de monodromie (déduite de N). Leur coïncidence est le résultat le plus profond de la théorie. On en donne quelques corollaires, dus à M. Saito [23], généralisant notamment le théorème local du cycle invariant ([2], [5]). Au n° 3, on explique certains analogues de la théorie précédente sur un trait S de caractéristique résiduelle $p > 0$. Pour $f : X \to S$ propre et à réduction semi-stable (3.1.1), et ℓ premier $\neq p$, on commence par résumer le calcul, dû à Grothendieck (SGA 7 I), complété par Rapoport-Zink [19], des cycles évanescents $R^i\Psi(\mathbb{Z}_\ell)$, munis de l'action de la monodromie : un point important, prouvé dans [19], est que l'inertie agit trivialement. On décrit ensuite l'analogue, construit par Rapoport-Zink (loc. cit.), du complexe utilisé par Steenbrink dans [27], auquel on a fait allusion plus haut. Cette construction donne naissance à une "suite spectrale des poids" ((3.6.9), (3.8.2)), aboutissant à la cohomologie de la fibre générique géométrique. La coïncidence entre la filtration aboutissement et la filtration de monodromie est ici conjecturale. On fait le point sur ce qui est connu. On reformule également, sous une forme un peu plus précise, certaines questions d'indépendance de ℓ, déjà soulevées par Serre-Tate [26]. La perversité du complexe $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)$, convenablement décalé, est en filigrane dans toute cette étude. Elle découle du théorème d'Artin sur la dimension cohomologique des schémas affines (SGA 4 XIV 3.1) et du fait (bien connu, semble-t-il) que le foncteur $R\Psi_\eta$ commute à la dualité. Nous en donnons une démonstration au n° 4, calquée sur celle des théorèmes de finitude de Deligne dans (SGA 4 1/2 Th. finitude).

Je suis heureux de remercier P. Deligne, J.-M. Fontaine, K. Kato, N. Katz et M. Raynaud pour d'utiles discussions dans la préparation de cet exposé, ainsi que M. Rapoport pour ses remarques sur une première version de ce texte et sa suggestion d'inclure le complément (4.7). Je suis particulièrement reconnaissant à O. Gabber de m'avoir communiqué la preuve de (4.2) et signalé une erreur dans la démonstration initiale de (4.6). Mes remerciements les plus chaleureux vont, enfin, à G. Laumon pour sa lecture minutieuse du manuscrit final, ses nombreux commentaires, et son aide dans la mise au point de la démonstration de (4.6).

Sommaire

1. Le théorème de monodromie locale ℓ-adique.

1.1. On fixe, dans ce numéro, un anneau de valuation discrète hensélien R, de corps des fractions K et de corps résiduel k. On note p l'exposant caractéristique de k. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, on note $\overline{R}$ le normalisé de R dans $\overline{K}$, et $\bar{k}$ le corps résiduel de $\overline{R}$ (qui est une clôture algébrique de k). On note I le **groupe d'inertie**, donné par la suite exacte

$$1 \to I \to \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to 1 \ .$$

Il s'insère dans une suite exacte canonique ([25] et [8, § 2])

$$1 \to P \to I \xrightarrow{t} \mathbf{Z}_{(p')}(1) \to 1 \ ,$$

où P est un pro-p-groupe et $\mathbf{Z}_{(p')}(1) = \prod_{\ell \neq p} \mathbf{Z}_\ell(1)$ est le **groupe d'inertie modéré** ($\mathbf{Z}_\ell(1) = \varprojlim \mu_{\ell^n}(\bar{k})$). Soit ℓ un nombre premier $\neq p$. On note

$$t_\ell : I \to \mathbf{Z}_\ell(1)$$

le ℓ-composant de t; le noyau de t_ℓ est un groupe profini d'ordre premier à ℓ.

Une **représentation ℓ-adique** de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (ou plus généralement, d'un groupe profini G) est un homomorphisme $\rho : G \to GL(V)$, où V est un $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie ($\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ étant une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_\ell$), tel qu'il existe une extension finie E de $\mathbb{Q}_\ell$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et une E-structure V_E sur V telles que ρ se factorise en un homomorphisme continu $G \to GL(V_E)$ ($GL(V_E)$ étant muni de sa topologie naturelle de groupe de Lie ℓ-adique).

Soit $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On dit qu'une représentation ℓ-adique ρ de G est **quasi-unipotente** s'il existe un sous-groupe ouvert I_1 de I tel que la restriction de ρ à I_1 soit unipotente (i.e. telle que $\rho(g)$ soit unipotent pour tout $g \in I_1$). Un résultat fondamental de Grothendieck affirme que cette propriété est automatique dès que k n'est pas trop gros :

THÉORÈME 1.2 (Grothendieck) [26, Appendice]. — *On suppose qu'aucune extension finie de k ne contient toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ. Alors toute représentation ℓ-adique de G est quasi-unipotente.*

1.3. Soit X un schéma séparé de type fini sur K. D'après (SGA 4 XIV) (resp. (SGA 4 1/2 Th. finitude)), les groupes de cohomologie $H^n_c(X_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (resp. $H^n(X_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$) sont de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Le groupe de Galois G y opère par transport de structure, d'où une représentation ℓ-adique

$$\rho : G \to GL(H) , \tag{1.3.1}$$

où H est l'un des groupes précédents.

THÉORÈME 1.4. — *La représentation ρ (1.3.1) est quasi-unipotente.*

Comme il est expliqué dans (SGA 7 I 1), Grothendieck a déduit ce résultat d'une variante de 1.2 par un passage à la limite utilisant la méthode de lissification de Néron (voir [3, 3.1 theorem 3 + 3.6 lemma 5]).

Il est plausible que la conclusion de 1.4 est encore vraie si l'on remplace le faisceau constant $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sur X par un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau "d'origine géométrique" (cf. [2, 6.2]).

1.5. Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation quasi-unipotente. Il existe alors un unique morphisme nilpotent

$$N : V(1) \to V , \tag{1.5.1}$$

caractérisé par le fait que, si I_1 est un sous-groupe ouvert de I tel que la restriction de ρ à I_1 soit unipotente, alors

$$\rho(g) = \exp(N t_\ell(g)) \text{ pourtout } g \in I_1 . \tag{1.5.2}$$

L'unicité est en effet claire. Pour l'existence, il suffit d'observer que, le noyau P_ℓ de t_ℓ étant un groupe profini d'ordre premier à ℓ, l'image par ρ de P_ℓ est finie (on peut supposer que ρ se factorise à travers $GL(V_E)$ comme ci-dessus; si L est un réseau de V_E stable par G, le noyau K de la flèche de réduction $GL(L) \to GL(L/\mathfrak{m}_E L)$ est un pro-ℓ-groupe, donc $K \cap \rho(P_\ell) = \{1\}$). Comme les éléments de $\rho(P_\ell \cap I_1)$ sont unipotents, on a donc $\rho(P_\ell \cap I_1) = \{1\}$. La restriction de ρ à I_1 se factorise donc à travers $t_\ell(I_1)$, et, quitte à rapetisser I_1, $\log \rho(t_\ell(g))$ est défini pour $g \in I_1$.

L'endomorphisme N s'appelle le **logarithme de la partie unipotente de la monodromie locale**. Il résulte de la caractérisation (1.5.2) que $N : \mathbb{Q}_\ell(1) \to \mathrm{End}(V)$ est invariant par Galois : pour $z \in \mathbb{Q}_\ell(1)$, $x \in V$, $g \in G$, on a

$$\rho(g)N(zx) = N(\chi(g)z.\rho(g)x) \ , \tag{1.5.3}$$

où $\chi : G \to \mathbb{Z}_\ell^*$ est le caractère cyclotomique. En particulier, si k est le corps fini $\mathbb{F}_q$ et $F \in G$ relève le Frobenius géométrique ($a \mapsto a^{\frac{1}{q}}$) de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, on a

$$N(zFx) = qFN(zx) \ ,$$

relation qu'on écrit parfois, par abus,

$$NF = qFN \ . \tag{1.5.4}$$

Le couple (ρ, N) détermine alors une représentation du **groupe de Weil-Deligne** $'W(\overline{K}/K)$ [8, § 8].

L'endomorphisme N permet de définir la **filtration de monodromie locale** de V : c'est l'unique filtration finie croissante (séparée et exhaustive) $\cdots \subset M_iV \subset M_{i+1}V \subset \cdots$ telle que $NM_iV(1) \subset M_{i-2}V$ et que N^k induise un isomorphisme $\mathrm{gr}_k^M V(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-k}^M V$. Si l'on désigne par $K.V$ (resp. $I{\cdot}V$ la **filtration noyau** (resp. **image**) définie par

$$K_kV = \mathrm{Ker}\, N^{k+1} \quad (\text{resp. } I^kV = \mathrm{Im} N^k) \ ,$$

la filtration de monodromie est "produit de convolution" des filtrations K et I :

$$M_j = \textstyle\sum_{k-i=j} I^i \cap K_k \ , \tag{1.5.5}$$

cf. [28, 2.3]. Nous examinerons, au n^0 3, quelques problèmes concernant ces filtrations.

2. Réduction semi-stable et structure de Hodge limite.

Dans tout ce numéro, nous travaillons exclusivement sur $\mathbb{C}$.

2.1. **La démonstration géométrique du théorème de monodromie locale.**

2.1.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme propre d'espaces analytiques complexes. On suppose que S est un disque ouvert, et que f est lisse hors de $0 \in S$. Comme la restriction de f à $S^* = S - \{0\}$ est un fibré localement trivial au sens C^∞, le générateur positif de $\pi_1(S^*)$ induit, pour $t \in S^*$, un automorphisme de $H^*(X_t, \mathbb{Z})$, noté T_t (ou T s'il n'y a pas de confusion à craindre), et appelé automorphisme de **monodromie locale** (voir (SGA 7 XIV 1.1) pour les conventions de signes). Le théorème de monodromie locale affirme que cet automorphisme est quasi-unipotent. Plus précisément :

THÉORÈME 2.1.2. — *Sous les hypothèses de* 2.1.1, *il existe un entier* $a \geq 1$ *tel que*

$$(T^a - 1)^{i+1} \mid H^i(X_t, \mathbb{Z}) = 0 \text{ pour tout } i \ .$$

2.1.3. Plusieurs démonstrations ont été données de ce théorème. Rappelons brièvement celle de Grothendieck (historiquement la première, à ma connaissance) (cf. (SGA 7 I 3.3)). Utilisant la résolution des singularités de Hironaka, on peut supposer que X est lisse et que la fibre spéciale X_0 est un diviseur à croisements normaux (i.e. que f est donné, au voisinage d'un point de X_0, par $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_1^{e_1} \cdots z_r^{e_r}$, où $(z_1, \ldots, z_n)$ sont des coordonnées locales sur X). Comme f est propre, on dispose de la **suite spectrale des cycles évanescents**

$$E_2^{pq} = H^p(X_0, R^q\Psi(\mathbb{Z})) \Rightarrow H^*(X_t, \mathbb{Z}) \ , \tag{2.1.3.1}$$

qui est T-équivariante (cf. SGA 7 XIV (1.3.3.2))) (rappelons que les faisceaux de cycles évanescents $R^q\Psi(\mathbb{Z})$ sur X_0 sont définis par

$$R^q\Psi(\mathbb{Z}) = i^* R^q \bar{j}_* \mathbb{Z} \ ,$$

où $i : X_0 \to X$ est l'inclusion, $\overline{X}^*$ l'espace déduit de $X^* = X|S^*$ par le changement de base par un revêtement universel $\overline{S}^* \to S^*$, et $\bar{j} : \overline{X}^* \to X$ la flèche canonique). Il suffit donc de prouver qu'il existe un entier $a \geq 1$ tel que $T^a | R^q\Psi(\mathbb{Z}) = Id$ pour tout q. Il suffit de prouver qu'il existe un tel entier localement sur X_0. On peut donc ôter l'hypothèse de propreté sur f, et supposer que X est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}^n$, et que f est donné par $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_1^{e_1} \cdots z_r^{e_r}$. Alors $X_0 = \sum_{i=1}^r e_i D_i$, où D_i est le diviseur $(z_i = 0)$. Montrons que $a = ppcm(e_i)$ convient. Soit $x \in X_0$, et soit $I = \{i \in [1,r] | x \in D_i\}$. Il suffit de montrer que, si $e = pgcd(e_i, i \in I)$, alors

$$T^e | R^q\Psi(\mathbb{Z})_x = Id$$

pour tout q. Quitte à remplacer z_i, pour $i \in I$, par $u_i z_i$, où u_i est une unité convenable, on peut supposer que f, au voisinage de x, est donné par $z \mapsto \prod_{i \in I} z_i^{e_i}$. Changeant les notations, on peut supposer que $x = 0$ et $I = [1,r]$. Appliquant la définition des cycles évanescents, on trouve que

$$R^q\Psi(\mathbb{Z})_0 = H^q(F, \mathbb{Z}) \ ,$$

où F est le sous-espace analytique de $\mathbb{C}^{*r} \times$ (Im $u > 0$) d'équation

$$z_1^{e_1} \cdots z_r^{e_r} = \exp(2\pi i u)$$

la monodromie T agissant par $u \mapsto u + 1$. Cet espace est réunion disjointe des F_k $(0 \leq k < e - 1)$ d'équations

$$z_1^{e'_1} \cdots z_r^{e'_r} = \zeta^k \exp(2 \ \pi i u/e)$$

où $\zeta = \exp(2\pi i/e)$, $e'_i = e_i/e$. Il s'identifie (analytiquement) à $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) \times F_0$, et (homotopiquement) à $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) \times V$, où V est le tore défini par la suite exacte

$$1 \to V \to (S^1)^r \to S^1 \to 1$$
$$(z_i) \mapsto \Pi z_i^{e'_i} \ ,$$

la monodromie agissant par $n \mapsto n + 1$ sur le facteur $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. En particulier, $T^e = Id$ sur $H^*(F, \mathbb{Z})$. On trouve plus précisément :

$$\begin{aligned} & R^q\Psi(\mathbb{Z})_0 = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}] \otimes H^q(V, \mathbb{Z}) \ , \\ (2.1.3.2) \qquad & H^q(V, \mathbb{Z}) = \Lambda^q H^1(V, \mathbb{Z}) \\ & H^1(V, \mathbb{Z}) = \mathrm{Coker}(\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^r \ , \ 1 \mapsto (e'_i)) \end{aligned}$$

(T agissant par $n \mapsto n + 1$ sur $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$).

Par les théorèmes de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie classique, ainsi qu'entre groupe fondamental algébrique et groupe fondamental classique, on déduit de 2.1.2 :

COROLLAIRE 2.1.4. — *Soit K le corps des fractions du hensélisé, en un point fermé, d'une courbe lisse sur $\mathbb{C}$ (voire un corps de caractéristique nulle), et soit X un schéma propre et lisse sur K. Avec les notations de* 1.1, *il existe alors un sous-groupe ouvert I_1 du groupe d'inertie I ($\simeq \mathbb{Z}^\wedge(1)$) tel que l'on ait, pour tout $g \in I_1$ et tout i,*

$$(\rho(g)-1)^{i+1}|H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell) = 0$$

(où ρ est la représentation de monodromie locale, cf. 1.3*).*

Ce résultat est à la fois moins général et plus précis que 1.4. Nous verrons plus loin que l'exposant $i+1$ peut être amélioré. Nous examinerons d'autre part, au n° 3, les variantes de ceci en caractéristique mixte ou positive.

2.1.5. Soit S comme en 2.1.1, et soit $f : X \to S$ un morphisme d'espaces analytiques, lisse hors de 0, et ayant **réduction semi-stable** en 0 (i.e. donné, au voisinage de tout point de X_0, par $(z_1, \cdots, z_n) \mapsto z_1 \cdots z_m$, où $(z_1, \cdots, z_n)$ sont des coordonnées locales sur X, X étant lisse). La fibre spéciale $Y = X_0$ est alors un diviseur à croisements normaux réduit. Supposons de plus que ce diviseur soit globalement somme de diviseurs lisses Y_i $(1 \leq i \leq r)$ (se coupant transversalement). On peut alors expliciter les faisceaux de cycles évanescents $R^q\Psi(\mathbb{Z})$ globalement sur Y (et non plus seulement ponctuellement, comme en (2.1.3.2)) : on a des isomorphismes canoniques :

$$\text{(2.1.5.1)}\quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & R^0\Psi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \\ \text{(ii)} & R^q\Psi(\mathbb{Z}) = \Lambda^q R^1\Psi(\mathbb{Z}) \quad (q > 0) \\ \text{(iii)} & R^1\Psi(\mathbb{Z}) = \operatorname{Coker}(\mathbb{Z}_Y \to \oplus_{1\leq i\leq r}\mathbb{Z}_{Y_i}\ ,\ n \mapsto (n|Y_i))(-1)\ , \end{array}$$

où $(-)(k)$ désigne le "twist à la Tate" habituel en théorie de Hodge, $(-) \otimes (2\pi i)^k\mathbb{Z}$.

Il résulte immédiatement de (2.1.3.2) que les flèches naturelles $\mathbb{Z} \to R^0\Psi(\mathbb{Z})$, $\Lambda^q R^1\Psi(\mathbb{Z}) \to R^q\Psi(\mathbb{Z})$ sont des isomorphismes. Donnons la définition de l'isomorphisme (iii). Notons $j_m : X - Y_m \to X$ l'inclusion. On sait que la classe $cl(Y_m) \in H^2_{Y_m}(X, \mathbb{Z})(1)$ du diviseur Y_m fournit (par pureté) un isomorphisme

$$\text{(a)}\qquad \mathbb{Z}_{Y_m} \xrightarrow{\sim} R^1 j_{m*}\mathbb{Z}(1)\ .$$

Si $j : X - Y = X^* \to X$ est l'inclusion et $\bar{j} : \overline{X}^* \to X$ est la flèche définie en (2.1.3.1), on a des flèches naturelles

$$\text{(b)}\qquad R^1 j_{m*}\mathbb{Z}(1) \to R^1 j_*\mathbb{Z}(1) \to R^1 \bar{j}_*\mathbb{Z}(1)\ .$$

De (a) et (b) on déduit une flèche de faisceaux sur Y

(c) $$\bigoplus_{1\leq m\leq r} \mathbb{Z}_{Y_m} \to R^1\Psi(\mathbb{Z})(1)\ .$$

Il découle de (2.1.3.2) que (c) identifie $(\oplus \mathbb{Z}_{Y_m})/\mathbb{Z}$ à $R^1\Psi(\mathbb{Z})(1)$: c'est l'isomorphisme (iii).

Pour $q \geq 1$, on a $\Lambda^q(\oplus \mathbb{Z}_{Y_i}) = \bigoplus_{i_1<\cdots<i_q} \mathbb{Z}_{Y_{i_1}\cap\cdots\cap Y_{i_q}}$. Le produit extérieur gauche par $v = (1, \ldots, 1)$ fournit une suite exacte

(2.1.5.2) $$\begin{gathered} 0 \to \mathbb{Z}_Y \xrightarrow{v} \oplus \mathbb{Z}_{Y_i} \xrightarrow{v\wedge} \bigoplus_{ij} \mathbb{Z}_{Y_i\cap Y_j} \xrightarrow{v\wedge} \cdots \to \\ \bigoplus_{i_1<\cdots<i_q} \mathbb{Z}_{Y_{i_1}\cap\cdots\cap Y_{i_q}} \xrightarrow{v\wedge} \cdots\ , \end{gathered}$$

qui n'est autre que le complexe de Čech augmenté du recouvrement de Y par les Y_i. Si l'on note $C^\cdot$ ce complexe ($C^0 = \oplus \mathbb{Z}_{Y_i}$), on a donc, d'après (2.1.5.1) (ii) :

(2.1.5.3) $$R^q\Psi(\mathbb{Z})(q) = \mathrm{Coker}(C^{q-2} \to C^{q-1}) = \mathrm{Ker}(C^q \to C^{q+1}) \quad (q \geq 1).$$

On peut encore interpréter ces formules de la façon suivante. Les flèches (a) ci-dessus donnent un isomorphisme

$$\bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathbb{Z}_{Y_i} \xrightarrow{\sim} R^1 j_*\mathbb{Z}(1)$$

(dont (c) se déduit par composition avec $R^1 j_*\mathbb{Z}(1) \to R^1\Psi(\mathbb{Z})(1)$). On en déduit, pour $q \geq 1$, un isomorphisme

(2.1.5.4) $$C^{q-1} \xrightarrow{\sim} R^q j_*\mathbb{Z}(q)$$

(avec la notation de (2.1.5.3)). Pour éviter des confusions, notons G plutôt que $\mathbb{Z}$, le groupe fondamental de S^*. Le complexe $R\Psi(\mathbb{Z})$ est sous-jacent à un objet (noté encore $R\Psi(\mathbb{Z})$) de $D^+(Y, \mathbb{Z}[G])$, et l'on a

(2.1.5.5) $$R\Gamma(G, R\Psi(\mathbb{Z})) = Rj_*\mathbb{Z}|Y\ .$$

En particulier, on a une suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(G, R^q\Psi(\mathbb{Z})) \Rightarrow R^* j_*(\mathbb{Z})|Y\ ,$$

qui fournit des suites exactes courtes

$$(2.1.5.6) \quad 0 \to H^1(G, R^{q-1}\Psi(\mathbb{Z})(q)) \to R^q j_*\mathbb{Z}(q)|Y \to H^0(G, R^q\Psi(\mathbb{Z})) \to 0$$

(G étant de dimension cohomologique 1). Or les hypothèses sur f entraînent, d'après (2.1.3.2), que G opère trivialement sur les faisceaux $R^i\Psi(\mathbb{Z})$. On a donc

$$H^0(G, R^q\Psi(\mathbb{Z})) = R^q\Psi(\mathbb{Z}) \ ,$$

et un isomorphisme canonique

$$H^1(G, R^{q-1}\Psi(\mathbb{Z}))(q) = R^{q-1}\Psi(\mathbb{Z})(q-1)$$

(déduit de $H^1(G,\mathbb{Z}) = H^1(S^*,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(-1)$). La suite (2.1.5.6) se récrit donc

$$(2.1.5.7) \qquad 0 \to R^{q-1}\Psi(\mathbb{Z})(q-1) \to R^q j_*\mathbb{Z}(q)|Y \to R^q\Psi(\mathbb{Z})(q) \to 0$$

compte tenu de (2.1.5.4), c'est (à un signe près peut-être) la suite déduite de (2.1.5.3). Cette interprétation est due à Rapoport-Zink [19], nous y reviendrons au n° 3.6.

2.2. **Monodromie locale et connexion de Gauss-Manin.**

2.2.1. Soit $f : X \to S$ comme en 2.1.1. On suppose que X est lisse sur $\mathbb{C}$, et que la fibre spéciale $Y = X_0$ est un diviseur à croisements normaux (non nécessairement réduit). Pour tout q, le système local $R^q f_*(\mathbb{C}) = R^q f_*(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$, de fibre $H^q(X_t, \mathbb{C})$ en $t \in S^*$, est le sous-faisceau des sections horizontales de la connexion de Gauss-Manin ∇ sur $R^q f_*\Omega^{\cdot}_{X^*/S^*}$ (où $X^* = X - Y$). Comme le montre Steenbrink dans [27], la géométrie de la situation permet d'exhiber un "prolongement canonique" (au sens de Deligne-Manin, cf. [6]) de cette connexion, et par suite de donner une autre description de la monodromie T de $H^q(X_t, \mathbb{C})$.

Notons $\omega^{\cdot}_X = \Omega^{\cdot}_X(\log Y)$ le complexe de de Rham de X (sur $\mathbb{C}$) à pôles logarithmiques le long de Y, et de même $\omega^{\cdot}_S = \Omega^{\cdot}_S(\log 0)$ celui de S à pôles logarithmiques le long de 0 ([6], [7]). Le $\mathcal{O}_X$-module

$$(2.2.1.1) \qquad \omega^1_{X/S} := \omega^1_X/(\mathrm{Im}\ f^* : \omega^1_S \to \omega^1_X)$$

(noté $\Omega^1_{X/S}\ (\log Y)$ dans [27]) est localement libre de type fini (admettant localement pour base $dz_1/z_1, \ldots, dz_r/z_r$, $dz_{r+1}, \ldots, dz_n$ avec la relation $\Sigma e_i dz_i/z_i = 0$, au voisinage d'un point de Y où Y a pour équation $z_1^{e_1} \cdots z_r^{e_r} = 0$ dans un système de coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$). La différentielle de $\omega_X^{\cdot}$ donne, par passage au quotient, une différentielle sur $\omega_{X/S}^{\cdot} := \Lambda^{\cdot}\omega_{X/S}^1$, et l'on a une suite exacte de complexes

$$0 \to \omega_S^1 \otimes \omega_{X/S}^{\cdot-1} \to \omega_X^{\cdot} \to \omega_{X/S}^{\cdot} \to 0 \ , \tag{2.2.1.2}$$

(où la flèche de gauche est $a \otimes b \mapsto f^*a \wedge b$). L'opérateur bord qui s'en déduit,

$$\nabla : R^q f_* \omega_{X/S}^{\cdot} \to \omega_S^1 \otimes R^q f_* \omega_{X/S}^{\cdot} \ , \tag{2.2.1.3}$$

prolonge la connexion de Gauss-Manin (cf. [N.M. Katz, The regularity theorem in algebraic geometry, Actes Congrès Int. Math. 1970, tome 1, 437-443, Gauthier-Villars, 1971]). Steenbrink prouve le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2.2 [27, 2.18, 2.20]. — (a) *Les faisceaux $R^q f_* \omega_{X/S}^{\cdot}$ sont localement libres de type fini, de formation compatible à tout changement de base ; en particulier,*

$$R^q f_* \omega_{X/S}^{\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{C}_{\{0\}} \xrightarrow{\sim} H^q(Y, \omega_Y^{\cdot}) \ ,$$

où l'on a posé

$$\omega_Y^{\cdot} := \omega_{X/S}^{\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{C}_{\{0\}} \ . \tag{2.2.2.1}$$

(b) *Soit N le résidu en* 0 *de la connexion* (2.2.1.3). *Alors, si α est une valeur propre de N, on a $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $0 \leq \alpha < 1$.*

Le fibré vectoriel $R^q f_* \omega_{X/S}^{\cdot}$, muni de ∇ (2.2.1.3), est donc le prolongement canonique de $R^q f_* \Omega_{X^*/S^*}^{\cdot}$, muni de la connexion de Gauss-Manin, au sens de Deligne [6, II 5.4] (relativement au choix (II 5.3.1) de τ). D'après [6, II 1.17] et [6, II 5.6], il en résulte :

COROLLAIRE 2.2.3. — (a) *Les automorphismes de monodromie T_t de $H^q(X_t, \mathbb{C})$ ($t \in S^*$) sont les fibres d'un automorphisme T du fibré $R^q f_* \omega_{X/S}^{\cdot}$, dont la fibre en* 0 *est donnée par*

$$T_0 = \exp(-2\pi i N)$$

(avec N comme en 2.2.2(*b*)*).*

(b) *Si l'on identifie $H^q(X_t, \mathbb{C})$ et $R^q f_* \omega_{X/S}^{\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{C}_{\{0\}}$ (= $H^q(Y, \omega_Y^{\cdot})$ d'après* 2.2.2(*a*)*) à un même espace vectoriel V, T_t et T_0 sont conjugués dans $GL(V)$.*

Compte tenu de 2.2.2 (b), cet énoncé établit à nouveau la quasi-unipotence de T_t.

2.2.4. D'après Deligne ([6] ou [7]), le complexe $\omega^{\cdot}_X$ "calcule" $Rj_*\mathbb{C}$, i.e. on a un isomorphisme

$$\omega^{\cdot}_X \xrightarrow{\sim} Rj_*\mathbb{C} \quad (\text{dans } D(X,\mathbb{C})). \tag{2.2.4.0}$$

Steenbrink déduit 2.2.2 d'un résultat plus fin, selon lequel le complexe $\omega^{\cdot}_Y$ (2.2.2.1) calcule $R\Psi(\mathbb{C})$ (dans $D(Y,\mathbb{C})$). Plus précisément, choisissons une uniformisante $t : S \to \mathbb{C}$, un revêtement universel $p : \overline{S}^* \to S^*$, et un logarithme, i.e. une fonction $\log t$ sur $\overline{S}^*$ telle que $\exp(\log t) = p^*t$. Steenbrink construit un isomorphisme dans $D(Y,\mathbb{C})$ (dépendant de ces choix)

$$\alpha_t : \omega^{\cdot}_Y \xrightarrow{\sim} R\Psi(\mathbb{C}) \; . \tag{2.2.4.1}$$

L'homomorphisme de degré 1 déduit de la suite exacte (2.2.1.2)

$$\omega^{\cdot}_{X/S} \to \omega^1_S \otimes \omega^{\cdot}_{X/S}$$

donne, par composition avec le résidu en 0, $\mathrm{Res}_0 : \omega^1_S \to \mathbb{C}_{\{0\}}$, un homomorphisme

$$N : \omega^{\cdot}_Y \to \omega^{\cdot}_Y \tag{2.2.4.2}$$

de $D(Y,\mathbb{C})$. Steenbrink montre de plus (cf. 2.3.3) que l'automorphisme de monodromie T de $R\Psi(\mathbb{C})$ correspond, par (2.2.4.1), à $\exp(-2\pi i N)$. L'assertion (a) de 2.2.2 découle de (2.2.4.1) et de l'isomorphisme $H^*(Y, R\Psi(\mathbb{C})) = H^*(X_t,\mathbb{C})$, et, par un calcul explicite de N sur $\mathcal{H}^*\omega^{\cdot}_Y$, la formule $T = \exp(-2\pi i N)$ entraîne (b).

Pour la dépendance de (2.2.4.1) par rapport aux choix, voir [27, 4.24] (du moins dans le cas où Y est réduit).

Expliquons la définition de (2.2.4.1), en nous plaçant, pour simplifier, dans le cas où Y est réduit. Notons i^{-1} le foncteur image inverse par $i : Y \to X$ pour les faisceaux abéliens. Il résulte de la définition de $R\Psi(\mathbb{C})$ que l'on a

$$R\Psi(\mathbb{C}) = i^{-1}\bar{j}_*\Omega^{\cdot}_{\overline{X}^*} \quad (\text{dans } D(Y,\mathbb{C})) \tag{a}$$

(avec les notations de (2.1.3 .1)). Le complexe $i^{-1}\omega^{\cdot}_X$ $(= i^{-1}\Omega^{\cdot}_X(\log Y))$ s'identifie de façon naturelle à un sous-complexe de $i^{-1}\bar{j}_*\Omega^{\cdot}_{\overline{X}^*}$. Plus généralement, $i^{-1}\bar{j}_*\Omega^{\cdot}_{\overline{X}^*}$ contient le sous-complexe $i^{-1}\omega^{\cdot}_X[\log t]$ formé des sections s'écrivant localement $\sum_{0\le k\le s}(\log t)^k\omega_k$, où ω_k est une section de $\omega^{\cdot}_X$. Steenbrink montre que l'inclusion

$$i^{-1}\omega^{\cdot}_X[\log t] \to i^{-1}\bar{j}_*\Omega^{\cdot}_{\overline{X}^*} \tag{b}$$

et l'homomorphisme

$$\text{(c)} \qquad i^{-1}\omega^{\cdot}_X[\log t] \longrightarrow \omega^{\cdot}_Y$$

associant à $\sum_{0\leq k\leq s}(\log t)^k\omega_k$ la classe de ω_0 dans $\omega^{\cdot}_Y$ sont des quasi-isomorphismes (pour (c), voir la remarque suivant 2.3.2.5 ci-dessous). L'isomorphisme (2.2.4.1) est défini par (b) et (c), compte tenu de (a).

Signalons l'interprétation suivante de ces isomorphismes, due à Navarro-Aznar (communication personnelle). Le complexe $i^{-1}\omega^{\cdot}_X[\log t]$ est un module différentiel gradué sur l'algèbre différentielle graduée $\omega^{\cdot}_S$. On peut l'écrire comme un produit tensoriel

$$i^{-1}\omega^{\cdot}_X[\log\ t] = i^{-1}(\omega^{\cdot}_S[\log\ t] \otimes_{\omega^{\cdot}_S} \omega^{\cdot}_X).$$

Notons $i_0 : \{0\} \to S$ et $j_0 : S^* \to S$ les inclusions. Le $\omega^{\cdot}_S$-module différentiel gradué $i_0^{-1}\omega^{\cdot}_S[\log t]$ est une résolution de $\mathbb{C}_{\{0\}}$ (cas particulier de (c)), dont on vérifie facilement qu'elle est acyclique pour le foncteur $\otimes_{\omega^{\cdot}_S}$. On a donc

$$i^{-1}\omega^{\cdot}_X[\log\ t] = \mathbb{C}_{\{0\}} \overset{L}{\otimes}_{\omega^{\cdot}_S} \omega^{\cdot}_X\ .$$

Compte tenu de (a) et (b), et comme $\omega^{\cdot}_X$ (resp. $\omega^{\cdot}_S$) calcule $Rj_*\mathbb{C}$ (resp. $Rj_{0*}\mathbb{C}$), on peut récrire cette formule (toujours dans le cas où Y est réduit) sous la forme plus frappante

$$\text{(2.2.4.3)} \qquad R\Psi(\mathbb{C}) = \mathbb{C}_{\{0\}} \overset{L}{\otimes}_{Rj_{0*}\mathbb{C}} Rj_*\mathbb{C}\ ,$$

qu'on peut considérer comme une sorte d'inversion de (2.1.5.5).

2.3. Complexe de Steenbrink et structure de Hodge limite.

2.3.1. Soit S comme en 2.1.1. On suppose, dans ce numéro, que $f : X \to S$ est projectif, avec X lisse sur $\mathbb{C}$, et que f est lisse hors de 0, de dimension relative d, et a réduction semi-stable en 0, la fibre spéciale $Y = X_0$ étant somme de diviseurs lisses Y_i. L'un des résultats principaux de Steenbrink ([27], complété par [28]) est que $R\Psi(\mathbb{Z})$ est sous-jacent à un complexe de Hodge mixte cohomologique sur Y, $(R\Psi(\mathbb{Z}), (R\Psi(\mathbb{Q}), W), (R\Psi(\mathbb{C}), W, F))$ au sens de Deligne [10]. En particulier, les groupes de cohomologie $H^n(Y, R\Psi(\mathbb{Z}))$ sont munis de structures de Hodge mixtes naturelles. De plus, l'opérateur de monodromie T est unipotent, et $N := (-1/2\pi i)\log T$ est un morphisme de structures de Hodge mixtes $H^n(Y, R\Psi(\mathbb{Q})) \to H^n(Y, R\Psi(\mathbb{Q}))(-1)$. Ces résultats avaient été annoncés par Deligne dans (P. Deligne, Théorie de Hodge, I, Actes, Cong. int. math., I, Gauthier-Villars (1971), 425-430). La théorie de

Morihiko Saito [20], [21] en offre une meilleure formulation : $R\Psi(\mathbb{Z})[d]$ est sous-jacent à un module de Hodge mixte sur Y (en particulier, $R\Psi(\mathbb{Q})[d]$ est un faisceau pervers), dont N est (au twist près) un endomorphisme nilpotent.

2.3.2. Nous nous bornerons à esquisser la construction de Steenbrink [27] d'un représentant de $(R\Psi(\mathbb{C}), W, F)$. Pour celle de $(R\Psi(\mathbb{Q}), W)$, qui n'est pas traitée correctement dans [27], nous renvoyons à [28] (où la construction est inspirée de Rapoport-Zink [19]). On suppose choisis comme en 2.2.4, une uniformisante t et un logarithme $\log t$. L'observation de base est la suivante (cf. [27, 4.6] - qui, à la lettre, n'a pas de sens $\cdots$) :

LEMME 2.3.2.1. — *Soient $i : Y \to X$ l'inclusion, et $\theta = f^*dt/t$. La suite de complexes*

$$i^{-1}\omega^{\cdot}_X[-1] \xrightarrow{\theta\wedge} i^{-1}\omega^{\cdot}_X \xrightarrow{\theta\wedge} i^{-1}\omega^{\cdot}_X[1]$$

est exacte, ainsi que la suite de faisceaux qui s'en déduit par application de $\mathcal{H}^q$.

La vérification de la première assertion est immédiate (complexe de Koszul). La seconde résulte du calcul standard des $\mathcal{H}^q\omega^{\cdot}_X = R^qj_*\mathbb{C}$ (où $j : X - Y \to X$ est l'inclusion), cf. (2.1.5.5) et [7, 3.1.8].

La suite exacte de 2.3.2.1 définit un bicomplexe

$$M = (\cdots \to i^{-1}\omega^{\cdot}_X[-1] \xrightarrow{d''} i^{-1}\omega^{\cdot}_X \xrightarrow{d''} i^{-1}\omega^{\cdot}_X[1] \to \cdots),$$

de différentielle *verticale* d'' déduite de θ, dont les colonnes sont acycliques. Ce complexe est concentré dans la bande oblique $0 \leq i + j \leq d + 1 = \dim X$ (et mal placé, car sur une diagonale $i + j = n$, pour $0 \leq n \leq d + 1$, toutes les composantes sont non nulles). Certains complexes déduits de M par troncation sont particulièrement intéressants. Nous noterons $\sigma_{\leq a}$, $\sigma_{\geq a}$ les troncations naïves, $\tau_{\leq a}$, $\tau_{\geq a}$ les troncations canoniques (si L est un complexe, $\sigma_{\leq a}L = (\cdots \to L^a \to 0)$, $\sigma_{\geq a}L = (0 \to L^a \to \cdots)$, $\tau_{\leq a}L = (\cdots \to L^{a-1} \to Z^a \to 0)$, $\tau_{\geq a}L = (0 \to L^a/B^a \to L^{a+1} \to \cdots)$). Dans le cas d'un bicomplexe, si t est une troncation, nous noterons t^{hor} (resp. $t^{|}$) la troncation relative à la différentielle horizontale (resp. verticale). Posons

$$M' = \tau^{\mathrm{hor}}_{\leq d}\sigma^{|}_{\leq 0}M \ , \ M'' = \sigma^{|}_{\geq 1}\tau^{\mathrm{hor}}_{\geq 0}M)[0, 1] \tag{2.3.2.2}$$

(où $[p, q]$ désigne le décalage pour les bicomplexes). Par exemple, si $d = 1$, M

est le bicomplexe

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} & \cdots & & & & & & & \\ 0 \to \mathcal{O} \to & \omega_X^1 \to & \omega_X^2 \to & 0 & & & & & \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & & \\ & 0 \to & \mathcal{O} \to & \omega_X^1 \to & \omega_X^2 \to & 0 & & & \\ & & & \uparrow & \uparrow & & & & \\ & & & 0 \to & \mathcal{O} \to & \omega_X^1 \to & \omega_X^2 \to 0 & & \\ & & & & & \cdots & & & \end{array}\right] \leftarrow \text{ ligne de degré } 0, \mathcal{O} \text{ en degré } 0$$

M' le bicomplexe

$$\left[\begin{array}{ccccc} 0 \to & \mathcal{O} \to & Z\omega_X^1 & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & 0 \to & Z^0 & \to & 0 \\ & & (= \mathbb{C}_{\{0\}}) & & \end{array}\right] \leftarrow \text{ ligne de degré } 0,\ \mathcal{O} \text{ en degré } 0\ ,$$

et M'' le bicomplexe

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \omega_X^2/B^2 & \to & 0 & & \\ & & \uparrow & & & & \\ 0 & \to & \omega_X^1/B^1 & \to & \omega_X^2 & \to & 0 \end{array}\right] \leftarrow \text{ ligne de degré } 0,\ \omega_X^1/B^1 \text{ en degré } 0$$

(on a omis le i^{-1} pour abréger). On a des homomorphismes naturels de bicomplexes

(2.3.2.3) $$M' \to M''\ ,$$

induit par $d'' : M^{\cdot 0} \to M^{\cdot 1}$, et

(2.3.2.4) $$M' \to \omega_Y^{\cdot}\ ,$$

induit par $\tau_{\leq d}\omega_X^{\cdot} \to \omega_Y^{\cdot}$.

LEMME 2.3.2.5. — *Les morphismes* (2.3.2.3) *et* (2.3.2.4) *induisent des quasi-isomorphismes sur les complexes simples associés.*

En effet, les colonnes $\mathcal{H}^q_{\mathrm{hor}}$ sont acycliques d'après (2.3.2.1) et le calcul direct des $\mathcal{H}^q\omega_Y^{\cdot}$ (cf. [27, 1.14]).

On peut observer aussi que, pour les mêmes raisons, l'inclusion $M' \to \sigma^{|}_{\leq 0}M$ induit un quasi-isomorphisme sur les complexes simples associés, et que le complexe simple associé à $\sigma^{|}_{\leq 0}M$ n'est autre que le complexe $i^{-1}\omega_X^{\cdot}[\log t]$ considéré en 2.2.4 (b) et (c) : le fait que (c) soit un quasi-isomorphisme découle donc de 2.3.2.5.

Le complexe $\omega_X^{\cdot}$ est muni de la filtration par le poids $0 \subset W_0\omega_X^{\cdot} \subset W_1\omega_X^{\cdot} \subset \cdots$ [7, 3.1.5], et l'on a une inclusion $\tau_{\leq n}\omega_X^{\cdot} \subset W_n\omega_X^{\cdot}$. On sait [7, 3.1.8] que l'identité de $\omega_X^{\cdot}$ donne un quasi-isomorphisme de complexes filtrés

$$(\omega_X^{\cdot}, \tau_{\leq \cdot}) \to (\omega_X^{\cdot}, W_\cdot) \ . \tag{2.3.2.6}$$

On a donc, pour tout n, des quasi-isomorphismes

$$\tau_{\geq n}\omega_X^{\cdot} \leftarrow \omega_X^{\cdot}/\tau_{\leq n-1}\omega_X^{\cdot} \to \omega_X^{\cdot}/W_{n-1}\omega_X^{\cdot} \ . \tag{2.3.2.6$'$}$$

Steenbrink considère le bicomplexe $A = (A^{pq}, d', d'')$ défini par

$$A^{pq} = \omega_X^{p+q+1}/W_q\omega_X^{p+q+1} \ , \tag{2.3.2.7}$$

$$A : \begin{bmatrix} \cdots & \\ \uparrow & \\ (\omega_X^{\cdot}/W_1\omega_X^{\cdot})[2] & \\ \uparrow & \\ (\omega_X^{\cdot}/W_0\omega_X^{\cdot})[1] & \\ & \end{bmatrix} \leftarrow \text{ ligne de degré 0, } \omega_X^1/W_0\omega_X^1 \text{ en degré 0 ,}$$

de différentielle d' (resp. d'') induite par la différentielle extérieure (resp. $\theta_\wedge$) : pour $x \in A^{pq}$, $d'x = (-1)^{q+1}dx$ (d = différentielle extérieure), $d''x = (-1)^p\theta_\wedge x$. Ses lignes sont reliées à celles de M'' par les quasi-isomorphismes (2.3.2.6)$'$: la q-ième ligne de A correspond à $\omega_X^{\cdot}[q]/\tau_{\leq 0}(\omega_X^{\cdot}[q]) \simeq \omega_X^{\cdot}[q]/(\tau_{\leq q}\,\omega_X^{\cdot})[q] \simeq (\tau_{\geq q+1}\omega_X^{\cdot})[q]$. Par construction, A est à support dans Y, et le complexe simple $\mathbf{s}A$ associé à A est une autre "incarnation" de $\omega_Y^{\cdot}$ (donc de $R\Psi(\mathbb{C})$) dans $D(Y, \mathbb{C})$: on a des isomorphismes canoniques de $D(Y, \mathbb{C})$

$$R\Psi(\mathbb{C}) \simeq \omega_Y^{\cdot} \simeq \mathbf{s}A \ . \tag{2.3.2.8}$$

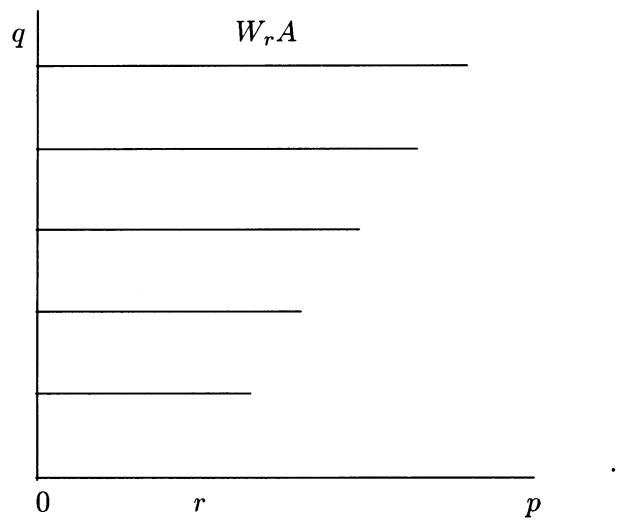
Noter que le bicomplexe A est concentré dans le triangle ($p \geq 0$, $q \geq 0$, $p+q \leq d = \dim Y$) ; par exemple, pour $d=1$, A est le bicomplexe

$$\begin{bmatrix} \omega_X^2/W_1\omega_X^2 & \\ \uparrow & \\ \omega_X^1/W_0\omega_X^1 \to \omega_X^2/W_0\omega_X^2 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ ligne de degré } 0 \ .$$

Steenbrink définit comme suit les filtrations (W, F) sur le bicomplexe A. La filtration (décroissante) F est la filtration par le premier degré : $F^pA = \sigma_{\geq p}^{\text{hor}} A$ ($= A^{\geq p, \cdot}$). La filtration (croissante) W est donnée par

$$W_r A^{pq} = W_{2q+r+1}\omega_X^{p+q+1}/W_q\omega^{p+q+1} \ .$$

La filtration W est une "filtration de monodromie" (voir 2.3.3). Observer que, par (2.3.2.6), la q-ième ligne de W_rA correspond à $\tau_{\leq q+r}(\omega_X^{\cdot}[q])/\tau_{\leq 0}(\omega_X^{\cdot}[q]) = (\tau_{\leq 2q+r}\omega_X^{\cdot})[q]/(\tau_{\leq q}\omega_{XX}^{\cdot})[q] \simeq \tau_{\leq q+r}((\tau_{\geq q+1}\omega_X^{\cdot})[q])$:



Les gradués associés se calculent aisément. Pour W, notant que $\mathrm{gr}_r^W A$ est à différentielle d'' nulle, et tenant compte de (2.2.4.0) et de la remarque précédente, on trouve que $\mathrm{gr}_r^W A$ est cohomologiquement concentré sur la droite $j - i = r$, somme des $R^{r+1+2q}j_*\mathbb{C}$ placés en bidegré $(r+q,q)$, et donc que

$$\mathrm{gr}_r^W \mathrm{s}A = \bigoplus_{\substack{q\geq 0 \\ q+r\geq 0}} R^{r+1+2q}j_*\mathbb{C}[-r-2q] \ . \tag{2.3.2.9}$$

Rappelons que, d'après (2.1.5.4), on a aussi, si $Y = \cup_{1\leq i\leq h} Y_i$,

$$R^m j_*\mathbb{C} = \oplus\ \mathbb{C}_{Y_{i_1}\cap\cdots\cap Y_{i_m}} \ ,$$

somme étendue aux $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq h$. En ce qui concerne F, Steenbrink montre que l'on a

$$\mathrm{gr}_F^p \mathrm{s}A = \omega_Y^p[-p] \ . \tag{2.3.2.10}$$

Il prouve plus précisément que $\theta_\wedge$ induit un morphisme de complexes $\omega_Y^{\cdot} \to A^{\cdot 0}$, et que la suite de complexes

$$0 \to \omega_Y^{\cdot} \xrightarrow{\theta_\wedge} A^{\cdot 0} \xrightarrow{d''} A^{\cdot 1} \xrightarrow{d''} \cdots A^{\cdot q} \xrightarrow{d''} \cdots \tag{2.3.2.11}$$

est exacte.

2.3.3. L'endomorphisme ν de A, de bidegré $(-1,1)$, égal à $(-1)^{p+q+1}$ (projection canonique) sur A^{pq}, commute à d' et d'', donc induit un endomorphisme

$$\nu : \mathrm{s}A \to \mathrm{s}A \ . \tag{2.3.3.1}$$

Notant W (resp. F) la filtration de $\mathrm{s}A$ déduite de la filtration W (resp. F) de A, on a

$$\nu(W_r\mathrm{s}A) \subset W_{r-2}\mathrm{s}A \ , \ \nu(F^n\mathrm{s}A) \subset F^{n-1}\mathrm{s}A \ .$$

On vérifie de plus que, pour $r \geq 0$, ν^r induit un isomorphisme (de complexes)

$$\nu^r : \mathrm{gr}_r^W \mathrm{s}A \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-r}^W \mathrm{s}A \tag{2.3.3.2}$$

de sorte que W est la filtration de monodromie de ν. Steenbrink prouve enfin que, par l'isomorphisme (2.3.2.8), ν correspond à l'endomorphisme $N = \mathrm{Res}_0 \nabla$ (2.2.4.2). En fait, on a les résultats plus précis suivants, qui expriment l'essentiel de la théorie :

THÉORÈME 2.3.4. — *Sous les hypothèses de* 2.3.1, *avec* t *et* $\log t$ *choisis comme en* 2.3.2 :

(a) *Le complexe* $R\Psi(\mathbb{Z}) \in D(Y, \mathbb{Z})$ *est sous-jacent à un complexe de Hodge mixte cohomologique* $(R\Psi(\mathbb{Z}), (R\Psi(\mathbb{Q}), W), (R\Psi(\mathbb{C}), W, F))$ [10, 8.1.6], *dont la composante* $(R\Psi(\mathbb{C}), W, F)$ *est isomorphe à* $(\mathrm{s}A, W, F)$ *dans la catégorie dérivée bifiltrée* $D^+F_2(Y, \mathbb{C})$.

(b) *L'endomorphisme* T *de* $R\Psi(\mathbb{C})$ *est unipotent, et* $-(1/2\pi i)\log T$ *est sous-jacent à un morphisme de complexes de Hodge mixtes*

$$N : R\Psi(\mathbb{Q}) \to R\Psi(\mathbb{Q})(-1) ,$$

dont la composante sur $(R\Psi(\mathbb{C}), W, F)$ *est donnée par* ν (2.3.3.1). *Pour tout* $r \geq 0$, N^r *induit un isomorphisme*

$$N^r : \mathrm{gr}_r^W R\Psi(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-r}^W R\Psi(\mathbb{Q})(-r) .$$

(c) *On a un isomorphisme canonique dans* $D(Y, \mathbb{C})$

$$\mathrm{gr}_F^p R\Psi(\mathbb{C}) \simeq \omega_Y^p[-p] .$$

Rappelons que, comme f est propre et $f|S^*$ lisse, on a (SGA 7 XIV (1.3.3.2)).

$$H^*(Y, R\Psi\Lambda) = H^*(\overline{X}^*, \Lambda) = H^*(X_t, \Lambda)$$

pour tout point $t \in S^*$ (ces identifications étant compatibles à l'action de la monodromie T). De 2.3.4, on déduit donc :

COROLLAIRE 2.3.5. — *Sous les hypothèses de* 2.3.4, *pour tout* n, $H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Z})$ *est muni d'une structure de Hodge mixte, et l'endomorphisme (nilpotent)* $N = (-1/2\pi i)\log T$ *de* $H^n(\overline{X}^*, \mathbb{C})$ *est un morphisme de structures de Hodge mixtes* $H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \to H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q})(-1)$.

On peut considérer cette structure de Hodge mixte comme "limite" des structures de Hodge pures des $H^n(X_s, \mathbb{Z})$, $s \in S^*$, "quand s tend vers 0". Elle dépend des choix de $(t, \log t)$ (le réseau $H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Z})$ et la filtration par le poids W sont fixes, mais la filtration F varie, cf. [27, 4.24] et [24]).

Par la théorie de Hodge mixte, la **suite spectrale des poids**

$$\text{(2.3.6)} \qquad {}_WE_1^{pq} = H^{p+q}(Y, \mathrm{gr}_{-p}^W R\Psi(\mathbb{Q})) \Longrightarrow H^{p+q}(\overline{X}^*, \mathbb{Q})$$

dégénère en E_2, et la **suite spectrale de Hodge**

$$\text{(2.3.7)} \qquad {}_FE_1^{pq} = H^{p+q}(Y, \mathrm{gr}_F^p R\Psi(\mathbb{C})) \Longrightarrow H^{p+q}(\overline{X}^*, \mathbb{C})$$

dégénère en E_1. Les filtrations aboutissements de (2.3.6) et (2.3.7) sont respectivement la filtration par le poids W et la filtration de Hodge F de $H^*(\overline{X}^*)$.

On peut expliciter les termes initiaux de ces suites spectrales. Tout d'abord, la formule (2.3.2.9) se raffine en un isomorphisme de complexes de Hodge

$$\mathrm{gr}_r^W R\Psi(\mathbb{Q}) = \bigoplus_{\substack{q\geq 0\\ r+q\geq 0}} (a_{r+1+2q})_* \mathbb{Q}_{Y^{(r+1+2q)}}(-r-q)[-r-2q] \tag{2.3.8}$$

où

$$Y^{(m)} := \coprod_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq h} Y_{i_1}\cap\cdots\cap Y_{i_m} \ ,$$

et

$$a_m : Y^{(m)} \to Y$$

est la projection. En d'autres termes, $\mathrm{gr}^W R\Psi(\mathbb{Q})$ est le complexe simple associé au complexe double, de différentielles d' et d'' nulles
(2.3.8.1)

$$\begin{tikzcd}
a_{d+1*}\mathbb{Q} & & & & \\
a_{d*}\mathbb{Q} & a_{d+1*}\mathbb{Q}(-1) \arrow[ul, "N"'] & & & \\
\cdots & & & & \\
a_{2*}\mathbb{Q} & a_{3*}\mathbb{Q}(-1) & \cdots & a_{d+1*}\mathbb{Q}(-d+1) & \\
a_{1*}\mathbb{Q} & a_{2*}\mathbb{Q}(-1) \arrow[ul, "N"'] & \cdots & a_{d*}\mathbb{Q}(-d+1) & a_{d+1*}\mathbb{Q}(-d) \arrow[ul, "N"']
\end{tikzcd} \ ;$$

le gr_r est la somme des termes sur la diagonale $j-i=r$; $N : \mathrm{gr}_r \to \mathrm{gr}_{r-2}(-1)$ est donné par les flèches obliques identiques. Par suite, le terme initial de (2.3.6) se récrit

$$_WE_1^{-r,n+r} = \bigoplus_{\substack{q\geq 0\\ r+q\geq 0}} H^{n-r-2q}(Y^{(r+1+2q)},\mathbb{Q})(-r-q) \ . \tag{2.3.9}$$

Il est pur de poids $n+r$. Les poids de $H^n(\overline{X}^*)$ sont donc dans l'intervalle $[n-d, n+d]$. On peut aussi décrire la différentielle d_1 de (2.3.6) : on a $d_1 = d_1' + d_1''$, où d_1' (resp. d_1'') est une somme alternée d'homomorphismes de Gysin (resp. restriction) (cf. [19, 2.10] et [15]). Quant au terme initial de (2.3.7), compte tenu de (2.3.2.10), il est donné par

$$
{}_FE_1^{pq} = H^q(Y, \omega_Y^p) \ . \tag{2.3.10}
$$

Par un argument de comptage, la dégénérescence en E_1 de (2.3.7) entraîne donc :

COROLLAIRE 2.3.11. — *Pour tout* (p,q), *le faisceau* $R^q f_* \omega_{X/S}^p$ *est localement libre de type fini, et commute à tout changement de base. Si* h^{pq} *désigne son rang, on a*

$$
h^{pq} = \dim \mathrm{gr}_F^p H^{p+q}(\overline{X}^*, \mathbb{C}) = \dim H^q(X_t, \Omega_{X_t}^p) = \dim H^q(Y, \omega_Y^p) \quad (t \in S^*) \ .
$$

Le fait que N soit un morphisme de structures de Hodge mixtes fournit d'autre part une borne pour son exposant de nilpotence, meilleure que 2.1.4.

COROLLAIRE 2.3.12. — *Posons*

$$
h_n = \sup\{b - a \mid \forall i \in [a,b], h^{i,n-i} \neq 0\} \ ,
$$

où les h^{pq} *sont les nombres de Hodge considérés en* 2.3.11. *Alors*

$$
N^{h_n+1} | H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) = 0 \ .
$$

Cela résulte en effet de ce qu'il existe une bigraduation $H^n(\overline{X}^*, \mathbb{C}) = \oplus H^{pq}$ telle que $N(H^{pq}) \subset H^{p-1,q-1}$ et $\Sigma_q \dim H^{pq} = h^{p,n-p}$, cf. [27, 3.2].

2.4. **Poids et monodromie.**

2.4.1. On reprend les hypothèses de 2.3.4. Le fait qu'on ait supposé f non seulement propre, mais projectif, ne sert pas réellement dans la construction de la structure de Hodge limite : il suffirait de supposer Y algébrisable. Par contre, la projectivité de f intervient de manière essentielle [1] (par le biais de polarisations) dans la démonstration du résultat suivant :

THÉORÈME 2.4.2. — *Pour tout* $r \geq 0$ *et tout* n, $N^r : H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \to H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q})(-r)$ *induit un isomorphisme de structures de Hodge (pures)*

$$
N^r : \mathrm{gr}_{n+r}^W H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{n-r}^W H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q})(-r) \ .
$$

[1] Voir cependant 2.4.7 (b)

En d'autres termes, la filtration par le poids sur H^n coïncide avec la **filtration de monodromie** (centrée en n), caractérisée par $N(W_r) \subset W_{r-2}$ et $N^r : \mathrm{gr}^W_{n+r} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^W_{n-r}$.

Une preuve erronée de 2.4.2 est donnée par Steenbrink dans [27, 5.9]. Une correction, également erronée, est apportée par El Zein dans [14]. A notre connaissance, la seule démonstration publiée correcte est celle de Morihiko Saito [20, 4.2.2]; à quelques détails de rédaction près, celle-ci est reprise par Guillen et Navarro Aznar [15]. Morihiko Saito signale (loc. cit.) que Deligne lui a indiqué une autre démonstration de 2.4.2.

2.4.3. Indiquons seulement où est la difficulté. D'après 2.3.4 (b), N induit un endomorphisme de la suite spectrale des poids (2.3.6), et, pour $r \geq 0$, N^r est un isomorphisme de ${}_WE_1^{-r,n+r}$ sur ${}_WE_1^{r,n-r}$. Comme ${}_WE_2 = {}_WE_\infty$, il suffit donc de prouver que N^r induit encore un isomorphisme de ${}_WE_2^{-r,n+r}$ sur ${}_WE_2^{r,n-r}$. Mais N^r n'est pas un automorphisme du terme E_1 : dans le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccc}
E_1^{-r-1,n+r} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{-r,n+r} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{-r+1,n+r} \\
{\scriptstyle N^r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N^r} & & \downarrow{\scriptstyle N^r} \\
E_1^{r-1,n+r} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{r,n+r} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{r+1,n+r}
\end{array} ,$$

seule la flèche verticale médiane est un isomorphisme, celle de droite (resp. gauche) n'est que surjective (resp. injective). Pour analyser E_2, il est commode (cf. (2.3.8.1)) de considérer E_1 comme le complexe simple $\oplus C_r$ ($= \oplus C^{-r}$) associé au bicomplexe $\oplus C_i^j$ ($= \oplus C^{-i,j}$),

$$(2.4.3.1) \qquad \begin{aligned} C_r &= \oplus C_{r+q}^q \qquad (q \geq 0, r+q \geq 0) \\ C_{r+q}^q &= H^*(Y^{(r+1+2q)}, \mathbb{Q})(-r-q) , \end{aligned}$$

avec les notations de (2.3.9), la différentielle $d_1' : C_i^j \to C_{i-1}^j$ (resp. $d_1'' : C_i^j \to C_i^{j+1}$) étant "de type Gysin" (resp. "Čech"). Comme $N : C_i^j \xrightarrow{\sim} C_{i-1}^{j+1}$ $(i-1 \geq 0, j \geq 0)$, la décomposition (2.4.3.1) s'interprète d'ailleurs comme une décomposition primitive de l'espace vectoriel gradué C sous l'opérateur (nilpotent) N :

$$C_{r+q}^q = N^r PC_{r+2q} , \quad PC_{r+2q} = C_{r+2q}^0 ,$$

où PC_j est la partie primitive $\mathrm{Ker}\, N^{j+1} \subset C_j$. L'hypothèse de projectivité sur f permet de construire un opérateur de Lefschetz $L : C_i^j \to C_{i+1}^{j-1}$, commutant à N et d, et un accouplement $<,>: C \times C \to \mathbb{Q}(-d)$ ($d = \dim Y$), ayant certaines propriétés de positivité, et pour lequel d, L, N sont (au signe près) des dérivations. M. Saito en déduit formellement que la cohomologie $\oplus H^r(C)$ du complexe $(C, d = d' + d'')$ admet une décomposition primitive analogue à (2.4.3.1), donc en particulier que $N^r : H^{-r}(C) \xrightarrow{\sim} H^r(C)$.

Il prouve également, à partir de là, le théorème de dégénérescence suivant [23] :

THÉORÈME 2.4.4. — *Sous les hypothèses de 2.3.4, la suite spectrale des cycles évanescents*

$$(2.4.4.1)\quad E_2^{pq} = H^p(Y, R^q\Psi(\mathbb{Q})) \Longrightarrow H^{p+q}(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \quad (= H^{p+q}(X_t, \mathbb{Q}), t \in S^*)$$

dégénère en E_3, et la filtration aboutissement est définie par les noyaux des itérés de N : $F^{n-p}H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) = \operatorname{Ker} N^{p+1}$.

A un renumérotage près, cette suite spectrale coïncide avec celle définie par la filtration canonique $\tau_{\leq i}$ de $R\Psi(\mathbb{Q})$:

$$(2.4.4.2)\quad E_1^{-k,n+k} = H^n(Y, \operatorname{gr}_k^\tau R\Psi(\mathbb{Q})) = H^n(Y, R^k\Psi(\mathbb{Q})) \Longrightarrow H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) .$$

Il résulte aisément de 2.3.2.1 et (2.3.2.6) que le quasi-isomorphisme $\omega_Y^{\cdot} \to \mathbf{s}A$ déduit de (2.3.2.11) définit des quasi-isomorphismes filtrés

$$(\omega_Y^{\cdot}, \tau_\leq) \to (\mathbf{s}A, \tau_\leq^{\text{hor}}) \to (\mathbf{s}A, K) ,$$

où $\tau_{\leq r}^{\text{hor}}$ (resp. K_r) est la filtration obtenue en appliquant $\tau_{\leq r}$ (resp. W_{r+q+1}) à la q-ième ligne de A. Or on a

$$(2.4.4.3)\qquad K_rA = \operatorname{Ker} N^{r+1} : A \to A ,$$

ce qui explique (mais ne démontre pas) la deuxième assertion de 2.4.4. Celle-ci avait été vérifiée, antérieurement à [23], par Zucker [29].

Un cas particulier de 2.4.4 est le **théorème du cycle invariant** (cf. [5] et [2, 6.2.9]) :

COROLLAIRE 2.4.5. — *Sous les hypothèses de 2.4.4, la suite*

$$H^n(Y, \mathbb{Q}) \xrightarrow{sp} H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \xrightarrow{T-1} H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) ,$$

où sp est le morphisme de spécialisation, est exacte pour tout n.

(La flèche de spécialisation est l'homomorphisme latéral $E_2^{n,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{n,0} \subset H^n$ de la suite spectrale (2.4.4.1).)

Exemple 2.4.6 : Si $d = 1$ (i.e. Y est une courbe), la suite spectrale (2.4.4.1) se réduit à la suite exacte de spécialisation définie par le triangle $\mathbb{Q} \to R\Psi(\mathbb{Q}) \to R\Phi(\mathbb{Q})$ (SGA 7 XIV 1.3),

$$(*)\quad 0 \to H^1(Y,\mathbb{Q}) \to H^1(\overline{X}^*,\mathbb{Q}) \to \bigoplus_{x\in Y^{(2)}} R^1\Psi(\mathbb{Q})_x \to H^2(Y,\mathbb{Q}) \to H^2(\overline{X}^*,\mathbb{Q}) \to 0$$

($Y^{(2)}$ est l'ensemble des points doubles de Y, et $R^1\Psi(\mathbb{Q})_x \simeq \mathbb{Q}$). Dans des bases duales $(\delta'_x), (\delta_x) (x \in Y^{(2)})$ de $H^0(Y^{(2)},\mathbb{Q}) \simeq \oplus R^1\Psi(\mathbb{Q})_x$ et $H^0(Y^{(2)},\mathbb{Q})(-1) \simeq \oplus H^1_x(Y, R\Psi(Q))(-1)$, $N = -(1/2\pi i)(T-1)$ est alors donné par $\delta'_x \mapsto \delta_x$ (formule de Picard-Lefschetz (SGA 7 XIV 3.2.11)). Donc, si $V = \oplus R^1\Psi(\mathbb{Q})_x$, $V^\vee = \oplus H^1_x(Y, R\Psi(\mathbb{Q}))(-1)$, $N : V \to V^\vee$ correspond à une forme quadratique définie positive sur V. Par la suite spectrale des poids, on a

$$\mathrm{gr}_2^W H^1(\overline{X}^*,\mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}(V \to H^2(Y,\mathbb{Q}))$$
$$\mathrm{gr}_0^W H^1(\overline{X}^*,\mathbb{Q})(-1) = \mathrm{Coker}(H^0(Y^{(1)},\mathbb{Q})(-1) \to V^\vee)\ ,$$

et le fait que N induise un isomorphisme de gr_2^W sur $\mathrm{gr}_0^W(-1)$ (2.4.2) vient de ce que la restriction d'une forme définie positive à un sous-espace est encore définie positive. Quant au théorème du cycle invariant 2.4.5, il résulte de la suite exacte (*) et de la factorisation de N en

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(\overline{X}^*,\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \oplus R^1\Psi(\mathbb{Q})_x & & \delta'_x \\
{\scriptstyle N}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \oplus N_x} & & \big\downarrow \\
H^1(\overline{X}^*,\mathbb{Q})(-1) & \longleftarrow & \oplus H^1_x(Y,\mathbb{Q})(-1) & & \delta_x
\end{array}\ .$$

Pour des variations sur ceci, voir l'exposé de Grothendieck (SGA 7 IX § 12), et [16].

Remarques 2.4.7. (a) Par la théorie de M. Saito ([20], [21]), $R\Psi(\mathbb{Q})[d] = F$ est un faisceau pervers, autodual, et $N : F \to F(-1)$ est un homomorphisme nilpotent. La perversité de F résulte d'ailleurs de celle des $\mathrm{gr}_r^W R\Psi(\mathbb{Q})[d]$, conséquence de (2.3.8). De plus, la filtration W de sA est (à $[d]$ près) une filtration de F dans la catégorie des faisceaux pervers, et la propriété 2.3.4 (b) montre que c'est la filtration de monodromie associée à N. D'autre part, la filtration K de sA définie par (2.4.4.3) est aussi (à $[d]$ près) une filtration dans la catégorie des faisceaux pervers, de même que la filtration I de sA définie par le deuxième degré, ou, ce qui revient au même, par les images des itérés de N :

$$(2.4.7.1)\qquad I^k \mathrm{s}A = \oplus_{q \geq k} A^{pq} = \mathrm{Im}\ N^k : \mathrm{s}A \to \mathrm{s}A$$

(cela résulte de la perversité de $\mathrm{gr}_W \mathrm{gr}_K$ et $\mathrm{gr}_W \mathrm{gr}^I$, via (2.3.8)). On a donc

$$K_i \mathrm{s}A[d] = \mathrm{Ker}\, N^{i+1} : F \to F \ , \ , I^k \mathrm{s}A[d] = \mathrm{Im}\, N^k : F \to F$$

(noyaux et images dans la catégorie des faisceaux pervers), et

$$W = K * I \ ,$$

avec la notation de [28, 2.3], cf. (1.5.5). Parallèlement à la suite spectrale (2.4.4.2), qui est associée à la filtration K, on peut considérer la suite spectrale

$$E_1^{k,n-k} = H^n(Y, \mathrm{gr}_I^k R\Psi(\mathbb{Q})) \Longrightarrow H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \tag{2.4.7.2}$$

associée à la filtration I, où

$$\mathrm{gr}_I^k R\Psi(\mathbb{Q}) = (\tau_{\geq k+1} Rj_* \mathbb{Q}(k+1))[1] \ .$$

Parallèlement à 2.4.4, M. Saito [23] montre que (2.4.7.2) dégénère en E_2 et que la filtration aboutissement est la filtration $I^k = \mathrm{Im}\, N^k$. Il observe de plus que, par l'autodualité de F, I et K se correspondent, ce qui permet de mettre en dualité les suites spectrales (2.4.4.2) et (2.4.7.2).

(b) Les résultats énoncés dans ce numéro sous les hypothèses de 2.3.4 valent en fait sous des hypothèses beaucoup plus générales (il suffit de supposer f propre et X biméromorphiquement équivalent à une variété kählérienne) [23].

3. Réduction semi-stable : cas de la caractéristique positive ou mixte.

3.1. On reprend les notations de 1.1. On pose $S = \mathrm{Spec}\, R$, $s = \mathrm{Spec}\, k$, $\bar{s} = \mathrm{Spec}\, \bar{k}$, $\eta = \mathrm{Spec}\, K$, $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}\, \overline{K}$, $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On suppose $p > 1$. On désigne par Λ un anneau de torsion où p est inversible, ou une extension finie de $\mathbb{Z}_\ell$ ou $\mathbb{Q}_\ell$, voire $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Soit $f : X \to S$ propre. La suite spectrale des cycles évanescents (SGA 7 I 2.2.3 et XIII § 3)

$$E_2^{ij} = H^i(X_{\bar{s}}, R^j\Psi(\Lambda)) \Longrightarrow H^{i+j}(X_{\overline{\eta}}, \Lambda) \tag{3.1.1}$$

est G-équivariante. Lorsqu'on sait calculer les faisceaux de cycles évanescents $R^j\Psi(\Lambda)$, avec l'action de G dont ils sont munis, elle fournit des renseignements sur la représentation de monodromie locale (cf. (1.3.1))

$$\rho : G \to GL\ H^*(X_{\overline{\eta}}, \Lambda) \ .$$

Nous supposerons dans ce qui suit f **semi-stable** par quoi l'on entend que, localement pour la topologie étale, X est S-isomorphe à $S[t_1, \ldots, t_n]/(t_1 \cdots t_r - \pi)$, où π est une uniformisante de R. La fibre générique X_η est alors lisse, X est régulier, et la fibre spéciale $Y = X_s$ est un diviseur à croisements normaux dans X. Nous supposerons de plus que Y est (globalement) somme de diviseurs lisses Y_i $(1 \leq i \leq h)$. On peut alors, comme en 2.1.5, calculer explicitement les faisceaux $R^q\Psi(\Lambda)$. Avant d'énoncer les résultats, fixons quelques notations. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\overline{Y} & \xrightarrow{\bar{i}} & \overline{X} & \xleftarrow{\bar{j}} & X_{\bar{\eta}} & & \bar{s} & \longrightarrow & \overline{S} & \longleftarrow & \bar{\eta} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widetilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \widetilde{X} & \xleftarrow{\tilde{j}} & X_{\tilde{\eta}} & \text{au-dessus de} & \tilde{s} & \longrightarrow & \widetilde{S} & \longleftarrow & \tilde{\eta} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Y & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X_\eta & & s & \longrightarrow & S & \longleftarrow & \eta
\end{array},$$

où $\tilde{\eta}$ est le spectre de l'extension maximale non ramifiée de K, $\widetilde{S}$ (resp. $\overline{S}$) le normalisé de S dans $\tilde{\eta}$ (resp. $\bar{\eta}$), i, j sont les inclusions, et $\tilde{i}$ (resp. $\bar{i}$), $\tilde{j}$ (resp. $\bar{j}$) s'en déduisent par extension des scalaires à $\widetilde{S}$ (resp. $\overline{S}$). Le complexe $R\Psi(\Lambda)$ est défini par

$$R\Psi(\Lambda) = \bar{i}^* R\bar{j}_*\Lambda \ . \tag{3.1.2}$$

C'est un objet de $D(Y \times_s \eta, \Lambda)$, avec la notation de (SGA 7 XIII) ("catégorie dérivée des Λ-modules sur $\overline{Y}$ munis d'une action de G compatible avec celle sur $\overline{Y}$" ; cf. [11], [13] pour le cas où Λ n'est pas de torsion). Par définition, on a donc

$$i^* Rj_*\Lambda = R\Gamma(G, R\Psi(\Lambda)) \ , \ \tilde{i}^* R\tilde{j}_*\Lambda = R\Gamma(I, R\Psi(\Lambda)) \ . \tag{3.1.3}$$

D'autre part, pour $E \subset [1, h]$, nous poserons $Y_E = \bigcap\limits_{i \in E} Y_i$, et noterons, comme en (2.3.8)

$$Y^{(m)} = \coprod_{\mathrm{card}(E)=m} Y_E \ ,$$

et $a_m : Y^{(m)} \to Y$ la projection.

THÉORÈME 3.2. — (a) *La conjecture de pureté de Grothendieck (*SGA 5 I*) est vérifiée pour les inclusions des Y_i dans X : on a*

$$R^i a_1^! \Lambda = 0 \text{ pour } i \neq 2 \ ,$$

*et un isomorphisme canonique, donné par les classes des Y_i (*SGA 4 1/2 *Cycle)*

$$R^2 a_1^! \Lambda = a_1^* \Lambda(-1) \ .$$

(b) *Pour tout $q \geq 1$, on a des isomorphismes canoniques*

$$i^* \Lambda^q R^1 j_* \Lambda = i^* R^q j_* \Lambda = a_{q*} R^{q+1} a_q^! \Lambda = a_{q*} \Lambda(-q) \ .$$

(c) (i) *On a $R^0\Psi(\Lambda) = \Lambda$.*

(ii) *La flèche $\bar{i}^* R^1 \bar{j}_* \Lambda \to R^1\Psi(\Lambda)$ (déduite de (3.1.3)) induit un isomorphisme*

$$(\oplus \Lambda_{\overline{Y}_i}/\Lambda \text{ diagonal})(-1) \xrightarrow{\sim} R^1\Psi(\Lambda) \ .$$

(iii) *On a*

$$\Lambda^q R^1 \Psi(\Lambda) \xrightarrow{\sim} R^q \Psi(\Lambda)$$

pour tout $q \geq 1$. Si $C^\cdot$ désigne le complexe de Čech augmenté (acyclique) défini par $\bar{a}_1 : \overline{Y}^{(1)} \to \overline{Y}$,

$$C^\cdot = (0 \to \Lambda_{\overline{Y}} \to \bar{a}_{1*}\Lambda \to \bar{a}_{2*}\Lambda \to \cdots \to \bar{a}_{q*}\Lambda \to \cdots)$$

(où $\Lambda_{\overline{Y}}$ est en degré -1), on a (pour $q \geq 1$)

$$R^q\Psi(\Lambda)(q) = \operatorname{Coker}(C^{q-2} \to C^{q-1}) = \operatorname{Ker}(C^q \to C^{q+1})$$

*(comparer avec (*2.1.5.3*)). Les isomorphismes de (i), (ii), (iii) sont des isomorphismes de $G-\Lambda$-faisceaux sur $\overline{Y}$. En particulier, l'inertie I opère trivialement sur $R^q\Psi(\Lambda)$ pour tout q.*

La dernière assertion de (c) entraîne, via (3.1.1) :

COROLLAIRE 3.3. — *Pour tout $g \in I$, $(\rho(g)-1)^{i+1} = 0$ sur $H^i(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$.*

COROLLAIRE 3.4. — *Soit X_η un schéma propre et lisse sur η ayant potentiellement réduction semi-stable (i.e. tel qu'il existe une extension finie η' de η telle que $X_{\eta'}$ admette un modèle propre et semi-stable sur le normalisé S' de S dans η'). Alors, il existe un sous-groupe ouvert I' de I tel que $(\rho(g)-1)^{i+1} = 0$ sur $H^i(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$, pour tout $g \in I'$.*

D'après le théorème de réduction semi-stable ([1], [12], [18]), l'hypothèse de 3.4 est vérifiée si $\dim X = 1$, et, si l'on est optimiste, on peut conjecturer qu'elle l'est toujours.

3.5. Puisque I opère trivialement sur les $R^q\Psi(\Lambda)$, a fortiori le sous-groupe d'inertie sauvage P aussi (cf. 1.1), donc

$$R^q\Psi_t(\Lambda) = R^q\Psi(\Lambda) \ , \tag{3.5.1}$$

où $R^q\Psi_t(\Lambda)$ est le faisceau de cycles évanescents modérés défini dans (SGA 7 I 2.7), i.e. $R^q\Psi_t(\Lambda) = R^q\Psi(\Lambda)^P$. Moyennant 3.2 (a) et (3.5.1), le calcul des fibres géométriques des $R^q\Psi(\Lambda)$ est effectué dans (SGA 7 I 3.3), et il est aisé d'en déduire, comme en 2.1.5, les assertions (b) et (c). La difficulté est de prouver (a) et (3.5.1). C'est ce qui est fait par Rapoport-Zink [19], par une méthode inspirée de celle utilisée par Deligne dans (SGA 4 1/2 Th. Finitude). L'assertion 3.2 (a) découle également, du moins pour $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$ et moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur S, du résultat de Thomason 4.18 dans [R.W. Thomason, Algebraic K-theory and étale cohomology, Ann. Sci. ENS, 4ème série, t. 13 (1985), 437-552, et Erratum, Ann. Sci. ENS, 4ème série, t. 22 (1989), 675-677]; voir aussi [R.W. Thomason, Absolute cohomological purity, Bull. SMF 112 (1984), 397-406].

3.6. Rapoport et Zink (loc. cit.) construisent aussi, dans cette situation, un analogue du complexe de Steenbrink (2.3.2.7) et de la suite spectrale des poids (2.3.6).

Expliquons brièvement leur construction. On supposera, pour simplifier, k algébriquement clos (donc $s = \tilde{s} = \bar{s}$ dans le diagramme de 3.1, $S = \widetilde{S}$, $X = \widetilde{X}$). Soit P_ℓ défini par la suite exacte (cf. 1.1)

$$1 \to P_\ell \to I \xrightarrow{t_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1) \to 1 \ .$$

Comme P_ℓ est d'ordre premier à ℓ et que I, donc P_ℓ, opère trivialement sur les $R^q\Psi(\Lambda)$, on a

$$R\Psi(\Lambda) = R\Gamma(P_\ell, R\Psi(\Lambda)) \ . \tag{3.6.1}$$

Cela permet de considérer $R\Psi(\Lambda)$ comme objet de $D^b(Y, \Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)])$ (avec opération triviale de $\mathbb{Z}_\ell(1)$ sur ses faisceaux de cohomologie). Notons K un complexe de $\Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)]$-modules sur Y, borné et à degrés ≥ 0, représentant $R\Psi(\Lambda)$. D'après (3.1.3) et (3.6.1), on a

$$i^*Rj_*\Lambda = R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1), R\Psi(\Lambda)) \ , \tag{3.6.2}$$

donc, si T désigne un générateur topologique de $\mathbb{Z}_\ell(1)$, $i^*Rj_*\Lambda$ est représenté par

$$L = \mathrm{s}(K \xrightarrow{T-1} K) \ ,$$

le bicomplexe $K \xrightarrow{T-1} K$ étant concentré sur les lignes de degré 0 et 1 (cf. [8, 10.7]). Notons

$$\theta : \Lambda_\eta \to \Lambda_\eta(1)[1]$$

l'opposée de la classe fondamentale du point fermé s dans S (SGA 4 1/2 Cycle 2.1), considérée comme élément de

$$\mathrm{Hom}_{D(\eta,\Lambda)}(\Lambda_\eta, \Lambda_\eta(1)[1]) = H^1(\eta, \Lambda(1)) = i^*R^1j_*\Lambda(1) \ .$$

(la dernière égalité provenant de ce que k a été supposé algébriquement clos). C'est la classe des torseurs des racines ℓ^n-ièmes d'une uniformisante de R. En tant qu'élément de $H^1(I, \Lambda(1))$ (où I opère trivialement sur $\Lambda(1)$), c'est donc le composé de la projection $I \to \mathbb{Z}_\ell(1)$, et de la flèche naturelle $\mathbb{Z}_\ell(1) = \mathbb{Z}_\ell(1)(k) = \mathbb{Z}_\ell(1)(\overline{K}) \to \Lambda(1) = \Lambda \otimes \mathbb{Z}_\ell(1)(\overline{K})$. C'est aussi la classe de l'extension de faisceaux sur η correspondant à la suite exacte triviale de groupes abéliens

$$0 \to \Lambda(1) \to \Lambda(1) \oplus \Lambda \to \Lambda \to 0$$

munis de l'opération triviale de $\mathbb{Z}_\ell(1)$ sur les extrêmes, et de l'opération de $\mathbb{Z}_\ell(1)$ sur le terme central donnée par $g.(x,y) = (x + gy, y)$. Par fonctorialité, θ fournit une flèche de $D(Y, \Lambda)$

$$\theta : i^*Rj_*\Lambda \to i^*Rj_*\Lambda(1)[1] \tag{3.6.3}$$

(analogue de celle définie par $\theta\Lambda$ dans 2.3.2.1). On vérifie [19], à l'aide de la description ci-dessus de θ, que (3.6.3) est représentée, au niveau des complexes, par le morphisme de complexes simples associé au morphisme de complexes doubles

$$\begin{array}{ccc} K(1) & \xrightarrow{T-1} & K(1) \\ & & \uparrow{\scriptstyle 1\otimes T} \\ & & K \xrightarrow{T-1} K \end{array}$$

(dans la flèche verticale $1 \otimes T$, T est considéré comme le morphisme $\mathbb{Z}_\ell \to \mathbb{Z}_\ell(1)$, $a \mapsto T^a$). Notons encore

$$\theta : L \to L(1)[1]$$

le morphisme (de complexes de Λ-modules sur Y) ainsi défini. On obtient alors une suite exacte de complexes

$$(3.6.4) \qquad \cdots \to L(-1)[-1] \xrightarrow{\theta} L \xrightarrow{\theta} L(1)[1] \to \cdots .$$

Comme T opère trivialement sur les $\mathcal{H}^i K$, on voit de plus que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la suite déduite de (3.6.4) par application de $\mathcal{H}^i$,

$$(3.6.5) \qquad \cdots \to \mathcal{H}^{i-1} L(-1) \xrightarrow{\theta} \mathcal{H}^i L \xrightarrow{\theta} \mathcal{H}^{i+1} L(1) \to \cdots ,$$

est exacte. C'est l'analogue de 2.3.2.1. On peut observer encore que (3.6.5) s'obtient par recollement des suites exactes courtes

$$(3.6.6) \qquad 0 \to H^1(\mathbb{Z}_\ell(1), \mathcal{H}^{i-1}K) \to \mathcal{H}^i L \to H^0(\mathbb{Z}_\ell(1), \mathcal{H}^i K) \to 0 ,$$

analogues à (2.1.5.6), qui se récrivent

$$0 \to R^{i-1}\Psi(\Lambda)(-1) \to i^* R^i j_* \Lambda \to R^i \Psi(\Lambda) \to 0$$

(cf. (2.1.5.7)) ; ces suites sont fournies par la suite spectrale

$$E_2^{rs} = H^r(\mathbb{Z}_\ell(1), \mathcal{H}^s K) \Longrightarrow \mathcal{H}^{r+s} L .$$

Notant M le bicomplexe défini par (3.6.4), on définit le bicomplexe

$$(3.6.7) \qquad A = (\sigma^{|}_{\geq 1} \tau^{\mathrm{hor}}_{\geq 0} M)[0,1] ,$$

avec les notations de (2.3.2.2) (c'est l'analogue du M''). En d'autres termes, A est le bicomplexe

$$\begin{array}{ccccccc} (\tau_{\geq 1} L(1))[1] & \xrightarrow{\theta} & (\tau_{\geq 2} L(2))[2] & \xrightarrow{\theta} \cdots \xrightarrow{\theta} & (\tau_{\geq j} L(j))[j] & \xrightarrow{\theta} \cdots \\ 0 & & 1 & & j-1 & \end{array}$$

(où $0, 1, \ldots, j-1, \ldots$ indiquent le numéro de la ligne). On construit, comme en (2.3.2.5), un isomorphisme (dans $D(Y, \Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)])$)

$$(3.6.8) \qquad \mathrm{s}A \xrightarrow{\sim} L \ (= R\Psi(\Lambda)) .$$

A partir de là, il est aisé de paraphraser, dans ce cadre, les définitions données en 2.3.2 d'une filtration par le poids et d'un relèvement de la monodromie au niveau de A. Soit

$$(3.6.9) \qquad 0 \subset \cdots \subset W_r A \subset W_{r+1} A \subset \cdots \subset A$$

la filtration (finie, croissante) de A telle que W_rA soit obtenu en appliquant $\tau_{\leq r+q}$ à la q-ième ligne de A, et notons $W.\mathrm{s}A$ la filtration induite sur le complexe simple associé. Il résulte de 3.2 (a) qu'on a, dans $D(Y, \Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)])$

$$\mathrm{gr}^W \mathbf{s}A = \mathrm{gr}^W \mathbf{s}B \ , \tag{3.6.10}$$

où B est le complexe double, à différentielles nulles,

$$\begin{array}{llll} a_{d+1*}\Lambda & & & \\ a_{d-1*}\Lambda & a_{d*}\Lambda(-1) & & \\ \quad\dots & & & \\ a_{1*}\Lambda & a_{2*}\Lambda(-1) & \cdots & a_{d+1*}\Lambda(-d) \end{array}$$

(d désignant la dimension de Y), muni de la filtration W définie par la même formule que pour A (comparer avec (2.3.8.1)). Appelons **suite spectrale des poids** la suite spectrale

$$_WE_1^{ij} = H^{i+j}(Y, \mathrm{gr}^W_{-i} R\Psi(\Lambda)) \Longrightarrow H^*(X_{\bar\eta}, \Lambda) \tag{3.6.11}$$

définie, grâce à (3.6.8), par la filtration W de sA. D'après (3.6.10), son terme initial se récrit

$$_WE_1^{-r,n+r} = \bigoplus_{\substack{q\geq 0\\ r+q\geq 0}} H^{n-r-2q}(Y^{(r+1+2q)}, \Lambda)(-r-q) \ , \tag{3.6.12}$$

et il est encore possible de décrire, comme en (2.3.9), la différentielle d_1 comme $d_1' + d_1''$, où d_1' (resp. d_1'') est une somme alternée d'homomorphismes de Gysin (resp. de restriction).

Rapoport et Zink montrent d'autre part que, si $\check{T}$ désigne le générateur de $\mathbb{Z}_\ell(-1)$ dual de T (i.e. tel que $T \otimes \check{T} = 1$), alors l'homomorphisme de $D(Y, \Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)])$

$$(T-1) \otimes \check{T} : R\Psi(\Lambda) \to R\Psi(\Lambda)(-1)$$

est réalisé, après passage aux complexes simples associés, par l'homomorphisme de bicomplexes

$$\nu : A \to A(-1)[-1, 1]$$

donné par $(-1)^{i+j+1}$ fois la projection canonique de A^{ij} sur $A^{i-1,j+1}$. En particulier, $(T-1) \otimes \check{T}$ est sous-jacent à un homomorphisme de la catégorie dérivée filtrée envoyant W_r dans $W_{r-2}(-1)$, et, pour $r \geq 0$, $((T-1) \otimes \check{T})^r$ induit un isomorphisme

$$((T-1) \otimes \check{T})^r : \mathrm{gr}^W_r R\Psi(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^W_{-r} R\Psi(\Lambda)(-r) \tag{3.6.13}$$

(correspondant, via (3.6.10), à l'application T^r de $\mathrm{gr}_r^W B$ dans $\mathrm{gr}_{-r}^W B$). De plus, comme on peut choisir K à degrés $\in [0,d]$, donc L à degrés $\in [0,d+1]$, on a

$$((T-1)\otimes \check{T})^{d+1} = 0 : R\Psi(\Lambda) \to R\Psi(\Lambda)(-d-1) \ . \tag{3.6.14}$$

3.7. Par les mêmes considérations qu'en 2.4.7, la structure de complexe filtré ([1]) sur $R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)$ définie en 3.6 à partir de $(\mathrm{s}A, W)$ peut se reconstituer intrinsèquement de la façon suivante. La formule (3.6.10) montre que $\mathrm{gr}^W \mathrm{s}A[d]$ (pour $\Lambda = \mathbf{Q}_\ell$) est pervers. Le complexe $R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)[d]$ est donc pervers ([2]), et la filtration W de $R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)[d]$ est une filtration par des sous-faisceaux pervers. L'homomorphisme $(T-1)\otimes\check{T} : R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)[d] \to R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)(-1)[d]$ envoie W_r dans $W_{r-2}(-1)$, et est nilpotent. L'homomorphisme

$$N = \log T \otimes \check{T} : R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)[d] \to R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)(-1)[d] \tag{3.7.1}$$

est donc défini, et ne dépend pas du choix de T. On a

$$N(W_r) \subset W_{r-2}(-1) \ , \ N^{d+1} = 0 \ ,$$

et, pour $r \geq 0$,

$$N^r : \mathrm{gr}_r^W R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)[d] \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-r}^W R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)(-r)[d] \ . \tag{3.7.2}$$

La filtration W est donc la filtration de monodromie du faisceau pervers $R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)[d]$ associée à l'opérateur N. La connaissance de cette filtration (dans la catégorie des faisceaux pervers) suffit à définir la suite spectrale des poids (3.6.11).

3.8. Reprenons les hypothèses de 3.1 : S hensélien, f propre et semi-stable de dimension relative d, de fibre spéciale somme de diviseurs lisses (on ne suppose plus k algébriquement clos). Le complexe $R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)[d]$ (sur $\overline{Y}$) est un faisceau pervers, et l'homomorphisme $N = \log T \otimes \check{T}$,

$$N : R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)[d] \to R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)(-1)[d] \ , \tag{3.8.1}$$

est défini, et commute à l'action de $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Il est nilpotent ($N^{d+1} = 0$), donc définit une filtration de monodromie W, caractérisée par $N(W_r) \subset$

([1]) ou, plus exactement, quasi-filtré, au sens de [20, 5.2.17]

([2]) (cas particulier de 4.5)

$W_{r-2}(-1)$ et $N^r : \mathrm{gr}_r^W \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-r}^W(-r)$ pour $r \geq 0$. On en déduit une "**suite spectrale des poids**" (analogue à (3.6.11)),

$$(3.8.2) \qquad {}_WE_1^{ij} = H^{i+j}(\overline{Y}, \mathrm{gr}_{-i}^W R\Psi(\mathbf{Q}_\ell)) \Longrightarrow H^*(X_{\overline{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell) \ ,$$

équivariante sous G. De plus, l'isomorphisme $\mathrm{gr}^W R\Psi(\mathbf{Q}_\ell) = \mathrm{gr}^W B$ de (3.6.10) est fonctoriel (par rapport aux isomorphismes de traits strictement locaux), donc le terme E_1 de (3.8.2) se récrit

$$(3.8.3) \qquad {}_WE_1^{-r,n+r} = \bigoplus_{\substack{q\geq 0 \\ r+q\geq 0}} H^{n-r-2q}(\overline{Y}^{(r+1+2q)}, \mathbf{Q}_\ell)(-r-q) \ ,$$

l'isomorphisme étant équivariant sous G. Enfin, N opère sur la suite spectrale (3.8.2) (de façon compatible à G), et, au niveau E_1, induit, pour $r \geq 0$, un isomorphisme

$$(3.8.4) \qquad N^r : {}_WE_1^{-r,n+r} \xrightarrow{\sim} {}_WE_1^{r,n-r}(-r) \ .$$

Les résultats du cas complexe suggèrent la conjecture suivante :

CONJECTURE 3.9. — *Sous les hypothèses de* 3.8 *:*

(a) *La suite spectrale* (3.8.2) *dégénère en* E_2.

(b) *Pour tout* $r \geq 0$ *et tout* n, N^r *induit un isomorphisme (G-équivariant)*

$$N^r : \mathrm{gr}_r^W H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-r}^W H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell)(-r) \ ,$$

où la filtration W *sur* $H^*(X_{\overline{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell)$ *est la filtration aboutissement de* (3.8.2).

Cette conjecture est appelée parfois **conjecture de monodromie-poids**. Supposons k fini. Alors (a) est conséquence des conjectures de Weil [9] : pour $s \geq 2$, la source et le but de d_s^{ij} sont de poids différents, donc $d_s^{ij} = 0$. Pour tout $s \geq 1$, ${}_WE_s^{-r,n+r}$ est pur de poids $n+r$, donc aussi $\mathrm{gr}_r^W H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell) = {}_WE_\infty^{-r,n+r} = {}_WE_2^{-r,n+r}$. La filtration $W_{\cdot-n}$ de $H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell)$ est donc **la filtration par le poids**, au sens de [11, 1.7.5]. Soit M la **filtration de monodromie** (centrée en 0) de $H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell)$, caractérisée par $NM_i(1) \subset M_{i-2}$ et $N^i : \mathrm{gr}_i^M \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-i}^M(-i)$. La partie (b) équivaut donc à :

(b') $M_\cdot = W_{\cdot-n}$, i.e. (par l'unicité de la filtration par le poids (loc. cit.)), gr_i^M **est pur de poids** i.

Compte tenu de (a), (b) équivaut aussi à :

(b") **Pour tout $r \geq 0$ et tout n, N^r induit un isomorphisme** ${}_W E_2^{-r,n+r} \xrightarrow{\sim} {}_W E_2^{r,n-r}(-r)$.

Si S est le hensélisé en un point fermé d'une courbe lisse sur un corps fini, (b) est vérifiée d'après Deligne [11,1.8.4] : $H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est en effet la fibre en $\bar{\eta}$ d'un faisceau pur de poids n d'après les conjectures de Weil. En inégale caractéristique (k toujours supposé fini), Rapoport et Zink ont vérifié (b) pour $\dim Y \leq 2$ [19, 2.12, 2.13] ; le cas de dimension relative 1 est déjà traité par Grothendieck dans (SGA 7 IX 12.5), comme conséquence de la formule de Picard-Lefschetz (modulo la vérification de quelques compatibilités, cf. [16]) (on peut aussi procéder comme Deligne dans (SGA 7 I 6)). On peut d'ailleurs considérer (b") comme une sorte de généralisation de la formule de Picard-Lefschetz au cas semi-stable de dimension supérieure.

La démonstration de 2.4.4 donnée par M. Saito [23] est formelle à partir du fait que N^r induit un isomorphisme de ${}_W E_2^{-r,n+r}$ sur ${}_W E_2^{r,n-r}$ (et de l'interprétation de la suite spectrale des cycles évanescents comme provenant (à une renumérotation près) de la filtration de $R\Psi$ par les noyaux des itérés de N). Dans la situation de 3.8, on dispose de la même interprétation : cela résulte de la réalisation de $(T-1) \otimes \check{T}$ au niveau du complexe de Rapoport-Zink-Steenbrink expliquée en 3.6. Par suite, les arguments de Saito fournissent le résultat suivant :

PROPOSITION 3.10. — *Si X/S vérifie* 3.9 *(a) et (b), la suite spectrale des cycles évanescents* (3.1.1) *(pour $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$),*

$$E_2^{ij} = H^i(X_{\bar{s}}, R^j\Psi(\mathbb{Q}_\ell)) \Longrightarrow H^{i+j}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) ,$$

dégénère en E_3, et la filtration aboutissement est définie par les noyaux des itérés de N : $F^{n-r}H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) = \operatorname{Ker} N^{r+1}$.

En particulier (**"théorème local du cycle invariant"**) :

COROLLAIRE 3.11. — *Si X/S vérifie* 3.9 *(a) et (b), la suite*

$$H^n(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{sp} H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{N} H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

est exacte pour tout n.

(Comme en 2.4.5, *sp* désigne le morphisme de spécialisation, défini comme homomorphisme latéral de (3.1.1), ou encore, plus simplement, comme l'homomorphisme induit par $\mathbb{Q}_\ell = R^0\Psi(\mathbb{Q}_\ell) \to R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)$).

En égale caractéristique p, plus précisément si S est le hensélisé d'une courbe lisse sur un corps de caractéristique p, de sorte qu'on dispose de 3.9 (a) et (b), une démonstration directe de 3.11 est donnée par Deligne dans [11, 3.6] (sous des hypothèses d'ailleurs plus générales : X essentiellement lisse sur k et $X_{\bar{\eta}}$ lisse).

REMARQUES 3.12. (a) Comme en 2.4.7 (a), la filtration I du faisceau pervers $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d]$ définie par $I^r = \mathrm{Im} N^r$ donne naissance à une suite spectrale

$$(3.12.1) \qquad {}_IE_1^{r,n-r} = H^n(X_{\bar{s}}, \mathrm{gr}_I^r R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)) \Longrightarrow H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) ,$$

où

$$\mathrm{gr}_I^r R\Psi(\mathbb{Q}_\ell) = (\tau_{\geq r+1} Rj_* \mathbb{Q}_\ell(r+1))[1] .$$

On prouve de même que (3.12.1) dégénère en E_2 et définit sur l'aboutissement la filtration $I^r = \mathrm{Im} N^r$.

(b) La perversité de $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d]$ vaut plus généralement dès que X est plat, de dimension relative d, et génériquement lisse (cf. 4.5). On peut sans doute prouver, sous ces seules hypothèses, que la monodromie de $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)$ est quasi-unipotente, et définir un logarithme N de sa partie unipotente. D'où une suite spectrale de type (3.8.2) et une conjecture généralisant 3.9.

Quand le corps résiduel de S est fini, la quasi-unipotence en question se ramène au théorème de Grothendieck 1.2. On a en effet, plus généralement, le résultat suivant :

LEMME 3.12.2. — *Soient S comme en 3.1, avec k fini, Y/s de type fini, et $L \in D_c^b(Y \times_s \eta, \Lambda)$, avec les notations de 3.1 et (SGA 7 XIII) (on peut donc interpréter L comme un complexe de Λ-faisceaux sur $\overline{Y}$, à cohomologie constructible, muni d'une action de $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ compatible avec celle de G sur $\overline{Y}$, à travers $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$). Il existe alors un sous-groupe ouvert I_1 du groupe d'inertie I et un entier N tel que, pour tout $g \in I_1$, $(g-1)^N$ soit nul sur L.*

Les détails de la vérification sont laissés au lecteur : on peut se ramener successivement à supposer L concentré en un seul degré (troncation), puis lisse (récurrence sur la dimension de Y), puis Y spectre d'une extension finie de k (prendre la "fibre" de $L|\overline{Y}$ en une orbite de Frobenius), puis $Y = s$ (image directe), auquel cas le théorème de Grothendieck s'applique.

Quand S est le hensélisé en un point fermé d'une courbe lisse sur un corps fini, on peut dire plus. Pour X séparé de type fini sur S, et K pervers pur sur X, $R\Psi(K)$ est pervers (cf. 4.5), et mixte d'après les résultats fondamentaux de [2]. D'après 3.12.2, on peut définir la filtration de monodromie $M.$ de $R\Psi(K)$ (dans la catégorie des faisceaux pervers) : celle-ci coïncide, d'après un théorème de Gabber, avec la filtration par le poids (cf. [J.-L. Brylinski, Cohomologie d'intersection et faisceaux pervers, Séminaire Bourbaki, 34e année, 1981/82, n° 585, Astérisque 92-93, 1982, 129-157, th. 3.2.9]). L'un des ingrédients est la formule de Künneth pour $R\Psi$ (4.7). (NB. Dans (loc. cit.),

p. 144, l. 9, 10, 13 et p. 148, l. -4, il convient de remplacer le groupe d'inertie I par le sous-groupe P_ℓ noyau de $t_\ell : I \to \mathbb{Z}_\ell(1)$.)

3.13. Soient X_η un schéma séparé et de type fini sur η, et H l'un des groupes de cohomologie $H^n(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell)$, $H^n_c(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell)$. On sait (1.4) que la représentation de monodromie $\rho : G \to GL(H)$ est quasi-unipotente. Supposons que k est le corps fini $\mathbb{F}_q$, et soit $F_q \in \mathrm{Gal}(\bar k/k)$ le "Frobenius géométrique", $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$. Rappelons la question de Serre-Tate [26, Appendix, Problem 2] :

Question 3.13.1. *Soit g un élément du groupe de Weil $W(\overline{K}/K)$ (i.e. un élément de G d'image F_q^m dans $\mathrm{Gal}(\bar k/k)$, avec $m \in \mathbb{Z}$). Est-il vrai que le polynôme caractéristique $\det(1 - gt, H) \in \mathbb{Q}_\ell[t]$ est à coefficients $\in \mathbb{Q}$, indépendant de ℓ ? S'il en est ainsi, et si de plus X_η est propre et lisse, et $H = H^n$, est-il vrai que les inverses des racines de $\det(1 - gt, H)$ sont de poids mw, avec $0 \leq w \leq 2n$?*

Supposons que X_η soit la fibre générique de X sur S satisfaisant aux hypothèses de 3.8, et soit M la filtration de monodromie de $H^n(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell)$, centrée en n (i.e. telle que $N^r : \mathrm{gr}^M_{n+r} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^M_{n-r}$). On peut raffiner la question 3.13.1 en la suivante :

Question 3.13.2. *Soit $g \in W(\overline{K}/K)$ d'image F_q dans $\mathrm{Gal}(\bar k/k)$. Est-il vrai que $\det(1 - gt, \mathrm{gr}^M_{n+r}H^n(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell)) \in \mathbb{Q}_\ell[t]$ est à coefficients $\in \mathbb{Z}$, indépendant de ℓ, et que tout inverse α d'une racine est de poids $n + r$?*

Ces deux questions ont des réponses positives si X est propre et lisse sur S (grâce à Deligne [9]), ou si $\dim X \leq 1$, d'après le théorème de réduction semi-stable (SGA 7 IX 4.3), ou si X provient, par localisation, d'un schéma propre sur une courbe lisse sur un corps fini, d'après Deligne [8, 9.8], [9] et [11, 1.8.4]. En dehors de ces cas, elles restent ouvertes. Supposons que 3.9 (b) soit vérifiée. Alors, pour tout plongement ι de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ dans $\mathbb{C}$, tout g comme en 3.13.2 est de ι-poids $n+r$, mais on ignore si $\det(1 - gt, \mathrm{gr}^M_{n+r})$ est à coefficients rationnels, cf. la discussion du problème 3.2.2 p. 55 dans Katz [17].

4. Appendice : cycles évanescents et dualité en cohomologie étale.

Le résultat principal de cette section (4.2) est bien connu, mais ne figure pas, semble-t-il, dans la littérature. La démonstration, décalquée de (SGA 4 1/2 Th. finitude § 3), a été communiquée au rédacteur par O. Gabber. Une variante en théorie de Hodge a été développée par M. Saito [22]. Elle raffine des résultats de Brylinski [4]. Nous donnons également un complément de même nature (4.7), qui nous a été suggéré par M. Rapoport.

4.1. Soient $(S, s, \eta, \overline{S}, \bar s, \bar\eta, G)$ comme en 3.1. On désigne par Λ un anneau commutatif noethérien, annulé par un entier inversible sur S. Pour X/S, on dispose du foncteur

$$R\Psi_\eta : D^+(X_\eta, \Lambda) \to D^+(X_s \times_s \eta, \Lambda)$$
$$M \mapsto \bar{i}^* R\bar{j}_* M_{\bar{\eta}}$$

(où $D(X_s \times_s \eta, \Lambda)$ désigne, comme dans (SGA 7 XIII) la catégorie dérivée des faisceaux de Λ-modules sur $X_{\bar{s}}$ munis d'une action (continue) de G compatible avec celle de G sur $X_{\bar{s}}$). Quand X est de type fini sur S, $R\Psi_\eta$ envoie, d'après (SGA 4 1/2 Th. finitude § 3), D_{ctf} dans D_{ctf}, où D_{ctf} désigne la sous-catégorie pleine formée des complexes à cohomologie bornée, constructible et qui sont de tor-dimension finie (cf. SGA 5 III).

THÉORÈME 4.2. — *Soit X séparé et de type fini sur S et soit $M \in D_{ctf}(X_\eta, \Lambda)$. La flèche de $D_{ctf}(X_s \times_s \eta, \Lambda)$ définie en* (4.3.6),

$$(*) \qquad R\Psi_\eta(DM) \to D(R\Psi_\eta(M)) ,$$

est un isomorphisme (dans le membre de gauche (resp. droite), $D(-)$ désigne le foncteur $R\mathcal{H}om(-, a^!\Lambda)$ a étant la projection sur η (resp. $s \times_s \eta = \eta$)).

(La méthode de (SGA 4 XVIII 3.1) permet de définir $a^! : D^+(\eta, \Lambda) \to D^+(X_s \times_s \eta, \Lambda)$, et plus généralement $f^! : D^+(Y_s \times_s \eta, \Lambda) \to D^+(X_s \times_s \eta, \Lambda)$ pour $f : X \to Y$ avec X et Y séparés de type fini sur S. D'après (SGA 4 1/2, loc. cit.), D envoie D_{ctf} dans D_{ctf}.)

4.3. Définissons la flèche $(*)$.

(a) Pour L, M, N dans $D_{ctf}(X_\eta, \Lambda)$ et $u : L \overset{L}{\otimes} M \to N$, on a une flèche associée

$$(4.3.1) \qquad R\Psi(L) \overset{L}{\otimes} R\Psi(M) \to R\Psi(N) ,$$

déduite de la flèche canonique

$$R\bar{j}_* L_{\bar{\eta}} \overset{L}{\otimes} R\bar{j}_* M_{\bar{\eta}} \to R\bar{j}_*(L_{\bar{\eta}} \overset{L}{\otimes} M_{\bar{\eta}}) .$$

(Ici, et dans la suite, on abrège $R\Psi_\eta$ en $R\Psi$.)

En particulier, si $u : M \overset{L}{\otimes} DM \to a^!\Lambda$ est l'accouplement canonique, (4.3.1) donne un accouplement

$$(4.3.2) \qquad R\Psi(M) \overset{L}{\otimes} R\Psi(DM) \to R\Psi(a^!\Lambda) ,$$

d'où une flèche

$$R\Psi(DM) \to R\mathcal{H}om(R\Psi M, R\Psi(a^!\Lambda)) \ . \tag{4.3.3}$$

(b) Soient X et Y séparés de type fini sur S et $f : X \to Y$ un S-morphisme. Pour $K \in D^+(Y_\eta, \Lambda)$ on a une flèche (cf. (SGA 7 XIII 1.3.9))

$$R\Psi(f^!K) \to f^!R\Psi(K) \tag{4.3.4}$$

définie de l'une des manières équivalentes suivantes :

(i) On a un morphisme canonique (où les R sont omis, pour abréger)

$$\bar{f}_!\bar{j}_*(f^!_{\bar{\eta}}K_{\bar{\eta}}) \to \bar{j}_*f_{\bar{\eta}!}(f^!_{\bar{\eta}}K_{\bar{\eta}})$$

(provenant, par adjonction, de $\bar{j}^*\bar{f}_! = f_{\bar{\eta}!}\bar{j}^*$ et de $\bar{j}^*\bar{j}_* \to Id$) Comme (par changement de base pour $\bar{f}_!$), $\bar{i}^*\bar{f}_! = f_{\bar{s}!}\bar{i}^*$, on en déduit une flèche

$$f_!R\Psi(f^!K) \to R\Psi(f_!f^!K) \ ,$$

d'où, en composant avec $f_!f^! \to Id$,

$$f_!R\Psi(f^!K) \to R\Psi(K) \ ,$$

d'où finalement (4.3.4) se déduit par adjonction.

(ii) D'après (SGA 4 XVIII (3.1.12.3)), on a

$$\bar{j}_*f^!_{\bar{\eta}}K_{\bar{\eta}} = \bar{f}^!\bar{j}_*K_{\bar{\eta}} \ ;$$

composant avec la "flèche de changement de base" (SGA 4 XVIII (3.1.14.2))

$$\bar{i}^*\bar{f}^! \to f^!_{\bar{s}}\bar{i}^* \ ,$$

on obtient (4.3.4). La vérification de l'équivalence de (i) et (ii) est laissée en exercice : utiliser le langage des catégories fibrées (ou cofibrées) de (SGA 4 XVII 2) (cf. aussi (SGA 5 III).)

(c) On a (trivialement)

$$R\Psi(\Lambda_\eta) = \Lambda_{\bar{s}} \ . \tag{4.3.5}$$

Appliquant (4.3.4) et (4.3.5) pour $a : X \to S$, on trouve une flèche

$$R\Psi(a^!\Lambda_\eta) \to a^!\Lambda_s \ ,$$

d'où, par composition avec (4.3.3), une flèche (de $D_{ctf}(X_s \times_s \eta, \Lambda)$)

$$R\Psi(DM) \to D(R\Psi(M)) \tag{4.3.6}$$

pour $M \in D_{ctf}(X_\eta, \Lambda)$, qui est la flèche $(*)$ annoncée.

Par construction, (4.3.6) est compatible aux images directes propres : pour $f : X \to Y$ propre, on a $f_*\Psi \xrightarrow{\sim} \Psi f_*$ (SGA 7 XIII 2.1.7) et $f_*D \xrightarrow{\sim} Df_*$ (dualité globale) SGA XVIII), et le carré qui s'en déduit

$$\begin{array}{ccc} f_*\Psi(DM) & \xrightarrow{(4.3.6)} & f_*D\Psi M \\ \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\ \Psi Df_*M & \xrightarrow{(4.3.6)} & D\Psi f_*M \end{array} \tag{4.3.7}$$

est commutatif (on a omis les R). La vérification est laissée au lecteur : comme pour l'équivalence de (i) et (ii) ci-dessus, il est commode d'utiliser le langage de (SGA 4 XVII 2).

Prouvons que (4.3.6) est un isomorphisme. La démonstration est entièrement parallèle à celle de l'invariance des cycles évanescents par changement de traits dans (SGA 4 1/2 Th. finitude 3.7). On peut supposer S strictement local. On procède par récurrence sur $\dim X_\eta$. On suppose que (4.3.6) est un isomorphisme pour $\dim X_\eta < n$. Pour $\dim X_\eta = n$, on se ramène à supposer X projectif, et l'on note C le cône de (4.3.6). On vérifie les conditions (A) et (B) de (loc. cit.), à savoir :
(A) le support des sections locales des faisceaux de cohomologie de C est fini
(B) $R\Gamma(X_s, C) = 0$.

Pour (A), on procède comme en (loc. cit.) : (4.3.6) commute au passage aux invariants par un pro-p-groupe. Pour (B), on applique (4.3.7).

VARIANTE 4.4. — Si Λ est une extension finie de $\mathbb{Z}_\ell$ ou $\mathbb{Q}_\ell$, la flèche analogue à (4.3.6) (pour $M \in D^b_c(X_\eta, \Lambda)$), définie par passage à la limite à partir des flèches (4.3.6) (cf. [13]), est un isomorphisme. En particulier :

COROLLAIRE 4.5. — *Soit Λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. Si $M \in D^b_c(X_\eta, \Lambda)$ est pervers, il en est de même de $R\Psi(M)$ (en tant qu'objet de $D^b_c(X_{\bar{s}}, \Lambda)$), les perversités considérées étant les perversités auto-duales* [2, 2.1.16 *et* § 4].

D'après [2, 4.4.2], le foncteur $R\Psi_\eta$ est en effet t-exact à droite. L'isomorphisme (4.3.6) entraîne donc qu'il est t-exact.

COROLLAIRE 4.6. — *Soit Λ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. Si $K \in D^b_c(X, \Lambda)$ est pervers, il en est de même de $R\Phi(K)[-1] \in D^b_c(X_{\bar{s}}, \Lambda_\ell)$, où $R\Phi(K)$ est défini* *par le triangle distingué canonique (*SGA 7 XIII 2.1.2*)*

$$(4.6.1) \qquad (i^*K)_{\bar{s}} \to R\Psi(j^*K) \to R\Phi(K) \to \ .$$

Par définition, pour $X \in D_c^b(X,\Lambda)$, "pervers" signifie relativement à la t-structure obtenue par recollement (au sens de [2, 1.4.10]) de la t-structure t associée à la perversité autoduale $p_{1/2}$ sur X_s [2, 4.0] et de la t-structure t' sur X_η définie par $({}^pD^{\leq -1}, {}^pD^{\geq -1})$, où $p = p_{1/2}$. Cette t-structure sur X est donc définie par

$$K \in {}^pD^{\leq 0}(X) \Longleftrightarrow (j^*K \in {}^pD^{\leq -1}(X_\eta) \text{ et } i^*K \in {}^pD^{\leq 0}(X_s))$$

$$K \in {}^pD^{\geq 0}(X) \Longleftrightarrow (j^*K \in {}^pD^{\geq -1}(X_\eta) \text{ et } i^!K \in {}^pD^{\geq 0}(X_s)) \ .$$

Par suite, si δ est la fonction de dimension rectifiée introduite par Artin dans (SGA 4 XIV 2.2) relativement à $X \to S$, i.e.

$$\delta(x) = \dim \overline{\{y\}} + \deg.\mathrm{tr}.k(x)/k(y)$$

pour x dans Xd'image y dans S, ou encore (loc. cit.)

$$\delta(x) = \begin{cases} \dim \overline{\{x\}} & \text{si } \overline{\{x\}} \cap X_s \neq \emptyset \\ \dim \overline{\{x\}} + 1 & \text{si } \overline{\{x\}} \cap X_s = \emptyset \ , \end{cases}$$

$K \in D_c^b(X,\Lambda)$ est pervers si et seulement si, pour tout $x \in X$, on a

$$H^q i_x^* K = 0 \text{ pour } q > -\delta(x) \text{ et } H^q i_x^! K = 0 \text{ pour } q < -\delta(x) \ .$$

Si X/S se déduit d'un schéma séparé de type fini Z sur une courbe lisse C sur un corps par localisation en un point fermé de C, la perversité $p_{1/2}$ sur Z induit celle considérée ici sur X.

Le corollaire 4.6 est dû à Gabber. Ce n'est pas une conséquence immédiate de 4.5. Noter que, si K est pervers, $i^*K[-1]$ ne l'est pas en général, comme le montre déjà le cas où $X = S$ et $K = \Lambda_s$. Voici l'argument de Gabber (présenté par Laumon).

(a) Il est clair que le foncteur i_* est t-exact. Il en est de même des foncteurs j_* et $j_!$ de $D_c^b(X_\eta,\Lambda)$, *munie de* t', dans $D_c^b(X,\Lambda)$. Pour j_*, comme dans [2, 4.1.1], cela résulte aisément du théorème d'Artin (SGA 4 XIV 3.1) via le calcul des fibres $(R^qj_*F)_{\bar{x}}$ en $x \in X_s$ comme limite inductive de $H^q(V_\eta, F)$, V parcourant les voisinages étales de x, et de la suite spectrale de Leray pour $V_{\bar{\eta}} \to V_\eta$. Le cas de $j_!$ s'en déduit par dualité.

(b) Grâce à (a), le triangle distingué

$$j_!j^*K \to K \to i_*i^*K \to$$

montre que

$$i^*K[-1] \in {}^pD_c^{[0,1]}(X_s, \Lambda)$$

(i.e. ${}^p\mathcal{H}^n(i^*K[-1]) = 0$ pour $n \neq 0, 1$) et qu'on a une suite exacte de faisceaux pervers sur X

$$0 \to i_*{}^p\mathcal{H}^0(i_*K[-1]) \to j_!j^*K \to K \to i_*{}^p\mathcal{H}^1(i_*K[-1]) \to 0 .$$

Comme $R\Psi(j^*K[-1])$ est pervers (4.5), on en déduit, par le triangle distingué (4.6.1),

$$(i^*K[-1])_{\bar{s}} \to R\Psi(j^*K[-1]) \to R\Phi(K)[-1] \to ,$$

que

$$(*) \qquad R\Phi(K)[-1] \in {}^pD_c^{[-1,0]}(X_{\bar{s}}, \Lambda)$$

et qu'on a une suite exacte de faisceaux pervers sur $X_{\bar{s}}$

$$(**) \qquad 0 \to {}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(K)[-1]) \to {}^p\mathcal{H}^0(i^*K[-1])_{\bar{s}} \to R\Psi(j^*K[-1])$$
$$\to {}^p\mathcal{H}^0(R\Phi(K)[-1]) \to {}^p\mathcal{H}^1(i^*K[-1])_{\bar{s}} \to 0 .$$

Il s'agit de prouver que

$$(***) \qquad {}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(K)[-1]) = 0 .$$

On va établir $(***)$ par dévissage.

(c) Pour K pervers sur X, il existe une filtration (dans la catégorie des faisceaux pervers sur X)

$$0 \subset K' \subset K'' \subset K$$

telle que K' et K/K'' soient à support dans X_s (i.e. annulés par j^*, ou encore de la forme i_*M pour $M \in D_c^b(X_s, \Lambda)$), et $K''/K' \simeq j_{!*}j^*K$. Considérons en effet le carré commutatif dans la catégorie abélienne des faisceaux pervers sur X :

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & j_*j^*K \\ \uparrow & & \uparrow \\ j_!j^*K & \twoheadrightarrow & j_{!*}j^*K \end{array}$$

où, par définition, $j_{!*}j^*K$ est l'image de $j_!j^*K$ dans j_*j^*K. Il suffit de prendre pour K'' l'image de $j_!j^*K$ dans K, et pour K' le noyau de $K'' \to j_{!*}j^*K$. On est donc ramené à prouver $(***)$ dans les deux cas suivants :

(i) K est à support dans X_s,

(ii) $K = j_{!*}j^*K$.

Cas (i). Alors $i^*K = i^!K$ est pervers, en particulier ${}^p\mathcal{H}^0(i^*K[-1])_{\bar{s}} = 0$, donc ${}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(K)[-1]) = 0$ grâce à (**).

Cas (ii). Soit $K = j_{!*}L$ avec L pervers sur X_η (*pour* t'). On a une suite exacte de faisceaux pervers sur X

$$0 \to j_{!*}L \to j_*L \to j_*L/j_{!*}L \to 0 \ ,$$

donc, d'après (*), on a une injection

$${}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(j_{!*}L)[-1]) \to {}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(j_*L)[-1]) \ .$$

Il suffit donc de prouver que

$${}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(j_*L)[-1]) = 0 \ .$$

Par définition, il revient au même de prouver que la flèche

$${}^p\mathcal{H}^0(i^*j_*L[-1])_{\bar{s}} \to {}^p\mathcal{H}^0(R\Psi(L[-1])) =_{4.5} R\Psi(L[-1])$$

est un monomorphisme de faisceaux pervers. On peut supposer S strictement local. Soit I le groupe d'inertie. La flèche de $D^b_c(X_s \times_s \eta, \Lambda)$ ($= D^b_c(X_s, \Lambda[I])$, "c" voulant dire à cohomologie constructible en tant que complexe de Λ-modules),

$$i^*j_*(L[-1]) \to R\Psi(L[-1])$$

se récrit comme la flèche canonique associée à $I \to \{1\}$

$$R\Gamma(I, R\Psi(L[-1])) \to R\Psi(L[-1]) \ .$$

Il suffit donc de montrer que, pour $M \in D^b_c(X_s, \Lambda[I])$, pervers en tant qu'objet de $D^b_c(X_s, \Lambda)$,

$$R\Gamma(I, M) \to M \tag{1}$$

induit une injection sur ${}^p\mathcal{H}^0$. Soit P_ℓ comme en 3.6. Le foncteur $\Gamma(P_\ell, -)$ (invariants sous P_ℓ) étant exact sur la catégorie des $\Lambda[I]$-faisceaux constructibles, pour E dans $D^b_c(X_s, \Lambda[I])$ et $x \in X_s$, on a $\mathcal{H}^q i^*_x R\Gamma(P_\ell, E) = R\Gamma(P_\ell, \mathcal{H}^q i^*_x E) = \Gamma(P_\ell, \mathcal{H}^q i^*_x E)$, et similairement avec $i^!_x$; de plus, si C est le cône de $R\Gamma(P_\ell, E) \to E$, les suites $0 \to \mathcal{H}^q i^*_x R\Gamma(P_\ell, E) \to \mathcal{H}^q i^*_x E \to \mathcal{H}^q i^*_x C \to 0$ (et similairement avec $i^!_x$) sont exactes et scindées. Par suite, pour M pervers comme ci-dessus, $R\Gamma(P_\ell, M)$ et le cône C de $R\Gamma(P_\ell, M) \to M$ sont pervers, et l'on a une suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \to R\Gamma(P_\ell, M) \to M \to C \to 0 .$$

Comme

$$R\Gamma(I, M) = R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1), R\Gamma(P_\ell, M)) ,$$

on est donc ramené à montrer que pour N dans $D_c^b(X_s, \Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)])$, pervers (en tant que complexe de Λ-modules),

$$R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1), N) \to N$$

induit une injection sur ${}^p\mathcal{H}^0$. Si T, comme en 3.6, est un générateur topologique de $\mathbb{Z}_\ell(1)$, $R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1), N)$ est le complexe simple associé au complexe double

$$N \xrightarrow{T-1} N ,$$

sur les lignes de degré 0 et 1, et (2) est la projection figurant dans la suite exacte

$$0 \to N[-1] \to \mathrm{s}(N \xrightarrow{T-1} N) \to N \to 0 .$$

La suite exacte de cohomologie perverse correspondante fournit l'injection désirée. Ceci achève la démonstration de 4.6.

Dans la même veine que 4.2, on a le résultat suivant, qui m'a été signalé par M. Rapoport :

THÉORÈME 4.7. — *Soient X et Y de type fini sur S. Pour $L \in D_{ctf}(X_\eta, \Lambda)$, $M \in D_{ctf}(Y_\eta, \Lambda)$, la flèche de $D_{ctf}((X \times_S Y)_s \times_s \eta, \Lambda)$ définie ci-après,*

$$R\Psi_\eta(L) \overset{L}{\otimes}_s R\Psi_\eta(M) \to R\Psi_\eta(L \overset{L}{\otimes}_\eta M) , \tag{4.7.1}$$

est un isomorphisme ($\overset{L}{\otimes}_s$ et $\overset{L}{\otimes}_\eta$ désignent des produits tensoriels externes $pr_1^* \overset{L}{\otimes} pr_2^*$).

Ce résultat, attribué à Gabber, figure dans un preprint de A. Beilinson et J. Bernstein, A proof of Jantzen conjectures. Voir aussi [M. Schröter, Diplomarbeit, Bonn, 1990].

On définit la flèche (4.7.1) comme déduite, par application de $\bar{i}^*$, de la flèche de Künneth

$$R\bar{j}_* L \overset{L}{\otimes}_{\bar{S}} R\bar{j}_* M \to R\bar{j}_*(L \overset{L}{\otimes}_\eta M)$$

définie par les inclusions $\bar{j}$ de $X_{\bar{\eta}}$, $Y_{\bar{\eta}}$, $(X \times Y)_{\bar{\eta}}$ dans $X_{\overline{S}}$, $Y_{\overline{S}}$, $(X \times Y)_{\overline{S}}$ respectivement.

Tout comme (4.3.6), (4.7.1) est compatible aux images directes propres : pour $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ propres, et $h = f \times_S g$, on a un carré commutatif

$$
\begin{array}{lccc}
(4.7.2) & f_*\Psi(L) \overset{L}{\otimes}_{\bar{s}} g_*\Psi(M) & \xrightarrow{(1)} & h_*\Psi(L \overset{L}{\otimes}_\eta M) \\
& {\scriptstyle (3)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (4)} \\
& \Psi(f_*L) \overset{L}{\otimes}_{\bar{s}} \Psi(g_*M) & \xrightarrow{(2)} & \Psi h_*(L \overset{L}{\otimes}_\eta M)
\end{array}
$$

où (1) est composé de l'isomorphisme de Künneth $f_*\Psi(L) \overset{L}{\otimes}_{\bar{s}} g_*\Psi(M) \xrightarrow{\sim} h_*(\Psi(L) \overset{L}{\otimes}_{\bar{s}} \Psi(M))$ (SGA 4 XVII 5.4.3) et de (4.7.1), (2) est composé de (4.7.1) (pour f_*L et g_*M) et de l'isomorphisme de Künneth, et (3) et (4) sont définis par les isomorphismes canoniques (SGA 7 XIII 2.1.2) (comme dans (4.3.7) on a abrégé $R\Psi_\eta$ en $R\Psi$ et omis les R). La vérification est laissée en exercice.

Prouvons que (4.7.1) est un isomorphisme. La démonstration est analogue à celle de 4.2. On peut supposer S strictement local. On raisonne par récurrence sur $\dim Z_\eta$, où $Z = X \times_S Y$. On suppose que (4.7.1) est un isomorphisme pour $\dim Z_\eta < n$. Pour $\dim Z_\eta = n$, on se ramène à supposer X et Y projectifs, et l'on note C le cône de (4.7.1). Il suffit de vérifier les conditions (A) et (B) :
(A) le support des sections locales des faisceaux de cohomologie de C est fini;
(B) $R\Gamma(Z_{\bar{s}}, C) = 0$.

La validité de (B) résulte de (4.7.2). Pour (A), on procède encore comme dans (SGA 4 1/2 Th. finitude 3.7). On peut supposer X_η (resp. Y_η) dense dans X (resp. Y). Si $n = 0$, (A) est alors automatiquement satisfaite, on peut donc supposer $n > 0$. Quitte à se localiser, on peut supposer qu'on dispose de morphismes quasi-finis $X \xrightarrow{b} \mathbb{A}^q_S$, $Y \xrightarrow{c} \mathbb{A}^r_S$, avec $q+r = n$. Supposons $q > 0$, et notons $f_i : X \to \mathbb{A}^1_S$ le composé de b et de $pr_i : \mathbb{A}^q_S \to \mathbb{A}^1_S$. Comme dans (loc. cit.), introduisons le localisé strict S' de $\mathbb{A}^1_S$ en un point générique géométrique s' de $\mathbb{A}^1_s$, notons η' le point générique de S', $\eta'_1 = \mathrm{Spec}(k(\bar{\eta}) \otimes_{k(\eta)} k(\eta'))$ le point générique du localisé strict de $A^1_{\overline{S}}$ en s', et $\bar{\eta}'$ un point géométrique au-dessus de η'_1. On a alors un diagramme commutatif à carrés cartésiens, où

$X' \to S'$ est déduit de $f_i : X \to \mathbb{A}^1_S$ par le changement de base $S' \to \mathbb{A}^1_S$:

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccccc} X'_{s'} & \to & X' & \leftarrow & X'_{\eta'} & \leftarrow & X'_{\eta'_1} & \leftarrow & X'_{\bar\eta'} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s' & \to & S' & \leftarrow & \eta' & \leftarrow & \eta'_1 & \overset{P}{\leftarrow} & \bar\eta' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ s & \to & S & \leftarrow & \eta & \overset{I}{\leftarrow} & \bar\eta & & . \end{array}$$

Notons $I = \mathrm{Gal}(\bar\eta/\eta)$ et $I' = \mathrm{Gal}(\bar\eta'/\eta')$ les groupes d'inertie de S et S'. On a $\mathrm{Gal}(\eta'_1/\eta') = I$, et, comme Deligne l'observe dans (loc. cit.), dans la suite exacte

$$1 \to P \to I' \to I \to 1 \ ,$$

P est un pro-p-groupe, car $I' \to I$ induit un isomorphisme sur les quotients modérés, une uniformisante de S étant une uniformisante de S'. Notons L' l'image inverse de L sur $X'_{\eta'}$. Le diagramme $(*)$ montre (cf. (loc. cit. 3.4)) que

$$(1) \qquad R\Psi_\eta(L)_{s'} = R\Psi_{\eta'}(L')^P \ ,$$

où $(-)^P = R\Gamma(P,-)$ désigne le foncteur "invariants sous P". Posons d'autre part

$$Y' = Y \times_S S' \ , \ Z' = X' \times_{S'} Y' \ ,$$

et notons M' l'image inverse de M sur $Y'_{\eta'}$. Par la compatibilité des cycles évanescents aux changements de traits (loc. cit. 3.7), on a

$$(2) \qquad R\Psi_\eta(M)_{s'} = R\Psi_{\eta'}(M') \ .$$

Enfin, du diagramme analogue à $(*)$ relatif à Z', on déduit que

$$(3) \qquad R\Psi_\eta(L \overset{L}{\otimes}_\eta M)_{s'} = R\Psi_{\eta'}(L' \overset{L}{\otimes}_{\eta'} M')^P \ .$$

Comme $\dim X'_{\eta'} < q$ et $\dim Y'_{\eta'} \leq r$, l'hypothèse de récurrence s'applique à $(X'/S', Y'/S', L', M')$: la flèche (4.7.1)

$$(4) \qquad R\Psi_{\eta'}(L') \overset{L}{\otimes}_{s'} R\Psi_{\eta'}(M') \to R\Psi_{\eta'}(L' \overset{L}{\otimes}_{\eta'} M')$$

est un isomorphisme. D'après (2), P opère trivialement sur $R\Psi_{\eta'}(M')$, donc

$$R\Psi_{\eta'}(M') = R\Psi_{\eta'}(M')^P \ .$$

Donc, appliquant à (4) le foncteur $(-)^P$, on obtient un isomorphisme

$$R\Psi_{\eta'}(L')^P \overset{L}{\otimes}_{s'} R\Psi_{\eta'}(M') \xrightarrow{\sim} R\Psi_{\eta'}(L' \overset{L}{\otimes} M')^P .$$

Via (1), (2) et (3), celui-ci s'identifie à la fibre en s' de (4.7.1). Par suite, le cône C est cohomologiquement concentré sur l'image inverse, par le composé $(X \times Y)_s \xrightarrow{b\times c} \mathbb{A}^q_s \times \mathbb{A}^r_s \to \mathbb{A}^q_s$, de la réunion d'un nombre fini d'hyperplans fermés de $\mathbb{A}^q_s$ parallèles à $pr_i^{-1}(0)$. Comme ceci vaut pour toute projection $pr_i : \mathbb{A}^q \to \mathbb{A}^1$ et que (X, L) et (Y, M) jouent des rôles symétriques, on conclut que C est concentré sur l'image inverse par $b \times c$ de la réunion d'un nombre fini de points fermés de $\mathbb{A}^q_s \times \mathbb{A}^r_s$, i.e. que le support de $\mathcal{H}^*(C)$ est fini, ce qui prouve (A) et achève la démonstration de 4.7.

COROLLAIRE 4.8. — *Sous les hypothèses de* 4.7, *supposons que* $R\Psi_\eta(L) = R\Psi_{\eta,t}(L)$ *ou* $R\Psi_\eta(M) = R\Psi_{\eta,t}(M)$, *où* $R\Psi_{\eta,t}(-)$ *désigne le foncteur "cycles évanescents modérés"* ($= R\Psi_\eta(-)^P$, *où* P *est l'inertie sauvage). Alors la flèche analogue à* (4.7.1)

$$(4.8.1) \qquad R\Psi_{\eta,t}(L) \overset{L}{\otimes}_s R\Psi_{\eta,t}(M) \to R\Psi_{\eta,t}(L \overset{L}{\otimes}_\eta M)$$

est un isomorphisme. Si de plus, $R\Psi_\eta = R\Psi_{\eta,t}$ *pour* L *et* M *c'est aussi le cas pour* $L \overset{L}{\otimes}_\eta M$.

Il suffit en effet d'appliquer le foncteur $(-)^P$ à (4.7.1).

En particulier, compte tenu de (3.5.1) :

COROLLAIRE 4.9. — *Si* X *ou* Y *a réduction semi-stable sur* S, *alors la flèche naturelle*

$$(4.9.1) \qquad R\Psi_{\eta,t}(\Lambda_{X_\eta}) \overset{L}{\otimes}_s R\Psi_{\eta,t}(\Lambda_{Y_\eta})_t \to R\Psi_{\eta,t}(\Lambda_{(X\times_S Y)_\eta})$$

est un isomorphisme.

REMARQUE 4.10. Si X et Y ont réduction semi-stable, les $R^i\Psi_\eta(\Lambda_{(X\times_S Y)_\eta})$ sont donc modérés. En général, $X \times_S Y$ n'a plus réduction semi-stable. Néanmoins, $X \times_S Y$ est log-lisse sur S au sens de Kato (S muni de sa log-structure canonique), cf. [K. Kato, Logarithmic structures of Fontaine-Illusie, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins University Press (1989), 191-224], et les exposés de Kato et Hyodo-Kato dans ce séminaire. On peut espérer que le résultat de Rapoport-Zink (3.5.1) s'étend au cas log-lisse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin, G. Winters. — Degenerate fibers and reduction of curves, *Topology* **10**, (1971), 373-383.

[2] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne. — *Faisceaux pervers*, Astérisque 100, 1982.

[3] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. — *Néron models*, Ergebnisse der Math. 21, Springer-Verlag, 1990.

[4] J.-L. Brylinski. — *Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques*, Astérisque 140-141, 1986.

[5] C.H. Clemens. — Degeneration of Kähler manifolds, *Duke Math. J.* **44**, (1977), 215-290.

[6] P. Deligne. — *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math. 163, Springer-Verlag, 1970.

[7] P. Deligne. — Théorie de Hodge, II, *Publ. Math. IHES* **40**, (1971), 5-58.

[8] P. Deligne. — Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, dans Modular functions of one variable II, *Lecture Notes in Math.* 349, Springer-Verlag (1973), 501-597.

[9] P. Deligne. — La conjecture de Weil, I, *Publ. Math. IHES* **43**, (1974), 273-308.

[10] P. Deligne. — Théorie de Hodge, III, *Publ. Math. IHES* **44**, (1974), 5-77.

[11] P. Deligne. — La conjecture de Weil, II, *Publ. Math. IHES* **52**, (1980), 137-252.

[12] P. Deligne, D. Mumford. — The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. IHES* **36**, (1969), 75-109.

[13] T. Ekedahl. — On the adic formalism, dans The Grothendieck Festschrift Volume II, *Progress in Math., Birkhäuser* **87**, (1990), 197-218.

[14] F. El Zein. — Théorie de Hodge des cycles évanescents, *Ann. Sci. ENS* **19**, (1986), 107-184.

[15] F. Guillen, V. Navarro Aznar. — Sur le théorème local des cycles invariants, preprint, 1990.

[16] L. Illusie. — Réalisation ℓ-adique de l'accouplement de monodromie, d'après A. Grothendieck, dans Courbes modulaires et courbes de Shimura, Astérisque 196-197, (1993), 27-44.

[17] N. Katz. — *Sommes exponentielles, rédigé par G. Laumon*, Astérisque 79, 1980.

[18] D. Mumford. — Semi-stable reduction, dans Toroidal embeddings I (G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Lecture Notes in Math. **339**, Springer-Verlag, (1973), 53-108.

[19] M. Rapoport, T. Zink. — Ueber die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Characteristik, *Inv. Math.* **68**, (1982), 21-201.

[20] M. Saito. — Modules de Hodge polarisables, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **24**, (1988), 849-995.

[21] M. Saito. — Mixed Hodge modules, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **26**, (1990), 221-333.

[22] M. Saito. — Duality for the vanishing cycles functors, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **25**, (1989), 889-921.

[23] M. Saito, S. Zucker. — The kernel spectral sequence of vanishing cycles, *Duke Math. J.* **61**, (1990), 329-339.

[24] W. Schmid. — Variation of Hodge structure : the singularity of the period mapping, *Inv. Math.* **22**, (1973), 211-319.

[25] J.-P. Serre. — *Corps locaux*, Hermann, 1962.

[26] J.-P. Serre, J. Tate. — Good reduction of abelian varieties, *Ann. of Math.* **88**, (1968), 492-517.

[27] J. Steenbrink. — Limits of Hodge structures, *Inv. Math.* **31**, (1976), 229-257.

[28] J. Steenbrink, S. Zucker. — Variation of mixed Hodge structure I, *Inv. Math.* **80**, (1985), 489-542.

[29] S. Zucker. — Variation of mixed Hodge structure II, *Inv. Math.* **80**, (1985), 543-565.

[SGA 4] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-73

[SGA 5] Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, dirigé par A. Grothendieck, Lecture Notes in Math. 589, Springer-Verlag, 1977

[SGA 7] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, I, dirigé par A. Grothendieck, Lecture Notes in Math. 288, Springer-Verlag, 1972; II, par P. Deligne et N. Katz, Lecture Notes in Math. 340, Springer-Verlag, 1973

[SGA 4 1/2] Cohomologie étale, par P. Deligne, Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag, 1977

L. ILLUSIE
URA D0752 du CNRS
Université de Paris-Sud
Mathématique, Bât. 425
91405 Orsay Cédex (France)

Exposé II

LE CORPS DES PÉRIODES p–ADIQUES

par **Jean–Marc Fontaine** (avec un appendice par Pierre Colmez)

0. — Introduction

0.1. — Notations

Dans cet exposé, K est un corps, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$. On note W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, K_0 son corps des fractions, σ le Frobenius absolu opérant sur k, W et K_0. Si K est de caractéristique 0, on pose $e = [K : K_0]$.

On note $\overline{K}$ une clôture séparable fixée de K et $\overline{k}$ son corps résiduel. On pose $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On désigne par C le complété de $\overline{K}$. On note $\mathcal{O}_C$ (resp. $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_{\overline{K}}$) l'anneau des entiers de C (resp. $K, \overline{K}$).

0.2. — Le plan de ce texte est le suivant :

– Au § 1, on rappelle la définition de l'anneau B_{dR}^+ et de son corps des fractions B_{dR} (le "corps des périodes p–adiques") introduits dans [Fo82a], § 2. L'exposition diffère de *op. cit.* en ce sens que l'on donne une caractérisation de B_{dR}^+ par une propriété universelle : cela nous amène à introduire (n° 1.1) la notion d'épaississement pro–infinitésimal p–adique universel d'une algèbre séparée et complète pour la topologie p–adique et à montrer (n° 1.2 et 1.3) son existence dès que le Frobenius est surjectif sur la réduction mod p.

On donne aussi (n° 1.4) une description de l'anneau quotient $B_{dR}^+/Fil^2 B_{dR}^+$ à l'aide des $\mathcal{O}_K$–différentielles de Kähler de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Celle–ci joue un rôle essentiel dans l'appendice. Elle est aussi utile pour donner une construction élémentaire des périodes p–adiques des variétés abéliennes (Fontaine–Messing, travail non publié, voir aussi l'exposé de Wintenberger, [Exp. IX], dans ce volume).

Au n° 1.5, on explique comment les anneaux filtrés B_{dR}^+ et B_{dR} se construisent à partir de l'épaississement pro-infinitésimal universel p–adique de $\mathcal{O}_C$. On rappelle aussi la définition de l'anneau B_{HT} des "périodes de Hodge–Tate", qui est le gradué associé à l'anneau filtré B_{dR}.

– Au § 2, on rappelle la définition des anneaux A_{cris} (souvent noté $W^{DP}(R)$), B_{cris}^+ et B_{cris} introduits dans [Fo83] et [FM87] : on définit ici B_{cris}^+ comme solution d'un problème universel : c'est l'anneau obtenu en rendant p inversible dans le complété p–adique de l'épaississement à puissances divisées universel de la W–algèbre $\mathcal{O}_C$.

– Au § 3, on définit les anneaux B_{st}^+ et B_{st} à partir de B_{cris}^+ et B_{cris} comme étant les anneaux obtenus en "agrandissant de façon universelle le domaine de définition du logarithme".

– Au § 4, on explique comment B_{cris} se plonge dans B_{dR} et comment le choix d'un prolongement du logarithme p–adique usuel définit un plongement de B_{st} dans B_{dR}.

– Dans le § 5, on donne quelques compléments sur la structure de A_{cris} et B_{cris}. On en déduit, en particulier, l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow B_{cris} \cap B_{dR}^+ \longrightarrow B_{cris} \longrightarrow 0 ,$$

qui joue un rôle important dans les travaux de Bloch et Kato ([BK90]).

Enfin, dans l'appendice, Pierre Colmez montre que $\overline{K}$ est dense dans B_{dR}^+ (cf. [Co90]). Si l'on définit inductivement $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(r)}$ pour $r \in \mathbb{N}$ par $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(0)} = \mathcal{O}_{\overline{K}}$ et

$$\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(r)} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(r-1)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(r-1)}/\mathcal{O}_K}), \quad r \geq 1 ,$$

le théorème de Colmez permet d'identifier B_{dR}^+ au séparé complété de $\overline{K}$ pour la topologie obtenue en prenant comme système fondamental de voisinages de $a \in \overline{K}$ les ensembles de la forme $a + p^m \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(r)}$, pour $m, r \in \mathbb{N}$.

1. — Epaississements pro–infinitésimaux universels

1.1. — Généralités

Soient Λ un anneau et V une Λ–algèbre.

1.1.1. — Un Λ–**épaississement pro–infinitésimal** de V est un couple (D, θ) formé d'une Λ–algèbre D et d'un homomorphisme surjectif de Λ–algèbres

$$\theta_D = \theta : D \longrightarrow V$$

tel que, si $I_D = I$ désigne le noyau de θ, alors D est séparé et complet pour la topologie I–adique.

Les Λ–épaississements pro–infinitésimaux de V forment une catégorie : un morphisme

$$\alpha : D_1 \longrightarrow D_2$$

est un homomorphisme des Λ–algèbres sous–jacentes qui vérifie

$$\theta_{D_1} = \theta_{D_2} \circ \alpha \ .$$

Si cette catégorie admet un objet initial, celui–ci est unique à isomorphisme unique près et s'appelle le Λ–**épaississement pro–infinitésimal universel de** V.

1.1.2. — Si D est un Λ–épaississement pro–infinitésimal de V et si I_D est nilpotent, on dit que D est un Λ–**épaississement infinitésimal de** V ; si m est un entier tel que $I_D^{m+1} = 0$, on dit que l'épaissement est d'ordre $\leq m$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, les Λ–épaississements infinitésimaux d'ordre $\leq m$ de V forment une sous–catégorie pleine de celle des Λ–épaississements pro–infinitésimaux. Si elle admet un objet initial, on l'appelle le Λ–**épaississement infinitésimal universel d'ordre** $\leq m$ **de** V.

Bien sûr, si le Λ–épaississement pro–infinitésimal universel D de V existe, alors D/I_D^{m+1} est un Λ–épaississement infinitésimal universel d'ordre $\leq m$ de V.

1.1.3. — Soit $\mathfrak{p}$ un idéal de Λ et supposons V séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{p}$–adique. On définit de manière évidente la notion de

Λ**–épaississement pro–infinitésimal** (resp. **infinitésimal d'ordre** $\leq m$) **formel** $\mathfrak{p}$**–adique de** V et les objets universels éventuels correspondants. Ces notions ne dépendent que de la topologie définie par les puissances de $\mathfrak{p}$, et non de l'idéal $\mathfrak{p}$ lui–même.

Bien sûr, si D est un Λ–épaississement pro–infinitésimal (resp. infinitésimal d'ordre $\leq m$) formel $\mathfrak{p}$–adique universel de V et si $n \in \mathbb{N}$, $D/\mathfrak{p}^n D$ est un $(\Lambda/\mathfrak{p}^n)$–épaississement pro–infinitésimal (resp. infinitésimal d'ordre $\leq m$) universel de $V/\mathfrak{p}^n V$.

1.2. — Existence d'épaississements pro–infinitésimaux formels p–adiques universels

1.2.1. THÉORÈME. — *Soient Λ un anneau et V une Λ–algèbre séparée et complète pour la topologie p–adique. On suppose que, pour tout $a \in V$, il existe $x, y \in V$ tels que $a = x^p + py$. Alors l'anneau V admet un Λ–épaississement pro–infinitésimal formel p–adique universel.*

Démonstration : Nous allons construire (n° 1.2.2) un Λ–épaississement pro–infinitésimal formel p–adique $A_{\mathrm{inf}}(V/\Lambda)$ de V et montrer (n° 1.2.3) que cet anneau convient.

1.2.2. — Soient $\overline{V} = V/pV$ et R_V la limite projective du diagramme

$$\overline{V} \longleftarrow \overline{V} \longleftarrow \overline{V} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \overline{V} \longleftarrow \cdots ,$$

les applications de transition étant l'élévation à la puissance p.

Un élément $x \in R_V$ peut donc être considéré comme une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déléments de $\overline{V}$ vérifiant $x_{n+1}^p = x_n$, pour tout n. Si, pour un tel x, on choisit, pour tout n, un relèvement $\widehat{x}_n$ de x_n dans V, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite des $\widehat{x}_{n+m}^{p^n}$ converge pour $n \longmapsto +\infty$ vers un élément $x^{(m)} \in V$ qui ne dépend pas du choix des relèvements. L'application

$$x \longmapsto (x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$$

définit une bijection de R_V sur l'ensemble des familles $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ d'éléments de V vérifiant $(x^{(m+1)})^p = x^{(m)}$ pour tout m ; et nous l'utilisons pour identifier

R_V à l'ensemble de telles familles. Si $x = (x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, $y = (y^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \in R_V$, on a $xy = (x^{(m)}y^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ et $x+y = (z^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ avec $z^{(m)} = \lim_{n\longmapsto+\infty}(x^{(m+n)} + y^{(m+n)})^{p^n}$.

Soit $W(R_V)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R_V. Pour tout $x \in R_V$, on note

$$[x] = (x, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in W(R_V)$$

son représentant de Teichmüller dans $W(R_V)$.

On voit que R_V est un anneau parfait (i.e. le Frobenius $x \longmapsto x^p$ est un automorphisme) et que $W(R_V)$ est séparé et complet pour la topologie p–adique.

On note

$$\theta : W(R_V) \longrightarrow V$$

l'application qui envoie $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ sur $\Sigma p^n x_n^{(n)}$.

On vérifie que θ est un homomorphisme surjectif d'anneaux. On note encore

$$\theta : \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} W(R_V) \longrightarrow V$$

l'homomorphisme de Λ-algèbres déduit par extension des scalaires.

Notons $A_{\inf}(V/\Lambda)$ le séparé complété de $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} W(R_V)$ pour la topologie définie par l'idéal engendré par p et le noyau de θ (et encore $\theta : A_{\inf}(V/\Lambda) \longrightarrow V$ l'application induite).

Comme $A_{\inf}(V/\Lambda)$ et les $A_{\inf}(V/\Lambda)/(\operatorname{Ker}\theta)^{m+1}$ sont séparés et complets pour la topologie p–adique, $A_{\inf}(V/\Lambda)$ a une structure de Λ–épaississement pro–infinitésimal formel p–adique de V.

1.2.3. — Il reste à vérifier que $A_{\inf}(V/\Lambda)$ est universel. Pour cela, considérons un Λ–épaississement pro–infinitésimal formel p–adique (D, θ_D) de V. Prouver l'existence et l'unicité d'un morphisme de Λ–épaississements pro–infinitésimaux formels p–adiques de $A_{\inf}(V/\Lambda)$ dans D revient à vérifier l'existence et l'unicité d'un homomorphisme continu d'anneaux p–adiques

$$\alpha : W(R_V) \longrightarrow D$$

tel que $\theta_D \circ \alpha = \theta$.

Si I_D désigne le noyau de θ_D et si $I'_D = I_D + pD$, l'anneau D est séparé et complet pour la topologie I'_D-adique.

Soit $x \in R_V$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, choisissons un relèvement ξ_m dans D de $x^{(m)} \in V$. Comme $\xi_{m+1}^p \equiv \xi_m \bmod I_D$, donc a fortiori $\bmod I'_D$, la suite des $\xi_m^{p^m}$ tend vers une limite $\rho(x)$ dans D indépendante du choix des relèvements. On voit que l'on doit avoir

$$\alpha([x]) = \rho(x), \quad \text{pour tout } x \in R_V.$$

L'unicité de α est alors claire, car il faut

$$\alpha((x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)) = \Sigma p^n \rho(x_n^{p^{-n}})$$

et l'existence résulte de ce que l'application α ainsi définie est bien un homomorphisme continu qui commute aux applications θ.

1.2.4. — Remarques : Soient V comme dans le théorème et $\overline{V} = V/pV$.

a) L'application évidente de R_V dans $R_{\overline{V}}$ est un isomorphisme.

b) On voit que le Λ-épaississement pro-infinitésimal formel p-adique de V ne dépend que de $\overline{V}$ i.e. l'homomorphisme naturel de $A_{\mathrm{inf}}(V/\Lambda)$ dans $A_{\mathrm{inf}}(\overline{V}/\Lambda)$ est un isomorphisme. La filtration naturelle de $A_{\mathrm{inf}}(V/\Lambda)$ (par les puissances de l'idéal noyau de θ) en revanche dépend en général du choix du relèvement V de $\overline{V}$.

c) Supposons que Λ soit une W-algèbre (où, rappelons-le, $W = W(k)$). L'application de k dans R_V, qui à ε associe $(\varepsilon^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, où $\varepsilon^{(m)}$ désigne l'image dans V du représentant de Teichmüller dans W de $\varepsilon^{p^{-m}}$, permet d'identifier k à un sous-anneau de R_V. L'anneau $W(R_V)$ devient une W-algèbre, l'application

$$\theta : W(R_V) \longrightarrow V$$

est W-linéaire et s'étend en une application Λ-linéaire

$$\theta : \Lambda \otimes_W W(R_V) \longrightarrow V,$$

ce qui fait que $A_{\mathrm{inf}}(V/\Lambda)$ s'identifie au séparé complété de $\Lambda \otimes_W W(R_V)$ pour la topologie définie par l'idéal engendré par p et le noyau de θ.

d) Supposons que $\overline{V}$ soit tel que le noyau $\operatorname{Ker} f$ de l'endomorphisme de Frobenius (élévation à la puissance p) soit un idéal de type fini et soient $x_1, x_2, \ldots, x_r$ des éléments de $R_{\overline{V}}$ tels que les images des $x_i^{(1)}$ dans $\overline{V}$ engendrent $\operatorname{Ker} f$. Si I désigne l'idéal de $R_{\overline{V}}$ engendré par les x_i, on voit que $R_{\overline{V}}$ est séparé et complet pour la topologie I-adique et que I est le noyau de la projection naturelle de $R_{\overline{V}}$ sur $\overline{V}$ (i.e. l'application $x \longrightarrow x^{(0)}$). En particulier, pour tout corps parfait k contenue dans $\overline{V}$, $R_V = R_{\overline{V}}$ s'identifie à $A_{\mathrm{inf}}(\overline{V}/k)$.

e) On déduit facilement des remarques c) et d) que, si W est comme ci–dessus, alors, lorsque $\operatorname{Ker} f$ est de type fini sur $\overline{V}$ et lorsque $\Lambda = W$ (resp. l'anneau des entiers d'une extension finie totalement ramifiée du corps des fractions de W), l'anneau $A_{\mathrm{inf}}(V/\Lambda)$ s'identifie à $W(R_V)$ (resp. $\Lambda \otimes_W W(R_V)$).

f) Ces constructions peuvent aussi se faisceautiser : de façon précise, soient Λ un quotient de W ou de $\mathcal{O}_K$ (avec W et $\mathcal{O}_K$ comme ci–dessus) par un idéal non trivial, $Y = \operatorname{Spec} \Lambda$, Y_{syn} le petit site syntomique de Y (cf. [FM87], II, n° 1) et $\mathcal{O}_Y$ le faisceau structural (si U est un schéma syntomique sur Y, on a donc $\mathcal{O}_Y(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$). Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut définir un faisceau $\mathcal{O}^m_{Y,\mathrm{inf}}$ de Λ–algèbres sur Y_{syn}, muni d'un épimorphisme de faisceaux de Λ–algèbres

$$\theta : \mathcal{O}^m_{Y,\mathrm{inf}} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \ ,$$

dont le noyau a sa puissance $(m+1)$–ième nulle et qui est universel pour ces propriétés. En outre, si V est une Λ–algèbre, limite inductive de Λ–algèbres syntomiques, telle que l'élévation à la puissance p soit surjective sur V/pV, le Λ–épaissement infinitésimal universel d'ordre $\leq m$ de V s'identifie à la limite inductive des $\mathcal{O}^m_{Y,\mathrm{inf}}(S)$, pour S parcourant les Λ–algèbres syntomiques dont V est la limite inductive.

1.3. — Le cas de l'anneau des entiers d'un corps local

Dans toute la suite de ce paragraphe, les hypothèses et notations sont celles du n° 0.1.

1.3.1. — Nous posons $R = R_{\mathcal{O}_C}$. Si v est une valuation de K, et si l'on note encore v son unique prolongement à C, on obtient une valuation v_R de R en posant

$$v_R((x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}) = v(x^{(0)}) \ .$$

Il est facile de voir que le corps des fractions de R est un corps complet pour cette valuation, algébriquement clos et que R est l'anneau de ses entiers.

1.3.2. — Si K est de caractéristique p, l'application

$$x \longrightarrow x^{(0)}$$

définit un isomorphisme de R sur $\mathcal{O}_C$ compatible avec la valuation.

En outre, $A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_C/\Lambda)$ s'identifie à R, donc aussi à $\mathcal{O}_C$, si $\Lambda = k$ où $\mathcal{O}_K$ et à $W(R)$ (ou $W(\mathcal{O}_C)$) si $\Lambda = W$.

1.3.3. — **Dans toute la fin du** § 1, on suppose que K est de caractéristique 0.

S'il n'y a pas de risque de confusion, on écrit A_{inf} au lieu de $A_{\text{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)$ (qui s'identifie – cf. la remarque (c) du n° 1.2.4 – à $W_{\mathcal{O}_K}(R) := \mathcal{O}_K \otimes_W W(R)$). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $Fil^m A_{\text{inf}}$ la puissance m–ième du noyau de $\theta : A_{\text{inf}} \longrightarrow \mathcal{O}_C$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$A_{\text{inf}}^m = A_{\text{inf}}^m(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K) = A_{\text{inf}}/Fil^{m+1}A_{\text{inf}} \ ,$$

le $\mathcal{O}_K$–épaississement infinitésimal formel p–adique universel d'ordre $\leq m$ de $\mathcal{O}_C$.

1.4. — Epaississement du 1° ordre et différentielles de Kähler

1.4.1. — Fixons quelques **notations** : Pour tout groupe abélien Γ, on note $T_p(\Gamma)$ le $\mathbb{Z}_p$–module $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Gamma)$ et on pose $V_p(\Gamma) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\Gamma)$. Le $\mathbb{Z}_p$–module $\mathbb{Z}_p(1) = T_p(\overline{K}^*)$ est libre de rang 1 ; pour tout $\mathbb{Z}_p$–module M, on pose $M(1) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)$.

1.4.2. — Notons $\Omega = \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$ le module des différentielles de Kähler de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ relatives à $\mathcal{O}_K$.

Rappelons ([Fo82b], thm. 1') que Ω est un $\mathcal{O}_K$–module de p–torsion, p–divisible. Soient K_0 le corps des fractions de $W(k)$, $\mathcal{D}_{K/K_0}$ la différente de l'extension K/K_0, $\varepsilon = (\varepsilon^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$ (autrement dit, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(\varepsilon^{(m+1)})^p = \varepsilon^{(m)}$ et $\varepsilon^{(1)}$ est une racine primitive p–ième de l'unité dans $\overline{K}$). Alors, si $\mathbf{a}$ est l'idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ inverse de l'idéal engendré par $(\varepsilon^{(1)} - 1) \cdot \mathcal{D}_{K/K_0}$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{a}(1) \longrightarrow \overline{K}(1) \longrightarrow \Omega \longrightarrow 0$$

où l'application de $\overline{K}(1)$ dans Ω est celle qui, à $p^{-m}a \otimes \varepsilon$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, associe

$$a \cdot d_{\log}\varepsilon^{(m)} = a \cdot d\varepsilon^{(m)}/\varepsilon^{(m)} \ .$$

Ceci permet d'identifier Ω à $(\overline{K}/\mathbf{a})(1)$ $(= (C/\widehat{\mathbf{a}})(1)$, si $\widehat{\mathbf{a}}$ désigne l'adhérence de $\mathbf{a}$ dans C), $T_p(\Omega)$ à $\widehat{\mathbf{a}}(1)$ et $V_p(\Omega)$ à $C(1)$.

1.4.3. Proposition. — *Soient $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$ le sous–anneau de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ noyau de*

$$d : \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow \Omega \ ,$$

A'_{inf} le séparé complété de $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$ pour la topologie p–adique et

$$\theta' : A'_{\mathrm{inf}} \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

l'application déduite, par passage aux séparés complétés, de l'inclusion de $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$ dans $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Alors A'_{inf}, muni de θ', est un $\mathcal{O}_K$–épaississement infinitésimal universel du premier ordre de $\mathcal{O}_C$.

Autrement dit, il existe un unique $\mathcal{O}_K$–homomorphisme β de l'anneau A^1_{inf} construit au n° 1.3.3 dans A'_{inf}, tel que $\theta = \theta' \circ \beta$ et cet homomorphisme est un isomorphisme.

1.4.4. — Commençons par vérifier que A'_{inf} est bien un $\mathcal{O}_K$–épaississement infinitésimal du premier ordre de $\mathcal{O}_C$:

Lemme. — *Les applications $d : \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow \Omega$ et $\theta' : A'_{\mathrm{inf}} \longrightarrow \mathcal{O}_C$ sont surjectives et le noyau de θ' est un idéal de carré nul qui s'identifie à $T_p(\Omega) = \widehat{\mathbf{a}}(1)$.*

Preuve : Soient $a, b \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$. Montrons qu'il existe $c \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ tel que $dc = a \cdot db$: choisissons des entiers $r, s > 0$ tels que $p^r da = p^s db = 0$, ainsi que $x \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ solution de $x^{p^{r+s}} + p^r x = b$; on a $p^r(1 + p^s x^{p^{r+s}-1})dx = db$, d'où $p^r dx = (1 + p^s x^{p^{r+s}-1})^{-1} db = db$ et

$$a \cdot db = p^r a \cdot dx = d(p^r ax) \ ,$$

puisque $d(p^r a) = p^r da = 0$.

On a donc une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}'_{\overline{K}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow \Omega \longrightarrow 0 \ .$$

Si, pour tout groupe abélien Γ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Gamma_n = \Gamma/p^n\Gamma$, on obtient une autre suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \Omega_{p^n} \longrightarrow \mathcal{O}'_{\overline{K},n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K},n} \longrightarrow 0$$

qui fait de $\mathcal{O}'_{\overline{K},n}$ une $\mathcal{O}_{K,n}$–algèbre extension de $\mathcal{O}_{\overline{K},n}$ par un idéal de carré nul identifié à Ω_{p^n}. En passant à la limite sur n, on obtient alors la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow T_p(\Omega) \longrightarrow A'_{\mathrm{inf}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0 \ .$$

1.4.5. LEMME. — *Soient L une extension algébrique de K et B une $\mathcal{O}_K$–algèbre, extension de $\mathcal{O}_L$ par un idéal J de carré nul. Alors la suite*

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow \mathcal{O}_L \otimes_B \Omega^1_{B/\mathcal{O}_K} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Preuve : Il s'agit de vérifier l'injectivité de l'application canonique de J dans $\mathcal{O}_L \otimes \Omega^1_{B/\mathcal{O}_K}$ et il est clair que l'on peut supposer l'extension L/K finie.

Soit a un élément de $\mathcal{O}_L$ qui engendre $\mathcal{O}_L$ en tant que $\mathcal{O}_K$–algèbre (un tel élément existe, cf. [Se68], chap. III). Si P désigne le polynôme minimal de a sur K, $\mathcal{O}_L$ s'identifie au quotient $\mathcal{O}_K[X]/(P(X))$. Soient $\widehat{a}$ un relèvement de a dans B et $b = P(\widehat{a}) \in J$.

Soit $\mathcal{B} = J \oplus \mathcal{O}_K[X]$, vue comme une $\mathcal{O}_K$–algèbre, extension (triviale) de $\mathcal{O}_K[X]$ par l'idéal de carré nul J (vu comme un $\mathcal{O}_K[X]$–module via la projection de $\mathcal{O}_K[X]$ sur $\mathcal{O}_L$). Alors B s'identifie au quotient de $\mathcal{B}$ par l'idéal engendré par $(-b, P(X))$.

On a $\mathcal{O}_K[X] \otimes \Omega^1_{\mathcal{B}/\mathcal{O}_K} = J \oplus \mathcal{O}_K[X] \cdot dX$ et $\mathcal{O}_L \otimes \Omega^1_{\mathcal{B}/\mathcal{O}_K} = J \oplus \mathcal{O}_L \overline{dX}$, somme directe de J et du $\mathcal{O}_L$–module libre de rang 1 de base $\overline{dX} = 1 \otimes dX$.

Enfin, $\mathcal{O}_L \otimes \Omega^1_{B/\mathcal{O}_K}$ est le quotient de $J \oplus \mathcal{O}_L \overline{dX}$ par le sous–$\mathcal{O}_L$–module M engendré par $(-b, P'(a)\overline{dX})$. Comme $P'(a) \neq 0$ et comme $\mathcal{O}_L$ est intègre, l'homomorphisme de J dans $(J \oplus \mathcal{O}_L \overline{dX})/M$ est bien injectif.

1.4.6. — Fin de la preuve de la proposition 1.4.3. : Il reste à démontrer que, si (S, θ_S) est un $\mathcal{O}_K$–épaississement infinitésimal du premier ordre de $\mathcal{O}_C$, il existe un et un seul homomorphisme continu de $\mathcal{O}_K$–algèbres

$$\alpha : A'_{\mathrm{inf}} \longrightarrow S \ ,$$

tel que $\theta' = \theta_S \circ \alpha$.

Notons D_f (resp. S_f) l'image inverse de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ par θ' (resp. θ_S). Il est clair qu'il suffit de vérifier qu'il existe un unique homomorphisme de $\mathcal{O}_K$–algèbres $\alpha_f : D_f \longrightarrow S_f$ tel que $\theta' = \theta_S \circ \alpha_f$ (où l'on a encore désigné par θ_S et θ' leurs restrictions à S_f et D_f).

Unicité : Si α_f et α'_f sont deux telles applications, on a

$$\alpha'_f = \alpha_f + \delta \circ \theta_f \ ,$$

où δ est une $\mathcal{O}_K$–dérivation de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ dans $I = \ker \theta_S$; comme Ω est divisible et I est séparé pour la topologie p–adique, on a $\delta = 0$.

Existence : Comme $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$ est dense dans A'_{inf}, donc a fortiori dans D_f, il suffit de montrer l'existence d'une application

$$\alpha_0 : \mathcal{O}'_{\overline{K}} \longrightarrow S_f$$

telle que $\theta_S \circ \alpha_0$ soit l'identité sur $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & S_f & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{K}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega^1_{S_f/\mathcal{O}_K} & \longrightarrow & \Omega & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes grâce au lemme précédent. On en déduit que tout $a \in \mathcal{O}'_{\overline{K}}$ a un unique relèvement $\alpha_0(a) \in S_f$ tel que $1 \otimes d\alpha_0(a) = 0$ (dans $\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega^1_{S_f/\mathcal{O}_K}$). L'unicité de ce relèvement implique que α_0 est un homomorphisme de $\mathcal{O}_K$–algèbres.

1.4.7. — Remarque : Soit $\Lambda = C(1) \oplus \mathcal{O}_{\overline{K}} = V_p(\Omega) \oplus \mathcal{O}_{\overline{K}}$, vu comme $\mathcal{O}_K$–algèbre, extension triviale de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ par un idéal de carré nul identifié à $V_p(\Omega)$.

On voit que $V_p(\Omega)$ peut s'identifier au $\mathcal{O}_{\overline{K}}$–module des $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbf{N}}$, avec $\omega_n \in \Omega$ et $p\omega_{n+1} = \omega_n$. Soit alors Λ_0 le sous–anneau de Λ formé des (ω, a) tels que $\omega_0 = da$.

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_p(\Omega) \longrightarrow \Lambda_0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow 0 \ ,$$

qui fait du séparé complété $\widehat{\Lambda}_0$ de Λ_0 pour la topologie p–adique un $\mathcal{O}_K$–épaississement infinitésimal du premier ordre de $\mathcal{O}_C$. On en déduit un homomorphisme de $A^1_{\text{inf}} = A'_{\text{inf}}$ dans $\widehat{\Lambda}_0$ dont on voit tout de suite que c'est un isomorphisme et qu'il identifie D_f et Λ_0. Ceci implique en particulier

i) que $\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega^1_{D_f/\mathcal{O}_K}$ s'identifie à $V_p(\Omega) = C(1)$ (via la dérivation de $D_f = \Lambda_0$ dans $V_p(\Omega)$ qui envoie (ω, a) sur ω) ;

ii) que l'extension

$$0 \longrightarrow V_p(\Omega) \longrightarrow D_f[1/p] \longrightarrow \overline{K} \longrightarrow 0$$

est scindée ; en particulier, $\overline{K}$ s'identifie à un sous–corps de $D_f[1/p]$, donc a fortiori de $A^1_{\text{inf}}[1/p]$.

1.4.8. — Autres remarques : a) Les constructions ci–dessus s'étendent à des situations plus générales (cf. [Exp. IX], § 1).

b) Ces constructions peuvent aussi se faisceautiser, moyennant quelques précautions : par exemple, si X est un schéma syntomique sur $\mathcal{O}_K$, à fibre générique lisse et si $X_{syn-ét}$ désigne le petit site syntomique–étale de X (cf. [FM87], un morphisme $U \longrightarrow V$ de X–schémas est "syntomique–étale" s'il est syntomique et s'il devient étale lorsque l'on rend p inversible), alors les différentielles de Kähler relatives $\Omega_{/X}$ (par définition, $\Gamma(U, \Omega_{/X}) = \Gamma(U, \Omega_{U/X})$, pour tout schéma U syntomique–étale sur X) forment un faisceau de $\mathcal{O}_X$–modules sur ce site. C'est un faisceau de p–torsion, p–divisible et la différentiation

$$d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{/X}$$

est un épimorphisme de faisceaux. Si π est une uniformisante de $\mathcal{O}_K$, si l'on note $\mathcal{O}'_X$ le faisceau (de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$–algèbres) qui est le noyau de d, si $n \in \mathbb{N}$, et si $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)/\pi^n\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, alors le faisceau conoyau de la mutiplication par π^n dans $\mathcal{O}'_X$ est un A–épaississement infinitésimal du premier ordre du faisceau conoyau de la multiplication par π^n dans $\mathcal{O}_X$.

1.5. — Les anneaux B^+_{dR}, B_{dR}, B^+_{HT} et B_{HT}

1.5.1. — Soit $A_{\mathrm{inf},K} = K \otimes_{\mathcal{O}_K} A_{\mathrm{inf}} = A_{\mathrm{inf}}[1/p]$. L'application $\theta : A_{\mathrm{inf}} \longrightarrow \mathcal{O}_C$ s'étend de manière unique en un homomorphisme de K–algèbres

$$\theta : A_{\mathrm{inf},K} \longrightarrow C$$

qui est surjectif. Son noyau J_K est un idéal principal maximal. Comme dans [Fo82a], n° 2.8, on note B^+_{dR} le séparé complété de $A_{\mathrm{inf},K}$ pour la topologie J_K–adique.

1.5.2. L'anneau B^+_{dR} est un anneau de valuation discrète, complet, contenant $A_{\mathrm{inf},K}$ comme sous–anneau dense et dont l'idéal maximal est l'adhérence $\overline{J}_K$ de J_K dans $A_{\mathrm{inf},K}$. Son corps résiduel $B^+_{dR}/\overline{J}_K = A_{\mathrm{inf},K}/J_K$ s'identifie à C. Pour tout entier $m \geq 0$, $B^+_{dR}/(\overline{J}_K)^{m+1}$ s'identifie à $A^m_{\mathrm{inf},K} = K \otimes_{\mathcal{O}_K} A^m_{\mathrm{inf}} = A^m_{\mathrm{inf}}[1/p]$, où, rappelons–le, A^m_{inf} désigne le $\mathcal{O}_K$–épaississement infinitésimal formel p–adique universel d'ordre $\leq m$ de $\mathcal{O}_C$.

1.5.3. — On a

$$B_{dR}^{+} = \varprojlim A_{\mathrm{inf},K}^{m} \ .$$

Si, au lieu de munir chaque $A_{\mathrm{inf},K}^{m}$ de la topologie discrète, on le munit de la topologie induite par la topologie p–adique sur A_{inf}^{m} (topologie pour laquelle A_{inf}^{m} est séparée et complet), la topologie limite projective ainsi obtenue sur B_{dR}^{+} est moins fine que sa topologie d'anneau de valuation discrète ; nous l'appelons la **topologie canonique**.

1.5.4. — On dispose d'un plongement naturel ν de $\mathbb{Z}_p(1)$ dans le groupe multiplicatif de A_{inf} que l'on peut décrire de (au moins) deux manières différentes : soit $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $\varepsilon_n \in \mathcal{O}_C, \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_{n+1}^{p} = \varepsilon_n$) un élément de $\mathbb{Z}_p(1)$:

i) si, pour tout n, a_n est un relèvement de ε_n dans A_{inf}, la suite $a_n^{p^n}$ converge dans A_{inf} vers un élément $\nu(\varepsilon)$ indépendant des choix des relèvements ;

ii) si l'on identifie A_{inf} à $W_{\mathcal{O}_K}(R) = \mathcal{O}_K \otimes_W W(R)$, on peut identifier ε à un élément de R (en posant $\varepsilon^{(n)} = \varepsilon_n$) et l'on a $\nu(\varepsilon) = 1 \otimes [\varepsilon]$ (où $[\varepsilon] = (\varepsilon, 0, \ldots, 0, \ldots)$).

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p(1)$, on a $\theta(\nu(\varepsilon)) = 1$ et la série

$$\log(\nu(\varepsilon)) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot (\nu(\varepsilon) - 1)^n / n$$

converge dans l'idéal maximal de B_{dR}^{+}. L'application

$$\varepsilon \longmapsto \log(\nu(\varepsilon))$$

est un homomorphisme injectif et **on l'utilise pour identifier $\mathbb{Z}_p(1)$ à un sous–groupe du groupe additif de B_{dR}^{+}.**

Dans [Fo82a], on démontre par un calcul explicite un peu pénible (prop. 2.17) qu'un élément non nul de $\mathbb{Z}_p(1)$ est une uniformisante de B_{dR}^{+}, i.e. n'est pas contenu dans le carré de l'idéal maximal de B_{dR}^{+}. Cela peut se voir directement en remarquant que, si l'on utilise la description de $A_{\mathrm{inf}}^{1} = A_{\mathrm{inf}}'$ donnée au n° 1.4, alors le noyau de la projection de $A_{\mathrm{inf},K}^{1}$ sur C s'identifie à

$V_p(\Omega)$ et l'image de ε dans $V_p(\Omega)$ est $(\varepsilon_n^{-1} \cdot d\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est un générateur de ce C–espace vectoriel de dimension 1.

1.5.5. — Rappelons enfin que l'on définit B_{dR} comme étant le corps des fractions de B_{dR}^+. Comme n'importe quel corps muni d'une valuation discrète, il est muni d'une filtration naturelle décroissante indexée par $\mathbb{Z}$: si v_{dR} désigne la valuation de B_{dR} normalisée par $v_{dR}(B_{dR}^*) = \mathbb{Z}$, on a

$$Fil^m B_{dR} = \{b \in B_{dR} | v_{dR}(b) \geq m\}, \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z}$$

(en particulier $Fil^0 B_{dR} = B_{dR}^+$ et $Fil^1 B_{dR}$ est son idéal maximal).

Rappelons que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Z}_p(m)$ la m–ième puissance tensorielle du $\mathbb{Z}_p$–module $\mathbb{Z}_p(1)$ et $\mathbb{Z}_p(-m)$ son dual; rappelons aussi que si M est un $\mathbb{Z}_p$–module et si $m \in \mathbb{Z}$, on pose $M(m) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(m)$.

Il résulte alors du n° précédent que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $gr^m B_{dR}(= Fil^m B_{dR}/Fil^{m+1} B_{dR})$ s'identifie à $C(m)$. Autrement dit, l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée B_{dR} s'identifie à l'algèbre

$$B_{HT} = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} C(m) = C[t, t^{-1}]$$

anneau des polynômes de Laurent en t, si t est n'importe quel élément non nul de $\mathbb{Z}_p(1)$ (ici HT signifie Hodge–Tate).

1.5.6. — La construction de B_{dR} est fonctorielle. De façon précise, donnons–nous deux corps K et L de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait de caractéristique p, des clôtures algébriques $\overline{K}$ de K et $\overline{L}$ de L et un homomorphisme continu $\nu : \overline{K} \longrightarrow \overline{L}$ envoyant K sur un sous–corps fermé de L. Alors, avec des conventions évidentes, ν induit un homomorphisme continu

$$B_{dR}(\nu) : B_{dR}(K, \overline{K}) \longrightarrow B_{dR}(L, \overline{L}) \ ,$$

qui est "non ramifié", au sens que l'image d'une uniformisante du premier corps est une uniformisante du second, et qui, sur les corps résiduels, n'est autre que le plongement du complété de $\overline{K}$ dans le complété de $\overline{L}$ induit par ν. Par conséquent $B_{dR}(\nu)$ est un isomorphisme si et seulement si ν induit un isomorphisme du complété de $\overline{K}$ sur celui de $\overline{L}$, ce qui équivaut à dire que la fermeture algébrique de $\nu(K)$ dans L est dense dans L, ou encore que ν induit un isomorphisme du corps résiduel de $\overline{L}$ sur celui de $\overline{K}$, ou encore que le corps résiduel de L est algébrique sur celui de K.

En particulier, on ne change pas B_{dR} si l'on remplace K par un sous–corps fermé de C contenant K pour lequel la valuation est encore discrète, ce que l'on peut traduire en disant que B_{dR} "**dépend de C mais non de K**".

1.5.7. — Par fonctorialité, $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ opère continuement sur B_{dR} (et l'action induite sur le gradué associé est l'action naturelle).

Si $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ et H est un sous–groupe ouvert de G, on a

$$(Fil^i B_{HT}/Fil^{i+j} B_{HT})^H = (Fil^i B_{dR}/Fil^{i+j} B_{dR})^H = \begin{cases} \overline{K}^H & \text{si } i \leq 0 < i+j \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

cela est immédiat, par récurrence sur j, à partir de la description des $H^r(H, C(s))$ due à Tate ([Ta67], Thm. 1 et 2). En particulier, on a $(A^m_{\inf,K})^H = \overline{K}^H$, pour tout entier $m \geq 1$, et, par passage à la limite,

$$(B^+_{HT})^H = (B_{HT})^H = (B^+_{dR})^H = (B_{dR})^H = \overline{K}^H .$$

Il en résulte que B^+_{HT}, B_{HT}, B^+_{dR} et B_{dR} sont en fait des $\overline{K}$–algèbres.

1.5.8. — **Remarques** : a) Bien sûr, B^+_{HT} et B_{HT} sont même des C–algèbres ; on sait par ailleurs qu'il existe une section

$$s : C \longrightarrow B^+_{dR}$$

de la projection $\theta : B^+_{dR} \longrightarrow C$; on peut vérifier qu'il n'est pas possible de choisir s continue (pour la topologie p–adique sur C et la topologie canonique sur B^+_{dR} ; il n'existe déjà pas de section continue de C sur $A^1_{\inf,K}$) et que l'on ne peut pas non plus choisir s commutant à l'action de G.

b) On renvoie à Faltings ([Fa89]) et à Wintenberger ([Exp. IX], § 1) pour une définition de B_{dR} dans un contexte plus général.

2. — Pd–épaississements universels : l'anneau B^+_{cris}

2.1. — Généralités

2.1.1. — Rappelons que, si D est un anneau, un *pd*–idéal J de B est un idéal muni de puissances divisées, i.e. d'une famille $\gamma = (\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ d'applications de J dans lui–même vérifiant les propriétés que l'on obtient en pensant que, "moralement" $\gamma_m(x) = x^m/m!$ (cf. par exemple, [BO], § 3, pour un énoncé précis et pour plus de détails sur les puissances divisées) ; il est commode de poser $\gamma_0(x) = 1$, pour tout $x \in J$.

2.1.2. — Soient Λ un anneau, $\mathfrak{p} = (\pi)$ un idéal principal de Λ muni de puissances divisées et V une Λ–algèbre.

Un Λ–épaississement à puissances divisées $\mathfrak{p}$–adique de V, ou encore **un Λ–*pd*–épaississement π–adique de V** est la donnée d'un triplet formé d'une Λ–algèbre D, d'un homomorphisme surjectif de Λ–algèbres $\theta : D \longrightarrow V$ et d'une structure γ de *pd*–idéal sur le noyau de θ, compatible avec les puissances divisées $\gamma^{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$, i.e. telle que, si $a \in D$ vérifie $a\pi \in J$, alors

$$\gamma_m(a\pi) = a^m \cdot \gamma^{\mathfrak{p}}_m(\pi), \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N} .$$

Les Λ-*pd*-épaississements π–adiques de V forment, de manière évidente, une catégorie. Si cette catégorie admet un objet initial, celui–ci est unique à isomorphisme unique près et s'appelle le **Λ-*pd*-épaississement π–adique universel de V.**

Si V est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{p}$–adique, un **Λ-*pd*-épaississement formel π–adique de V** est un Λ-*pd*-épaississement π–adique de V qui est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{p}$–adique. Ici encore, on a une notion évidente d'objet universel.

Bien sûr, si D est un Λ-*pd*-épaississement formel π–adique universel de V et si $n \in \mathbb{N}$, $D/\pi^n D$ est un $(\Lambda/\mathfrak{p}^n)$-*pd*-épaississement π–adique universel de $V/\pi^n V$.

2.2. — Existence de *pd*–épaississements formels *p*–adiques universels

2.2.1. THÉORÈME. — *Soient Λ un anneau et V une Λ-algèbre séparée et complète pour la topologie p-adique. On suppose que, pour tout $a \in V$, il existe $x, y \in V$ tels que $a = x^p + py$. Alors l'anneau V admet un Λ-pd-épaississement formel p-adique universel.*

2.2.2. — Preuve : Soient R_V, $W(R_V)$ et

$$\theta : \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} W(R_V) \longrightarrow V$$

comme au n° 1.2.2. Notons $A_{cris}(V/\Lambda)$ le séparé complété pour la topologie p–adique de l'enveloppe à puissances divisées de $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} W(R_V)$, relativement à l'idéal noyau de θ, compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p; notons encore

$$\theta : A_{cris}(V/\Lambda) \longrightarrow V$$

l'application induite.

Il est clair que $A_{cris}(V/\Lambda)$ est un Λ–*pd*–épaississement formel p–adique de V et nous allons montrer qu'il est universel.

La démonstration est essentiellement la même que dans le cas pro–infinitésimal. De façon précise, soit (D, θ_D, γ) un autre Λ–*pd*–épaississement formel p–adique de V. Prouver l'existence et l'unicité d'un morphisme de Λ–*pd*–épaississements formels p–adiques de $A_{cris}(V/\Lambda)$ dans D revient à vérifier l'existence et l'unicité d'un homomorphisme continu d'anneaux p–adiques

$$\alpha : W(R_V) \longrightarrow D$$

tel que $\theta_D \circ \alpha = \theta$ (car un tel morphisme s'étend de façon unique en un morphisme de Λ–algèbres de $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} W(R_V)$ dans D, puis en un *pd*–homomorphisme continu de $A_{cris}(V/\Lambda)$ dans D).

Soit alors J_D le noyau de θ_D. Si d_1, $d_2 \in D$ vérifient $d_1 \equiv d_2 \bmod J_D$, on a $d_1^p \equiv d_2^p \bmod pJ_D$. Il en résulte que, si $x \in R_V$ et si, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on choisit un relèvement ξ_m dans D de $x^{(m)} \in V$, la suite des $\xi_m^{p^m}$ tend vers une limite $\rho(x)$ dans D indépendante du choix des relèvements. On voit que l'on doit avoir

$$\alpha([x]) = \rho(x), \quad \text{pour tout } x \in R_V \ .$$

L'unicité de α est alors claire, car il faut

$$\alpha((x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)) = \Sigma p^n \rho(x_n^{p^{-n}})$$

et l'existence résulte de ce que l'application α ainsi définie est bien un homomorphisme continu qui commute aux applications θ.

2.2.3. — Remarques : a) Dans la suite, on note $A_{cris}(V/\Lambda)$ le Λ–*pd*–épaississement formel p–adique universel de V.

b) Cette construction est fonctorielle. En outre $A_{cris}(V/\Lambda)$ ne dépend que de la réduction modulo p de V, i.e. si $\overline{V} = V/pV$, l'homomorphisme évident $A_{cris}(V/\Lambda) \longrightarrow A_{cris}(\overline{V}/\Lambda)$ est un isomorphisme.

c) Dans le cas où l'anneau Λ considéré ci–dessus est l'anneau W des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps parfait k (resp. l'anneau $\mathcal{O}_K$ des entiers d'une extension finie totalement ramifiée du corps des fractions de W), on voit que $A_{cris}(V/\Lambda)$ s'identifie à l'enveloppe à puissances divisées de $W(R_V)$ (resp. $W_{\mathcal{O}_K}(R_V) = \mathcal{O}_K \otimes_W W(R_V)$) relativement à l'idéal noyau de θ, compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p.

d) Si $\Lambda = W$, on écrit $A_{cris}(V)$ au lieu de $A_{cris}(V/W)$; c'est une W–algèbre et le Frobenius absolu $x \longmapsto x^p$ sur $\overline{V}$ induit par fonctorialité un endomorphisme φ de l'anneau $A_{cris}(V) = A_{cris}(\overline{V})$; on voit que φ est semi–linéaire par rapport au Frobenius absolu agissant sur W.

e) Ces constructions peuvent aussi se faisceautiser : dans le cas où $\Lambda = W$, ceci est fait dans [FM87], part II.

2.3. — Les anneaux B_{cris}^+ et B_{cris}

On reprend les notations du n° 1. On note

$$A_{cris} = A_{cris}(\mathcal{O}_C)$$

le W–pd–épaississement formel p–adique universel de $\mathcal{O}_C$ et

$$\theta : A_{cris} \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

l'homomorphisme canonique.

2.3.1. — On note K_0 le corps des fractions de W et on pose

$$B^+_{cris} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} = K_0 \otimes_W A_{cris}.$$

C'est donc une K_0–algèbre, sur laquelle opère le Frobenius φ (semi–linéairement par rapport au Frobenius absolu σ agissant sur K_0). Par fonctorialité, on a aussi une action linéaire de $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ qui commute à l'action de φ.

2.3.2. — Si K est de caractéristique p, $R = R_{\mathcal{O}_C}$ s'identifie à $\mathcal{O}_C$ (n° 1.3.2), on a $A_{cris} = W(R) = W(\mathcal{O}_C)$ (car le noyau de la projection de $W(R)$ sur $\mathcal{O}_C$ est le pd–idéal engendré par p) et $B^+_{cris} = W(\mathcal{O}_C)[1/p]$.

2.3.3. — Si K est de caractéristique 0, $W(R)$ est un anneau intègre et le noyau de

$$\theta : W(R) \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

est un idéal principal (un élément $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ du noyau de θ est un générateur si et seulement si x_1 est une unité). Si ξ est un générateur de cet idéal, A_{cris} (qui est l'anneau noté $W^{DP}(R)$ dans [Fo83]) s'identifie au séparé complété pour la topologie p–adique de la sous–$W(R)$–algèbre de $W(R)[1/p]$ engendrée par les $\gamma_m(\xi) = \xi^m/m!$ et $B^+_{cris} = A_{cris}[1/p]$.

2.3.4. — Supposons encore K de caractéristique 0. On a vu au n° 2.4 comment on pouvait identifier $\mathbb{Z}_p(1)$ à un sous–groupe additif de B^+_{dR}. La même construction [i.e. l'application $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \log(\nu(\varepsilon))$ où $\nu(\varepsilon) = [\varepsilon] \in W(R) \subset A_{cris}$ et $\log(\nu(\varepsilon)) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot (\nu(\varepsilon) - 1)^n/n)$] permet d'identifier $\mathbb{Z}_p(1)$ à un sous–groupe (et même un sous–$\mathbb{Z}_p$–module) du groupe additif de A_{cris}. Si t est un générateur de $\mathbb{Z}_p(1) \subset A_{cris}$, on pose

$B_{cris} = B^+_{cris}[1/t]$ (indépendant du choix de t). Comme t appartient au *pd*-idéal de A_{cris} qui est le noyau de θ, on a $t^p \in pA_{cris}$ (par un calcul plus précis, on peut vérifier que $t^{p-1} \in pA_{cris}$) et on a aussi $B_{cris} = A_{cris}[1/t]$.

On voit en outre que $\varphi t = pt$. Ceci permet d'étendre le Frobenius à B_{cris} en posant $\varphi t^{-1} = p^{-1}t^{-1}$.

3. — L'anneau B_{st}

Dans toute la suite de cet exposé, on conserve les hypothèses et notations qui précèdent ; en particulier, on suppose toujours K de caractéristique 0.

3.1. — Construction de B^+_{st} et B_{st}

3.1.1. — Pour tout groupe commutatif Γ, on pose $V_{(p)}(\Gamma) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[1/p], \Gamma)$. Si l'on note Γ multiplicativement, $V_{(p)}(\Gamma)$ s'identifie à l'ensemble des $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x^{(n)} \in \Gamma$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_p(\Gamma) \longrightarrow V_{(p)}(\Gamma) \longrightarrow \Gamma \ ,$$

où $T_p(\Gamma)$ est le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Gamma)$. Si Γ est p-divisible, l'application $V_{(p)}(\Gamma) \longrightarrow \Gamma$ est surjective ; si de plus Γ est sans p-torsion, cette application est un isomorphisme.

3.1.2. — Pour tout anneau V, soit V^* le groupe de ses unités. Si $R^{*,+}$ (resp. $\mathcal{O}_C^{*,+}$) désigne le sous-groupe de R^* (resp. $\mathcal{O}_C^*$) formé des unités congrues à 1 modulo l'idéal maximal, on a des identifications naturelles

$$\mathcal{O}_C^* = \overline{k}^* \times \mathcal{O}_C^{*,+},\ R^* = \overline{k}^* \times R^{*,+},\ V_{(p)}(\mathcal{O}_C^*) = R^*,\ V_{(p)}(C^*) = (Fr\ R)^* \ ,$$

où $Fr\ R$ désigne le corps des fractions de R. Si v est une valuation de C et si v_R est la valuation de $Fr\ R$ qui lui est naturellement associée (cf. n° 1.3.1), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(1) & \longrightarrow & R^* & \longrightarrow & \mathcal{O}_C^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(1) & \longrightarrow & (Fr\ R)^* & \longrightarrow & C^* & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle v_R} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \\ & & & & \mathbb{Q} & = & \mathbb{Q} & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes.

3.1.3. — Pour tout $y \in R$, on note $[y] \in W(R)$ $(\subset A_{cris} \subset B^+_{cris})$ son représentant de Teichmüller.

Soit $x = 1 + y \in R^{*,+}$. Pour $n \gg 0$, $[y]^n/n \in A_{cris}$, et la suite $[y]^n/n$ tend p–adiquement vers 0. La série

$$\sum_{n>0} (-1)^{n+1}[y]^n/n$$

converge donc vers un élément $\lambda(x) \in B^+_{cris}$. L'application

$$\lambda : R^{*,+} \longrightarrow B^+_{cris}$$

est un homomorphisme injectif que l'on étend à R^* en posant $\lambda(x) = 0$, si $x \in \overline{k}^*$.

3.1.4. — Considérons les couples (S, λ_S) où S est une B^+_{cris}–algèbre et

$$\lambda_S : (Fr\ R)^* \longrightarrow S$$

est un homomorphisme qui prolonge λ. Avec une définition évidente pour les flèches, ces couples forment une catégorie. Il est clair que celle–ci a un objet initial, unique à isomorphisme unique près. On note B_{st}^+ la B_{cris}^+–algèbre ainsi obtenue et

$$\lambda : (Fr\ R)^* \longrightarrow B_{st}^+$$

l'homomorphisme correspondant.

3.1.5. — On a donc

$$B_{st}^+ = Sym((Fr\ R)^*) \otimes_{Sym(R^*)} B_{cris}^+ \ .$$

En fait B_{st}^+ est un anneau de polynômes à une variable à coefficients dans B_{cris}^+. Plus précisément, comme B_{cris}^+ est une $\mathbb{Q}$–algèbre et comme $(Fr\ R)^*/R^*$ est un $\mathbb{Q}$–espace vectoriel de dimension un, si l'on choisit un élément $b \in (Fr\ R)^*$ qui n'appartient pas à R^*, l'homomorphisme de B_{cris}^+–algèbres

$$B_{cris}^+[X] \longrightarrow B_{st}^+ \ ,$$

qui envoie X sur $\lambda(b)$ est un isomorphisme. En outre, pour tout élément $x \in (Fr\ R)^*$, il existe un entier $r \geq 1$ tel que l'on puisse écrire $x^r = b^m a$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et $a \in R^*$; on a alors

$$\lambda(x) = r^{-1} \cdot \lambda(x^r) = r^{-1} \cdot (\lambda(a) + m \cdot \lambda(b)) \ .$$

3.1.6. — On pose enfin

$$B_{st} = B_{cris} \otimes_{B_{cris}^+} B_{st}^+ \ .$$

C'est donc un anneau de polynômes en une variable à coefficients dans B_{cris} et c'est aussi $B_{st}^+[1/t]$.

Grâce à la propriété universelle qui définit B_{st}^+ l'action de G s'étend de manière unique à B_{st}^+ et à B_{st}.

3.2. — Frobenius et monodromie

3.2.1. — Le Frobenius s'étend **de manière canonique** à B_{st}^+ et B_{st}. En effet, dans B_{cris}^+, on a $\varphi(\lambda(x)) = p \cdot \lambda(x)$, pour tout $x \in R^*$. On voit donc qu'il y a une manière et une seule d'étendre φ en un endomorphisme de B_{st}^+

de sorte que $\varphi(\lambda(x)) = p \cdot \lambda(x)$, pour tout $x \in (Fr\ R)^*$. Bien sûr, φ s'étend aussi à B_{st} et commute à l'action de G.

3.2.2. — On a des isomorphismes $(Fr\ R)^*/R^* \simeq C^*/\mathcal{O}_C^* \simeq \overline{K}^*/\mathcal{O}_{\overline{K}}^* (\simeq \mathbb{Q})$ et l'application

$$\kappa : B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}} (\overline{K}^*/\mathcal{O}_{\overline{K}}^*) \longrightarrow \Omega^1_{B_{st}/B_{cris}}$$

qui envoie $b \otimes \widetilde{x}$ sur $b \cdot d(\lambda(x))$ où $\widetilde{x}$ est l'image de $x \in (Fr\ R)^*$ est un isomorphisme.

Choisissons une valuation v sur $\overline{K}$, à valeurs dans $\mathbb{Q}$, et notons encore v son prolongement à C. On peut considérer v comme le choix d'un isomorphisme

$$(Fr\ R)^*/R^* = C^*/\mathcal{O}_C^* = \overline{K}^*/\mathcal{O}_{\overline{K}}^* \simeq \mathbb{Q}\ .$$

Par extension des scalaires, v fournit un isomorphisme

$$\widetilde{v} : B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}} (\overline{K}^*/\mathcal{O}_{\overline{K}}^*) \longrightarrow B_{st}$$

donc une **dérivation**

$$N := \widetilde{v} \circ \kappa^{-1} \circ d : B_{st} \longrightarrow B_{st}$$

que nous appelons **l'opérateur de monodromie** associé à v. C'est l'unique B_{cris}-dérivation de B_{st} à valeurs dans B_{st} telle que $N(\lambda(b)) = v_R(b)$ pour tout $b \in (Fr\ R)^*$ (où v_R est la valuation de $Fr\ R$ associée à v).

3.2.3. — On voit que N commute à l'action de G et, comme $\varphi(\lambda(b)) = p\lambda(b)$, pour tout $b \in (Fr\ R)^*$, que

$$N \circ \varphi = p\varphi \circ N\ .$$

En outre, on a des suites exactes courtes de B_{cris}^+-modules

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B_{cris}^+ & \longrightarrow & B_{st}^+ & \xrightarrow{N} & B_{st}^+ & \longrightarrow & 0 \quad \text{et} \\ 0 & \longrightarrow & B_{cris} & \longrightarrow & B_{st} & \xrightarrow{N} & B_{st} & \longrightarrow & 0\ . \end{array}$$

3.2.4. — Remarque : Un choix naturel pour v est la valuation v_0 normalisée par $v_0(p) = 1$. Nous appelons **"canonique"** l'opérateur de monodromie correspondant.

4. — Comparaisons

4.1. — Le plongement de B_{cris} dans B_{dR}

4.1.1. — Posons $W_{K_0}(R) = W(R)[1/p] = K_0 \otimes_W W(R)$ et $W_K(R) = K \otimes_W W(R) = K \otimes_{K_0} W_{K_0}(R)$. On a des inclusions naturelles $W(R) \subset W_{K_0}(R) \subset W_K(R)$.

Choisissons, comme au n° 2.3.3, un générateur ξ du noyau de $\theta : W(R) \longrightarrow \mathcal{O}_C$. Si $m \in \mathbb{Z}$ et si $(a_n)_{n \geq m}$ est une suite d'élément de $W_K(R)$, la série $\sum_{n \geq m} a_n \xi^n / n!$ converge, dans B_{dR} vers un élément de $Fil^m B_{dR}$ et tout élément de $Fil^m B_{dR}$ peut s'écrire (de manière non unique) sous cette forme. Pour qu'un tel élément n'appartienne pas à $Fil^{m+1} B_{dR}$, il faut et il suffit que $\theta(a_m) \neq 0$ (où l'on désigne encore par $\theta : W_K(R) \longrightarrow C$ l'homomorphisme de K-algèbres déduit de $\theta : W(R) \longrightarrow \mathcal{O}_C$ par extension des scalaires).

Par ailleurs, $W(R)$ est séparé et complet pour la topologie ξ-adique et s'identifie donc à un sous-anneau de B_{dR}.

4.1.2. — Si maintenant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $W(R)$ tendant p-adiquement vers 0, la série $\sum_{n \geq 0} a_n \xi^n / n!$ converge dans A_{cris} et tout élément de A_{cris} peut s'écrire (de manière non unique) sous cette forme. On voit que l'on peut choisir les a_n de façon que, si $a_n \neq 0$ alors $\theta(a_n) \neq 0$.

On en déduit en particulier que l'application naturelle de A_{cris} dans B_{dR}^+ est injective.

4.1.3. — De même, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $W_{K_0}(R)$ (resp. $W_K(R)$) tendant p-adiquement vers 0, la série $\sum_{n \geq 0} a_n \xi^n / n!$ converge dans B_{cris}^+ (resp. $K \otimes_{K_0} B_{cris}^+$) et tout élément de cet anneau peut s'écrire (de manière non unique) sous cette forme. Ici encore, on peut choisir les a_n de façon que, si $a_n \neq 0$ alors $\theta(a_n) \neq 0$. Il en résulte que les applications naturelles $A_{cris} \longrightarrow B_{cris}^+ \longrightarrow K \otimes_{K_0} B_{cris}^+ \longrightarrow B_{dR}^+$ sont injectives. Il en est de même des applications $B_{cris} \longrightarrow K \otimes_{K_0} B_{cris} \longrightarrow B_{dR}$ que l'on en déduit en rendant inversible un élément non nul de $\mathbb{Z}_p(1)$.

Dans la suite nous utilisons ces injections pour identifier tous ces anneaux, ainsi que $W(R)$, à des sous-anneaux de B_{dR}.

4.1.4. — **Remarque** : Dans [Fo82a], au lieu de B_{cris}, on utilisait d'autres sous-anneaux de B_{dR}, les anneaux notés $B_{\mathfrak{a}}$ et B. Rappelons brièvement comment on les construit : Notons $\mathfrak{a}_0$ l'idéal de R formé des éléments x tels que $v_R(x) = v_0(x^{(0)}) \geq 1$ (où v_0 est la valuation de C telle que $v_0(p) = 1$). Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de R contenu dans $\mathfrak{a}_0$, on note $S_{\mathfrak{a}}$ la sous-$W(R)$-algèbre de $W_{K_0}(R) = W(R)[1/p]$ engendrée par les éléments de la forme $[x]/p$, avec $x \in \mathfrak{a}$, $\widehat{S}_{\mathfrak{a}}$ le séparé complété de $S_{\mathfrak{a}}$ pour la topologie p-adique et $B_{\mathfrak{a}} = \widehat{S}_{\mathfrak{a}}[1/p]$. Alors l'inclusion de $S_{\mathfrak{a}}$ dans $W_{K_0}(R) \subset B_{dR}^+$ se prolonge par continuité en un plongement de $S_{\mathfrak{a}}$, donc aussi de $B_{\mathfrak{a}}$ dans B_{dR}^+. On a $B_{\mathfrak{a}'}^+ \subset B_{\mathfrak{a}}^+$ si $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ et on note B^+ l'intersection des $B_{\mathfrak{a}}^+$. On a $\mathbb{Z}_p(1) = \mathbb{Z}_p \cdot t \subset B^+$ et on pose $B_{\mathfrak{a}} = B_{\mathfrak{a}}^+[1/t]$ et $B = B^+[1/t]$.

On vérifie facilement que $\widehat{S}_{\mathfrak{a}_0^p} \subset A_{cris} \subset \widehat{S}_{\mathfrak{a}_0^{p-1}}$, donc que

$$B_{\mathfrak{a}_0^p}^+ \subset B_{cris}^+ \subset B_{\mathfrak{a}_0^{p-1}}^+ \quad \text{et} \quad B_{\mathfrak{a}_0^p} \subset B_{cris} \subset B_{\mathfrak{a}_0^{p-1}} \ .$$

On voit aussi que $\varphi(\widehat{S}_{\mathfrak{a}}) = \widehat{S}_{\mathfrak{a}^p}$, $\varphi(B_{\mathfrak{a}}^+) = B_{\mathfrak{a}^p}^+$ et $\varphi(B_{\mathfrak{a}}) = B_{\mathfrak{a}^p}$. En particulier, **on a** $B^+ = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n(B_{cris}^+)$ et $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n(B_{cris})$.

4.2. — Construction d'un plongement de B_{st} dans B_{dR}

4.2.1. — Soit

$$\log : \mathcal{O}_{\overline{K}}^* \longrightarrow \overline{K}$$

le logarithme p-adique usuel (si $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^*$ est de la forme $a = [u] \cdot a^+$, où $[u]$ est le représentant de Teichmüller d'un élément de k et où $a^+ \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{*,+} = \mathcal{O}_{\overline{K}}^* \cap \mathcal{O}_C^{*,+}$, $\log(a) = \sum_{n>0} (-1)^{n+1} n^{-1} (a^+ - 1)^n$).

On choisit un prolongement du logarithme à $\overline{K}^*$, i.e. un homomorphisme

$$\log : \overline{K}^* \longrightarrow \overline{K} \ ,$$

dont la restriction à $\mathcal{O}^*_{\overline{K}}$ est le logarithme p-adique usuel, **commutant à l'action de $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.**

Faire un tel choix revient à choisir un élément $c \in K$ et à décider que

$$\log(p) = c \ ;$$

en effet, pour tout $x \in \overline{K}^*$, il existe r, $s \in \mathbb{Z}$, avec $r > 0$ tels que $x^r/p^s \in \mathcal{O}^*_{\overline{K}}$ et on a alors

$$\log(x) = r^{-1}(sc + \log(x^r/p^s)) \ .$$

On voit aussi qu'il revient au même de choisir un prolongement du logarithme p-adique usuel à $\overline{K}^*$ ou à C^*.

4.2.2. — Le choix que l'on vient de faire permet de définir un homomorphisme de B^+_{cris}-algèbres

$$\iota^+ : B^+_{st} \longrightarrow B^+_{dR}.$$

D'après la propriété universelle servant à définir B^+_{st} (n° 3.1.4), il suffit en effet de définir un homomorphisme

$$\lambda_{dR} : (Fr\ R)^* \longrightarrow B^+_{dR}$$

prolongeant λ.

Commençons par définir $\lambda_{dR}(x)$ lorsque $x \in (Fr\ R)^*$ vérifie $x^{(0)} \in \overline{K}^*$. Comme $B^+_{dR} \supset \overline{K}$, $[x]/x^{(0)} \in B^+_{dR}$; comme $\theta([x]/x^{(0)}) = 1$, $y = [x]/x^{(0)} - 1$ appartient à l'idéal maximal de B^+_{dR} et la série

$$\log([x]/x^{(0)}) = \sum_{n>0} (-1)^{n+1} n^{-1} \cdot y^n$$

converge dans B^+_{dR} et on pose

$$\lambda_{dR}(x) = \log([x]/x^{(0)}) + \log(x^{(0)}) \ .$$

Dans le cas général, remarquons que tout $x \in (Fr\ R)^*$ peut s'écrire (de façon non unique) sous la forme $x = ab$, avec $a \in R^*$ et $b^{(0)} \in \overline{K}^*$; si l'on pose

$$\lambda_{dR}(x) = \lambda(a) + \lambda_{dR}(b) \ ,$$

on voit que le résultat obtenu est indépendant du choix de l'écriture de x sous cette forme et que l'application λ_{dR}, ainsi définie, convient.

4.2.3. — En rendant un élément non nul de $\mathbb{Z}_p(1)$ inversible, l'application ι^+ induit un homomorphisme de B_{cris}–algèbres

$$\iota : B_{st} \longrightarrow B_{dR} \ .$$

Par extension des scalaires, l'application ι^+ (resp. ι) induit un homomorphisme de $(K \otimes_{K_0} B^+_{cris})$–algèbres (resp. $(K \otimes_{K_0} B_{cris})$–algèbres)

$$\iota^+_K : K \otimes_{K_0} B^+_{st} \longrightarrow B_{dR} (resp. \ \iota_K : K \otimes_{K_0} B_{st} \longrightarrow B_{dR}) \ .$$

4.2.4. Théorème. — *Les applications*

$$\iota^+_K : K \otimes_{K_0} B^+_{st} \longrightarrow B_{dR} \quad \text{et} \quad \iota_K : K \otimes_{K_0} B_{st} \longrightarrow B_{dR}$$

sont injectives.

La preuve est l'objet du n° 4.3.

4.2.5. — **Remarques** : a) Dans la suite, nous utilisons les applications ι et ι_K pour identifier B_{st} et $K \otimes_{K_0} B_{st}$ à des sous–anneaux de B_{dR}. On prendra garde toutefois que cette identification **dépend du choix de l'application** log prolongeant le logarithme p–adique usuel.

b) On voit facilement que l'image de $K \otimes_{K_0} B_{st}$ dans B_{dR} est indépendante du choix du logarithme. En particulier, lorsque $e = 1$, l'application ι dépend du choix du logarithme mais pas son image ; en revanche, l'action de φ sur cette image, déduite par transport de structure de l'action de φ sur B_{st} en dépend.

c) Pour l'application log, il y a un choix "naturel" consistant à choisir $\log(p) = 0$. Nous appelons l'application ι (resp. ι_K) correspondante **le plongement canonique de** B_{st} (resp. $K \otimes_{K_0} B_{st}$) **dans** B_{dR}.

d) Tout comme celle de B_{dR}, les constructions de B_{cris} et de B_{st} et leurs plongements dans B_{dR} sont fonctoriels. De façon précise, si K, L, $\overline{K}$,

$\overline{L}$ et $\nu : \overline{K} \longrightarrow \overline{L}$ sont comme au n° 1.5.6, ν induit des homomorphismes continus

$$B_{cris}(\nu) : B_{cris}(K,\overline{K}) \longrightarrow B_{cris}(L,\overline{L}) \text{ et } B_{st}(\nu) : B_{st}(K,\overline{K}) \longrightarrow B_{st}(L,\overline{L}) ,$$

compatibles avec l'action de φ et avec celle de N, du moins si l'on choisit l'opérateur N associé à une valuation v sur $\overline{L}$ et à sa restriction à $\overline{K}$.

Les morphismes $B_{cris}(\nu)$ et $B_{dR}(\nu)$ commutent aux plongements naturels de chaque B_{cris} dans chaque B_{dR}. Si l'on choisit un logarithme log sur $\overline{K}^*$ et si l'on note $\iota(K,\overline{K})$ (resp. $\iota(L/\overline{L})$) le plongement de $B_{st}(K,\overline{K})$ dans $B_{dR}(K,\overline{K})$ (resp. de $B_{st}(L,\overline{L})$ dans $B_{dR}(L,\overline{L})$) qui lui est associé (resp. associé au prolongement à $\overline{L}^*$ de log), on a

$$\iota(L,\overline{L}) \circ B_{st}(\nu) = B_{dR}(\nu) \circ \iota(K,\overline{K}) .$$

Les applications $B_{cris}(\nu)$ et $B_{st}(\nu)$ sont injectives et $B_{st}(L,\overline{L})$ s'identifie à $B_{cris}(L,\overline{L}) \otimes_{B_{cris}((K,\overline{K})} B_{st}(K,\overline{K})$. Ici encore $B_{cris}(\nu)$ et $B_{st}(\nu)$ sont des isomorphismes si et seulement si ν induit un isomorphisme du complété de $\overline{K}$ sur celui de $\overline{L}$.

4.3. — Preuve du théorème 4.2.4

4.3.1. — Commençons par énoncer un lemme. Pour cela, choisissons $u_0 \in R$ tel que $u_0^{(0)} = p$. Alors $[u_0] - p \in W(R) \subset B_{dR}^+$ et $\theta([u_0] - p) = 0$, ce qui fait que la série

$$\log([u_0]/p) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{np^n} \cdot ([u_0] - p)^n$$

converge dans B_{dR}^+. Par ailleurs, l'inclusion de B_{cris} dans B_{dR} permet d'identifier le corps des fractions $Fr(B_{cris})$ à un sous-corps de B_{dR}.

LEMME. — *L'élément $u = \log([u_0]/p) \in B_{dR}^+$ n'appartient pas à $Fr(B_{cris})$.*

4.3.2. — **Preuve du lemme** : On voit que $\xi = p - [u_0]$ est un générateur du noyau de $\theta : W(R) \longrightarrow \mathcal{O}_C$, donc que ξ et $\beta = \xi/p$ sont dans $Fil^1 B_{dR}^+$ et pas dans $Fil^2B^+_{dR}$. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $W_{K_0}(R) = W(R)[1/p]$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\beta^n$ converge dans B^+_{dR}. Notons $S = W(R)[\![\beta]\!]$ le sous–anneau de B^+_{dR} formé des éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $\sum_{n\geq 0} a_n\beta^n$ avec les $a_n \in W(R)$. Si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $Fil^iS = S \cap Fil^iB_{dR}$, on voit que Fil^iS est l'idéal principal engendré par β^i. En particulier, si on note

$$\theta^i : Fil^iS \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

l'application qui envoie $\beta^i\alpha$ sur $\theta(\alpha)$, on a $\theta^i(Fil^iS) = \mathcal{O}_C$.

Comme A_{cris} est le sous–anneau de B^+_{dR} formé des $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\xi^n/n! = \sum\limits_{n\geq 0}(p^n/n!)\cdot a_n\beta^n$ avec les $a_n \in W(R)$ tendant p–adiquement vers 0 (cf. n° 4.1.2), $A_{cris} \subset S$. On a $Fr(B_{cris}) = Fr(A_{cris}) \subset Fr(S)$ et il suffit de vérifier que, si $\alpha \in S$ est non nul, alors $\alpha u \notin S$.

Comme S est séparé pour la topologie p–adique, il suffit de vérifier que, si $r \in \mathbb{N}$ et si $\alpha \in S - pS$, alors $p^r\alpha u \notin S$. Si $a \in W(R)$ vérifie $\theta(a) \in p\mathcal{O}_C$, alors a appartient à l'idéal de $W(R)$ engendré par p et $\xi = p\beta$, donc $a \in pS$. On en déduit que l'on peut trouver un entier $i \geq 0$ et des $b_n \in W(R)$ tels que $\theta(b_i) \notin p\mathcal{O}_C$ et

$$\alpha = p\Big(\sum_{0\leq n<i} b_n\beta^n\Big) + \sum_{n\geq i} b_n\beta^n \ .$$

Mais $u = -\sum_{n>0}\beta^n/n$. Soit j un entier $> r$ tel que $p^j > i$. Si $p^r\alpha u \in S$, on aurait $\alpha\cdot(\sum\limits_{n>0} p^{j-1}\beta^m/m) \in S$, donc $\alpha\cdot\beta^{p^j}/p \in S + Fil^{2p^j}B_{dR}$, donc

$$b_i\beta^{i+p^j}/p \in S + Fil^{i+p^j+1}B_{dR} \ .$$

On devrait donc avoir $\theta^{i+p^j}(b_i\beta^{i+p^j}/p) = \theta^{i+p^j}(b_i\beta^{i+p^j})/p \in \theta^{i+p^j}(Fil^{i+p^j}S) = \mathcal{O}_C$; mais $\theta^{i+p^j}(b_i\beta^{i+p^j}/p) = \theta^0(b_i)/p \notin \mathcal{O}_C$, d'où une contradiction.

4.3.3. — **Montrons enfin le théorème** : Il suffit de prouver l'injectivité de ι_K. Il est clair qu'il existe $\widehat{u} \in K \otimes_{K_0} B_{st}$ tel que $K \otimes_{K_0} B_{st} = (K \otimes_{K_0} B_{cris})[\widehat{u}]$ et $\iota_K(\widehat{u}) = u$. Il suffit donc de prouver que u est transcendant sur le corps des fractions $Fr(K \otimes_{K_0} B_{cris})$ de $K \otimes_{K_0} B_{cris}$ (vu comme sous–corps de B_{dR}). Comme $Fr(K \otimes_{K_0} B_{cris})$ est une extension finie de $Fr(B_{cris})$, il suffit de vérifier que u est transcendant sur $Fr(B_{cris})$.

Sinon, soit $c_0 + c_1X + \cdots + c_{d-1}X^{d-1} + X^d$ le polynôme minimal de u sur $Fr(B_{cris})$.

Soit $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in R$, avec $\varepsilon^{(0)} = 1$, $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $t = \log(\nu(\varepsilon))$ (cf. n° 1.5.4), de sorte que $\mathbb{Z}_p(1)$ s'identifie au–sous–$\mathbb{Z}_p$–module libre de rang 1 de B_{dR} engendré par t. Soit $G_0 = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_0)$. Il existe une application continue

$$\eta : G_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p$$

telle que, dans $W_{K_0}(R)$, $g([u_0]/p) = ([u_0]/p)\cdot[\varepsilon]^{\eta(g)}$ pour tout $g \in G_0$, et donc que

$$gu = u + \eta(g)t \ .$$

Le corps $Fr(B_{cris})$ est stable par G_0 et pour tout $g \in G_0$,

$$g(c_0) + g(c_1)(u + \eta(g)t) + \cdots + g(c_{d-1})(u + \eta(g)t)^{d-1} + (u + \eta(g)t)^d = 0 \ .$$

L'unicité du polynôme minimal de u sur $Fr(B_{cris})$ implique que, pour tout $g \in G_0$, $g(c_{d-1}) + d\cdot\eta(g)t = c_{d-1}$. Si $c = c_{d-1} + du$, on a $g(c) = c$, d'où $c \in (B_{dR})^{G_0} = K_0 \subset B_{cris}$. On aurait donc $u = d^{-1}(c - c_{d-1}) \in Fr(B_{cris})$, ce qui contredit le lemme 4.3.1.

5. — Quelques propriétés de B_{cris}

5.1. — Quelques idéaux de $W(R)$

5.1.1. — Pour tout sous–anneau A de B_{dR} (en particulier, pour $A = W(R)$, $W_{K_0}(R)$, $W_K(R)$, A_{cris}, B_{cris}, B^+_{cris}), et tout $r \in \mathbb{Z}$, on pose $Fil^rA = A \cap Fil^rB_{dR}$. En particulier, on a $Fil^0A = A \cap B^+_{dR}$ et on note $\theta : Fil^0A \longrightarrow C$ la restriction de la projection de B^+_{dR} sur C.

Si A est un sous–anneau de B_{cris} stable par φ et si $r \in \mathbb{Z}$, on pose $I^{[r]}A = \{a \in A \mid \varphi^n(a) \in Fil^rA,$ pour tout $n \in \mathbb{N}\}$. Si $I^{[0]}A = A$ (c'est le cas, par exemple, si $A = W(R)$, $W_{K_0}(R)$, A_{cris} ou B^+_{cris}) les $I^{[r]}A$, pour $r \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante d'idéaux de A ; on pose aussi $I^{[1]}A = IA$.

5.1.2. — **On choisit** $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in R$, tel que $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, et **on pose** $t = \log([\varepsilon])$. On a donc $[\varepsilon] = (\varepsilon, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in W(R)$ tandis que $\mathbb{Z}_p(1)$ s'identifie au–sous–$\mathbb{Z}_p$–module libre de rang 1 de A_{cris} engendré par t. **On pose aussi** $\pi_\varepsilon = [\varepsilon] - 1 \in W(R)$. Le Frobenius est bijectif sur $W(R)$ et, pour tout $x \in W(R)$, on pose $x' = \varphi^{-1}(x)$. On pose $\xi = 1 + [\varepsilon'] + [\varepsilon']^2 + \cdots + [\varepsilon']^{p-1}$. On a donc $\pi_\varepsilon = \pi'_\varepsilon \cdot \xi$.

On note v_0 la valuation de C normalisée par $v_0(p) = 1$ et v_R la valuation de R définie par $v_R((x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}) = v_0(x^{(0)})$. Pour tout $x \in W(R)$, on note $\widetilde{x} \in R$ sa réduction modulo p.

On vérifie facilement qu'un élément $x \in Fil^1W(R)$ engendre cet idéal principal de $W(R)$ si et seulement si $v_R(\widetilde{x}) = 1$. C'est le cas de ξ, car $\theta(\xi) = \sum_{0\leq i\leq p-1} (\varepsilon^{(1)})^i = 0$ et $\widetilde{\xi} = 1 + \varepsilon' + \varepsilon'^2 + \cdots + \varepsilon'^{p-1} = (\varepsilon'^p - 1)/(\varepsilon' - 1)$ $= (\varepsilon - 1)/(\varepsilon' - 1)$ et $v_R(\widetilde{\xi}) = (1 - p^{-1}) \cdot v_R(\varepsilon - 1) = ((p-1)/p) \cdot v_R(\varepsilon - 1) = 1$ puisque $v_R(\varepsilon - 1) = v_0(\lim_{n\longmapsto\infty} (\varepsilon^{(n)} - 1)^{p^n}) = p/(p-1)$.

5.1.3. PROPOSITION. — *Pour tout $r \in \mathbb{N}$,*

i) l'idéal $I^{[r]}W(R)$ est l'idéal principal engendré par π_ε^r (en particulier, $I^{[r]}W(R)$ est la puissance r-ième de $IW(R)$) ;

ii) pour qu'un élément $a \in I^{[r]}W(R)$ engendre cet idéal, il faut et il suffit que $v_R(\widetilde{a}) = rp/(p-1)$.

5.1.4. — Commençons par le cas $r = 1$, qui consiste à préciser un résultat de [Fo82a] (cf. démonstration du lemme 4.16) :

LEMME. — *i) l'idéal $IW(R)$ est principal, engendré par π_ε ;*

ii) pour qu'un élément $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in IW(R)$ soit un générateur de cet idéal, il faut et il suffit que $v_R(a_0) = p/(p-1)$ et on a alors $v_R(a_n) = p/(p-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration : Commençons par rappeler (c'est le résutat de *loc. cit.*) que si $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in IW(R)$, alors $v_R(a_n) \geq p/(p-1)$, pour tout n [Cela peut se voir ainsi : si l'on pose $\alpha_n = a_n^{(n)}$, on a

$$\theta(\varphi^m a) = \sum p^n \cdot \alpha_n^{p^m} = \alpha_0^{p^m} + \cdots + p^m \alpha_m^{p^m} + p^{m+1} \alpha_{m+1}^{p^m} + \cdots \ ;$$

on est ramené à prouver que pour tout couple $(r,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a $v_R(\alpha_m) \geq p^{-m}(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r})$, ce qui se fait par récurrence sur les couples (r,m) ordonnés lexicographiquement, en comparant les valuations des termes dominants dans $\sum p^n \cdot \alpha_n^{p^m}$; cette comparaison montre aussi que, si $v_0(\alpha_0) = p/(p-1)$, alors $v_R(a_m) = v_0(\alpha_m^{p^m}) = p/(p-1)$, pour tout m].

Par ailleurs, on a $\theta(\varphi^n(\pi_\varepsilon)) = \theta([\varepsilon]^{p^n} - 1) = (\varepsilon^{(0)})^{p^n} - 1 = 1 - 1 = 0$ et $\pi_\varepsilon \in IW(R)$. Comme $\widetilde{\pi}_\varepsilon = \varepsilon - 1$ et $v_R(\varepsilon - 1) = p/(p-1)$, ce qui précède implique que

$$IW(R) \subset (\pi_\varepsilon, p) \ .$$

Comme $(\mathcal{O}_C)^{\mathbb{N}}$ est sans p-torsion, si $px \in IW(R)$, alors $x \in IW(R)$; et le lemme résulte de ce que $W(R)$ est séparé et complet pour la topologie p-adique.

5.1.5. — **Prouvons la proposition** 5.1.3 : Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soient $gr^iW(R) = Fil^iW(R)/Fil^{i+1}W(R)$ et θ^i la projection de $Fil^iW(R)$ sur $gr^iW(R)$. Alors $Fil^iW(R)$ est l'idéal principal engendré par ξ^i et $gr^iW(R)$ est un $\mathcal{O}_C$-module libre de rang 1 engendré par $\theta^i(\xi^i) = \theta^1(\xi)^i$.

On a $\pi_\varepsilon = \pi'_\varepsilon \xi$, d'où,

$$\varphi^n(\pi_\varepsilon) = \pi'_\varepsilon \cdot \xi^{1+\varphi+\cdots+\varphi^n}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \ .$$

Pour $i \geq 1$, $\theta(\varphi^i(\xi)) = p$ et on a donc $\theta^1(\varphi^n(\pi_\varepsilon)) = p^n(\varepsilon^{(1)} - 1) \cdot \theta^1(\xi)$.

Montrons l'assertion *i)* : L'inclusion $\pi_\varepsilon^r W(R) \subset I^{[r]}W(R)$ est claire. L'inclusion dans l'autre sens se fait par récurrence sur r, le cas $r = 0$ étant trivial. Supposons donc $r \geq 1$, et soit $a \in I^{[r]}W(R)$; on peut supposer $a = \pi_\varepsilon^{r-1}b$, avec $b \in W(R)$. On doit avoir $\theta^{r-1}(\varphi^n(a)) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais

$$\theta^{r-1}(\varphi^n(a)) = \theta(\varphi^n(b)) \cdot (\theta^1(\varphi^n(\pi_\varepsilon)))^{r-1} = (p^n(\varepsilon^{(1)} - 1))^{r-1} \cdot \theta(\varphi^n(b)) \cdot \theta^1(\xi)^{r-1} \ .$$

Comme $\theta^1(\xi)^{r-1}$ est un générateur de $gr^{r-1}W(R)$ et comme $p^n(\varepsilon^{(1)} - 1) \neq 0$, on doit avoir $\theta(\varphi^n(b)) = 0$, pour tout n ; donc $b \in IW(R)$, et d'après le lemme précédent, il existe $c \in W(R)$ tel que $b = \pi_\varepsilon c$. On a bien $a \in \pi_\varepsilon^r W(R)$.

L'assertion *ii)* résulte trivialement de ce que $v_R(\widetilde{\pi}_\varepsilon^r) = r \cdot v_R(\varepsilon - 1) = rp/(p-1)$ et de ce qu'un élément $x \in W(R)$ est une unité si et seulement si $\widetilde{x}$ est une unité de R, i.e. si $v_R(\widetilde{x}) = 0$.

5.2. — Une description de A_{cris}

5.2.1. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $K_n = K_0(\varepsilon^{(n)})$ et soit $K_\infty = UK_n$. Posons $G_0 = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_0)$, $H_0 = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$, $\Gamma_0 = G_0/H_0 = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_0)$, Γ_{tor} le sous-groupe de torsion de Γ_0 et $\Gamma = \Gamma_0/\Gamma_{tor}$ (qui est donc un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_p$).

5.2.2. Pour toute indéterminée X, on note $W\{< X >\}$ le séparé complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de l'anneau $W[X]$ des polynômes (ou de l'anneau $W[\![X]\!]$ des séries formelles, cela revient au même) en une variable X à coefficients dans W, relativement à l'idéal engendré par X. La W-algèbre $W\{< X >\}$ est donc l'ensemble des éléments de la forme

$$\sum a_m \gamma_m(X), \text{ avec les } a_m \in W \text{ tendant } p\text{-adiquement vers } 0 ,$$

la multiplication étant induite par $\gamma_r(X) \cdot \gamma_s(X) = \binom{r+s}{s} \cdot \gamma_{r+s}(X)$.

5.2.3. Le séparé complété pour la topologie t-adique de l'anneau $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} Sym_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p(1)$ s'identifie à l'anneau $K_0[\![t]\!]$ des séries formelles à coefficients dans K_0 en la variable t (et ne dépend pas du choix du générateur t de $\mathbb{Z}_p(1)$).

Cet anneau et son corps des fractions $K_0((t))$ sont munis d'une action naturelle de G_0 qui se factorise à travers Γ_0. On les munit d'un Frobenius, en posant

$$\varphi(\Sigma a_m t^m) = \Sigma \sigma(a_m) p^m t^m, \quad \text{si les } a_m \in K_0 .$$

Notons $\Lambda_\varepsilon = W[t]\{< t^{p-1}/p >\}$ le séparé complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe à puissances divisées du sous-anneau $W[t, t^{p-1}/p]$ de $K_0[\![t]\!]$ relativement à l'idéal engendré par t^{p-1}/p. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $n = r(n) + (p-1)q(n)$, avec $r(n)$, $q(n) \in \mathbb{N}$, $0 \leq r(n) < p-1$, et

$$t^{\{n\}} = t^{r(n)} \gamma_{q(n)}(t^{p-1}/p) = (p^{q(n)} \cdot q(n)!)^{-1} \cdot t^n ,$$

alors, Λ_ε s'identifie au sous-anneau de $K_0[\![t]\!]$ formé des éléments qui peuvent s'écrire $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n t^{\{n\}}$, avec les $a_n \in W$ tendant p-adiquement vers 0. Il est indépendant du choix de t et stable par Γ_0 et φ. Lorsque $p = 2$, on a aussi $\Lambda_\varepsilon = W\{< t/2 >\}$.

5.2.4. Notons S_ε l'adhérence de la sous-W-algèbre de $W(R)$ engendrée par $[\varepsilon]$. On voit que S_ε s'identifie à l'anneau $W[\![\pi_\varepsilon]\!]$ des séries formelles en l'indéterminée $\pi_\varepsilon = [\varepsilon] - 1$ à coefficients dans W. On peut identifier S_ε à une sous-W-algèbre de Λ_ε en posant

$$\pi_\varepsilon = e^t - 1 = \sum_{n\geq 1} t^n/n! = \sum_{n\geq 1} c_n t^{\{n\}} ,$$

où $c_n = p^{q(n)}q(n)!/n!$ (si $s(m)$ désigne la somme des chiffres de l'entier m écrit en base p, un petit calcul montre que, si $q = q(n)$, $v_p(c_n) = (q - s(q) + s((p-1)q))/(p-1)$ est ≥ 0 et tend vers l'infini avec n).

Il est clair que cette identification est compatible avec l'action de Γ_0. Comme, dans Λ_ε, $\varphi(e^t) = e^{pt} = (e^t)^p$, elle est aussi compatible avec l'action de φ.

Remarquons également que l'idéal de Λ_ε qui est l'adhérence de l'idéal engendré par les $t^{\{n\}}$, avec $n \geq 1$, est un *pd*-idéal, séparé et complet pour la topologie p-adique. Comme π_ε appartient à cet idéal, la série

$$\log([\varepsilon]) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} n^{-1} \pi_\varepsilon^n$$

converge dans Λ_ε et sa somme est t. On voit qu'il existe une unité v_0 de Λ_ε telle que $\pi_\varepsilon = v_0 t$.

5.2.5. Le sous-corps de $K_0((t))$ fixe par Γ_{tor} est le corps $K_0((t^{p-1}))$ si $p \neq 2$ (resp. $K_0((t^2))$ si $p = 2$). Il en résulte que le sous-anneau Λ de Λ_ε fixé par Γ_{tor} est le sous-anneau $W\{< t^{p-1}/p >\}$ (resp. $W\{< t^2/8 >\}$) formé des $\Sigma a_n t^{\{n\}}$ tels que $a_n = 0$ si $p-1$ ne divise pas n (resp. si 2 ne divise pas n) et l'application $X \longmapsto t^{p-1}/p$ (resp. $t^2/8$) induit un isomorphisme – de W-algèbres topologiques – de $W\{< X >\}$ sur Λ.

Soit π_0 la trace, de $K_0((t))$ à $K_0((t^{p-1}))$ (resp. $K_0((t^2))$), de π_ε ; on a

$$\pi_0 = -p + \sum_{a\in\mathbb{F}_p} [\varepsilon]^{[a]} = (p-1) \cdot \sum_{n\geq 1, (p-1)|n} t^n/n!$$

(resp. $\pi_0 = -2 + [\varepsilon] + [\varepsilon]^{-1} = 2 \cdot \sum_{n \geq 1, 2|n} t^n/n!$).

On voit que le sous–anneau S de S_ε formé des éléments fixes par Γ_{tor} s'identifie à l'anneau $W[\![\pi_0]\!]$ des séries formelles en π_0 à coefficients dans W. Un calcul facile montre que $\pi_0 \in p\Lambda$ (resp. 4Λ) et qu'il existe une unité v de Λ telle que

$$\pi_0/p = v \cdot (t^{p-1}/p) \text{ (resp. } \pi_0/8 = v \cdot (t^2/8)) \ .$$

En particulier, on a $\Lambda = W\{< \pi_0/p >\}$ (resp. $W\{< \pi_0/8 >\}$), complétion p–adique de la pd–W–algèbre en "l'indéterminée" π_0/p (resp. $\pi_0/8$).

On voit également que l'application évidente de $S_\varepsilon \otimes_S \Lambda$ dans Λ_ε est un isomorphisme.

5.2.6. PROPOSITION. — *Avec les notations qui précèdent,*

(*i*) *l'élément* π_0 *est un générateur de* $I^{[p-1]}W(R)$ *si* $p \neq 2$ (resp. *de* $I^{[2]}W(R)$ *si* $p = 2$).

(*ii*) *si* $q = p + \pi_0$, *il existe une unité* $u \in S$ *telle que*

$$\varphi\pi_0 = u\pi_0 q^{p-1} \ \textit{si} \ p \neq 2 \ (\text{resp.}\, u\pi_0 q^2 \ \textit{si} \ p = 2) \ .$$

Démonstration : Les cas $p \neq 2$ et $p = 2$ sont très proches et nous ne traitons que le cas $p \neq 2$.

Prouvons (*i*). La norme π_1, de $K_0((t))$ à $K_0((t^{p-1}))$, de π_ε est un élément de S. On a $\pi_1 = \prod_{h \in \Gamma_{tor}} h(\pi_\varepsilon) = \prod_{a \in \mathbb{F}_p^*} ([\varepsilon]^{[a]} - 1)$; comme chaque $[\varepsilon]^{[a]} - 1$ est un générateur de $IW(R)$, π_1 est un générateur de $(IW(R))^{p-1} = I^{[p-1]}W(R)$ (prop. 5.1.3). On a donc (*loc. cit.*) $v_R(\widetilde{\pi}_1) = (p-1) \cdot v(\varepsilon - 1) = p = v_R(\widetilde{\pi}_0)$, ce qui prouve que $W[\![\pi_0]\!] = W[\![\pi_1]\!]$, et que si l'on écrit

$$\pi_0 = \Sigma a_m \pi_1^m, \quad \text{avec les } a_m \in W \ ,$$

alors a_1 est une unité. Il suffit alors de vérifier que a_0 est nul, ce qui résulte de $0 = \theta(\pi_0) = a_0$.

Prouvons (*ii*) : On remarque que q' et $\xi = \sum_{0 \leq i \leq p-1} [\varepsilon']^i$ sont tous deux des générateurs de l'idéal noyau de la restriction de θ à $S'_\varepsilon = \varphi^{-1}(S_\varepsilon) =$

$W[\![\pi'_\varepsilon]\!]$. On a donc $\pi_\varepsilon = \varphi\pi'_\varepsilon = \pi'_\varepsilon\xi = u'_1\pi'_\varepsilon q'$, où u'_1 est une unité de S'_ε, ou encore $\varphi\pi_\varepsilon = u_1\pi_\varepsilon q$, où u_1 est une unité de S_ε. Par conséquent, $\varphi(\pi_\varepsilon^{p-1}) = u_1^{p-1}\pi_\varepsilon^{p-1}q^{p-1}$; comme π_0 et π_ε^{p-1} sont tous deux des générateurs de $S_\varepsilon \cap I^{[p-1]}W(R)$, il existe une unité u de S_ε telle que $\varphi\pi_0 = u\pi_0 q^{p-1}$. L'unicité de u et le fait que $S = (S_\varepsilon)^{\Gamma_{tor}}$ impliquent que u et $u^{-1} \in S$.

5.2.7. Si A_0 est un anneau commutatif, si A_1 et A_2 sont des A_0–algèbres et si A_0, A_1 et A_2 sont séparés et complets pour la topologie p–adique, on note $A_1\widehat{\otimes}_{A_0}A_2$ le séparé complété de $A_1 \otimes_{A_0} A_2$ pour la topologie p–adique.

THÉORÈME. — *Il existe des homomorphismes de $W(R)$–algèbres, continus pour la topologie p–adique,*

$$\alpha : W(R)\widehat{\otimes}_S\Lambda \longrightarrow A_{cris} \quad et \quad \alpha_\varepsilon : W(R)\widehat{\otimes}_{S_\varepsilon}\Lambda_\varepsilon \longrightarrow A_{cris} .$$

Chacun de ces homomorphismes est unique et est un isomorphisme.

5.2.8. — Remarques : *i*) Supposons $p \neq 2$ et soit

$$\mathfrak{a}_{cris} = W(R)\{< t^{p-1}/p >\} = W(R)\{< \pi_0/p >\} = W(R)\widehat{\otimes}_W\Lambda .$$

L'application $(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \longmapsto \Sigma a_m\widehat{\otimes}\gamma_m(\pi_0/p)$ définit une bijection entre l'ensemble des suites d'éléments de $W(R)$ tendant p–adiquement vers 0 et $\mathfrak{a}_{cris}$. Le théorème précédent signifie que $\mathfrak{a}_{cris}$ s'envoie surjectivement sur A_{cris} et que le noyau est l'adhérence de l'idéal engendré par $c = \pi_0\widehat{\otimes}1 - p\widehat{\otimes}(\pi_0/p)$, i.e. l'idéal des $\Sigma a_m\widehat{\otimes}\gamma_m(\pi_0/p)$ tels qu'il existe une suite $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $W(R)$ tels que

$$a_0 = \pi_0 b_0 \text{ et } a_m = \pi_0 b_m - mpb_{m-1}, \text{ pour tout } m \geq 1 .$$

On voit que le fait que la suite des a_m tende p–adiquement vers 0 implique qu'il en est de même de celle des b_m. Autrement dit $A_{cris} = \mathfrak{a}_{cris}/c\mathfrak{a}_{cris}$, ou encore on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}_{cris} \xrightarrow{\times c} \mathfrak{a}_{cris} \longrightarrow A_{cris} \longrightarrow 0 .$$

On a un résultat analogue pour $p = 2$ en posant $\mathfrak{a}_{cris} = W(R)\{< t/2 >\} = W(R)\{< \pi_\varepsilon/2 >\} = W(R)\widehat{\otimes}_W\Lambda_\varepsilon$ et $c = \pi_\varepsilon \otimes 1 - 2 \otimes (\pi_\varepsilon/2)$.

ii) L'application de Λ (resp. Λ_ε) dans $W(R)\widehat{\otimes}_S\Lambda$ (resp. $W(R)\widehat{\otimes}_S\Lambda_\varepsilon$), qui à x associe $1\widehat{\otimes}x$, est injective et le théorème nous permet d'identifier Λ et Λ_ε à des sous–anneaux de A_{cris}.

5.2.9. — **Prouvons** le théorème pour $p \neq 2$ (la preuve pour $p = 2$ est analogue) : Tout d'abord, $W(R)\widehat{\otimes}_{S_\varepsilon}\Lambda_\varepsilon \simeq W(R)\widehat{\otimes}_{S_\varepsilon}S_\varepsilon \otimes_S \Lambda \simeq W(R)\widehat{\otimes}_S\Lambda$ et les assertions concernant α_ε résultent de celles concernant α.

Prouvons donc les assertions concernant α. Dans $W(R)$, si $q' = \sum_{a\in\mathbb{F}_p} [\varepsilon']^{[a]}$, on a $\pi_0 \equiv \varphi(q') \equiv q'^p \pmod p$; comme $\theta(q') = 0$, $\gamma_p(q') \in A_{cris}$ et $q'^p = p!\cdot\gamma_p(q') \in pA_{cris}$ donc $\pi_0 \in pA_{cris}$. On doit donc avoir $\alpha(1\otimes(\pi_0/p)) = \pi_0/p$. Comme $\theta(\pi_0) = 0$, $\theta(\pi_0/p) = 0$, et $\pi_0/p \in Fil^1 A_{cris}$. L'existence et l'unicité de α en résulte : avec des notations évidentes, on doit avoir

$$\alpha(\Sigma a_m \otimes \gamma_m(\pi_0/p)) = \Sigma a_m\gamma_m(\pi_0/p) \ .$$

Il reste à s'assurer que α est un isomorphisme. Comme source et but sont des anneaux séparés et complets pour la topologie p–adique, sans p–torsion, il suffit de prouver que α induit un isomorphisme sur les réductions $\bmod p$.

Mais la réduction modulo p de A_{cris} s'identifie à l'enveloppe à puissances divisées de R relativement à l'idéal engendré par $\widetilde{q'}$ et l'on en déduit que c'est un module libre sur R/q'^p de base les images des $\gamma_{pm}(q')$, ou encore les $\gamma_m(q'^p/p)$. D'après la proposition 5.2.6, il existe une unité u de $W(R)$ telle que $\varphi\pi_0 = u\pi_0 q^{p-1}$. On a donc $\pi_0 = u'\pi_0' q'^{p-1} = u'(q'^p - pq'^{p-1})$, ou encore $\pi_0/p = u'(p^{-1}q'^p - q'^{p-1})$. On en déduit que $R/\widetilde{q}'^p = R/\widetilde{\pi}_0$ et que la réduction $\bmod p$ de A_{cris} est aussi le module libre sur cet anneau de base les images des $\gamma_m(p^{-1}\pi_0)$. Il est clair qu'il en est bien de même de la réduction $\bmod p$ de $W(R)\widehat{\otimes}_S\Lambda$.

5.3. — La filtration par les $I^{[r]}$ et les anneaux $W^r(R)$

5.3.1. Proposition. — *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, posons*

$$I^{[r]} = I^{[r]}A_{cris} = \{a \in A_{cris} \mid \varphi^n a \in Fil^r A_{cris},\ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Si $r \geq 1$, $I^{[r]}$ est un pd–idéal de A_{cris} ; c'est l'adhérence du–sous–$W(R)$–module (qui est aussi l'idéal) engendré par les $t^{\{s\}}$, pour $s \geq r$.

Preuve : Soit $I(r)$ l'adhérence du $W(R)$–module engendré par les $t^{\{s\}}$, avec $s \geq r$. Il est clair que $I(r) \subset I^{[r]}$ et que, si $r \geq 1$, c'est un *pd*–idéal.

L'assertion revient à vérifier que $I^{[r]} \subset I(r)$ pour tout r, ce que nous allons faire par récurrence sur r, le cas $r = 0$ étant trivial.

Supposons donc $r \geq 1$ et soit $a \in I^{[r]}$. L'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire a sous la forme

$$a = \sum_{s \geq r-1} a_s t^{\{s\}} ,$$

où les $a_s \in W(R)$ tendent p–adiquement vers 0. Si $b = a_{r-1}$, on a $a = bt^{\{r-1\}} + a'$, avec $a' \in I(r)$ et on doit avoir $bt^{\{r-1\}} \in I^{[r]}$. Mais $\varphi^n(bt^{\{r-1\}}) = p^{(r-1)n} \cdot \varphi^n(b) \cdot t^{\{r-1\}} = c_{r,n} \cdot \varphi^n(b) \cdot t^{r-1}$, où $c_{r,n}$ est un nombre rationnel non nul. Comme $t^{r-1} \in Fil^{r-1} - Fil^r$, on doit avoir $b \in I^{[1]} \cap W(R)$, qui est, d'après la proposition 5.1.3, l'idéal engendré par π_ε. Donc $bt^{\{r-1\}}$ appartient à l'idéal de A_{cris} engendré par $\pi_\varepsilon t^{\{r-1\}}$. Mais, dans Λ_ε, donc a fortiori dans A_{cris}, t et π_ε engendrent le même idéal. Donc $bt^{\{r-1\}}$ appartient à l'idéal engendré par $t \cdot t^{\{r-1\}}$ qui est bien contenu dans $I(r)$.

5.3.2. — **Remarques** : *i*) La proposition dit en particulier que $I^{[r]}$ est la r–ième puissance divisée du *pd*–idéal $I^{[1]}$. Dans toute la suite, on pose $I = I^{[1]}$, et, pour tout sous–anneau A de A_{cris}, on pose $IA = A \cap I$ et $I^{[r]}A = A \cap I^{[r]}$. Ces notations sont compatibles avec celles que l'on avait utilisées pour $W(R)$.

ii) Le fait que I soit un *pd*–idéal n'est pas surprenant. Si l'on note $W(\mathcal{O}_C)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathcal{O}_C$, l'idéal $V \cdot W(\mathcal{O}_C)$ est muni de puissances divisées canoniques, il existe un unique *pd*–homomorphisme

$$\rho : A_{cris} \longrightarrow W(\mathcal{O}_C)$$

tel que, pour tout $a \in W(R)$, les composantes fantômes de $\rho(a)$ soient les $\theta(\varphi^n a)$ et I est le noyau de ρ.

5.3.3. — Le corps résiduel de l'anneau local R s'identifie au corps résiduel $\overline{k}$ de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. La projection de R sur $\overline{k}$ induit par fonctorialité un homomorphisme

$$\nu : W(R) \longrightarrow W(\overline{k})$$

et nous notons $W_+(R)$ son noyau. Comme ν est l'identité sur $W(\overline{k})$, on a $W(R) = W(\overline{k}) \oplus W_+(R)$. Comme $\nu(\ker\ \theta)$ est le *pd*–idéal $pW(\overline{k})$, ν s'étend en un *pd*–homomorphisme de A_{cris} sur $W(\overline{k})$, dont nous notons $A_{cris,+}$ le noyau.

5.3.4. — On note $\overline{\mathbb{N}}$ l'ensemble qui est l'union disjointe de $\mathbb{N}$ et de l'ensemble des r^+ pour $r \in \mathbb{N}$. On munit $\overline{\mathbb{N}}$ d'une relation d'ordre total en convenant que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $r < r^+ < r+1$.

Si $r \in \mathbb{N}$, on pose $I^{[r^+]} = I^{[r]} \cdot A_{cris,+}$. Si A est un sous–anneau de A_{cris}, on pose $I^{[r^+]}A = A \cap I^{[r^+]}$. En particulier, $I^{[r^+]}W(R) = I^{[r]}W(R) \cdot W_+(R)$.

On a ainsi obtenu **une filtration décroissante, indexée par $\overline{\mathbb{N}}$, de** A_{cris} et de ses sous–anneaux par des idéaux $(I^{[r]})_{r\in\overline{\mathbb{N}}}$ (resp. $(I^{[r]}A)_{r\in\overline{\mathbb{N}}}$).

Pour tout $r \in \overline{\mathbb{N}}$, on pose

$$A^r_{cris} = A_{cris}/I^{[r]} \quad \text{et} \quad W^r(R) = W(R)/I^{[r]}W(R)\ .$$

5.3.5. Proposition. — *Pour tout $r \in \overline{\mathbb{N}}$, les W–algèbres A^r_{cris} et $W^r(R)$ sont sans p–torsion. L'application naturelle*

$$\iota^r : W^r(R) \longrightarrow A^r_{cris}$$

est injective et son conoyau est de p–torsion, annulé par $p^m m!$, si m est le plus grand entier tel que $(p-1)m < r$.

Preuve : Pour $r \in \mathbb{N}$, l'anneau $A_{cris}/Fil^r A_{cris}$ est sans torsion. Il en est de même de A^r_{cris} qui est le quotient de A_{cris} par l'idéal noyau de l'homomorphisme

$$A_{cris} \longrightarrow (A_{cris}/Fil^r A_{cris})^{\mathbb{N}}\ ,$$

envoyant x sur $(\varphi^n x \mod Fil^r)_{n\in\mathbb{N}}$. Le fait que $A^{r^+}_{cris}$ soit sans torsion résulte alors facilement de ce que $W(\overline{k})$ est sans torsion.

Par construction, ι^r et ι^{r^+} sont injectives (et, en particulier, $W^r(R)$ et $W^{r^+}(R)$ sont sans p–torsion).

On voit que, comme $W(R)$–module, A^r_{cris} (resp. $A^{r^+}_{cris}$) est engendré par les images des $\gamma_s(p^{-1}\pi_0)$, pour $0 \leq (p-1)s < r$ (resp. $0 \leq (p-1)s \leq r$). La fin de la proposition résulte de ce que la suite des $v_p(p^s s!)$ est croissante et de ce que $p^s s! \cdot \gamma_s(p^{-1}\pi_0) \in W(R)$.

5.3.6. — Pour tout sous-anneau A de A_{cris} et tout $r \in \mathbb{N}$, on pose

$$Fil^r A = A \cap Fil^r A_{cris} \quad \text{et} \quad Fil^r_p A = \{x \in Fil^r A \mid \varphi x \in p^r A\} \ .$$

PROPOSITION. — *i) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, la suite*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \longrightarrow Fil^r_p A_{cris} \xrightarrow{p^{-r}\varphi - 1} A_{cris} \longrightarrow 0$$

est exacte.

ii) L'idéal $Fil^r_p A_{cris}$ est l'adhérence du sous-$W(R)$-module (ou de l'idéal, cela revient au même) de A_{cris} engendré par les $q'^j\gamma_n(p^{-1}t^{p-1})$, pour $j + (p-1)n \geq r$.

iii) Soit m le plus grand entier tel que $(p-1)m < r$. Pour tout $x \in Fil^r A_{cris}$, $p^m m! \cdot x \in Fil^r_p A_{cris}$.

Preuve : Posons $\nu = p^{-r}\varphi - 1$. Il est clair que $\mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \subset \operatorname{Ker}\nu$. Inversement, si $x \in \operatorname{Ker}\nu$, $x \in I^{[r]}$ et peut s'écrire

$x = \sum_{s \geq r} a_s t^{\{s\}}$, avec les $a_s \in W(R)$ tendant p-adiquement vers 0.

On voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(p^{-r}\varphi)^n(x) \equiv \sigma^n(a_r)t^{\{r\}} \pmod{p^n A_{cris}}$ et on en déduit que x peut s'écrire $x = bt^{\{r\}}$, avec $b \in W(R)$. On doit avoir alors $\sigma b = b$, i.e. $b \in \mathbb{Z}_p$.

Si j, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\varphi(q'^j\gamma_n(t^{p-1}/p)) = q^j p^{n(p-1)}\gamma_n(t^{p-1}/p) = p^{j+n(p-1)}(1 + p^{-1}\pi_0)^j\gamma_n(t^{p-1}/p) \ .$$

En particulier, si N est l'adhérence du sous-$W(R)$-module de A_{cris} engendré par les $q'^j\gamma_n(p^{-1}t^{p-1})$, avec $j + n(p-1) \geq r$, $N \subset Fil^r_p A_{cris}$.

Comme $\mathbb{Z}_p t^{\{r\}} \subset N$, pour prouver les deux premières assertions, il suffit de vérifier que, pour tout $a \in A_{cris}$, il existe $x \in N$ tel que $\nu(x) = a$. Comme N et A_{cris} sont séparés et complets pour la topologie p-adique, il suffit de montrer que, pour tout $a \in A_{cris}$, il existe $x \in N$ tel que $\nu(x) \equiv a \pmod p$. Si $a = \sum_{n>r/(p-1)} a_n\gamma_n(p^{-1}t^{p-1})$, avec les $a_n \in W(R)$, il n'y a qu'à prendre $x = -a$.

On est alors ramené à vérifier que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $(p-1)i \leq r$ et tout $b \in W(R)$, il existe $x \in N$ tel que $\nu(x) - b\gamma_i(p^{-1}t^{p-1})$ appartient à l'idéal M engendré par p et les $\gamma_n(p^{-1}t^{p-1})$, avec $n > i$. Il suffit de prendre $x = yq'^{r-(p-1)i}\gamma_i(p^{-1}t^{p-1})$ avec $y \in W(R)$ solution de l'équation

$$\varphi y - q'^{r-(p-1)i}y = b\ .$$

Montrons enfin (iii). Soit $x \in Fil^r A_{cris}$. D'après la proposition 5.3.5, on peut écrire

$$p^m m! \cdot x = y + z, \quad \text{avec} \quad y \in W(R) \quad \text{et} \quad z \in I^{[r]}\ .$$

Comme $I^{[r]} \subset Fil^r A_{cris}$, on doit avoir $y \in Fil^r W(R) = q'^r W(R) \subset N$. L'assertion résulte de ce que l'on a aussi $I^{[r]} \subset N$.

5.3.7. THÉORÈME. — *i) Soit*

$$B'_{cris} = \{x \in B_{cris} \mid \varphi^n x \in Fil^0 B_{cris}, \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Alors $\varphi(B'_{cris}) \subset B^+_{cris} \subset B'_{cris}$ *si* $p \neq 2$ *et* $\varphi^2(B'_{cris}) \subset B^+_{cris} \subset B'_{cris}$ *si* $p = 2$.

ii) Pour tout $r \in \mathbb{N}$, *la suite*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r) \longrightarrow Fil^r B^+_{cris} \xrightarrow{p^{-r}\varphi - 1} B^+_{cris} \longrightarrow 0$$

est exacte.

iii) Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, *la suite*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r) \longrightarrow Fil^r B_{cris} \xrightarrow{p^{-r}\varphi - 1} B_{cris} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Preuve : Montrons (i). L'inclusion $B^+_{cris} \subset B'_{cris}$ est triviale. Inversement, soit $x \in B'_{cris}$. Il existe r, $j \in \mathbb{N}$ et $y \in A_{cris}$ tels que $x = t^{-r}p^{-j}y$. Si $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(x) = p^{-nr-j}t^{-r}\varphi^n(y)$, et on doit avoir $\varphi^n(y) \in Fil^r A_{cris}$ pour tout n, donc $y \in I^{[r]}$. D'après la proposition 5.3.1, on peut écrire $y = \sum_{m\geq 0} a_m t^{\{m+r\}}$, avec les $a_m \in W(R)$ tendant p-adiquement vers 0. On a donc $x = p^{-j} \cdot \sum_{m\geq 0} a_m t^{\{m+r\}-r}$ et $\varphi x = p^{-j-r} \cdot \sum_{m\geq 0} \varphi(a_m) p^{m+r} t^{\{m+r\}-r}$.

Un calcul simple montre que $\varphi x = p^{-j-r} \cdot \sum_{m\geq 0} c_m \varphi(a_m) t^m$, où c_m est un nombre rationnel vérifiant

$$v_p(c_m) \geq (m+r)(1-(p-1)^{-1}-(p-1)^{-2}) \ .$$

Si $p \neq 2$, c'est donc un entier et $\varphi x \in p^{-j-r}W(R)[\![t]\!] \subset p^{-j-r}A_{cris} \subset B^+_{cris}$. Pour $p = 2$, la démonstration est analogue.

L'assertion (ii) résulte de la proposition 5.3.6.

Montrons enfin (iii). D'après (ii), pour tout entier i tel que $r + i \geq 0$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r+i) \longrightarrow Fil^{r+i}B^+_{cris} \longrightarrow B^+_{cris} \longrightarrow 0 \ ,$$

qui, en tensorisant par $\mathbb{Q}_p(-i)$, donne naissance à une autre suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(r) \longrightarrow t^{-i}Fil^{r+i}B^+_{cris} \longrightarrow t^{-i}B^+_{cris} \longrightarrow 0 \ ;$$

le résultat cherché s'en déduit par passage à la limite.

Appendice

LES NOMBRES ALGÉBRIQUES SONT DENSES DANS $\mathbf{B}_{dR}^+$

par **Pierre Colmez**

Dans cet appendice, nous montrons que $\mathbf{B}_{dR}^+$ est le complété de $\overline{K}$ pour une topologie que nous décrivons explicitement (théorème 1). La démonstration diffère légèrement de celle employée dans [Co90]. Nous donnons ensuite une formule permettant d'écrire explicitement un élément de $\overline{K}$ comme élément de $\mathbf{B}_{dR}^+$.

§A1. Calcul différentiel sur les nombres algébriques.

Les hypothèses et les notations sont celles des paragraphes 1.3, 1.4 et 1.5. Notons que $\overline{K}$ et $A_{inf} = W_{\mathcal{O}_K}(R)$ s'identifient canoniquement à des sous-anneaux de $\mathbf{B}_{dR}^+$. Soit I le noyau de l'homomorphisme θ de $\mathbf{B}_{dR}^+$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ et $I_+ = I \cap A_{inf}$. Si $k \in \mathbf{N}$, posons $A_{inf}^k = A_{inf}/I_+^{k+1}$. Définissons par récurrence une suite de sous-anneaux $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-modules $\Omega^{(k)}$ en posant $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(0)} = \mathcal{O}_{\overline{K}}$ et, si $k \geq 1$, $\Omega^{(k)} = \mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/\mathcal{O}_K}$ et en prenant pour $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ le noyau de la dérivation canonique $d^{(k)}$ de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ à valeurs dans $\Omega^{(k)}$.

THÉORÈME 1. — (i) *Si $k \in \mathbf{N}$, alors $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \overline{K} \cap (A_{inf} + I^{k+1})$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'inclusion de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $A_{inf} + I^{k+1}$ induit, par passage aux quotients un isomorphisme $A_{inf}^k/p^n A_{inf}^k \simeq \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$.*

(ii) *Si $k \geq 1$, $d^{(k)}$ est surjective et si $\mathbf{a}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ défini en 1.4.2, $\Omega^{(k)}$ s'identifie à $\overline{K}/\mathbf{a}^k(k)$.*

Remarquons que (i) implique comme corollaire :

(iii) *$\overline{K}$ est dense dans $\mathbf{B}_{dR}^+$ et $\mathbf{B}_{dR}^+$ est le séparé complété de $\overline{K}$ pour la topologie définie en prenant les $p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ avec $n, k \in \mathbf{N}$ pour base de voisinages de 0.*

Remarque : Une autre démonstration des points (i) et (ii) pour $k = 1$ se trouve exposée au paragraphe 1.4 (dans lequel $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(1)}$ est noté $\mathcal{O}'_{\overline{K}}$ et $\Omega^{(1)}$ est noté Ω).

Soient v_p la valuation de $\overline{K}$ normalisée par $v_p(p) = 1$, K^{nr} l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$, ϖ une uniformisante de K et $e = 1/v_p(\varpi)$ l'indice de ramification absolu de K. Soient $x \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, P le polynôme minimal de x sur K^{nr} et $r \in \mathbf{N}$ vérifiant $r \geq v_p(P'(x))$. Soit $r_k \in \mathbf{N}$ défini par récurence par $r_0 = 0$ et $r_{k+1} = 3r_k + r$ (i.e. $r_k = (3^k - 1)r/2$). Si $a \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}$, posons $r_k(a) = \inf(r_k, v_p(a))$ et $z_{k,a} = p^{r_k - r_k(a)}x^a$.

LEMME 2. — *Pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $a \in \mathbf{N}$, on a $z_{k,a} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$.*

Démonstration : Le résultat est trivial pour $k = 0$. Supposons le vrai pour k. Utilisant la relation

$$p^{r_k + r_k(a)} z_{k,a} = z_{k,1}(p^{r_k(a-1)} z_{k,a-1}),$$

on démontre par récurrence sur a, la relation

$$p^{r_k + r_k(a)} d^{(k+1)}(z_{k,a}) = p^{r_k} a x^{a-1} d^{(k+1)}(z_{k,1}), \tag{1}$$

d'où pour tout $A \in K^{nr}[X]$ à coefficients entiers :

$$p^{r_k} d^{(k+1)}(p^{r_k} A(x)) = p^{r_k} A'(x) d^{(k+1)}(z_{k,1}).$$

En particulier, si on prend pour A le polynôme minimal P de x, on obtient :

$$p^{r_k} P'(x) d^{(k+1)}(z_{k,1}) = 0 \Longrightarrow p^{r_k + r} d^{(k+1)}(z_{k,1}) = 0,$$

et utilisant le fait que $r_k(a) \leq r_k$, on obtient, en multipliant (1) par p^r :

$$\forall a \in \mathbf{N},\ p^{2r_k + r} d^{(k+1)}(z_{k,a}) = 0. \tag{2}$$

Deux cas se présentent alors. Si $v_p(a) \leq r_k$, on a $z_{k+1,a} = p^{2r_k + r} z_{k,a}$ et donc $z_{k+1,a} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k+1)}$ car (2) implique $d^{(k+1)}(z_{k+1,a}) = 0$. Si $v_p(a) > r_k$, écrivons $a = p^{r_k} b$ et posons $y_k = z_{k,p^{r_k}}$. On obtient alors

$$d^{(k+1)}(z_{k+1,a}) = p^{r_{k+1} - r_{k+1}(a)} d^{(k+1)}(y_k^b) = b p^{r_{k+1} - r_{k+1}(a)} y_k^{b-1} d^{(k+1)}(y_k) = 0$$

car $v_p(b) + r_{k+1} - r_{k+1}(a) \geq 2r_k + r$. Ce qui permet de terminer la démonstration.

Notons (provisoirement) $\mathcal{O}^k = \overline{K} \cap (A_{inf} + I^{k+1})$. Nous allons maintenant démontrer le (i) du théorème 1 par récurrence sur k. Il n'y a rien à démontrer si $k = 0$. Supposons donc que $k \geq 1$, que $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)} = \mathcal{O}^{k-1} = \overline{K} \cap (A_{inf} + I^k)$ et que $A_{inf}^{k-1}/p^n A_{inf}^{k-1} \simeq \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/p^n \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$.

LEMME 3. — *On a* $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \subset \mathcal{O}^k$.

Démonstration : Si $x \in \mathcal{O}^{(k-1)}$ soit $\tilde{x} \in A_{inf}$ tel que $x - \tilde{x} \in I^k$. Notons $\partial^{(k)}(x)$ l'image de $x - \tilde{x}$ dans le $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module $I^k/(I_+^k + I^{k+1})$. Alors $\partial^{(k)}(x)$ ne dépend pas du choix de $\tilde{x}$ et $\partial^{(k)}$ est une dérivation de $\mathcal{O}^{(k-1)}$ à valeurs dans un $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module dont le noyau est $\mathcal{O}^k$. On démontre alors le lemme en utilisant la propriété universelle satisfaite par $\Omega^{(k)}$.

Notons que ce lemme nous permet de considérer $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ comme un sous-anneau de A_{inf}^k.

LEMME 4. — *Pour tout* $k \in \mathbf{N}$, $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ *(et donc à fortiori* $\mathcal{O}^k$*) est dense dans* A_{inf}^k.

Démonstration : Si $\alpha \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, soit $R_\alpha = \{x \in R \mid x^{(0)} = \alpha\}$. Soient $\alpha \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$, $x = (x^{(n)}) \in R_\alpha$, P le polynôme minimal de α sur K^{nr}, $k \in \mathbf{N}$ et $l(k)$ le plus grand entier l tel que $p^l \leq k$. Soient m un entier ≥ 1 et $S_m(X) = X^{p^m} + \varpi X$. Soit $x_{n,m} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ vérifiant $(x_{n,m})^{p^m} + \varpi x_{n,m} = x^{(n)}$. Le polynôme minimal de $x_{n,m}$ sur K^{nr} divise le polynôme $P_{n,m} = P\big(S_m(X)^{p^n}\big)$. On a $P'_{n,m} = p^n S'_m S_m^{p^n-1} P'\big((S_m)^{p^n}\big)$ et $v_p(P'_{n,m}(x_{n,m})) = n + 1/e + (1 - p^{-n})v_p(\alpha) + v_p(P'(\alpha))$ est indépendant de m ; nous le noterons u_n. Utilisant le lemme 2, on voit que si $m \geq (3^k - 1)(u_n + 1)/2$, alors $y_{n,m} = (x_{n,m})^{p^m} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$. On a de plus $\theta(y_{n,m} - [x^{p^{-n}}]) = -\varpi x_{n,m}$, et donc

$$y_{n,m} \equiv [x^{p^{-n}}] \bmod(\varpi A_{inf} + I_+ + I^{k+1}).$$

Elevant cette congruence à la puissance p^n, on obtient

$\forall m \geq (3^k-1)(u_n+1)/2,\ (y_{n,m})^{p^n} = (x_{n,m})^{p^{n+m}} \equiv [x] \bmod (\varpi^{n-el(k)} A_{inf} + I^{k+1})$,

ce qui implique que si $\phi(n)$ est une suite d'entiers vérifiant $\lim_{n\to\infty} \phi(n)/n = \infty$, alors $y_{n,\phi(n)} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ pour n assez grand et la suite $(y_{n,\phi(n)})^{p^n}$ tend vers $[x]$ dans A_{inf}^k. On en déduit que l'adhérence de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans A_{inf}^k contient la sous-$\mathcal{O}_K$-algèbre de A_{inf}^k engendrée par les $[x]$ pour $x \in R_\alpha$ et $\alpha \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, et comme celle-ci est de toute évidence dense dans A_{inf}^k, cela démontre le lemme.

LEMME 5. — *$\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ et $\mathcal{O}^k/p^n\mathcal{O}^k$ sont des $\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$ épaississements infinitésimaux d'ordre k de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$.*

Démonstration : La démonstration étant la même dans les deux cas (remplacer $d^{(k)}$ par $\partial^{(k)}$ dans la démonstration suivante), nous ne la ferons que pour $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$. La densité de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans A_{inf}^k implique que l'application naturelle de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $A_{inf}^k/p^nA_{inf}^k$ est surjective. Composant avec la surjection de $A_{inf}^k/p^nA_{inf}^k$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$, on en déduit une surjection θ de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$. Il reste à vérifier que $ker\ \theta$ est de puissance $k+1$-ième nulle. On peut écrire θ comme le composé d'un morphisme θ_1 de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ sur $A_{inf}^{k-1}/p^nA_{inf}^{k-1} \simeq \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ et d'un morphisme θ_2 de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}} \simeq \mathcal{O}_0/p^n\mathcal{O}_0$. On sait déjà que $ker\ \theta_2$ est de puissance k-ième nulle (et donc que $(ker\ \theta)^k \subset ker\ \theta_1$), il suffit donc de montrer que si $x \in ker\ \theta$ et $y \in ker\ \theta_1$, alors $xy = 0$. Mais on a $x \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \cap p^n\mathcal{O}_0$ et $y \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \cap p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$. Donc $p^{-n}y \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ et $d^{(k)}(xp^{-n}y) = xd^{(k)}(p^{-n}y) = 0$ car $p^nd^{(k)}(p^{-n}y) = 0$ et $x \in p^n\mathcal{O}_0$, ce qui implique $p^{-n}xy \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ et donc $xy = 0$.

COROLLAIRE 6. — *$A_{inf}^k/p^nA_{inf}^k$, $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ et $\mathcal{O}^k/p^n\mathcal{O}^k$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration : $A_{inf}^k/p^nA_{inf}^k$ est l'objet initial dans la catégorie des $\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$ épaississements infinitésimaux d'ordre k de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}/p^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ et par suite, les applications naturelles $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \to \mathcal{O}^k/p^n\mathcal{O}^k \to A_{inf}^k/p^nA_{inf}^k$ sont des isomorphismes.

COROLLAIRE 7. — $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \mathcal{O}^k$

Démonstration : On a $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \subset \mathcal{O}^k$ et $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} \simeq \mathcal{O}^k/p\mathcal{O}^k$. On en déduit que la multiplication par p dans $\mathcal{O}^k/\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ est un isomorphisme, et comme ce module est de p-torsion, il est nul; d'où le résultat.

Remarque : Les corollaires 6 et 7 permettent de terminer la démonstration du (i) du théorème 1. Passons maintenant à la démonstration du (ii).

LEMME 8. — $\partial^{(k)}$ *est surjective.*

Démonstration : On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)} \longrightarrow Im(\partial^{(k)}) \longrightarrow 0,$$

d'où l'on déduit une autre suite exacte courte

$$0 \longrightarrow Im(\partial^{(k)})_{p^n} \longrightarrow A^k_{inf}/p^n A^k_{inf} \longrightarrow A^{k-1}_{inf}/p^n A^{k-1}_{inf} \longrightarrow 0,$$

et passant à la limite sur n, on voit que $T_p(Im(\partial^{(k)}))$ s'identifie au noyau de la projection de A^k_{inf} sur A^{k-1}_{inf} ; en particulier, il est non nul. Soit alors une suite d'éléments x_n de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ vérifiant $\partial^{(k)}(x_n) = p\partial^{(k)}(x_{n+1})$ et $\partial^{(k)}(x_1) \neq 0$. Soit $y \in I^k/I^k_+ + I^{k+1}$. Il existe alors $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ tels que $y = a\partial^{(k)}(x_n)$. Soit $r \in \mathbf{N}$ tel que $p^r a \in \mathcal{O}^k$. On obtient $\partial^{(k)}(p^r a x_{n+r}) = p^r a \partial^{(k)}(x_{n+r}) = y$, ce qui permet de conclure. Comme $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \mathcal{O}^k$, ceci permet de terminer la démonstration du (ii).

Remarque : L'égalité $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \mathcal{O}^k$ permet d'identifier $d^{(k)}$ et $\partial^{(k)}$ ainsi que $\Omega^{(k)}$ et $I^k/I^k_+ + I^{k+1} \cong (I/I_+)^k \cong \overline{K}/\mathbf{a}^k(k)$; la dernière égalité venant de l'identification entre $\Omega^{(1)}$ et $\overline{K}/\mathbf{a}(1)$ démontrée au paragraphe 1.4.

§A2. $\overline{K}$ comme sous-anneau de B^+_{dR}.

Soient F un corps commutatif de caractéristique 0, $P \in F[X]$ un polynôme irréductible, $F[X]_P$ le complété du localisé de $F[X]$ en l'idéal engendré par

P, $L = F[X]/P$ le corps résiduel de cet anneau de valuation discrète complet et π l'image de X dans L. Alors $Y = X - \pi$ est une uniformisante de $F[X]_P$ qui s'identifie donc à $L[[Y]]$. Notons que si $D = \frac{d}{dP(X)}$ est l'unique dérivation de $F[X]_P$ de noyau L vérifiant $D(P) = 1$, si $y \in L$ et si $Q \in F[X]$ vérifie $Q(\pi) = y$, alors l'application $y \to Q_y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} D^k(Q)P^k$ est la section de la projection de $F[X]_P$ sur L. En effet, $D(Q_y) = 0$, ce qui implique $Q_y \in L$ et de plus, $Q_y(\pi) = y$.

Tout élément de $F[X]_P$ s'écrit de manière unique $\sum_{k=0}^{\infty} Q_k P^k$ avec $Q_k \in F[X]$ et $\deg(Q_k) < \deg(P)$. Une telle écriture sera dite minimale. Si $y \in L$, on note $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_P^k(y) P^k$ son écriture minimale. On peut d'ailleurs calculer $\delta_P^k(y)$ en utilisant l'algorithme suivant : il existe une unique suite de couples de polynômes (Q_k, R_k) vérifiant

(i) $Q_0 = Q$ et $R_0 = 0$,

(ii) $\deg(R_k) < \deg(P')$ et $\deg(Q_k) < \deg(P)$,

(iii) $Q'_k + R_k + (k+1)P'Q_{k+1} = PR_{k+1}$.

On a alors $\delta_P^k(y) = Q_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, comme on peut le constater en calculant $D(\sum_{k=0}^{\infty} Q_k P^k)$.

Nous allons appliquer les résultats précédents à $F = K^{nr}$. Soient $y \in \overline{K}$, $L \neq K^{nr}$ une extension finie de K^{nr} contenant y, π une uniformisante de L et P le polynôme minimal de π sur K^{nr}.

LEMME 9. — *Si $\tilde{\pi} \in A_{inf}$ est tel que $\theta(\tilde{\pi}) = \pi$, alors $P(\tilde{\pi})$ est un générateur de I_+.*

Démonstration : Soit $u \in R$ tel que $u^{(0)} = \pi$. On a $\tilde{\pi} = [u] + \alpha$ avec $\alpha \in I_+$ et si $f = [L : K^{nr}]$, alors $P([u]) \equiv [u^f] \mod \varpi A_{inf}$. Comme $v_R(u^f) = 1$ et $P([u]) \in I_+$, ceci implique ([Fo82a Prop.2.4]) que $P([u])$ est un générateur de I_+. On peut donc écrire $\alpha = \beta P([u])$ avec $\beta \in A_{inf}$ et on a $P(\tilde{\pi}) = P([u])(1 + P'([u])\beta) \mod I_+^2$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\theta(1 + P'([u])\beta) = 1 + P'(\pi)\theta(\beta)$ est une unité de $\mathcal{O}_\mathbf{C}$ car L est totalement ramifiée et donc $1 + P'([u])\beta \in A_{inf}^*$.

Si $x \in \mathbf{B}_{dR}^+$, soit $s_k(x) = \sup\{m \in \mathbf{Z} \mid x \in \varpi^m A_{inf} + I^{k+1}\}$. On appelle écriture minimale de x toute série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ dont la somme est x et telle que

$x_k \in \varpi^{s_k(x)} I_+^k$ (notons que cette condition implique la convergence de la série).

PROPOSITION 10. — *$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_P^k(y)(\tilde{\pi})P(\tilde{\pi})^k$ est une écriture minimale de y.*

Démonstration : C'est une écriture car $P(\tilde{\pi}) \in I - I^2$ implique que le morphisme $Q \to Q(\tilde{\pi})$ est une injection de $K^{nr}[X]_P$ dans $\mathbf{B}_{dR}^+$ et donc que $Q_y(\tilde{\pi}) = y$. Elle est minimale car $P(\tilde{\pi})$ est un générateur de I_+ et $deg(\delta_P^k(y)) < deg(P)$.

Remarque 1 : On peut définir $s_k(y)$ sans recours à $\mathbf{B}_{dR}^+$: en effet, $s_k(y)$ n'est rien d'autre que le minimum de $v_p(\delta_P^i(y))$ pour $0 \leq i \leq k$. De plus, cette proposition nous donne une description explicite de $\mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ comme étant l'ensemble des $x \in \overline{K}$ vérifiant $s_k(x) \geq 0$.

Remarque 2 : Une fois que l'on a identifié $\Omega^{(k)}$ avec $\overline{K}/\mathbf{a}^k(k)$, et que l'on a choisit un générateur $\epsilon = (\epsilon^{(m)}) \in R$ de $\mathbf{Z}_p(1)$, on peut utiliser la proposition 10 pour donner une formule explicite pour $d^{(k)}$. Supposons $y \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ dans la proposition 10, et soit t^k l'image de $([\epsilon]-1)^k)$ modulo I^{k+1}, alors on a

$$d^{(k)}(y) = \delta_P^k(y)(\pi)\theta\left(\frac{P(\tilde{\pi})^k}{([\epsilon]-1)^k}\right)t^k.$$

REFERENCES

[BO78] P. Berthelot and A. Ogus. — Notes on Crystalline cohomology, Princeton University Press, 1978.

[BK90] S. Bloch and K. Kato. — L–functions and Tamagawa numbers of motives **in** *The Grothendieck Festschrift II*, Progress in Math., Birkhäuser, Boston, 1990, 333–400.

[Co90] P. Colmez. — Le corps des périodes p–adiques, C.R.A.S. Paris, 310 (1990), 321–324.

[Fa89] G. Faltings. — Crystalline cohomology and p–adic étale Cohomology, **in** *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, The Johns Hopkins Univ. Press, 1989, 25–80.

[Fo82a] J.–M. Fontaine. — Sur certains types de représentations p–adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti–Tate, **Ann. of Maths**, 115 (1982), 529–577.

[Fo82b] J.–M. Fontaine. — Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, **Inv. Math.** 65 (1982), 379–409.

[Fo83] J.–M. Fontaine. — Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p–adiques, **in** *Algebraic Geometry Tokyo–Kyoto*, Lecture Notes in Math. 1016, Springer, Berlin, 1983, 86–108.

[FM87] J.–M. Fontaine and W. Messing. — p–adic Periods and p–adic étale Cohomology, **Contemporary Mathematics**, 67 (1987), 179–207.

[Se68] J.–P. Serre. — *Corps locaux*, $2^{\text{ème}}$ édition, Paris, Hermann, 1968.

[Ta67] J. Tate. — p–divisible Groups, **in** *Proc. of a conf. on local Fields*, NUFFIC Summer School, Driebergen, Springer, Berlin, 1967, 158–183.

[Exp.IX] J.–P. WINTENBERGER. — Théorème de comparaison p–adique pour les schémas abéliens. I : Construction de l'accouplement de périodes, exposé IX, *dans ce volume.*

Jean–Marc Fontaine
URA D0752 du C.N.R.S.
Mathématiques, Bât. 425
Université Paris–Sud
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE

Pierre Colmez
Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 PARIS
FRANCE

Exposé III

REPRÉSENTATIONS p–ADIQUES SEMI–STABLES

par **Jean–Marc Fontaine**

0. — Introduction

0.1. — On garde les notations de l'exposé précédent. En particulier, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Nous notons k le corps résiduel de K, K_0 le corps des fractions des vecteurs de Witt à coefficients dans k et σ le Frobenius absolu opérant sur k (par $x \longmapsto x^p$) et sur K_0 par fonctorialité.

Nous notons $\underline{\mathrm{Rep}}(G_K)$ la catégorie des **représentations p–adiques (de G_K)**, i.e. la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{Q}_p$–espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action linéaire et continue de G_K et les flèches les applications $\mathbb{Q}_p$–linéaires qui commutent à l'action de G_K.

Le but essentiel de cet exposé est d'introduire certaines sous–catégories pleines de $\underline{\mathrm{Rep}}(G_K)$. Ces catégories sont stables par les opérations "usuelles" de l'algèbre linéaire, i.e. par sous–objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, contragrédiente, et contiennent la représentation unité. Ce sont

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G_K)$ des représentations de Hodge–Tate,

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G_K)$ des représentations de de Rham,

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G_K)$ des représentations cristallines ou à bonne réduction,

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G_K)$ des représentations semi–stables,

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{pcris}(G_K)$ des représentations potentiellement cristallines, ou ayant potentiellement bonne réduction,

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G_K)$ des représentations potentiellement semi–stables.

On a des “inclusions”, représentées ici par des flèches

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G_K) \arrow[dr] & & & \\
\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G_K) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G_K) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G_K) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G_K) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Rep}}(G_K) \\
 & \underline{\mathrm{Rep}}_{pcris}(G_K) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

qui sont toutes strictes, sauf peut-être $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G_K) \subset \underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G_K)$; en outre les représentations cristallines sont celles qui sont à la fois semi–stables et ont potentiellement bonne réduction.

0.2. — A chacune de ces catégories, on associe un foncteur additif, exact et fidèle, compatible avec le produit tensoriel, de cette catégorie dans une catégorie de structures algébriques convenables, tout à fait élémentaires, mais éventuellement un peu compliquées : soit V une représentation p–adique de dimension d ; alors,

– si V est de Hodge–Tate, il lui correspond un K–espace vectoriel gradué, $\underline{D}_{HT}(V)$, de dimension d ;

– si V est de de Rham, un K–espace vectoriel filtré $\underline{D}_{dR}(V)$, de dimension d ;

– si V est cristalline, $\underline{D}_{dR}(V)$ est muni d'une K_0–structure $\underline{D}_{st}(V)$ (notée aussi $\underline{D}_{cris}(V)$) et d'un Frobenius φ (automorphisme σ–semi–linéaire de $\underline{D}_{st}(V)$), avec des relations de compatibilité, le tout formant ce que nous avons appelé dans [Fo79] un φ–module filtré faiblement admissible ;

– si V est semi–stable, la situation est la même que dans le cas cristallin, à ceci près que l'on a en plus un opérateur de monodromie qui est un endomorphisme nilpotent N de $\underline{D}_{st}(V)$, vérifiant $N\varphi = p\varphi N$ (et qui agit aussi bien sûr sur $\underline{D}_{HT}(V)$) ; on a $N = 0$ si et seulement si V est cristalline ; on obtient ainsi un (φ, N)–module filtré faiblement admissible ;

– enfin si V est potentiellement semi–stable, et si pour simplifier on suppose k algébriquement clos, la situation est assez voisine : on a un K_0–espace vectoriel $\underline{D}_{pst}(V)$, de dimension d, muni, non seulement d'une action de φ et de N, mais aussi d'une action linéaire de G_K, discrète (i.e. à travers le groupe de Galois d'une extension finie galoisienne convenable de K contenue dans $\overline{K}$), commutant à φ et à N et on a $\underline{D}_{dR}(V) = (\overline{K} \otimes_{K_0} \underline{D}_{pst}(V))^{G_K}$.

0.3. — L'un des intérêts de cette construction c'est que le foncteur $\underline{D}_{pst}$ qui va de $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G_K)$ dans une catégorie de "(φ, N, G_K)–modules filtrés" est pleinement fidèle. Autrement dit, les propriétés de V se "lisent" sur $\underline{D}_{pst}(V)$; même si les (φ, N, G_K)–modules filtrés sont des objets un peu lourds, ils sont beaucoup plus "concrets" que les représentations p–adiques.

En outre, on a une description conjecturale de l'image essentielle du foncteur $\underline{D}_{pst}$, et on dispose de résultats partiels, qui fournissent des exemples hautement non triviaux de représentations p–adiques potentiellement semi–stables.

0.4. — Bien sûr, on s'attend à ce que la cohomologie étale p–adique fournisse des exemples de représentations p–adiques de tous les types considérés ci–dessus et que les différents foncteurs correspondent à des théorèmes de comparaison avec les autres cohomologies p–adiques que l'on peut considérer. Nous terminerons cet exposé (§ 6), en énonçant des conjectures et en discutant des résultats (dûs aux efforts de Bloch, Faltings, Fontaine, Gabber, Hyodo, Illusie, Kato, Messing, Raynaud, Tate,...) dont nous avons eu connaissance.

Dans l'exposé VIII, on reviendra sur les questions liées à la cohomologie étale p–adique dans la situation "arithmétique", i.e. lorsque l'on s'intéresse aux extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ ou de $\mathbb{Q}$. On discutera aussi des relations entre les cohomologies étales ℓ–adiques lorsque le nombre premier ℓ varie.

0.5. — Donnons maintenant une idée du contenu des cinq premiers paragraphes de cet exposé :

0.5.1. — Le § 1 contient quelques rappels et compléments sur les catégories tannakiennes : Soient G un groupe (abstrait) et E un corps. Les représentations E–linéaires de G de dimension finie forment une catégorie abélienne. On montre comment associer à une E–algèbre B, munie d'une action de G, vérifiant des propriétés convenables, une sous–catégorie pleine de la catégorie des représentations E–linéaires de G de dimension finie, stable par les opérations usuelles, **la catégorie des représentations B–admissibles.**

On discute diverses variations sur ce thème dont nous aurons besoin dans la suite, principalement ce qui se passe lorsque l'on remplace B par un sous–anneau et la possibilité, dans certains cas, de définir aussi la catégorie des **représentations potentiellement B–admissibles**.

On montre aussi que, dans ce formalisme, on a une égalité, plus ou moins tautologique entre **le degré de transcendance** du corps engendré par certaines "périodes" et la dimension de certains groupes algébriques.

0.5.2. — Dans le § 2, on donne quelques exemples de représentations B–admissibles.

0.5.3. — A partir du § 3, les notions introduites au § 1 sont utilisées dans la situation où $G = G_K$ et $E = \mathbb{Q}_p$.

Pour la commodité du lecteur, on rappelle au § 3 la définition des représentations de Hodge–Tate (cf. [Se67] et [Ta67]) et de de Rham (cf. [Fo82a]) qui, avec les notations de [Exp.II], n° 1.5, correspondent à prendre $B = B_{HT}$ et $B = B_{dR}$.

0.5.4. — Au § 4, on étudie les (φ, N, G_K)–modules filtrés et leurs variantes. On regarde d'abord ces modules "sans filtration", ce qui permet de travailler dans des catégories qui ont de bonnes propriétés (elles sont abéliennes et même tannakiennes).

On rajoute alors une filtration et on est amené à introduire la condition d'admissibilité faible qui exprime la dépendance souhaitée entre les actions de φ, N et G_K d'une part et la filtration d'autre part et qui permet de récupérer de nouveau une catégorie abélienne (malheureusement, on ne sait prouver la stabilité par produit tensoriel que dans des cas particuliers).

0.5.5. — Les représentations cristallines (cf. [Fo82a] et [Fo83]) sont celles qui sont B_{cris}–admissibles, tandis que les semi–stables sont celles qui sont B_{st}–admissibles (cf. [Exp.II], n° 2.3 et 3.1 pour la définition de B_{cris} et de B_{st}) ; elles sont introduites au § 5. On discute aussi à la fin de ce paragraphe les représentations potentiellement semi–stables (ce sont celles qui deviennent semi–stables après une extension finie du corps de base).

1. — Représentations B–admissibles

Ce paragraphe contient essentiellement des variations sur le thème des catégories tannakiennes neutres (cf. [Sa72], [DM82] et [De90]), à deux nuances près :

i) il faut penser au point de vue "inverse" du point de vue habituel, i.e. à celui qui consisterait, partant d'un groupe algébrique, à s'intéresser à la catégorie de ses représentations ; ou partant de l'algèbre affine d'un torseur pour un certain quotient de ce groupe algébrique, à s'intéresser au foncteur fibre qu'il définit ;

ii) au lieu de partir d'une situation algébrique, on part d'un groupe abstrait G et d'un anneau B muni d'une action de G.

La première nuance rend la situation plus concrète et la deuxième oblige à certaines précautions. Deux bonnes raisons pour donner des démonstrations complètes[1], ce que nous avons essentiellement fait. Ceci étant les résultats qui vont suivre sont certainement bien connus des experts et leurs démonstrations ne présentent pas de difficulté.

Rappelons ([DM82], Intr.), qu'une sous–catégorie **strictement pleine** d'une catégorie est une sous–catégorie pleine qui, si elle contient un objet, contient aussi tous les objets qui lui sont isomorphes.

1.1. — Rappels sur les groupes algébriques affines

Soient $\mathbb{G}$ un schéma en groupes affine sur un corps F et A son algèbre affine.

1.1.1. — ([DM82], prop. 2.2) Se donner une représentation linéaire de $\mathbb{G}$ dans un espace vectoriel V sur F, i.e. un morphisme, défini sur F, de $\mathbb{G}$ dans

[1] modulo les courts rappels sur les groupes algébriques affines qui sont l'objet du n° 1.1.

$\mathbb{GL}_V$, (ou encore un morphisme des foncteurs en groupes qu'ils représentent), revient à se donner une structure de A–comodule sur V, i.e. une application F–linéaire

$$\lambda : V \longrightarrow V \otimes A$$

telle que (en notant $\varepsilon : A \longrightarrow F$ la co–unité et $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ le coproduit) $(id_V \otimes \varepsilon)\lambda : V \longrightarrow V \otimes A \longrightarrow V \otimes F = V$ soit l'identité sur V et que $(id_V \otimes \Delta)\lambda = (\lambda \otimes id_A)\lambda$.

Si R est une F–algèbre et si $g : A \longrightarrow R$ est un élément de $\mathbb{G}(R)$, l'automorphisme du R–module $V \otimes R$ induit par g est l'application composée

$$V \otimes R \xrightarrow{\lambda \otimes id_R} V \otimes A \otimes R \xrightarrow{id_V \otimes g \otimes id_R} V \otimes R \otimes R \xrightarrow{id_V \otimes \text{prod.}} V \otimes R\,.$$

1.1.2. — ([DM82], prop. 2.20) Le groupe $\mathbb{G}$ admet une représentation linéaire fidèle de dimension finie V si et seulement s'il est algébrique, i.e. si A est une F–algèbre de type fini. S'il en est ainsi, si V est une telle représentation et si L désigne la représentation duale de $\det(V)$, toute représentation linéaire de $\mathbb{G}$ est isomorphe à un sous–quotient d'une somme directe de représentations de la forme $V^{\otimes^r} \otimes L^{\otimes^s}$, avec $r,\ s \in \mathbb{N}$.

Dans toute la suite du paragraphe 1, G **est un groupe** (abstrait) **et** E **est un corps**. On choisit une sous–catégorie strictement pleine, que l'on note $\underline{\text{Rep}}(G)$ de la catégorie des représentations E–linéaires de dimension finie de G, stable par sous–objet, quotient, somme directe, produit tensoriel et dual, non triviale (i.e. contenant au moins une représentation de dimension non nulle). Pour fixer les idées, on peut penser soit au cas où $\underline{\text{Rep}}(G)$ est la catégorie de toutes les représentations E–linéaires de G de dimension finie, soit au cas où G et E sont munis d'une topologie et où l'on se restreint aux représentations de dimension finie qui sont continues.

1.2. — La catégorie $\underline{\text{Rep}}(G)$ et ses sous–$\otimes$–catégories

1.2.1. — On renvoie à [De90] (§ 2) pour la définition de ce qu'est une **catégorie tannakienne** sur un corps k. Rappelons seulement que c'est une catégorie abélienne k–linéaire, munie d'un produit tensoriel, d'un objet–unité et d'une dualité vérifiant des propriétés convenables. En particulier, si D_1 et D_2 sont deux objets de cette catégorie, on peut définir $\underline{\mathrm{Hom}}(D_1, D_2)$, le "hom interne" de D_1 dans D_2, comme étant $D_1^* \otimes D_2$ (où D_1^* désigne le dual de D_1). Rappelons surtout que la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ est une catégorie tannakienne sur E.

Rappelons aussi qu'un $\otimes$–**foncteur** entre deux catégories tannakiennes est un foncteur muni d'isomorphismes de "commutation au produit tensoriel" compatible aux contraintes d'associativité, de commutativité, et d'unité (*op. cit.* n° 2.7) ; qu'une $\otimes$–**équivalence** entre deux catégories tannakiennes sur k est un $\otimes$–foncteur k–linéaire qui est une équivalence de catégories ; qu'un **foncteur fibre** d'une catégorie tannakienne $\mathcal{C}$ sur k sur une extension k' de k est un $\otimes$–foncteur k–linéaire et exact de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des k'–espaces vectoriels de dimension finie (un tel foncteur est automatiquement fidèle) ; et qu'une catégorie tannakienne sur k est **neutre** si elle admet un foncteur fibre sur k.

Dans cet exposé, si $\mathcal{C}$ est une catégorie tannakienne sur un corps, une **sous–catégorie tannakienne de** $\mathcal{C}$ est une sous–catégorie strictement pleine de $\mathcal{C}$ contenant un objet de dimension non nulle et stable par sous–objet, quotient, somme–directe, produit tensoriel et dual (elle l'est donc aussi par hom interne).

1.2.2. — Pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ de dimension non nulle, notons

$$\rho_V : G \longrightarrow \mathbb{GL}_V(E)$$

l'homomorphisme structural et $\mathbb{G}_V$ l'enveloppe algébrique de l'image de ρ_V, i.e. le plus petit sous–groupe algébrique de $\mathbb{GL}_V$ tel que $\rho_V(G) \subset \mathbb{G}_V(E)$. Son algèbre affine est le quotient de celle de $\mathbb{GL}_V$ par l'idéal des fonctions f telles que $f(\rho_V(g)) = 0$, pour tout $g \in G$. On note $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ la catégorie des représentations E–linéaires de dimension finie de $\mathbb{G}_V$.

On note aussi $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$ la plus petite sous–catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ contenant V.

1.2.3. Proposition. — *Avec les hypothèses et notations qui précèdent, le foncteur*

$$\iota_V : \underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V) \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G) ,$$

qui, à la représentation W, associe W muni de l'action de G induite par ρ_V, induit une $\otimes$-équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ et $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$.

(autrement dit, le foncteur ι_V – qui est visiblement un $\otimes$-foncteur E-linéaire – est pleinement fidèle et son image essentielle est $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$).

1.2.4. — Preuve : a) Montrons d'abord la pleine fidélité, i.e. que, si V_1 et V_2 sont deux représentations E-linéaires de dimension finie de $\mathbb{G}_V$, la flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_V}(V_1, V_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$$

est surjective (l'injectivité est évidente).

Si l'on pose $W = V_1^* \otimes V_2$, on voit que l'on est ramené à montrer que, si un élément $w \in W$ est fixe par G, alors il est fixe par $\mathbb{G}_V$. Si A désigne l'algèbre affine de $\mathbb{G}_V$, si

$$\lambda : W \longrightarrow W \otimes_E A$$

est la structure de A-comodule sur W qui définit l'action de $\mathbb{G}_V$ sur W (n° 1.1.1), et si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de W sur E, on peut écrire

$$\lambda(w) = w \otimes 1 + \sum_{i \in I} e_i \otimes a_i, \text{ avec les } a_i \in A .$$

Comme l'application naturelle de A dans l'anneau des fonctions sur G à valeurs dans E est injective, s'il existait $i_0 \in I$ tel que $a_{i_0} \neq 0$, il existerait $g \in G$ tel que $a_{i_0}(\rho_V(g)) \neq 0$; on aurait alors $g(w) = (id_W \otimes \rho_V(g))(\lambda(w)) = w + \Sigma a_i(\rho_V(g)) \cdot e_i \neq w$. On doit donc avoir $\lambda(w) = w \otimes 1$ et w est fixe par $\mathbb{G}_V$.

b) Montrons que l'image essentielle est $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$. Il résulte de 1.1.2 que l'image essentielle de $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ est contenue dans $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$ et que la seule chose à vérifier est que, si W est une représentation E-linéaire de $\mathbb{G}_V$, et si W' est un sous-E-espace vectoriel de W, pour que W' soit stable par $\mathbb{G}_V$, il suffit qu'il soit stable par G. Ceci se démontre essentiellement comme le a). Il faut voir que si $\lambda(W') \not\subset W' \otimes A$, alors W' n'est pas stable par G. Mais alors, si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de W contenant une base $(e_i)_{i \in I'}$ de W' (ici, I' est donc un sous-ensemble de I), et si $w \in W'$ est tel que $\lambda(w') \notin W' \otimes A$, on a

$$\lambda(w') = \sum_{i \in I} e_i \otimes a_i \ ,$$

avec $a_{i_0} \neq 0$, pour un i_0 convenable n'appartenant pas à I' ; si l'on choisit $g \in G$ tel que $a_{i_0}(\rho_V(g)) \neq 0$, on voit que $g(w') \notin W'$.

1.2.5. — Soit $\mathbb{G}_{alg}$ l'enveloppe pro-algébrique de l'image de G (relativement à la catégorie de représentations choisies), i.e. la limite projective des $\mathbb{G}_V$, pour V parcourant les objets de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$. La proposition 1.2.3 permet, par passage à la limite, d'identifier $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_{alg})$ des représentations E–linéaires de dimension finie du groupe pro–algébrique $\mathbb{G}_{alg}$ [Dans le langage tannakien, c'est une catégorie tannakienne neutre (cf. par exemple [DM82], def. 2.19), munie du foncteur libre qui, à une représentation V de G associe l'espace vectoriel sous–jacent et le groupe $\mathbb{G}_{alg}$ s'identifie au groupe des $\otimes$–automorphismes de ce foncteur (*op. cit.*, th. 2.11)]. En outre, on obtient une bijection entre les quotients de $\mathbb{G}_{alg}$ et les sous–catégories tannakiennes de $\underline{\mathrm{Rep}}(G) = \underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_{alg})$ en associant à un tel quotient $\mathbb{H}$ la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{H})$ de ses représentations linéaires de dimension finie.

1.3. — Le foncteur $\underline{D}_B$

1.3.1. — Nous appelons (E, G)–**anneau** la donnée d'un anneau commutatif B muni d'une structure de E–algèbre et d'une action de G (i.e. d'un homomorphisme de G dans le groupe des E–automorphismes de l'anneau B).

1.3.2. — Si B est un (E, G)–anneau, pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, on pose

$$\underline{D}_B(V) = (B \otimes_E V)^G$$

et, si F désigne la E–algèbre B^G, on note

$$\alpha_B(V) : B \otimes_F \underline{D}_B(V) \longrightarrow B \otimes_E V$$

l'application B–linéaire déduite, par extension des scalaires, de l'inclusion de $\underline{D}_B(V)$ dans $B \otimes_E V$.

On peut considérer $\underline{D}_B$ comme un foncteur additif (et même E–linéaire) de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dans la catégorie des F–modules et α_B est une transformation naturelle.

1.3.3. — Remarque : On peut, si l'on préfère, adopter un point de vue contravariant et noter $\underline{D}^*_B(V)$ le F–module des applications E–linéaires de V dans B qui commutent à l'action de G. On voit que, si V^* désigne le dual de V, alors $\underline{D}^*_B(V)$ s'identifie à $\underline{D}_B(V^*)$.

1.3.4. — Si V_1 et V_2 sont deux objets de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, la structure d'anneau de B induit une application naturelle

$$\underline{D}_B(V_1) \otimes_F \underline{D}_B(V_2) \longrightarrow \underline{D}_B(V_1 \otimes V_2) \ ,$$

(et le foncteur $\underline{D}_B$ vérifie les propriétés d'associativité, de commutativité et de compatibilité avec un objet–unité que l'on pense (cf. [DM82], conditions a), b), c) de la défintion 1.8).

Si V est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, en appliquant ce qui précède à V et à sa duale V^*, et en composant avec l'application naturelle de $\underline{D}_B(V \otimes V^*)$ dans $\underline{D}_B(E) = F$, on obtient une application F–bilinéaire

$$\underline{D}_B(V) \times \underline{D}_B(V^*) \longrightarrow F$$

que l'on peut interpréter comme une application F–linéaire de $\underline{D}_B(V^*)$ dans le F–module $(\underline{D}_B(V))^*$ dual de $\underline{D}_B(V)$.

1.4. — Anneaux G–réguliers

1.4.1. — Soit B un (E, G)–anneau. Nous disons que B **est G–régulier** s'il est non nul et vérifie les trois conditions suivantes :

– $(G \cdot R_1)$ l'anneau B est réduit,

– $(G \cdot R_2)$ pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, l'application $\alpha_B(V)$ est injective,

– $(G \cdot R_3)$ tout élément b non nul de B tel que la E–droite engendrée par B est stable par G est inversible.

Remarquons que $(G \cdot R_3)$ implique en particulier que $F = B^G$ est un corps.

1.4.2. Proposition. — *Soit B un (E,G)-anneau G-régulier. Alors*

i) pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, on a

$$\dim_F \underline{D}_B(V) \leq \dim_E V \ .$$

ii) si $\dim_F \underline{D}_B(V) = \dim_E V$, l'application $\alpha_B(V)$ est un isomorphisme.

1.4.3. — Preuve : Soient r la dimension de V et $v_1, v_2, \ldots, v_r$ une base de V sur E, donc aussi de $B \otimes_E V$ sur B (en identifiant $v \in V$ à $1 \otimes v \in B \otimes V$). Remarquons d'abord que l'injectivité de $\alpha_B(V)$ implique que, si $d_1, d_2, \ldots, d_r$ sont des éléments de $\underline{D}_B(V)$, linéairement indépendants sur F, et si

$$d_i = \Sigma a_{ij} v_j, \text{ avec les } a_{ij} \in B \ ,$$

alors le déterminant a de la matrice des a_{ij} n'est pas nul. Si, dans $\Lambda^r_B(B \otimes V)$, on pose $d = d_1 \wedge d_2 \wedge \cdots \wedge d_r$ et $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r$, on a $d = av$ et, pour tout $g \in G$, $d = gd = ga \cdot gv = ga \cdot \nu(g) \cdot v$, où ν est un caractère de G à valeurs dans E^* ; d'où $ga = \nu^{-1}(g) \cdot a$, pour tout $g \in G$ et $(G \cdot R_3)$ implique que a est inversible dans B.

L'assertion (ii) est alors claire. L'assertion (i) aussi car elle revient à vérifier que, si $d_1, d_2, \ldots, d_r$ sont des éléments de $\underline{D}_B(V)$, linéairement indépendants sur F, alors ils engendrent $\underline{D}_B(V)$ comme F-espace vectoriel. Mais l'argument qui précède montre qu'ils forment une base du B-module libre $B \otimes V$. Pour tout $d \in \underline{D}_B(V)$, on peut donc écrire, de façon unique

$$d = \sum_{1 \leq i \leq r} b_i d_i, \quad \text{avec les } b_i \in B \ .$$

Pour tout $g \in G$, on a alors,

$$d = g(d) = \Sigma g(b_i) \cdot g(d_i) = \Sigma g(b_i) \cdot d_i \ ,$$

donc $g(b_i) = b_i$; et les b_i sont bien dans F.

1.5. — Représentations B–admissibles

1.5.1. DÉFINITION. — *Soit B un (E,G)-anneau, G-régulier. On dit qu'un objet V de* $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ *est B-admissible si $\alpha_B(V)$ est un isomorphisme* (si $F = B^G$, cela revient donc à dire que $\dim_F \underline{D}_B(V) = \dim_E V$).

1.5.2. PROPOSITION. — *La sous-catégorie pleine* $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ *de* $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ *dont les objets sont ceux qui sont B-admissibles est une sous-catégorie tannakienne de* $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ *; la restriction de $\underline{D}_B$ à cette catégorie est un foncteur fibre.*

Rappelons d'abord que la dernière assertion signifie que la restriction de $\underline{D}_B$ à cette catégorie est un foncteur exact, E–linéaire, tel que, si V_1 et V_2 sont des objets de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$, l'application naturelle

$$\underline{D}_B(V_1) \otimes_F \underline{D}_B(V_2) \longrightarrow \underline{D}_B(V_1 \otimes_E V_2)$$

est un isomorphisme, compatible aux contraintes d'associativité, commutativité et unité (il en résulte que ce foncteur est fidèle et que, si V est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$, l'application naturelle de $\underline{D}_B(V^*)$ dans $(\underline{D}_B(V))^*$ est un isomorphisme).

1.5.3. — Preuve : La stabilité par somme directe est claire. Si

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, on a une suite exacte de F–espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \underline{D}_B(V') \longrightarrow \underline{D}_B(V) \longrightarrow \underline{D}_B(V'')$$

et des considérations sur les dimensions montrent que, si V est B–admissible, il en est de même de V' et de V'' et la suite

$$0 \longrightarrow \underline{D}_B(V') \longrightarrow \underline{D}_B(V) \longrightarrow \underline{D}_B(V'') \longrightarrow 0$$

est exacte. D'où la stabilité par sous–objet et quotient et l'exactitude de $\underline{D}_B$.

Soient V_1 et V_2 des représentations B–admissibles et soit A_1 (resp. A_2) la matrice dont les colonnes sont les composantes d'une base $\{d_i\}$ de $D_1 =$

$\underline{D}_B(V_1)$ sur une base $\{v_i\}$ de V_1 (resp. d'une base $\{d'_j\}$ de $D_2 = \underline{D}_B(V_2)$ sur une base $\{v'_j\}$ de V_2). Avec des conventions évidentes, les $v_i \otimes v'_j$ forment une base du B–module libre $B \otimes_E (V_1 \otimes_E V_2) = (B \otimes_E V_1) \otimes_B (B \otimes_E V_2)$. Le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les composantes des $d_i \otimes d'_j$ sur la base des $v_i \otimes v'_j$ est $\det(A_1) \times \det(A_2)$ qui est inversible dans B puisque $\det(A_1)$ et $\det(A_2)$ le sont. On en déduit que l'application

$$\underline{D}_B(V_1) \otimes_F \underline{D}_B(V_2) \longrightarrow \underline{D}_B(V_1 \otimes_E V_2)$$

est injective. Des considérations sur les dimensions impliquent alors que c'est un isomorphisme et que $V_1 \otimes_E V_2$ est B–admissible.

La stabilité par dualité résulte de la stabilité par produit tensoriel et de la stabilité par dualité pour les représentations de dimension 1 (qui, elle, n'est autre que la condition $(G \cdot R_3)$).

Les autres assertions sont immédiates.

1.6. — Exemples d'anneaux G–réguliers

1.6.1. Proposition. — *Tout (E, G)-anneau qui est un corps est G régulier.*

1.6.2. — Preuve : La seule chose qui n'est pas évidente est que, si B est un (E, G)–anneau qui est un corps et si V est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, alors l'application $\alpha_B(V)$ est injective.

Sinon, soit r le plus petit entier ≥ 1 tel qu'il existe r éléments de $\underline{D}_B(V)$ qui sont linéairement indépendants sur $F = B^G$ mais pas sur B ; choisissons des éléments $d_1, d_2, \ldots, d_r$ de $\underline{D}_B(V)$ et des éléments non tous nuls $b_1, b_2, \ldots, b_r$ de B tels que les d_i soient linéairement indépendants sur F, mais $\Sigma b_i d_i = 0$. La minimalité de r implique qu'aucun des b_i n'est nul et, quitte à diviser par b_1, on peut supposer $b_1 = 1$. Pour tout $g \in G$, on a donc

$$\sum_{2 \leq i \leq r} (g(b_i) - b_i) \cdot d_i = 0 \ ,$$

et la minimalité de r implique que, pour tout i, $g(b_i) = b_i$. On a donc $b_i \in F$, ce qui contredit l'indépendance linéaire des d_i sur F et $\alpha_B(V)$ est bien injective.

1.6.3. PROPOSITION. — *Si B est un (E,G)-anneau qui est un produit de corps, alors B est G-régulier si et seulement si $F = B^G$ est intègre.*

1.6.4. — Preuve : Il est clair que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. On peut écrire $B = \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, où les B_λ sont des corps. Le groupe G opère sur l'ensemble Λ et $g(B_\lambda) = B_{g\lambda}$ si $g \in G$ et $\lambda \in \Lambda$.

Choisissons un élément $\lambda_0 \in \Lambda$, notons H le stabilisateur de λ_0, et posons $C = B_{\lambda_0}$. Soit B' l'algèbre des fonctions sur G à valeurs dans C qui sont H-équivariantes (sur laquelle G opère par $(\gamma f)(g) = f(g\gamma)$, si γ et $g \in G$). On dispose d'un homomorphisme

$$\xi : B \longrightarrow B'$$

qui commute à l'action de G : c'est celui qui à $b = (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ associe la fonction $g \longmapsto g(b_{g^{-1}(\lambda_0)})$.

Le fait que B^G soit intègre implique que G opère transitivement sur Λ (si e_λ est l'idempotent primitif correspondant à λ et si Λ' est une orbite de Λ sous l'action de G, $e' = \sum_{\lambda \in \Lambda'} e_\lambda$ et $e' - 1$ sont des idempotents orthogonaux stables par G). On peut alors définir une application

$$\eta : B' \longrightarrow B$$

par $\eta(f) = (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, avec $b_\lambda = g(f(g^{-1}))$ si g est un élément quelconque de G tel que $g(\lambda_0) = \lambda$.

On vérifie que ξ et η sont des bijections inverses l'une de l'autre et nous utilisons ξ pour identifier B à B'. Alors $F = B^G$ s'identifie à l'ensemble des fonctions constantes de G dans C qui sont H-équivariantes, **donc** $C^H = F$.

Pour tout C-espace vectoriel M muni d'une action semi-linéaire de H, soit $Ind_H^G M$ le B-module des fonctions définies sur G à valeurs dans M qui sont H-équivariantes (sur lequel G opère par la même formule que pour B'). La proposition résulte alors de ce que, avec des notations évidentes, $\underline{D}_B(V)$ s'identifie à $D = \underline{D}_C(V)$, $B \otimes_E V$ s'identifie à $Ind_H^G(C \otimes_E V)$ et $\alpha_B(V)$ s'identifie à

$$Ind_H^G(\alpha_C(V)) : Ind_H^G(C \otimes_F D) \longrightarrow Ind_H^G(C \otimes_E V) .$$

1.6.5. PROPOSITION. — *Soit B un (E,G)-anneau G-régulier et soit B' une sous-E-algèbre de B stable par G. On pose $F = B^G$, $F' = B'^G$ on suppose que B' vérifie $(G \cdot R_3)$ et que l'application naturelle*

$$F \otimes_{F'} B' \longrightarrow B$$

est injective. Alors B' est G-régulière et, si V est une représentation B'-admissible, elle est aussi B-admissible et l'application naturelle

$$F \otimes_{F'} \underline{D}_{B'}(V) \longrightarrow \underline{D}_B(V)$$

est un isomorphisme.

C'est évident.

1.6.6. COROLLAIRE. — *Soient B' un (E,G)-anneau intègre et B son corps des fractions. Si B' vérifie $(G \cdot R_3)$ et si $B'^G = B^G$, alors B' est G-régulier.*

1.7. — Anneaux G-réguliers, périodes et torseurs

Soient B un (E,G)-anneau G-régulier et $F = B^G$.

1.7.1. — Soient V une représentation B-admissible et $D^* = \underline{D}_B(V^*) = \underline{D}^*_B(V) = \mathrm{Hom}^G(V,B)$. Nous disons que $b \in B$ est **une période de V** s'il existe $v \in V$ et $d \in D^*$ tels que $b = d(v)$.

1.7.2. — Soit V une représentation B-admissible. Il est clair que la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$ (qui s'identifie elle-même à $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$, cf. prop. 1.2.3) est une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$, i.e. que tout objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$ est B-admissible et nous notons B_V le sous-ensemble de B formé de toutes les périodes de toutes les représentations de G_V. Il est clair que B_V est stable par G.

Si V_1 et V_2 sont des représentations B-admissibles et si b_1 (resp. b_2) est une période de V_1 (resp. V_2), alors $b_1 + b_2$ est une période de $V_1 \oplus V_2$ et $b_1 b_2$ une période de $V_1 \otimes V_2$; par conséquent, B_V est une sous-F-algèbre de B.

On voit que B_V est une (E,G)-algèbre G-régulière, que les représentations B_V-admissibles sont exactement les objets de $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$ et que $\underline{D}_{B_V}$ s'identifie à la restriction de $\underline{D}_B$ à $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G) = \underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$.

Posons $\mathbb{T}_{B,V} = \operatorname{Spec} B_V$. C'est donc un schéma affine de type fini sur F, muni d'une action **à droite** du groupe G.

Nous nous proposons de montrer que cette action est "algébrique", i.e. que cette action est induite par une action du groupe algébrique $\mathbb{G}_V$ sur $\mathbb{T}_{B,V}$. On a en fait un résultat plus précis : Notons

$$\omega : \underline{\mathrm{Rep}}_V(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Vect}}_E$$

le foncteur "oubli de l'action de G" et

$$\eta : \underline{\mathrm{Rep}}_V(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Vect}}_F$$

le foncteur "restriction de $\underline{D}_B$ à $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$". Ce sont des foncteurs fibres (1.5.2). Notons $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$ (resp. $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$) le foncteur, sur la catégorie des F–algèbres, des $\otimes$-homomorphismes (resp. $\otimes$–isomorphismes) de ω sur η (si R est une F–algèbre, un élément de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)(R)$ (resp. $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega,\eta)(R)$) est donc la donnée, pour chaque objet W de $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$, d'une application R–linéaire (resp. d'un isomorphisme)

$$u_W : W \otimes_E R \longrightarrow \underline{D}_B(W) \otimes_F R ,$$

les applications u_W commutant, en un sens évident, aux morphismes des catégories en présence, aux produits tensoriels et vérifiant $u_{\mathbf{1}_E} = id_R$ (où $\mathbf{1}_E$ désigne E muni de l'action triviale de G et où l'on a identifié, de façon évidente $\mathbf{1}_E \otimes_E R$ et $\underline{D}_B(\mathbf{1}_E) \otimes_F R$ à R).

1.7.3. THÉORÈME. — *Conservons les hypothèses et les notations du n° précédent et notons*

$$\rho_V : G \longrightarrow \mathbb{G}_V(E)$$

l'homomorphisme naturel. Alors,

i) il existe une unique action à droite du groupe algébrique $\mathbb{G}_{V,F} = \mathbb{G}_V \otimes_E F$ sur $\mathbb{T}_{B,V}$

$$\mathbb{T}_{B,V} \times \mathbb{G}_{V,F} \longrightarrow \mathbb{T}_{B,V}$$

qui induit l'action donnée de G (i.e., pour tout $g \in G$, g agit sur $\mathbb{T}_{B,V}$ comme $\rho_V(g)$);

ii) muni de cette action $\mathbb{T}_{B,V}$ *est un* $\mathbb{G}_V$*-torseur sur* F *qui représente le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$ *; en outre* $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega,\eta) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$ *est un isomorphisme.*

1.7.4. — Remarques

i) Une fois l'assertion (*i*) vérifiée, tout devient algébrique : on peut voir $\underline{D}_B$ et $\underline{D}^*_B$ comme des foncteurs sur la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ définis par

$$\underline{D}_B(W) = (W \otimes_E B_V)^{\mathbb{G}_V} \quad \text{et} \quad \underline{D}^*_B(W) = \mathrm{Hom}^{\mathbb{G}_V}(W, B_V)\ .$$

Le théorème n'est alors qu'une traduction “concrète”, dans la situation envisagée ici de résultats bien connus. En particulier, le fait que $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$ est égal à $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$ et est un torseur est classique ([DM82], thm. 3.2) ; nous allons le retrouver ici, où ce qui nous intéresse vraiment est le fait que $\mathrm{Spec}\, B_V$ représente ce torseur.

ii) Ce théorème implique que le groupe $\mathbb{H}_{B,V}$ des $\otimes$–automorphismes de η s'identifie au groupe algébrique déduit de $\mathbb{G}_{V,F}$ par torsion par $\mathbb{T}_{B,V}$.

iii) Il implique aussi que la dimension de $\mathbb{T}_{B,V}$, ou, ce qui revient au même, celle de B_V est égale à la dimension de $\mathbb{G}_V$. Dans le cas où B est intègre, cela revient à dire que **le degré de transcendance du corps des fractions de la sous–F–algèbre de B engendrée par les périodes de V est égale à la dimension de $\mathbb{G}_V$.**

1.7.5. — Preuve du théorème : il est clair que $\mathbb{G}_{V,F}$ est la clôture Zariskienne de l'image de G dans $\mathbb{GL}_{V\otimes F}$.

Posons $r = \dim_E V$, $D = \underline{D}_B(V)$, notons $\mathcal{B}^+$ la F–algèbre $Sym_F(V \otimes_E D^*)$; soit d un élément non nul de $\Lambda^r_E V \otimes \Lambda^r_F D^*$ identifé, de façon évidente à une droite du F–espace vectoriel $Sym^r_F(V \otimes D^*)$ et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+[1/d]$. On fait opérer $\mathbb{GL}_{V,F} = \mathbb{GL}_V \otimes_E F$ sur le F–espace vectoriel $V \otimes_E D^*$ via l'action naturelle de $\mathbb{GL}_V$ sur V et l'action triviale sur D^*. Cette action s'étend en une action sur $\mathcal{B}^+$ et sur $\mathcal{B}$. Si l'on pose $\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{B}$, on obtient un morphisme

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} \times \mathbb{GL}_{V,F} \longrightarrow \mathbb{T}_{\mathcal{B}}$$

qui fait de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ un $\mathbb{GL}_V$–torseur sur F.

Montrons $i)$: L'unicité de l'action de $\mathbb{G}_{V,F}$ sur $\mathbb{T}_{B,V}$ résulte de la proposition 1.2.3.

L'application des périodes induit une application F–linéaire

$$V \otimes D^* \longrightarrow B_V$$

qui s'étend en un homomorphisme ν de F–algèbres de $\mathcal{B}$ dans B_V.

Comme $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ est la plus petite sous–catégorie strictement pleine d'elle–même, qui est stable par sous–objet, quotient et somme directe, et contient les puissances tensorielles de V et l'inverse de la représentation déterminant de V (n° 1.1.2), B_V est engendré par les coefficients d'une matrice de passage d'une base de V à une base de D et par l'inverse du déterminant de cette matrice, et l'application ν est surjective.

Autrement dit, B_V s'identifie à un quotient de $\mathcal{B}$. Comme l'action de G sur B_V est induite par son action sur $\mathcal{B}$ (via ρ_V et l'action de $\mathbb{G}_V \subset \mathbb{GL}_V$ sur $\mathcal{B}$), la proposition 1.2.3 montre que l'action de G sur B_V est bien algébrique.

Montrons $ii)$: Soit $u \in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)(R)$. Si W est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ de dimension d, et si (c_{ij}) est la matrice de l'application linéaire

$$u_W : R \otimes W \longrightarrow R \otimes \underline{D}_B(W)$$

relativement à des bases choisies de W et $\underline{D}_B(W)$, on voit que, par rapport aux bases correspondantes de $L = \det(W)$ et de $\underline{D}_B(\det(W)) = \det(\underline{D}_B(W))$, la matrice de u_L est le scalaire $\det((c_{ij}))$; si c' est le scalaire qui est la matrice de L^* relativement aux bases duales, on voit que l'on doit avoir $c' \cdot \det((c_{ij})) = 1$, ce qui montre que $\det((c_{ij}))$ est inversible dans R, donc que u_W est un isomorphisme; par conséquent $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega,\eta) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$ est un isomorphisme.

Si R est une F–algèbre, $t : B_V \longrightarrow R$ un élément de $\mathbb{T}_{B,V}(R)$, et W un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$, on a une application $\mu(t)_W$:

$$R \otimes_E W \to R \otimes_F B_V \otimes_E W = R \otimes_F B_V \otimes_F \underline{D}_B(W) \to R \otimes_F R \otimes_F \underline{D}_B(W) \to R \otimes_F \underline{D}_B(W),$$

où les flèches sont celles que l'on imagine. On vérifie que $\mu(t) \in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)(R)$ et que l'on définit ainsi un morphisme $\mu : \mathbb{T}_{B,V} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$.

Construisons un morphisme dans l'autre sens. Si $u \in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega, \eta)(R)$, l'application

$$u_V : R \otimes V \longrightarrow R \otimes \underline{D}_B(V) = R \otimes D$$

induit une application F–linéaire de $V \otimes D^*$ dans R qui s'étend en un homomorphisme de la F–algèbre $\mathcal{B}^+$ dans R, et même en un morphisme $\widehat{t} : \mathcal{B} \longrightarrow R$, grâce au fait que u_V est un isomorphisme. Il nous faut voir que $\widehat{t}$ se factorise à travers un homomorphisme t de B_V dans R, i.e. que son noyau contient l'idéal J noyau de la projection de $\mathcal{B}$ sur B_V ; il sera alors clair que μ est un isomorphisme, l'application $u \longmapsto t$ induisant l'isomorphisme réciproque.

Il est clair que l'on peut appliquer "la B–construction" à $\mathbb{GL}_V$ et $\mathcal{B}$, i.e. que, pour toute représentation E–linéaire de dimension finie W de $\mathbb{GL}_V$, on peut poser

$$\underline{D}_{\mathcal{B}}(W) = (\mathcal{B} \otimes_E W)^{\mathbb{GL}_V} \quad \text{et} \quad \underline{D}^*_{\mathcal{B}}(W) = \mathrm{Hom}^{\mathbb{GL}_V}(W, \mathcal{B}) \ ,$$

que l'application naturelle

$$\alpha_{\mathcal{B}}(W) : \mathcal{B} \otimes_F \underline{D}_{\mathcal{B}}(W) \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_E W$$

est un isomorphisme, que $\underline{D}_{\mathcal{B}}$ est un foncteur fibre de la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{GL}_V)$ des représentations E–linéaires de dimension finie dans celle des F–espaces vectoriels de dimension finie et que $\underline{D}^*_{\mathcal{B}}(W) = \underline{D}_{\mathcal{B}}(W^*)$ s'identifie à $(\underline{D}_{\mathcal{B}}(W))^*$.

Toute représentation linéaire W de $\mathbb{GL}_V$ est munie d'une action du sous–groupe $\mathbb{G}_V$ de $\mathbb{GL}_V$ et la projection de $\mathcal{B}$ sur B_V induit une application F–linéaire de $\underline{D}_{\mathcal{B}}(W)$ dans $\underline{D}_B(W)$. Mais on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{B} \otimes \underline{D}_{\mathcal{B}}(W) & \longrightarrow & \mathcal{B} \otimes W \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
B \otimes \underline{D}_B(W) & \longrightarrow & B \otimes W
\end{array}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes, tandis que la flèche verticale de droite est surjective ; la flèche verticale de gauche l'est donc aussi, ce qui implique, pour des raisons de dimension, que la flèche de $\underline{D}_{\mathcal{B}}(W)$ dans $\underline{D}_B(W)$ est un isomorphisme.

Revenons alors à notre application $\widehat{t}$ et montrons que si $b \in J$ alors $\widehat{t}(b) = 0$. Il est clair que b, tout comme n'importe quel élément de $\mathcal{B}$, est une période pour $\mathbb{GL}_V$, i.e. qu'il existe une représentation linéaire W de $\mathbb{GL}_V$ et des éléments $w \in W$ et $d \in \underline{D}^*_{\mathcal{B}}(W)$ tels que $d(w) = b$. En revanche, si $\overline{d}$ désigne l'image de d dans $\underline{D}^*_B(W)$, on a $\overline{d}(w) = 0$. Donc w appartient au sous-espace vectoriel W' de W noyau de $\overline{d}$ qui est stable par $\mathbb{G}_V$. En particulier, l'application

$$u_W : R \otimes W \longrightarrow R \otimes \underline{D}_B(W)$$

doit envoyer $R \otimes W'$ dans $R \otimes \underline{D}_B(W')$; en particulier, si l'on note encore $\overline{d}$ la forme R–linéaire sur $R \otimes \underline{D}_B(W)$ déduite par extension des scalaires de $\overline{d}$, on doit avoir $\overline{d}(u_W(1 \otimes w)) = 0$.

Mais, l'application u_W est l'application composée

$$\begin{aligned} R \otimes W \longrightarrow R \otimes \mathcal{B} \otimes W = R \otimes \mathcal{B} \otimes \underline{D}_{\mathcal{B}}(W) \longrightarrow R \otimes R \otimes \underline{D}_{\mathcal{B}}(W) \longrightarrow \\ \longrightarrow R \otimes \underline{D}_{\mathcal{B}}(W) \longrightarrow R \otimes \underline{D}_B(W) \end{aligned}$$

où la flèche du milieu est $id \otimes \widehat{t} \otimes id$. On voit que $\overline{d}(u_W(1 \otimes w)) = \widehat{t}(b)$, qui doit donc bien être nul.

Il reste à prouver que $\mathbb{T}_{B,V}$ est un torseur. Il suffit pour cela de vérifier que, pour toute F–algèbre R, si $t,\, t' \in \mathbb{T}_{B,V}(R)$, il existe un unique $g \in \mathbb{G}_V(R)$ tel que $t' = tg$. Mais, pour toute représentation W de $\mathbb{G}_V$, $\mu(t')_W$ et $\mu(t)_W$ sont des isomorphismes de $R \otimes W$ sur $R \otimes \underline{D}_B(W)$; donc g doit agir sur $R \otimes W$ comme $\mu(t')_W \circ (\mu(t)_W)^{-1}$ et cela définit bien un élément de $\mathbb{G}_V(R)$.

1.7.6. — Rappelons que l'on a défini au n° 1.2.5 le schéma en groupes affine $\mathbb{G}_{alg}$ enveloppe pro–algébrique de G relativement à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$. On définit de la même façon l'enveloppe pro–algébrique $\mathbb{G}_B$ de G relativement à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$, qui s'identifie donc à un quotient de $\mathbb{G}_{alg}$.

Par passage à la limite, la proposition 1.2.3 montre que la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_B)$ des représentations E–linéaires de dimension finie de $\mathbb{G}_B$ s'identifie à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$.

On voit que le sous–ensemble B_{alg} de toutes les périodes pour toutes les représentations B–admissibles est une sous–F–algèbre de B, stable par G. Si l'on pose $\mathbb{T}_B = \operatorname{Spec} B_{alg}$, le théorème 1.7.3 implique que l'action de G sur B_{alg} est (pro–)algébrique, i.e. provient d'une action de $\mathbb{G}_B$, que l'action à droite de $\mathbb{G}_B$ sur $\mathbb{T}_B$ ainsi définie fait de ce schéma affine un $\mathbb{G}_B$–torseur sur F, qui représente le foncteur des $\otimes$–isomorphismes du foncteur fibre *"oubli de l'action de G"* (ou de $\mathbb{G}_B$ si l'on préfère) sur le foncteur fibre *"restriction de $\underline{D}_B$"* (qui est aussi le foncteur $V \longmapsto (B_{alg} \otimes_E V)^{\mathbb{G}_B}$).

Pour toute représentation B–admissible V, on a bien sûr $\underline{D}_B(V) = \underline{D}_{B_{alg}}(V)$, et B_{alg} est le plus petit anneau jouissant de cette propriété (de façon précise, pour qu'une sous–F–algèbre B' de B, stable par G, soit telle que $\underline{D}_{B'}(V) = \underline{D}_B(V)$, il faut et il suffit que B' contienne B_{alg}).

Enfin, on remarquera, que si V est une représentation E–linéaire de dimension finie de G, V est B–admissible si et seulement s'il existe une application E–linéaire injective G–équivariante de V dans B_{alg} (alors que les anneaux que nous rencontrerons dans la suite fourniront des exemples de situation où une telle application existe sans que V soit pour autant B–admissible) ; lorsque la représentation V est simple, V est B–admissible si et seulement si $\underline{D}_{B_{alg}}(V) \neq 0$.

1.8. — Représentations potentiellement B–admissibles

1.8.1. — Soit B un (E,G)–anneau. On se donne un ensemble non vide $\mathcal{H}$ de sous–groupes de G vérifiant $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{H}$ si H_1, $H_2 \in \mathcal{H}$. On pose

$$F = \lim.\mathrm{ind}_{H \in \mathcal{H}} B^H \ ,$$

et on suppose que, pour tout $H \in \mathcal{H}$, B est H–régulier (ce qui implique que F est un corps).

Pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, on pose

$$\underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V) = \lim.\mathrm{ind}_{H \in \mathcal{H}} (B \otimes_E V)^H \ ,$$

et on note

$$\alpha_B^{\mathcal{H}}(V) : B \otimes_F \underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V) \longrightarrow B \otimes_E V \ ,$$

l'application B–linéaire déduite par extension des scalaires de l'inclusion de $\underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V)$ dans $B \otimes_E V$.

1.8.2. — Par passage à la limite, la proposition 1.4.2 implique :

PROPOSITION. — *Avec les hypothèses et notations qui précèdent,*

i) pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, *on a* $\dim_F \underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V) \leq \dim_E V$;

ii) si $\dim_F \underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V) = \dim_E V$, *l'application* $\alpha_B^{\mathcal{H}}(V)$ *est un isomorphisme.*

1.8.3. — On dit que V est **$(B,\mathcal{H})$–admissible**, ou **potentiellement B–admissible relativement à $\mathcal{H}$**, si $\alpha_B^{\mathcal{H}}(V)$ est un isomorphisme. Par passage à la limite, la proposition 1.5.2 implique :

PROPOSITION. — *La sous-catégorie pleine* $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{\mathcal{H}}(G)$ *de* $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ *dont les objets sont ceux qui sont potentiellement B–admissibles relativement à $\mathcal{H}$ est une sous-catégorie tannakienne de* $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ *; la restriction de* $\underline{D}_B^{\mathcal{H}}$ *à cette catégorie est un foncteur fibre.*

1.8.4. — **Remarque** : Conservons les notations et hypothèses qui précèdent; pour tout $H \in \mathcal{H}$, notons B_H l'anneau des fonctions sur G à valeurs dans B qui sont H–équivariantes et posons

$$B_{\mathcal{H}} = \lim.\mathrm{ind}_{H \in \mathcal{H}} B_H \ .$$

On voit que le (E,G)–anneau $B_{\mathcal{H}}$ est G–régulier, que $(B_{\mathcal{H}})^G = F$ et que, pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, $\underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V)$ s'identifie à $\underline{D}_{B_{\mathcal{H}}}(V)$; en particulier, V est potentiellement B–admissible relativement à $\mathcal{H}$ si et seulement si V est $B_{\mathcal{H}}$-admissible.

1.8.5. — Nous nous intéresserons particulièrement à cette situation lorsque $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ est le groupe de Galois d'une clôture séparable $\overline{K}$ d'un corps K et lorsque $\mathcal{H}$ est l'ensemble des sous–groupes fermés de G. Nous disons alors **"potentiellement B–admissible"** au lieu de *"potentiellement B–admissible relativement à $\mathcal{H}$"*, et nous écrivons $\underline{D}_B^{pot}$ au lieu de $\underline{D}_B^{\mathcal{H}}$.

Soient L une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$, $H = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ et $F_L = B^H$. Pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, on pose

$$\underline{D}_{B,L}(V) = (B \otimes_E V)^H \ ,$$

et on dit que V **devient B–admissible sur L** si $\dim_{F_L} \underline{D}_{B,L}(V) = \dim_E V$.

Pour que V devienne B–admissible sur L, il faut et il suffit que V soit potentiellement B–admissible et que l'on puisse trouver une base de $\underline{D}_B^{pot}(V)$ sur F formée d'éléments de $(B \otimes V)^H$. On a alors

$$\underline{D}_B^{pot}(V) = F \otimes_{F_L} \underline{D}_{B,L}(V) \quad \text{et} \quad \underline{D}_{B,L}(V) = (\underline{D}_B^{pot}(V))^H \ .$$

En particulier, pour qu'un objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ soit potentiellement B–admissible, il faut et il suffit qu'il existe une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$ sur laquelle V devienne B–admissible. Si V devient B–admissible sur L, V devient a fortiori B–admissible sur toute extension finie de L contenue dans $\overline{K}$, et alors $\underline{D}_{B,L'}(V) = F_{L'} \otimes_{F_L} \underline{D}_{B,L}(V)$.

1.8.6. — Gardons les hypothèses et notations du n° précédent. Soient $L \subset L'$ des extensions finies de K contenues dans $\overline{K}$, $H = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$, $H' = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L')$, $F_L = B^H$ et $F_{L'} = B^{H'}$. Supposons l'extension L'/L galoisienne et soit $J = \mathrm{Gal}(L'/L) = H/H'$. Le groupe fini J opère sur $F_{L'}$, $(F_{L'})^J = F_L$ et $F_{L'}/F_L$ est une extension finie galoisienne de groupe de Galois un quotient $\overline{J}$ de J. Si $J = \overline{J}$, i.e. si J opère fidèlement sur $F_{L'}$, on voit que toute représentation de G qui devient B–admissible sur L' était déjà B–admissible sur L.

En particulier, **si B est une $\overline{K}$–algèbre, et si $F = \overline{K}$, alors toute représentation potentiellement B–admissible est en fait B–admissible.**

1.9. — Structures supplémentaires

1.9.1. — Soit B un (E,G)–anneau G–régulier. Supposons B muni de *"structures algébriques supplémentaires"* (action de certains endomorphismes, donnée d'une filtration, d'une graduation, ...) compatibles avec l'action de G.

Alors, pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, $\underline{D}_B(V)$ *"hérite"* de ces structures supplémentaires. On peut alors considérer $\underline{D}_B$ comme un foncteur de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ dans une certaine catégorie de F–espaces vectoriels équippés de structures supplémentaires.

Nous verrons dans la suite de nombreux exemples de cette situation. En particulier, dans certains cas le foncteur obtenu sera pleinement fidèle et l'on pourra *"reconstituer"* la représentation V à partir de la seule connaissance de $\underline{D}_B(V)$ (muni des structures en question).

1.9.2. — Revenons à la situation envisagée dans le n° 1.8.5. On voit que G agit, de manière discrète, sur F et que, pour toute représentation V de G, le F-espace vectoriel $\underline{D}_B^{pot}(V)$ **est muni d'une action semi-linéaire et discrète de** G. Il y a alors lieu d'ajouter aux structures sur $\underline{D}_B^{pot}(V)$ *"héritées"* de B cette action de G.

2. — Exemples

2.1. — Autour du théorème $H^1(G, \mathbb{GL}_n(\overline{K})) = 1$: la clôture séparable d'un corps

2.1.1. — Soient K un corps, $\overline{K}$ une clôture séparable de K et $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Si E est un sous-corps de K, $\overline{K}$ est un (E,G)-anneau G régulier (prop. 1.6.1), le corps $F = \overline{K}^G$ n'est autre que K et les représentations E-linéaires B-admissibles ne sont autre que les représentations de dimension finie discrètes, i.e. les représentations qui sont continues lorsque l'on munit G de la topologie de Krull et E de la topologie discrète. En outre $\overline{K}_{alg} = \overline{K}$.

2.1.2. — Dans la suite du n° 2.1, on suppose que K est de caractéristique $p > 0$ et E est un corps fini ayant $q = p^f$ éléments.

Notons σ le Frobenius agissant sur K (via $x \longmapsto x^q$). Soit $\underline{\Phi M}_{K,\sigma}^{ét}$ la catégorie suivante :

– les objets sont les K-espaces vectoriels D de dimension finie munis d'un Frobenius, i.e. d'une application

$$\varphi : D \longrightarrow D$$

σ-semi-linéaire, injective;

– les morphismes sont les applications K-linéaires qui commutent à l'action de φ.

C'est une catégorie abélienne E-linéaire.

2.1.3. — Le Frobenius σ sur K se prolonge de manière unique en un automorphisme φ de $\overline{K}$ et l'action de φ commute à celle de G. Ceci nous permet de considérer $\underline{D}_{\overline{K}}$ comme un foncteur de la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_E(G)$ des représentations E–linéaires discrètes et de dimension finie de G dans $\underline{\Phi M}^{ét}_{K,\sigma}$. Il est classique et facile à voir que $\underline{D}_{\overline{K}}$ induit une équivalence entre ces deux catégories (cf. par exemple, [Fo91], prop. 1.2.6), un foncteur quasi–inverse étant obtenu en associant à tout objet D de $\underline{\Phi M}^{ét}_{K,\sigma}$ la représentation $\underline{V}_{\overline{K}}(D) = (\overline{K} \otimes_K D)_{\varphi=1}$.

2.1.4. — La catégorie $\underline{\Phi M}^{ét}_{K,\sigma}$ est de manière naturelle une catégorie tannakienne (le produit tensoriel $D_1 \otimes D_2$ de deux objets est le produit tensoriel des K–espaces vectoriels sous–jacents, avec $\varphi(d_1 \otimes d_2) = \varphi d_1 \otimes \varphi d_2$) et $\underline{D}_{\overline{K}}$ est une $\otimes$–équivalence.

2.2. — Un exemple stupide : l'anneau des fonctions sur G

2.2.1. — Supposons que G soit un groupe topologique, E un corps topologique et $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ la catégorie des représentations E–linéaires continues de dimension finie de G.

Soit $B = \mathcal{F}_{con}(G, E)$ l'anneau des fonctions continues sur G à valeurs dans E. Le groupe G opère sur B (on a $(gf)(h) = f(g^{-1}h)$ si $f \in B$, g, $h \in G$) et B est un (E, G)–anneau G–régulier (prop. 1.6.3). On a $B^G = E$ et tous les objets de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ sont B–admissibles. L'anneau B_{alg} est le sous–anneau de B formé des fonctions f telles que le sous–E–espace vectoriel de B engendré par les gf, pour $g \in G$, est de dimension finie.

C'est un exemple stupide parce que le foncteur $\underline{D}_B$ est naturellement isomorphe à l'identité : soit $\varepsilon : B \longrightarrow E$ l'application qui envoie f sur $f(1)$. Pour toute représentation V de G, le composé de $\varepsilon \otimes id_V$ avec l'inclusion de $\underline{D}_B(V)$ dans $B \otimes V$ est une application E–linéaire

$$\varepsilon_V : \underline{D}_B(V) \longrightarrow V \ ,$$

qui est un isomorphisme, fonctoriel en V et compatible avec le produit tensoriel.

2.2.2. — C'est encore plus stupide si l'on remarque que l'on dispose d'une autre action de G sur B : à tout $f \in B$ et tout $g \in G$, on peut associer la fonction $g \times_d f$ définie par $(g \times_d f)(h) = f(hg)$. Cette action commute à l'action de G donnée initialement, ce qui fait que pour toute représentation V de G, G opère de façon naturelle sur $\underline{D}_B(V) = (B \otimes V)^G$ (on a $g \times_d (\Sigma b_i \otimes v_i) = \Sigma(g \times_d b_i) \otimes v_i$). On voit qu'alors, pour toute représentation V, ε_V commute à l'action de G.

2.2.3. — **Remarque** : Soit $\mathbb{G}_{alg}$ l'enveloppe pro–algébrique de l'image de G relativement à $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (cf. n° 1.2.5). On voit que B_{alg} s'identifie à l'algèbre affine de $\mathbb{G}_{alg}$ (sur laquelle G opère via l'homomorphisme naturel de G dans $\mathbb{G}_{alg}(E)$).

2.3. — Représentations unipotentes d'un groupe cyclique

2.3.1. — Supposons que G soit cyclique d'ordre infini, E de caractéristique 0 et que $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ soit la catégorie de toutes les représentations linéaires de dimension finie de G. Choisissons un générateur h de G. Soit $B = E[X]$ l'anneau des polynômes en l'indéterminée X à coefficients dans E. Munissons la E–algèbre B de l'unique structure de (E, G)–anneau pour laquelle $h(X) = X + 1$. Alors B est G–régulier (cf. cor. 1.6.6) et $B^G = E$. La sous–catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ des représentations B–admissibles est la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_u(G)$ des représentations unipotentes de G et on a $B_{alg} = B$. L'enveloppe pro–algébrique de l'image de G dans la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_u(G)$ s'identifie au groupe additif $\mathbb{G}_a$ sur E et B à son algèbre affine.

2.3.2. — Notons $\underline{Nil}(E)$ la catégorie des E–espaces vectoriels de dimension finie munie d'un endomorphisme N **nilpotent**. C'est de manière évident une catégorie tannakienne (le produit tensoriel de deux objets D_1 et D_2 est le produit tensoriel des espaces vectoriels sous–jacents, avec $N(d_1 \otimes d_2) = d_1 \otimes Nd_2 + d_2 \otimes Nd_1$).

Si l'on désigne aussi par N l'unique E–dérivation de B telle que $N(X) = 1$, N commute à l'action de G, ce qui fait que, pour toute représentation V de G, $\underline{D}_B(V)$ devient un objet de $\underline{Nil}(E)$.

On voit que $\underline{D}_B$ induit une $\otimes$–équivalence entre la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_u(G) = \underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_a)$ et la catégorie $\underline{Nil}(E)$. Un quasi–inverse s'obtient en associant à tout objet D de $\underline{Nil}(E)$ la représentation

$$\underline{V}(D) = (B \otimes_E D)_{N=0} \ .$$

2.3.3. — Pour tout sous-groupe H de G, B est H-régulier, ce qui nous permet de parler de la sous-catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{pot}(G) = \underline{\mathrm{Rep}}_B^{\mathcal{H}}(G)$ de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ formée des représentations potentiellement B-admissibles (relativement à l'ensemble $\mathcal{H}$ de tous les sous-groupes de G) : c'est la catégorie des représentations potentiellement unipotentes, i.e. des représentations pour lesquelles il existe un entier $m > 0$ tel que l'action de h^m est unipotente.

Pour toute représentation V de G, $\underline{D}_B^{pot}(G) = \underline{D}_B^{\mathcal{H}}(G)$ est, de manière naturelle, un objet de la catégorie tannakienne $\underline{Nil}(E,G)$ des E-espaces vectoriels de dimension finie munis d'un endomorphisme nilpotent et d'une action finie de G commutant avec N. Le foncteur $\underline{D}_B^{pot}$ induit une $\otimes$-équivalence entre la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{pot}(G)$ des représentations de G potentiellement unipotentes et $\underline{Nil}(E,G)$.

3. — Représentations de Hodge–Tate et de de Rham

Dans toute la suite de cet exposé, K est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. On note $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et on pose $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

On note $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_p}(G)$ ou $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ la catégorie des **représentations p-adiques de G**, i.e. des représentations $\mathbb{Q}_p$-linéaires de G de dimension finie qui sont continues pour la topologie p-adique.

3.1. — Rappelons (n° 2.1) que $\overline{K}$ est un $(\mathbb{Q}_p, G)$-anneau G-régulier et que **les représentations p-adiques $\overline{K}$-admissibles sont les représentations p-adiques discrètes**, i.e. celles sur lesquelles G opère à travers le groupe de Galois d'une extension finie galoisienne de K contenue dans $\overline{K}$ (et, comme on l'a vu au n° 1.8.6, les représentations p-adiques potentiellement $\overline{K}$-admissibles sont déjà $\overline{K}$-admissibles).

3.2. — Soit C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique. C'est encore un $(\mathbb{Q}_p, G)$-anneau qui est G-régulier puisque c'est un corps. Comme

C contient $\overline{K}$, les représentations potentiellement C–admissibles sont déjà C–admissibles.

Le résultat suivant avait été conjecturé par Serre [Se67] et a été démontré par Sen ([Sen73], voir aussi [Sen80]) :

PROPOSITION. — *Pour qu'une représentation p–adique soit C–admissible, il faut et il suffit que l'image de l'inertie soit finie.*

3.3. — Remarques : *i*) Soient P le complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$ et $\overline{P}$ la fermeture algébrique de P dans C. On voit qu'une représentation p–adique V est C–admissible si et seulement si elle est $\overline{P}$–admissible (et alors $\underline{D}_C(V) = \underline{D}_{\overline{P}}(V)$; avec les notations du n° 1.7.6, $C_{alg} \subset \overline{P}$) ou encore si et seulement si elle est potentiellement P–admissible ; en outre V est P–admissible si et seulement si elle est non ramifiée.

ii) En fait, le résultat de Sen est plus général : on peut, dans l'énoncé de la proposition, remplacer le corps des coefficients $E = \mathbb{Q}_p$ par n'importe quel sous–corps fermé de K.

En particulier, lorsque le corps résiduel de K est algébriquement clos, si l'on applique ce résultat aux K–représentations de dimension 1, on trouve que tout sous–K–espace vectoriel de dimension 1 de C stable par G_K est contenu dans $\overline{K}$.

3.4. — Soient $\underline{Grad}_K$ la catégorie des K–espaces vectoriels munis d'une graduation indexée par $\mathbb{Z}$ et $\underline{Fil}_K$ la catégorie des K–espaces vectoriels munis d'une filtration décroissante, exhaustive et séparée, indexée par $\mathbb{Z}$.

La première est abélienne et la seconde n'est qu'additive, mais certains de ses morphismes sont plus gentils que d'autres, à savoir ceux qui sont strictement compatibles aux filtrations (i.e. les morphismes $f : D_1 \longrightarrow D_2$ tels que $f(Fil^i D_1) = f(D_1) \cap Fil^i D_2$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$). **Une suite de morphismes dans $\underline{Fil}_K$ est dite exacte** si la suite d'applications K–linéaires sous–jacentes est exacte et si chaque morphisme est strictement compatible aux filtrations.

Sur ces deux catégories, on a des notions de produit tensoriel et de dual, qui vérifient toutes les bonnes propriétés que l'on peut imaginer. Enfin, on dispose d'un foncteur additif évident

$$\underline{gr}_K : \underline{Fil}_K \longrightarrow \underline{Grad}_K \ ,$$

qui est K–linéaire, exact et fidèle, et *"commute"* aux produits tensoriels et au dual.

3.5. — On renvoie à [Exp. II], n° 2.5 pour la définition du corps B_{dR} et de l'anneau B_{HT}. Rappelons (*loc. cit.*) que $(B_{dR})^G = (B_{HT})^G = K$ et que, plus généralement, pour tout sous–groupe ouvert H de G, $(B_{dR})^H = (B_{HT})^H = \overline{K}^H$.

3.6. Proposition. — *Les $(\mathbb{Q}_p, G)$–anneaux B_{dR} et B_{HT} sont G–réguliers.*

Preuve : C'est clair pour B_{dR} puisque c'est un corps (prop. 1.6.1).

Soit t un élément non nul de $\mathbb{Q}_p(1)$; alors $B_{HT} = C[t, t^{-1}]$ est un sous–anneau du corps $\widehat{B}_{HT} = C((t))$. Comme $\widehat{B}_{HT}$ est G–régulier et comme $(\widehat{B}_{HT})^G = (B_{HT})^G = K$, il suffit (prop. 1.6.5) de vérifier la condition $(G.R_3)$, i.e. que, si b est un élément non nul de B_{HT} et $\eta : G \longrightarrow \mathbb{Q}_p^*$ est un caractère tel que $gb = \eta(g) \cdot b$, pour tout $g \in G$, alors b est inversible dans B_{HT}. Si

$$b = \Sigma b_i t^i, \quad \text{avec les } b_i \in C \ ,$$

et si χ désigne le caractère cyclotomique, on doit avoir

$$gb_i = (\eta\chi^{-i})(g) \cdot b_i, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z} \text{ et tout } g \in G \ ,$$

ce qui implique, d'après la proposition 3.2, que, pour tout i tel que $b_i \neq 0$, la restriction de $\eta\chi^{-i}$ au groupe d'inertie doit être d'ordre fini ; on en déduit qu'il existe un et un seul i tel que $b_i \neq 0$, et b est bien inversible.

3.7. — Pour toute représentation p–adique V, on pose

$$\underline{D}_{HT}(V) = \underline{D}_{B_{HT}}(V) = (B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \text{ et } \underline{D}_{dR}(V) = \underline{D}_{B_{dR}}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G.$$

On obtient ainsi des foncteurs additifs (et même $\mathbb{Q}_p$–linéaires)

$$\underline{D}_{HT} : \underline{\mathrm{Rep}}(G) \longrightarrow \underline{Grad}_K \quad \text{et} \quad \underline{D}_{dR} : \underline{\mathrm{Rep}}(G) \longrightarrow \underline{Fil}_K \ ,$$

et l'égalité $\underline{gr}_K(B_{dR}) = B_{HT}$ induit une inclusion naturelle

$$\underline{gr}_K(\underline{D}_{dR}(V)) \hookrightarrow \underline{D}_{HT}(V) .$$

On dit que V **est de de Rham** (resp. **de Hodge–Tate**) si V est B_{dR}–admissible (resp. B_{HT}–adimissible). On note $\underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G)$ (resp. $\underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(V)$) la sous–catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dont les objets sont les représentations de Hodge–Tate (resp. de de Rham).

3.8. — Compte–tenu du théorème 1.5.2, le résultat suivant est alors immédiat (voir aussi [Fo82a], § 1 et 3) :

THÉORÈME. — *i) Si V est une représentations de de Rham, alors V est de Hodge–Tate ; l'isomorphisme $B_{dR} \otimes_K \underline{D}_{dR}(V) \longrightarrow B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est strictement compatible aux filtrations (i.e., pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'image de $Fil^i(B_{dR} \otimes_K \underline{D}_{dR}(V))$ est $(Fil^i B_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ et $\underline{D}_{HT}(V)$ s'identifie à $\underline{gr}_K(\underline{D}_{dR}(V))$.*

ii) La catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G)$ (resp. $\underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G)$) est une sous–catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ et la restriction de $\underline{D}_{HT}$ (resp. $\underline{D}_{dR}$) à cette catégorie est une $\otimes$–foncteur exact et fidèle.

La dernière assertion signifie en particulier que :

i) si V_1 et V_2 sont de de Rham, $V_1 \otimes V_2$ l'est aussi et l'isomorphisme de K–espaces vectoriels $\underline{D}_{dR}(V_1) \otimes_K \underline{D}_{dR}(V_2) \longrightarrow \underline{D}_{dR}(V_1 \otimes V_2)$ est strictement compatible aux filtrations ;

ii) si V est de de Rham, la représentation duale V^* l'est aussi et $\underline{D}_{dR}(V^*)$ s'identifie, en tant que K–espace vectoriel filtré, au dual de $\underline{D}_{dR}(V)$;

iii) si

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de représentations p–adiques et si V est de de Rham, V' et V'' le sont aussi et, dans la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \underline{D}_{dR}(V') \longrightarrow \underline{D}_{dR}(V) \longrightarrow \underline{D}_{dR}(V'') \longrightarrow 0 ,$$

les morphismes sont strictement compatibles aux filtrations.

3.9. — Remarques

i) Le fait que B_{HT} est G–régulier peut se voir directement : la condition $(G \cdot R_1)$ (B_{HT} est réduit) est claire ; la condition $(G \cdot R_2)$ (injectivité de $\alpha_B(V)$) se démontre (cf. [Se67], § 2) comme dans le cas où l'anneau B est un corps (n° 1.6.2) ; pour $(G \cdot R_3)$, on voit, comme au n° 3.6, que l'on est ramené à vérifier que l'image de l'inertie est finie dans toute représentation C–admissible **de dimension** 1, ce qui est plus facile que le cas général (cf. [Sen73] et [Sen80]).

ii) Comme B_{HT} et B_{dR} sont des $\overline{K}$–algèbres, toute représentation qui est potentiellement de Hodge–Tate (resp. de de Rham) est de Hodge–Tate (resp. de de Rham).

iii) Il existe des représentations qui sont de Hodge–Tate sans être de de Rham. La différence entre ces deux types de représentations est bien comprise dans le cas “ordinaire” : voir [Exp.IV].

iv) Une représentation p–adique V de dimension 1 est de Hodge–Tate si et seulement si elle est de de Rham, ou encore si et seulement s'il existe $i \in \mathbb{Z}$ et un sous–groupe ouvert J du groupe d'inertie tel que tout $g \in J$ opère sur V par multiplication par $\chi^i(g)$.

v) Avec les notations utilisées ci–dessus, on voit qu'une représentation p–adique V est $\widehat{B}_{HT}$–admissible si et seulement si elle est de Hodge–Tate, i.e. que $(\widehat{B}_{HT})_{alg} = (B_{HT})_{alg}$. On voit aussi qu'il existe un sous–anneau C_{HT} de C tel que $(B_{HT})_{alg} = C_{HT}[t, t^{-1}]$; on prendra garde que l'inclusion $C_{HT} \supset C_{alg}$ est stricte (i.e., il existe des représentations de Hodge–Tate qui en sont pas isomorphes à des sommes directes de tordues par des puissances du caractère cyclotomique de représentations C–admissibles).

4. — Les (φ, N, G_K)–modules filtrés

4.1. — Les (E, Γ)–modules

4.1.1. — Soient E un anneau commutatif et Γ un groupe (noté multiplicativement) opérant sur E (de façon compatible avec la structure d'anneau).

On appelle **(E,Γ)–module** la donnée d'un E–module M muni d'une action semi–linéaire de Γ. Autrement dit, notons $E[\Gamma]$ la E–algèbre qui est le E–module libre de base les γ, pour $\gamma \in \Gamma$, la multiplication étant définie par

$$(\Sigma a_\gamma \gamma)\cdot(\Sigma b_\gamma \gamma) = \Sigma(\Sigma_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} a_{\gamma_1}\gamma_1(b_{\gamma_2}))\cdot\gamma \ .$$

Alors un (E,Γ)–module n'est rien d'autre qu'un $E[\Gamma]$–module à gauche et ces modules forment une catégorie abélienne (lorsque Γ opère trivialement sur E, celle–ci n'est autre que celle des représentations E–linéaires de Γ).

4.1.2. — Dans cette catégorie, on a des notions de **produit tensoriel** et de **hom interne** (qui, en général, dépendent vraiment du couple (E,Γ), et pas seulement de l'anneau $E[\Gamma]$) : soient M et N deux (E,Γ)–modules,

i) le E–module sous–jacent au produit tensoriel $M\otimes N$ est le produit tensoriel des E–modules sous–jacents, l'action de Γ étant donnée par

$$\gamma(d\otimes d') = \gamma d\otimes\gamma d', \quad \text{si} \quad \gamma\in\Gamma,\ d\in M,\ d'\in N\ .$$

ii) le E–module sous–jacent à $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)$ est celui des applications E–linéaires de M dans N, l'action de Γ étant donnée par

$$(\gamma\eta)(d) = \gamma(\eta(\gamma^{-1}(d))), \quad \text{si} \quad \gamma\in\Gamma,\ \eta\in\underline{\mathrm{Hom}}(M,N),\ d\in M\ .$$

4.1.3. — Le produit tensoriel et le hom interne satisfont les propriétés "usuelles". En particulier, E, muni de l'action structurale de Γ, est un **objet–unité** (i.e., pour tout (E,Γ)–module M, $M\otimes E \simeq E\otimes M \simeq M$); en outre, si $M^* = \underline{\mathrm{Hom}}(M,E)$ est le **contragrédient** ou **dual** de M, alors $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) = M^*\otimes N$.

4.1.4. — Lorsque E est un corps, on note $\underline{\mathrm{Rep}}_E(\Gamma)$ la catégorie des (E,Γ)–modules dont le E–espace vectoriel sous–jacent est de dimension finie. C'est une catégorie tannakienne E^Γ–linéaire, qui n'est pas neutre en général.

4.2. — Les (φ, N, G_K)–modules

On note K_0 le corps des fractions des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel k de K. On se donne une extension galoisienne (pas nécessairement finie) L de K contenue dans $\overline{K}$; on note k_L son corps résiduel, L_0 l'extension maximale non ramifiée de K_0 contenue dans L et σ le Frobenius absolu sur L_0 (i.e. l'unique automorphisme continu induisant $x \longmapsto x^p$ sur k_L) ; on pose $G_{L/K} = \mathrm{Gal}(L/K)$ et $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$.

4.2.1. — On appelle $(\varphi, N, G_{L/K})$**–module** la donnée d'un L_0–espace vectoriel D muni

i) d'une application injective, σ–semi–linéaire

$$\varphi : D \longrightarrow D \ ,$$

ii) d'un endomorphisme L_0–linéaire

$$N : D \longrightarrow D \ ,$$

iii) d'une action semi–linéaire de $G_{L/K}$.

On impose entre ces données les relations de compatibilité suivantes :

a) on a $N\varphi = p\varphi N$;

b) pour tout $g \in G_{L/K}$, on a $g\varphi = \varphi g$ et $gN = Ng$.

Les $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules forment, de manière évidente, une catégorie $\mathbb{Q}_p$–linéaire.

4.2.2. — On appelle **dimension** d'un $(\varphi, N, G_{L/K})$–module la dimension du L_0–espace vectoriel sous–jacent.

On dit qu'un $(\varphi, N, G_{L/K})$–module est **discret** si l'action de $G_{L/K}$ est discrète (i.e., si, pour tout $d \in D$, $\{g \in G_{L/K} \mid gd = d\}$ est ouvert dans $G_{L/K}$).

On note $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$ la sous–catégorie pleine de la catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules dont les objets sont les modules discrets de dimension finie. On voit que c'est une catégorie abélienne $\mathbb{Q}_p$–linéaire.

Si D est un objet de cette catégorie, la finitude de la dimension de D sur L_0 et la relation $N\varphi = p\varphi N$ impliquent que **l'action de N sur D est nilpotente**.

4.2.3. — **Remarque** : Soient Γ_0 le groupe engendré par deux éléments φ et U avec la relation $U\varphi = \varphi U^p$ et $\Gamma_{L/K}$ le produit direct $\Gamma_0 \times G_{L/K}$; celui–ci opère sur L_0 (si $r, s \in \mathbb{Z}$, $g \in G_{L/K}$ et $\lambda \in L_0$, on a $(U^r\varphi^s, g)(\lambda) = \sigma^s(g\lambda)$).

On voit, avec les notations du n° 4.1.4, qu'en posant $U = \exp(N)$, on peut identifier la catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$ à la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}_{L_0}(\Gamma_{L/K})$ dont les objets sont ceux sur lesquels l'action de U est unipotente et celle de $G_{L/K}$ est discrète.

4.2.4. — La catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$ est une sous-**catégorie tannakienne** de $\underline{\mathrm{Rep}}_{L_0}(\Gamma_{L/K})$. Concrètement, L_0, sur lequel φ opère comme σ, N comme O et $G_{L/K}$ de façon naturelle est un objet-unité; si D_1 et D_2 sont deux $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules discrets, le L_0-espace vectoriel sous-jacent à $D_1 \otimes D_2$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(D_1, D_2)$) est $D_1 \otimes_{L_0} D_2$ (resp. $\mathcal{L}_{L_0}(D_1, D_2)$) et, si $d_1 \in D_1$, $d_2 \in D_2$, $g \in G_{L/K}$, $\eta \in \mathcal{L}_{L_0}(D_1, D_2)$, alors

$$\varphi(d_1 \otimes d_2) = \varphi d_1 \otimes \varphi d_2,\ N(d_1 \otimes d_2) = Nd_1 \otimes d_2 + d_1 \otimes Nd_2,\ g(d_1 \otimes d_2) = gd_1 \otimes gd_2,$$

tandis que

$$(\varphi\eta)(d_1) = \varphi(\eta(\varphi^{-1}(d_1))), (N\eta)(d_1) = N(\eta(d_1)) - \eta(Nd_1), (g\eta)(d_1) = g(\eta(g^{-1}(d_1))).$$

4.2.5. — Soient L' une extension galoisienne de K contenant L, $G_{L'/L} = \mathrm{Gal}(L'/L)$ et $I_{L'/L}$ le groupe d'inertie.

Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module discret, $D' = L'_0 \otimes_{L_0} D$ a une structure naturelle de $(\varphi, N, G_{L'/K})$-module discret : avec des notations évidentes, on a

$$\varphi(\lambda \otimes d) = \sigma\lambda \otimes \varphi d,\ N(\lambda \otimes d) = \lambda \otimes Nd,\ g(\lambda \otimes d) = g\lambda \otimes gd\ .$$

On voit que $D \longmapsto D'$ définit un $\otimes$-foncteur de $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$ dans $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L'/K})$. On vérifie facilement que ce foncteur est pleinement fidèle et induit une $\otimes$-équivalence entre $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$ et son image essentielle; et que cette dernière s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L'/K})$ formée des D' sur lesquels $I_{L'/L}$ opère trivialement (un quasi-inverse est donné par $D' \longmapsto (D')^{G_{L'/L}}$).

En particulier, si L'/L est non ramifiée, le foncteur $D \longmapsto D'$ est une $\otimes$-équivalence.

4.2.6. — Lorsque $L = K$, on a $G_{L/K} = 1$, il n'y a pas d'action de Galois, et on dit "(φ, N)-**module relatif à** K" (ou même "(φ, N)-module") au lieu de "$(\varphi, N, G_{L/K})$-module"; on remarque que cette notion ne dépend que de k (et non de K).

On s'intéresse particulièrement aux (φ, N, G_K)-modules, i.e. au cas où $L = \overline{K}$. Soit I_L le groupe d'inertie de l'extension $\overline{K}/L$. Un (φ, N, G_K)-**module semi-stable sur** L est un (φ, N, G_K)-module discret sur lequel I_L opère trivialement[2]. Le foncteur $D \longmapsto D^{G_L}$ induit une $\otimes$-équivalence entre la catégorie des (φ, N, G_K)-modules semi-stables sur L et celle des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules discrets.

Comme l'action du groupe d'inertie I_K sur un (φ, N, G_K)-module discret D de dimension finie, est discrète et linéaire, elle se factorise à travers un quotient fini; on en déduit qu'il existe une extension finie galoisienne L de K contenue dans $\overline{K}$ sur laquelle D est semi-stable. Autrement dit, en un sens naturel, la catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K)$ s'identifie à la limite inductive des $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$, pour L parcourant les extensions finies galoisiennes de K contenues dans $\overline{K}$.

4.2.7. — **Un $(\varphi, G_{L/K})$-module discret** est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module discret sur lequel $N = 0$; les $(\varphi, G_{L/K})$-modules discrets de dimension finie forment une sous-catégorie tannakienne de celle des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules discrets de dimension finie. Lorsque $L = K$, on parle de **φ-module relatif à** K (ou tout simplement de φ-module). On dit qu'un (φ, G_K)-module discret **a bonne réduction sur** L s'il est semi-stable sur L (et on a donc une $\otimes$-équivalence entre (φ, G_K)-modules discrets de dimension finie ayant bonne réduction sur L et $(\varphi, G_{L/K})$-modules discrets de dimension finie).

4.3. — Modules filtrés

On conserve les notations du n° précédent.

4.3.1. — Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module, l'action de N (resp. $G_{L/K}$) se prolonge par linéarité (resp. semi-linéarité) à $D_L = L \otimes_{L_0} D$. On note D_K le sous-K-espace vectoriel de D_L formé des éléments fixes par $G_{L/K}$ (qui est

[2] cette notion garde un sens lorsque l'on ne suppose plus l'extension L de K contenue dans $\overline{K}$ galoisienne.

donc muni d'une action naturelle de N).

Il résulte du théorème 90 de Hilbert que l'application naturelle de $L \otimes_K D_K$ dans D_L est toujours injective et est bijective si et seulement si l'action de $G_{L/K}$ sur D est discrète (ce qui est bien sûr le cas si L/K est finie).

4.3.2. — Nous appelons $(\varphi, N, G_{L/K})$–**module filtré** la donnée d'un $(\varphi, N, G_{L/K})$–module D et d'une filtration $(Fil^i D_L)_{i\in\mathbb{Z}}$, indexée par $\mathbb{Z}$, de D_L par des sous–L–espaces vectoriels stables par $G_{L/K}$, décroissante $(Fil^{i+1} D_L \subset Fil^i D_L)$, exhaustive $(\cup Fil^i D_L = D_L)$ et séparée $(\cap Fil^i D_L = 0)$.

Cette filtration en induit une autre, $(Fil^i D_K)_{i\in\mathbb{Z}}$, sur D_K. Lorsque l'action de $G_{L/K}$ est discrète, on a $Fil^i D_L = L \otimes_K Fil^i D_K$; autrement dit, la donnée d'une filtration stable par $G_{L/K}$ sur D_L équivaut à la donnée d'une filtration sur D_K.

4.3.3. — Les $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules filtrés forment une catégorie : un morphisme

$$\eta : D_1 \longrightarrow D_2$$

est un morphisme des $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules sous–jacents tel que, si l'on note

$$\eta_L : D_{1,L} \longrightarrow D_{2,L}$$

l'application L–linéaire déduite de η par extension des scalaires de L_0 à L, alors $\eta_L(Fil^i D_{1,L}) \subset Fil^i D_{2,L}$.

On note $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ la catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$–**modules filtrés discrets de dimension finie** (i.e. la sous–catégorie pleine de la précédente dont les objets sont ceux dont le $(\varphi, N, G_{L/K})$–module sous–jacent est discret de dimension finie).

Cette catégorie est additive et même $\mathbb{Q}_p$–linéaire, mais n'est pas abélienne. Elle a des noyaux et des conoyaux : le $(\varphi, N, G_{L/K})$–module sous–jacent au noyau (resp. conoyau) de η est le noyau D' (resp. le conoyau D'') du morphisme des $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules sous–jacents; en particulier D'_L (resp. D''_L) est le noyau (resp. conoyau) de η_L et la filtration sur D'_L (resp. D''_L) est la filtration induite par celle de $D_{1,L}$ (resp. $D_{2,L}$). On voit que $Coim\,\eta \to \mathrm{Im}\,\eta$ est un isomorphisme si et seulement si η_L est strictement compatible aux filtrations, i.e. si

$$\eta(Fil^i D_{1,L}) = \eta(D_{1,L}) \cap Fil^i D_{2,L}, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z} .$$

En particulier, on a des notions naturelles de **suite exacte courte**, de **sous–objet** et de **quotient**. Si D est un objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$, si D' est un sous–objet de D dans la catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules et si $D'' = D/D'$, alors D' et D'' ont une structure naturelle de $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules filtrés : le L–espace vectoriel $D'_L = L \otimes_{L_0} D'$ (resp. $D''_L = L \otimes_{L_0} D''$) s'identifie à un sous–$L$–espace vectoriel (resp. un quotient) de D_L et on le munit de la filtration induite par celle de D_L. La suite

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

est exacte (i.e. D' est un noyau de $D \to D''$ et D'' un conoyau de $D' \to D$). Toute suite exacte courte est "isomorphe" à une suite de ce type.

4.3.4. — La catégorie $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ est munie d'un **produit tensoriel** et d'un **hom interne** : si D et D' sont deux objets de cette catégorie, le $(\varphi, N, G_{L/K})$–module sous–jacent à $D \otimes D'$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(D, D')$) est le produit tensoriel (resp. le hom interne) des $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules sous–jacents; on a, bien sûr, $(D \otimes D')_L = D_L \otimes_L D'_L$ (resp. $(\underline{\mathrm{Hom}}(D, D'))_L = \mathcal{L}_L(D_L, D'_L)$) et

$$Fil^i(D \otimes D')_L = \sum_{j+j'=i} Fil^j D_L \otimes Fil^{j'} D'_L,$$

$$Fil^i(\underline{\mathrm{Hom}}(D, D'))_L = \{\eta : D_L \longrightarrow D'_L \mid \eta(Fil^j D_L) \subset Fil^{i+j} D'_L, \ \forall j \in \mathbb{Z}\}.$$

Ces notions vérifient les propriétés *"usuelles"* (se méfier cependant que l'on n'est pas dans une catégorie abélienne). En particulier L_0, vu comme un objet–unité dans la catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules, porte une structure d'objet–unité dans $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$: il suffit de définir la filtration sur $L \otimes_{L_0} L_0 = L$ par

$$Fil^i L = \begin{cases} L & \text{si} \quad i \leq 0, \\ 0 & \text{si} \quad i > 0. \end{cases}$$

On peut également définir le **contragrédient** ou **dual** d'un $(\varphi, N, G_{L/K})$–module filtré D comme étant $D^* = \underline{\mathrm{Hom}}(D, L_0)$.

4.4. — Modules filtrés faiblement admissibles

4.4.1. — Soit D un objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ de dimension 1 :

i) si v est la valuation de L_0 normalisée par $v(p) = 1$, si d est un élément non nul de D et si $\varphi d = \lambda d$, alors $v(\lambda)$ est indépendant du choix de d; on le note $t_N(D)$;

ii) on note $t_H(D)$ le plus grand $i \in \mathbb{Z}$ tel que $Fil^i D_L \neq 0$.

Soit D un $(\varphi, N, G_{L/K})$–module filtré discret de dimension finie. Si $r = \dim D$, $\Lambda^r D$ est un facteur direct de la puissance tensorielle r–ième de D et a donc une structure naturelle d'objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$. On pose

$$t_N(D) = t_N(\Lambda^r D) \quad \text{et} \quad t_H(D) = t_H(\Lambda^r D).$$

Bien sûr, le premier entier ne dépend que de l'action de φ sur D tandis que le second ne dépend que de la filtration sur D_K.

Si, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, on note D_α la partie de D de pente α pour l'action de φ (cf., par exemple, [Be75], p. 316), on a

$$t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} (\dim_{L_0} D_\alpha) \cdot \alpha$$

tandis que

$$t_H(D) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\dim_K gr^i D_K) \cdot i \ .$$

Il en résulte que t_N et t_H sont additives, i.e. si

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$, on a

$$t_N(D) = t_N(D') + t_N(D'') \quad \text{et} \quad t_H(D) = t_H(D') + t_H(D'') \ .$$

4.4.2. PROPOSITION. — *Soit D un objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) on a $t_H(D) = t_N(D)$ *et, pour tout sous-objet* D' *de* D, $t_H(D') \leq t_N(D')$;

ii) on a $t_H(D) = t_N(D)$ *et, pour tout quotient* D'' *de* D, $t_H(D'') \geq t_N(D'')$.

Preuve : Cela résulte immédiatement de ce que t_H et t_N sont additives.

4.4.3. DEFINITION. — *Un* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-module filtré faiblement admissible est un* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-module filtré discret de dimension finie qui vérifie les conditions équivalentes de la proposition précédente. Nous notons* $\underline{MF}^f_{L/K}(\varphi, N)$ *la sous-catégorie pleine de la catégorie de* $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ *dont les objets sont ceux qui sont faiblement admissibles.*

4.4.4. PROPOSITION. — *La catégorie* $\underline{MF}^f_{L/K}(\varphi, N)$ *est abélienne et le noyau* (resp. *le conoyau) d'un morphisme dans cette catégorie coïncide avec le noyau* (resp. *le conoyau) de ce morphisme dans la catégorie des* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-modules filtrés. En outre*

i) le dual D^* *d'un* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-module filtré faiblement admissible est faiblement admissible ;*

ii) pour qu'un sous-objet D' (resp. *un quotient* D''*), dans la catégorie des* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-modules filtrés, d'un objet* D *de* $\underline{MF}^f_{L/K}(\varphi, N)$ *soit faiblement admissible, il faut et il suffit que* $t_H(D') = t_N(D')$ (resp. *que* $t_H(D'') = t_N(D'')$*) ;*

iii) si

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $(\varphi, N, G_{L/K})$*-modules filtrés discrets, et si deux d'entre eux sont faiblement admissibles, il en est de même du troisième.*

Il s'agit d'une généralisation de la proposition 4.2.1 de [Fo79], et la même démonstration, qui est très facile, s'applique.

4.4.5. CONJECTURE. — *Le produit tensoriel de deux* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-modules filtrés faiblement admissibles est faiblement admissible.*

S'il en est ainsi, $\underline{MF}^f_{L/K}(\varphi, N)$ est une catégorie tannakienne. Cette conjecture est impliquée par la conjecture 5.6.9 (cf. *infra* qui dit essentiellement que tout objet de cette catégorie *"provient d'une représentation galoisienne"*). Dans le cas particulier où $N = 0$ sur les deux modules considérés, cette conjecture a été démontrée par Laffaille ([La80]) lorsque p est une uniformisante de L et par Faltings sans hypothèse sur L. Il est probable que la démonstration de Faltings s'étend au cas général.

4.4.6. — **Remarque** : Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré discret de dimension finie, on peut définir le **polygone de Newton** $P_N(D)$ de D comme le polygone de Newton du F-iso-cristal sous-jacent et le **polygone de Hodge** $P_H(D)$ de D comme le polygone associé à la filtration de D_L (cf., par exemple, [Fo79], n° 4.3). On peut montrer (même démonstration que la prop. 4.3.3 de *op. cit.*) que D est faiblement admissible si et seulement si d'une part $P_H(D)$ et $P_N(D)$ ont mêmes extrémités et d'autre part, pour sous-objet D' de D (dans la catégorie $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$), le polygone $P_H(D')$ est au-dessous de $P_N(D')$.

4.4.7. — Soit L' une extension galoisienne de K contenant L. Les constructions du n° 4.2.5 s'étendent sans difficulté : l'extension des scalaires définit un $\otimes$-foncteur de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ dans $\underline{MF}_{L'/K}(\varphi, N)$, qui induit une $\otimes$-équivalence entre $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ et la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{L'/K}(\varphi, N)$ formée des D' sur lesquels le groupe d'inertie $I_{L'/L}$ opère trivialement; l'image par ce foncteur d'un objet D de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ est faiblement admissible si et seulement si D l'est déjà.

4.4.8. — Lorsque $L = K$, on dit (φ, N)-**module filtré (relativement à** K s'il y a risque de confusion) au lieu de $(\varphi, N, 1)$-module filtré et on pose $\underline{MF}_K(\varphi, N) = \underline{MF}_{K/K}(\varphi, N)$ et $\underline{MF}^f_K(\varphi, N) = \underline{MF}^f_{K/K}(\varphi, N)$; on appelle (φ, N)-**modules filtrés faiblement admissibles** (sous-entendu : **relativement à** K) les objets de cette dernière catégorie.

De même, **un** φ-**module filtré (relatif à** K) est un (φ, N)-module filtré pour lequel $N = 0$. On note $\underline{MF}_K(\varphi) = \underline{MF}_{K/K}(\varphi)$ (resp. $\underline{MF}^f_K(\varphi)$) la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$ (resp. $\underline{MF}^f_K(\varphi, N)$) dont les objets sont ceux sur lequels $N = 0$. Les objets de $\underline{MF}_K^f(\varphi)$ sont les φ–**modules filtrés faiblement admissibles**[3].

On dit qu'un objet D de $\underline{MF}^f_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ est **semi–stable sur** L[4] si le (φ, N)–module sous–jacent l'est. Lorsque $N = 0$, on dit aussi que D **a bonne réduction sur** L.

4.4.9. PROPOSITION. — *Supposons L/K finie. Soient D un objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ et Δ l'objet de $\underline{MF}_L(\varphi, N)$ que l'on obtient en oubliant l'action de $G_{L/K}$. Alors D est faiblement admissible si et seulement si Δ l'est.*

Preuve : Notons $\mathcal{M}$ la classe des objets M de $\underline{MF}_L(\varphi, N)$, de dimension finie, tels que pour tout sous–objet M' de M, $t_H(D') \leq t_N(D')$. L'appartenance à $\mathcal{M}$ est stable par sous–objet et somme directe finie.

Il est clair que la condition est suffisante. Montrer qu'elle est nécessaire revient à vérifier que si D est un objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ tel que, pour tout sous–L_0–espace vectoriel D' de D stable par φ, N et $G_{L/K}$, on a $t_H(D') \leq t_N(D')$, alors la même propriété est vraie pour tout sous–L_0–espace vectoriel stable par φ et N, mais peut–être pas par $G_{L/K}$.

Sinon, soit D' un contre–exemple minimal (on a donc $t_H(D') > t_N(D')$, mais tout sous–objet propre de D' dans $\underline{MF}_L(\varphi, N)$ appartient à $\mathcal{M}$).

Soit $D'_{sat} = \sum_{g \in G_{L/K}} g(D')$. Il est clair que D'_{sat} est stable par φ, N et $G_{L/K}$, d'où $t_H(D'_{sat}) \leq t_N(D'_{sat})$. Soient $g_1, g_2, \ldots, g_r$ des éléments de $G_{L/K}$ tels que $D'_{sat} = \sum_{1 \leq i \leq r} g_i(D')$ et que l'entier r soit minimal. Soit D_1 (resp. D_2) le noyau (resp. la coimage), dans la catégorie $\underline{MF}_L(\varphi, N)$, du morphisme naturel

$$\oplus_{1 \leq i \leq r} g_i(D') \longrightarrow D'_{sat} \ .$$

On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow \oplus_{1 \leq i \leq r} g_i(D') \longrightarrow D_2 \longrightarrow 0 \ ,$$

[3] la catégorie $\underline{MF}_K^f(\varphi)$ est notée $\underline{MF}_K^f$ dans [Fo79], n° 4.1.4.

[4] cette notion garde un sens lorsque l'on ne suppose plus l'extension L de K contenue dans $\overline{K}$ galoisienne.

et on a $t_N(D_2) = t_N(D'_{sat})$, tandis que $t_H(D_2) \leq t_H(D'_{sat})$, ce qui fait que $t_H(D_2) \leq t_N(D_2)$. D'autre part, pour $1 \leq i \leq r$, notons D'_1 le plus petit sous–objet de $g_i(D')$ (dans $\underline{MF}_L(\varphi, N)$) contenant l'image de D_1 (via la projection de $\oplus g_j(D')$ sur $g_i(D')$). La minimalité de r implique que $D'_i \neq g_i(D')$ donc, puisque $g_i(D') \simeq D'$ (en tant qu'objet de $\underline{MF}_L(\varphi, N)$), que $D'_i \in \mathcal{M}$; on a donc $\oplus D'_i \in \mathcal{M}$ et $D_1 \in \mathcal{M}$, d'où $t_H(D_1) \leq t_N(D_1)$. Les propriétés d'additivité de t_H et t_N implique d'une part que $t_H(\oplus g_i(D')) = t_H(D_1) + t_H(D_2) \leq t_N(D_1) + t_N(D_2) = t_N(\oplus g_i(D'))$ et d'autre part que $t_H(\oplus g_i(D')) = r \cdot t_H(D') > r \cdot t_N(D') = t_N(\oplus g_i(D'))$, d'où une contradiction.

4.4.10. — **Remarque** : Soient P le complété de l'extension maximale non ramifiée K_{nr} de K contenue dans $\overline{K}$ et $\overline{P}$ la fermeture algébrique de P dans le complété de $\overline{K}$. Alors le corps des fractions P_0 de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel $\overline{k}$ de $\overline{K}$ est aussi le complété de l'extension maximale non ramifiée $\overline{K}_0$ de K_0 contenue dans $\overline{K}$.

Si D est un objet de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$, $\widehat{D} = P_0 \otimes_{\overline{K}_0} D$ est muni, d'une manière évidente, d'une action de φ, N et G_K et $\widehat{D}_{\overline{P}} = \overline{P} \otimes_{P_0} \widehat{D}$ est muni d'une filtration. Si D est discret, on peut le récupérer à partir de $\widehat{D}$: c'est le sous–$\overline{K}_0$–espace vectoriel de $\widehat{D}$ formé des d qui sont fixés par un sous–groupe ouvert de G_K. La condition d'admissibilité faible peut se lire sur $\widehat{D}$ aussi bien que sur D, et l'on obtient ainsi une $\otimes$–équivalence entre $\underline{MF}^f_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ et une catégorie convenable d'objets tels que $\widehat{D}$. Lorsque l'on se restreint aux objets pour lesquels $N = 0$, cela fourni une $\otimes$–équivalence entre $\underline{MF}^f_{\overline{K}/K}(\varphi)$ et la catégorie notée $\underline{MPF}^f_K$ dans [Fo79], n° 7.3.4.

5. — Représentations semi–stables et potentiellement semi–stables

Dans le cas particulier des représentations cristallines et potentiellement cristallines (qui correspondent du côté (φ, N)–modules filtrés au cas où $N = 0$) la plupart des résultats de ce paragraphe sont contenus dans [Fo79]. Les démonstrations dans le cas général étudié ici sont souvent pratiquement identiques. Nous les reproduisons ici pour la commodité du lecteur.

Dans toute la suite, on pose $G = G_K$.

5.1. — Les foncteurs $\underline{D}_{cris}$ et $\underline{D}_{st}$

5.1.2. — On renvoie à [Exp.II] pour la définition des anneaux B_{cris} (n° 2.3) et B_{st} (n° 3.1). On choisit

i) (cf. *loc. cit.*, n° 3.2.2) une valuation $v : \overline{K} \to \mathbb{Q}$ et on note N l'opérateur de monodromie sur B_{st} associé à v ;

ii) (cf. *loc. cit.*, n° 4.2) un prolongement G–équivariant $\log : \overline{K}^* \to \overline{K}$ du logarithme usuel sur le groupe des unités de l'anneau des entiers de $\overline{K}$ et on note $\iota : B_{st} \to B_{dR}$ le B_{cris}–plongement qui lui est associé. Sauf mention explicite du contraire, on utilise ι pour identifier B_{st} à une sous–B_{cris}–algèbre de B_{dR}.

Rappelons que l'homomorphisme de K–algèbres,

$$\iota_K : K \otimes_{K_0} B_{st} \longrightarrow B_{dR} ,$$

déduit de ι par extension des scalaires est injectif ([Exp.II], n° 4.2.4). Plus généralement, pour toute extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$, l'homomorphisme de L–algèbres $\iota_L : L \otimes_{L_0} B_{st} \to B_{dR}$ déduit de ι par extension des scalaires est injectif (il suffit d'appliquer ce qui précède en remplaçant K par L).

5.1.2. Proposition. — *i) On a $(B_{cris})^G = (B_{st})^G = K_0$.*

ii) Les $(\mathbb{Q}_p, G)$–anneaux B_{cris} et B_{st} sont G–réguliers.

Preuve : Il est clair que $K_0 \subset (B_{cris})^G \subset (B_{st})^G \subset (B_{dR})^G$ et on sait ([Exp.II], n° 1.5.7) que $(B_{dR})^G = K$. L'égalité $K_0 = (B_{cris})^G = (B_{st})^G$ résulte de l'injectivité de ι_K.

Comme B_{dR} est G–régulier, cette injectivité, compte–tenu de la proposition 1.6.5, ramène la démonstration de (ii) à vérifier que, si $b \in B_{cris}$ (resp. B_{st}) est un élément non–nul tel que la $\mathbb{Q}_p$–droite engendrée par b est stable par G, alors b est inversible, ce qui résulte du lemme suivant :

5.1.3. Lemme. — *i) Le corps des fractions P_0 de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel $\overline{k}$ de $\overline{K}$ s'identifie à un sous–corps de B_{cris}.*

ii) Soit $t \in B_{cris}$ un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$. Pour qu'un sous-P_0-espace vectoriel Δ de dimension 1 de B_{st} soit stable par G, il faut et il suffit qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\Delta = P_0 t^i$.

Preuve : Avec les notations utilisées dans [Exp.II], on voit que $\overline{k}$ s'identifie au corps résiduel de R; donc $W(R)$ contient $W(\overline{k})$ et le sous-anneau $W(R)[1/p]$ de B_{cris} contient $W(\overline{k})[1/p] = P_0$.

Quitte à remplacer K par son composé avec P_0, on peut pour prouver (ii) supposer le corps résiduel de K algébriquement clos, i.e. que $P_0 = K_0$ (on a aussi $L_0 = K_0$ pour toute extension L de K contenue dans $\overline{K}$).

Soit b un générateur de Δ. Quitte à multiplier b par t^{-i}, pour un entier i convenable, on peut supposer que $b \in B_{dR}^+$ et $b \notin Fil^1 B_{dR}^+$. Soit $\theta(b)$ l'image de b dans C. Le K_0-espace vectoriel $\theta(\Delta)$ engendré par $\theta(b)$ est de dimension 1 et stable par G et il est donc contenu dans $\overline{K}$ (cf., par exemple, 3.3, remarque (ii)). L'action de G sur $\theta(\Delta)$ se factorise donc à travers $\mathrm{Gal}(L/K)$ où L est une extension finie galoisienne convenable de K, donc une extension finie de K_0. Comme la restriction de θ à Δ est injective, il en est de même de l'action de G sur Δ, donc aussi sur la sous-K_0-algèbre $P_0(b)$ de B_{st}. Mais alors $K_0(b)$ doit être isomorphe à une extension de K_0 contenue dans L et le fait que $L \otimes_{K_0} B_{st}$ ($\subset B_{dR}$) soit intègre implique que $b \in K_0$.

5.1.4. — Pour toute représentation p-adique V de G, on pose

$$\underline{D}_{cris}(V)=\underline{D}_{B_{cris}}(V)=(B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \text{ et } \underline{D}_{st}(V)=\underline{D}_{B_{st}}(B)=(B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G .$$

On dit que V **est cristalline** (resp. **semi-stable**) si V est B_{cris}-admissible (resp. B_{st}-admissible). On note $\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G)$ (resp. $\underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G)$) la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dont les objets sont les représentations cristallines (resp. semi-stables). C'est une sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (prop. 1.5.2).

5.1.5. — Soient k le corps résiduel de K, $\overline{k}$ et P_0 comme au n° 5.1.3, P le complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$, $\overline{P}$ la fermeture algébrique de P dans le complété C de $\overline{K}$. Alors P est un corps complet pour une valuation discrète et $\overline{P}$ une clôture algébrique de P. Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{P}/P)$ n'est autre que le groupe d'inertie I_K de l'extension $\overline{K}/K$.

En outre, les anneaux B_{cris} et B_{st} relatifs à l'extension $\overline{P}/P$ s'identifient aux anneaux du même nom relatifs à $\overline{K}/K$ ([Exp.II], rem. (d) du n° 4.2.5).

Si $G_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, pour tout entier $n \geq 1$, $H^0(G_k, \overline{k}) = k$ et $H^1(G_k, GL_n(\overline{k}))$ est trivial; on en déduit facilement (cf., par exemple, [Se89], lemma, p. III–33) que $H^0(G_k, P_0) = K_0$ et $H^1_{cont}(G_k, GL_n(P_0))$ est trivial. Autrement dit, pour tout P_0–espace vectoriel de dimension finie Δ muni d'une action semi–linéaire et continue de G_k, l'application naturelle

$$P_0 \otimes_{K_0} \Delta^{G_k} \longrightarrow \Delta$$

est un isomorphisme.

La proposition suivante en résulte :

PROPOSITION. — *Pour qu'une représentation p–adique V de G_K soit cristalline (*resp. *semi–stable), il faut et il suffit que V le soit en tant que représentation du groupe d'inertie $I_K = \mathrm{Gal}(\overline{P}/P)$.*

5.1.6. — Soit V une représentation p–adique de G. L'action de φ sur B_{cris} munit $\underline{D}_{cris}(V)$ d'une structure de φ–module relatif à K (n° 4.2.7), tandis que celle de φ et de N sur B_{st} munit $\underline{D}_{st}(V)$ d'une structure de (φ, N)–module relatif à K (n° 4.2.6). L'inclusion de B_{cris} dans B_{st} identifie $\underline{D}_{cris}(V)$ au noyau de la multiplication par N dans $\underline{D}_{st}(V)$.

L'injectivité de l'application $\iota_K : K \otimes_{K_0} B_{st} \to B_{dR}$ permet d'identifier $\underline{D}_{st}(V)_K = K \otimes_{K_0} \underline{D}_{st}(V)$ à un sous–K–espace vectoriel de $\underline{D}_{dR}(V)$. On peut donc munir $\underline{D}_{st}(V)_K$ de la filtration induite par celle de $\underline{D}_{dR}(V)$, ce qui permet de considérer $\underline{D}_{st}$ comme **un foncteur de la catégorie** $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ **dans** $\underline{MF}_K(\varphi, N)$ (n° 4.4.8). De la même façon $\underline{D}_{cris}$ est **un foncteur de la catégorie** $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ **dans** $\underline{MF}_K(\varphi)$ (et, pour toute représentation V, $\underline{D}_{cris}(V)$ s'identifie au sous–objet de $\underline{D}_{st}(V)$ dans $\underline{MF}_K(\varphi, N)$ qui est le noyau de N).

5.1.7. — Si V est une représentation p–adique de G de dimension d, on a $\dim_{K_0} \underline{D}_{st}(V)$ (resp. $\dim_K \underline{D}_{dR}(V)) \leq d$) et V est semi–stable (resp. de de Rham) si et seulement si l'on a l'égalité. Si V est semi–stable, on a donc $\underline{D}_{st}(V)_K = \underline{D}_{dR}(V)$ et V est de de Rham. De la même manière, on voit que si V est cristalline, alors V est semi–stable, on a $\underline{D}_{st}(V) = \underline{D}_{cris}(V)$ (avec $N = 0$) et $\underline{D}_{cris}(V)_K = \underline{D}_{dR}(V)$.

Compte tenu du théorème 3.8, le résultat suivant est alors évident :

THÉORÈME. — *On a les inclusions*

$$\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G) \subset \underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G) \subset \underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G) \subset \underline{\mathrm{Rep}}(G)$$

où chaque catégorie est une sous-catégorie tannakienne de la suivante. En outre,

*i) si V_1 et V_2 sont deux représentations semi-stables (*resp. *cristalline), l'isomorphisme naturel de K_0-espaces vectoriels $\underline{D}_{st}(V_1)\otimes_{K_0}\underline{D}_{st}(V_2) \to \underline{D}_{st}(V_1 \otimes V_2)$* (resp. $\underline{D}_{cris}(V_1) \otimes_{K_0} \underline{D}_{cris}(V_2) \to \underline{D}_{cris}(V_1 \otimes V_2)$) *induit un isomorphisme des objets de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$* (resp. $\underline{MF}_K(\varphi)$) *correspondants ;*

*ii) si V est une représentation semi-stable (*resp. *cristalline), l'isomorphisme naturel de K_0-espaces vectoriels $\underline{D}_{st}(V^*) \to (\underline{D}_{st}(V))^*$ induit un isomorphisme des objets de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$* (resp. $\underline{MF}(\varphi)$) *correspondants ;*

iii) si

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

*est une suite exacte courte de représentations p-adiques et si V est semi-stable (*resp. *cristalline) la suite exacte courte de K_0-espaces vectoriels $0 \to \underline{D}_{st}(V') \to \underline{D}_{st}(V) \to \underline{D}_{st}(V'') \to 0$* (resp. $0 \to \underline{D}_{cris}(V') \to \underline{D}_{cris}(V) \to \underline{D}_{cris}(V'') \to 0$) *induit une suite exacte courte des objets de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$ (*resp. $\underline{MF}_K(\varphi)$*) correspondants.*

5.2. — L'influence du choix de la valuation et du logarithme

5.2.1. — La structure de (φ, N)-module filtré sur B_{st} dépend du choix d'une valuation sur $\overline{K}$ et de celui d'un logarithme sur $\overline{K}^*$. Soient v et v_0 deux valuations de $\overline{K}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$, v_0 étant la valuation telle que $v_0(p) = 1$, et log et $\log_0$ deux logarithmes sur $\overline{K}^*$, G-équivariants, $\log_0$ étant tel que $\log_0(p) = 0$.

La K_0-algèbre B_{st} munie de l'action de G et de φ ne dépend pas des choix faits. L'action de N et le plongement de $K \otimes_{K_0} B_{st}$ dans B_{dR} en dépendent :

– Posons $v(p) = a (\in \mathbb{Q})$ et notons N (resp. N_0) l'opérateur de monodromie sur B_{st} associé à v (resp. v_0). On a $N = a \cdot N_0$.

– Posons $\log(p) = c(\in K)$ et notons ι (resp. ι_0) le plongement de $K \otimes_{K_0} B_{st}$ dans B_{dR} induit par log (resp. $\log_0$). Notons encore N_0 l'unique $K \otimes_{K_0} B_{cris}$–dérivation de $K \otimes_{K_0} B_{st}$ qui prolonge N_0. L'application

$$\nu : K \otimes_{K_0} B_{st} \longrightarrow K \otimes_{K_0} B_{st} \ ,$$

qui envoie b sur $\sum\limits_{n\geq 0} (c^n/n!) \cdot N_0^n(b)$, est un automorphisme de la $K \otimes_{K_0} B_{cris}$–algèbre $K \otimes_{K_0} B_{st}$ qui commute à l'action de G. On vérifie facilement que $\iota = \iota_0 \circ \nu$. On en déduit que si, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on pose

$$Fil_0^r(K \otimes_{K_0} B_{st}) = \iota_0^{-1}(Fil^r B_{dR}) \quad \text{et} \quad Fil^r(K \otimes_{K_0} B_{st}) = \iota^{-1}(Fil^r B_{dR}) \ ,$$

on a $Fil^r(K \otimes_{K_0} B_{st}) = \nu^{-1}(Fil_0^r(K \otimes_{K_0} B_{st}))$.

5.2.2. — Si V est une représentation p–adique de G, la structure de (φ, N)–module filtré sur $\underline{D}_{st}(V)$ dépend aussi du choix de la valuation et du logarithme, i.e. des éléments $a \in \mathbb{Q}^*$ et $c \in K$ définis ci–dessus.

Si D_0 (resp. D) est le (φ, N)–module filtré $\underline{D}_{st}(V)$ correspondant au choix de v_0 et $\log_0$ (resp. v et log), il est facile de décrire D à partir de D_0 : en tant que K–espace vectoriel, D s'identifie à D_0 (et donc $D_K = K \otimes_{K_0} D$ s'identifie aussi à $K \otimes_{K_0} D_0$) et, avec des conventions évidentes,

– on a $\varphi = \varphi_0$ et $N = aN_0$;

– si l'on note encore N_0 l'endomorphisme du K–espace vectoriel D_K déduit de N_0 par extension des scalaires et si l'on appelle ν l'automorphisme $\sum\limits_{n\geq 0} (c^n/n!) \cdot N_0^n$ de D_K, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a $Fil^r D_K = \nu^{-1}(Fil_0^r D_K)$.

5.2.3. — Si V est comme ci–dessus, la structure de (φ, N)–module de $D = \underline{D}_{st}(V)$ ne fait par intervenir le choix de log et ne dépend donc que du choix de v. **La classe d'isomorphisme de D comme (φ, N)–module est indépendante de ce choix**. En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $D_{[n]}$ la partie de D qui est la somme directe des parties de D de pente $\in [n, n+1[$ (pour l'action de φ). On a

$$D = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} D_{[n]} \ ;$$

si, avec des notations évidentes, f est l'endomorphisme du K_0–espace vectoriel D qui est la multiplication par a^{-n} sur $D_{[n]}$, on voit que f commute à $\varphi = \varphi_0$, tandis que, comme $N(D_{[n]}) \subset D_{[n-1]}$, $f \circ N_0 = N \circ f$; l'application f est donc un isomorphisme de D_0 sur D pour la structure de (φ, N)–modules.

En revanche, il est facile de voir que la classe d'isomorphisme de $\underline{D}_{st}(V)$ comme (φ, N)–module **filtré** dépend en général aussi bien du choix de la valuation que de celui du prolongement du logarithme usuel.

5.2.4. — Soient V une représentation p–adique de G qui est de de Rham et D_K le K–espace vectoriel filtré $\underline{D}_{dR}(V)$. Supposons V semi–stable. Le choix de v et de log permet de munir D_K d'un opérateur de monodromie $N : D_K \to D_K$ qui est K–linéaire nilpotent et d'une K_0–structure D stable par N et munie d'un Frobenius φ. Si l'on change v et log, on voit que, avec des conventions évidentes, on a $N = aN_0$ et, si ν est l'automorphisme $\sum_{n \geq 0} (c^n/n!) \cdot N_0^n$ de D_K, on a $D = \nu(D_0)$ et $\varphi = \nu \circ \varphi_0 \circ \nu^{-1}$.

5.3. — Le foncteur $\underline{V}_{st}$

5.3.1. — L'anneau B_{st} a une structure naturelle de (φ, N, G)–module filtré (la filtration sur $(B_{st})_K = K \otimes_{K_0} B_{st}$ est celle qui est induite par l'inclusion ι_K de $(B_{st})_K$ dans B_{dR}).

Si V est une représentation p–adique de G, $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est de manière naturelle un (φ, N, G)–module filtré : si $b \in B_{st}$ et $v \in V$, on a $N(b \otimes v) = Nb \otimes v$, $\varphi(b \otimes v) = \varphi b \otimes v$, $g(b \otimes v) = gb \otimes gv$ pour tout $g \in G$; on a $(B_{st} \otimes V)_K = (B_{st})_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et $Fil^i(B_{st} \otimes V)_K = (Fil^i(B_{st})_K) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

5.3.2. —Si D est un (φ, N)–module filtré, le produit tensoriel $B_{st} \otimes D$ dans la catégorie des (φ, N)–modules filtrés est de façon naturelle un (φ, N, G)–module filtré (on a $g(b \otimes d) = gb \otimes d$ pour $g \in G$, $b \in B_{st}$, $d \in D$) et on peut définir

$$\underline{V}_{st}(D) = \mathrm{Hom}_{(\varphi,N)-\mathrm{mod\ .fil.}}(K_0, B_{st} \otimes D)$$

(où K_0 est vu comme l'objet–unité de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$). On voit que $\underline{V}_{st}(D)$ s'identifie au sous–$\mathbb{Q}_p$–espace vectoriel de $B_{st} \otimes_{K_0} D$ formé des v tels que $Nv = 0$, $\varphi v = v$ et $1 \otimes v \in Fil^0(B_{st} \otimes D)_K$. Il est stable par G.

On peut considérer $\underline{V}_{st}$ comme un foncteur de la catégorie des (φ, N)–modules filtrés dans celle des $\mathbb{Q}_p[G]$–modules.

5.3.3. — Disons qu'un (φ, N)-module filtré D est **admissible** s'il existe une représentation semi–stable V et un isomorphisme de $\underline{D}_{st}(V)$ sur D. Notons $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$ la sous–catégorie pleine de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$ dont les objets sont ceux qui sont admissibles.

5.3.4. — Reprenons les notations du n° 5.1.5. Si D est un (φ, N)-module filtré relatif à K, $\Delta = P_0 \otimes_{K_0} D$ a une structure naturelle de (φ, N)-module filtré relatif à P. Compte–tenu du n° 5.1.5, la proposition suivante est immédiate :

PROPOSITION. — *Soit D un (φ, N)-module filtré relatif à K de dimension finie. Alors D est admissible si et seulement si $P_0 \otimes_{K_0} D$ l'est.*

5.3.5. THÉORÈME. — *i) Soit V une représentation p–adique semi–stable. L'isomorphisme naturel de B_{st}-modules*

$$B_{st} \otimes_{K_0} \underline{D}_{st}(V) \longrightarrow B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

induit un isomorphisme des structures de (φ, N)-modules filtrés sous–jacentes.

ii) Comme sous–catégorie pleine de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$, $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$ est stable par facteur direct, somme directe, produit tensoriel, dual; c'est une catégorie tannakienne sur $\mathbf{Q}_p$.

iii) La restriction du foncteur $\underline{D}_{st}$ à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G)$ est pleinement fidèle et induit une $\otimes$–équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G)$ et $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$; la restriction de $\underline{V}_{st}$ à $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$ est un quasi–inverse.

iv) Dans la catégorie $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$, tout morphisme est strictement compatible aux filtrations.

Preuve : L'assertion (i) résulte facilement de l'assertion (i) du théorème 3.8. Les autres assertions se déduisent facilement du fait que, si V est une représentations p–adique semi–stable et si $D = \underline{D}_{st}(V)$, alors $\underline{V}_{st}(D)$ s'identifie à V. Pour le voir, on utilise (i) pour identifier le (φ, N, G)-module $B_{st} \otimes D$ à $B_{st} \otimes V$. Mais $(B_{st})_{N=0} = B_{cris}$ ([exp.II], n° 3.2.3), donc $(B_{st} \otimes D)_{N=0} = (B_{st} \otimes V)_{N=0} = B_{cris} \otimes V$; on a aussi $(B_{cris})_{\varphi=1} \cap Fil^0 B_{dR} =$

$\mathbb{Q}_p$ ([Exp.II], th. 5.3.8) donc

$$\underline{V}_{st}(D) = ((B_{cris})_{\varphi=1} \otimes V) \cap (Fil^0 B_{dR} \otimes V) = V \ .$$

5.3.6. PROPOSITION. — *Soit D un (φ, N)-module filtré de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *D est admissible ;*

(*ii*) *l'application naturelle*

$$\beta_D : B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{V}_{st}(D) \longrightarrow B_{st} \otimes_{K_0} D$$

est un isomorphisme de (φ, N, G)-modules filtrés.

Preuve : $(i) \Longrightarrow (ii)$ car, si l'on identifie D à $\underline{D}_{st}(V)$, pour une représentation semi-stable V convenable, alors $\underline{V}_{st}(D)$ s'identifie à V et β_D est l'inverse de l'isomorphisme naturel de $B_{st} \otimes \underline{D}_{st}(V)$ sur $B_{st} \otimes V$ (cf. th. ci-dessus).

$(ii) \Longrightarrow (i)$ car si l'on pose $V = \underline{V}_{st}(D)$, β_D induit, en prenant les éléments fixes par G, un isomorphisme de (φ, N, G)-modules de $\underline{D}_{st}(V)$ sur D. Mais alors, la dimension sur K_0 de $\underline{D}_{st}(V)$ est égale au rang du B_{st}-module libre $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, c'est-à-dire à $\dim_{\mathbb{Q}_p} V$, donc V est semi-stable et D est admissible.

5.3.7. — Il est parfois commode d'utiliser une description contravariante de cette équivalence de catégories. Si, pour toute représentation p-adique V de G, on pose $\underline{D}^*_{st}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G]}(V, B_{st})$, on voit que $\underline{D}^*_{st}(V)$ s'identifie à $\underline{D}_{st}(V^*)$; de même, si, pour tout (φ, N)-module filtré D, on pose $\underline{V}^*_{st}(D) = \mathrm{Hom}_{(\varphi,N)-\mathrm{mod.fil.}}(D, B_{st})$, $\underline{V}^*_{st}(D)$ s'identifie à $\underline{V}_{st}(D^*)$. En particulier, la restriction du foncteur $\underline{D}^*_{st}$ à $\underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G)$ induit une anti-équivalence entre cette catégorie et $\underline{MF}^{ad}_K(\varphi, N)$ et la restriction de $\underline{V}^*_{st}$ à $\underline{MF}^{ad}_K(\varphi, N)$ est un quasi-inverse.

5.4. — Admissibilité et admissibilité faible

5.4.1. — Soit $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique.

PROPOSITION. — *i) Soit V une représentation p-adique de G de dimension 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) V est cristalline ;

b) V est semi-stable ;

c) il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que le groupe d'inertie I_K opère sur V via χ^i.

ii) Soit D un (φ, N)-module filtré de dimension 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) D est admissible,

b) D est faiblement admissible,

c) on a $t_H(D) = t_N(D)$.

Preuve : Les propositions 5.1.5 et 5.3.4 ramènent la démonstration au cas où le corps résiduel k de K est algébriquement clos, ce que nous supposons dans la suite. L'assertion (i) résulte alors de la partie (ii) du lemme 5.1.3. Quant à l'assertion (ii), il est clair que (b) et (c) sont équivalents. D'après (i), si D est admissible, il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $D \simeq \underline{D}_{st}(\mathbb{Q}_p(i)) = \underline{D}_{cris}(\mathbb{Q}_p(i))$. Si t est un élément non nul de $\mathbb{Q}_p(1)$, $\underline{D}_{st}(\mathbb{Q}_p(i))$ est le K_0-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $d = t^{-i} \otimes t^i$. On a $\varphi d = p^{-i} d$, $Nd = 0$ et $1 \otimes d \in Fil^{-i} - Fil^{-i+1}$, donc $t_N(D) = t_H(D) = -i$, d'où $(a) \Longrightarrow (c)$. Enfin, on vérifie facilement que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, tout (φ, N)-module filtré D de dimension 1 vérifiant $t_N(D) = t_H(D) = -i$ est isomorphe à $\underline{D}_{st}(\mathbb{Q}_p(i))$, d'où $(c) \Longrightarrow (a)$.

5.4.2. PROPOSITION. — *i) Tout (φ, N)-module filtré admissible est faiblement admissible.*

ii) Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, les sous-objets de D dans $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$ sont les sous-objet de D dans $\underline{MF}_K^{f}(\varphi, N)$ (autrement dit, les sous-(φ, N)-modules filtrés admissibles de D sont les sous-K_0-espaces vectoriels D' stables par φ et N, avec D'_K muni de la filtration induite, tels que $t_H(D') = t_N(D')$).

Preuve : Montrons (i) : Soit D un (φ, N)-module filtré admissible. Il résulte facilement du théorème 5.3.5 que, pour tout entier $r \geq 0$, le (φ, N)-module filtré $\Lambda^r D$ est admissible. Si m est la dimension de D, l'admissibilité de $\Lambda^m D$ implique que $t_H(D) = t_N(D)$. Si maintenant D' est un sous–(φ, N)–module de D, de dimension r, alors $\Lambda^r D'$ est une droite de $\Lambda^r D$, stable par φ et N (en fait contenu dans le noyau de N) ; si l'on munit D'_K de la filtration induite par celle de D_K, on a $t_H(\Lambda^r D') = t_H(D')$ et $t_N(\Lambda^r D') = t_N(D')$. Posons $j = t_N(D')$ et supposons que $t_H(D') \geq j$. Soit Δ le (φ, N)–module filtré de dimension 1 dont le (φ, N)–module sous–jacent est $\Lambda^r D'$, avec $Fil^j \Delta_K = \Delta_K$ et $Fil^{j+1} \Delta_K = 0$. L'identité sur $\Lambda^r D'$ induit un morphisme de (φ, N)–modules filtrés admissibles

$$\Delta \longrightarrow \Lambda^r D' \ .$$

Celui–ci doit être strictement compatible aux filtrations (th. 5.3.5) et on doit donc avoir $t_H(D') = j$.

L'assertion (ii) résulte facilement du lemme élémentaire suivant déjà énoncé dans [Fo79] (lemme 4.5.3) :

5.4.3. LEMME. — *Soient B un anneau commutatif et E un sous–corps de B. Soient V un E–espace vectoriel et $X = B \otimes_E V$. Soit X' un sous–B–module libre de rang fini r de X. Pour que X' soit rationnel sur E (*i.e.* pour que X' provienne par extension des scalaires d'un sous–E–espace vectoriel de V), il faut et il suffit que $\Lambda^r_B X'$, identifié à un sous–B–module libre de rang 1 de $\Lambda^r_B X$ soit rationnel sur E.*

5.4.4. — **Conjecture** : Il me semble raisonnable de conjecturer que tout (φ, N)–module filtré faiblement admissible est admissible, i.e. que $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N) = \underline{MF}_K^{f}(\varphi, N)$. Lorsque $N = 0$, on retrouve la conjecture que tout φ–module filtré faiblement admissible est admissible ([Fo79], n° 5.2.6, question 1).

On dispose de résultats partiels en faveur de cette conjecture : soit D un (φ, N)–module filtré faiblement admissible. On sait que D est admissible en particulier dans chacun des cas suivants :

i) D est *"ordinaire"* et ou bien le corps résiduel k est fini, ou bien $K = K_0$ (cf. [Exp.IV]),

ii) $K = K_0$, $N = 0$ et il existe i tel que $Fil^i D_K = D_K$, $Fil^{i+p} D_K = 0$ ([FL82]), *iii*) $[K : K_0] \leq p-1$, $N = 0$ et il existe i tel que $Fil^i D_K = D_K$, $Fil^{i+2} D_K = 0$ ([La80]).

5.5. — Le cas des représentations cristallines

5.5.1. — L'anneau B_{cris} est le noyau de l'opérateur $N : B_{st} \to B_{st}$ et les représentations cristallines sont les représentations semi–stables V telles que $N = 0$ sur $\underline{D}_{st}(V)$. En faisant $N = 0$, les résultats des n° 5.4 et 5.5 se transposent au cas particulier des représentations cristallines.

C'est ainsi que l'anneau B_{cris} est de manière naturelle un (φ, G)–module filtré. De même, pour toute représentation p–adique V et tout φ–module filtré D, $B_{cris} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et $B_{cris} \otimes_{K_0} D$ ont une structure naturelle de (φ, G)–modules filtrés.

On définit un foncteur $\underline{V}_{cris}$ de la catégorie des φ–modules filtrés dans celle des $\mathbf{Q}_p[G]$–modules en posant, pour tout φ–module filtré D

$$\underline{V}_{cris}(D) = \mathrm{Hom}_{\varphi-\mathrm{mod\,.fil.}}(K_0, B_{cris} \otimes D) =$$

$$\{v \in B_{st} \otimes D \mid \varphi v = v \text{ et } 1 \otimes v \in Fil^0(B_{cris} \otimes D)_K\} .$$

Si D est un φ–module filtré, on peut le considérer comme un (φ, N)–module filtré avec $N = 0$ et $\underline{V}_{cris}(D) = \underline{V}_{st}(D)$.

5.5.2. — Disons qu'un φ–module filtré D est **admissible** s'il est admissible en tant que (φ, N)–module filtré avec $N = 0$. Cela équivaut à dire qu'il existe une représentation cristalline V et un isomorphisme de $\underline{D}_{st}(V)$ sur D. Notons $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$ ou $\underline{MF}_K^{ad}$ la sous–catégorie pleine de $\underline{MF}_K(\varphi)$ dont les objets sont ceux qui sont admissibles.

Il résulte du théorème 5.3.5 que

i) si V est une représentation p–adique cristalline, l'isomorphisme naturel de B_{cris}-modules

$$B_{cris} \otimes_{K_0} \underline{D}_{cris}(V) \longrightarrow B_{cris} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

induit un isomorphisme des structures de (φ, G)–modules filtrés sous–jacentes ;

ii) que, comme sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K(\varphi)$, $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$ est stable par facteur direct, somme directe, produit tensoriel, dual; c'est une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$;

iii) que la restriction du foncteur $\underline{D}_{cris}$ à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G)$ est pleinement fidèle et induit une $\otimes$-équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G)$ et $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$, la restriction de $\underline{V}_{cris}$ à $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$ étant un quasi-inverse;

iv) que, dans la catégorie $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$, tout morphisme est strictement compatible aux filtrations.

5.5.3. — De même, il résulte de la proposition 5.4.2

i) que tout φ-module filtré admissible est faiblement admissible;

ii) que, si D est un φ-module filtré admissible, les sous-objets de D dans $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$ sont les sous-objets de D dans $\underline{MF}_K^{f}(\varphi)$.

5.6. — Représentations potentiellement semi-stables

5.6.1. — Lorsque l'on remplace le corps K par une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$, les notions et l'étude des représentations p-adiques de G_K qui sont de de Rham, cristallines ou semi-stables se transposent aux représentations p-adiques de G_L. Le corps B_{dR} (resp. l'anneau B_{cris}, resp. B_{st}) relatif à l'extension $\overline{K}/L$ n'est autre que le corps B_{dR} (resp. l'anneau B_{cris}, resp. B_{st}) relatif à l'extension $\overline{K}/K$ (cf. [Exp.II], n° 1.5.6 et le (*d*) du n° 4.2.5). En particulier, en appliquant 5.1.2 à l'extension L/K, on voit que $(B_{st})^{G_L} = L_0$ et que le $(\mathbb{Q}_p, G_L)$-anneau B_{cris} est G_L-régulier.

On peut donc appliquer les résultats du n° 1.8 en prenant pour $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-groupes ouverts de G. On dit qu'une représentation p-adique V de G est **potentiellement semi-stable** si elle est potentiellement B_{st}-admissible relativement à $\mathcal{H}$. On note $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dont les objets sont les représentations potentiellement semi-stables. C'est une sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G)$.

5.6.2. — **Remarque** : Je ne connais pas d'exemple de représentation p-adique V de G qui est de de Rham sans être potentiellement semi-stable (voir n° 6.2.2 ci-dessous).

5.6.3. — Soit L une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$. Toute représentation p-adique V de G définit par restriction, une représentation p-adique de G_L et on peut définir

$$\underline{D}_{dR,L}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}, \quad \underline{D}_{cris,L}(V) = (B_{cris} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$$

et

$$\underline{D}_{st,L}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L} .$$

L'inclusion naturelle de $L \otimes_{L_0} \underline{D}_{st,L}(V)$ dans $\underline{D}_{dR}(V)$ permet de considérer $\underline{D}_{st,L}(V)$ comme un (φ, N)-module filtré sur L, et $\underline{D}_{cris,L}(V)$ s'identifie au φ-module filtré sur L qui est le noyau de N agissant sur $\underline{D}_{st,L}(V)$.

Lorsque l'extension L/K est galoisienne, le groupe $G_{L/K}$ opère sur la situation. Le K-espace vectoriel filtré $\underline{D}_{dR}(V)$ s'identifie à $\underline{D}_{dR,L}(V)^{G_{L/K}}$ et $\underline{D}_{st,L}(V)$ devient un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré (n° 4.3.2). On peut considérer, de manière naturelle, $\underline{D}_{st,L}$ comme un foncteur additif de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dans $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$.

5.6.4. — Pour toute représentation p-adique V de G, on note $\underline{D}_{pst}(V)$ la limite inductive des $\underline{D}_{st,L}(V)$, pour L parcourant les extensions finies de K contenues dans $\overline{K}$. On peut considérer $\underline{D}_{pst}$ comme un foncteur additif de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dans la catégorie $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ des (φ, N, G)-modules discrets de dimension finie.

Si V et L sont comme ci-dessus, on a $\underline{D}_{st,L}(V) = \underline{D}_{pst}(V)^{G_L}$.

5.6.5. — Soit L une extension finie galoisienne de K contenue dans $\overline{K}$. Pour tout objet D de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$, le groupe G opère sur $B_{st} \otimes_{L_0} D$ (on a $g(b \otimes b) = gb \otimes gd$, si $g \in G$, $b \in B_{st}$ et $d \in D$) et

$$\underline{V}_{st,L}(D) = \{v \in B_{st} \otimes_{L_0} D \mid Nv = 0, \ \varphi v = v \text{ et } 1 \otimes v \in Fil^0(B_{st} \otimes D)_L\}$$

est stable par G. On peut donc considérer $\underline{V}_{st,L}$ comme un foncteur additif de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ dans la catégorie des $\mathbf{Q}_p[G]$-modules.

On dispose de même d'un foncteur additif de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ dans la catégorie des $\mathbf{Q}_p[G]$-modules : si D est un objet de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$, G opère sur $B_{st} \otimes_{\overline{K}_0} D$ et

$$\underline{V}_{pst}(D) = \{v \in B_{st} \otimes_{\overline{K}_0} D \mid Nv = 0, \ \varphi v = v \text{ et } 1 \otimes v \in Fil^0(B_{st} \otimes D)_{\overline{K}}\}$$

est stable par G.

5.6.6. — On dit qu'un objet D de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ est **admissible** s'il existe une représentation p-adique V potentiellement semi-stable et un isomorphisme de $\underline{D}_{pst}(V)$ sur D. On note $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ dont les objets sont ceux qui sont admissibles.

5.6.7. — L'énoncé suivant est une conséquence immédiate des résultats des n° 5.1, 5.3 et 5.4 :

THÉORÈME. — *i) Si V est une représentation p-adique de G, on a $\dim_{\overline{K}_0} \underline{D}_{pst}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ avec l'égalité si et seulement si V est potentiellement semi-stable ;*

ii) si V est une représentation p-adique potentiellement semi-stable, V est de de Rham et le K-espace vectoriel filtré $\underline{D}_{dR}(V)$ s'identifie à $(\overline{K} \otimes_{\overline{K}_0} \underline{D}_{pst}(V))^G$.

iii) si V est une représentation p-adique potentiellement semi-stable, l'isomorphisme naturel de B_{st}-modules

$$B_{st} \otimes_{\overline{K}_0} \underline{D}_{pst}(V) \longrightarrow B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

induit un isomorphisme des structures de (φ, N, G)-modules filtrés sous-jacentes ;

iv) comme sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$, $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ est stable par facteur direct, somme directe, produit tensoriel, dual; c'est une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$;

v) la restriction du foncteur $\underline{D}_{pst}$ à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G)$ est pleinement fidèle et induit une $\otimes$-équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G)$ et $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$, la restriction de $\underline{V}_{pst}$ à $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ étant un quasi-inverse ;

vi) tout (φ, N, G)-module filtré admissible est faiblement admissible ;

vii) si D est un (φ, N, G)-module filtré admissible, les sous-objets de D dans $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ sont les sous-objets de D dans $\underline{MF}^{f}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$.

5.6.8. — Remarques : *i*) Soit L une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$. Disons qu'une représentation p-adique V de G est **semi-stable sur** L si $\dim_{L_0} \underline{D}_{st,L}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et notons $\underline{\mathrm{Rep}}_{st,L}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ formée des représentations semi-stables sur L. On voit que, si V est semi-stable sur L, V est semi-stable sur toute extension finie L' de L contenue dans $\overline{K}$ et que $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G)$ est la réunion des $\underline{\mathrm{Rep}}_{st,L}(G)$ pour L parcourant les extensions finies de K contenues dans $\overline{K}$.

ii) De même, si L/K est de plus galoisienne, disons qu'un objet D de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ est **admissible** s'il existe un objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}_{st,L}(G)$ et un isomorphisme de $\underline{D}_{st,L}(V)$ sur D. Notons $\underline{MF}^{ad}_{L/K}(\varphi, N)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ dont les objets sont ceux qui sont admissibles. Alors $\underline{MF}^{ad}_{L/K}(\varphi, N)$ est stable par produit tensoriel et se trouve être une sous-catégorie stable par sous-objet et quotient de $\underline{MF}^{f}_{L/K}(\varphi, N)$. La restriction de $\underline{D}_{st,L}$ à $\underline{\mathrm{Rep}}_{st,L}(G)$ induit une $\otimes$-équivalence entre cette catégorie et $\underline{MF}^{ad}_{L/K}(\varphi, N)$ et la restriction de $\underline{V}_{st,L}$ est un quasi-inverse.

Si V est une représentation p-adique potentiellement semi-stable, V est semi-stable sur L si et seulement si $\underline{D}_{pst}(V)$ est semi-stable sur L (cf. n° 4.2.6). Il s'identifie alors à $\overline{K}_0 \otimes_{L_0} \underline{D}_{st,L}(V)$. Le foncteur

$$D \longmapsto \overline{K}_0 \otimes_{L_0} D$$

induit une équivalence entre la catégorie $\underline{MF}^{ad}_{L/K}(\varphi, N)$ et la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ formée des D tels qu'il existe une représentation p-adique V semi-stable sur L et un isomorphisme de $\underline{D}_{pst}(V)$ sur D.

iii) En remplaçant B_{st} par B_{cris}, on obtient la notion de représentation potentiellement cristalline : pour tout représentation p-adique V de G, on pose $\underline{D}_{cris,L}(V) = (B_{cris} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$ si L est une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$ et $\underline{D}_{pcris}(V) = \lim.\mathrm{ind}.\underline{D}_{cris,L}(V)$. On dit qu'une représentation p-adique V de G_K **a bonne réduction sur** L (resp. est **potentiellement cristalline** si $\dim_{L_0} \underline{D}_{cris,L}(V)$ (resp. $\dim_{\overline{K}_0} \underline{D}_{pcris}(V)) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$. Il revient au même de dire que V est une représentation semi-stable sur L (resp.

potentiellement semi–stable) telle que $N = 0$ sur $\underline{D}_{st,L}(V)$ (resp. $\underline{D}_{pst}(V)$). Pour qu'une représentation V soit potentiellement cristalline, il faut et il suffit qu'il existe L tel que V ait bonne réduction sur L. La sous–catégorie pleine $\underline{\mathrm{Rep}}_{pcris}(G)$ de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ formée des représentations potentiellement cristallines est une sous–catégorie tannakienne; le foncteur $\underline{D}_{pcris}$ induit une $\otimes$–équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{pcris}(G)$ et la sous–catégorie pleine $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ formée des (φ, G)**–modules filtrés admissibles** (qui sont les (φ, N, G)–modules filtrés admissibles sur lesquels $N = 0$). Tout (φ, G)–module filtré admissible est faiblement admissible. La restriction du foncteur $\underline{V}_{pcris}$ qui, à tout (φ, G)–module filtré D associe le sous–$\mathbb{Q}_p[G]$–module de $B_{cris} \otimes_{\overline{K}_0} D$ formé des d tels que $\varphi d = d$ et dont l'image dans $B_{dR} \otimes_{\overline{K}_0} D = B_{dR} \otimes_K (\overline{K} \otimes_{\overline{K}_0} D)^G$ est dans le Fil^0, est un quasi-inverse.

iv) On prendra garde (cf. n° 5.2.3) que, si V est une représentation p–adique potentiellement semi–stable, la structure de (φ, N, G)–module filtré sur $\underline{D}_{pst}(V)$ dépend, en général, du choix de la valuation v et du prolongement log du logarithme usuel. Il en est de même de sa classe d'isomorphisme, ce qui fait qu'il se pourrait que la catégorie $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ aussi (voir toutefois, la conjecture ci–dessous).

En revanche, il résulte facilement des considérations développées au n° 5.2.3 que **la classe d'isomorphisme de $\underline{D}_{pst}(V)$, en tant que (φ, N, G)–module, est indépendante de ces choix**.

5.6.9. Conjecture. — *On a* $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N) = \underline{MF}^{f}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$, autrement dit *tout (φ, N, G)–module filtré faiblement admissible est admissible.*

La validité de cette conjecture équivaut à celle du n° 5.4.4 non seulement pour K mais pour toute extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$.

6. — Applications à la cohomologie

Nous ne donnons ici qu'un très bref aperçu. Outre les articles originaux, le lecteur souhaitant avoir une idée des techniques utilisées consultera avec profit l'exposé [Il90].

6.1. — Théorèmes de comparaison p–adique

6.1.1. — Si X est une variété propre et lisse sur K, les groupes d'hypercohomologie $(H^m_{dR}(X))_{m\in\mathbb{N}}$ du complexe de de Rham $\Omega^{\cdot}_{X/K}$ ont une structure naturelle de K–espaces vectoriels filtrés de dimension finie; tandis que les groupes de cohomologie étale p–adique $(H^m_{ét}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p))_{m\in\mathbb{N}}$ (où $X_{\overline{K}} = X\otimes\overline{K}$ et $H^m_{ét}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p} \lim.\mathrm{proj}._{n\in\mathbb{N}} H^m_{ét}(X_{\overline{K}},\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$) sont munis d'une action naturelle de $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ qui en font des objets de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$.

6.1.2. — Conjecturé dans [Fo82a], le résultat suivant a été prouvé par Faltings ([Fa89])[5] :

THÉORÈME. — *Pour tout $m\in\mathbb{N}$ et toute variété propre et lisse X sur K, on peut définir un isomorphisme de B_{dR}–espaces vectoriels, compatible avec la filtration et l'action de G,*

$$B_{dR}\otimes_K H^m_{dR}(X)\simeq B_{dR}\otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{ét}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p)\ .$$

Autrement dit, *la représentation p–adique $H^m_{ét}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p)$ est de de Rham et le K–espace vectoriel filtré $H^m_{dR}(X)$ s'identifie à $\underline{D}_{dR}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p))$.*

En outre l'isomorphisme construit par Faltings est fonctoriel en X et en K; il commute aux cup–produits, aux applications cycles et à la dualité de Poincaré.

6.1.3. — L'isomorphisme ci–dessus induit un isomorphisme sur les gradués associés. Celui–ci s'énonce :

THÉORÈME. — *Pour tout $m\in\mathbb{N}$ et toute variété propre et lisse X sur K, on peut définir un isomorphisme de B_{HT}–espaces vectoriels, compatible avec la graduation et l'action de G,*

$$B_{HT}\otimes_K H^m_{\mathrm{Hodge}}(X)\simeq B_{HT}\otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{ét}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_p)$$

[5] du moins dans le cas de bonne réduction. Il y a un point obscur dans la preuve de C_{dR} et il n'est pas clair que la démonstration s'applique sans hypothèse restrictive.

(où $H^m_{\mathrm{Hodge}}(X) = \oplus_{0\leq i\leq m} H^{m-i}(X, \Omega^i_{X/K})$). Autrement dit, *la représentation p-adique $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est de Hodge–Tate et le K-espace vectoriel gradué $H^m_{\mathrm{Hodge}}(X)$ s'identifie à $\underline{D}_{HT}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$.*

Tout comme le précédent, cet isomorphisme est fonctoriel (en X et en K) et commute aux cup–produits, aux applications cycles et à la dualité de Poincaré.

Conjecturé par Tate ([Se68]), ce résultat a été démontré dans de nombreux cas particuliers ([Ta67], Raynaud *in* [Bo80], [Fo82b], [BK86], [FM87], [Hy88]) puis par Faltings ([Fa88])[6].

6.1.4. — Pour toute variété propre et lisse X sur K, appellons **modèle entier de X** ou **modèle de X sur $\mathcal{O}_K$** la donnée d'un schéma propre $\mathcal{X}$ sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K muni d'un isomorphisme de $\mathcal{X} \otimes K$ sur X.

On dit que X a **bonne réduction** s'il existe un modèle entier $\mathcal{X}$ de X qui est lisse sur $\mathcal{O}_K$. Etant donné un tel modèle, on peut, pour tout $m \in \mathbb{N}$, considérer le K_0–espace vectoriel $H^m_{cris}(\mathcal{X}_k)$ qui est le m-ième groupe de cohomologie cristalline de la fibre spéciale $\mathcal{X}_k = \mathcal{X} \otimes k$. Il est muni d'une action semi–linéaire de φ et le théorème de comparaison entre cohomologie cristalline de $\mathcal{X}_k$ et cohomologie de de Rham de X ([Be74], [BO78]) permet d'identifier $K \otimes_{K_0} H^m_{cris}(\mathcal{X}_k)$ à $H^m_{dR}(X)$ et munit donc $H^m_{cris}(\mathcal{X}_k)$ d'une structure de φ–module filtré. Celle–ci est indépendante du choix du modèle lisse $\mathcal{X}$ de X sur $\mathcal{O}_K$ ([GM87] ; autrement dit la K_0–structure sur $H^m_{dR}(X)$ qui est $H^m_{cris}(\mathcal{X}_k)$ est indépendante du choix de $\mathcal{X}$, ainsi que l'action de φ sur cette K_0–structure), ce qui nous permet, sans ambiguïté, **de noter** $H^m_{cris}(X)$ l'objet de $\underline{MF}_K(\varphi)$ obtenu.

Conjecturé dans [Fo82a], démontré dans [FM87] lorsque $K = K_0$ et $m \leq p - 1$, le résultat suivant a été prouvé en toute généralité par Faltings ([Fa89]) :

THÉORÈME. — *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et toute variété X propre et lisse sur K ayant bonne réduction, on peut définir un isomorphisme de B_{cris}-modules, compatibles avec l'action de φ, celle de G, et, lorsque l'on étend les scalaires*

[6] voir la note précédente.

à B_{dR}, avec la filtration

$$B_{cris} \otimes_{K_0} H^m_{cris}(X) \simeq B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \ .$$

Autrement dit, *la représentation p-adique $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est cristalline et $H^m_{cris}(X)$ s'identifie à $\underline{D}_{cris}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$, ou encore le φ-module filtré $H^m_{cris}(X)$ est admissible et $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ s'identifie à $\underline{V}_{cris}(H^m_{cris}(X))$.*

Ici encore, cet isomorphisme est fonctoriel (en X et en K) et commute aux cup–produits, aux applications cycles et à la dualité de Poincaré. Lorsque l'on étend les scalaires à B_{dR} on retrouve l'isomorphisme du n° 6.1.2.

6.1.5. — Disons qu'une variété X propre et lisse sur K a **potentiellement bonne réduction** s'il existe une extension finie L de K telle que $X_L = X \otimes L$ a bonne réduction. S'il en est ainsi, les résultats de Berthelot–Ogus et Gillet–Messing rappelés ci–dessus nous permettent d'**associer à** X un (φ, G)-module filtré $H^m_{pcris}(X)$, discret et de dimension finie (si $\mathcal{X}$ est un modèle lisse de $X \otimes L$ sur l'anneau des entiers d'une extension finie galoisienne L de K contenue dans $\overline{K}$, le $\overline{K}_0$–espace vectoriel sous–jacent à $H^m_{pcris}(X)$ est $\overline{K}_0 \otimes_{L_0} H^m_{cris}(\mathcal{X} \otimes k_L)$, où $\mathcal{X} \otimes k_L$ est la fibre spéciale de $\mathcal{X}$). Les propriétés de fonctorialité de l'isomorphisme du théorème précédent impliquent alors :

THÉORÈME. — *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et toute variété X propre et lisse sur K ayant potentiellement bonne réduction, on peut définir un isomorphisme de B_{cris}–modules, compatible avec l'action de φ, celle de G, et, lorsque l'on étend les scalaires à B_{dR}, avec la filtration,*

$$B_{cris} \otimes_{\overline{K}_0} H^m_{pcris}(X) \simeq B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \ .$$

Autrement dit, *la représentation p–adique $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est potentiellement cristalline et $H^m_{pcris}(X)$ s'identifie à $\underline{D}_{pcris}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$, ou encore le (φ, G)–module filtré $H^m_{pcris}(X)$ est admissible et $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ s'identifie à $\underline{V}_{pcris}(H^m_{cris}(X))$.*

Comme les précédents, cet isomorphisme est fonctoriel et commute aux cup–produits, aux applications cycles et à la dualité de Poincaré.

6.2. — La conjecture de monodromie p–adique

6.2.1. Conjecture $\underline{C}_{pst}$. — *Soient $m \in \mathbb{N}$ et X une variété algébrique propre et lisse sur K. Alors la représentation p–adique $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est potentiellement semi–stable.*

C'est l'analogue p–adique du "théorème de monodromie ℓ–adique" de Grothendieck qui dit que, si ℓ est un nombre premier $\neq p$, alors l'action de l'inertie sur $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est quasi–unipotente, i.e., il existe un sous–groupe ouvert du sous–groupe d'inertie I_K de G qui agit de façon unipotente sur $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ (cf. [Exp.I], [Exp.VIII]).

6.2.2. — Supposons le corps résiduel k de K fini. Comme on l'a vu dans l'exposé I, le théorème de monodromie ℓ-adique résulte simplement dans ce cas de ce que l'action de l'inertie est quasi–unipotente sur toute représentation ℓ–adique de G. Grâce à Faltings, on sait que $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est de de Rham et on peut se demander s'il est vrai que toute représentation de de Rham est potentiellement semi–stable. Dans cette direction, Hyodo (non publié) a prouvé que si

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de représentations de de Rham et si V' et V'' sont potentiellement semi–stables, alors V l'est aussi. Autrement dit, si la question posée a une réponse positive, il suffit de le vérifier pour les représentations de de Rham qui sont simples.

Il se peut même que le fait que toute représentation de de Rham soit potentiellement semi–stable soit vrai sans supposer le corps résiduel fini. Je n'ai aucune raison sérieuse d'y croire ni de n'y pas croire !

6.2.3. — Encore grâce à Faltings, on voit que, si la conjecture $\underline{C}_{pst}$ est vraie, il existe sur le $\overline{K}$–espace vectoriel $H^m_{dR}(X_{\overline{K}}) = \overline{K} \otimes_K H^m_{dR}(X)$ une $\overline{K}_0$–structure $H^m_{pst}(X)$ munie d'une structure de (φ, N, G)–module discret de dimension finie. Il est tentant de **conjecturer l'existence d'une théorie de cohomologie $(H^m_{pst}(X))_{m \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans les (φ, N, G)–modules discrets de dimension finie et d'un isomorphisme de comparaison,**

G–équivariant

$$\overline{K} \otimes_{\overline{K}_0} H^m_{pst}(X) \simeq H^m_{dR}(X_{\overline{K}}) \ ,$$

induisant la structure de (φ, N, G)–module filtré sur $H^m_{pst}(X)$, l'isomorphisme de Faltings entre $\underline{D}_{dR}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$ et $H^m_{dR}(X)$ induisant un isomorphisme de (φ, N, G)–modules filtrés entre $\underline{D}_{pst}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$ et $H^m_{pst}(X)$ (et donc aussi un isomorphisme G–équivariant entre $\underline{V}_{pst}(H^m_{pst}(X))$ et $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$).

L'objet de la fin du n° 6.2 est de donner une forme plus précise à cette conjecture et de discuter des cas connus.

6.2.4. — Rappelons ([Ka88a]) qu'un log–schéma est un triplet formé d'un schéma Y, d'un faisceau en monoïdes commutatifs S sur $Y_{ét}$ et d'un morphisme de S sur le monoïde multiplicatif sous–jacent au faisceau structural, le tout assujetti à vérifier des propriétés convenables.

A tout schéma $\mathcal{X}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on peut associer un log–schéma $\mathcal{X}_{\log}$: le schéma sous–jacent est $\mathcal{X}$ et le monoïde est le sous–monoïde du monoïde multiplicatif sous–jacent à $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ formé des sections qui deviennent inversible dès que l'on rend p inversible. On a une notion de morphismes log–lisses de log–schémas (*loc. cit.*).

Disons qu'un schéma X propre et lisse sur K **a bonne** log–**réduction** s'il existe un modèle entier $\mathcal{X}$ de X tel que le morphisme structural

$$\mathcal{X}_{\log} \longrightarrow (\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K)_{\log}$$

soit log–lisse.

S'il en est ainsi, soit $\mathcal{X}_{\log,k}$ la fibre spéciale de $\mathcal{X}_{\log}$ au sens des log–schémas (de façon précise, si $\mathcal{X}_{\log} = (\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}}, \rho)$, si $\mathcal{X}_k$ est la fibre spéciale de $\mathcal{X}$ et si $i : \mathcal{X}_k \to \mathcal{X}$ est l'immersion fermée correspondante, $\mathcal{X}_{\log,k}$ est le log–schéma associé au pré–log–schéma $(\mathcal{X}_k, i^*S_{\mathcal{X}}, i^*(\rho))$, cf. (*loc. cit.*) pour la notion de pré–log–schéma et de log–schéma associé).

Le morphisme de log–schémas $\mathcal{X}_{\log,k} \to (\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K)_{\log,k}$ est log–lisse (remarquer que le schéma sous–jacent à $(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K)_{\log,k}$ est $\operatorname{Spec} k$) et on peut alors définir la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques du $(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K)_{\log,k}$–schéma à coefficients dans K_0 (cf. [Exp. V]). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k})$ est un K_0–espace vectoriel de dimension finie qui a une structure naturelle de

(φ, N)–module. On dispose en outre d'un isomorphisme de comparaison

$$K \otimes_{K_0} H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k}) \simeq H^m_{dR}(X)$$

qui permet de munir $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k})$ d'une structure de (φ, N)–module filtré sur K. Il nous permet aussi de voir $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k})$ comme un sous–K_0–espace vectoriel de $H^m_{dR}(X)$.

6.2.5. — Remarque : Disons que X, variété propre et lisse sur K, a **réduction semi–stable** s'il existe un modèle $\mathcal{X}$ de X sur $\mathcal{O}_K$ qui est semi–stable, i.e. qui est, localement pour la topologie étale, isomorphe à

$$\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[t_1, t_2, \ldots, t_s]/(t_1 t_2 \cdots t_r - \pi)\,,$$

où $r \leq s$ sont des entiers et π est une uniformisante de $\mathcal{O}_K$. Dans ce cas, $\mathcal{X}_{\log} \to (\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K)_{\log}$ est log–lisse et les techniques de Hyodo et Kato s'appliquent.

6.2.6. — Il est raisonnable de conjecturer que l'analogue du résultat de Gillet–Messing rappelé au n° 6.1.4 reste vrai :

CONJECTURE. — *Soit X une variété algébrique propre et lisse sur K ayant bonne* log*–réduction et soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ deux modèles entiers* log*–lisses de X. Vus comme sous–K_0–espaces vectoriels de $H^m_{dR}(X)$, $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k}) = H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}'_{\log,k})$ et cette identification est compatible avec l'action de φ et de N.*

Lorsque cette conjecture est vérifiée, le (φ, N)–module filtré $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k})$ est indépendant du choix du modèle entier log–lisse et on le note $H^m_{st}(X)$.

6.2.7. CONJECTURE. — *Soient $m \in \mathbb{N}$, X une variété propre et lisse sur K ayant bonne* log*–réduction et $\mathcal{X}$ un modèle entier* log*–lisse de X. On peut définir un isomorphisme de B_{st}–modules, compatible avec l'action de φ et de N, et, lorsque l'on étend les scalaires à B_{dR}, avec la filtration,*

$$B_{st} \otimes_{K_0} H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k}) \simeq B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)\ .$$

La véracité de cette conjecture pour tout modèle entier log–lisse $\mathcal{X}$ de X implique la conjecture précédente. On souhaite bien sûr, que l'isomorphisme obtenu lorsque l'on étend les scalaires à B_{dR} soit celui construit par Faltings. Cela revient à dire que, lorsque l'on utilise l'isomorphisme de Faltings pour identifier $H^m_{dR}(X)$ à $\underline{D}_{dR}(H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$, $H^m_{st}(X)$ s'identifie, comme (φ, N)–module, à $(B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))^G$. Autrement dit, **la représentation $H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ devrait être semi–stable et le (φ, N)–module filtré $H^m_{st}(X)$ devrait s'identifier à $\underline{D}_{st}(H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$ (et par conséquent $H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ devrait s'identifier à $\underline{V}_{st}(H^m_{st}(X))$).**

6.2.8. — Un tel isomorphisme a été construit par Kato ([Exp.VI]) lorsque la dimension de X est $< (p-1)/2$, du moins lorsque le modèle $\mathcal{X}$ est semi–stable.

6.2.9. CONJECTURE. — *Soit X une variété propre et lisse sur K. Il existe une extension finie L de K telle que $X_L = X \otimes L$ a bonne* log*–réduction.*

Une forme plus forte de cette conjecture consisterait à demander que X soit potentiellement semi–stable, i.e. qu'il existe une extension finie L de K telle que X_L ait réduction semi–stable. C'est vrai si X est une courbe ou une variété abélienne (cf. [SGA7]). Outre le fait que cette forme est peut–être trop optimiste, elle ne paraît pas très maniable car, si $\mathcal{X}$ est un modèle entier semi–stable de X_L sur $\mathcal{O}_L$ et si L' est une extension finie de L, $\mathcal{X} \otimes \mathcal{O}_{L'}$ n'est en général pas semi–stable sur $\mathcal{O}_{L'}$ (mais $(\mathcal{X} \otimes \mathcal{O}_{L'})_{\log} \to (\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{L'})_{\log}$ est log–lisse).

6.2.10. — Si $\mathcal{X}$ est un modèle entier de X_L, log–lisse sur $(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L)_{\log}$, et si L' est une extension finie de L, alors $(\mathcal{X} \otimes \mathcal{O}_{L'})_{\log}$ est log–lisse sur $(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{L'})_{\log}$ et $H^m_{cris,\log}((\mathcal{X} \otimes \mathcal{O}_L)_{\log,k})$ s'identifie au (φ, N)–module filtré sur L' déduit par extension des scalaires de $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k})$. Ceci joint aux conjectures 6.2.6 (pour toute extension finie de K) et 6.2.9 doit permettre d'associer à toute variété algébrique X propre et lisse sur K et à tout entier m un (φ, N, G)–module filtré $H^m_{pst}(X)$, discret et de dimension finie (si L est une extension finie galoisienne de K telle que X_L a bonne log–réduction, le groupe $G_{L/K}$ opère de façon naturelle sur $H^m_{st}(X_L)$ qui devient un $(\varphi, N, G_{L/K})$–

module filtré et $H^m_{pst}(X)$ est le (φ, N, G)–module filtré déduit par extension des scalaires).

En appliquant les discussions du n° 6.2.7 à une extension finie galoisienne L de K convenable, on voit donc que **l'isomorphisme de Faltings devrait induire un isomorphisme de (φ, N, G)–modules**

$$B_{st} \otimes_{K_0} H^m_{pst}(X) \simeq B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \ ,$$

autrement dit, la représentation $H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ devrait être potentiellement semi–stable et $H^m_{pst}(X)$ devrait s'identifier à $\underline{D}_{pst}(H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$ (ou encore le (φ, N, G)–module filtré $H^m_{pst}(X)$ devrait être admissible et $H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ devrait s'identifier à $\underline{V}_{st}(H^m_{pst}(X))$).

6.2.11. — Remarque : Soient $m \in \mathbb{N}$ et X une variété propre et lisse sur K. L'existence conjecturale du (φ, N)–module filtré $H^m_{pst}(X)$, muni de l'identification de $H^m_{dR}(X)$ à $(\overline{K} \otimes_{\overline{K}_0} H^m_{pst}(X))^{G_K}$ implique, puisque l'action de N sur $H^m_{pst}(X)$ est linéaire et commute à l'action de G_K que N opère sur $H^m_{dR}(X)$. On voudrait pouvoir définir *"directement"* cet endomorphisme nilpotent du K–espace vectoriel $H^m_{dR}(X)$; on devrait pouvoir y arriver en utilisant des techniques rigides analytiques. On prendra garde toutefois que cet opérateur N dépend du choix d'une valuation v de K (cf. n° 5.2.4).

6.3. — Le cas des motifs

6.3.1. — Il n'est pas dans notre intention de tenter de donner ici une définition de la catégorie des motifs (mixtes) sur K (cf. [De89], [Ja90] pour des commentaires généraux à ce sujet).

A un tel motif mixte doit être associé (entre autres) sa réalisation p–adique $H_p(M)$ qui est un $\mathbb{Q}_p$–espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K et sa réalisation de de Rham qui est un K–espace vectoriel filtré de dimension finie. On s'attend

i) à ce qu'il existe **un isomorphisme de comparaison**

$$B_{dR} \otimes H_{dR}(M) \simeq B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H_p(M) \ ,$$

compatible à l'action de G et à la filtration, autrement dit à ce que $H_p(M)$ **soit de de Rham** et à ce que $H_{dR}(M)$ **s'identifie à** $\underline{D}_{dR}(H_p(M))$;

ii) mieux, à ce qu'il **existe une "réalisation"** $H_{pst}(M)$ **de** M **dans la catégorie des** (φ, N, G_K)**–modules filtrés discrets de dimension finie,** le K–espace vectoriel filtré $H_{dR}(M)$ s'identifiant à $(\overline{K}\otimes_{\overline{K}_0} H_{pst}(M))^{G_K}$, **et un isomorphisme de comparaison**

$$B_{st} \otimes_{\overline{K}_0} H_{pst}(M) \simeq B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_p(M) ,$$

compatible avec toutes les structures, autrement dit à ce que la représentation $H_p(M)$ **soit potentiellement semi–stable** et à ce que $H_{pst}(M)$ **s'identifie à** $\underline{D}_{pst}(H_p(M))$ (donc à ce que $H_{pst}(M)$ soit admissible et à ce que $H_p(M)$ s'identifie à $\underline{V}_{pst}(M)$)).

Ceci conduit en particulier à la notion de motif *"potentiellement semi–stable"* (resp. *"semi–stable"*, *"ayant bonne réduction"*, *"ayant potentiellement bonne réduction"* sur K) : il s'agit d'un motif M tel que la représentation $H_p(M)$ est potentiellement semi–stable (resp. semi–stable, cristalline, potentiellement cristalline) (conjecturalement, tout motif est donc potentiellement semi–stable). On prendra garde que, si X est une variété propre et lisse sur K qui a bonne réduction (resp. potentiellement bonne réduction, réduction semi–stable), alors le motif $M = H^*(X)$ a bonne réduction (resp. potentiellement bonne réduction, réduction semi–stable (au moins conjecturalement dans ce dernier cas)), mais qu'il devrait être facile de construire des exemples montrant que la réciproque est fausse en général.

6.3.2. — L'isomorphisme de comparaison pose déjà un problème pour un *"motif pur"*. Quitte à faire une *"torsion à la Tate"*, les différentes réalisations de ce motif M apparaissent chacune comme un morceau de la réalisation cohomologique correspondante d'une variété propre et lisse convenable X sur K. Par exemple, $H_p(M)$ s'identifie à un facteur direct de la représentation p–adique $H^*_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ et $H_{dR}(M)$ s'identifie à un facteur direct de $H^*_{dR}(X)$.

Grâce à Faltings, $H_p(M)$ est donc de de Rham et la question est de savoir si, dans l'isomorphisme de comparaison de Faltings, $\underline{D}_{dR}(H_p(M)) \subset$

$\underline{D}_{dR}(H^*_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) = H^*_{dR}(X)$ est bien $H_{dR}(M)$.

Lorsque le motif est défini *"à la Grothendieck"* cela résulte de la compatibilité de l'isomorphisme de Faltings aux applications cycles. Dans la pratique, ce n'est pas toujours le cas et on est conduit soit à prouver que le motif donné est bien obtenu à partir de correspondances, soit à trouver un argument direct. Ces deux approches ont été menées à bien dans le cas du motif associé à une forme modulaire ([Sc90], Faltings, non publié, voir cependant [Fa87], [Fa92a] et [Fa92b]).

Plus généralement, si l'on sait que $H^*_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est potentiellement semi-stable, si l'on sait définir $H^*_{pst}(X)$ et un isomorphisme $H^*_{pst}(X) \simeq \underline{D}_{pst}(H^*_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$, on voudrait savoir dire quel est le morceau du (φ, N, G)-module $H^*_{pst}(X)$ qui est $\underline{D}_{pst}(H_p(M))$. Dans le cas d'un motif associé à une forme modulaire de niveau premier à p les techniques de Scholl et de Faltings dont on vient de parler permettent de le faire. Un travail récent de Faltings ([Fa92b]) doit permettre de s'affranchir de cette restriction sur le niveau.

6.3.3. — Dans le cas général, si l'on veut être précis, on manque d'une bonne définition de la catégorie des motifs mixtes sur K. Toutefois certains résultats de Faltings sur la cohomologie des variétés ouvertes et sur la cohomologie *"à coefficients"* ([Fa90], [Fa92a], [Fa92b]) fournissent des exemples de représentations p-adiques qui sont de de Rham (et probablement aussi potentiellement semi-stables) et qui devraient être associées à des motifs mixtes sur K, mais pas toujours à des motifs purs.

Enfin, les 1-motifs de Deligne ([De74]) sur K forment une catégorie bien définie, qui devrait être une sous-catégorie pleine de la catégorie des motifs mixtes sur K. Pour un tel 1-motif M, on sait définir sa réalisation $\underline{H}_{pst}(M)$ (cf. [Exp.VII], [Fo93]) et on dispose de l'isomorphisme de comparaison souhaité entre $\underline{V}_{pst}(H_{pst}(M))$ et $H_p(M)$ ([Fo93]).

RÉFÉRENCES

[Be74a] P. BERTHELOT. — Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p \neq 0$, Lecture Notes in Maths 407, Springer, Berlin, 1974.

[Be75] P. BERTHELOT. — Slopes of Frobenius in crystalline cohomology, **in** *Algebraic Geometry* (Arcata 1974), *Proc. of Symposia in Pure Maths.*, vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, 1975, 315–328.

[Bo78] P. BERTHELOT and A. OGUS. — Notes on crystalline cohomology, Math. Notes, Princeton University Press, 1978.

[BK86] S. BLOCH and K. KATO. — p–adic étale cohomology, **Pub. Math. IHES**, 63 (1986), 107–152.

[Bo80] F. BOGOMOLOV. — Sur l'algébricité des représentations ℓ–adiques, CRAS, Paris 290 (1980), 701–703.

[De74] P. DELIGNE. — Théorie de Hodge III, **Pub. Math. IHES**, 44 (1974) 5–77.

[De89] P. DELIGNE. — Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, **in** Galois Groups over $\mathbb{Q}$, MSRI Publications 16, Springer 1989, 79–297.

[De90] P. DELIGNE. — Catégories tannakiennes, **in** *The Grothendieck Festschrift, vol. II*, Birkhäuser, Boston, 1990, 111–195.

[DM82] P. DELIGNE and J.S. MILNE. — Tannakian categories, **in** *Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties*, Lect. Notes in Math. 900, Springer, Berlin, 1982, 101–228.

[Fa87] G. FALTINGS. — Hodge–Tate Structures and Modular Forms, **Math. Annal.** 278 (1987), 133–149.

[Fa88] G. FALTINGS. — p–adic Hodge Theory, **Journal of the A.M.S.**, 1 (1988), 255–299.

[Fa89] G. FALTINGS. — Crystalline cohomology and p–adic Galois representations, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins University Press, 1989, 25–80.

[Fa90] G. FALTINGS. — F–isocrystals on open varieties, results and conjectures, **in** The Grothendieck Festschrift, vol. II, Birkhäuser, Boston, 1990, 219–248.

[Fa92a] G. FALTINGS. — Crystalline Cohomology semi–stable curves, and p–adic Galois representations, Journal of Algebraic Geometry 1 (1992), 61–82.

[Fa92b] G. FALTINGS. — Crystalline Cohomology of semi–stable curves – The $\mathbb{Q}_p$–theory, preprint, Princeton University, 1992.

[Fo79] J.–M. FONTAINE. — Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti–Tate, **in** *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes* (III), Astérisque 65, Soc. Math. de France, Paris, 1979, 3–80.

[Fo82a] J.–M. FONTAINE. — Sur certains types de représentations p–adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti–Tate, **Ann. of Maths**, 115 (1982), 529–577.

[Fo82b] J.–M. FONTAINE. — Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, **Inv. Math.** 65 (1982), 379–409.

[Fo83] J.–M. FONTAINE. — Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p–adiques, **in** *Algebraic Geometry Tokyo–Kyoto*, Lecture Notes in Maths 1016, Springer, Berlin, 1983, 86–108.

[Fo91] J.–M. FONTAINE. — Représentations p–adiques des corps locaux, **in** *The Grothendieck Festschrift, vol. II*, Birkhäuser, Boston, 1991, 249–309.

[Fo93] J.–M. FONTAINE. — Log–motifs et 1–motifs sur les corps p–adiques, en préparation.

[FL82] J.–M.. FONTAINE et G. LAFFAILLE. — Construction de représentations p–adiques, **Ann. Scient. E.N.S.**, 15 (1982), 547–608.

[FM87] J.–M. FONTAINE and W. MESSING. — p–adic Periods and p–adic étale Cohomology, **Contemporary Mathematics**, 67 (1987), 179–207.

[GM87] H. GILLET and W. MESSING. — Cycle classes and Riemann-Roch for Crystalline cohomology, **Duke Math. J.**, 55 (1987), 179–207.

[Hy88] O. HYODO. — A note on p–adic étale cohomology in the semi–stable reduction case, **Inv. Math.** 91 (1988), 543–557.

[Il90] L. ILLUSIE. — Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p–adique, Séminaire Bourbaki, juin 1990.

[Ja90] U. JANNSEN. — Mixed motives and algebraic K–theory, Lectures Notes in Math. 1400, Springer, Berlin 1990.

[Ka88a] K. KATO. — Logarithmic structures of Fontaine–Illusie, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins University Press, 1989, 191–224.

[La80] G. LAFFAILLE. — Groupes p–divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié, **Bull. Soc. Math. France**, 108 (1980), 187–206.

[Sa72] N. SAAVEDRA RIVANO. — *Catégories Tannakiennes*, Lectures Notes in Maths 265, Springer, Berlin 1972.

[Sc90] A. SCHOLL. — Motives for modular forms, Invent. Math. 100 (1990), 419–430.

[Sen73] S. SEN. — Lie algebras of Galois groups arising from Hodge–Tate modules, **Ann. of Math.**, 97 (1973), 160–170.

[Sen80] S. SEN. — Continuous Cohomology and p–adic Galois Representations, **Inv. Math.**, 82 (1980), 89–116.

[Se67] J.–P. SERRE. — Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p–divisibles, *Oeuvres, vol. II*, Springer, Berlin, 1986, 325–338.

[Se68] J.–P. SERRE. — Résumé des cours de 1967–68, *Oeuvres, vol. II*, Springer, Berlin, 1986, 528–531.

[Se89] J.–P. SERRE. — *Abelian ℓ–adic Representations and Elliptic Curves*, 2° éd., Addison–Wesley, Redwood City 1989.

[Ta67] J. TATE. — p–divisible Groups, **in** *Proc. of a conf. on local Fields*, NUFFIC Summer School, Driebergen, Springer, Berlin, 1967, 158–183.

[SGA7] A. GROTHENDIECK *et al.* — *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois–Marie 1967–69, Lecture Notes in Maths 288, Springer, Berlin 1972.

[Exp.I] L. ILLUSIE. — Autour du théorème de monodromie locale, exposé I, *dans ce volume.*

[Exp.II] J.–M. FONTAINE. — Le corps des périodes p–adiques, exposé II, *dans ce volume.*

[Exp.IV] B. PERRIN-RIOU. — Représentations p–adiques ordinaires, exposé IV, *dans ce volume.*

[Exp.V] O. HYODO and K. KATO. — Semi–stable reduction and crystalline cohomology with log poles, exposé V, *dans ce volume.*

[Exp.VI] K. KATO. — Semi–stable reduction and p–adic étale cohomology, exposé VI, *dans ce volume.*

[Exp.VII] M. RAYNAUD. — 1–Motifs et monodromie géométrique, exposé VII, *dans ce volume.*

[Exp.VIII] J.–M. FONTAINE. — Représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables, exposé VIII, *dans ce volume.*

Jean–Marc Fontaine
URA D0752 du C.N.R.S.
Mathématiques, Bât. 425
Université Paris–Sud
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE

Exposé IV

REPRÉSENTATIONS p–ADIQUES ORDINAIRES

par **Bernadette Perrin–Riou** (avec un appendice par Luc Illusie)

1. — Présentation

1.1. — Soient k un corps parfait de caractéristique p, K_0 un corps local complet de caractéristique 0 de corps résiduel k, non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ et K une extension finie de K_0 totalement ramifiée sur K_0. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, une clôture algébrique $\overline{k}$ de k et on note G_K le groupe de Galois de $\overline{K}/K$. Soit I_K le sous–groupe d'inertie de G_K. On note σ l'endomorphisme de Frobenius absolu sur K_0 et sur k. On note P_0 le corps des fractions de $W(\overline{k})$.

Nous sommes intéressés ici dans un certain type de représentations p–adiques de G_K dites ordinaires et en leur description complète en termes de certains (φ, N)–modules filtrés. Ces représentations p–adiques interviennent en géométrie algébrique. Bloch–Kato puis Hyodo ont en effet montré que sous certaines hypothèses sur la variété X, les représentations p–adiques données par la cohomologie étale de la variété X sont ordinaires (cf. l'appendice de L. Illusie). D'un autre point de vue, Greenberg [G89] a élaboré une théorie d'Iwasawa pour les représentations p–adiques ordinaires qui généralise celle déjà connue pour les variétés abéliennes ordinaires et pour le module de Tate cyclotomique. Nous n'en dirons pas plus ici dans ces deux directions. Tous les résultats du texte qui suit sont dus à J.–M. Fontaine.

1.2. — Notons χ le caractère cyclotomique, c'est–à–dire le caractère à valeurs dans $\mathbb{Z}_p^\times$ donnant l'action de G_K sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. Une représentation p–adique V de G_K est dite **ordinaire** s'il existe une filtration $(Fil^iV)_{i\in\mathbb{Z}}$ de V, décroissante exhaustive et séparée, par des sous–espaces Fil^iV stables par G_K et telle que le groupe d'inertie I_K agit sur $Fil^iV/Fil^{i+1}V$ par χ^i. Remarquons que V est ordinaire si et seulement si sa restriction à I_K est ordinaire.

Pour la commodité du lecteur, nous reprenons quelques définitions tirées des exposés II et III de ce volume. Un (φ, N)–**module filtré sur** K est un K_0–espace vectoriel D muni d'un isomorphisme σ–linéaire φ, d'un endomorphisme N vérifiant

$$N\varphi = p\varphi N$$

et tel que le K–espace vectoriel $D_K = K \otimes_{K_0} D$ soit muni d'une filtration par des K–sous–espaces vectoriels $(D_K)^i$ qui soit décroissante, exhaustive et séparée. Les **nombres de Hodge** d'un (φ, N)–module filtré D de dimension finie sont les nombres de Hodge de la filtration

$$h_H(D,i) = \dim_K (D_K)^i/(D_K)^{i+1}\,.$$

Les **nombres de Newton** du (φ, N)–module filtré D sont ceux du φ–isocristal sous–jacent, c'est–à–dire que si $\alpha = r/s$ est un rationnel et si $D_{[\alpha]}$ est le sous–K_0–espace vectoriel de $P_0 \otimes_{K_0} D$ engendré par les x vérifiant $\varphi^s x = p^r x$, on a

$$h_N(D,\alpha) = \dim_{K_0} D_{[\alpha]}\,.$$

Posons

$$t_N(D) = \textstyle\sum_\alpha \alpha\; h_N(D,\alpha)$$

et

$$t_H(D) = \textstyle\sum_i i\; h_H(D,i)\,.$$

Un (φ, N)–module filtré D de dimension finie est dit **faiblement admissible** si

$$t_N(D) = t_H(D)$$

et si pour tout sous–K_0–espace vectoriel D' de D stable par φ et par N, on a

$$t_H(D') \le t_N(D')$$

où $D'_K = K \otimes_{K_0} D'$ est muni de la filtration induite par celle de D_K. Un (φ, N)–module filtré est dit **ordinaire** s'il est faiblement admissible et si ses nombres de Hodge et de Newton coïncident. Une manière concrète de décrire un (φ, N)–module filtré ordinaire est la suivante. Posons $\overline{D} = P_0 \otimes_{K_0} D$, $\overline{D}_{[r]} = P_0 \otimes_{K_0} D_{[r]}$. Alors, $D^{[r]} = D \cap \overline{D}_{[r]}$ est un K_0–sous–espace vectoriel de D dont la dimension est égale à $h_N(D, r)$ et qui est stable par φ : en effet, $\overline{D}$ est un P_0–espace vectoriel muni d'une action naturelle de G_k et $\overline{D}_{[r]}$ en est un sous–espace vectoriel dont on vérifie facilement qu'il est stable par G_k ; on en déduit par descente galoisienne [S68] qu'il provient d'un K_0–espace vectoriel qui est $D^{[r]}$. On montrera en 2.6 que le (φ, N)–module filtré D est ordinaire si et seulement si les nombres de Newton de D sont des entiers et si l'on a

$$D_K = (D_K)^i \bigoplus \left(\bigoplus_{j<i} (D^{[j]})_K \right) \tag{1}$$

pour tout entier i. Cela signifie aussi qu'il existe un réseau M de D, c'est–à–dire un sous–$W(k)$–module libre de D de rang maximal, et une décomposition de M en somme directe

$$M = \oplus M^{[i]}$$

telle que $p^{-i}\varphi$ induise sur $M^{[i]}$ un automorphisme (σ–linéaire) et telle que, si $D^{[i]} = K_0 \otimes_{W(k)} M^{[i]}$, on ait

$$D_K = (D_K)^i \bigoplus \left(\bigoplus_{j<i} (D^{[j]})_K \right).$$

Il est clair que le (φ, N)–module filtré D est ordinaire si et seulement si le (φ, N)–module filtré $P_0 \otimes_{K_0} D$ déduit par extension des scalaires est ordinaire.

1.3. — On renvoie à l'exposé II pour la définition des anneaux de périodes p–adiques B_{dR}, B_{cris} et B_{st}. Choisissons une valuation v de $\overline{K}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Rappelons que B_{st} contient B_{cris}, est muni d'une action de G_K, d'une structure de K_0–espace vectoriel, d'un endomorphisme φ σ–linéaire commutant à l'action de G_K, d'une filtration décroissante, d'une B_{cris}–dérivation N telle que $N\varphi = p\varphi N$ (Exp. II, 3.2). Il existe un élément t de B_{cris} engendrant $\mathbb{Z}_p(1)$ tel que $\varphi t = pt$ et un élément u de B_{st} tel que B_{st} est une algèbre de polynômes sur B_{cris} en u, N est alors la B_{cris}–dérivation tel que $Nu = 1$ et on a $\varphi u = pu$. Enfin, le choix d'un logarithme de $\overline{K}^{\times}$ prolongeant le logarithme usuel permet de définir un plongement

$$K \otimes_{K_0} B_{st} \longrightarrow B_{dR}$$

(Exp. II, 4.2.4). On note encore u l'image de u dans B_{dR}.

1.4. — Si V est une représentation p-adique, on pose

$$\underline{D}^*_{st}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B_{st})^{G_K} .$$

Le K_0-espace vectoriel $\underline{D}^*_{st}(V)$ est muni d'une structure naturelle de (φ, N)-module filtré induite par celle de B_{st} et on a $\dim_{\mathbb{Q}_p} V \geq \dim_{K_0} \underline{D}^*_{st}(V)$. Si D est un (φ, N)-module filtré, on pose

$$\underline{V}^*_{st}(D) = \{x \in \mathrm{Hom}_{K_0}(D, B_{st}) \text{ t.q. } \varphi x = x,\ Nx = 0,$$
$$1 \otimes x \in (K \otimes_{K_0} \mathrm{Hom}_{K_0}(D, B_{st}))^0\}$$

(le K-espace vectoriel $K \otimes_{K_0} \mathrm{Hom}_{K_0}(D, B_{st})$ est muni de la filtration naturelle $(K \otimes_{K_0} \mathrm{Hom}_{K_0}(D, B_{st}))^i$). C'est aussi le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des homomorphismes de D dans B_{st} dans la catégorie des (φ, N)-modules filtrés. Le groupe de Galois G_K agit sur $\underline{V}^*_{st}(D)$ et cette action en fait une représentation p-adique de G_K.

Une représentation p-adique V est dite **semi-stable** si

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{K_0} \underline{D}^*_{st}(V) .$$

Le (φ, N)-module filtré D est dit **admissible** s'il existe une représentation p-adique semi-stable V telle que $D = \underline{D}^*_{st}(V)$.

On pose de même $\underline{D}^*_{cris}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B_{cris})^{G_K}$. C'est un φ-module filtré ($N = 0$). La représentation p-adique V est dite **cristalline** si

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{K_0} \underline{D}^*_{cris}(V) .$$

Le φ-module filtré D est dit **admissible** s'il existe une représentation p-adique cristalline V telle que $D = \underline{D}^*_{cris}(V)$. Une représentation p-adique cristalline (resp. un φ-module filtré admissible) est semi-stable (resp. un (φ, N)-module filtré admissible).

1.5. THÉORÈME. — *Supposons que K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Il existe une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des représentations p-adiques ordinaires de dimension finie de G_K et la catégorie des (φ, N)-modules filtrés ordinaires de dimension finie donnée par*

$$D = \underline{D}^*_{st}(V)\,, \quad V = \underline{V}^*_{st}(D)\,.$$

En particulier, toute représentation p-adique (resp. (φ, N)-module filtré) ordinaire de dimension finie est semi-stable (resp. admissible).

Nous démontrons dans le paragraphe 2 que tout (φ, N)-module filtré ordinaire est admissible et ceci sans restriction sur le corps K. Dans le paragraphe 3, nous étudions les extensions semi-stables de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(j)$ pour tout entier j lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ sans restriction sur K. Dans le paragraphe 4, nous démontrons que toute représentation p-adique ordinaire est semi-stable.

2. — (φ, N)-modules filtrés ordinaires

2.1. — Soit $i \in \mathbb{Z}$. Posons $\mathbb{Q}_p(i)$ la représentation p-adique de dimension 1 donnée par le caractère χ^i. Si V est une représentation p-adique, on pose $V(i) = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(i)$. On note $K_0[i]$ le (φ, N)-module filtré donné par K_0, $\varphi(1) = p^i \cdot 1$, $(K_0[i]_K)^i = K_0[i]$, $(K_0[i]_K)^{i+1} = 0$. Si D est un (φ, N)-module filtré, on pose $D[i] = D \otimes K_0[i]$ où le produit tensoriel est pris dans la catégorie des (φ, N)-modules filtrés.

2.2. LEMME. — *Si V est une représentation p-adique, V est semi-stable si et seulement si $V(i)$ est semi-stable. Si D est un (φ, N)-module filtré, D est admissible si et seulement si $D[i]$ est admissible. On a de plus*

$$\underline{D}^*_{st}(V(i)) = \underline{D}^*_{st}(V)[i] \quad et \quad \underline{V}^*_{st}(D[i]) = \underline{V}^*_{st}(D)(i)\,.$$

Démonstration. Les deux premières affirmations sont claires : on a

$$x \in \underline{V}^*_{cris}(D[i]) \iff x \in \mathrm{Hom}(D[i], B_{cris})^0 \quad \text{et} \quad \varphi x = x$$

et on écrit $x = t^{-i}y$ avec $y \in \mathrm{Hom}(D, B_{cris})^0$ et $\varphi y = p^i y$. On montre de même l'autre égalité.

2.3. — Regardons d'abord le cas particulier facile et bien connu où D a un seul nombre de Hodge non nul (voir Exp. III, 5.4.1). La propriété $N\varphi = p\varphi N$ implique que N est nul.

LEMME. — *Soit D un φ-module filtré tel que $(D_K)^i = D_K$ et $(D_K)^{i+1} = 0$. Alors D est faiblement admissible si et seulement s'il existe un réseau de D sur lequel $p^{-i}\varphi$ agit comme un automorphisme. Il est alors admissible et l'inertie I_K agit sur $V^*_{cris}(D)$ par χ^i. Réciproquement, si V est une représentation p-adique sur laquelle I_K agit comme χ^i, alors* $\dim_{K_0} \underline{D}^*_{cris}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ *et* $\underline{D}^*_{cris}(V)^i_K = \underline{D}^*_{cris}(V)_K, \underline{D}^*_{cris}(V)^{i+1}_K = 0$.

Démonstration. On se ramène par twist au cas où $i = 0$. Dire que D est faiblement admissible est équivalent à dire que D a un seul nombre de Newton non nul $h_N(D,0)$. Il existe donc une base $d_1, \ldots, d_r$ de D et des éléments $a_1, \ldots, a_d$ de $W(\overline{k})$ tels que

$$\varphi(a_j \otimes d_j) = a_j \otimes d_j \quad (j = 1, \ldots, d).$$

On en déduit facilement que φ est un isomorphisme du sous-$W(k)$-module de D engendré par $d_1, \ldots, d_r$.

Calculons $\underline{V}^*_{cris}(D)$; on a

$$x \in \underline{V}^*_{cris}(D) \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Hom}_{K_0}(D, B_{cris})^0 \quad \text{et } \varphi x = x .$$

Il existe une base $\{d_1, \ldots, d_r\}$ de D telle que

$$(\varphi - 1)(d_k) = \sum_{j=1}^{r} a_{kj} d_j$$

où la matrice $A = ((a_{kj}))$ appartient à $Gl_r(W(k))$. Les équations

$$(\varphi x)(d_k) = x(d_k)$$

se traduisent alors par

$$\sum_{j=1}^{r} a^{\sigma}_{kj} \varphi(x(d_j)) = x(d_k) ,$$

c'est-à-dire si $X = {}^t(x(d_1), \ldots, x(d_r))$ par $A^\sigma X^\sigma = X$. On regarde alors l'équation $B^{-1}A^\sigma B^\sigma = 1$ pour $B \in M_r(Fil^0 B_{cris})$. Elle admet une solution dans $Gl_r(P_0)$ grâce à la nullité de $H^1(P_0/K_0, Gl_r(P_0))$ ([S68]) puisque la restriction de φ à P_0 est l'homomorphisme de Frobenius; deux solutions diffèrent d'une élément de $Gl_r(\mathbb{Q}_p)$. On en déduit que l'espace des solutions de $B^{-1}A^\sigma B^\sigma = 1$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension r et que si $x \in \underline{V}^*_{cris}(D)$, les valeurs de x appartiennent à P_0. Il est alors clair que, si $\tau \in I_K$, $\tau(x) = x$, ce qu'il fallait démontrer.

2.4. Lemme (Exp. III, 4.4.4). — *Soit une suite exacte de (φ, N)-modules filtrés*

$$0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D \longrightarrow D_2 \longrightarrow 0$$

dont deux d'entre eux sont faiblement admissibles, alors le troisième l'est aussi.

2.5. Lemme. — *Soit D un (φ, N)-module filtré ordinaire et soit r le plus grand entier tel que $D_K^r = D_K$. Alors $D^{[r]}$ est un sous-objet de D dans la catégorie des (φ, N)-modules filtrés. Il est ordinaire. Le quotient de D par $D^{[r]}$ est un (φ, N)-module filtré ordinaire.*

Démonstration. Par hypothèse, les polygones de Hodge et de Newton de D sont égaux. En particulier, les nombres de Newton de D sont des entiers et on a

$$\dim_{K_0} D^{[r]} = \dim_K (D_K)^r - \dim_K (D_K)^{r+1} .$$

L'endomorphisme φ de D laisse stable le K_0-espace vectoriel $D^{[r]}$, l'endomorphisme N est nécessairement nul sur $D^{[r]}$. En effet la propriété $p\varphi N = N\varphi$ implique que l'image de $D^{[r]}$ par N est contenue dans $D^{[r-1]}$ et $D^{[r-1]}$ est nul. Montrons que

$$D_K = D_K^{r+1} \oplus (D^{[r]})_K .$$

Supposons que cela n'est pas vrai; $D^{[r]}$ est un sous-K_0-espace vectoriel de D stable par φ et par N; lorsqu'on munit $(D^{[r]})_K$ de la filtration induite par celle de D, on a

$$h_N(D^{[r]}, r) = \dim_{K_0} D^{[r]}\,, \quad h_N(D^{[r]}, r+j) = 0 \quad \text{pour tout } j > 0\,,$$

$$h_H(D^{[r]}, r+j) > 0 \quad \text{pour un } j > 0\,.$$

On en déduit que

$$t_H(D^{[r]}) = r\ \dim_{K_0} D^{[r]} + \sum_{i>r}(i-r)h_H(D^{[r]}, i) > t_N(D^{[r]}) = r\ \dim_{K_0} D^{[r]}\,,$$

ce qui contredit l'hypothèse de faible admissibilité de D.

La filtration de $(D^{[r]})_K$ induite par celle de D_K en fait un (φ, N)-module filtré faiblement admissible et le quotient est un (φ, N)-module filtré faiblement admissible. Il est clair alors que les nombres de Hodge et de Newton de $D^{[r]}$ (resp. de $D/D^{[r]}$) sont égaux, c'est-à-dire que $D^{[r]}$ et $D/D^{[r]}$ sont ordinaires.

2.6. — Montrons que le (φ, N)-module filtré D est ordinaire si et seulement si les nombres de Newton de D sont des entiers et si l'on a

$$D_K = (D_K)^i \bigoplus \Big(\bigoplus_{j<i} (D^{[j]})_K\Big) \tag{1}$$

pour tout entier i. Soit D un (φ, N)-module filtré ordinaire. Les nombres de Newton de D sont des entiers et on montre facilement par récurrence à l'aide de 2.5 que l'on a (1) pour tout entier i. Réciproquement, l'égalité (1) implique que les nombres de Hodge et de Newton de D sont égaux. En particulier, on a $t_N(D) = t_H(D)$. Si D' est un sous-espace vectoriel de D stable par φ et N, on a une injection de $(D'^{[j]})_K$ dans D_K^j/D_K^{j+1}. La filtration de D'_K étant la filtration induite par celle de D', on en déduit facilement que les nombres de Newton de D' sont inférieurs ou égaux aux nombres de Hodge de D' et donc que $t_N(D') \leq t_H(D')$, ce qui montre que D est faiblement admissible.

2.7. — Notons $\mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(D, B_{st})$ le K_0-espace vectoriel des classes d'isomorphismes d'extensions de (φ, N)-modules filtrés de D par B_{st}.

LEMME. —

i) *On a* $\mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(K_0[i], B_{st}) = 0$ *pour tout* i.

ii) *Si* D *est un* (φ, N)*–module filtré faiblement admissible ayant un seul nombre de Hodge non nul, toute extension de* (φ, N)*–modules filtrés de* D *par* B_{st} *est scindée, i.e.*

$$\mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(D, B_{st}) = 0\,.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que (ii) se déduit facilement de (i) (nullité de $H^1(P_0/K_0, GL_d(W(\overline{k}))))$. Pour (i), on se ramène par twist au cas où $i = 0$. On a besoin des propriétés suivantes de B_{st} et B_{cris} :

a) l'application $\varphi - 1 : B_{st} \to B_{st}$ est surjective ;

b) l'application $N : (B_{st})^{\varphi=1} \to (B_{st})^{\varphi=p^{-1}}$ est surjective ;

c) l'application $\varphi - 1 : Fil^0 B_{cris} \to B_{cris}$ est surjective.

Pour (b), on écrit $\alpha \in (B_{st})^{\varphi=p^{-1}}$ sous la forme $\alpha = \sum\limits_{n \geq 0} \alpha_n u^n$; les α_n vérifient $p^{n+1}\varphi\alpha_n = \alpha_n$. Alors, $\beta = \sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n u^{n+1}/(n+1)$ appartient à $(B_{st})^{\varphi=1}$ et vérifie $N\beta = \alpha$. L'assertion (c) est démontrée dans Exp. II, théorème 5.3.7. Pour (a), on remarque que (c) implique que pour tout entier n, l'application $(p^n\varphi - 1) : B_{cris} \to B_{cris}$ est surjective. On en déduit (a) en remarquant que

$$(\varphi - 1)\Big(\sum_{n\geq 0} \alpha_n u^n\Big) = \sum_{n \geq 0} (p^n\varphi - 1)\alpha_n u^n\,.$$

Soit X une extension de (φ, N)–modules filtrés de K_0 par B_{st}. Montrons qu'elle est scindée. Soit $\widehat{1}$ un relèvement dans X de $1 \in K_0$. D'après (a), il existe $\alpha \in B_{st}$ tel que

$$(\varphi - 1)\alpha = (\varphi - 1)\widehat{1} \in B_{st}\,.$$

Posons $\widehat{1}_\varphi = \widehat{1} - \alpha$. C'est un relèvement de 1 dans X tel que $\varphi(\widehat{1}_\varphi) = \widehat{1}_\varphi$ et X est scindée en tant que $K_0[\varphi]$–module. Soit $\beta = N(\widehat{1}_\varphi)$. C'est un élément de B_{st} vérifiant $p\varphi\beta = \beta$. D'après (b), il existe $\gamma \in B_{st}$ tel que $\varphi\gamma = \gamma$,

$N\gamma = \beta$. Donc, $\widehat{1}_{\varphi,N} = \widehat{1}_{\varphi} - \gamma$ est un relèvement de 1 vérifiant $\varphi(\widehat{1}_{\varphi,N}) = \widehat{1}_{\varphi,N}$, $N(\widehat{1}_{\varphi,N}) = 0$, c'est-à-dire que X est scindée en tant que $K_0[\varphi, N]$-modules. La filtration de X_K est alors donnée par un élément δ de $K \otimes_{K_0} B_{st}$ tel que $\widehat{1}_{\varphi,N} + \delta$ appartienne à $(X_K)^0$. Comme $K \otimes_{K_0} B_{st} \subset Fil^0(K \otimes_{K_0} B_{st}) + B_{cris}$, on peut supposer que $\delta \in B_{cris}$. Pour montrer que X est scindé en tant que (φ, N)-module filtré, il suffit de démontrer qu'il existe $\varepsilon \in Fil^0 B_{cris}$ tel que $\varphi(\delta + \varepsilon) = \delta + \varepsilon$, ou encore tel que $(\varphi - 1)\varepsilon = (\varphi - 1)\delta$, ce qui se déduit de (c).

2.8. — Soit D un (φ, N)-module filtré. Notons

$$\beta_D : B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \underline{V}_{st}(D) \longrightarrow B_{st} \otimes_{K_0} D$$

l'application canonique (Exp. III, 5.3), où $\underline{V}_{st}(D) = \mathrm{Hom}_{G_K}(\underline{V}^*_{st}(D), \mathbf{Q}_p)$.

LEMME. — *Le (φ, N)-module filtré D est admissible si et seulement si β_D est injective et si* $\dim_{K_0} D = \dim_{\mathbf{Q}_p} \underline{V}_{st}(D) = \dim_{\mathbf{Q}_p} \underline{V}^*_{st}(D)$.

Démonstration. Le (φ, N)-module filtré D est admissible si et seulement si β_D est un isomorphisme (Exp. III, 5.3.6), ce qui est encore équivalent à ce que l'application β'_D déduite de β_D par passage au corps des fractions de B_{st} est un isomorphisme. Cela se démontre comme 3.5.2 dans [F79] (on peut se ramener d'abord au cas de dimension 1 car une puissance extérieure de (φ, N)-module filtré faiblement admissible est faiblement admissible ; D est alors admissible et si d est un générateur de D, il existe un élément α de P_0 et un entier i tel que $\alpha t^i \otimes d$ soit un générateur de $\underline{V}^*_{st}(D)$; comme αt^i est inversible dans B_{st}, cela termine la démonstration). On en déduit que le (φ, N)-module filtré D est admissible si et seulement si β_D est injective et si $\dim_{\mathbf{Q}_p} B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \underline{V}_{st}(D) = \dim_{K_0} D$.

2.9. LEMME. — *Si D est un (φ, N)-module filtré ordinaire, β_D est injective.*

Remarque : on peut démontrer que l'application β_D est injective pour tout (φ, N)-module filtré faiblement admissible D.

Démonstration. Si $0 \to D_1 \to D_2 \to D_3 \to 0$ est une extension de (φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles tels que les applications canoniques β_{D_i} sont injectives pour $i = 1$ et 3, alors, β_{D_2} est injective. Par récurrence sur la dimension du (φ, N)-module filtré D ordinaire, on en déduit le lemme.

2.10. LEMME. — *Soit* $0 \to D_1 \to D_2 \to D_3 \to 0$ *une extension de* (φ, N)-*modules filtrés faiblement admissibles. On suppose que* D_1 *est admissible et que* D_3 *n'a qu'un seul nombre de Hodge non nul. Alors,* D_2 *est admissible.*

Remarquons que le lemme est encore vrai si on échange les rôles de D_1 et D_3 en prenant la suite exacte duale.

Démonstration. Appliquons le foncteur $\underline{V}^*_{st}$ à la suite exacte. On obtient la suite exacte de représentations p-adiques

$$0 \longrightarrow \underline{V}^*_{st}(D_3) \longrightarrow \underline{V}^*_{st}(D_2) \longrightarrow \underline{V}^*_{st}(D_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(D_3, B_{st})\,.$$

Grâce au lemme 2.7, $\mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(D_3, B_{st})$ est nul. L'admissibilité de D_3 et de D_1 implique les égalités

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} \underline{V}^*_{st}(D_i) = \dim_{K_0} D_i \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 3$$

et on a donc la même égalité pour $i = 2$ grâce à l'exactitude de la suite précédente. D'où l'admissibilité de D_2.

2.11. — Soit maintenant D un (φ, N)-module filtré ordinaire. Par récurrence sur le cardinal des pentes de Hodge non nulles de D et en utilisant les lemmes précédents, on démontre facilement que $\underline{V}^*_{st}(D)$ est une représentation p-adique ordinaire semi-stable. On obtient une filtration Fil^iV de $V = \underline{V}^*_{st}(D)$ stable par G_K par

$$Fil^iV = V^*_{st}\Big(D\Big/\bigoplus_{j<i} D^{[j]}\Big)$$

et le quotient $Fil^iV/Fil^{i=1}V$ est isomorphe à $\underline{V}^*_{st}(D^{[i]})$.

3. — Extensions galoisiennes de V_1 par $V_2(i)$

3.1. — Dans tout ce qui suit, V_1 et V_2 sont deux représentations p-adiques non ramifiées de G_K et V une représentation p-adique de G_K, extension de $V_2(j)$ par $V_1(i)$.

Soient $D_1 = \underline{D}^*_{st}(V_1)$ et $D_2 = \underline{D}^*_{st}(V_2)$ les (φ, N)-modules filtrés admissibles associés. Lorsque $i < j$, on a $\mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(D_1[i], D_2[j]) = 0$: en effet, tout

(φ, N)–module filtré extension de $D_1[i]$ par $D_2[j]$ est une extension triviale. Un tel objet D est scindé en tant que $K_0[\varphi]$–module. On a d'une part $D_1[i]_K^j = 0$, donc $D_K^j = D_2[j]_K$ et $D_K^j \cap D_1[i]_K = \{0\}$, d'autre part $D_K^i = D_K$, donc $D_K^i \cap D_1[i]_K = D_1[i]_K$. Enfin, N est nécessairement nul sur $D_1[i]$ (à cause de la relation $N\varphi = p\varphi N$). Donc, $D_1[i]$ muni de la filtration induite est un sous–(φ, N)–module filtré de D et D est scindé en tant que (φ, N)–module filtré. Il n'y a donc pas de représentation cristalline, extension non triviale de $V_2(j)$ par $V_1(i)$.

Lorsque $i \geq j+1$, toute extension de (φ, N)–modules filtrés D de $D_1[i]$ par $D_2[j]$ est admissible et $V = \underline{D}_{st}^*(D)$ est une représentation p–adique ordinaire semi–stable extension de $V_2(j)$ par $V_1(i)$ (par exemple, lemme 2.10). On en déduit une application linéaire injective de $\mathbb{Q}_p$–espaces vectoriels

$$\Phi_{i,j} : \mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(D_1[i], D_2[j]) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G_K}(V_2(j), V_1(i))$$

Proposition. — *Supposons que k est fini*[1]. *Soient V_1 et V_2 deux représentations p–adiques non ramifiées. Soit V une représentation p–adique de G_K, extension de $V_2(j)$ par $V_1(i)$. Si $i \geq j+2$, la représentation p–adique V est cristalline. Si $i = j+1$, la représentation p adique V est semi–stable.*

La proposition signifie donc que si $i \geq j+1$, $\Phi_{i,j}$ est un isomorphisme et que si de plus $i \geq j+2$, $\mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(D_1[i], D_2[j])$ et $\mathrm{Ext}^1_{MF}(D_1[i], D_2[j])$ sont égaux. En tordant la représentation V par χ^j, on se ramène au cas où $j = 0$, ce que nous supposons maintenant. On notera alors

$$\Phi_i : \mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(D_1[i], D_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G_K}(V_2, V_1(i))\,.$$

La démonstration consiste à calculer les dimensions de ces deux $\mathbb{Q}_p$–espaces vectoriels (3.2, 3.3. 3.4). Le cas $i = j+1$ se déduit de 3.5.

3.2. — On note d_1 (resp. d_2) la dimension de la représentation V_1 (resp. V_2).

[1] Depuis, il est montré dans [P] que la proposition est encore vraie si K est l'extension de K_0 obtenue en rajoutant les racines p^n ièmes de l'unité sans hypothèse de finitude sur K_0.

LEMME. — *Supposons $i > 0$. Les classes d'isomorphismes des extensions de φ-modules filtrés faiblement admissibles de $D_1[i]$ par D_2 forment un espace vectoriel sur K de dimension $d_1 d_2$.*

Démonstration. Tout $K_0[\varphi]$-module D extension de $D_1[i]$ par D_2 est scindé. Il existe donc une base de D sur W

$$\{e_i(1), e_j(2) \quad \text{pour } i = 1, \dots, d_1,\ j = 1, \dots, d_2\}$$

telle que l'action de φ sur cette base soit donnée par

$$\varphi(e_k(1)) = p^i \sum_{j=1}^{d_1} b_{kj}(1) e_j(1)$$

$$\varphi(e_k(2)) = \sum_{j=1}^{d_2} b_{kj}(2) e_j(2)$$

où les matrices $((b_{ij}(\ell)))$ pour $\ell = 1$ et 2 appartiennent à $Gl_{d_\ell}(W)$. Un φ-module filtré faiblement admissible est alors caractérisé par la donnée d'un K-sous-espace vectoriel $(D_K)^i$ de D_K de dimension d_1 dont l'image dans $(D_1[i])_K$ par la projection est $(D_1[i])_K$. Un tel sous-espace est entièrement caractérisé par la donnée d'une base du type

$$e_j(1) + \sum_{k=1}^{d_2} a_{jk} e_k(2)$$

pour $j = 1, \dots, d_1$. On en déduit que $\mathrm{Ext}^1_{MF}(D_1[i], D_2)$ est un K-espace vectoriel de dimension $d_1 d_2$.

3.3. LEMME. — i) *On a un isomorphisme canonique de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels*

$$\mathrm{Ext}^1_{G_K}(V_2, V_1(i)) \simeq H^1(G_K, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V_2, V_1(i))) .$$

ii) *Si $i \neq 0,\ 1$, $H^1(G_K, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V_2, V_1(i)))$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension $[K : \mathbb{Q}_p] d_1 d_2$.*

Démonstration. Choisissons L_1 (resp. L_2) un réseau de V_1 (resp. V_2) stable par G_K. On a

$$\mathrm{Ext}^1_{G_K}(L_2/p^nL_2,\ (L_1/p^nL_1)(i)) = H^1(G_K, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(L_2/p^nL_2, (L_1/p^nL_1)(i)).$$

En passant à la limite projective sur n, on en déduit (i).

Posons $C = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(L_2, L_1(i))$ et $C_n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(L_2/p^nL_2, (L_1/p^nL_1)(i))$. En tant que représentation galoisienne, C est isomorphe à $L_3(i)$ où L_3 est une représentation non ramifiée. On commence par calculer la caractéristique d'Euler–Poincaré de C_n [Mi86]

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^j \operatorname{ord}_p(H^j(G_K, C_n)) = -[K:\mathbb{Q}_p]d_1d_2n\,.$$

On calcule d'autre part $H^j(G_K, C_n)$ pour $j = 0$ et 2 : lorsque $i \neq 0$, $H^0(G_K, C_n)$ est d'ordre borné par rapport à n ; si $K_n = K(\mu_{p^n})$ où μ_{p^n} est le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité, la flèche de restriction

$$H^2(G_K, C_n) \longrightarrow H^2(G_{K_n}, C_n)^{\mathrm{Gal}(K_n/K)}$$

est à noyau et conoyau bornés par rapport à n. On a ensuite

$$H^2(G_{K_n}, C_n)^{\mathrm{Gal}(K_n/K)} = H^2(G_{K_n}, C_n(1-i))(i-1)^{\mathrm{Gal}(K_n/K)} =$$
$$L_{3,n}(i-1)^{\mathrm{Gal}(K_n/K)}$$

(théorie du groupe de Brauer, on peut aussi utiliser les théorèmes de dualité locale). Pour $i \neq 1$, $H^2(G_K, C_n)$ est donc d'ordre borné par rapport à n. On en déduit que pour $i \neq 0$ et $i \neq 1$ et pour n assez grand,

$$\#(H^1(G_K, C_n)) = p^{[K:\mathbb{Q}_p]d_1d_2n+c}$$

où c est une constante et que $H^2(G_K, C)$ est nul. On a la suite exacte de $\mathbb{Z}_p$-modules

$$0 \longrightarrow H^1(G_K, C)/p^nH^1(G_K, C) \longrightarrow H^1(G_K, C_n) \longrightarrow H^2(G_K, C) = 0\,.$$

Comme $H^1(G_K, C)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, on en déduit que $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1(G_K, C)$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension $[K : \mathbb{Q}_p]d_1 d_2$.

3.4. — Lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $i \geq 1$, les deux $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^1_{MF}(D_1[i], D_2)$ et $\mathrm{Ext}^1_{D_K}(V_2, V_1(i))$ sont de dimension $d_1 d_2[K : \mathbb{Q}_p]$. L'homomorphisme injectif de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels Φ_i de $\mathrm{Ext}^1_{MF}(D_1[i], D_2)$ dans $\mathrm{Ext}^1_{G_K}(V_2, V_1(i))$ est donc un isomorphisme.

Nous allons maintenant décrire explicitement l'application

$$\Phi_i : \mathrm{Ext}^1_{MF}(K_0[i], K_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G_K}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(i))$$

sans hypothèse de finitude sur k.

Soit D_λ le φ-module filtré muni d'une base $\{e_0, e_i\}$ telle que

$$\varphi e_0 = e_0, \quad \varphi e_i = p^i e_i$$

et telle que la droite $(D_\lambda)^i_K$ soit engendrée par $e_i - \lambda e_0$ avec $\lambda \in K$. Calculons $\underline{V}^*_{cris}(D_\lambda)$. Il s'agit donc de trouver tous les K_0-homomorphismes f de D_λ dans B_{cris} tels que

$$\varphi(f(e_0)) = f(e_0)\,, \ \varphi(f(e_i)) = p^i f(e_i)$$

$$f(e_i - \lambda e_0) \in Fil^i B_{dR}\,, \ f(e_0) \in Fil^0 B_{dR}\,.$$

Une première solution est donnée par

$$f_1(e_0) = 0, \ f_1(e_i) = t^i\,.$$

Une deuxième solution est donnée par

$$f_2(e_0) = 1\,, \ f_2(e_i) = \Lambda + \lambda$$

où Λ vérifie

$$\Lambda \in Fil^i B_{dR}\,, \ \Lambda + \lambda \in B_{cris} \text{ et } \varphi(\Lambda + \lambda) = p^i(\Lambda + \lambda)\,,$$

(l'existence d'un tel Λ se déduit de 2.7, c). Le $\mathbb{Q}_p$–espace vectoriel engendré par f_1 et f_2 est muni d'une action de G_K donnée par

$$g(f_1) = \chi^i(g)f_1$$

$$g(f_2) = f_2 + t^{-i}(g\Lambda - \Lambda)f_1$$

(il est facile de vérifier que $t^{-i}(g\Lambda - \Lambda)$ appartient à $\mathbb{Q}_p$: on a en effet

$$g\Lambda - \Lambda = g(\Lambda + \lambda) - (\Lambda + \lambda) \in Fil^i B_{cris}$$

$$\varphi(g\Lambda - \Lambda) = p^i(g\Lambda - \Lambda)\,,$$

ce qui implique que $g\Lambda - \Lambda$ appartient à $\mathbb{Q}_p t^i$). La représentation p–adique obtenue est une extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(i)$ dont l'image par Φ_i dans $H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(i))$ est la classe du cocycle $g \longmapsto t^{-i}(g\Lambda - \Lambda)$.

Remarque : la connaissance de Λ implique celle de λ; par exemple, si λ est dans K_0, on a $\varphi^n\Lambda = p^{in}(\Lambda + \lambda) - \sigma^n\lambda$, donc si σ^a laisse fixe K_0, on a

$$\lambda = -\lim_{n\to\infty} \varphi^{an}\Lambda\,.$$

3.5. — Le cas $i = 1$ se traite sans hypothèse sur k, ce qui permet de supposer que $V_1 = V_2 = \mathbb{Q}_p$. Nous allons comme en 3.4 construire explicitement l'application

$$\Phi_1 : \mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(K_0[1], K_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G_K}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1))\,.$$

Par la théorie de Kummer, $H^1(G_K, \mathbb{Z}_p(1))$ est canoniquement isomorphe à $\varprojlim K^\times/K^{\times p^n}$. On en déduit que l'on a un isomorphisme

$$R_K : H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1)) \longrightarrow K \times \mathbb{Q}_p$$

$$x \longmapsto (\log_p x, v(x))\,.$$

(rappelons que l'on a choisi une valuation v de K à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et un prolongement $\log_p$ du logarithme p–adique à K). Cet isomorphisme dépend du choix du logarithme et de la valuation choisis.

Décrivons maintenant un (φ, N)–module filtré D extension de $K_0[1]$ par K_0. On fixe une base e_0, e_1 de D vérifiant

$$\varphi e_0 = e_0\,,\ \varphi e_1 = p e_1\,.$$

La relation $N\varphi = p\varphi N$ implique que $Ne_1 = \alpha e_0$, $Ne_0 = 0$ avec $\alpha \in \mathbf{Q}_p$. La filtration est déterminée par une droite $K(e_1 - \lambda e_0)$ avec $\lambda \in K$. On en déduit facilement que l'on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} L_K : \mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(K_0[1], K_0) &\simeq K \times \mathbf{Q}_p \\ D &\longmapsto (\lambda, \alpha)\,. \end{aligned}$$

On note $D_{(\lambda,\alpha)}$ l'image réciproque de (λ, α).

Proposition. — *L'application*

$$\Phi_1 : \mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(K_0[1], K_0) \longrightarrow H^1(G_K, \mathbf{Q}_p(1))$$

est un isomorphisme et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(K_0[1], K_0) & \longrightarrow & H^1(G_K, \mathbf{Q}_p(1)) \\ {\scriptstyle L_K}\Big\downarrow \simeq & & {\scriptstyle R_K}\Big\downarrow \simeq \\ K \times \mathbf{Q}_p & = & K \times \mathbf{Q}_p\,. \end{array}$$

En particulier, l'image de $\mathrm{Ext}^1_{MF_{st}}(K_0[1], K_0)$ *est égal à* $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} U_K$ *si* U_K *est le groupe des unités de* K *congrues à* 1 *modulo l'idéal maximal.*

Démonstration. Nous allons ici construire explicitement l'application réciproque de Φ_1. Soit x un élément de $K^\times$ et soit $x^{(n)}$ une suite d'éléments de $O_{\overline{K}}$ vérifiant $x^{(n)p} = x^{(n-1)}$, $x^{(0)} = x$. Alors $(x^{(n)})_n$ est un élément de R (Exp. II, 1.2.2 et 1.3.1) et donc par l'application de Teichmüller définit un élément $[(x^{(n)})_n]$ de $W(R)$. Si x est une unité de K, le logarithme de $[(x^{(n)})]$ existe dans $A_{cris} = W^{DP}(R)$; en particulier, si $x = 1$ et $x^{(n)} = \zeta_n$, on a $t = \log([(\zeta_n)])$; dans le cas général, on définit le logarithme de $[(x^{(n)})]$ dans $K \otimes_{K_0} B_{st}$ plongé dans B_{dR} par $\lambda_{dR}([(x^{(n)})]) = \log([(x^{(n)})]/x) + \log(x)$ (Exp. III, 4.2.2). Notons abusivement $\mathrm{LOG}(x) = \lambda_{dR}([(x^{(n)})])$ qui n'est bien défini qu'à un élément de $\mathbb{Z}_p t$ près. Les propriétés suivantes (dans $K \otimes_{K_0} B_{st}$) sont faciles à vérifier :

$$\varphi(\mathrm{LOG}(x)) = p\mathrm{LOG}(x)\,,\ N(\mathrm{LOG}(x)) = v(x) \text{ (Exp. II, 3.2.2)}$$

$$\mathrm{LOG}(x) - \log(x) \in Fil^1 B_{dR}\,.$$

De plus, comme $gx = x$ pour $g \in G_K$, on a

$$g(\mathrm{LOG}(x)) - \mathrm{LOG}(x) = \log(g[(x^{(n)})]/[(x^{(n)})]) = \log[g(x^{(n)})/x^{(n)}] = a_g \in \mathbb{Z}_p(1)$$

où a_g est un cocycle à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$ dont la classe dans $H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$ est x. Montrons que $\underline{V}^*(D_{(\log(x),\mathrm{ord}_p(x))})$ est isomorphe à V en tant qu'extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$. Un élément f de $\underline{V}^*(D_{(\log(x),\mathrm{ord}_p(x))})$ est un K_0-homomorphisme de $D_{(\log(x),\mathrm{ord}_p(x))}$ dans B_{st} vérifiant

$$\varphi(f(e_0)) = f(e_0),\ \varphi(f(e_1)) = pf(e_1)\,,$$

$$N(f(e_0)) = 0\,,\ N(f(e_1)) = v(x)f(e_0),\ f(e_1) - \log(x)f(e_0) \in Fil^1 B_{dR}\,.$$

Une première solution est $f_1(e_1) = t$, $f_1(e_0) = 0$; une deuxième solution indépendante est donnée par

$$f_2(e_0) = 1\,, \quad f_2(e_1) = \mathrm{LOG}(x)\,.$$

Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel W engendré par f_1 et f_2 est muni d'une action de Galois et est naturellement une extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$. Le cocycle associé dans $H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$ est alors $g \longmapsto g(\mathrm{LOG}(x)) - \mathrm{LOG}(x) = a_g$. Les classes de W et de V dans $H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$ sont donc égales.

Nous avons pris $x \in K$; le cas général s'en déduit facilement par continuité et tensorisation par $\mathbb{Q}_p$. Ce qui termine la démonstration des propositions 3.1 et 3.5.

4. — Fin de la démonstration

4.1. — On utilise maintenant la proposition 3.1 pour montrer que toute représentation p–adique ordinaire est semi–stable. On raisonne par récurrence sur le nombre $r(V)$ des quotients $Fil^iV/Fil^{i+1}V$ qui sont non triviaux. Supposons qu'il y en a au moins 3. On a donc une suite exacte de G_K–modules

$$0 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V \longrightarrow V_5 \longrightarrow 0$$

où $V_5(-j)$ est une représentation p–adique non ramifiée pour un entier j tel que les pentes de Hodge de V_2 soient strictement supérieures à j : on a donc $r(V_2) = r(V) - 1$. Comme $r(V_2)$ est encore supérieur ou égal à 2, on peut de nouveau écrire une suite exacte de G_K–modules

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$$

où $V_3(-i)$ est une représentation p–adique non ramifiée pour un entier i tel que les pentes de Hodge de V_1 soient strictement supérieures à i. Avec $V_4 = V/V_1$, on a donc un diagramme commutatif et exact de G_K–modules

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & V_1 & = & V_1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V_5 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & V_4 & \longrightarrow & V_5 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

De plus, les V_i sont des représentations ordinaires telles que $r(V_i) < r(V)$; par hypothèse de récurrence, elles sont donc semi–stables.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe une représentation p-adique V' semi-stable rendant le diagramme (*) commutatif et exact (avec V' à la place de V). Pour cela, on passe aux (φ, N)-modules filtrés en appliquant le foncteur $\underline{D}_{st}$ (avec $\underline{D}_{st}(V) = \mathrm{Hom}_{MF_{st}}(\underline{D}^*_{st}(V), K_0))$ aux suites exactes de représentations semi-stables

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & V_4 & \longrightarrow & V_5 & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

A cause de la semi-stabilité, les suites restent exactes. En posant $D_i = \underline{D}_{st}(V_i)$, on a donc les suites exactes de (φ, N)-modules filtrés admissibles

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & D_2 & \longrightarrow & D_3 & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & D_3 & \longrightarrow & D_4 & \longrightarrow & D_5 & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

4.2. LEMME. — *Il existe un (φ, N)-module filtré admissible rendant commutatif et exact le diagramme suivant*

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ & D_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & D_1 \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & D_2 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & D_5 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_3 \arrow[r] \arrow[d] & D_4 \arrow[r] \arrow[d] & D_5 \arrow[r] & 0 \\ & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Remarquons qu'il suffit de construire un (φ, N)–module filtré D rendant commutatif et exact le diagramme précédent. En effet, D sera alors faiblement admissible car D_2 et D_5 le sont (lemme 2.4) et même admissible car D_2 et D_5 le sont et D_5 a une seule pente de Hodge non nulle (lemme 2.10).

Les pentes de Hodge de D_5 étant différentes de celles de D_3, on peut scinder la suite exacte de $K_0[\varphi]$-modules

$$0 \longrightarrow D_3 \longrightarrow D_4 \longrightarrow D_5 \longrightarrow 0\,.$$

On considère donc un tel scindage $D_4 = D_3 \oplus D_5$ avec $\varphi D_3 \subset D_3$ et $\varphi D_5 \subset D_5$. La filtration de D_{4K} est alors déterminée à partir de celles de D_{3K} et de D_{5K} par un homomorphisme de K–espaces vectoriels f de D_{5K} dans D_{3K} :

$$(D_{4K})^i = (D_{3K})^i \oplus \{(f(d), d) \quad \text{pour} \quad d \in (D_{5K})^i\}\,.$$

Soit u un homomorphisme de D_3 dans D_2 qui est un scindage de la suite exacte

$$0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3 \longrightarrow 0\,.$$

Posons $\overline{f} = f \circ u$. Alors le K_0–espace vectoriel $D = D_2 \oplus D_5$ est muni d'un endomorphisme σ–linéaire induisant ceux de D_2 et de D_5 et si l'on munit D_K de la filtration

$$(D_K)^i = (D_{2K})^i \oplus \{(\overline{f}(d), d) \quad \text{pour} \quad d \in (D_{5K})^i\}\,,$$

le diagramme (**) est commutatif et formé de suites exactes de φ–modules filtrés. Il reste à construire N. La restriction de N à D_5 s'écrit $N_3 \oplus N_5$ où N_i est un endomorphisme de D_5 dans D_i. On a alors pour $x \in D_5$

$$\begin{aligned} p\varphi N(x) &= p\varphi N_3(x) + p\varphi N_5(x) \\ &= N\varphi(x) = N_3(\varphi x) + N_5(\varphi x) \end{aligned}$$

car $\varphi D_5 \subset D_5$. Comme φ préserve aussi D_3, on en déduit que pour $x \in D_5$

$$p\varphi N_3(x) = N_3(\varphi x)$$

$$p\varphi N_5(x) = N_5(\varphi x)\,.$$

On considère alors l'endomorphisme de D défini sur D_2 par l'opérateur N de D_2 et sur D_5 par $u \circ N_3 \oplus N_5$. Vérifions que $p\varphi N = N\varphi$. Cela est vrai sur D_2. Sur D_5, on a

$$p\varphi(u \circ N_3 \oplus N_5)(x) = p\varphi u N_3(x) + p\varphi N_5(x) = pu\varphi N_3(x) + p\varphi N_5(x)$$

$$= uN_3\varphi(x) + N_5\varphi(x) = pN\varphi(x)$$

car u commute avec φ.

4.3. — De la suite exacte

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0\,,$$

on déduit la suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1_{G_K}(V_5, V_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G_K}(V_5, V_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G_K}(V_5, V_3)\,.$$

Soit $c(V)$ (resp. $c(V')$) la classe de l'extension V (resp. V') de V_5 par V_2 dans $\mathrm{Ext}^1_{G_K}(V_5, V_2)$. Par hypothèse, $c(V)$ et $c(V')$ ont la même image dans $\mathrm{Ext}^1_{G_K}(V_5, V_3)$. On en déduit que $c(V) - c(V')$ est l'image d'une extension V_6 de V_5 par V_1. Par définition de la somme de deux extensions, on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V' \oplus V_5 \longrightarrow V \longrightarrow 0\,.$$

Posons $W = V' \oplus V_5$. Pour montrer que V est semi-stable, il suffit de montrer que

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} V = \dim_{K_0} \underline{D}^*_{st}(V)$$

(on a toujours l'inégalité $\dim_{\mathbf{Q}_p} V \geq \dim_{K_0} \underline{D}^*_{st}(V)$). En appliquant le foncteur $\underline{D}^*_{st}$, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{D}^*_{st}(V) \longrightarrow \underline{D}^*_{st}(W) \longrightarrow \underline{D}^*_{st}(V_1)$$

d'où l'inégalité

$$\dim_{K_0} \underline{D}^*_{st}(V) \geq \dim_{K_0} \underline{D}^*_{st}(W) - \dim_{K_0} \underline{D}^*_{st}(V_1)$$

$$= \dim_{\mathbf{Q}_p} W - \dim_{\mathbf{Q}_p} V_1 = \dim_{\mathbf{Q}_p} V\,.$$

Donc, V est aussi semi-stable, ce qui termine la démonstration du théorème.

Depuis l'exposé et la rédaction de ce texte, d'autres articles ont été écrits sur le sujet : citons principalement [Ne93].

BIBLIOGRAPHIE

[F79] J.-M. FONTAINE. — *Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti–Tate* dans Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (III), Astérisque 65 (1979), 3–80.

[Exp.II] J.-M. FONTAINE. — *Le corps des périodes p–adiques*, ce volume.

[Exp.III] J.-M. FONTAINE. — *Représentations p–adiques semi–stables*, ce volume.

[G89] R. GREENBERG. — *Iwasawa theory for p-adic representations*, vol. dédié à K. Iwasawa, Adv. Stud. Pure Math. 17 (1989).

[M86] J.-S. MILNE. — *Arithmetic duality theorems*, Perspectives in Mathematics, vol. 1, Academic Press (1986).

[Ne93] J. NEKOVAR. — *On p–adic height pairings*, dans Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 1990/91, édit. S. David, Birkhaüser Boston 1993, 127–202.

[S68] J.-P. SERRE. — *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, W.A. Benjamin, Inc. New York 1968.

[P] B. PERRIN–RIOU. — *Théorie d'Iwasawa des représentations p–adiques sur un corps local*, Invent. Math. 115 (1994), 81–149.

Bernadette Perrin–Riou
UFR 21, Mathématiques
Université de Paris VI
4, place Jussieu
75005 PARIS
FRANCE

Appendice

RÉDUCTION SEMI-STABLE ORDINAIRE, COHOMOLOGIE ÉTALE p-ADIQUE ET COHOMOLOGIE DE DE RHAM D'APRÉS BLOCH-KATO [BK] ET HYODO [H]

par **Luc Illusie**

1. Réduction semi-stable ordinaire.

1.0. Soient A un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique zéro et de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. On note $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k, σ son automorphisme de Frobenius. Soit $X \longrightarrow S =$ Spec A un morphisme propre, à *réduction semi-stable* (ce qui signifie que, localement pour la topologie étale sur X et sur S, *il* existe des entiers $1 \leq r \leq n$ tels que X soit isomorphe au sous-schéma fermé de $S[t_1, \dots t_n]$ d'équation $t_1 \dots t_r = \pi$, où π une uniformisante de A). Le schéma X est régulier, plat sur S, sa fibre générique X_K est lisse, et sa fibre spéciale $Y = X \otimes_A k$ est un diviseur à croisements normaux dans X.
On sait alors définir (cf. [HK, 2.5, 1.1, 4.1]) un *complexe de de Rham*

$$\omega^{\cdot}_{X/S} \tag{1.1}$$

et un *complexe de de Rham-Witt*

$$W\omega^{\cdot}_Y = \lim\mathrm{proj}\, W_n\omega^{\cdot}_Y \tag{1.2}$$

qui, dans le cas où X est lisse, coïncident respectivement avec le complexe de de Rham usuel de X/S et le complexe de de Rham-Witt usuel de Y. Les composantes de (1.1) sont localement libres de type fini, et $\omega^i_{X/S} = \Lambda^i \omega^1_{X/S}$;

pour X d'équation $t_1 \dots t_r = \pi$ dans $S[t_1, \dots t_n], \omega^1_{X/S}$ est le $\mathcal{O}_X$-module engendré par les dt_i/t_i $(1 \leq i \leq r)$ et $dt_i (i > r)$ soumis à l'unique relation $\Sigma_{1 \leq i \leq r} dt_i/t_i = 0$. On a $\omega^{\cdot}_{X/S} = u_* \Omega^{\cdot}_{U/S}$ où $u : U \longrightarrow X$ est l'ouvert de lissité de X/S. En particulier, $\omega^{\cdot}_{X/S}$ induit sur la fibre générique le complexe de de Rham usuel. D'autre part, la composante de degré zéro de $W_n \omega^{\cdot}_Y$ est $W_n \mathcal{O}_Y$, et

$$W_1 \omega^{\cdot}_Y = \omega^{\cdot}_Y \tag{1.3}$$

où $\omega^{\cdot}_Y := \omega^{\cdot}_{X/S} \otimes_A k$. Toutefois, contrairement à ce que la notation peut suggérer, le complexe (1.2) ne dépend pas uniquement de Y, mais de Y muni de sa "log structure naturelle" [HK]. Comme dans le cas usuel (Y lisse), il est muni d'opérateurs F et V en chaque degré vérifiant $FV = VF = p$ et $FdV = d$.

Le W-module gradué $H^*(Y, W\omega^{\cdot})$ est de type fini sur W ; il s'identifie à la cohomologie cristalline du log schéma Y relativement aux vecteurs de Witt du log point Spec k (loc. cit.). Il est muni d'un endomorphisme σ-linéaire Φ, le *Frobenius*, tel que $\Phi \otimes \mathbf{Q}_p$ soit bijectif; cet endomorphisme est induit par l'endomorphisme de $W\omega^{\cdot}$ défini par $p^i F$ en degré i. Il est également muni d'un endomorphisme W-linéaire N, appelé *monodromie*, qui est relié à Φ par la formule $N\Phi = p\Phi N$ (et est donc tel que $N \otimes \mathbf{Q}_p$ soit nilpotent). La monodromie jouera peu de rôle dans cet appendice.

DÉFINITION 1.4. — *Sous les hypothèses de* (1.0), *on dit que X a réduction ordinaire si*

$$H^j(Y, B\omega^i) = 0$$

pour tout i et tout j.

Quand X/S est lisse, cette condition ne dépend que de Y et signifie que Y est *ordinaire* au sens de [BK, 7.3] ou [IR, 4.13], i.e. vérifie $H^j(Y, B\Omega^i) = 0$ pour tout i et tout j.

PROPOSITION 1.5. — *Sous les hypothèses de* 1.0 *:*

(a) *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X a réduction ordinaire ;*

(ii) *pour tout i et tout j l'endomorphisme F de $H^j(Y, W\omega^i)$ est bijectif. Si de plus $H^n(Y, W\omega^\cdot)$ est sans torsion pour tout n, elles sont aussi équivalentes à chacune des conditions suivantes :*

(iii) *pour tout n, le F-cristal $(H^n(Y, W\omega^\cdot), \Phi)$ est ordinaire, i. e. a mêmes polygones de Newton et de Hodge ;*

(iv) *pour tout n, le polygone de Newton du F-cristal $(H^n(Y, W\omega^\cdot), \Phi)$ coïncide avec le polygone de Hodge construit sur les nombres* $\dim H^{n-i}(Y, \omega^i)$, $0 \leq i \leq n$.

(b) *Si X a réduction ordinaire, alors, pour tout n, le F-module $(H^n(Y, W\omega^\cdot), F)$ admet une décomposition canonique*

$$H^n(Y, W\omega^\cdot) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^j(Y, W\omega^i)(-i), \tag{1.5.1}$$

où, pour un F-module M, $M(-i)$ désigne le F-module $(M, p^i F)$.

La démonstration est analogue à celle de [BK, 7.3] ou [IR, 4.13].
Le critère ci-après, dû à Hyodo [H] (cf. [I2] pour quelques détails sur la démonstration), est souvent commode pour reconnaître une réduction ordinaire :

Proposition 1.6. — *Sous les hypothèses de* 1.0, *supposons que le diviseur Y dans X soit somme de composantes Y_i lisses sur k, $1 < i < n$. Si I est une partie de $[1, n]$, notons Y_I l'intersection des Y_i pour $i \in I$. C'est un schéma propre et lisse sur k. Si, pour tout I, Y_I est ordinaire, alors X a réduction ordinaire.*

En particulier, si $\dim X/S = 1$, et si les composantes irréductibles de Y sont lisses, X a réduction ordinaire si la normalisée $Y^\sim$ de Y est ordinaire (en fait, l'hypothèse de lissité sur les composantes est inutile, et l'ordinarité de $Y^\sim$ équivaut au fait que X ait réduction ordinaire, [I2, loc. cit.]). Par exemple, si X est une courbe elliptique à mauvaise réduction de type multiplicatif, X a réduction ordinaire.
A partir du critère 1.6, ou plutôt de sa variante en égale caractéristique, on peut montrer [I2] qu'une intersection complète générique de multidegré donné dans une espace projectif fixé sur un corps est ordinaire.

2. Les résultats de Bloch-Kato [BK] et Hyodo [H].

Dans la situation de 1.0, avec X à réduction ordinaire, Hyodo [H], généralisant des résultats de Bloch-Kato [BK], met en relation la cohomologie de de Rham de X/S, $H^*(X, \omega_{X/S})$, la cohomologie de de Rham-Witt $H^*(Y, W\omega_Y)$, et la cohomologie étale p–adique de la fibre générique géométrique de X , au moyen des *cycles évanescents p–adiques* et des *faisceaux de Hodge–Witt logarithmiques.* Expliquons d'abord ce que sont ces objets.

2.1. Commençons par les cycles évanescents. Soient $\bar{K}$ une clôture algébrique de $K, \bar{A}$ le normalisé de A dans $\bar{K}$, qui est donc un anneau de valuation, dont le corps résiduel $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k. Soit X/S un schéma à réduction semi-stable, qu'on ne suppose pas propre pour l'instant. Posons

$$X_{\bar{K}} = X \otimes \bar{K}, \quad \bar{X} = X \otimes \bar{A}, \quad \bar{Y} = \bar{X} \otimes \bar{k} = Y \otimes \bar{k},$$

notons $\bar{i} : \bar{Y} \longrightarrow \bar{X}, \bar{j} : X_{\bar{K}} \longrightarrow \bar{X}$ les immersions canoniques. Les *cycles évanescents p–adiques* $(\bmod p^n)$ sont les faisceaux étales sur $\bar{Y}$ définis par

$$\Psi_n^s := \bar{i}^* R^s \bar{j}_*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}). \tag{2.1.2}$$

Ce sont les faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents

$$R\Psi_n := \bar{i}^* R\bar{j}_*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

Si X/S est propre, on a un isomorphisme naturel

$$H^*(\bar{Y}, R\Psi_n) \simeq H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}),$$

d'où une suite spectrale, dite *suite spectrale des cycles évanescents,*

$$E_2^{ij} = H^i(\bar{Y}, \Psi_n^j) \Rightarrow H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}). \tag{2.1.3}$$

Le groupe de Galois

$$G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$$

opère sur $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Il opère aussi sur les Ψ_n^s de manière compatible à son action sur $\bar{Y}$, et la suite spectrale des cycles évanescents est équivariante.

Contrairement à ce qui se passe dans le cadre ℓ-adique ($\ell \neq p$), si X/S est lisse, les faisceaux Ψ_n^s, pour $s \geq 1$, ne sont pas nuls en général. Bloch et Kato [BK] ont été les premiers à étudier leur structure. Leurs résultats ont ensuite été généralisés par Hyodo au cas semi-stable [H].

Un point essentiel est la construction de *générateurs* locaux des Ψ_n^s. Si x est une section locale de $\bar{i}^*\bar{j}_*\mathcal{O}^*$, il lui est associé, par la suite exacte de Kummer, une section $\{x\}$ de $\Psi_n^1(1)$ $(= \bar{i}^*R^1\bar{j}_*(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(1))$. Si $x_1, \dots, x_s$ sont des sections locales de $\bar{i}^*\bar{j}_*\mathcal{O}^*$, le cup-produit $\{x_1\}\dots\{x_s\}$ est une section locale de $\Psi_n^s(s)$, notée

$$\{x_1, \dots, x_s\}$$

et appelée *symbole*. Hyodo montre que $\Psi_n^s(s)$ est localement engendré par les symboles (il établit même le résultat analogue à chaque cran fini, $\bar{K}$ étant remplacé par une extension finie de K). Il en résulte notamment que la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

induit des suites exactes

$$0 \longrightarrow \Psi_1^s \longrightarrow \Psi_n^s \longrightarrow \Psi_{n-1}^s \longrightarrow 0. \tag{2.1.4}$$

Il découle de ces suites exactes et d'un dévissage délicat de $\Psi_1^s(s)$ [H 1.7] que, si X/S est propre, les $H^i(\bar{Y}, \Psi_n^j)$ sont de longueur finie, et que, par conséquent, la limite projective des suites spectrales (2.1.3) est une suite spectrale (G–équivariante), notée

$$E_2^{ij} = H^i(\bar{Y}, \Psi^j) => H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_p). \tag{2.1.5}$$

2.2. Bien que $\bar{X}/\bar{S}$ (où $\bar{S} = \operatorname{Spec} A$) n'ait plus en général réduction semi-stable, $\bar{X}$, muni de sa log structure naturelle, est log lisse sur $\bar{S}$, et la fibre spéciale $\bar{Y}$ (munie de la log structure induite) est de type de Cartier, cf. [HK]. On sait donc encore définir un complexe de de Rham-Witt [HK, n° 4]

$$W\omega_{\bar{Y}}^{\cdot} = \lim\operatorname{proj} W_n\omega_{\bar{Y}}^{\cdot}. \tag{2.2.1}$$

On a

$$W_1\omega_{\bar{Y}}^{\cdot} = \omega_{\bar{Y}}^{\cdot} = \omega_Y^{\cdot} \otimes_k \bar{k},$$

et plus généralement,

$$W_n\omega_{\bar{Y}}^{\cdot} = W_n\omega_Y^{\cdot} \otimes_{W_n} W(\bar{k}).$$

On dispose d'un homomorphisme canonique [HK, 4.6]

$$\text{(2.2.2)} \qquad \mathrm{dlog} : \bar{i}^*\bar{j}_*\mathcal{O}^* \longrightarrow W_n\omega_{\bar{Y}}^1$$

(dans le langage des log structures, la source est $M_{\bar{Y}}^{gp}$). On note

$$\text{(2.2.3)} \qquad W_n\omega_{\bar{Y},\log}^i \subset W_n\omega_{\bar{Y}}^i$$

le sous-faisceau étale de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$-modules de $W_n\omega_{\bar{Y}}^i$ localement engendré par les $d\log x_1 \dots d\log x_i$. Ces faisceaux sont les *faisceaux de Hodge–Witt logarithmiques* de $\bar{Y}$. On a une définition analogue pour Y, ou pour Y' , fibre spéciale de $X' = X \otimes A', A'$ l'anneau des entiers d'une extension finie K' de K . Dans le cas où X est lisse, on retrouve la notion étudiée dans [I1], [IR], [BK]. Ces faisceaux jouissent de propriétés analogues à celles développées dans (loc. cit.)[1] . Pour n variable, les faisceaux $W_n\omega_{\log}^i$ forment un système projectif, le pro-objet correspondant $W.\omega_{\log}^i$ est sans p–torsion, coïncide avec le noyau de $1 - F$ sur le pro-objet $W.\omega^i$, et $W_n\omega_{\log}^i = W.\omega_{\log}^i \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. On a le résultat suivant (cf. [IR] ou [BK] dans le cas lisse) :

PROPOSITION 2.3. — *Si X/S est propre et a réduction semi-stable ordinaire, alors, pour tout i, l'homomorphisme*

$$\text{(2.3.1)} \qquad H^*(\bar{Y}, W_n\omega_{\bar{Y},\log}^i) \otimes W_n(\bar{k}) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W_n\omega_{\bar{Y}}^i)$$

déduit de (2.2.3) *est un isomorphisme.*

On a même un résultat un peu plus précis. Les inclusions (2.2.3) définissent un homomorphisme de complexes

$$\text{(2.2.4)} \qquad \oplus W_n\omega_{\bar{Y},\log}^i[-i] \longrightarrow W_n\omega_{\bar{Y}}^{\cdot}.$$

[1] La théorie n'est toutefois pas écrite, elle mériterait de l'être.

Sous les hypothèses de 2.3, l'homomorphisme correspondant

$$(2.3.2)\qquad \oplus H^{*-i}(\bar{Y}, W_n\omega^i_{\bar{Y},\log}) \otimes W_n(\bar{k}) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W_n\omega^{\cdot}_{\bar{Y}})$$

est compatible aux filtrations naturelles des deux membres (à gauche, par le degré, et à droite, par les tronqués naïfs), et induit un isomorphisme sur les gradués associés. Par passage à la limite projective, les isomorphismes (2.3.2) fournissent un isomorphisme

$$(2.3.3)\qquad \oplus H^{*-i}(\bar{Y}, W\omega^i_{\bar{Y},\log}) \otimes W(\bar{k}) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W\omega^{\cdot}_{\bar{Y}}),$$

où $H^{*-i}(\bar{Y}, W\omega^i_{\bar{Y},\log}) := \lim\mathrm{proj}\, H^{*-i}(\bar{Y}, W_n\omega^i_{\bar{Y},\log})$, qui n'est autre que celui déduit, par extension des scalaires, de la décomposition (1.5.1) et de (2.3.1).

2.4. *Les deux homomorphismes fondamentaux.* Généralisant [BK], Hyodo [H] montre que, sous les hypothèses de 2.1 :

(a) Il existe un homomorphisme

$$(2.4.1)\qquad \alpha : \Psi^i_n(i) \longrightarrow W_n\omega^i_{\bar{Y},\log}$$

tel que $\alpha(\{x_1, \ldots, x_i\}) = d\log x_1 \ldots d\log x_i$ pour toutes sections locales $x_1, \ldots, x_i$ de $\bar{i}^*\bar{j}_*\mathcal{O}^*$, avec les notations de 2.1 et (2.2.2). Comme $\Psi^i_n(i)$ est engendré par des symboles, cet homomorphisme est donc unique, et il est surjectif par définition de $W_n\omega^i_{\bar{Y},\log}$. Les homomorphismes α forment un homomorphisme de systèmes projectifs.

(b) Il existe un homomorphisme

$$(2.4.2)\qquad \beta : \Psi^i_n(i) \longrightarrow \omega^i_{\bar{X}/\bar{S}} \otimes \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$$

tel que $\beta(\{x_1, \ldots, x_i\}) = d\log x_1 \wedge \ldots \wedge d\log x_i$ pour toutes sections locales $x_1, \ldots, x_i$ de $\bar{i}^*\bar{j}_*\mathcal{O}^*$. Pour la même raison qu'en (a), cet homomorphisme est unique, et les homomorphismes β forment un morphisme de systèmes projectifs. Noter que l'image de β est contenue dans le noyau de la différentielle d du complexe de de Rham, de sorte que les homomorphismes β définissent un homomorphisme de complexes

$$(2.4.3)\qquad \oplus \Psi^i_n(i)[-i] \otimes \bar{A}_n \longrightarrow \omega^{\cdot}_{\bar{X}/\bar{S}} \otimes \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}.$$

Les homomorphismes α et β , étant uniques, sont compatibles à Galois; il en est de même de (2.4.3).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de Hyodo [H] :

THÉORÈME 2.5. — *Soit X/S propre, à réduction semi-stable ordinaire. Alors :*

(i) *Pour tout n et tout i, l'homomorphisme*

$$H^*(\bar{Y}, \Psi^i_n(i)) \longrightarrow H^*(\bar{Y}, W_n\omega^i_{\bar{Y},\log}) \tag{2.5.1}$$

induit par α est un isomorphisme.

(ii) *Posons $\bar{A}_n = \bar{A}/p^n\bar{A}, \bar{S}_n = \operatorname{Spec} \bar{A}_n, \bar{X}_n = \bar{X} \otimes_{\bar{A}} \bar{A}_n$ (de sorte que $\omega^{\cdot}_{\bar{X}_n/\bar{S}_n} = \omega^{\cdot}_{\bar{X}/\bar{S}} \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$). Pour tout n et tout i, l'homomorphisme*

$$H^*(\bar{Y}, \Psi^i_n(i)) \otimes \bar{A}_n \longrightarrow H^*(\bar{X}_n, \omega^i_{\bar{X}_n/\bar{S}_n}) \tag{2.5.2}$$

déduit de β est un isomorphisme.

Par les suites exactes (2.1.4), on se ramène à $n = 1$. L'assertion (i) résulte d'un dévissage délicat de $\Psi^i_1(i)$. L'assertion (ii) se ramène alors à l'assertion (i) grâce à (2.3) pour $n = 1$.

COROLLAIRE 2.6. — *Sous les hypothèses de 2.5 :*

(a) *Pour tout n, la suite spectrale de Hodge vers de Rham de X_n/S_n, où $X_n = X \otimes A_n, A_n = A/p^nA$,*

$$E_1^{ij} = H^j(X_n, \omega^i_{X_n}) => H^*(X_n, \omega^{\cdot}_{X_n})$$

dégénère en E_1.

(b) *L'homomorphisme*

$$\oplus H^{*-i}(\bar{Y}, \Psi^i_n(i)) \otimes \bar{A}_n \longrightarrow H^*(\bar{X}_n, \omega^{\cdot}_{\bar{X}_n/\bar{S}_n}) \tag{2.6.1}$$

déduit de (2.4.3) est compatible aux filtrations naturelles des deux membres (à gauche, par le degré, et à droite, par les tronqués naïfs), et induit sur les gradués associés l'isomorphisme (2.5.2) (compte tenu de (a)).

(c) *Il existe un unique isomorphisme A-linéaire*

$$H^*(Y, W\omega_Y^{\cdot}) \otimes_W A \xrightarrow{\sim} H^*(X, \omega_{X/S}^{\cdot}), \tag{2.6.2}$$

caractérisé par la propriété suivante : pour tout n, l'isomorphisme déduit de (2.6.2) *par extension des scalaires à* $\hat{\bar{A}} = \lim\mathrm{proj}\,\bar{A}_n$ *rend commutatif le carré*

$$\begin{array}{ccc} H^*(Y, W\omega_Y^{\cdot}) \otimes_W \hat{\bar{A}} & \longrightarrow & H^*(X, \omega_{X/S}^{\cdot}) \otimes \hat{\bar{A}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(\bar{Y}, W\omega_{\bar{Y}}^{\cdot}) \otimes_W \bar{A}_n & \longrightarrow & H^*(\bar{X}_n, \omega_{\bar{X}_n/\bar{S}_n}^{\cdot}) \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure est l'isomorphisme défini par les décompositions (2.3.2) *et* (2.6.1)*, au moyen de l'isomorphisme* (2.5.1). *L'isomorphisme* (2.6.2) *induit un isomorphisme sur les suites spectrales (des pentes, et de Hodge) correspondantes, associées aux filtrations naïves. En particulier, il munit $H^*_{DR}(X_K/K)$ d'une structure de Φ-module filtré ordinaire au sens de* [PR, 1.2], *i. e. la filtration de Hodge* $\mathrm{Fil}^{\cdot}$ *de $H^*_{DR}(X_K/K)$ est opposée à la filtration par les pentes croissantes $U.$ de $H_0^* := H^*(Y, W\omega_Y^{\cdot}) \otimes_W K_0$ (où $K_0 = \mathrm{Frac}W$) :*

$$(U_{i-1} \otimes K) \oplus \ Fil^i = H^*_{DR}(X_K/K)$$

pour tout i, où $Fil^i = H^*(X_K, \Omega^{\geq i}_{X_K})$, et U_j est la partie de pente $\leq j$ de H_0^*, i.e. $(\oplus_{r \leq j} H^{*-r}(Y, W\omega^r)) \otimes K_0$.

Les homomorphismes (2.4.3) induisent un homomorphisme de suites spectrales, qui, d'après 2.5 (ii), est un isomorphisme au niveau E_1, d'où (a) et (b). Dans (c), l'unicité est claire. Les isomorphismes inférieurs du carré définissent, par passage à la limite projective, l'isomorphisme supérieur. Ce dernier est G–équivariant, où $G = Gal(\bar{K}/K)$. Comme, d'après Tate [T, 3.3], $\hat{\bar{A}}^G = A$, on en déduit (2.6.2) en prenant les invariants sous G . La dernière assertion est immédiate.

COROLLAIRE 2.7. — *Sous les hypothèses de* (2.5) *:*

(a) *La suite spectrale des cycles évanescents* (2.1.5) *dégénère en* E_2 *modulo torsion. Si* $F^\cdot$ *désigne la filtration correspondante de* $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$, *on a des isomorphismes canoniques, G–équivariants,*

$$gr_F^{*-i} H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \simeq H^{*-i}(\bar{Y}, W\omega^i_{\log}) \otimes \mathbf{Q}_p(-i). \tag{2.7.1}$$

En particulier, la représentation p–adique $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$ *est ordinaire au sens de* [PR, 1.2].

(b) *Soit* $C = \hat{\bar{K}}$ *. Il existe un isomorphisme C–linéaire, G–équivariant*

$$\oplus H^{*-i}(X_K, \Omega^i_{X_K}) \otimes_K C(-i) \simeq H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \otimes C \tag{2.7.2}$$

"décomposition de Hodge-Tate").

Posons $b_m = \dim_K H^m_{DR}(X/K)$, $h^{ij} = \dim_K H^j(X_K, \Omega^i)$. On a $b_m = \sum_{i+j=m} h^{ij}$ (dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham, qui, ici, est d'ailleurs conséquence de 2.6 (a)). D'autre part, par le théorème de comparaison d'Artin-Grothendieck entre cohomologie de Betti et cohomologie étale, on a $b_m = \dim_{\mathbf{Q}_p} H^m(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p)$. D'après 2.5, $h^{ij} = \dim H^j(\bar{Y}, W\omega^i_{\log}) \otimes \mathbf{Q}_p = \dim H^j(\bar{Y}, \Psi^i) \otimes \mathbf{Q}_p$. L'assertion de dégénérescence en résulte. L'isomorphisme (2.7.1) se déduit alors de (2.5.1). Le théorème de Tate [T, 3.3] entraîne l'existence d'un scindage G–équivariant de la filtration de $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \otimes C$ déduite par extension des scalaires, d'où (b), grâce à 2.5 (ii).

Remarque 2.8. La décomposition (2.7.2) n'est pas canonique : chaque scindage G–équivariant de la filtration de $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \otimes C$ envisagée ci–dessus fournit une telle décomposition, i. e. un isomorphisme entre $\oplus H^{*-i}(X_K, \Omega^i_{X_K}) \otimes_K C(-i)$ et le facteur (canonique) de $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p) \otimes C$ correspondant au caractère χ^{-i}, où χ est le caractère cyclotomique. Toutefois, Faltings [Fa] a construit une décomposition de Hodge–Tate canonique pour tout schéma propre et lisse Z sur K .

Problème 2.9. Dans [HK], Hyodo et Kato définissent, pour X/S propre, à réduction semi-stable (non nécessairement ordinaire) (et même sous des hypothèses plus générales), un isomorphisme canonique

$$\rho_\pi : K \otimes_{K_0} H^*(Y, W\omega^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(X_K/K),$$

dépendant d'une uniformisante π de A . Quand X a, de plus, réduction ordinaire, comment se compare cet isomorphisme à celui déduit de (2.6.2) ?

Problème 2.10. Sous les hypothèses de 2.5, la structure de (ϕ, N)–module filtré (ordinaire) définie sur $H^*_{DR}(X_K/K)$ par (2.6.2) est–elle associée à la représentation p-adique (ordinaire) $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ par la correspondance de Fontaine [F] (cf. aussi [PR]) ? Si ρ (resp. ρ') désigne la représentation $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ (resp. la représentation associée à $H^*_{DR}(X_K/K)$), on dispose sur ρ (resp. ρ') de la filtration de la suite spectrale des cycles évanescents (resp. de la filtration associée à la filtration par les pentes), et tout au moins peut-on affirmer que les gradués associés sont (canoniquement) isomorphes. Par ailleurs, si $\dim X/S < (p-1)/2$, Kato montre dans [K], sans hypothèse d'ordinarité, que la structure de (ϕ, N)–module filtré déduite de ρ_π est associée à la représentation p-adique, donc une réponse positive à 2.10 permettrait de répondre à 2.9 sous les mêmes restrictions de dimension. On espère, bien entendu, que, sans hypothèse d'ordinarité ni restriction de dimension, la structure de (ϕ, N)-module filtré définie par ρ_π est associée à la représentation p–adique (conjecture C_{st}).

Bibliographie

[BK] S. Bloch and K. Kato. — *p–adic etale cohomology*, Pub. Math. IHES **63**, 107-152 (1986).

[F] J.-M. Fontaine. — *Représentations p–adiques semi–stables*, ce séminaire.

[Fa] G. Faltings. — *p-adic Hodge theory*, J. of the AMS 1, 255-299 (1988).

[H] O. Hyodo. — *A note on p–adic etale cohomology in the semi–stable reduction case*, Invent. math. **91**, 543-557, 1988.

[HK] O. HYODO and K. KATO. — *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, ce séminaire.

[I1] L. ILLUSIE. — *Complexe de de Rham–Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Scient. ENS 4ème série, t. 12, 501-661 (1979).

[I2] L. ILLUSIE. — *Ordinarité des intersections complètes générales*, The Grothendieck Festschrift Vol. II, 375–405, Birkhäuser 1991.

[IR] L. ILLUSIE et M. RAYNAUD. — *Les suites spectrales associées au complexe de de Rham-Witt*, Pub. Math. IHES **57**, 73-212 (1983).

[K] K. KATO. — *Semi-stable reduction and p-adic etale cohomology*, ce séminaire.

[PR] B. PERRIN-RIOU. — *Représentations p-adiques ordinaires*, ce séminaire.

[T] J. TATE. — *p-divisible groups*, Proc. Conf. local fields, Driebergen, 158-183, Springer-Verlag 1967.

Luc Illusie
URA D0752 du CNRS
Mathématiques, Bât. 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE

Exposé V

SEMI–STABLE REDUCTION AND CRYSTALLINE COHOMOLOGY WITH LOGARITHMIC POLES

by **Osamu Hyodo** and **Kazuya Kato**

Introduction

The results of this paper were obtained by the collaboration with J.-M. Fontaine and L. Illusie.

We say a scheme X over a discrete valuation ring A is with *semi–stable reduction* if etale locally on X, there is a smooth morphism $X \to \mathrm{Spec}(A[T_1, \ldots, T_r]/(T_1 \cdots T_r - \pi)$ for some $r \geq 0$, where π is a uniformizing parameter. This condition is equivalent to the condition that X is regular, the generic fiber of X is smooth, and the closed fiber of X is a reduced divisor with normal crossings on X.

Let A be a complete discrete valuation ring with field of fractions K and with residue field k such that $\mathrm{char}(K) = 0$, $\mathrm{char}(k) = p > 0$, and k is perfect, and let K_0 be the field of fractions of the ring $W = W(k)$ of Witt vectors. Let X be a proper scheme over A with semi–stable reduction, and let $Y = X \otimes_A k$. Then, the crystalline cohomology group $H^m_{crys}(Y/W) \otimes_W K_0$ ($m \in \mathbb{Z}$) is not a "good cohomology" when Y is singular. However U. Jannsen conjectured in [J] that there is a "new crystalline cohomology group" D, which is a finite dimensional K_0-vector space endowed with

– a bijective frobenius–linear operator $\varphi : D \to D$ called the frobenius,

– a nilpotent operator $\mathcal{N} : D \to D$ called the monodromy operator, satisfying $\mathcal{N}\varphi = p\varphi\mathcal{N}$,

– a K–isomorphism with the de Rham cohomology

$$\rho : D \otimes_{K_0} K \xrightarrow{\sim} H^m_{DR}(X_K/K) \qquad (X_K = X \otimes_A K)\,.$$

This space D is a mixed characteristic analogue of the limit Hodge structure [S].

The triple $(D, \varphi, \mathcal{N})$ is constructed in Hyodo [H2] by using some de Rham–Witt complex with logarithmic poles. In this paper, we give another construction of $(D, \varphi, \mathcal{N})$ using the crystalline cohomology theory with logarithmic poles and give the isomorphism ρ. The 4–ple $(D, \varphi, \mathcal{N}, \rho)$ has the following further properties.

– $(D, \varphi, \mathcal{N})$ depends only on the scheme $X \otimes_A A/m_A^2$ over A/m_A^2 where m_A denotes the maximal ideal of A (cf. (1.7)).

– The isomorphism ρ depends on a choice of a prime element π of A. If we indicate the choice of π as ρ_π, we have

$$\rho_{\pi u} = \rho_\pi \circ \exp(\log(u)\mathcal{N})$$

for $u \in A^\times$, where we denote the K–linear operator on $D \otimes_{K_0} K$ induced by $\mathcal{N}$ by the same letter $\mathcal{N}$. The K–linear operator $\rho_\pi \circ \mathcal{N} \circ \rho_\pi^{-1}$ on $H^m_{DR}(X_K/K)$ is independent of the choice of π (cf. Thm. 5.1)).

– As is shown in [H2], the triple $(D, \varphi, \mathcal{N})$ is $\otimes_W K_0$ of a triple $(H, \varphi, \mathcal{N})$ with H a canonically defined $W(k)$–module of finite type. L. Illusie has proposed a method to show that the operator $\mathcal{N} : H \to H$ is already nilpotent before $\otimes_W K_0$. This has been carried out by A. Mokrane, see [M].

The theory of crystalline cohomology with logarithmic poles used in this paper is based on the theory of "logarithmic structures" of Fontaine–Illusie reported in [K1] (cf. § 2 for a summary of this theory). In fact, by using this theory of logarithmic structures, we construct $(D, \varphi, \mathcal{N}, \rho)$ in this paper not only for X as above, but also for a scheme over A with a "smooth logarithmic structure whose reduction is of Cartier type" (for example, a product of schemes with semi–stable reduction is such a scheme). We give also the detailed study of the de Rham–Witt complexes with logarithmic poles associated to such general situation (§ 4).

In [J], Jannsen presented a conjecture on the relation between the 4–ple $(D, \varphi, \mathcal{N}, \rho)$ and the p–adic etale cohomology $H^m_{et}(X \otimes_A \overline{K}, \mathbf{Q}_p)$, which was formulated in a more precise form and proved in the case of abelian variety by Fontaine [Fo1]. We discuss this conjecture in another paper [K2].

The subject of this paper is studied independently by Faltings [Fa] § 4, and a different formulation of logarithmic structure is given in [Fa] § 2. The triple $(D, \varphi, \mathcal{N})$ is obtained also from his theory. The study of the de Rham–Witt complex of this paper is not contained in [Fa].

A different approach to this subject using syntomic sheaves is given in [Fo2]. The authors heard that P. Deligne considered a mixed characteristic analogue of the limit Hodge structure in rather old days (unpublished). Some related topics are discussed in [Il2], [Il3], [Il4].

The authors thank especially Professors J.–M. Fontaine and L. Illusie for their collaboration, stimulating discussions and suggestions. Professor Illusie made many improvements of the manuscript. They also thank Professors P. Berthelot, B. Mazur and M. Raynaud for their help. They thank Université de Paris–Sud for its support and its hospitality.

1. — A fast construction of $(D, \varphi, \mathcal{N})$

Before we start the use of the crystalline cohomology theory with logarithmic poles, we remark in this section that it is possible to construct $(D, \varphi, \mathcal{N})$ in the semi–stable reduction case without using such theory, but using only the classical theory of the de Rham–Witt complexes. The proofs of some statements are not given in this section. However proofs using the theory of log structures are given in later sections for generalized versions of the statements. Proofs without using the theory of log structures exist, but we do not discuss them.

In this section, let A be a discrete valuation ring with field of fractions K and with residue field k, and assume that k is a perfect field of characteristic $p > 0$. Let X be a scheme over A with semi–stable reduction, and let $Y = X \otimes_A k$.

All sheaves considered in this section are those on small etale sites.

(1.1). — We define a complex $W_n\omega^{\cdot}_Y$ on Y_{et} as follows. This complex is nothing but the de Rham–Witt complex in [H2], but the construction here is different and more elementary. Though this complex in fact depends in general on the scheme $X \otimes_A A/m_A^2$ over A/m_A^2, not only on Y, we use the notation $W_n\omega_Y^{\cdot}$ for simplicity.

Take a dense open subscheme U of Y which is smooth over k, and let $u : U \to Y$ be the inclusion map. We define $W_n\omega_Y^{\cdot}$ as a subcomplex of $u_*W_n\Omega_U^{\cdot}$ where $W_n\Omega_U^{\cdot}$ is the usual de Rham–Witt complex ([Il1]) of U. Let

$$Y \xrightarrow{i} X \xleftarrow{j} X_K$$

be the inclusion maps. Then $i^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) \to i^{-1}j_*(\mathcal{O}_{X_K}^\times)$ is injective and the restriction of $i^{-1}j_*(\mathcal{O}_{X_K}^\times)/i^{-1}(\mathcal{O}_X^\times)$ to U is isomorphic to the constant sheaf $K^\times/A^\times$. From this we see that there exists a unique homomorphism

$$\mathrm{d}\log : i^{-1}j_*(\mathcal{O}_{X_K}^\times) \longrightarrow u_*W_n\Omega_U^1$$

which induces on $u^{-1}i^{-1}(\mathcal{O}_X^\times)$ the composite map

$$u^{-1}i^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow \mathcal{O}_U^\times \xrightarrow{\mathrm{d}\log} W_n\Omega_U^1$$

and induces the zero map on $K^\times$. Define $W_n\omega_Y^{\cdot}$ to be the $W_n(\mathcal{O}_Y)$-subalgebra of $u_*W_n\Omega_U^{\cdot}$ generated by $dW_n(\mathcal{O}_Y)$ and $\mathrm{d}\log(i^{-1}j_*(\mathcal{O}_{X_K}^\times))$. Then $W_n\omega_Y^{\cdot}$ becomes a subcomplex of $u_*W_n\Omega_U^{\cdot}$. As it is easily seen, $W_n\omega_Y^{\cdot}$ is independent of the choice of U.

(1.2). — One can check the following facts easily. The operators

$$\begin{array}{lll} & F : u_*W_{n+1}\Omega_U^q \longrightarrow u_*W_n\Omega_U^q\,, & V : u_*W_n\Omega_U^q \longrightarrow u_*W_{n+1}\Omega_U^q \\ \text{induce} & & \\ & F : W_{n+1}\omega_Y^q \longrightarrow W_n\omega_Y^q\,, & V : W_n\omega_Y^q \longrightarrow W_{n+1}\omega_Y^q \end{array}$$

respectively, satisfying $FV = p$, $VF = p$, $dF = pFd$, $Vd = pdV$, $FdV = d$. The absolute frobenius of Y induces an endomorphism of the differential algebra

$$\varphi : W_n\omega_Y^{\cdot} \longrightarrow W_n\omega_Y^{\cdot}$$

which induces p^qF on $W_n\omega_Y^q$.

(1.3). — Now fix $m \in \mathbb{Z}$ and let

$$D_n = H^m(Y, W_n\omega^{\cdot}_Y)\,, \quad D_\infty = \varprojlim H^m(Y, W_n\omega^{\cdot}_Y)\,, \quad D = D_\infty \otimes_W K_0\,.$$

If Y is proper over k, it can be shown that each D_n is a $W_n(k)$–module of finite length and D_∞ is a finitely generated $W(k)$–module (cf. (3.2)). The frobenius φ on $W_n\omega^{\cdot}_Y$ (1.2) induces $D_n \to D_n$, $D_\infty \to D_\infty$ and $D \to D$, which we denote also by φ. The map $\varphi : D \to D$ is bijective as is seen from the existence of the endomorphism of complexes $g = (p^{r-q}V : W_n\omega^q_Y \to W_n\omega^q_Y)_{q\in\mathbb{Z}}$ for r bigger than the dimension of Y which satisfies $\varphi g = g\varphi = p^{r+1}$.

(1.4). — To obtain the monodromy operator $\mathcal{N}$, we define a complex $W_n\widetilde{\omega}^{\cdot}_Y$ on Y (which also depends on $X \otimes_A A/m_A^2$). Let $u : U \to Y$ be as in (1.2), and consider the graded differential algebra

$$\mathcal{A}^{\cdot} = u_*(W_n\Omega^{\cdot}_U)[\theta]/(\theta^2)$$

where θ is an indeterminate in degree one satisfying

$$\theta a = (-1)^q a\theta \quad (a \in u_*W_n\Omega^q_U)\,, \quad d\theta = 0\,.$$

We are going to define $W_n\widetilde{\omega}^{\cdot}_Y$ to be a $W_n(\mathcal{O}_Y)$–subalgebra of $\mathcal{A}^{\cdot}$. Let

$$\mathrm{d}\log : i^{-1}j_*(\mathcal{O}^{\times}_{X_K}) \longrightarrow \mathcal{A}^1$$

be the unique homomorphism which induces on $u^{-1}i^{-1}(\mathcal{O}^{\times}_X)$ the composite map

$$u^{-1}i^{-1}(\mathcal{O}^{\times}_X) \longrightarrow \mathcal{O}^{\times}_U \xrightarrow{\mathrm{d}\log} W_n\Omega^1_U$$

and induces on $K^{\times}$ the map $a \to \mathrm{ord}_K(a)\theta$ (here ord_K is the normalized additive discrete valuation of K). We define $W_n\widetilde{\omega}^{\cdot}_Y$ to be the $W_n(\mathcal{O}_Y)$–subalgebra of $\mathcal{A}^{\cdot}$ generated by $dW_n(\mathcal{O}_Y)$ and the image of $\mathrm{d}\log$. Then $W_n\widetilde{\omega}^{\cdot}_Y$ becomes a subcomplex of $\mathcal{A}^{\cdot}$, and is independent of the choice of U.

PROPOSITION (1.5). — *The sequence*

$$0 \longrightarrow W_n\omega^{\cdot}_Y[-1] \longrightarrow W_n\widetilde{\omega}^{\cdot}_Y \longrightarrow W_n\omega^{\cdot}_Y \longrightarrow 0$$
$$a \longrightarrow a\theta\,, \quad \theta \longrightarrow 0$$

is exact.

This will be proven in (4.20).

(1.6). — Define $\mathcal{N} : D_n \to D_n$ as the connecting homomorphism of the exact sequence (1.5). The commutative diagram of exact sequences

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & W_n\omega^{\cdot}_Y[-1] & \longrightarrow & W_n\widetilde{\omega}^{\cdot}_Y & \longrightarrow & W_n\omega^{\cdot}_Y & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle p\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & W_n\omega^{\cdot}_Y[-1] & \longrightarrow & W_n\widetilde{\omega}^{\cdot}_Y & \longrightarrow & W_n\omega^{\cdot}_Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

where the middle φ is induced from the ring homomorphism $\mathcal{A}^{\cdot} \to \mathcal{A}^{\cdot}$ which extends φ of $u_*W_n\Omega^{\cdot}_U$ by $\theta \longmapsto p\theta$, proves $\mathcal{N}\varphi = p\varphi\mathcal{N}$. If Y is proper over k, this equation and the bijectivity of φ show that $\mathcal{N} : D \to D$ is nilpotent.

(1.7). — One can check that the complexes $W_n\omega^{\cdot}_Y$ and $W_n\widetilde{\omega}^{\cdot}_Y$ depend only on the scheme $X \otimes_A A/m_A^2$ over A/m_A^2, and hence $(D_n, \varphi, \mathcal{N})$ $(n \geq 1)$ depends only on $X \otimes_A A/m_A^2$ over A/m_A^2. This last fact can also be seen, by using the theory of log structures, from the fact that $(D_n, \varphi, \mathcal{N})$ is determined by certain log structures on Y and on $\mathrm{Spec}(k)$ (cf. § 3) which depend only on the scheme $X \otimes_A A/m_A^2$ over A/m_A^2.

2. — Crystalline cohomology with logarithmic poles

In this section, we give a summary of the paper [K1] on the logarithmic structures of Fontaine–Illusie, and add a logarithmic version (2.24) of a result [BO2] (1.6) of Berthelot–Ogus.

In this section, monoids are assumed to be commutative and have a unit element, and homomorphisms of monoids are assumed to preserve the unit elements. For a monoid P, let P^{gp} be the associated commutative group $\{ab^{-1}; a, b \in P\}$. We call a monoid *integral* if $P \to P^{gp}$ is injective (i.e. if "$ab = ac \Longrightarrow b = c$" holds).

(2.1). — For a scheme X, a *pre-logarithmic structure* on X is a sheaf of monoids M on the etale site X_{et}, endowed with a homomorphism $\alpha : M \to \mathcal{O}_X$

with respect to the multiplicative law on $\mathcal{O}_X$. A pre–logarithmic structure is called a *logarithmic structure* (or a *log structure*) if

$$\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^\times \quad \text{via } \alpha\,.$$

For example, the sheaf $M = \mathcal{O}_X^\times$ with the inclusion map $\mathcal{O}_X^\times \to \mathcal{O}_X$ is a log structure which we call the *trivial* log structure. If M is a log structure, we identify $\mathcal{O}_X^\times$ with the subsheaf $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times)$ of M via α.

A morphism between schemes with log structures is defined in the evident way.

(2.2). — For a pre–log structure M on X, the log structure M^a on X associated to M is defined as the push out of $\mathcal{O}_X^\times \leftarrow \alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) \to M$ in the category of sheaves of monoids. That is,

$$M^a = (\mathcal{O}_X^\times \oplus M)/\sim$$

where $\sim$ is the equivalent relation

$$\begin{aligned}(u,a) \sim (v,b) \iff &\text{ there exist (locally) } c,\ d \in \alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) \text{ such that}\\ &\alpha(c)u = \alpha(d)v \quad \text{and} \quad ad = bc\end{aligned}$$

(the map $M^a \to \mathcal{O}_X$ is the sum of $M \to \mathcal{O}_X$ and the inclusion map $\mathcal{O}_X^\times \to \mathcal{O}_X$). The natural morphism $M \to M^a$ is universal among morphisms from M to log structures on X.

(2.3). — For a morphism of schemes $f : X \to Y$ and a log structure M on Y, the *inverse image* f^*M of M is defined to be the log structure on X associated to the pre–log structure $f^{-1}(M)$ (endowed with $f^{-1}(M) \to f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{O}_X$).

(2.4). — The category of schemes with log structures has finite inverse limits. For a finite inverse system $(X_\lambda, M_\lambda)_\lambda$, its inverse limit (X, M) is described as follows. The scheme X is the inverse limit of the inverse system $(X_\lambda)_\lambda$. If $p_\lambda : X \to X_\lambda$ denote the projections and M' denotes the inductive limit of the system $(p_\lambda^{-1}(M_\lambda))_\lambda$ in the category of sheaves of monoids on X_{et}, M is the log structure associated to the pre–log structure M'.

(2.5). — For a morphism of schemes with log structures $f : (X, M) \to (Y, N)$, we define an $\mathcal{O}_X$–module $\omega^1_{(X,M)/(Y,N)}$, which is called the *sheaf of differential forms with logarithmic poles relative to* f and is often denoted simply as $\omega^1_{X/Y}$, to be the quotient of $\Omega^1_{X/Y} \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} M^{gp})$ divided by the $\mathcal{O}_X$–submodule generated by local sections of the forms $(d\alpha(a), 0) - (0, \alpha(a) \otimes a)$ $(a \in M)$ and $(0, 1 \otimes a)$ $(a \in f^{-1}(N))$. The class of $(0, 1 \otimes a)$ $(a \in M)$ in $\omega^1_{X/Y}$ is denoted by $\mathrm{d}\log(a)$. Define $\omega^q_{X/Y} = \wedge^q_{\mathcal{O}_X} \omega^1_{X/Y}$ for $q \in \mathbb{Z}$. Then with the map $d : \omega^q_{X/Y} \to \omega^{q+1}_{X/Y}$; $d(a \,\mathrm{d}\log(b_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\log(b_q)) = da \wedge \mathrm{d}\log(b_1) \wedge \cdots \mathrm{d}\log(b_q)$ $(a \in \mathcal{O}_X, b_1, \ldots, b_q \in M)$, $(\omega^{\cdot}_{X/Y}, d)$ becomes a complex.

(2.6). — We say a log structure M on a scheme X is *fine* if etale locally on X, there is a finitely generated integral monoid P and a homorphism $h : P_X \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X$ where P_X denotes the constant sheaf defined by P, such that M is isomorphic to the log structure associated to the pre–log structure (P_X, α).

A standard example of a fine log structure is the following. Let X be a regular scheme and D a reduced divisor with normal crossings on X. Let

$$M = \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_U^\times \qquad (j : U = X - D \hookrightarrow X)$$

with the inclusion map $\alpha : M \to \mathcal{O}_X$. Then M is a fine log structure which is associated etale locally to

$$\mathbb{N}^r_X \longrightarrow \mathcal{O}_X : (m_i)_{1 \le i \le r} \longmapsto \prod_i \pi_i^{m_i}$$

where $\pi_i \in \mathcal{O}_X$ define regular subschemes of X whose union is D. The reason why we work with the etale topology in the theory of log structures is that the definition of "normal crossing" is etale local.

(2.7). — For a morphism $f : (X, M) \to (Y, N)$ between schemes with fine log structures, a *chart* of f is a system $(P_X \xrightarrow{s} M,\ Q_Y \xrightarrow{t} N,\ Q \xrightarrow{h} P)$ where P and Q are finitely generated integral monoids and s, t, h are homomorphisms satisfying the following conditions : s and t induce isomorphisms $(P_X)^a \xrightarrow{\sim} M$ and $(Q_Y)^a \xrightarrow{\sim} N$, respectively (here P_X is regarded as a pre–log structure via $P_X \xrightarrow{s} M \longrightarrow \mathcal{O}_X$, and Q_Y similarly), and (f, h) commutes with (s, t) in the evident sense. A chart of f exists etale locally.

In the following (2.8)–(2.12), let $f : (X, M) \to (Y, N)$ be a morphism of schemes with fine log structures. We give definitions of several types of morphisms (cf. [K1] § 3 and § 4).

(2.8). — We say f is a *closed immersion* (resp. an *exact closed immersion*) if the underlying morphism $f : X \to Y$ is a closed immersion and the map $f^*N \to M$ is surjective (resp. bijective).

(2.9). — It can be proven that the following two conditions (i) and (ii) (resp. (i)' and (ii)') are equivalent. We say f is *smooth* (resp. *etale*) if the equivalent conditions (i) and (ii) (resp. (i)' and (ii)') are satisfied.

(i) (resp. (i)'). The underlying morphism $X \to Y$ is locally of finite presentation, and for any commutative diagram of schemes with fine log structures of the form

$$\begin{array}{ccc} (T', L') & \xrightarrow{s} & (X, M) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ (T, L) & \xrightarrow{t} & (Y, N) \end{array}$$

where i is an exact closed immersion such that the ideal of T' in T is nilpotent, there exists etale locally on T a morphism (resp. there exists a unique morphism) $g : (T, L) \to (X, M)$ such that $gi = s$ and $fg = t$.

(ii) (resp. (ii)'). Etale locally on X and on Y, there exists a chart $(P_X \to M,\ Q_Y \to N,\ Q \xrightarrow{h} P)$ of f such that the kernel and the torsion part of the cokernel (resp. the kernel and the cokernel) of the induced homomorphism $h^{gp} : Q^{gp} \to P^{gp}$ are finite groups whose orders are invertible on X, and such that the induced map $X \to Y \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[Q])} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[P])$ is etale in the usual sense.

We have :

(2.9.1). — If f is smooth, the $\mathcal{O}_X$-module $\omega^q_{X/Y}$ is locally free of finite type for any q.

(2.9.2). — If X is locally of finite type over Y, there exists etale locally on X a factorization $(X,M) \xrightarrow{i} (Z,L) \xrightarrow{g} (Y,N)$ with L fine, i a closed immersion and g smooth. This follows from the existence of local charts of f [K1, 2.9 (2)][(1)]

(2.9.3). — If f is a closed immersion, there exists etale locally on X a factorization $(X,M) \xrightarrow{i} (Z,L) \xrightarrow{g} (Y,N)$ with L fine, i an exact closed immersion and g etale [K1, 4.10].

(2.10). — It can be proved that the following conditions (i) and (ii) are equivalent. We say f is *integral* if there equivalent conditions are satisfied.

(1) By [K1, 2.9 (2)] we may assume X and Y are affine and we have a global chart of $f : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ given by $(P \to A,\ Q \to B,\ u : Q \to P)$. We thus have a factorization $(X,M) \xrightarrow{i_1} (X_1,L_1) \to (Y,N)$ where $X_1 = Y \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[Q])} \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[P])$ and L_1 is the log structure associated to $P \to \mathbf{Z}[P] \to B_1 = A \otimes_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[P]$. Moreover, $M = i_1^* L_1$. Now, choose a surjective map $v : \mathbf{N}^r \to P$, and consider the factorization of u given by $Q \to Q \oplus \mathbf{N}^r \to P$ where the first map sends a to $(a,0)$ and the second one (a,b) to $u(a)+v(b)$. Taking the pull-back by $Y \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[Q]$ of $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[P]) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[Q \oplus \mathbf{N}^r]) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[P])$, we get a factorization $(X_1,L_1) \xrightarrow{i_2} (X_2,L_2) \to (Y,N)$ where i_2 is a closed immersion and $(X_2,L_2) \to (Y,N)$ is smooth. Here $X_2 = \mathrm{Spec}(B_2)$, with $B_2 = A \otimes_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[Q \oplus \mathbf{N}^r]$. Finally, choose a surjective map of B_1-algebras $B_1[t_1,\dots,t_n] \to B$ and endow $Z_1 = \mathrm{Spec}(B_1[t_1,\dots,t_n])$ (resp. $Z_2 = \mathrm{Spec}(B_2[t_1,\dots,t_n])$) with the inverse image log structure of X_1 (resp. X_2). We thus get a factorization $(X,M) \to (Z_1,M_1) \to (Z_2,M_2) \to (Y,N)$ where $(X,M) \to (Z_2,M_2)$ is a closed immersion and $(Z_2,M_2) \to (Y,N)$ is smooth, as desired.

(i) For any scheme Y' with a fine log structure N' and for any morphism $(Y', N') \to (Y, N)$, the log structure of the fiber product $(X, M) \times_{(Y,N)} (Y', N')$ is fine.

(ii) Etale locally on X and on Y, there exists a chart $(P_X \to M,\ Q_Y \to N,\ Q \xrightarrow{h} P)$ of f such that the ring homomorphism $\mathbf{Z}[Q] \to \mathbf{Z}[P]$ induced by h is flat.

We have (cf. [K1] § 4) :

(2.10.1). — The morphism f is integral if $f^*N \xrightarrow{\sim} M$ or if $N_{\overline{y}}/\mathcal{O}^{\times}_{Y,\overline{y}}$ is generated by one element for any $y \in Y$ ($(\ )_{\overline{y}}$ denotes the stalk at a geometric point dominating y).

(2.10.2). — If f is smooth and integral, the underlying morphism $X \to Y$ is flat.

(2.11). — We say f is *exact* if the diagram

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(N) & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^{-1}(N)^{gp} & \longrightarrow & M^{gp} \end{array}$$

is cartesian (then a closed immersion (2.7) is exact if and only if it is an exact closed immersion in the sense of (2.7)).

(2.12). — For a prime number p and a scheme S over $\mathbf{F}_p$ with a fine log. str. L, the ***absolute frobenius*** $F_{(S,L)} : (S, L) \to (S, L)$ is defined to be the pair of the absolute frobenius $F_S : S \to S$ and the p–th power map $F_S^{-1}(L) \cong L \xrightarrow{p} L$ where we used the natural isomorphism $F_S^{-1}(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$ of any sheaf $\mathcal{F}$ on S_{et}. In the case X and Y are schemes over $\mathbf{F}_p$, we say f is of *Cartier type* if f is integral and the morphism g in the following commutative diagram with a cartesian square is exact.

(2.12.1)
$$\begin{tikzcd}(X,M) \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "F_{(X,M)}"] & (X',M') \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X,M) \arrow[d, "f"] \\ & (Y,N) \arrow[r, "F_{(Y,N)}"] & (Y,N)\end{tikzcd}$$

If f is smooth and of Cartier type, we have a Cartier isomorphism

(2.12.2) $$C^{-1} : \omega^q_{X'/Y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q(\omega^{\cdot}_{X/Y}) \qquad (q \in \mathbb{Z})$$

characterized by

$$C^{-1}(a\,\mathrm{d}\log(h^*(b_1)) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\log(h^*(b_q))) = g^*(a)\mathrm{d}\log(b_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\log(b_q)$$

$(a \in \mathcal{O}_X, \ldots, b_1, \ldots, b_q \in M)$.

(2.13). — We give remarks on smooth morphisms and morphisms of Cartier type.

(2.13.1). — Let A be a discrete valuation ring. Then, we call the log structure on Spec(A) corresponding to the closed point (regarded as a reduced divisor with normal crossings) in the sense of (2.6) the *canonical log structure* of Spec(A). If A' is a discrete valuation ring which is finite over A and N, N' denote the canonical log structures on Spec(A) and Spec(A'), respectively, the following three conditions on $f : (\mathrm{Spec}(A'), N') \to (\mathrm{Spec}(A), N)$ are equivalent. (i) f is etale. (ii) f is smooth. (iii) A' is tamely ramified over A.

(2.13.2). — Let A be as in (2.13.1) and X be a scheme over A with semi-stable reduction. Let $Y = X \otimes_A k$ where k is the residue field of A, let

M be the log structure on X corresponding to Y (regarded as a divisor with normal crossings on X), and let N be the canonical log structure on $\mathrm{Spec}(A)$. Then, the morphism $(X, M) \to (\mathrm{Spec}(A), N)$ is smooth (and it is integral by (2.10.1)). If k is of positive characteristic, the morphism $(Y, \overline{M}) \to (\mathrm{Spec}(k), \overline{N})$, where $\overline{M}$ and $\overline{N}$ denote the inverse images of M and N, respectively, is smooth of Cartier type.

(2.13.3). — Let k be a field and $j : U \hookrightarrow X$ be a toroidal embedding of a smooth k–variety U into a normal k–variety X. Then if M denotes the log structure $\mathcal{O}_X \cap j_*\mathcal{O}_U^\times$, (X, M) is smooth over $\mathrm{Spec}(k)$ where $\mathrm{Spec}(k)$ is endowed with the trivial log structure (2.1). The equivalence between (2.9) (i) and (2.9) (ii) in the case $Y = \mathrm{Spec}(k)$ and N is the trivial log structure says that the notion of toroidal embeddings over k is essentially equivalent to the notion of a scheme with a fine log structure which is smooth over $\mathrm{Spec}(k)$.

(2.13.4). — Smooth integral morphisms are stable under base changes, compositions, and under taking fiber products. The same is true for smooth morphisms of Cartier type in characteristic $p > 0$. For example, for X and A as in (2.13.2) with Y singular and for a discrete valuation ring A' which is finite with ramification index > 1 over A, $X' \overset{\mathrm{def}}{=} X \otimes_A A'$ is not regular. However from the view point of log structures, X' is not so ugly : with the log structure M' as the fiber product, (X', M') is smooth over $(\mathrm{Spec}(A'), N')$ with N' the canonical log structure on $\mathrm{Spec}(A')$.

(2.14). — The theory of crystalline cohomology is generalized to schemes with fine log structures as follows. As a base, we take a 4–ple (S, L, I, γ) where S is a scheme such that $\mathcal{O}_S$ is killed by a non–zero integer, L is a fine log structure on S, I is a quasi–coherent ideal on S, and γ is a PD (= divided power) structure on I. Let (X, M) be a scheme with fine log structure over (S, L) such that γ extends to X. We keep these notations in (2.15)–(2.17) and in (2.19)–(2.22).

(2.15). — We define the *crystalline site* $((X, M)/(S, L, I, \gamma))_{crys}$ (which we abbreviate as $((X, M)/(S, L))_{crys}$ or as $(X/S)^{\log}_{crys}$) as follows. An object is a 5–ple (U, T, M_T, i, δ) where U is an etale scheme over X, (T, M_T) is a scheme with a fine log structure over (S, L), i is an exact closed immersion $(U, M_{|U}) \to (T, M_T)$ over (S, L), and δ is a PD–structure on the ideal of U in T which is compatible with γ. Morphisms are defined in the evident way. A family of morphisms

$$g_\lambda : (U_\lambda, T_\lambda, M_{T_\lambda}, i_\lambda, \delta_\lambda) \longrightarrow (U, T, M_T, i, \delta)$$

is a covering if the morphisms of schemes $g_\lambda : T_\lambda \to T$ are etale and form a covering for the etale topology, and $U_\lambda \simeq T_\lambda \times_T U$ for all λ.

The *structure sheaf* $\mathcal{O}_{X/S}$ of $(X/S)^{\log}_{crys}$ is defined by

$$\mathcal{O}_{X/S}(U, T, M_T, i, \delta) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T).$$

(2.16). — Let $i : (X, M) \to (X', M')$ be a closed immersion over (S, L) with M' fine. Then, the *PD–envelope* (D, M_D) of (X, M) in (X', M') is defined having the following characterization. Etale locally on X, i factors as $(X, M) \xrightarrow{i'} (X'', M'') \xrightarrow{g} (X', M')$ with M'' fine, i' an exact closed immersion and g etale, and D is the usual PD–envelope of X in X'' with the inverse image M_D of M'. This (D, M_D) has the desired universality as in the classical case. If i is an exact closed immersion, then D is the usual PD–envelope of X in X' and M_D is the inverse image of M'.

For example, let $X = \mathrm{Spec}(k[t])$ with k a field and t an indeterminate, and let M be the log structure on X associated to the divisor "$t = 0$". Let $(X', M') \stackrel{\text{def}}{=} (X, M) \times_{\mathrm{Spec}(k)} (X, M)$ where $\mathrm{Spec}(k)$ is endowed with the trivial log structure (2.1) and let $i : (X, M) \to (X', M')$ be the diagonal morphism. Then, $X' = \mathrm{Spec}(k[t_1, t_2])$, M' is the log structure corresponding to the divisor "$t_1 = 0$" $\cup$ "$t_2 = 0$", i is a closed immersion but not exact. As (X'', M''), we can take $X'' = \mathrm{Spec}(k[t_1, t_2, t_1 t_2^{-1}, t_1^{-1} t_2])$ with the log structure M'' corresponding to the divisor "$t_1 = 0$" (= "$t_2 = 0$)". Hence the PD–envelope of (X, M) in (X', M') is $\mathrm{Spec}(k[t_1] < v >)$ where $v = t_1 t_2^{-1} - 1$ regarded as an indeterminate endowed with the log structure associated to $\mathbb{N} \to k[t_1] < v >$; $1 \to t_1$. ($< >$ means the PD–polynomial ring.)

(2.17). — The theory of crystals is generalized to schemes with fine log structures as follows. A sheaf of $\mathcal{O}_{X/S}$–modules $\mathcal{F}$ on $(X/S)^{\log}_{crys}$ is called a *crystal* if the map

$$\mathcal{O}_{T'} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{F}_T \longrightarrow \mathcal{F}_T\,,$$

is an isomorphism for any morphism $T' \to T$ in $(X/S)^{\log}_{crys}$, where $\mathcal{F}_T$ and $\mathcal{F}_{T'}$ denote the sheaves on T_{et} and T'_{et} induced by $\mathcal{F}$, respectively. If $(X, M) \xrightarrow{i} (Z, N)$ is a closed immersion over (S, L) with N fine and (Z, N) smooth over (S, L), the following two categories (a) (b) are equivalent. Let (D, M_D) be the PD-envelope (2.16) of (X, M) in (Z, N).

(a) The category of crystals on $(X/S)^{\log}_{crys}$.

(b) The category of $\mathcal{O}_D$-modules $\mathcal{K}$ on $D_{et} = X_{et}$ endowed with

$$\nabla : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega^1_{Z/S}$$

satisfying the following conditions (i)–(iii).

(i) ∇ is additive and

$$\nabla(am) = a\nabla(m) + m \otimes da \quad (a \in \mathcal{O}_D\,,\ m \in \mathcal{K})\,.$$

(ii) The composite

$$\mathcal{K} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega^1_{Z/S} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega^2_{Z/S}$$

is zero where we extend ∇ to

$$\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega^q_{Z/S} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega^{q+1}_{Z/S}\,; \quad \nabla(m \otimes \omega) = \nabla(m) \wedge \omega + m \otimes d\omega\,.$$

(iii) If $x \in D$ and y denotes the image of x in Z, and if $t_1, \ldots, t_r$ are elements of $N^{gp}_{\overline{y}}$ such that $(\mathrm{d}\log(t_i))_i$ is a basis of the free $\mathcal{O}_{Z,\overline{y}}$–module $\omega^1_{Z/S,\overline{y}}$, then for any $m \in \mathcal{K}_{\overline{x}}$ we have

$$\left(\prod_{1 \le i \le r} \prod_{1 \le j \le c_i} (\nabla^{\log}_{t_i} - n_j) \right) (m) = 0$$

for some $c_i \geq 0$, $n_j \in \mathbb{Z}$. Here $\nabla^{\log}_{t_i}$ is defined by

$$\nabla(m) = \sum_{1 \le i \le r} \nabla^{\log}_{t_i}(m) \otimes \mathrm{d}\log(t_i) \qquad (m \in \mathcal{K}_{\overline{x}})\,.$$

The definition of the functor giving the equivalence of categories follows faithfully the classical case. In particular, $\mathcal{K} = \mathcal{F}_D$ as an $\mathcal{O}_D$–module.

Remark (2.17.1). — Under the conditions (i) and (ii), $(\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega^{\cdot}_{Z/S}, \nabla)$ becomes a complex.

Remark (2.17.2). — Under the conditions (i) and (ii), if (iii) is satisfied for one choice of $(t_i)_i$, then it is satisfied for any choice of $(t_i)_i$.

(2.17.3). — Let (Z', N') be the fiber product of two copies of (Z, N) over (S, L) in the category of schemes with fine log structures (2.13.5), let $(D', M_{D'})$ be the PD–envelope of (X, M) in (Z', N'), and let p_1, $p_2 : D' \to D$ be the two projections. Assume $t_1, \ldots, t_r$ as above are given globally. Then, $\mathcal{O}_{D'}$ is isomorphic via p_2 to the PD–polynomial ring $\mathcal{O}_D < s_1, \ldots, s_r >$ with $s_1, \ldots, s_r$ indeterminates, and the isomorphism is given by $s_i \longmapsto p_1^*(t_i)p_2^*(t_i)^{-1} - 1$. The composite

$$(*) \qquad \mathcal{K}_D \longrightarrow p_1^*\mathcal{K}_D \cong \mathcal{K}_{D'} \cong p_2^*\mathcal{K}_D \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^r} \prod_i s_i^{[n_i]} \otimes \mathcal{K}_D$$

is given by

$$(**) \qquad m \longmapsto \Big(\prod_{1 \leq i \leq r} s_i^{[n_i]} \cdot \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{1 \leq j < n_i} (\nabla_{t_i}^{\log} - j)(m) \Big)_{n \in \mathbb{N}^r}.$$

A similar fact holds for crystals in the sense of derived categories ([B] V 3.6.1) : if $\mathcal{K}$ is a crystal in the derived category and $\nabla_{t_i}^{\log}$ denotes the $s_i^{[1]}$–component of $\mathcal{K}_D \to \mathcal{K}_{D'}$ then $(*)$ is given by $(**)$.

(2.18). — To give an explicit description of the crystalline cohomology of crystals (2.20), we give here a preliminary definition. For a morphism of schemes with fine log structures $f : (X, M) \to (S, L)$ (at this point we don't need any PD–structure) such that the underlying morphism $X \to S$ is locally of finite type, an *embedding system* for f is a pair of simplicial objects $(X^{\cdot}, M^{\cdot})$ and $(Z^{\cdot}, N^{\cdot})$ in the category of schemes with fine log structures endowed with morphisms

$$(X^{\cdot}, M^{\cdot}) \to (X, M), \quad (X^{\cdot}, M^{\cdot}) \longrightarrow (Z^{\cdot}, N^{\cdot}), \quad (Z^{\cdot}, N^{\cdot}) \longrightarrow (S, L)$$

(here (X, M) and (S, L) are regarded as constant simplicial objects) satisfying the following conditions (i)–(iv).

(i) The diagram

$$\begin{array}{ccc} (X^{\cdot}, M^{\cdot}) & \longrightarrow & (Z^{\cdot}, N^{\cdot}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, M) & \longrightarrow & (S, L) \end{array}$$

is commutative.

(ii) The morphism $X^{\cdot} \to X$ is a hyper–covering for the etale topology, and M^i $(i \geq 0)$ is the inverse image of M on X^i for each i.

(iii) Each $(Z^i, N^i) \to (S, L)$ is smooth.

(iv) Each $(X^i, M^i) \to (Z^i, N^i)$ is a closed immersion.

It is easily seen that embedding systems for f exist.

Let $(X^{\cdot})^{\sim}_{et}$ be the topos whose object is a system which associates to each $i \geq 0$ a sheaf $\mathcal{F}^i$ on X^i_{et}, and to each increasing map $s : \{0, \ldots, i\} \to \{0, \ldots, j\}$ a morphism $\rho_s : \underline{s}^{-1}(\mathcal{F}^i) \to \mathcal{F}^j$ where $\underline{s}$ denotes the morphism $X^j \to X^i$ corresponding to s, satisfying $\rho_{id.} = id.$ and $\rho_{st} = \rho_s \cdot \underline{s}^{-1}(\rho_t)$.

The obvious morphism of topoi $\theta : (X^{\cdot})^{\sim}_{et} \to X^{\sim}_{et}$ ($X^{\sim}_{et}$ denotes the topos of sheaves on X_{et}) satisfies

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R\theta_* \theta^{-1}(\mathcal{F})$$

for any abelian sheaf $\mathcal{F}$ on X_{et} ([SD]). For a complex $\mathcal{F}^{\cdot}$ in $(X^{\cdot})^{\sim}_{et}$ bounded below, $R\theta_*(\mathcal{F}^{\cdot})$ is computed as follows. By replacing $\mathcal{F}^{\cdot}$ with a complex which is quasi–isomorphic to $\mathcal{F}^{\cdot}$, we assume $R^q\theta_{i*}(\mathcal{F}^{ij}) = 0$ for any $q > 0$ and any i, j, where θ_i denotes $X^i \to X$ and $\mathcal{F}^{ij}$ denotes the degree j part of the complex on X^i defined by $\mathcal{F}^{\cdot}$. Then $R\theta_*(\mathcal{F}^{\cdot})$ is represented by the double complex $(\theta_{i*}(\mathcal{F}^{ij}))_{ij}$ ([SD]).

Definition (2.19). — *With notations as in* (2.14), *assume X is locally of finite type over S. Fix an embedding system $((X^{\cdot}, M^{\cdot}), (Z^{\cdot}, N^{\cdot}))$ for $(X, M) \to (S, L)$, and let (D^i, M_{D^i}) be the PD–envelope of (X^i, M^i) in*

(Z^i, N^i). *For a crystal* $\mathcal{F}$ *on* $(X/S)^{\log}_{crys}$, *define the complex* $C_{X/S,\mathcal{F}}$ *in* $(X^{\cdot})^{\sim}_{et}$ *by*

$$C_{X/S,\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_{D^{\cdot}} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{F}_{D^{\cdot}} \otimes_{\mathcal{O}_{Z^{\cdot}}} \omega^1_{Z^{\cdot}/S} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{F}_{D^{\cdot}} \otimes_{\mathcal{O}_{Z^{\cdot}}} \omega^2_{Z^{\cdot}/S} \xrightarrow{\nabla} \cdots),$$

and call it the crystalline complex of $\mathcal{F}$. *If* $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{X/S}$ *we denote* $C_{X/S,\mathcal{F}}$ *simply by* $C_{X/S}$.

Proposition (2.20). — *Let the situation be as in* (2.19). *Let* $u^{\log}_{X/S}$ *be the canonical morphism from* $(X/S)^{\log}_{crys}$ *to* X_{et}. *Then there exists a canonical isomorphism*

$$Ru^{\log}_{X/S*}(\mathcal{F}) \cong R\theta_*(C_{X/S,\mathcal{F}}).$$

(2.21). — In (2.19), crystalline complexes associated to two different embedding systems E, E' are related to each other as follows. There is an embedding system E'' having morphisms $E'' \to E$ and $E'' \to E'$ of embedding systems. Denote the crystalline complex associated to E (resp. E', resp. E'') by $C_{X/S,\mathcal{F}}$ (resp. $C'_{X/S,\mathcal{F}}$, resp. $C''_{X/S,\mathcal{F}}$). Then the canonical morphisms

$$R\theta_*(C_{X/S,\mathcal{F}}) \longrightarrow R\theta''_*(C''_{X/S,\mathcal{F}}) \longleftarrow R\theta'_*(C'_{X/S,\mathcal{F}})$$

with θ, θ', θ'' the evident morphisms of topoi, are isomorphisms, and compatible with the isomorphism of (2.20).

The following lemma on crystalline complexes is used frequently in this paper.

Lemma (2.22). — *In* (2.19), *if* $f : (X, M) \to (S, L)$ *factors as* $(X, M) \xrightarrow{\overline{f}} (\overline{S}, \overline{L}) \xrightarrow{i} (S, L)$ *with* $\overline{f}$ *smooth integral and* i *an exact closed immersion such that the ideal of* $\overline{S}$ *in* S *is a sub-PD-ideal of* I, *then* $C_{X/S}$ *is flat over* $\theta^{-1}f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ *for any choice of an embedding system.*

Proof. It is enough to show that D^i is flat over S. First, we show that it is sufficient to prove (2.22) for one choice of an embedding system. If $((X^{\cdot}, M^{\cdot}), (Z^{\cdot}, N^{\cdot}))$ is an embedding system, $(Z^{\cdot}, N^{\cdot})$ is integral over $(S^{\cdot}, L^{\cdot})$

on a neighbourhood of X in Z. So we may assume $(Z^{\cdot}, N^{\cdot})$ is integral over (S, L). Assume we have two embedding systems $((X^{\cdot}, M^{\cdot}), (Z^{\cdot}, N^{\cdot}))$, $((X^{\cdot})', (M^{\cdot})'), ((Z^{\cdot})', (N^{\cdot})'))$ with $(Z^{\cdot}, N^{\cdot})$ and $((Z^{\cdot})', N^{\cdot})')$ integral over (S, L), and let $(((X^{\cdot})'', (M^{\cdot})''), ((Z^{\cdot})'', (N^{\cdot})'')$ be the third embedding system defined by $(X^i)'' = X^i \times_X (X^i)'$ and $((Z^i)'', (N^i)'') = (Z^i, N^i) \times_{(S,L)} ((Z^i)', (N^i)')$. If (D^i, M_{D^i}) (resp. $((D^i)', M_{(D^i)'}))$ denotes the PD-envelope of (X^i, M^i) in (Z^i, N^i) (resp. $((X^i)', (M^i)')$ in $((Z^i)', (N^i)'))$, and similarly $((D^i)'', M_{(D^i)''})$ denotes the PD-envolope of (X^i, M^i) in $(Z^i)'', (N^i)'')$ then etale locally

$$(D^i)'' \cong \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{D^i} < t_1, \ldots, t_r >)$$

$$(D^i)'' \cong \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{(D^i)'} < t'_1, \ldots, t'_{r'} >)$$

where $t_1, \ldots, t_r, t'_1, \ldots, t'_{r'}$ are indeterminates and $< >$ means the PD polynomial ring (same proof as in [K1] (6.5)). Hence the flatness of D^i over S is equivalent to that of $(D^i)'$. We may work locally on X, so we can choose an embedding system such that $X^i = X$ for any i, (Z^i, N^i) is a constant simplicial object (Z, N), $X = Z \times_S \overline{S}$ and $(Z, N) \to (S, L)$ is smooth and integral. Then, $D^i = Z$ for any i and Z is flat over S by (2.10.2).

The base change theorem for crystalline cohomology ([B] V 3.5) is generalized to log structures (cf. [K1] (6.10)). We shall use the following special case of the generalization.

PROPOSITION (2.23). — *Let*

$$\begin{tikzcd}
(X', M') \arrow[r, "g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X, M) \arrow[d] \\
(\overline{S}', \overline{L}') \arrow[r] \arrow[d] & (\overline{S}, \overline{L}) \arrow[d] \\
(S', L', I', \gamma') \arrow[r] & (S, L, I, \gamma)
\end{tikzcd}$$

be a commutative diagram of schemes with fine log structures such that : $f : (X, M) \to (\overline{S}, \overline{L})$ is smooth integral and the upper square is cartesian, the *lower two vertical arrows are exact closed immersions,* $\overline{S}$ (resp. $\overline{S}'$) *is defines in* S (resp. S') *by a PD–subideal of* I (resp. I'), *and* $\overline{S}' \to \overline{S}$ *is radicial. Then for a flat crystal* $\mathcal{F}$ *on* $(X/S)^{\log}_{crys}$, *we have*

$$\mathcal{O}_{S'|X'} \otimes^{L}_{\mathcal{O}_{S|X'}} Ru^{\log}_{X/S^*}(\mathcal{F})_{|X'} \xrightarrow{\sim} Ru^{\log}_{X'/S'}(g^*_{crys}(\mathcal{F}))\,.$$

Here for a sheaf $\mathcal{G}$ on X, S or S', $\mathcal{G}_{|X'}$ denotes the inverse image of $\mathcal{G}$ on X'. This is proved by using

$$\mathcal{O}_{S'|X'} \otimes_{\mathcal{O}_{S|X'}} (C_{X/S,\mathcal{F}|X'}) \xrightarrow{\sim} C_{X'/S',g^*_{crys}(\mathcal{F})}$$

and the flatness of $C_{X/S,\mathcal{F}}$ over $\mathcal{O}_S$ (2.22).

The following result (2.24) is the log structure version of the result of Berthelot–Ogus [BO2] (1.4) on the bijectivity of the relative frobenius map $\otimes\mathbb{Q}$ on the relative crystalline cohomology.

PROPOSITION (2.24). — *Let* p *be a prime number and let* $f : (X, M) \to (S, L)$ *be a smooth morphism of Cartier type* (2.12) *between schemes over* $\mathbb{F}_p$ *with fine log structures. Assume we are given schemes with fine log structures* (T_n, L_n), $n \geq 1$ *with exact closed immersions*

$$(S, L) \hookrightarrow (T_1, L_1) \hookrightarrow (T_2, L_2) \hookrightarrow \cdots$$

and a PD–structure on the ideal of S *in* T_n *for each* n, *and assume that the following* (i)–(iv) *are satisfied.*

(i) *Each* $T_n \to T_{n+1}$ *is a PD–morphism.*

(ii) T_n *is a flat scheme over* $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ *and* $T_n \xrightarrow{\sim} T_{n+1} \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

(iii) $\{\mathrm{rank}_x(\omega^1_{X/S})\}_{x\in X}$ *is bounded. (Remark : the condition (iii) is satisfied if* X *is quasi–compact).*

Consider the diagram (2.12.1) and let

$$\varphi : Ru^{\log}_{X'/T^*_n}(\mathcal{O}_{X'/S}) \longrightarrow Ru^{\log}_{X/T^*_n}(\mathcal{O}_{X/T_n})$$

be the morphism of projective systems induced by g *in (2.12.1), where we identify* X_{et} *and* X'_{et} *via the canonical equivalence. Then, if* r =

$\max\{\mathrm{rank}_x(\omega^1_{X/S})\,;\, x \in X\}$, *there exists a homomorphism of projective systems* $\psi : Ru^{\log}_{X/T_n^*}(\mathcal{O}_{X/T_n}) \to Ru^{\log}_{X'/T_n^*}(\mathcal{O}_{X'/T_n})$ *satisfying* $\varphi\psi = p^r$ *and* $\psi\varphi = p^r$.

PROOF. We follow faithfully the method in [BO2].

There exist an etale covering $U \to X$, schemes with fine log structures (Z_n, N_n) and (Z'_n, N'_n) over $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ($n \geq 1$), smooth integral morphisms $(Z_n, N_n) \to (T_n, L_n)$ and $(Z'_n, N'_n) \to (T_n, L_n)$, exact closed immersions $(Z_n, N_n) \to (Z_{n+1}, N_{n+1})$ and $(Z'_n, N'_n) \to (Z_{n+1}, N_{n+1})$ over (T_{n+1}, L_{n+1}) which induce $Z_n \xrightarrow{\sim} Z_{n+1} \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ and $Z'_n \xrightarrow{\sim} Z'_{n+1} \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, respectively, morphisms $(Z_n, N_n) \to Z'_n, N'_n)$ over (T_n, L_n) which are compatible with the above closed immersions, and exact closed immersions $(U, M_{|U}) \to (Z_1, N_1)$ and $(U', M'_{|U'}) \to (Z'_1, N'_1)$ where $U' = U \times_X X'$ such that the two squares in the diagram

$$\begin{array}{ccccc} (U, M_{|U}) & \longrightarrow & (U', M'_{|U'}) & \longrightarrow & (S, L) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (Z_1, N_1) & \longrightarrow & (Z'_1, N'_1) & \longrightarrow & (T_1, L_1) \end{array}$$

are commutative and cartesian. We identify $(X^\cdot)^\sim_{et}$ and $(X'^\cdot)^\sim_{et}$. We consider the crystalline complex C_{X/T_n} (resp. C_{X'/T_n}) defined with respect to the embedding system $((X^i, M^i), (Z^i_n, N^i_n))$ (resp. $((X'_n)^i, (M'_n)^i), ((Z'_n)^i, (N'_n)^i)))$ where X^i (resp. $(X')^i$ is the fiber product of $i+1$ copies of U (resp. U') over X (resp. X') and (Z^i_n, N^i_n) (resp. $((Z')^i_n, (N')^i_n)$ is the fiber product of $i+1$ copies of (Z_n, N_n) (resp. (Z'_n, N'_n)) over (T_n, L_n). Note that C_{X/T_n} is flat over $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (2.22) and $C_{X/T_{n+1}} \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} C_{X/T_n}$, and the same things hold for C_{X'/T_n}. We define the complex $E^\cdot_n$ on $(X^\cdot)_{et}$ as follows. Let

$$\widetilde{E}^q_n = \{a \in p^q C^q_{Y/T_n};\ da \in p^{q+1} C_{Y/T_n}\} \subset C^q_{Y/T_n},$$

$$E^q_n = \widetilde{E}^q_m / p^n \widetilde{E}^q_m \quad \text{for } m > n+q.$$

Then E^q_n is independent of the choice of $m > n+q$, and with $d : E^q_n \to E^{q+1}_n$ induced by $d : C^q_m \to C^{q+1}_m$ for $m > n+q+1$, $(E^\cdot_n, d)$ becomes a complex. As is seen easily, the image of $\varphi : C^q_{X'/T_n} \to C^q_{X/T_n}$ is contained in $\widetilde{E}^q_n$, and thus $\varphi : C^q_{X'/T_m} \to C^q_{X/T_m}$ for $m > n+q$ defines $\overline{\varphi} : C^q_{X'/T_n} \to E^q_n$.

LEMMA (2.25). — *$\overline{\varphi}$ defines a quasi–isomorphism of complexes* $(C^{\cdot}_{X'/T_n}, d) \to (E^{\cdot}_n, d)$.

The proof of (2.25) is identical with the classical case given in [BO1] § 8, [BO2] § 1 and we omit it.

Now we finish the proof of (2.24). For any complex C and for $i \in \mathbb{Z}$, let $\tau_{\leq i}C$ be the subcomplex of C whose degree q part is C^q (resp. 0, resp. $\mathrm{Ker}(d : C^q \to C^{q+1})$) for $q < i$ (resp. $q > i$, resp. $q = i$). Let $r = \max\{\mathrm{rank}_x(\omega^1_{X/S})\}$. Then, the canonical morphism $\tau_{\leq r}C \to C$ is a quasi–isomorphism if $C = C_{X/T_n}, C_{X'/T_n}$ or $E^{\cdot}_n$ since $\mathcal{H}^q(C) = 0$ if $q > r$ for these C. Let $\psi' : \tau_{\leq r}C_{X/T_n} \to \tau_{\leq r}E^{\cdot}_n$ be the map induced from $\tau_{\leq r}C_{X/T_m} \to \tau_{\leq r}E^{\cdot}_m$, $a \longmapsto p^r a$ with $m > n + r$, and define ψ to be the composite map in the derived category

$$Ru^{\log}_{X/T_n^*}(\mathcal{O}_{X/T_n}) \xrightarrow{\text{by } \psi'} R\theta_* E^{\cdot}_n \underset{\cong}{\xleftarrow{\text{by } \overline{\varphi}}} Ru^{\log}_{X'/T_n^*}(\mathcal{O}_{X'/T_n}).$$

It is easy to see that $\varphi\psi = p^r$ and $\psi\varphi = p^r$.

3. — Crystalline construction of $(D, \varphi, \mathcal{N})$

We construct $(D, \varphi, \mathcal{N})$ using the theory of crystalline cohomology with logarithmic poles in a more general situation than § 1.

DEFINITION (3.1). — *Let p be a prime number and let S be a scheme over $\mathbb{F}_p$ with a log structure M. Let $n \geq 1$, and let $W_n(S) = \mathrm{Spec}(W_n(\mathcal{O}_S))$. We define the log structure $W_n(M)$ on $W_n(S)$ called the canonical lifting of M to be $M \oplus \mathrm{Ker}(W_n(\mathcal{O}_S)^\times \to \mathcal{O}_S^\times)$ which is endowed with the homomorphism to $W_n(\mathcal{O}_S)$ induced by $M \to W_n(\mathcal{O}_S)$; $a \longmapsto (\alpha(a), 0, \ldots, 0)$. The morphism $(W_n(S),\ W_n(M)) \to (W_n(S),\ W_n(M))$ defined by the usual frobenius F : $W_n(S) \to W_n(S)$ and by $F^{-1}(W_n(M)) \cong W_n(M) \to W_n(M)$; (p on M) $\oplus$ (F^* on $\mathrm{Ker}(W_n(\mathcal{O}_S)^\times \to \mathcal{O}_S^\times)$) is called the frobenius of $(W_n(S), W_n(M))$.*

(3.2). — Let k be a perfect field of characteristic $p > 0$ and fix a fine log structure L on $\mathrm{Spec}(k)$. Let $W_n = \mathrm{Spec}(W_n(k))$. Then we have the log structure $W_n(L)$ on W_n. Let Y be a scheme with a fine log structure M and with a smooth morphism $f:(Y,M)\to(\mathrm{Spec}(k),L)$. Take $m\in\mathbb{Z}$ and let

$$D_n = H^m(((Y,M)/(W_n,W_n(L)))_{crys},\ \mathcal{O}_{Y/W_n})$$

be the m–th crystalline cohomology group of (Y,M) over $(W_n,W_n(L))$, where W_n is endowed with the usual PD–structure on pW_n. In particular, it follows from (2.20) that

$$D_1 = H^m(Y,\omega_Y^{\cdot}) \quad \text{where} \quad \omega_Y^{\cdot} = \omega^{\cdot}_{(Y,M)/(\mathrm{Spec}(k),L)}\,. \tag{3.2.1}$$

The absolute frobenius of (Y,M) and that of $(W_n,W_n(L))$ induce

$$\varphi : D_n \longrightarrow D_n\,.$$

Let $D_\infty = \varprojlim D_n$, $D = D_\infty\otimes Q$.

If f is smooth and integral and if Y is proper over k, (3.2.1) and the exact sequence of crystalline complexes

$$0\longrightarrow C_{Y/(W_m,W_m(L))}\xrightarrow{p^n} C_{Y/(W_{m+n},W_{m+n}(L))}\longrightarrow C_{Y/(W_n,W_n(L))}\longrightarrow 0$$

(2.22) (here Y is endowed with M; we do not abbreviate $W.(L)$ since sometimes we shall consider also the trivial log structure on W) show that D_n is of finite length over $W_n(k)$ and D_∞ is finitely generated over $W(k)$. If f is smooth and of Cartier type, $\varphi: D\to D$ is bijective by (2.23) and (2.24). (Here, (2.23) is applied by taking the frobenius $(W_n,W_n(L))\to(W_n,W_n(L))$ as $(S',L')\to(S,L)$ of (2.23), and the frobenius $(\mathrm{Spec}(k),L)\to \mathrm{Spec}(k),L)$ as $(\overline{S}',\overline{L}')\to(\overline{S},\overline{L})$. We then obtain

$$W_n(k)\underset{\varphi}{\searrow}\otimes_{W_n(k)} Ru^{\log}_{Y/(W_n,W_n(L))*}(\mathcal{O}_{Y/W_n})\cong Ru^{\log}_{Y'/(W_n,W_n(L))*}(\mathcal{O}_{Y'/W_n})\,.)$$

The bijectivity of $\varphi: D\to D$ is proved also using the de Rham–Witt complex of § 4, by the same argument as in (1.3).

Without the Cartier type assumption, the bijectivity of φ need not hold as in the simple example (3.3) below.

The monodromy operator will be discussed in (3.4)–(3.6). In the situation of semi–stable reduction, we will see in (4.20) that this $(D_n, \varphi, \mathcal{N})$ coincides with that of § 1.

(3.3). — Consider the case $Y = \mathrm{Spec}(k[t]/(t^r))$ with t and indeterminate, $(p, r) = 1, L$ (resp. M) is the log structure on $\mathrm{Spec}(k)$ (resp. Y) associated to $\mathbb{N} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}$; $1 \longmapsto 0$, (resp. $\mathbb{N} \to \mathcal{O}_Y$; $1 \longmapsto t$), and $f : (Y, M) \to (\mathrm{Spec}(k), L)$ is induced from $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $1 \longmapsto r$. Such $(Y, M) \to (\mathrm{Spec}(k), L)$ appears as the reduction of a tamely ramified extension of a discrete valuation ring (2.13.1). Then, f is smooth and integral, but if $r > 1$, it is not of Cartier type. The crystalline cohomology of degree m of (Y, M) over $(W_n, W_n(L))$ vanishes for $m \neq 0$, and for $m = 0$ we have $D_n = W_n[t]/(t^r)$ with the frobenius φ which extends the usual frobenius of $W_n(k)$ by $\varphi(t) = t^p$. Hence $\varphi : D \to D$ is not bijective if $r > 1$.

(3.4). — Now we define the monodromy operator.

Let $f : (Y, M) \to (\mathrm{Spec}(k), L)$ and (by fixing m) D_n be as in (3.2), and assume that f is smooth and L is the log structure associated to $\mathbb{N} \to k$; $1 \longmapsto 0$. We define the *monodromy operator* $\mathcal{N} : D_n \to D_n$ in two ways (3.5) (3.6).

(3.5). — Let (D, L_D) be the PD–envelope of $(\mathrm{Spec}(k), L)$ in the fiber product of two copies of $(W_n, W_n(L))$ over W_n where the last W_n is endowed with the trivial log structure, and let $p_i : (D, L_D) \to (W_n, W_n(L))$ be the two projections. Let e be any section of L whose image in $L/\mathbb{G}_m \cong \mathbb{N}$ is $1 \in \mathbb{N}$, and regard it as a section of $W_n(L)$ via the embedding $L \subset W_n(L)$. Then, $D \cong \mathrm{Spec}(W_n < u - 1 >)$ where u is the image of $p_1^*(e)p_2^*(e)^{-1}$, which is independent of the choice of e and which is regarded as an indeterminate in this isomorphism. Let

$$\mathcal{K} = R\Gamma(((Y, M)/(W_n, W_n(L)))_{crys}, \mathcal{O}_{Y/W_n})$$

$$\mathcal{K}' = R\Gamma(((Y, M)/(D, L_D))_{crys}, \mathcal{O}_{Y/D}) .$$

Then we have a morphism

$$\mathcal{K} \longrightarrow Lp_1^*(\mathcal{K}) \cong \mathcal{K}' \cong Lp_2^*(\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{i \in N} (u-1)^{[i]} \otimes \mathcal{K} \tag{3.5.1}$$

where the first and the second isomorphisms are by the base change theorem (2.23). We define the endomorphism $\mathcal{N} : D_n = H^m(\mathcal{K}) \to D_n$ to be the map induced from the $(u-1)^{[1]}$-component $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ of the morphism (3.5.1) (then, (3.5.1) is given by

$$\sum_{i \geq 0} \big((u-1)^{[i]} \otimes \prod_{0 \leq j < i} (\mathcal{N} - j)\big)\,.$$

The property $\mathcal{N}\varphi = p\varphi\mathcal{N}$ is easily verified.

(3.6). — Another construction of $\mathcal{N}$ is as follows. Consider the exact closed immersion $(W_n, W_n(L)) \to (\mathrm{Spec}(W_n[t]), \mathcal{L})$ where $\mathcal{L}$ is the log structure associated to $\mathbb{N} \to W_n[t]$; $1 \longmapsto t$ (here t is an indeterminate) defined by $W_n[t] \to W_n$; $t \longmapsto 0$ and $\mathcal{L} \to W_n(L)$; $1 \in \mathbb{N} \longmapsto 1 \in \mathbb{N}$. Take an embedding system $((Y^{\cdot}, M^{\cdot}), (Z^{\cdot}, N^{\cdot}))$ of $(Y, M) \to (\mathrm{Spec}(W_n[t]), \mathcal{L})$. Let C_{Y/W_n}, where W_n is endowed with the trivial log structure (resp. $C_{Y/\,\mathrm{Spec}(W_n<t>)}$, where $W_n < t >$ is the PD polynomial ring over W_n in one variable t and $\mathrm{Spec}(W_n < t >)$ is endowed with the inverse image of $\mathcal{L}$), be the crystalline complex associated to the embedding system $((Y^{\cdot}, M^{\cdot}), (Z^{\cdot}, N^{\cdot}))$ (resp. $((Y^{\cdot}, M^{\cdot}), (Z^{\cdot} \times_{\mathrm{Spec}(W_n[t])} \mathrm{Spec}(W_n < t >), (N^{\cdot})'))$ where $(N^{\cdot})'$ is the inverse image of $N^{\cdot}$). We obtain an exact sequence

$$0 \longrightarrow C_{Y/\,\mathrm{Spec}(W_n<t>)}[-1] \longrightarrow C_{Y/W_n} \longrightarrow C_{Y/\,\mathrm{Spec}(W_n<t>)} \longrightarrow 0$$

where the second arrow is $a \longmapsto a \wedge \mathrm{d}\log(t)$. Since $W_n \otimes_{W_n<t>} C_{Y/\,\mathrm{Spec}(W_n<t>)}$ with respect to $W_n < t > \to W_n$; $t^{[i]} \to 0$ $(i \geq 1)$ is the crystalline complex $C_{Y/(W_n, W_n(L))}$ with respect to the embedding system $((Y^{\cdot}, M^{\cdot}), (Z^{\cdot} \times_{\mathrm{Spec}(W_n[t])} W_n, (N^{\cdot})''))$ where $(N^{\cdot})''$ is the inverse image of $N^{\cdot}$, we obtain an exact sequence

$$0 \longrightarrow C_{Y/(W_n, W_n(L))} \longrightarrow W_n \otimes_{W_n<t>} C_{Y/W_n} \longrightarrow C_{Y/(W_n, W_n(L))} \longrightarrow 0\,.$$

We define $\mathcal{N}$ to be the connecting homomorphism of this exact sequence.

The coincidence of the two definitions of $\mathcal{N}$ given in (3.5) and (3.6) is proved by the method of [B] V 3.6.

4. — De Rham–Witt complexes

In this section, k denotes a perfect field of characteristic $p > 0$, and Y denotes a scheme with a fine log structure M and with a smooth morphism of Cartier type $f : (Y, M) \to (\mathrm{Spec}(k), L)$.

We consider in this section the de Rham–Witt complex of (Y, M) over $(\mathrm{Spec}(k), L)$ generalizing [H1] [H2] which treated the semi-stable reduction case. We give the definition (4.1), descriptions of the structure of the de Rham–Witt complex in (4.4)–(4.7), relation with the crystalline cohomology in (4.19), and the relation with § 1 in (4.20).

In this section, we shall consider the two log structures $W_n(L)$ and $\mathcal{O}^\times_{W_n}$ on W_n. We do not abbreviate $W_n(L)$ when W_n is endowed with $W_n(L)$, and abbreviate $\mathcal{O}^\times_{W_n}$ when W_n is endowed with $\mathcal{O}^\times_{W_n}$. For example, in the notation $Ru^{\log}_{Y/(W_n, W_n(L))}$ (resp. $Ru^{\log}_{Y/W_n}$), Y is endowed with M and W_n is endowed with $W_n(L)$ (resp. $\mathcal{O}^\times_{W_n}$).

(4.1). — We define the de Rham–Witt complex as follows. Let

$$W_n\omega^q_Y = R^q u^{\log}_{Y/(W_n, W_n(L))*}(\mathcal{O}_{Y/W_n}) .$$

We define the operators

$$d : W_n\omega^q_Y \to W_n\omega^{q+1}_Y\,, \quad F : W_{n+1}\omega^q_Y \to W_n\omega^q_Y\,, \quad V : W_n\omega^q_Y \to W_{n+1}\omega^q_Y$$

satisfying

$$(4.1.1) \quad d^2 = 0\,, \quad FV = VF = p\,, \quad dF = pFd\,, \quad Vd = pdV\,, \quad FdV = d$$

as below, following the classical case [IR]. $W_n\omega^{\cdot}_Y$ becomes a complex with respect to the differential d.

In this section, we choose embedding systems $((Y^i, M^i), (Z^i_n, N^i_n))$ as in the proof of 2.24 (with X replaced by Y and (T_n, L_n) by $(W_n, W_n(L))$), and denote the corresponding crystalline complexes $C_{Y/(W_n,W_n(L))}$ simply by $C_n^{\cdot}$. Note $C_n^{\cdot}$ is flat over W_n and $C_n^{\cdot} \otimes_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} C_m^{\cdot}$ for $m \leq n$.

First, d is defined to be the connecting homomorphism in the exact sequence of cohomology sheaves associated to the exact sequence of crystalline complexes

$$0 \longrightarrow C_n^{\cdot} \xrightarrow{p^n} C_{2n}^{\cdot} \longrightarrow C_n^{\cdot} \longrightarrow 0\,.$$

Next, F (resp. V) is the map induced by $C_{n+1}^{\cdot} \to C_n^{\cdot}$ (resp. $p : C_n^{\cdot} \to C_{n+1}^{\cdot}$).

The relations (4.1.1) are proved easily. For $n = 1$, we have the Cartier isomorphism

$$(4.1.2) \qquad C : W_1\omega_Y^q = \mathcal{H}^q(\omega_Y^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \omega_Y^q \quad \text{(cf. (3.2.1) and (2.12.2))}\,.$$

(4.2). — We define a canonical homomorphism

$$\pi_n : W_{n+1}\omega_Y^{\cdot} \longrightarrow W_n\omega_Y^{\cdot}$$

as follows. With the notations of the proof of 2.24, the map $p^q : C_{n+1}^q \to C_{n+q+1}^q$ sends $\mathrm{Ker}(C_{n+1}^q \to C_{n+1}^{q+1})$ into $\mathrm{Ker}(\widetilde{E}_{n+q+1}^q \xrightarrow{d} E_n^{q+1})$ and induces $\pi_n : \mathcal{H}^q(C_{n+1}^{\cdot}) = W_{n+1}\omega_Y^q \to \mathcal{H}^q(E_n^{\cdot}) \cong W_n\omega_Y^q$ where the last isomorphism is by (2.25).

We call this map π_n and its composite $W_m\omega_Y^q \to W_n\omega_Y^q$ $(m \geq n)$ the canonical projection.

Definition (4.3). — *Define a chain of subsheaves of* ω_Y^q

$$0 = B_0\omega_Y^q \subset B_1\omega_Y^q \subset B_2\omega_Y^q \subset \cdots \subset Z_2\omega_Y^q \subset Z_1\omega_Y \subset Z_0\omega_Y^q = \omega_Y^q$$

by the formulas

$$B_0\omega_Y^q = 0\,, \qquad Z_0\omega_Y^q = \omega_Y^q\,,$$

$$B_1\omega_Y^q = d\omega_Y^{q-1}\,, \qquad Z_1\omega_Y^q = \mathrm{Ker}(d : \omega_Y^q \longrightarrow \omega_Y^{q-1})\,,$$

$$B_n\omega_Y^q \xrightarrow[\cong]{C^{-1}} B_{n+1}\omega_Y^q/B_1\omega_Y^q$$

$$Z_n\omega_Y^q \xrightarrow[\cong]{C^{-1}} Z_{n+1}\omega_Y^q/Z_1\omega_Y^q$$

and by induction on n (cf. Illusie [Il1]0.(2.2.2)).

We can generalize the structure theorem for the de Rham–Witt complexes [Il1] I §3B to the case with log structures.

THEOREM (4.4). — *The map $\pi_n : W_{n+1}\omega_Y^q \to W_n\omega_Y^q$ is surjective and the composite map*

$$\omega_Y^q \oplus \omega_Y^{q-1} \xrightarrow[\cong]{C^{-1}} W_1\omega_Y^q \oplus W_1\omega_Y^{q-1} \xrightarrow{(V^n, dV^n)} W_{n+1}\omega_Y^q$$

induces an isomorphism

$$(\omega_Y^q \oplus \omega_Y^{q-1})/R_n^q \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\pi_n : W_{n+1}\omega_Y^q \longrightarrow W_n\omega_Y^q)$$

where R_n^q is defined by the exact sequence

$$0 \longrightarrow R_n^q \longrightarrow B_{n+1}\omega_Y^q \oplus Z_n\omega_Y^{q-1} \xrightarrow{(C^n, dC^n)} B_1\omega_Y^q \longrightarrow 0\,.$$

PROOF. The problem is local and hence we consider the crystalline complexes for embedding systems consisting of constant simplicial objects. The facts that $\mathrm{Image}(V^n, dV^n) \subset \mathrm{Ker}(\pi_n)$ and R_n^q dies in $\mathrm{Ker}(\pi_n)$ are easy and left to the reader. The surjectivity of π_n follows from the surjectivity of $p^q : C_{n+1,d=0}^q \to E_{n,d=0}^q$ which is checked easily. The surjectivity of $(V^n, dV^n) : W_1\omega_Y^q \oplus W_1\omega_Y^{q-1} \to \mathrm{Ker}(\pi_n)$ is proved also easily. Indeed, if $a \in C_{n+1,d=0}^q$ and the class of a in $W_{n+1}\omega_Y^q$ is annihilated by π_n, then $p^q a = d(p^{q-1}b) + p^n(p^q c)$ in C_{n+q+1}^q for some $b \in C_{n+q+1}^{q-1}$ and for some $c \in C_{n+q+1}^q$ such that $dc \in pC_{n+q+1}^{q+1}$. If $\bar{b}$ (resp. $\bar{c}$) denotes the class of b (resp. c) in $W_1\omega_Y^{q-1}$ (resp. $W_1\omega_Y^q$), we obtain $a = dV^n(\bar{b}) + V^n(\bar{c})$ in $W_{n+1}\omega_Y^q$.

Finally we prove that the kernel of the map in problem $s : \omega_Y^q \oplus \omega_Y^{q-1} \to$

$\mathrm{Ker}(\pi_n)$ coincides with R_n^q. The commutative diagram

$$\begin{tikzcd} W_1\omega_Y^q \oplus W_1\omega_Y^{q-1} \arrow[r, "(V^n, dV^n)"] \arrow[d, "pr_2"'] & W_{n+1}\omega_Y^q \arrow[d, "F"] \\ W_1\omega_Y^{q-1} \arrow[r, "dV^{n-1}"] & W_n\omega_Y^q \end{tikzcd}$$

and induction on n show that if $(a,b) \in \mathrm{Ker}(s)$, then $b \in Z_n\omega_Y^{q-1}$. Hence $(a,b) \equiv (a',0) \bmod R_n^q$ for some $a' \in \omega_Y^q$. Since the kernel of $V : W_n\omega_Y^q \to W_{n+1}\omega_Y^q$ comes from the boundary map $W_1\omega_Y^{q-1} \to W_n\omega_Y^q$ which coincides with dV^{n-1} as is easily seen, we have $V^{n-1}C^{-1}(a') = dV^{n-1}C^{-1}(c)$ for some $c \in \omega_Y^{q-1}$. Therefore, by induction on n, a' belongs to $B_n\omega_Y^q$ $(= \mathrm{Ker}\, C^n : B_{n+1}\omega_Y^q \to B_1\omega_Y^q)$ and hence $(a',0) \in R_n^q$. Q.E.D.

By the method as in the classical case [Il1], we can deduce the following facts from (4.4).

COROLLARY (4.5). — (1) *If $m \geq n$, $p^n : W_m\omega_Y^q \to W_m\omega_Y^q$ factors through the canonical projection $W_m\omega_Y^q \to W_{m-n}\omega_Y^q$. The induced map "$p^n$" : $W_{m-n}\omega_Y^{\cdot} \to W_m\omega_Y^{\cdot}$ is injective and $W_m\omega_Y^{\cdot}/$ "p^n"$(W_{m-n}\omega_Y^{\cdot}) \to W_n\omega_Y^{\cdot}$ is a quasi-isomorphism.*

(2) $\varprojlim_n W_n\omega_Y^q$ *is torsion free for any q.*

We give two presentations (4.6) (4.7) of $W_n\omega_Y^q$.

PROPOSITION (4.6). — *$W_n\omega_Y^q$ is canonically isomorphic to*

$$(4.6.1)\quad ((W_n\mathcal{O}_Y \otimes \overset{q}{\wedge}_{\mathbb{Z}}\, M^{gp}/f^{-1}(L^{gp})) \oplus (W_n\mathcal{O}_Y \otimes \overset{q-1}{\wedge}_{\mathbb{Z}}\, M^{gp}/f^{-1}(L^{gp})))/\mathcal{F}$$

where $\mathcal{F}$ is the subsheaf of the direct sum generated by local sections of the forms

$$(\varepsilon_i(\alpha(a_1)) \otimes (a_1 \wedge \cdots \wedge a_q), 0) - p^i(0, \varepsilon_i(\alpha(a_1)) \otimes (a_2 \wedge \cdots \wedge a_q))$$

$$(a_1, \ldots, a_q \in M\,, \quad 0 \leq i < n)\,.$$

Here for $b \in \mathcal{O}_Y$, *we denote* $(\underbrace{0,\ldots,0}_{i \text{ times}}, b, 0, \ldots, 0) \in W_n(\mathcal{O}_Y)$ *by* $\varepsilon_i(b)$.

PROPOSITION (4.7). — (1) *There exists a canonical isomorphism of graded differential algebras*

$$\left(\bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} \omega^q_{W_n(Y)/(W_n, W_n(L))}\right) / \mathcal{I} \cong \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}} W_n\omega^q_Y$$

where $W_n(Y)$ *is endowed with the canonical lifting* $W_n(M)$ (3.1) *of* M *and* $\mathcal{I}$ *is the graded subideal of the algebra generated locally by local sections of the forms* $\eta_{i,j,a,b}$ *and* $d\eta_{i,j,a,b}$ $(0 \le j \le i < n,\ a \in \mathcal{O}_Y,\ b \in M)$ *where*

$$\eta_{i,j,a,b} = \varepsilon_i(a)d\varepsilon_j(\alpha(b)) - \varepsilon_i(a\alpha(b)^{p^{i-j}})\mathrm{d}\log(b)\,.$$

(2) *For each* q *and each* $x \in Y$, $\mathcal{I}_{\overline{x}}$ *coincides with the image of*

$$(\omega^{\cdot}_{\mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}_{Y,\overline{x}}))/\,\mathrm{Spec}(W(\overline{k}))})_{\overline{x},tor} \longrightarrow \omega^{\cdot}_{W_n(Y)/(W_n,W_n(L)),\overline{x}}$$

where $\mathrm{Spec}(W_n(\mathcal{O}_{Y,\overline{x}}))$ $(\mathrm{resp.}\,\mathrm{Spec}(W(\overline{k})))$ *is endowed with the log structure associated to* $M_{\overline{x}} \to W(\mathcal{O}_{Y,\overline{x}})$ $(\mathrm{resp.}\,\Gamma(\mathrm{Spec}(\overline{k}), L) \to W(\overline{k}))$; $a \longmapsto (\alpha(a), 0, 0, \ldots)$, *and* tor *denotes the torsion part.*

PROPOSITION (4.8). — *Let* T *be an object of* $((\mathrm{Spec}(k), L)/W_n)_{crys}$ *(*W_n *is endowed here with the trivial log structure). Then, there exists a functorial homomorphism between graded* $\mathcal{O}(T)$*-algebras*

$$\bigoplus_{q\ge 0} \mathcal{O}(T) \otimes_{W_n(k)} W_n\omega^q_Y \longrightarrow \bigoplus_{q\ge 0} R^q u^{\log}_{Y/T^\bullet}(\mathcal{O}_{Y/T})\,, \tag{4.8.1}$$

which is an isomorphism if T *is flat over* W_n.

(4.9). — We prove (4.6)–(4.8) together. We may work etale locally, and hence we can take in (2.24) $Y^{\cdot} = Y$, $(Z^{\cdot}, N^{\cdot})$ to be a constant simplical object (Z, N). Consider the crystalline complex for this system. We define a ring homomorphism $\tau : W_n(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{H}^0(C^{\cdot}_{Y/T})$, an additive map $\delta : W_n(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{H}^1(C_{Y/T})$ which is a derivation with respect to τ and a homomorphism $\mathrm{d}\log : M^{gp} \to \mathcal{H}^1(C_{Y/T})$, by

$$\tau : (a_0, \ldots, a_{n-1}) \longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} p^i \widetilde{a}_i^{p^{n-i}}$$

$$\delta : (a_0, \ldots, a_{n-1}) \longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{a}_i^{p^{n-i}-1} d\widetilde{a}_i$$

$$\mathrm{d}\log : b \longmapsto \mathrm{d}\log(\widetilde{b}),$$

($a_i \in \mathcal{O}_Y$, $b \in M$) where $\widetilde{a}_i$ is any lifting of a_i to $\mathcal{O}_D$ and $\widetilde{b}$ is any lifting of b to the log structure N of Z. The map τ (resp. δ, resp. $\mathrm{d}\log$) is well defined by virtue of the following fact : for $a \in \mathcal{O}_D$ and $h \in \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_Y)$,

$$p^i(a+h)^{p^{n-i}} = p^i a^{p^{n-i}} \quad \text{in} \quad \mathcal{O}_D$$

(resp. for $a \in \mathcal{O}_D$ and $h \in \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_Y)$,

$$(a+h)^{p^{n-i}-1} d(a+h) - a^{p^{n-i}-1} da = d\left(\sum_{1 \leq j \leq p^{n-i}} c_j a^{p^{n-i}-j} h^{[j]} \right)$$

in $\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega^1_{Z/T}$ where $c_j = (p^{n-i})!((p^{n-i}-j)!)^{-1} p^{i-n} \in \mathbf{Z}_p$, resp. for $a \in N$ and $u \in \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_Z^\times \to \mathcal{O}_Y^\times)$,

$$\mathrm{d}\log(au) - \mathrm{d}\log(a) \in \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega^1_{Z/T} \text{ is the image of } \log(u) \in \mathcal{O}_D$$

under $d : \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega^1_{Z/T}$).

In the case $T = W_n$, τ is a ring homomorphism $W_n(\mathcal{O}_Y) \to W_n\omega^0_Y$, and δ coincides with the composite $W_n(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\tau} W_n\omega^0_Y \xrightarrow{d} W_n\omega^1_Y$. It is not difficult to see that there exists a $W_n(\mathcal{O}_Y)$-homomorphism $\omega^1_{W_n(Y)/(W_n, W_n(L))} \to \mathcal{H}^1(C_{Y/T})$ which sends da ($a \in W_n(\mathcal{O}_Y)$) to $\delta(a)$ and $\mathrm{d}\log(b)$ ($b \in M$)

to $d\log(b)$, that this map induces a homomorphism of $W_n(\mathcal{O}_Y)$–algebras $\psi : \bigoplus_{q\geq 0} \omega^q_{W_n(Y)/(W_n,W_n(L))} \to \bigoplus_{q\geq 0} \mathcal{H}^q(C_{Y/T})$ and that the last map annihilates $\mathcal{I}$. If $(W_n\omega^q_Y)'$ denotes the sheaf (4.6.1) and $\mathcal{I}_q$ denotes the degree q part of $\mathcal{I}$, we have a commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
(W_n\omega^q_Y)' \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathcal{H}^q(C_{Y/T}) \\
& (\omega^q_{W_n(Y)/(W_n,W_n(L))})/\mathcal{I}_q \arrow[ur, "\text{by } \psi"'] &
\end{tikzcd}
\tag{4.9.1}
$$

where s (resp. t) sends $(w\otimes(b_1\wedge\cdots\wedge b_q),0)$ to $\tau(w)d\log(b_1)\cdots d\log(b_q)$ (resp. $wd\log(b_1)\wedge\cdots\wedge d\log(b_q)$) and $(0,w\otimes(b_1\wedge\cdots\wedge b_{q-1}))$ to $\delta(w)d\log(b_1)\cdots d\log(b_{q-1})$ (resp. $dw\wedge d\log(b_1)\wedge\cdots\wedge d\log(b_{q-1})$).

We prove s is bijective in the case $T = W_n$.

Let $Fil^i((W_n\omega^q_Y)')$ be the image of

$$\left((V^i(W_n(\mathcal{O}_Y))\otimes \textstyle\bigwedge^q_{\mathbf{Z}} M^{gp}) \oplus (V^i(W_n(\mathcal{O}_Y))\otimes \bigwedge^{q-1}_{\mathbf{Z}} M^{gp}\right) \longrightarrow (W_n\omega^q_Y)' .$$

Then, s sends Fil^i into the kernel of the canonical projection $W_n\omega^q_Y \to W_i\omega^q_Y$, and the isomorphism (4.4) $(V^i, dV^i)C^{-1} : \omega^q_Y \oplus \omega^{q-1}_Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\pi_i)$ factors as

$$\omega^q_Y \oplus \omega^{q-1}_Y \longrightarrow Fil^i/Fil^{i+1} \xrightarrow{s} \mathrm{Ker}(\pi_i)\,,$$

where the first map is a surjection defined by

$$(a\,d\log(b_1)\wedge\cdots\wedge d\log(b_q),0) \longmapsto (\varepsilon_i(a)\otimes(b_1\wedge\cdots\wedge b_q),0)$$

$$(0,a\,d\log(b_1)\wedge\cdots\wedge d\log(b_{q-1}) \longmapsto (0,\varepsilon_i(a)\otimes(b_1\wedge\cdots\wedge b_{q-1}))$$

which is well defined as is checked easily. This shows that s is an isomorphism and proves (4.6).

Next we show that t in (4.9.1) is surjective. This will prove (4.7)(1). We are reduced to the case $q = 1$. As a sheaf of abelian groups, $\omega^1_{W_n(Y)/(W_n,W_n(L))}$

is generated locally by $\varepsilon_i(a)d\varepsilon_j(b)$ ($a, b \in \mathcal{O}_Y^\times$, $0 \le i,\ j < n$) and $w\,d\log(b)$ ($w \in W_n(\mathcal{O}_Y)$, $b \in M$). If $i \ge j$, $\varepsilon_i(a)d\varepsilon_j(b)$ clearly belongs to $\mathcal{I}_1 + \mathrm{Image}(t)$. If $i \le j$, $\varepsilon_i(a)d\varepsilon_j(b) = d(\varepsilon_i(a)\varepsilon_j(b)) - \varepsilon_j(b)d\varepsilon_i(a) \in \mathcal{I}_1 + \mathrm{Image}(t)$.

We prove (4.7.) (2). Let $G^\cdot = \omega_{\mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}_{Y,\overline{x}}))/\mathrm{Spec}(W(\overline{k}))_{\overline{x}}}$. First, $\mathrm{Image}(G^\cdot_{tor}) \subset \mathcal{I}_{\overline{x}}$ follows from the fact that $\varprojlim_n W_n\omega_Y^q$ is torsion free. Next we show that $\eta_{i,j,a,b}$ is, when regarded as an element of G^1, a torsion element. Let $\varphi : G^q \to G^q$ be the map induced by the frobenius of $W(\mathcal{O}_{Y,\overline{x}})$ and $W(\overline{k})$ and the p-th power maps on $M_{\overline{x}}$ and $\Gamma(\mathrm{Spec}(\overline{k}), L)$. Then, $\varphi : G^q \otimes \mathbb{Q} \to G^q \otimes \mathbb{Q}$ is bijective. Indeed, this is reduced to the case $q \le 1$. For $q = 0$, $\varphi : G^0 \otimes \mathbb{Q} \to G^0 \otimes \mathbb{Q}$ has the inverse map $(a_0, a_1, \dots) \longmapsto p^{-1}(0, a_0, a_1, \dots)$ and hence is bijective. For $q = 1$, the inverse map is given by

$$adb \longmapsto \varphi^{-1}(a)d\varphi^{-1}(b)\ (a, b \in W(\mathcal{O}_{Y,\overline{x}}) \otimes \mathbb{Q}),$$

$$a\,d\log(b) \longmapsto p^{-1}\varphi^{-1}(a)\mathrm{d}\log(b)\ (a \in W(\mathcal{O}_{Y,\overline{x}}) \otimes \mathbb{Q},\ b \in M_{\overline{x}})$$

(cf. [Il1] I (4.3)). On the other hand, the $2j$-th iteration of $\varphi : G^1 \to G^1$ annihilates $\eta_{i,j,a,b}$ since

$$\varphi^{2j}(\eta_{i,j,a,b}) = \varepsilon_i(a^{p^{2j}})d\varepsilon_j(\alpha(b^{p^{2j}})) - \varepsilon_i(a^{p^{2j}}\alpha(b)^{p^{i+j}})\mathrm{d}\log(b^{p^j})$$

$$= p^j\varepsilon_i(a^{p^{2j}})d\varepsilon_0(\alpha(b^{p^j})) - p^j\varepsilon_i(a^{p^{2j}})\varepsilon_0(\alpha(b)^{p^j})\mathrm{d}\log(b^{p^j}) = 0.$$

Finally we prove (4.8). We define the $\mathcal{O}(T)$-homomorphism in (4.8) to be the one induced from

$$W_n\omega_Y^q \xleftarrow[(4.6)]{\cong} (W_n\omega_Y^q)' \xrightarrow{s} \mathcal{H}^q(C_{Y/T})$$

where s is as in (4.9.1). The bijectivity statement in the case T is flat over $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ is reduced to the case $n = 1$ by using the long exact sequence of cohomology sheaves associated to the exact sequence

$$0 \longrightarrow C_{Y/(T\otimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})} \xrightarrow{p^{n-1}} C_{Y/T} \longrightarrow C_{Y/(T\otimes\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})} \longrightarrow 0.$$

In the case $n = 1$, by working locally, we may assume that $Y = Z \times_T \operatorname{Spec}(k)$. Then, $D = Z$ and our task is to prove

$$\mathcal{O}(T) \otimes_k \mathcal{H}^q(\omega_Y^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^q(\omega_{Z/T}^{\cdot}).$$

By Cartier isomorphism (2.12), this map is rewritten as

$$\mathcal{O}(T) \underset{\varphi}{\diagdown} \otimes_k \omega_Y^q \longrightarrow \mathcal{O}(T) \underset{\varphi}{\diagdown} \otimes_{\mathcal{O}(T)} \omega_{Z/T}^q$$

where $\varphi : a \longmapsto a^p$. Since $\varphi : \mathcal{O}(T) \to \mathcal{O}(T)$ factors through the canonical surjection $\mathcal{O}(T) \to k$ and $k \otimes_{\mathcal{O}(T)} \omega_{Z/T}^q = \omega_Y^q$, we are done.

Remark (4.10). — The existence of the canonical homomorphism $W_n\omega_Y^q \to R^q u_{Y/T*}^{\log}(\mathcal{O}_{Y/T})$ in (4.8) is not an evident fact, for we do not have a morphism $(T, L_T) \to (W_n, W_n(L))$. The authors do not know if this homomorphism comes from a homomorphism in the derived category

$$(*) \qquad Ru^{\log}_{Y/(W_n,W_n(L))*}(\mathcal{O}_{Y/W_n}) \longrightarrow Ru^{\log}_{Y/T*}(\mathcal{O}_{Y/T}).$$

The meaning of (4.8) is that $W_n\omega_Y^q$ grows "neglecting" log structures when we take PD–thickenings of $\operatorname{Spec}(k)$. To see how the problem is delicate, assume only that f is smooth integral but not that f is of Cartier type. Then we have the following counterexample of (4.8).

Let L be the log structure associated to $\mathbf{N} \to k;\ 1 \longmapsto 0$, $Y = \operatorname{Spec}(k[t]/(t^r))$, $(p, r) = 1$, M is the log structure associated to $\mathbf{N} \to k[t]/(t^r)$; $1 \longmapsto t$, and $(Y, M) \to (\operatorname{Spec}(k), L)$ induced by $\mathbf{N} \to \mathbf{N};\ 1 \longmapsto r$. Then, $\Gamma(Y, W_n\omega_Y^0) = W_n(k)[t]/(t^r)$. If we take $T = \operatorname{Spec}(W_n(k) < s >)$ with s an indeterminate and endow T with the log structure associated to $\mathbf{N} \to W_n(k) < s >;\ 1 \longmapsto s$ and with the usual PD–structure,

$$\Gamma(T, R^0 u^{\log}_{Y/T*}(\mathcal{O}_{Y/T})) = W_n(k) < s > [t]/(t^r - s).$$

But $W_n(k) < s > \otimes_{W_n(k)} W_n(k)[t]/(t^r)$ and $W_n(k) < s > [t]/(t^r - s)$ are not isomorphic as $W_n(k) < s >$–algebras if $r \geq 2$.

The following (4.13) says that a good homomorphism (*) desired in (4.10) exists at least "modulo torsion which is bounded independently of n" under a certain assumption. This (4.13) will play a key role in § 5 in the definition of ρ_π.

DEFINITION (4.11). — *For a sequence of functors between categories*

$$\mathcal{C}_{n+1} \xrightarrow{\lambda_n} \mathcal{C}_n \xrightarrow{\lambda_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{C}_1 ,$$

let $ps(\mathcal{C}.)$ be the category of systems $\{(A_n, s_n)\}_{n\geq 1}$ where A_n is an object of $\mathcal{C}_n$ and s_n is a morphism $\lambda_n(A_{n+1}) \to A_n$. We often abbreviate $\{(A_n, s_n)\}_{n\geq 1}$ as $\{A_n\}_n$.

DEFINITION (4.12). — *For an additive category $\mathcal{C}$, we denote by $\mathbf{Q}\otimes\mathcal{C}$ the category whose set of objects is the same as $\mathcal{C}$ but whose set of morphisms between objects A, B is $\mathbf{Q}\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$. An object A of $\mathcal{C}$ is denoted by $\mathbf{Q}\otimes A$ when it is regarded as an object of $\mathbf{Q}\otimes\mathcal{C}$.*

PROPOSITION (4.13). — *Assume we are given for each $n\geq 1$ an object T_n of $((W_n, W_n(L))/W_n)_{crys}$ with the log structure L_n, a morphism $F : (T_n, L_n) \to (T_n, L_n)$ and an exact closed immersion $(T_n, L_n) \to (T_{n+1}, L_{n+1})$ which are compatible with PD-structures and have the following properties* (i)–(iii).

(i) *With respect to the morphisms $(W., W.(L)) \to (T., L.) \to W.$ (the last $W.$ is endowed with the trivial log structure), F commutes with the frobenius of $(W_n, W_n(L))$ and that of W_n, and $(T_n, L_n) \to (T_{n+1}, L_{n+1})$ commutes with F, with $(W_n, W_n(L)) \to (W_{n+1}, W_{n+1}(L))$ and with $W_n \to W_{n+1}$.*

(ii) *T_n is flat over W_n and $T_n \xrightarrow{\sim} T_{n+1}\otimes \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ for each n.*

(iii) *For each $n\geq 1$, the ideal $\mathcal{I}_n$ of W_n in T_n is generated etale locally by local sections of the form*

$$a^{[i]} \quad (i\geq 1) \quad \textit{with } a \in \mathrm{Image}(L_n \longrightarrow \mathcal{O}_{T_n}) \cap \mathcal{I}_n .$$

For $n\geq 1$, define

$$\mathcal{K}_n = Ru^{\log}_{Y/T_n^*}(\mathcal{O}_{Y/T_n}), \quad \mathcal{K}'_n = Ru^{\log}_{Y/(W_n, W_n(L))^*}(\mathcal{O}_{Y/W_n})$$

and let $\beta_n : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}'_n$ be the canonical morphism. Then, in the category $\mathbf{Q}\otimes ps(D(Y_{et}, \mathcal{O}(T.))),$ there exists a unique isomorphism

$$h : \mathbf{Q}\otimes\{\mathcal{O}(T_n)\otimes_{W_n} \mathcal{K}'_n\}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}\otimes\{\mathcal{K}_n\}_n$$

satisfying the following (4.13.1) (4.13.2).

(4.13.1). — $(\beta_n)_n \circ h$ *coincides with the morphism induced by* $\mathcal{O}(T_n) \to W_n(k)$.

(4.13.2). — *If we denote the morphisms* $\mathcal{O}(T_n) \to \mathcal{O}(T_n)$, $\mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ *and* $\mathcal{K}'_n \to \mathcal{K}'_n$ *induced by the frobenius morphisms by the same letter* φ, *then* h *commutes with* $\varphi \otimes \varphi$ *on* $\mathbf{Q} \otimes \{\mathcal{O}(T_n) \otimes_{W_n} \mathcal{K}'_n\}_n$ *and* φ *on* $\mathbf{Q} \otimes \{\mathcal{K}_n\}_n$.

The rough idea of the proof of (4.13) is that the frobenius on $\mathcal{K}'_n$ is near to an isomorphism and the frobenius on $\mathcal{I}_n$ is near to zero, and this forces the morphism $\{\mathcal{K}_n\}_n \to \{\mathcal{K}'_n\}_n$ to split in $\mathbf{Q} \otimes ps(D((X.)_{et}, W.(k)))$.

To prove (4.13), we use the following lemma.

LEMMA (4.14). — *Let* $\mathcal{C}$ *be a triangulated category and* $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *be an exact functor. Assume we are given a distinguished triangle* $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} A[1]$ *and morphisms* $\varphi_A : \Phi(A) \to A$, $\varphi_B : \Phi(B) \to B$, $\varphi_C : \Phi(C) \to C$, *in* $\mathcal{C}$ *(we denote all of them simply by* φ*) such that*

$$\alpha\varphi = \varphi\Phi(\alpha), \quad \beta\varphi = \varphi\Phi(\beta), \quad \gamma\varphi = \varphi[1]\Phi(\gamma).$$

Let p *be a prime number,* $s_0 = 1$, s_1, $s_2, \dots$ *be integers such that* $s_i | s_{i+1}$ *for all* $i \geq 0$ *and* $\lim_{i\to\infty} \mathrm{ord}_p(s_{i+1}s_i^{-1}) = \infty$, *let* $r \geq 0$ *be an integer, and assume the following* (i)–(iii) *are satisfied.*

(i) *There exist morphisms* $\varphi_i : \Phi^i(A) \to A$ *for* $i \geq 0$ *such that* $\varphi_0 = Id_A$, $\varphi\Phi(\varphi)\cdots\Phi^{i-1}(\varphi) = s_i\varphi_i$ *for all* $i \geq 1$, *and* $(s_{i+1}s_i^{-1})\varphi_{i+1} = \varphi\Phi(\varphi_i)$ *for all* $i \geq 0$.

(ii) *There exists* $\psi : C \to \Phi(C)$ *such that* $\varphi\psi$ (resp. $\psi\varphi$) *is the multiplication by* p^r *on* C (resp. $\Phi(C)$).

(iii) *The set of homomorphisms from* C *to* A *is annihilated by a power of* p.

Take an integer $c \geq 0$ *such that* $p^{rc+1} | s_c$, *and an integer* $d \geq 0$ *such that* $p^{r(i+1)} | s_i p^d$ *for all* $i \geq 0$. *Then the kernel (resp.cokernel) of*

$$[C, B]_\varphi \longrightarrow [C, C]_\varphi : h \longmapsto \beta h$$

is annihilated by p^{2cr} (resp. p^{cr+d}), *where* $[C, B]_\varphi$ *denotes the set of morphisms* $h : C \to B$ *such that* $h\varphi = \varphi\Phi(h)$, *and* $[C, C]_\varphi$ *is defined similarly.*

PROOF. For $X = A$ or C, denote $\varphi\Phi(\varphi)\cdots\Phi^{i-1}(\varphi) : \Phi^i(X) \to X$ by $\varphi^{(i)}$ and denote $\Phi^{i-1}(\psi)\cdots\Phi(\psi)\psi : X \to \Phi^i(X)$ by $\psi^{(i)}$. We show first $[C,A]_\varphi$ is annihilated by p^{cr}. Indeed, for $h \in [C,A]_\varphi$, we have

$$p^{rc}h = h\varphi^{(c)}\psi^{(c)} = \varphi^{(c)}\Phi^c(h)\psi^{(c)} = s_c\varphi_c\Phi^c(h)\psi^{(c)} = p^{rc}a\varphi_c\Phi^c(h)\psi^{(c)}$$

for some $a \in p\mathbb{Z}$. Hence

$$p^{rc}h = p^{rc}a\varphi_c\Phi^c(h)\psi^{(c)} = p^{rc}a^2\varphi_c\Phi^c(\varphi_c)\Phi^{2c}(h)\psi^{(2c)} = \cdots = 0\,.$$

This proof shows also $[C,A[1]]_\varphi = 0$. In particular, we have $p^{cr}\gamma = 0$.

Next we show that the kernel of $[C,B]_\varphi \to [C,C]_\varphi$ is killed by p^{2cr}. Indeed, let h be an element of this kernel. Then, there exists $h' : C \to A$ such that $h = \alpha h'$. Since $\alpha(\varphi\Phi(h') - h'\varphi) = \varphi\Phi(h) - h\varphi = 0$, there exists $h'' : \Phi(C) \to C[-1]$ such that $\varphi\Phi(h') - h'\varphi = \gamma[-1]h''$. By $p^{cr}\gamma = 0$, we have $p^{cr}h' \in [C,A]_\varphi$ and hence $p^{2cr}h' = 0$ and $p^{2cr}h = 0$.

Finally we show the cokernel of $[C,B]_\varphi \to [C,C]_\varphi$ is killed by p^{cr+d}. Let $h \in [C,C]_\varphi$. Since $p^{cr}\gamma = 0$, we have $\gamma(p^{cr}h) = 0$ and hence there exists $h' : C \to B$ such that $\beta h' = p^{cr}h$. We have $\beta(\varphi\Phi(h') - h'\varphi) = 0$. Hence there exists $h'' : \Phi(C) \to A$ such that $\varphi\Phi(h') - h'\varphi = \alpha h''$. Define $t : C \to B$ by

$$t = p^d h' + \sum_{i\geq 0}(p^{d-r(i+1)}s_i)\alpha\varphi_i\Phi^i(h'')\psi^{(i+1)}\,.$$

Then $t \in [C,B]_\varphi$ and $\beta t = p^{cr+d}h$.

(4.15). — To prove (4.13), we apply (4.14) by taking

$$A = I_n \otimes^L_{\mathcal{O}(T_n)} \mathcal{K}_n \quad \text{where} \quad I_n = \operatorname{Ker}(\mathcal{O}(T_n) \longrightarrow W_n(k))\,,$$

$$B = \mathcal{K}_n\,,\quad C = \mathcal{K}'_n\,,\quad \beta = \beta_n\,,\quad \Phi = W_n(k) \underset{\varphi}{\nwarrow} \otimes^L_{W_n(k)}(?)\,,\quad s_i = (p^i)!\,,$$

and φ_i as follows. For $m \geq 1$, we have $\varphi^i(I_m) \subset p^i! I_m$. Indeed, if $a \in L_m$ and $\alpha(a) \in I_m$ (here $\alpha : L_m \to \mathcal{O}_{T_m}$ is the canonical map),

$$\varphi^i(\alpha(a)^{[j]}) \in (\alpha(a)^{p^i})^{[j]}\mathcal{O}_{T_m} = u_{i,j}\alpha(a)^{[p^i j]}\mathcal{O}_{T_m}$$

where $u_{i,j} = (p^i j)!(j!)^{-1}$, and $u_{i,j} \in p^i!\mathbb{Z}_p$ if $j \geq 1$. Hence we have a map of projective systems $(p^i!)^{-1}\varphi : I. \to I.$, which defines $\varphi_i : I_n \to I_n$. We define $\varphi_i : \Phi^i(A) \to A$ as $(\varphi_i \text{ on } I_i) \otimes (\varphi \text{ on } \mathcal{K}_n)$. Then, the assumptions (i) (iii) in (4.14) are satisfied clearly and (ii) is satisfied by (2.24). Note when n varies, we can take the same s_i, r, c and d independently of n. Hence we have the uniquements of h stated in (4.13). We show the existence of such h as follows. By (4.14), we find $h'_n \in [\mathcal{K}'_n, \mathcal{K}_n]_\varphi$ such that $\beta_n h'_n = p^{cr+d}$. Now when we vary n, the morphism $p^{2cr}h'_n$ coincides with the morphism induced by $p^{2cr}h'_{n+1}$. Thus $(p^{2cr}h'_n)_n$ is a morphism $\{\mathcal{K}'_n\}_n \to \{\mathcal{K}_n\}_n$ in $ps(D(Y_{et}, W.(k)))$. Define $h'' = p^{-3cr-d} \otimes (p^{2cr}h'_n) : \mathbb{Q} \otimes \{\mathcal{K}'_n\}_n \to \mathbb{Q} \otimes \{\mathcal{K}_n\}_n$ and let $h : \mathbb{Q} \otimes \{\mathcal{O}(T_n) \otimes_{W_n} \mathcal{K}'_n\}_n \to \mathbb{Q} \otimes \{\mathcal{K}_n\}_n$ be the morphism induced by h''. It remains to prove that h is an isomorphism. By lemma (4.17) below, it suffices to show that the morphism induced by h

$$\mathbb{Q} \otimes \{\mathcal{O}(T_n) \otimes_{W_n} W_n\omega_Y^q\}_n \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes \{R^q u^{\log}_{Y/T_n^*}(\mathcal{O}_{Y/T_n})\}_n \tag{4.15.1}$$

is an isomorphism in $\mathbb{Q} \otimes ps(\mathcal{O}(T.)$–modules)) for each q. But this follows from

LEMMA (4.16). — *The morphism* (4.15.1) *coincides with the one induced by the isomorphism in* (4.8).

PROOF. By a similar argument to that in (4.14) we can show that there exists a unique morphism whose composite with

$$\mathbb{Q} \otimes \{R^q u^{\log}_{Y/T_n^*}(\mathcal{O}_{Y/T_n})\} \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes \{W_n\omega_Y^q\}_n$$

coincides with the morphism induced by $\mathcal{O}(T_n) \longrightarrow W_n(k)$ and which commutes with frobenius. The morphism induced by (4.8) also has these properties.

In (4.15) we have used

LEMMA (4.17). — *Let $\mathcal{C}_i$ $(i \geq 1)$ be abelian categories, $D(\mathcal{C}_i)$ their derived categories, and let*

$$D(\mathcal{C}_{n+1}) \xrightarrow{\lambda_n} D(\mathcal{C}_n) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\lambda_1} D(\mathcal{C}_1)$$

be exact functors. Let $\{A_n\}_n$ *and* $\{B_n\}_n$ *be objects of* $ps(D(\mathcal{C}.))$ *and let* $h : \{A_n\}_n \longrightarrow \{B_n\}_n$ *be a morphism. Assume there exists* $r \geq 0$ *such that*

$$\#\{q \in \mathbb{Z}\,;\ H^q(A_n) \neq 0 \quad \text{or} \quad H^q(B_n) \neq 0\} \leq r$$

for all n. *Then, the following two conditions are equivalent.*

(i) $\mathbb{Q} \otimes \{A_n\}_n \to \mathbb{Q} \otimes \{B_n\}_n$ *is an isomorphism in* $\mathbb{Q} \otimes ps(D(\mathcal{C}.))$.

(ii) *There exists a non-zero integer* m *such that the kernel and the cokernel of* $H^q(A_n) \to H^q(B_n)$ *are killed by* m *for any* q *and any* n. *Here* $H^q : D(\mathcal{C}_n) \to \mathcal{C}_n$ *is the canonical cohomology functor.*

PROOF. The implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) is easily seen. We prove (ii) $\Longrightarrow$ (i). For each $n \geq 1$, take any distinguished triangle $A_n \xrightarrow{h} B_n \to C_n \to$. If (ii) is satisfied, $H^q(C_n)$ is killed by m^2 for any q and for any n. By (4.18) below, this shows that C_n is killed by $M = m^{4r}$ for any n. By the exact sequence $\mathrm{Hom}(B_n, A_n) \to \mathrm{Hom}(B_n, B_n) \to \mathrm{Hom}(B_n, C_n)$, there exists $g_n : B_n \to A_n$ such that $h_n g_n = M$. We see easily that $(Mg_n)_{n\geq 1}$ is a morphism $\{B_n\}_n \to \{A_n\}_n$ in $ps(D(\mathcal{C}.))$ and satisfies

$$h_n(Mg_n) = M^2\,, \quad (Mg_n)h_n = M^2 \quad \text{for any } n\,.$$

LEMMA (4.18). — *Let* $\mathcal{C}$ *be an abelian category,* A *an object of the derived category* $D(\mathcal{C})$, S *a finite subset of* $\mathbb{Z}$, m_q $(q \in S)$ *integers, and assume that* $H^q(A) = 0$ *for* $q \notin S$, *and that* $H^q(A)$ *is killed by* m_q *for* $q \in S$. *Then* A *is killed by* $\prod_{q\in S} m_q$.

PROOF. The case $\#(S) \leq 1$ is clear. Assume $\#(S) \geq 2$, let $r = \max(S)$, and consider the distinguished triangle

$$\tau_{\leq r-1}A \longrightarrow A \longrightarrow \tau_{\geq r}A \longrightarrow\ .$$

By induction on $\#(S)$, $\tau_{\leq r-1}A$ is killed by $\prod_{\substack{q\in S\\ q<r}} m_q$ and $\tau_{\geq r}A$ is killed by m_r.

By the exact sequence

$$\mathrm{Hom}(A, \tau_{\leq r-1}A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \tau_{\geq r}A)\,,$$

we see that the identity morphism of A is killed by $\prod_{q\in S} m_q$.

THEOREM (4.19). — *(cf. [Il1] II § 1 in the case without log structures). In the derived category, we have a canonical isomorphism*

$$W_n\omega^{\cdot}_Y \cong Ru^{\log}_{Y/(W_n,W_n(L))*}(\mathcal{O}_{Y/W_n})$$

compatible with frobenius and with the transition maps when n varies.

Here the transition map $W_{n+1}\omega^{\cdot}_Y \to W_n\omega^{\cdot}_Y$ means the canonical projection.

PROOF. The proof is the same as in the classical case [Il1] II § 1 (cf. also [Bl] III § 2). Take an embedding system $((Y^{\cdot},M^{\cdot}),\ (Z^{\cdot},N^{\cdot}))$ for $(Y,M) \to W_n, W_n(L))$ such that there exists a morphism $(W_n(Y^{\cdot}), W_n(M^{\cdot})) \to (Z^{\cdot},N^{\cdot})$ for which the diagram

$$\begin{tikzcd} & (W_n(Y^{\cdot}),\ W_n(M^{\cdot})) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ (Y^{\cdot},M^{\cdot}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (W_n,W_n(L)) \\ & (Z^{\cdot},N^{\cdot}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

is commutative, and consider the crystalline complex C_n with respect to this system. We define a homomorphism of complexes $C_n \to \theta^{-1}(W_n\omega^{\cdot}_Y)$, where $\theta : (Y^{\cdot})^{\sim}_{et} \to Y^{\sim}_{et}$, as follows. Let $(D^{\cdot}, M_{D^{\cdot}})$ be the PD-envelope of $(Y^{\cdot},M^{\cdot})$ in $(Z^{\cdot},N^{\cdot})$. By the universal property of the PD-envelope and the usual PD-structure on the ideal of Y in $W_n(Y)$ (which is characterized by $\varepsilon_i(a)^{[p]} = (p-1)!^{-1}\varepsilon_{ip-1}(a^{p^{i(p-1)}})$ for $a \in \mathcal{O}_Y$, $i \geq 1$) we have $(W_n(Y^{\cdot}), W_n(M^{\cdot})) \to (D^{\cdot}, M^{\cdot}_D)$, and this morphism gives a homomorphism of complexes $C_n \to \omega^{\cdot}_{W_n(Y^{\cdot})/(W_n,W_n(L)),[\,]}$ where $\bigoplus_{q\geq 0}\omega^q_{W_n(Y^{\cdot})/(W_n,W_n(L)),[\,]}$ is the quotient of $\bigoplus_{q\geq 0}\omega^q_{W_n(Y^{\cdot})/(W_n,W_n(L))}$ by the ideal generated locally by local sections of the form

$$(4.19.1) \qquad d(a^{[i]}) - a^{[i-1]}da \quad (a \in \operatorname{Ker}(W_n(\mathcal{O}_{Y^{\cdot}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y^{\cdot}}),\quad i \geq 1)\,.$$

Since the image of (4.19.1) in $W_n\omega^1_Y$ is zero (this is seen for example, by the fact that $\varprojlim_n W_n\omega^1_Y$ is torsion free and

$$i!(d(a^{[i]}) - a^{[i-1]}da) = d(a^i) - ia^{i-1}da = 0)\,,$$

we have $\omega^{\cdot}_{W_n(Y^{\cdot})/(W_n(L)),[]} \to W_n\omega^{\cdot}_Y = \theta^{-1}(W_n\omega^{\cdot}_Y)$. Thus we obtain the desired map $C_n \to \theta^{-1}(W_n\omega^{\cdot}_Y)$. By applying $R\theta_*$, we have $Ru^{\log}_{Y/(W_n,W_n(L))^*}(\mathcal{O}_{Y/W_n}) \to W_n\omega^{\cdot}_Y$. The fact that this is an isomorphism is reduced to the case $n=1$ by (4.5)(1). For $n=1$, if we take $Y^{\cdot} = Z^{\cdot} = Y$, $\omega^q_Y = C^q_1 \to W_1\omega^q_Y$ coincides with the Cartier isomorphism C^{-1}.

(4.20). — We show that in the semi-stable reduction case treated in § 1, the de Rham–Witt complex in § 1 is canonically isomorphic to the de Rham–Witt complex of this section. Let the situation be as in § 1 and define the log structures on Y and on $\mathrm{Spec}(k)$ as in (2.13.2). Let $W_n\omega^{\cdot}_{Y,I}$ (resp. $W_n\omega^{\cdot}_{Y,II}$) be the de Rham-Witt complex of § 1 (resp. § 4). Let U be a dense open subscheme of Y which is smooth over k, and let $u : U \to Y$ be the inclusion map. Then, $W_n\omega^{\cdot}_{U,I} = W_n\Omega^{\cdot}_U = W_n\omega^{\cdot}_{U,II}$ by the reduction to the classical case [IR], and hence $W_n\omega^{\cdot}_{Y,I}$ and $W_n\omega^{\cdot}_{Y,II}$ are regarded as subcomplexes of the same complex $u_*W_n\omega^{\cdot}_{U,I} = u_*W_n\omega^{\cdot}_{U,II}$ (here use (4.4) to see the map $W_n\omega^{\cdot}_{Y,II} \to u_*W_n\omega^{\cdot}_{U,II}$ is injective). By the presentation (4.6) of $W_n\omega^{\cdot}_{Y,II}$, we see that these subcomplexes are the same. Q.E.D.

We give a proof of the exactness of (1.5). Let $(W_n\widetilde{\omega}^q_Y)'$ be the sheaf obtained by replacing $f^{-1}(L^{gp})$ in (4.6.1) by the trivial group sheaf, and let $(W_n\omega^q_Y)'$ be the sheaf (4.6.1). Then we have an evident surjection $(W_n\widetilde{\omega}^q_Y)' \to W_n\widetilde{\omega}^q_Y$ which sits in a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
 & (W_n\omega^{q-1}_Y)' \arrow[r] \arrow[d] & (W_n\widetilde{\omega}^q_Y)' \arrow[r] \arrow[d] & (W_n\omega^q_Y)' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_n\omega^{q-1}_Y \arrow[r] & W_n\widetilde{\omega}^q_Y \arrow[r] & W_n\omega^q_Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Here the upper row is exact, the left and the right vertical arrows are isomorphisms by (4.6), and the lower row is exact except possibly at $W_n\widetilde{\omega}^q_Y$. This shows the exactness of the lower row.

In the above, we obtained $(W_n\widetilde{\omega}^q_Y)' \xrightarrow{\sim} W_n\widetilde{\omega}^q_Y$. From this we obtain also $\big(\bigoplus_{q\geq 0} \omega^q_{W_n(Y)//W_n}\big)/\widetilde{\mathcal{I}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{q\geq 0} W_n\widetilde{\omega}^q_Y$ where $W_n(Y)$ is endowed with $W_n(M)$, W_n is endowed with the trivial log structure, and $\widetilde{\mathcal{I}}$ is the ideal generated locally by $\eta_{i,j,a,b}$ and $d\eta_{i,j,a,b}$ (4.7) regarded as local sections of $\omega^{\cdot}_{W_n(Y)/W_n}$.

Finally the coincidence of the monodromy operator of § 1 and that of § 3 follows from the commutative diagram of exact sequences

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_n[-1] & \longrightarrow & W_n \otimes_{W_n\langle t\rangle} C_{Y/W_n} & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \cong\big\downarrow & & \big\downarrow & & \cong\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \theta^{-1}(W_n\omega^{\cdot}_Y)[-1] & \longrightarrow & \theta^{-1}(W_n\widetilde{\omega}^{\cdot}_Y) & \longrightarrow & \theta^{-1}(W_n\omega^{\cdot}_Y) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

where the upper row is the exact sequence in (3.6), the left and the right vertical arrows are as in the proof of (4.19), and the midlle vertical arrow is defined in the same way as the left and the right ones.

5. — de Rham cohomology

The aim of this section is to prove

THEOREM (5.1). — *Let A be a complete discrete valuation ring with field of fractions K and with perfect residue field k such that $char(K) = 0$ and $char(k) = p > 0$, and let N be the canonical log structure on* Spec(A) (2.13). *Let X be a scheme with a fine log structure M and with a smooth morphism $f : (X, M) \to$* (Spec$(A), N$) *and let $Y = X \otimes_A k$. Denote the inverse image of M* (resp. N) *on Y* (resp. Spec(k)) *by $\overline{M}$* (resp. L). *Assume that X is proper over A and the morphism $(Y, \overline{M}) \to$* (Spec$(k), L$) *is of Cartier type. Fix $m \in \mathbb{Z}$, and let*

$$D = \mathbb{Q} \otimes \varprojlim_{n} H^m(((Y, \overline{M})/(W_n, W_n(L)))_{crys}\,,\ \mathcal{O}_{Y/W_n})\,.$$

Then, to each prime element π of A, we can associate a canonical K-isomorphism

$$\rho_\pi : K \otimes_{K_0} D \xrightarrow{\sim} H^m_{DR}(X_K/K)$$

(K_0 denotes the field of fractions of $W(k)$, $X_K = X \otimes_A K$ endowed with the log structure induced by M, and $H^m_{DR}(X_K/K) = H^m(X_K, \omega^{\cdot}_{X_K/K})$), satisfying

$$\rho_{\pi u} = \rho_\pi \exp(\log(u)\mathcal{N}) \quad for\ u \in A^\times .$$

In particular, the linear operator $\rho_\pi \circ \mathcal{N} \circ \rho_\pi^{-1}$ on $H^m_{DR}(X_K/K)$ is independent of π.

We shall use the following notations. Let $A_n = A \otimes \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, $X_n = X \otimes \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. We endow $\operatorname{Spec}(A_n)$ (resp. X_n) with the inverse image of N (resp. M). We denote $Ru^{\log}_{*/*'}$ simply by $[*/*']$.

LEMMA (5.2). — *Fix a prime element π of A, and let $\operatorname{Spec}(R_n)$ be the PD-envelope of $\operatorname{Spec}(A_n)$ in $\operatorname{Spec}(W_n[t])$ with respect to the closed immersion $t \longmapsto \pi$. Endow $\operatorname{Spec}(R_n)$ with the log structure associated to $\mathbf{N} \to R_n$; $1 \longmapsto t$. Then, we have a canonical isomorphism in $\mathbf{Q} \otimes ps(D((X.)_{et}, R.))$*

$$h_\pi : \mathbf{Q} \otimes \{R_n \otimes^L_{W_n} [Y/(W_n, W_n(L))]\}_{n\geq 1} \cong \mathbf{Q} \otimes \{[X_n/\operatorname{Spec}(R_n)]\}_{n\geq 1} .$$

PROOF. Note $[X_n/\operatorname{Spec}(R_n)] = [X_1/\operatorname{Spec}(R_n)]$. Take $r \geq 0$ such that $(m_A)^{p^r} \subset pA$. We define h_π to be the composite of

$$(5.2.1)\qquad \begin{aligned} &\mathbf{Q} \otimes \{R_n \otimes^L_{W_n} [Y/(W_n, W_n(L))]\}_n \\ &\xleftarrow[1\otimes\varphi^r]{\cong} \mathbf{Q} \otimes \{R_n \underset{\varphi^r}{\diagdown} \otimes^L_{W_n} [Y/(W_n, W_n(L))]\}_n && (2.24) \\ &\cong \mathbf{Q} \otimes \{R_n \underset{g}{\diagdown} \otimes_{W_n<t>} [Y/\operatorname{Spec}(W_n < t >)]\}_n && (4.13) \\ &\xrightarrow{(*)} \mathbf{Q} \otimes \{[X_1/\operatorname{Spec}(R_n)]\}_n = \mathbf{Q} \otimes \{X_n/\operatorname{Spec}(R_n)]\}_n \end{aligned}$$

where φ are the frobeniuses, $\operatorname{Spec}(W_n < t >)$ is endowed with the log structure associated to $\mathbf{N} \to W_n < t >$; $1 \longmapsto t$, $g : W_n < t > \to R_n$ is the homomorphism

$$t \longmapsto t^{p^r}, \quad a \longmapsto \varphi^r(a) \quad \text{for } a \in W_n ,$$

and the arrow (*) is induced by the left big square of the commutative diagram below. Though the log structures are abbreviated for simplicity, this diagram is a commutative diagram of schemes with log structures. In this diagram the composites of the horizontal arrows are the r–th iteration of the frobenius.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & X_1 \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(A_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(A_1) \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(R_n) \arrow[r, "g"] & \mathrm{Spec}(W_n < t >) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R_n)
\end{tikzcd}$$

It is easily seen that h_π is R_n–linear and is independent of the choice of r. The following (5.3) shows that h_π is an isomorphism.

LEMMA (5.3). — *The arrow* $(*)$ *in* (5.2.1) *is an isomorphism.*

PROOF.

$$\mathbf{Q}\otimes\{R_n \underset{g}{\nwarrow} \otimes^L_{W_n<t>}[Y/\,\mathrm{Spec}(W_n <t>)]\}_n \cong \mathbf{Q}\otimes\{R_n \underset{\varphi^r}{\nwarrow} \otimes^L_{R_n}[X_1/\,\mathrm{Spec}(R_n)]\}_n$$

(by (2.23) since (**) is cartesian)

$$\xrightarrow[1\otimes\varphi^r]{\cong} \mathbf{Q}\{[X_1/\,\mathrm{Spec}(R_n)]\}_n$$

by (2.24).

(5.4). — The isomorphism h_π induces an isomorphism in $ps(D((X.)_{et}, A.))$

$$\mathbf{Q}\otimes\{A_n\otimes^L_{W_n}[Y/(W_n, W_n(L))]\}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}\otimes\{A_n\otimes^L_{R_n}[X_n/\,\mathrm{Spec}(R_n)]\}_n$$

and the last object is isomorphic to $\mathbf{Q}\otimes\{[X_n/\,\mathrm{Spec}(A_n)]\}_n$ by the base change theorem (2.23). Since

$$\mathbf{Q}\otimes\varprojlim_n H^m(X_n, [X_n/\,\mathrm{Spec}(A_n)]) \cong H^m_{DR}(X_K/K)\,,$$

we obtain an isomorphism

$$\rho_\pi : K \otimes_W \varprojlim_n H^m(((Y, \overline{M})/(W_n, W_n(L)))_{crys}, \mathcal{O}_{Y/W_n}) \xrightarrow{\sim} H^m_{DR}(X_K/K).$$

(5.5). — Finally we prove the relation between ρ_π and $\rho_{\pi u}$ stated in (5.1). Since $A^\times$ is generated by $1 + m_A$ and the image of the multiplicative representative $\lambda : k^\times \longrightarrow A^\times$, it is sufficient to consider the case $u \equiv 1 \bmod m_A$ and the case $u = \lambda(c)$ for $c \in k^\times$.

We consider first the case $u \equiv 1 \bmod m_A$. Let r be as in the proof of (5.2). Consider the morphism

$$\mathbb{Q} \otimes \{[Y/(W_n, W_n(L))]\}_n \xleftarrow[\cong]{\varphi^r} \mathbb{Q} \otimes \{[Y/(W_n, W_n(L))]\}_n$$
$$\xrightarrow{s} \mathbb{Q} \otimes \{[Y/W_n < t >]\} \xrightarrow{f_i} \mathbb{Q} \otimes \{[X_1/A_n]\}_n$$

($i = 1, 2$), where s is the morphism induced by h in (4.13) by taking $T_n = \operatorname{Spec}(W_n < t >)$ whose log structure is as in the proof of (5.2), and the arrow f_1 (resp. f_2) is induced by

$$g_1 : W_n < t > \longrightarrow A_n\,; \quad t \longmapsto \pi^{p^r} u^{p^r}$$

(resp. $g_2 : W_n < t > \longrightarrow A_n\,; t \longmapsto \pi^{p^r}$). Then the map $\rho_{\pi u}$ (resp. ρ_π) $: D \longrightarrow H^m(X_K/K)$ coincides with $H^m(f_1 \circ s \circ \varphi^{-r})$ (resp. $H^m(f_2 \circ s \circ \varphi^{-r})$). Let $(D'_n, M_{D'_n})$ be the PD–envelope of $\operatorname{Spec}(W_n < t >)$ in $\operatorname{Spec}(W_n < t_1, t_2 >)$, where $\operatorname{Spec}(W_n < t >)$ is endowed with the log structure associated to $\mathbb{N} \longrightarrow W_n < t >;\ 1 \longmapsto t$ and $\operatorname{Spec}(W_n < t_1, t_2 >)$ is endowed with the product log structure. Let $p_i : D' \longrightarrow \operatorname{Spec}(W_n < t >)$ ($i = 1, 2$) be the i–th projection. Since $g_1 \bmod p$ and $g_2 \bmod p$ coincide (as morphisms of log schemes), we have by (2.17.3)

$$p_1^* = \sum_{i \geq 0} (t_1 t_2^{-1} - 1)^{[i]} p_2^* \circ \prod_{0 \leq j < i} (\mathcal{N} - j)$$

as morphisms $[Y/W_n < t >] \longrightarrow [Y/D'_n]$, where $\mathcal{N} = \nabla_t^{\log}$ and p_i^* denotes the pull back by p_i. From this we obtain

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{i\geq 0}(u^{p^r}-1)^{[i]} f_2 \circ \prod_{0\leq j<i}(\mathcal{N}-j) \\ &= \sum_{i\geq 0} \log(u^{p^r})^{[i]} f_2 \circ \mathcal{N}^i . \end{aligned}$$

Hence we have

$$\begin{aligned} \rho_{\pi u} &= H^m\Big(\sum_{i\geq 0}\log(u^{p^r})^{[i]} f_2 \circ \mathcal{N}^i \circ s \circ \varphi^{-r}\Big) \\ &= H^m\Big(\sum_{i\geq 0}\log(u^{p^r})^{[i]} f_2 \circ s \circ \varphi^{-r}) \circ (p^{-r}\mathcal{N})^i \end{aligned}$$

(by $\mathcal{N}\circ s = s\circ\mathcal{N}$ which is easily seen, and by $\mathcal{N}\varphi = p\varphi\mathcal{N}$)

$$= \sum_{i\geq 0}(i!)^{-1}(\log(u))^i \rho_\pi \circ \mathcal{N}^i .$$

Next assume $u \in \lambda(k^\times)$. Then, the PD-morphism over W_n

$$f : W_n < t > \longrightarrow W_n < t >; \quad t \longmapsto ut$$

preserves the frobenius, and this fact and the characterization of the isomorphism (4.13) show that the diagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{Q}\otimes\{[Y/(W_n, W_n(L))]\}_n \arrow[dl, "\text{by (4.13)}"'] \arrow[dr, "\text{by (4.13)}"] & \\ \mathbb{Q}\otimes\{[Y/\operatorname{Spec}(W_n < t >)]\}_n \arrow[rr, "\text{by } f"'] & & \mathbb{Q}\otimes\{[Y/\operatorname{Spec}(W_n < t >)]\}_n \end{tikzcd}$$

is commutative. The fact $\rho_\pi = \rho_{u\pi}$ follows from this easily.

REFERENCES

[B] P. Berthelot. — *Cohomologie cristalline des schémas de charactéristique* $p > 0$, Lecture Notes in Math. 407, Springer, 1974.

[BO1] P. Berthelot and A. Ogus. — *Notes on crystalline cohomology*, Princeton Univ. Press., 1987.

[BO2] P. Berthelot and A. Ogus. — *F-isocrystals and de Rham cohomology I*, Invent. Math. 72, 1983, 159–199.

[Bl] S. Bloch. — *Algebraic K-theory and crystalline cohomology*, Publ. IHES, 47, 1977, 187-268.

[Fa] G. Faltings. — *F-isocrystals on open varieties, Results and conjectures*, The Grothendieck Festschrift, Vol. 2, 219–248, Progress in Math. 87, Birkhäuser 1990.

[Fo1] J.-M. Fontaine. — *Letter to U. Jannsen*, Nov. 26, 1987.

[Fo2] J.-M. Fontaine. — *Letter to K. Kato*, April 17, 1988.

[H1] O. Hyodo. — *A note on p-adic etale cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. Math. 91, 1988, 543–557.

[H2] O. Hyodo. — *On the de Rham-Witt complex attached to a semi-stable family*, Comp. Math. 78 (1991), 241–260.

[Il1] L. Illusie. — *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. ENS $4^{\text{ème}}$ série, t. 12, 5401-661, 1979.

[Il2] L. Illusie. — *Ordinarité des intersections complètes générales*, The Grothendieck Festschrift, Vol. 2, 375-405, Progress in Math. 87, Birkhäuser 1990.

[Il3] L. Illusie. — *Réduction semi-stable et décomposition de complexes de de Rham à cœfficients*, Duke Math. J. 60 (1990), 139–185.

[Il4] L. ILLUSIE. — *Logarithmic spaces*, according to K. Kato, Barsotti Memorial Symposium 1991, to appear.

[IR] L. ILLUSIE and M. RAYNAUD. — *Les suites spectrales associées au complexe de de Rham–Witt*, Publ. IHES 57, 1983, 73–212.

[J] U. JANNSEN. — *On the ℓ-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology*, in Galois groups over $\mathbb{Q}$, Springer–Verlag (1989), 315–360.

[K1] K. KATO. — *Logarithmic structures of Fontaine–Illusie*, in Algebraic analysis, geometry and number theory, the Johns Hopkins Univ. Press (1989), 191–224.

[K2] K. KATO. — *Semi–stable reduction and p–adic etale cohomology*, this volume.

[M] A. MOKRANE. — *La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo–Kato*, Duke Math. J. 72 (1993), 301–337.

[S] J. STEENBRINK. — *Limits of Hodge structures*, Invent. Math. 31, 1976, 229–257.

[SD] B. SAINT–DONAT. — *Techniques de descente cohomologique*, in SGA 4, Lecture Notes in Math. 270, Springer, 1972.

Kazuya Kato
Department of Mathematics
Tokyo Institute of Technology
OHOKAYAMA
OHOKAYAMA, MEGURO
TOKYO
JAPAN

Exposé VI

SEMI–STABLE REDUCTION AND P–ADIC ETALE COHOMOLOGY

by **Kazuya KATO**

1. — Introduction

This paper is a result of joint study with J.–M. Fontaine. I learned from him the main ideas in the study in this paper.

Let A be a complete discrete valuation ring with field of fractions K and with residue field k, such that $char(K) = 0$, $char(k) = p > 0$ and k is perfect. Let X be a proper scheme over A with semi–stable reduction (that is, X is regular and $X \otimes_A k$ is a reduced divisor with normal crossings on X). The purpose of this paper is to give a partial solution to a conjecture of Fontaine–Jannsen on the p–adic etale cohomology

$$H^m_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$$

($X_{\overline{K}} = X \otimes_A \overline{K}$ with $\overline{K}$ an algebraic closure of K).

We recall the conjecture (cf. Jannsen [J] § 5 for the first form of the conjecture; the final precise form of the conjecture introduced here was formulated in Fontaine [Fo3]). Let K_0 be the field of fractions of the ring $W(k)$ of Witt vectors. Let D be the "m–th crystalline cohomology with logarithmic poles in the semi–stable situation" defined in [H2] [HK], which is a K_0–vector space endowed with a frobenius $\varphi : D \to D$, a monodromy operator $\mathcal{N} : D \to D$, and an isomorphism with the de Rham cohomology

$$\rho_\pi : K \otimes_{K_0} D \xrightarrow{\sim} H^m_{DR}(X_K/K)$$

(ρ_π is defined canonically once one fixes a prime element π of A). The conjecture says that the $\mathbf{Q}_p$-vector space $V = H^m_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ endowed with the action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, and the K_0-vector space D endowed with φ, $\mathcal{N}$, and ρ_π, can be reconstructed from each other. To state the precise form of the conjecture, one needs a ring B_{st} of Fontaine ([Fo3]), which is defined also by fixing a prime element of A. Cf. (2.2) for the review of the definition of B_{st}. It is related to his older rings B_{crys} and B_{DR} (cf. [Fo1]; we review also these rings in (2.2)); B_{st} is a subring of B_{DR} containing B_{crys}. Properties of B_{st} used in the statement of the conjecture are that B_{st} is endowed with the frobenius $\varphi : B_{st} \to B_{st}$, a monodromy operator $\mathcal{N} : B_{st} \to B_{st}$, and a natural action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. We also have to recall that B_{DR} is a complete discrete valuation field with valuation ring B^+_{dR} and hence filtered by the valuation.

The conjecture is the following.

Conjecture (1.1). — *There exists a canonical isomorphism*

$$B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \cong B_{st} \otimes_{K_0} D$$

with preserves φ, $\mathcal{N}$, the action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, *and the filtration after taking* $B_{DR} \otimes_{B_{st}}$.

Here φ on the left (resp. right) hand side in (1.1) is $\varphi \otimes 1$ (resp. $\varphi \otimes \varphi$), $\mathcal{N}$ on the left (resp. right) hand side is $\mathcal{N} \otimes 1$ (resp. $N \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{N}$), the action of $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ on the left (resp. right) hand side is $\sigma \otimes \sigma$ (resp. $\sigma \otimes 1$), the filtration on $B_{DR} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ is $fil^{\cdot} B_{DR} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, and the filtration on

$$B_{DR} \otimes_{K_0} D = B_{DR} \otimes_K H^m_{DR}(X_K/K) \quad (via\ \rho_\pi)\,,$$

where we use the same prime element π in the definitions of B_{st} and ρ_π, is the tensor product of the filtrations on B_{DR} and the Hodge filtration on $H^m_{DR}(X_K/K)$. Since the $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-invariant part of B_{st} is K_0 and $\{x \in B_{st}\,;\ \varphi(x) = x,\ \mathcal{N}(x) = 0,\ x \in B^+_{DR}\} = \mathbf{Q}_p$ ([Fo3]), one will have as a consequence of the conjecture,

$$D \cong \{x \in B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V; \sigma(x) = x \quad for\ all\ \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\}$$

$$V \cong \{x \in B_{st} \otimes_{K_0} D; \varphi(x) = x\,,\ \mathcal{N}(x) = 0\,,\ x \in fil^0(B_{DR} \otimes_{K_0} D)\}\,.$$

This conjecture is the "semi-stable reduction version" of the crystalline conjecture of Fontaine [Fo1] on $H^m_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ for the case X is smooth over A, which was studied and proved by Fontaine, Messing and Faltings ([FM], [Fa2]). A new phenomenon in the semi-stable reduction case is that the monodromy operator is involved. In [Fo3], Conjecture (1.1) was proved in the case of abelian varieties.

Our result is the following

THEOREM (1.2). — *The conjecture* (1.1) *is true if* $p > 2\dim(X_K) + 1$.

In the "ordinary semi-stable reduction" case, $H^m_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ was studied by Hyodo [H1] without any assumption on p (cf. also [P], Appendix by L. Illusie).

In § 2 we give preliminaries. In § 3 and § 4, we give interpretations of the ring B_{st} and the space $\{x \in B_{st} \otimes D; \mathcal{N} = 0\}$ by the theory of crystalline cohomology with logarithmic poles, respectively. In § 5, we state a result, whose proof will be given elsewhere, on the relation between p-adic vanishing cycles and a certain complex $s_n^{\log}(r)$ related to crystalline cohomology with log poles (in the good reduction case, this result is proved in Kurihara [Ku]). By combining § 3 – § 5, we prove Thm. (1.2) in § 6.

I thank Professor J.-M. Fontaine without whose help, I could do nothing about the subject of this paper. I also thank Professors L. Illusie and W. Messing for advice. The method in § 6 is a modification of the method in the joint paper [KM] of W. Messing and the author which treated the good reduction case.

2. — Preliminaries

In this § 2, we fix notations, review the definitions of the rings B_{crys}, B_{DR} and B_{st}, and give some comments on the crystalline cohomology with logarithmic poles.

(2.1). — We use the following notations. Let A, K, k and $\overline{K}$ be as in § 1. Let $\overline{A}$ be the integral closure of A in $\overline{K}$, and let

$$A_n = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\,, \quad \overline{A}_n = \overline{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\,,$$

$$S = \mathrm{Spec}(A)\,, \quad S_n = \mathrm{Spec}(A_n)\,, \quad \overline{S} = \mathrm{Spec}(\overline{A})\,, \quad \overline{S}_n = \mathrm{Spec}(\overline{A}_n)\,.$$

(2.2). — We review the definitions of the rings B_{crys}, B_{DR} and B_{st} (cf. [Fo1], [Fo3], [Fo4], [FM]). For $n \geq 1$, let

$$B_n = \Gamma((\overline{S}_n/W_n)_{crys}, \mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n})$$

i.e. the ring of global sections of the structure sheaf of the crystalline site of $\overline{S}_n$ over $W_n = \mathrm{Spec}(W_n(k))$. Then the canonical homomorphism $B_n \to \overline{A}_n$ is surjective. We denote by J_n the kernel of this surjection, and by $J_n^{[r]}$ the r-th divided power of J_n. For a sequence $s = (s_n)_{n \geq 0}$ of elements of $\overline{A}$ such that $(s_{n+1})^p = s_n$ for all $n \geq 0$, let $\varepsilon(s) = ((\widetilde{s}_n)^{p^n})_n \in \varprojlim_n B_n$ where for $a \in \overline{A}$, we denoted by $\widetilde{a}$ any element of B_n whose image in $\overline{A}_n$ coincides with that of a (then $\widetilde{a}^{p^n}$ depends only on a, and is independent of the choice of $\widetilde{a}$). This map ε defines an injective homomorphism

$$\log \varepsilon : \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow \varprojlim_n B_n\,.$$

Let

$$B_{crys}^+ = \mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n B_n\,, \quad B_{crys} = B_{crys}^+[t^{-1}]$$

$$B_{DR}^+ = \varprojlim_r(\mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n B_n/J_n^{[r]})\,, \quad B_{DR} = B_{DR}^+[t^{-1}]$$

where t is any non-zero element in the image of $\mathbb{Q} \otimes \varepsilon : \mathbb{Q}_p(1) \to B_{crys}^+$. Then B_{crys} has a frobenius endomorphism by the crystalline cohomology theory, B_{DR} has a filtration by the fact that it is a complete discrete valuation field with valuation ring B_{DR}^+ (the residue field is $\mathbb{C}_p = \mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n \overline{A}_n$, and the t as above is a prime element), and B_{crys} and B_{DR} are endowed with natural actions of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Now fix a prime element π of A.

For a sequence $s = (s_n)_{n \geq 0}$ of elements of $\overline{A}$ such that

$$s_0 = \pi\,, \quad (s_{n+1})^p = s_n \quad \text{for} \quad n \geq 0\,,$$

we have $\varepsilon(s)\pi^{-1} \in \mathrm{Ker}((B_{DR}^+)^\times \to \mathbb{C}_p^\times)$ and hence

$$u_s = \log(\varepsilon(s)\pi^{-1}) \in B_{DR}^+$$

is defined. Fontaine defines B_{st}^+ and B_{st} by

$$B_{st}^+ = B_{crys}^+[u_s]\,, \quad B_{st} = B_{crys}[u_s]$$

as subrings of B_{DR}. It was shown by Fontaine [Fo3] that u_s is transcendental over B_{crys} and hence B_{st}^+ (resp. B_{st}) is a polynomial ring in one variable over B_{crys}^+ (resp. B_{crys}). The rings B_{st}^+ and B_{st} depend on the prime element π, but do not depend on the choice of s. The frobenius $\varphi : B_{st} \to B_{st}$ is defined by extending the φ of B_{crys} by $\varphi(u_s) = pu_s$, and the monodromy operator $\mathcal{N} : B_{st} \to B_{st}$ is defined to be the unique B_{crys}–derivation such that $\mathcal{N}(u_s) = 1$. These operators φ and $\mathcal{N}$ are also independent of the choice of s. Finally B_{st} is $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-stable in B_{DR} and hence $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ acts on B_{st}.

(2.3). — In this paper we use freely the terminologies concerning log structures introduced in [HK] and [Ka2], without explaining the definitions of them. We just mention here that a logarithmic structure on a scheme X in the sense of Fontaine–Illusie is, by definition, a sheaf of commutative monoids with a unit on the etale site X_{et} which is endowed with a homomorphism $\alpha : M \to \mathcal{O}_X$ with respect to the multiplication on $\mathcal{O}_X$ satisfying $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^\times$ via α (cf. [Fa3] for another formulation of logarithmic structures).

We make the following conventions.

(2.3.1) A scheme X with a log structure M is denoted as (X, M). If M is the trivial log structure (that is, $M = \mathcal{O}_X^\times$ with the inclusion map $\mathcal{O}_X^\times \to \mathcal{O}_X$), we abbreviate (X, M) as X.

(2.3.2) If X is a scheme and M is a log structure on X, and if the inverse image of $a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ in $\Gamma(X, M)$ consists of a single element b, we sometimes identify b with a.

(2.3.3). — For a scheme X and $a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, we denote by $\mathcal{L}(a)$ the fine log structure on X associated ([HK] (2.2)) to $\mathbb{N} \to \mathcal{O}_X\,;\, 1 \longmapsto a$. For example, the "canonical log structure" on Spec(A) defined in (2.6) below coincides with $\mathcal{L}(\pi)$ for any prime element π of A.

(2.4). — In the paper [HK], we discussed the crystalline cohomology theory only for schemes with fine log structures. But the log structure on Spec($\overline{A}$) which we discuss in this paper is not fine though it is a filtered inductive limit of fine log structures. We say a log structure M on a scheme X is *integral* if "$ac = bc$ implies $a = b$" holds in M (a fine log structure is integral, and the log structure on Spec($\overline{A}$) discussed later is integral). By replacing the category of schemes with fine log structures in [HK] by the category of schemes with integral log structures, we obtain the definition of the crystalline sites for schemes with integral log structures. For schemes with fine log structures, this does not change their crystalline sites.

With this definition of the crystalline site :

(2.4.1) Let (T, L) be a scheme with a fine log structure such that $\mathcal{O}_T$ is killed by some non-zero integer, and assume T is endowed with a PD (= divided power) ideal. For a scheme with an integral log structure (X, M) over (T, L), we denote by

$$H^q((X, M)/(T, L))$$

the q-th cohomology of the structure sheaf $\mathcal{O}_{X/T}$ on the crystalline site $((X, M)/(T, L))_{crys}$.

(2.4.2). — With (T, L) as in (2.4.1), let $f : (X, M) \to (Y, N)$ be a morphism of schemes with integral log structures over (T, L). Then, if N is fine, a morphism between the crystalline topoi

$$f_{crys} : ((X, M)/(T, L))^{\sim}_{crys} \longrightarrow ((Y, N)/(T, L))^{\sim}_{crys}$$

is associated to f. The construction of f_{crys} is the same as in the fine case.

(2.4.3). — Let (T, L) be as in (2.4.1) and let $\{(X_\lambda, M_\lambda)\}_\lambda$ be a filtered inductive system of schemes with fine log structures over (T, L) such that all transition morphism $X_\lambda \to X_\mu$ are affine. Let X be the projective limit of $\{X_\lambda\}_\lambda$ and let M be the inductive limit on X of the inverse images of M_λ. Then,

$$H^q((X, M)/(T, L)) \cong \varinjlim H^q((X_\lambda, M_\lambda)/(T, L)).$$

If (Y,N) is a scheme with a fine log structure over (T,L) and the $(X_\lambda, M_\lambda) \to (T,L)$ factor through morphisms $f_\lambda : (X_\lambda, M_\lambda) \to (Y,N)$ which are compatible with the transition morphisms, we have

$$R^q f_{crys*}(\mathcal{O}_{X/S}) \cong \varinjlim R^q(f_\lambda)_{crys*}(\mathcal{O}_{X_\lambda/S})$$

where f is the limit of f_λ. These facts follow from [SGA4] (tome 2) Exposé VI.

(2.5). — In [FM], a morphism of schemes which is flat and locally of complete intersection is called syntomic and syntomic morphisms behave well in their theory. We shall use the logarithmic version of this notion.

We say a morphism $f : (X,M) \to (Y,N)$ of schemes with fine log structures is *syntomic* if f is an integral morphism [HK] (2.10), the underlying morphism $X \to Y$ is flat and locally of finite presentation, and if etale locally on X there is a factorization of $f : (X,M) \xrightarrow{i} (Z,L) \xrightarrow{h} (Y,N)$ with (Z,L) a scheme with a fine log structure satisfying the following conditions : i is an exact closed immersion [HK] (2.8), h is smooth [HK] (2.9), and the ideal of X in Z is generated at each point of X by a regular sequence.

Just as in the case of the original definition, we can show

(2.5.1). — If f is syntomic and we have another factorization $(X,M) \xrightarrow{i'} (Z',L') \xrightarrow{h'} (Y,N)$ of f with L' fine, i' an exact closed immersion and h' smooth, then the ideal of X in Z' is defined at each point of X by a regular sequence. Furthermore, if we have such a factorization of a syntomic morphism and if we are given a quasi-coherent ideal I of $\mathcal{O}_Y$ and a divided power structure on I, the divided power envelope of X in Z' is flat over Y (cf. [FM] for the case without log structures).

(2.5.2). — We have the base change theorem of crystalline cohomology for syntomic morphisms (cf. [BBM] (2.3.5) and [B] V 3.5.1 for the case without log structures) :

Assume we have a commutative diagram of shemes with fine log structures

$$\begin{array}{ccc} (X',M') & \xrightarrow{g'} & (X,M) \\ {\scriptstyle f'}\big\downarrow & \square & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ (Y',N') & \xrightarrow{g} & (Y,N) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (T',L') & \xrightarrow{v} & (T,L) \end{array}$$

such that the upper square is cartesian, f is syntomic, the underlying morphism $f : X \to Y$ is quasi-compact and quasi-separated, and $\mathcal{O}_T$ is annihilated by some non-zero integer. Assume T and T' are endowed with quasi-coherent PD-ideals and $v : T' \to T$ is a PD-morphism. Then, for any quasi-coherent flat crystal of $\mathcal{O}_{X/T}$-modules on $((X,M)/(T,L))_{crys}$, we have a canonical isomorphism

$$Lg^*_{crys} Rf_{crys*}(\mathcal{F}) \cong Rf'_{crys*} g'^*_{crys}(\mathcal{F}) .$$

(2.6). — For a scheme over the discrete valuation ring A, we define the *canonical log structure* as the sheaf of regular functions which are invertible on the generic fiber.

In what follows, we denote the canonical log structure on $S = \mathrm{Spec}(A)$ (resp. $\overline{S} = \mathrm{Spec}(\overline{A})$) by N (resp. $\overline{N}$) and the inverse image of N on $S_n = \mathrm{Spec}(A_n)$ by N_n (resp. of $\overline{N}$ on $\overline{S}_n = \mathrm{Spec}(\overline{A}_n)$ by $\overline{N}_n$). Then $\overline{N}$ is the inductive limit of inverse images of the canonical log structures on $\mathrm{Spec}(A')$, where A' ranges over all discrete valuation rings in $\overline{A}$ which are finite over A, and $\overline{N}_n$ is the inductive limit of the inverse images of the log structures on $\mathrm{Spec}(A'/p^n A')$ defined in the way above.

We shall denote the inverse image of N on $\mathrm{Spec}(k)$ by L.

For $a \in A - \{0\}$, the images of a in any of the log structures introduced here are denoted by class(a).

3. — A crystalline interpretation of B_{st}

We give an interpretation (3.7) of the ring B_{st} by the theory of crystals with logarithmic poles. Let

$$h : (\overline{S}_n, \overline{N}_n) \longrightarrow (S_n, N_n)$$

be the canonical morphism (cf. (2.6) for the notation), and let $h_{crys} : ((\overline{S}_n, \overline{N}_n)/W_n)^{\sim}_{crys} \to ((S_n, N_n)/W_n)^{\sim}_{crys}$ be the induced morphism (2.4.2).

In this section we compute the higher direct images of the structure sheaf for this morphism

$$R^q h_{crys*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n})$$

and show that $h_{crys*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n})$ is closely related to B_{st}.

PROPOSITION (3.1). — *$R^q h_{crys*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n}) = 0$ for $q \neq 0$ and $h_{crys*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n})$ is a quasi-coherent flat crystal of $\mathcal{O}_{S_n/W_n}$-modules on $((S_n, N_n)/W_n)_{crys}$.*

(3.2). — We give a description (3.3) of the crystal $h_{crys*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n})$. To describe a crystal by a connection just as in the usual theory (without log structures) of crystals, we embed (S_n, N_n) in a smooth object. Fix a prime element π of A, let $Z_n = \mathrm{Spec}(W_n[t])$ with t an indeterminate, let $E_n = \mathrm{Spec}(R_n)$ be the PD-envelope of S_n in Z_n with respect to the closed immersion $S_n \to Z_n\,;\, t \longmapsto \pi$, and endow Z_n (resp. E_n) with the log structure $\mathcal{L}(t)$ (cf. (2.3.3)). Since $(Z_n, \mathcal{L}(t))$ is smooth ([HK] (2.9)) over W_n, a quasi-coherent crystal of $\mathcal{O}_{S_n/W_n}$-modules $\mathcal{F}$ on $((S_n, N_n)/W_n)_{crys}$ is characterized by the R_n-module $\mathcal{F}(E_n)$ and the connection with log poles

$$\nabla : \mathcal{F}(E_n) \longrightarrow \mathcal{F}(E_n)\mathrm{d}\log(t)$$

([HK] (2.17)). Here $\mathcal{F}(E_n)\mathrm{d}\log(t)$ means $\mathcal{F}(E_n) \otimes_{W_n[t]} \Gamma(Z_n, \omega^1_{Z_n/W_n})$ with ω^1 the differential module with log poles [HK] (2.5) (then $\Gamma(Z_n, \omega^1_{Z_n/W_n})$ is a free $W_n[t]$-module of rank one with base $\mathrm{d}\log(t)$). Let

$$P_n = \mathcal{F}(E_n) \quad \text{with } \mathcal{F} = h_{crys*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n}). \tag{3.2.1}$$

Note the homomorphism $B_n \to \overline{A}_n$ factors canonically as $B_n \to P_n \to \overline{A}_n$ and the kernel of $P_n \to \overline{A}_n$ has a natural PD-structure.

PROPOSITION (3.3). — (1) *To each p^n-th root β of π in $\overline{A}$, there exists a canonically defined element v_β of* $\mathrm{Ker}(P_n^\times \to \overline{A}_n^\times)$ *such that we have a PD-isomorphism*

$$B_n < V > \xrightarrow{\sim} P_n\,; \quad V \longmapsto v_\beta - 1$$

where $B_n < V >$ denotes the PD-polynomial ring over B_n in one variable V. If $\zeta \in \overline{A}$ and $\zeta^{p^n} = 1$, then $v_{\zeta\beta} = \tilde{\zeta}^{p^n} v_\beta$ where $\tilde{\zeta}$ is any element of B_n whose image in $\overline{A}_n$ coincides with that of ζ.

(2) *The connection $\nabla : P_n \to P_n \mathrm{d}\log(t)$ is the unique B_n-linear map satisfying*

$$\nabla((v_\beta - 1)^{[i]}) = (v_\beta - 1)^{[i-1]} v_\beta \mathrm{d}\log(t) \quad \textit{for all } i\,.$$

(in particular, $\nabla(v_\beta) = v_\beta \mathrm{d}\log(t)$).

(3) *Let $\varphi : P_n \to P_n$ be the frobenius, which is induced by the frobenius $(Z_n, \mathcal{L}(t)) \to (Z_n, \mathcal{L}(t))$ defined by the usual frobenius of W_n and by $t \longmapsto t^p$. Then, φ is the unique PD-homomorphism which extends the frobenius of B_n and satisfies $\varphi(v_\beta) = (v_\beta)^p$.*

(4) *The natural action of* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *on P_n is characterized by the following properties. It extends the natural action of* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *on B_n, it preserves the PD-structure, and satisfies $\sigma(v_\beta) = v_{\sigma(\beta)}$ $(\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K))$.*

DEFINITION (3.4). — *Define $\mathcal{N} : P_n \to P_n$ by*

$$\nabla(a) = \mathcal{N}(a) \mathrm{d}\log(t) \quad \textit{for } a \in P_n\,.$$

Then $\mathcal{N}$ is a B_n-derivation.

DEFINITION (3.5). — *For a primitive p^n-th root β of π in $\overline{A}$, define*

$$u_\beta = \log(v_\beta) \in P_n$$

where log *is defined by the PD-structure on* $\mathrm{Ker}(P_n \to \overline{A}_n)$.

COROLLARY (3.6). — *The map $\mathcal{N} : P_n \to P_n$ is surjective,*

$$\{a \in P_n\,;\ \mathcal{N}^i(a) = 0\} = \bigoplus_{0 \le j < i} B_n(u_\beta)^{[j]}\,,$$

$$\{a \in P_n\,;\ \mathcal{N}^i(a) = 0 \quad for\ some\ i\} = B_n < u_\beta >\,,$$

and u_β is transcendental over B_n.

From (3.3) and (3.6), we have

THEOREM (3.7). — *There exists a canonical B^+_{crys}-isomorphism between the ring B^+_{st} of Fontaine and*

$$\{a \in \mathbf{Q} \otimes \varprojlim_{\mathrm{n}} P_n\,;\ \mathcal{N}^i(a) = 0 \quad for\ some\ i \ge 0\}$$

where B^+_{st} and P_n are defined using the same prime element π, which preserves φ, $\mathcal{N}$ and the action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Indeed, the isomorphism is given by sending $u_s \in B^+_{st}$ for $s = (s_n)_n$ ($s_n \in \overline{A}$, $s_0 = \pi$, $(s_{n+1})^p = s_n$) (cf. (2.2)) to $(u_{s_n})_n \in \varprojlim_n P_n$. The inverse map is induced from $\varprojlim_n P_n \to B_{DR}\,;\ ((v_{s_n} - 1)^{[i]})_n \longmapsto (i!)^{-1}(\varepsilon(s)\pi^{-1} - 1)^i$.

(3.8). — We prove (3.1). We follow the argument of Fontaine [Fo1] § 3. Let F be any object of $((S_n, N_n)/W_n)crys$ and let N_F be the log structure of F. By (2.4.3) we have

$$R^q h_{crys*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n})(F) = \varinjlim_{A'} H^q((S'_n, N'_n)/(F, N_F)) \tag{3.8.1}$$

where A' ranges over all discrete valuation ring in $\overline{A}$ which are finite over A, $S'_n = \mathrm{Spec}(A'/p^nA')$ and N'_n is the inverse image of the canonical log structure on $\mathrm{Spec}(A')$ (2.6). For such A', take a prime element π' of A' and write $\pi = (\pi')^i a$ for $i \ge 1$ and $a \in (A')^\times$. Let $\widetilde{\pi}$ be a section of N_F whose image in N_n is class(π) (2.6). Let

$$Z' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F[t', u^{\pm 1}]/((t')^i u - \alpha(\widetilde{\pi}))) \quad (\alpha : N_F \to \mathcal{O}_F)$$

where t' and u are indeterminates. Then the morphism $(S'_n, N'_n) \to (F, N_F)$ factors as $(S'_n, N'_n) \to (Z', \mathcal{L}(t')) \to (F, N_F)$ where the first arrow is an exact closed immersion defined by $\mathcal{O}_{Z'} \to \mathcal{O}_{S'_n}$; $t' \longmapsto \pi'$, $u \longmapsto a$ and by $\mathcal{L}(t') \to N'_n$; $t' \longmapsto \mathrm{class}(\pi')$, and the second is a smooth morphism defined by $N_F \to \mathcal{L}(t')$; $\widetilde{\pi} \longmapsto (t')^i u$. Let F' be the PD-envelope of S'_n in Z'. Then ([HK] (2.20))

$$H^q((S'_n, N'_n)/(F, N_F)) \cong H^q(F', \mathcal{O}_{F'} \otimes_{\mathcal{O}_{Z'}} \omega^{\cdot}_{Z'/F}). \tag{3.8.2}$$

Note $\omega^1_{Z'/F}$ is a free $\mathcal{O}_{Z'}$-module with basis $d\log(t')$. To pass to $\varinjlim_{A'}$, let $A'' = A'[\pi'']$ where π'' is a p^n-th root of π', $S'' = \mathrm{Spec}(A''/p^n A'')$, N''_n on S''_n the inverse image of the canonical log structure of $\mathrm{Spec}(A'')$, $Z'' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z'}[t'']/((t'')^{p^n} - t'))$, and form the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} (S''_n, N''_n) & \longrightarrow & (Z'', \mathcal{L}(t'')) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (S', N'_n) & \longrightarrow & (Z', \mathcal{L}(t')) \end{array}$$

with $\mathcal{O}_{Z''} \to \mathcal{O}_{S''}$; $t'' \longmapsto \pi''$, $\mathcal{L}(t'') \to N''_n$; $t'' \longmapsto \mathrm{class}(\pi'')$, $\mathcal{L}(t') \to \mathcal{L}(t'')$; $t' \longmapsto (t'')^{p^n}$.

Then, $\omega^1_{Z'/F} \to \omega^1_{Z''/F}$ annihilates $d\log(t')$ and hence is the zero map. This shows that

$$\varinjlim_{A'} H^q((S'_n, N'_n)/(F, N_F)) = 0 \quad \text{for } q \neq 0.$$

We have shown $Rh_{crys*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n}) = h_{crys*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n})$. This and the base change theorem (2.5.2) shows that $h_{crys*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n})$ is flat. The fact that $h_{crys*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n})$ is quasi-coherent is shown easily.

(3.9). — We prove (3.3). The following proof is due to the suggestion of W. Messing (my original proof was a direct computation using (3.8.1) and (3.8.2) and was long). Fix a p^n-th root β of π in $\overline{A}$, and regard $\mathrm{Spec}(B_n < V >)$ (V an indeterminate) as an object of

$((\overline{S}_n, \overline{N}_n)/(E_n, N_{E_n}))_{crys}$ as follows : $B_n < V > \longrightarrow \overline{A}_n$ is $V \longmapsto 0$, the PD-structure on $\mathrm{Ker}(B_n < V > \to \overline{A}_n)$ is the usual one, the log structure of $\mathrm{Spec}(B_n < V >)$ which we denote by $\mathcal{L}$ is associated to $\overline{A} - \{0\} \to B_n < V >$; $a \longmapsto \widetilde{a}^{p^n}$ where $\widetilde{a}$ denotes any lifting of a to B_n (we will denote by η the induced map $\overline{A} - \{0\} \to \mathcal{L}$) and $(\mathrm{Spec}(B_n < V >), \mathcal{L}) \to (E_n, N_{E_n})$ is given by the PD-homomorphism $R_n \to B_n < V >$: $t \longmapsto (1+V)^{-1}\widetilde{\beta}^{p^n}$ and by $N_{E_n} \to \mathcal{L}$; $t \longmapsto (1+V)^{-1}\eta(\beta)$. Then, $\mathrm{Spec}(B_n < V >)$ is a terminal object in $((\overline{S}_n, \overline{N}_n)/(E_n, N_{E_n}))_{crys}$, and this fact implies $B_n < V > \xrightarrow{\sim} H^0((\overline{S}_n, \overline{N}_n)/(E_n, N_{E_n})) = P_n$.

Indeed, for any object F of $(\overline{S}_n, \overline{N}_n)/(E_n, N_{E_n}))_{crys}$ with the log structure N_F, the unique morphism $F \to \mathrm{Spec}(B_n < V >)$ in $((\overline{S}_n, \overline{N}_n)/(E_n, N_{E_n}))_{crys}$ is given as follows. Let $\widetilde{\beta}$ be any section of N_F whose image in $\overline{N}_n$ is the class of β. Then $\widetilde{\beta}^{p^n}$ is independent of the choice of $\widetilde{\beta}$. Since the images of $\widetilde{\beta}^{p^n}$ and t under $N_F \to \overline{N}_n$ coincide, there exists a unique section v_β of $\mathcal{O}_F^\times$ such that $\widetilde{\beta}^{p^n} = tv_\beta$ in N_F. Define the PD-homomorphism $B_n < V > \to \mathcal{O}(F)$ by $V \longmapsto v_\beta - 1$, and extend this morphism to the log structures by $\eta(a) \longmapsto \widetilde{a}^{p^n}$ $(a \in \overline{A} - \{0\})$ where $\widetilde{a}$ is any lifting of $\mathrm{class}(a) \in \overline{N}_n$ to N_F (then $\widetilde{a}^{p^n}$ is independent of the choice of $\widetilde{a}$). It is easily checked that this construction yields a unique morphism in $((\overline{S}_n, \overline{N}_n)/(E_n, N_{E_n}))_{crys}$. The properties of P_n in (3.3)(1)–(4) (with v_β defined as in the above argument) are checked easily.

4. — Crystalline interpretation of $(B_{st} \otimes D)^{\mathcal{N}=0}$

In this section, let $S = \mathrm{Spec}(A)$, N and L be as in (2.6), and let (X, M) be a scheme with a log structure over (S, N) satisfying the following conditions (i), (ii), (iii) :

(i) (X, M) is smooth over (S, N).

(ii) The underlying morphism $X \to S$ is proper.

(iii) Let $Y = X \otimes_A k$ and let M_Y be the inverse image of M on Y. Then the induced morphism $(Y, M_Y) \to (\mathrm{Spec}(k), L)$ is of Cartier type [HK] (2.12).

For example, if (X, M) is a fiber product over (S, N) of a finite family of proper A-schemes with semistable reduction with the canonical log structures (2.6), then (X, M) satisfies the conditions above. Moreover the conditions above are stable under base changes $(S', N') \to (S, N)$ where S' is the spectrum of a complete discrete valuation ring with perfect residue field dominating S and N' is the canonical log structure of S'.

Fix $m \geq 0$ and let

$$D_n = H^m((Y, M_Y)/(W_n, W_n(L))) \quad (n \geq 1)$$

$$D_\infty = \varprojlim_n D_n\,, \quad D = \mathbf{Q} \otimes D_\infty\,,$$

where $W_n(L)$ is the canonical lifting of L to W_n defined in [HK] (3.1). Then as in [HK], D_n is a $W_n(k)$–module of finite length, D_∞ is a $W(k)$–module of finite type, and we have a frobenius–linear operator $\varphi : D_n \to D_n$ called the *frobenius* and a linear operator $\mathcal{N} : D_n \to D_n$ called the *monodromy operator* which induce $D_\infty \to D_\infty$ and $D \to D$ denoted by the same letters φ and $\mathcal{N}$, respectively.

Fix a prime element π of A to define B_{st}^+. The aim of this section is to prove

THEOREM (4.1). — *The kernel of*

$$\mathcal{N} = \mathcal{N} \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{N} : B_{st}^+ \otimes_{K_0} D \longrightarrow B_{st}^+ \otimes_{K_0} D$$

is canonically isomorphic to

$$\mathbf{Q} \otimes \varprojlim_n H^m((\overline{X}_n, \overline{M}_n)/W_n)$$

where $(\overline{X}_n, \overline{M}_n) = (X, M) \times_{(S,N)} (\overline{S}_n, \overline{N}_n)$ *for* $n \geq 1$.

For $n \geq 1$, let $X_n = X \otimes \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, let M_n be the inverse image of M on X_n, and let the notations be as

$$\begin{array}{ccc} (\overline{X}_n, \overline{M}_n) & \xrightarrow{\bar{f}_n} & (\overline{S}_n, \overline{N}_n) \\ {\scriptstyle g_n}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle h_n} \\ (X_n, M_n) & \xrightarrow{f_n} & (S_n, N_n)\,. \end{array} \qquad \text{(cartesian diagram)}$$

Let $Z_n = \mathrm{Spec}(W_n[t])$ and $E_n = \mathrm{Spec}(R_n)$ be the PD–envelope of S_n in Z_n with the log structure N_{E_n} as in (3.2), where we use the same prime element π to define $S_n \hookrightarrow Z_n\,;\, t \longmapsto \pi$.

LEMMA (4.2). — *There exists a long exact sequence*

$$\cdots \longrightarrow H^m((\overline{X}_n, \overline{M}_n)/W_n) \longrightarrow$$
$$P_n \otimes_{R_n} (R^m(f_n)_{crys^*}(\mathcal{O}_{X_n/W_n}))(E_n) \xrightarrow{\mathcal{N}} P_n \otimes_{R_n} (R^m(f_n)_{crys}(\mathcal{O}_{X_n/W_n}))(E_n)$$
$$\longrightarrow H^{m+1}((\overline{X}_n, \overline{M}_n)/W_n) \longrightarrow \cdots .$$

PROOF. Let $((X^{\cdot}, M^{\cdot}), (Z^{\cdot}, M_{Z^{\cdot}}))$ be an embedding system [HK] (2.18) for $(X, M) \to (\mathrm{Spec}(W[t]), \mathcal{L}(t))$, $t \longmapsto \pi$. Let $(F_n^i, M_{F_n^i})$ be the PD–envelope [HK](2.16) of (X_n^i, M_n^i) in $(Z_n^i, M_{Z_n^i})$. Then, for any crystal $\mathcal{F}$ on $((X_n, M_n)/W_n)_{crys}$, we have an exact sequence of complexes in the topos $(X_n^{\cdot})_{et}^{\sim}$ ([HK] (2.18))

$$0 \longrightarrow C'([-1] \xrightarrow{\mathrm{d}\log(t)} C \longrightarrow C' \longrightarrow 0 \tag{4.2.1}$$

where C (resp. C') is defined on each X_n^i as the complex

$$\mathcal{F}_{F_n^i} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n^i}} \omega^{\cdot}_{Z_n^i/W_n} \quad (\text{resp.}\, \mathcal{F}_{F_n^i} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n^i}} \omega^{\cdot}_{Z_n^i/\,\mathrm{Spec}(W_n[t])}).$$

Consider the case $\mathcal{F} = R(g_n)_{crys^*}(\mathcal{O}_{\overline{X}_n/W_n})$. By taking the inductive limit of the base change theorem (2.5.2) and by (3.1), we see $\mathcal{F} = (f_n)^*_{crys}(h_n)_{crys^*}(\mathcal{O}_{\overline{S}_n/W_n})$. We have

$$H^m((X_n^{\cdot})_{et}, C) = H^m((\overline{X}_n, \overline{M}_n)/W_n)\,,$$

$$H^m((X_n^{\cdot})_{et}, C') = H^m((X_n^{\cdot})_{et}^{\sim}, P_n \otimes_{\mathcal{O}(E_n)} \mathcal{O}_{F_n^{\cdot}} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n^{\cdot}}} \omega^{\cdot}_{Z_n^{\cdot}/\,\mathrm{Spec}(W_n[t])})$$
$$= P_n \otimes_{\mathcal{O}(E_n)} H^m((X_n^{\cdot})_{et}, \mathcal{O}_{F_n^{\cdot}} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_n^{\cdot}}} \omega^{\cdot}_{Z_n^{\cdot}/\,\mathrm{Spec}(W_n[t])})$$

where the last equation follows from the flatness of P_n over $\mathcal{O}(E_n)$. Hence (4.2) is obtained by taking the long exact sequence of cohomology groups associated to the exact sequence (4.2.1).

LEMMA (4.3). — *For any $W_n(k)$-module T having a nilpotent $W_n(k)$-linear operator $\mathcal{N} : T \to T$, the map*

$$\mathcal{N} \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{N} : P_n \otimes T \longrightarrow P_n \otimes T$$

is surjective.

PROOF. This is reduced to the case $T = W_n(k)$ and $\mathcal{N} : T \to T$ is the zero map, i.e. to (3.6).

DEFINITION (4.4). — (1) *For a category $\mathcal{C}$, let $ps(\mathcal{C})$ be the category of projective systems in $\mathcal{C}$ with index set $\mathbb{N}$.*

(2) *For an additive category, let $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{C}$ be the category with the same objects as $\mathcal{C}$ but with morphisms $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\otimes\mathcal{C}} = \mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$. An object T of $\mathcal{C}$ is denoted by $\mathbb{Q} \otimes T$ when it is regarded as an object of $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{C}$.*

(4.5). — Now we prove (4.1). By [HK] (5.2), we have an isomorphism in $\mathbb{Q} \otimes ps(Ab)$ (Ab denotes the category of abelian groups)

$$\mathbb{Q} \otimes \{(R^m(f_n)_{crys^*}(\mathcal{O}_{X_n/W_n})(E_n)\}_n \cong \mathbb{Q} \otimes \{R_n \otimes_{W_n} D_n\}_n .$$

By this and (4.2) (4.3), we have an exact sequence in $\mathbb{Q} \otimes ps(Ab)$

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow &\mathbb{Q} \otimes \{H^m((\overline{X}_n, \overline{M}_n)/W_n)\}_n \longrightarrow \\ &\mathbb{Q} \otimes \{P_n \otimes_{W_n} D_n\}_n \xrightarrow{\mathcal{N}} \mathbb{Q} \otimes \{P_n \otimes_{W_n} D_n\}_n \longrightarrow 0 . \end{aligned}$$

Furthermore this map $\mathcal{N}$ is $\mathcal{N} \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{N}$ with the first $\mathcal{N} : P_n \to P_n$ and the second $\mathcal{N} : D_n \to D_n$ the monodromy operator. Hence we have

$$\mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n H^m((\overline{X}_n, \overline{M}_n)/W_n) \cong$$

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{N} : (\mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n P_n) \otimes_{K_0} D \longrightarrow (\mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n P_n) \otimes_{K_0} D).$$

Since $\mathcal{N}$ is nilpotent on D, we can replace $\mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n P_n$ by the part of it on which $\mathcal{N}$ is nilpotent, i.e. by B_{st}^+ (3.7).

5. — The complex $s_n^{\log}(t)$

Let (X, M) be a scheme with a fine log structure which is syntomic over W. For $0 \leq r < p$, we define an object $s_{n,X}^{\log}(r)$ of the derived category $D(X_{et}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ supported on $(X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{et}$. We state a result (5.4) on the relation between $s_{n,X}^{\log}(r)$ and p–adic vanishing cycles whose proof will be given elsewhere. This $s_{n,X}^{\log}(r)$ is the log pole version of the complex $R\nu_*(S_{n,X}^r)$ studied in [Ka1] and [Ku] where $S_{n,X}^r$ is the sheaf on the syntomic site defined in [FM] and ν is the canonical morphism from the syntomic site to the etale site.

(5.1). — Take an embedding system $((X^\cdot, M^\cdot), (Z^\cdot, N^\cdot))$ for $(X, M) \to W$ with a lifting of frobenius $F : (Z^\cdot, N^\cdot) \to (Z^\cdot, N^\cdot)$. Let $X_n^i = X^i \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $Z_n^i = Z^i \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, M_n^i (resp. N_n^i) the inverse image of M^i on X_n^i (resp. N^i on Z_n^i). Here F is a lifting of frobenius means that the morphisms on (Z_1^i, N_1^i) induced by F are the absolute frobeniuses [HK] (2.12) and F commutes with the canonical frobenius of W. Let $(F_n^i, M_{F_n^i})$ be the PD–envelope [HK] (2.16) of (X_n^i, M_n^i) in (Z_n^i, N_n^i), and let $J_{F_n^i}^{[r]} \subset \mathcal{O}_{F_n^i}$ be the r–th divided power of $J_{F_n^i} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{F_n^i} \to \mathcal{O}_{X_n^i})$.

For $0 \leq r < p$, we define a complex $s_{n,(X^\cdot,M^\cdot);(Z^\cdot,N^\cdot)}^{\log}(r)$ in $(X^\cdot)_{et}^{\sim}$ (denoted simply by $s_{n,X^\cdot}^{\log}(r)$) as follows.

First, denote by $j_{n,X}^{\cdot\log}(r)$ the complex in $(X^\cdot)_{et}^{\sim}$ which gives on each X^i the familiar complex

$$J_{F_n^i}^{[r]} \xrightarrow{d} J_{F_n^i}^{[r-1]} \otimes_{\mathcal{O}_{Z^i}} \omega_{Z^i/W}^1 \xrightarrow{d} \cdots \quad \cdots \xrightarrow{d} J_{F_n^i}^{[r-q]} \otimes_{\mathcal{O}_{Z^i}} \omega_{Z^i/W}^q \to \cdots .$$

Let $\varphi : \mathcal{O}_{F_n^i} \to \mathcal{O}_{F_n^i}$ be the homomorphism induced by $F : (Z^\cdot, M_{Z^\cdot}) \to (Z^\cdot, M_{Z^\cdot})$. Assume $0 \leq r < p$. Then $\varphi(J_{F_n^i}^{[r]}) \subset p^r\mathcal{O}_{F_n^i}$. We define the map $p^{-r}\varphi : J_{F_n^i}^{[r]} \to \mathcal{O}_{F_n^i}$ by the law $(p^{-r}\varphi)(a \bmod p^n) = b \bmod p^n$ for $a \in J_{F_{n+r}^i}^{[r]}$ and $b \in \mathcal{O}_{F_{n+r}^i}$ such that $\varphi(a) = p^r b$. This map is well defined by the flatness of F_n^i over W_n (2.5.1). We have a homomorphism of complexes

$$p^{-r}\varphi : j_{n,X^\cdot}^{\cdot\log}(r) \longrightarrow j_{n,X^\cdot}^{\cdot\log}(0)$$

whose degree q part is $((p^{q-r})\varphi$ on $J_{F_n^i}^{[r-q]}) \otimes (p^{-q}\varphi$ on $\omega^q_{Z^i/W})$. Finally we define $s^{\log}_{n,X^\cdot}(r)$ as the mapping fiber of

$$1 - p^{-r}\varphi : j^{\log}_{n,X^\cdot}(r) \longrightarrow j^{\log}_{n,X^\cdot}(0)\,.$$

Here for a homomorphism $h : C \to C'$ of complexes, by the mapping fiber of h we mean the complex whose degree q part is $C^q \oplus (C')^{q-1}$ and whose differential is given by

$$C^q \oplus (C')^{q-1} \longrightarrow C^{q+1} \oplus (C')^q\,;\ (a,b) \longmapsto (dx, h(x) - dy)\,.$$

Let $\theta : (X^\cdot)^\sim_{et} \to X^\sim_{et}$ be the canonical morphism, and define

$$s^{\log}_{n,X}(r) = R\theta_*(s^{\log}_{n,X^\cdot}(r))\,.$$

Note

$$R\theta_*(j^{\log}_{n,X^\cdot}(r)) = Ru_{(X_n,M_n)/W_n*}(J^{[r]}_{X/W_n})$$

where u is the canonical morphism $((X_n, M_n)/W_n)^\sim_{crys} \to X^\sim_{et}$ and $J^{[r]}_{X/W_n}$ is the r–th divided power of $J_{X/W_n} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{X_n/W_n} \to \mathcal{O}_{X_n})$. Thus we have a distinguished triangle

$$s^{\log}_{n,X}(r) \longrightarrow Ru_{(X_n,M_n)/W_n*}(J^{[r]}_{X_n/W_n}) \xrightarrow{1-p^{-r}\varphi} Ru_{(X_n,M_n)/W_n*}(\mathcal{O}_{X_n/W_n}) \to .$$

This shows that the object $s^{\log}_{n,X}(r)$ in $D(X_{et}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ is independent of the choice of an embedding system with a lifting of frobenius.

This definition of $s^{\log}_{n,X}(r)$ is just to add log poles to the complex $R\nu_*(S^r_{n,X})$ (cf. [Ka1]). Hence, if (X, M) and X are syntomic over W, "to add log poles" defines a canonical morphism

$$R\nu_*(S^r_{n,X}) \longrightarrow s^{\log}_{n,X}(r)\,.$$

The same method as in [Ka1] (which treated the case without log structures) defines a product structure

$$s^{\log}_{n,X}(r) \otimes^L s^{\log}_{n,X}(r') \longrightarrow s^{\log}_{n,X}(r + r') \quad (0 \le r,\ r',\ r + r' < p)\,.$$

THEOREM (5.4). — *Let A be as before and let X be a scheme over A with semi-stable reduction endowed with the canonical log structure. Let*

$$X \otimes_A \overline{k} \xrightarrow{\bar{i}} \overline{X} \xleftarrow{\bar{j}} X_{\overline{K}}$$

be the inclusion maps and consider the sheaf of p-adic vanishing cycles $\bar{i}_*\bar{i}^* R\bar{j}_*(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(r))$, where (r) means the Tate twist. Then for $0 \leq r < p-1$, we have a canonical isomorphism

$$s^{\log}_{n,X}(r) \cong \tau_{\leq r}\bar{i}_*\bar{i}^* R\bar{j}_*(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(r)) .$$

Here $s^{\log}_{n,X}(r)$ is defined to be the inductive limit of the inverse images of $s^{\log}_{n,X\otimes_A A'}(r)$ where A' ranges over all discrete valuation rings in $\overline{A}$ which are finite over A and $X \otimes_A A'$ is endowed with the log structures as fiber products where X, $\mathrm{Spec}(A)$ and $\mathrm{Spec}(A')$ are endowed with the canonical log structures (2.6).

The "without log pole" version of (5.4) was proved in [Ku] (cf. also [Ka1]). The method of the proof of (5.4) is similar to that in [Ku]. The key point is that, in the place where the result of [BK] on p-adic vanishing cycles in the good reduction case is used in [Ku], we can use the generalization by Hyodo [H1] of the result of [BK] to the semi-stable reduction case.

COROLLARY (5.5). — *Let X be a proper scheme over A with semi-stable reduction. Then if $m \leq r < p-1$ or if $\dim(X_K) \leq r < p-1$, there exists a canonical isomorphism*

$$H^m(\overline{X}, s^{\log}_n(r)) \xrightarrow{\sim} H^m_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(r)) .$$

This follows from (5.4) and the proper base change theorem for the etale cohomology $H^m_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \cong H^m_{et}(\overline{X}, \bar{i}_*\bar{i}^* R\bar{j}_*\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$.

The isomorphism in (5.5) has the following properties as will be shown elsewhere, which we shall use in § 6.

(5.6.1). — It is compatible with the action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

(5.6.2). — The isomorphism $H^0(\overline{X}, s_n^{\log}(1)) \xrightarrow{\sim} H^0(\overline{X}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(1))$ is inverse to the map $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(1) \to \{x \in J_n^{[1]}\,;\, p^{-1}\varphi(x) = x\} \subset B_n$ induced by ε in (2.2).

(5.6.3). — When m and r vary satisfying $m \le r < p-1$, the isomorphisms of (5.5) are compatible with the product structures.

(5.6.4). — For a line bundle $\mathcal{L}$ on $\overline{X}$, the Chern class of $\mathcal{L}$ in the syntomic cohomology $H^2(\overline{X}_{syn}, S_n^1)$ [FM] is sent to the Chern class of $\mathcal{L}$ in $H^2_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(1))$ by the composite map $H^2(\overline{X}_{syn}, S_n^r) \to H^2(\overline{X}, s_n^{\log}(r)) \to H^2_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}(1))$.

6. — Conjecture of Fontaine–Jannsen

In this section we prove Thm. (1.2). The following is the logarithmic version of the method in [KM] in which the good reduction case was considered. Let X be a proper scheme over A with semi-stable reduction. Let

$$V^m = H^m_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)\,, \quad D^m = \mathbf{Q} \otimes \varprojlim_n H^m((Y, M_Y)/(W_n, W_n(L)))\,,$$

where M_Y is the inverse image on Y of the canonical log structure M on X (2.6).

(6.1). — We define a canonical B_{st}-linear homomorphism

$$B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^m \longrightarrow B_{st} \otimes_{K_0} D^m \tag{6.1.1}$$

for $m < p-1$, which is compatible with the action of $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ and with the frobenius φ and the monodromy operator $\mathcal{N}$. The canonical homomorphism $s_n^{\log}(r) \to j_n^{\log}(r) \subset j_n^{\log}(0)$ induces

$$H^m(\overline{X}, s_n^{\log}(r)) \longrightarrow H^m((\overline{X}_n, \overline{M}_n)/W_n)^{\varphi=p^r}$$

where $\varphi = p^r$ means the part on which the frobenius acts by p^r. By (4.1) and (5.5), we obtain by taking $\mathbf{Q} \otimes \varprojlim_n$,

$$V^m(r) \longrightarrow (B_{st}^+ \otimes D^m)^{\mathcal{N}=0,\,\varphi=p^r} \quad \mathit{for}\ m \le r < p-1\,.$$

By tensoring with $\mathbf{Q}_p(-r)$ and using the canonical map $B_{st}^+ \otimes \mathbf{Q}_p(-r) \to B_{st}$, we obtain

$$V^m \longrightarrow (B_{st} \otimes D^m)^{\mathcal{N}=0,\,\varphi=1}.$$

For a fixed m such that $m < p-1$, this map is independent of the choice of r such that $m \leq r < p-1$. This defines the desired homomorphism (6.1.1).

(6.2). — Assume X_K is geometrically connected and of dimension d. Then we have trace maps

$$V^{2d} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_p(-d),$$

$$K \otimes_{K_0} D^{2d} \cong H^{2d}_{DR}(X_K/K) \xrightarrow{\sim} K.$$

In the latter isomorphism, by replacing K by a finite extension which is Galois over K_0 and by taking the $\mathrm{Gal}(K/K_0)$–invariant part, we obtain the trace map

$$D^{2d} \xrightarrow{\sim} K_0$$

(this isomorphism also follows from the Poincaré duality of the de Rham–Witt complex $W_n\omega^{\cdot}_Y$ proved in Hyodo [H2] and the isomorphism $D^m = \mathbf{Q} \otimes \varprojlim_n H^m(Y, W_n\omega^{\cdot}_Y)$).

Assume $2d < p-1$. Then the following diagram is commutative.

$$\begin{array}{ccc}
B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^{2d} & \longrightarrow & B_{st}(-d) \cong B_{st} \\
{\scriptstyle \text{by } (6.1.1)} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle id} \\
B_{st} \otimes_{K_0} D^{2d} & \longrightarrow & B_{st}\,.
\end{array}$$

Indeed, this follows from the compatibility (5.6.4) with the Chern class of line bundles (cf. [FM] § 6.3).

(6.3). — We prove that the homomorphism (6.1.1) is an isomorphism if $2\dim(X_K) < p-1$. We may assume X is geometrically connected and $m \leq 2d$

where $d = \dim(X_K)$. Consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} B_{st} \otimes V^m \times B_{st} \otimes V^{2d-m} & \longrightarrow & B_{st} \otimes V^{2d} \cong B_{st} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id.} \\ B_{st} \otimes D^m \times B_{st} \otimes D^{2d-m} & \longrightarrow & B_{st} \otimes D^{2d} \cong B_{st} \end{array}$$

induced by cup products. The Poincaré duality shows that the horizontal pairings are perfect pairings of free B_{st}–modules of finite ranks. From this, we see that the map (6.1.1) is an injection and its image is a B_{st}–direct summand. Since

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(V^m) = \dim_K(H^m_{DR}(X_K/K)) = \dim_{K_0}(D^m)\,,$$

we have the surjectivity of (6.1.1).

(6.4). — We show that the isomorphism

$$B_{DR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^m \xrightarrow{\sim} B_{DR} \otimes_K H^m_{DR}(X_K/K) \tag{6.4.1}$$

induced by (6.1.1) preserves the filtrations. We prove first :

(6.4.2). — The isomorphism (6.4.1) sends fil^i of the left hand side into fil^i of the right hand side for any $i \in \mathbb{Z}$.

It suffices to prove this for one choice of i, and so take $i = r$ with $m \leq r < p-1$. Our task is to show that the image of $\varprojlim_n H^m(\overline{X}_n, s_n^{\log}(r)) \to B_{DR} \otimes H^m_{DR}$ is contained in fil^r. This will follow if we show that the map

$$\varprojlim_n H^m((\overline{X}_n, \overline{M}_n)/W_n)) \longrightarrow B_{DR} \otimes H^m_{DR} \tag{6.4.3}$$

sends the image of $\varprojlim_n H^m(((\overline{X}_n, \overline{M}_n)/W_n)_{crys}, J^{[r]}_{\overline{X}_n/W_n})$ into fil^r. In [KM], it is proved that for any proper syntomic scheme X over A with smooth generic fiber, we have a canonical isomorphism

$$\mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n H^m((\overline{X}_n/W_n)_{crys}\,,\ \mathcal{O}_{\overline{X}_n/W_n}/J^{[r]}_{\overline{X}_n/W_n}) \cong (B^+_{DR} \otimes H^m_{DR}(X_K/K))/fil^r$$

(here all things are without log structures). In the situation of this section, the same method shows that there is an isomorphism

$$\mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n H^m(((\overline{X}_n, \overline{M}_n)/W_n)_{crys},\ \mathcal{O}_{\overline{X}_n/W_n}/J^{[r]}_{\overline{X}_n/W_n})$$

$$\cong (B^+_{DR} \otimes H^m_{DR}(X_K/K))/fil^r$$

which is compatible with (6.4.3). Thus we obtain (6.4.2).

Once we have (6.4.2), the fact that (6.4.1) is an isomorphism of filtrations is reduced to the injectivity of the maps

$$\mathrm{gr}^i(B_{DR} \otimes V^m) \longrightarrow \mathrm{gr}^i(B_{DR} \otimes D^m) \tag{6.4.4}$$

induced by (6.4.1). Since $\mathrm{gr}^i(B_{DR}) \cong \mathbb{C}_p(i)$, this map is rewritten as

$$\mathbb{C}_p(i) \otimes V^m \longrightarrow \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}_p(i-j) \otimes H^{m-j}(X_K, \Omega^j)\,. \tag{6.4.5}$$

The bijectivity of (6.4.4) is proved by using the Poincaré duality by the argument as in (6.3).

(6.5). — By (6.4), we have proved the de Rham conjecture of Fontaine [Fo1] in the semi-stable reduction case under the assumption $2\dim(X_K) < p-1$. However this conjecture is already proved by Faltings [Fa2] with no such assumption by a different method. We obtained in (6.4) (the bijectivity of (6.4.4) with $i = 0$) a new proof of the existence of the Hodge–Tate decomposition ([Fa1]) under the assumption of Thm. (1.2).

REFERENCES

[B] P. Berthelot. — *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Math. 407, Springer–Verlag, 1974.

[BBM] P. Berthelot, L. Breen, W. Messing. — *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Math. 930, Springer–Verlag, 1982.

[Fa1] G. Faltings. — *p–adic Hodge theory*, Journal of the AMS 1 (1988), 255–299.

[Fa2] G. Faltings. — *Crystalline cohomology and p–adic Galois–representations*, in Algebraic Analysis, Geometry and Number theory, The Johns Hopkins Univ. Press. (1989), 25–80.

[Fa3] G. Faltings. — *F–isocrystals on open varieties, results and conjectures*, The Grothendieck Festschrift, Vol. 2, 219–248, Progress in Math. 87, Birkhäuser, 1990.

[Fo1] J.–M. Fontaine. — *Sur certains types de représentations p–adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti–Tate*, Ann. of Math. 115 (1982), 529–577.

[Fo2] J.–M. Fontaine. — *Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p–adiques*, in Algebraic geometry, Lecture Notes in Math. 1016, Springer–Verlag (1983), 86–108.

[Fo3] J.–M. Fontaine. — *Letter to U. Jannsen*, Nov. 26, (1987).

[Fo4] J.–M. Fontaine. — *Le corps des périodes p–adiques*, this volume.

[FM] J.–M. Fontaine and W. Messing. — *p–adic periods and p–adic etale cohomology*, Contemporary Math. 67 (1987), 179–207.

[H1] O. Hyodo. — *A note on p–adic etale cohomology in the semi–stable reduction case*, Invent. Math. 91 (1988), 543–557.

[H2] O. Hyodo. — *On the de Rham–Witt complex attached to semi–stable family*, Comp. Math. 78 (1991), 241–260.

[HK] O. Hyodo and K. Kato. — *Semi–stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, this volume.

[J] U. Jannsen. — *On the ℓ–adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology*, in Galois groups over $\mathbb{Q}$, Springer–Verlag (1989), 315–360.

[Ka1] K. KATO. — *On p-adic vanishing cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing*, Advanced studies in Pure Math. 10 (1987), 207–251.

[Ka2] K. KATO. — *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, in Algebraic analysis, geometry and number theory, The Johns Hopkins Univ. Press (1989), 191–224.

[KM] K. KATO and W. MESSING. — *Syntomic cohomology and p-adic etale cohomology*, Tôhoku Math. J. 44 (1992), 1–9.

[Ku] M. KURIHARA. — *A note on p-adic etale cohomology*, Proc. Japan Academy 63 (1987), 275–278.

[P] B. PERRIN-RIOU. — *Représentations p-adiques ordinaires*, this volume.

[SGA4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.-L. VERDIER. — *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, tome 2, Lecture Notes in Math. 270, Springer-Verlag, 1972.

Added in proof : Recently, generalizations of the results of this paper were obtained in the following papers by Takeshi Tsuji.

- "Syntomic complexes and p-adic vanishing cycles"
- "Log crystalline cohomology and log syntomic cohomology".

Kazuya Kato
Department of Mathematics
Tokyo Institute of Technology
OHOKAYAMA
OHOKAYAMA, MEGURO
TOKYO
JAPAN

Exposé VII

1–MOTIFS ET MONODROMIE GÉOMÉTRIQUE

par **Michel Raynaud**

§ 1. — Introduction.

Soit K le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet R. Dans cet exposé on considère un K–1–motif $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$, au sens de Deligne [5] et on étudie sa monodromie sur R, c'est–à–dire son défaut de bonne réduction. La situation est analogue à celle des variétés abéliennes. On trouve d'une part une **monodromie finie** qui conduit à une réduction semi–bonne de M_K. Lorsque cette réduction semi–bonne n'est pas bonne, il apparaît d'autre part une **monodromie infinie**. En utilisant une uniformisation rigide partielle *"à la Tate"* de G_K on peut modifier la réalisation de M_K dans une catégorie convenable, de façon que G_K ait maintenant potentiellement bonne réduction. La monodromie de M_K se lit alors sur le défaut de spécialisation de la flèche u_K et conduit à la **monodromie géométrique**.

On montre ensuite comment la connaissance de la monodromie géométrique permet de retrouver la monodromie dans sa réalisation en cohomologie étale ℓ–adique (ℓ nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle).

§ 2. — S–1–Motifs.

Soit S un schéma. Suivant la notion introduite par Deligne dans [5] 10.1, nous appellons S–1–motif la donnée suivante :

a) Un S–schéma en groupes Y qui, localement pour la topologie étale sur S, est isomorphe à un groupe constant $\mathbb{Z}^r$.

b) Un S–schéma en groupes (commutatif) G, extension d'un S–schéma abélien A par un tore T.

c) Un S–homomorphisme $u : Y \to G$.

Notons M le 1–motif $[u : Y \to G]$, que l'on considère comme un complexe de S–schémas en groupes avec Y en degré -1 et G en degré 0. Alors M définit canoniquement un objet $\underline{M}$ de la catégorie dérivée D^b(fppf) des complexes bornés de faisceaux pour la topologie fidèlement plate localement de présentation finie, sur le petit site de base S. Ainsi M s'insère dans un triangle distingué :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl] & \\ Y[1] \arrow[rr, "u", "+1"'] & & G \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Supposons S connexe et soit s un point géométrique de S. Si S est géométriquement unibranche, la donnée de Y équivaut à la donnée d'une représentation finie du groupe fondamental $\Pi_1(S, s)$ dans $\mathbb{Z}^r$. Dans le cas général, Y correspond à la donnée d'une représentation du groupe fondamental élargi de S dans $\mathbb{Z}^r$.

2.1. — Exemple (cf. Deligne [5] 10.3).

Prenons pour S le spectre d'un corps K. Soit C une K-courbe séparée de type fini, géométriquement réduite. Notons $\overline{C}$ la compactification de C qui est normale aux points de $\overline{C} - C$. Pour tout point fermé x de $\overline{C}$, soit $\overline{C}_x^{hs}$ le spectre d'une hensélisé strict de $\overline{C}$ en x.

On fait les hypothèses suivantes :

i) Pour tout point fermé x de C, les composantes irréductibles $C_{x,i}^{hs}$ de C_x^{hs} sont essentiellement lisses sur K et C_x^{hs} se déduit des $C_{x,i}^{hs}$ par identification des corps résiduels (autrement dit les singularités de C sont, localement pour la topologie étale, des réunions d'axes de coordonnées).

ii) Les corps résiduels aux points de $\overline{C} - C$ sont étales sur K (en particulier $\overline{C}$ est lisse sur K à l'infini).

Alors la jacobienne G de $\overline{C}$ est une extension d'une variété abélienne par un tore [4] Chap. 9 § 2. Soit Y le faisceau étale engendré par les diviseurs D à support dans $\overline{C} - C$, dont le degré sur chacune des composantes irréductibles géométriques de $\overline{C}$ est nul. L'application $D \longmapsto Cl(O_{\overline{C}}(D))$ fournit un morphisme $u : Y \rightarrow G$. D'où un 1-motif M qui est naturellement associé à la courbe (ouverte) C.

2.2. — La filtration par le poids.

De par sa définition, un 1-motif M admet une filtration croissante naturelle en 3 crans :

$$\begin{aligned} &W_i(M) = 0 \textit{ pour } i \leq -3 \ , \\ &W_{-2}(M) = T \ , \\ &W_{-1}(M) = G \ , \\ &W_i(M) = M \textit{ pour } i \geq 0 \ . \end{aligned}$$

On a donc

$$Gr_{-2}(M) = T, \text{ le cran } \textbf{torique}$$
$$Gr_{-1}(M) = A, \text{ le cran } \textbf{abélien}$$
$$Gr_0(M) = Y[1], \text{ le cran } \textbf{étale.}$$
$$Gr_i(M) = 0 \text{ sinon.}$$

Cette filtration sera appelée la filtration en 3 crans du motif M.

2.3. — Morphismes de 1–motifs.

PROPOSITION 2.3.1. — *Soient* $M = [u : Y \to G]$ *et* $M' = [u' : Y' \to G']$ *des* S-1*-motifs. Alors tout morphisme* $a : \underline{M'} \to \underline{M}$ *dans* $D^b(\text{fppf})$ *provient d'un unique morphisme de complexes :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{u'} & G' \\ {\scriptstyle a_{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_o} \\ Y & \xrightarrow{u} & G \end{array} .$$

Démonstration (d'après L. Illusie). La filtration naïve des complexes M et M' donne naissance à une suite spectrale :

$$E_1^{pq} = \oplus_{p_2 - p_1 = p} \operatorname{Ext}^q(\underline{M}'^{p_1}, \underline{M}^{p_2}) \Longrightarrow \operatorname{Ext}^*(\underline{M}', \underline{M}) .$$

Elle est concentrée dans la région $-1 \leq p \leq 1$, $q \geq 0$ et l'on s'intéresse au degré total 0. Pour les lignes $q = 1$ et $q = 0$, on a les diagrammes

$$\operatorname{Ext}^1(G', Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(G', G') \oplus \operatorname{Ext}^1(Y', Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(Y', G) ,$$

$$\operatorname{Hom}(G', Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(G', G) \oplus \operatorname{Hom}(Y', Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Y', G) ,$$

avec les flèches évidentes (au signe près!).

LEMME 2.3.2. — *On a* $\operatorname{Hom}(G', Y) = \operatorname{Ext}^1(G', Y) = 0$.

La nullité de Hom résulte du fait que G' est à fibres connexes tandis que Y est étale. Prouvons que $\operatorname{Ext}^1(G', Y) = 0$. Soit E une extension de G' par Y. Par descente fppf des schémas étales séparés, on voit que E est représentable par un S-schéma en groupes, nécessairement lisse sur S. Alors la composante neutre E^o de E fournit un scindage canonique de l'extension E.

Du lemme, on déduit que $\operatorname{Ext}^o(\underline{M}', \underline{M}) = E_2^{oo} = \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}(G', G) \oplus \operatorname{Hom}(Y', Y) \to \operatorname{Hom}(Y', G)) = \operatorname{Hom}_{complexes}(M', M)$.

Corollaire 2.3.3. — *Deux S-1-motifs isomorphes dans $D^b(\mathrm{fppf})$ sont isomorphes.*

2.4.1. — Motif dual, description symétrique.

Soit Y^* le groupe des caractères du tore T, de sorte que Y^* est un schéma en groupes étale de même nature que Y. L'extension G de A par T est canoniquement associée à un morphisme $h^* : Y^* \to A^*$, où A^* est le schéma abélien dual de A. Notons $h : Y \to A$ le composé de $u : Y \to G$ et de la projection $G \to A$. Soit $\mathcal{P}$ le faisceau inversible rigidifié de Poincaré sur $A \times A^*$. Il lui correspond une biextension canonique, notée encore $\mathcal{P}$ de $A \times A^*$ par G_m.

Partant de l'extension G de A par T, associée au morphisme de groupes :

$$h^* : Y^* \to A^* ,$$

on en déduit une application biadditive :

$$h \times h^* : Y \times Y^* \to A \times A^* .$$

La donnée du relèvement u de Y à travers G équivaut alors à la donnée d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y \times Y^* \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "h \times h^*"'] & \mathcal{P} \arrow[d, "can."] \\ & A \times A^* \end{tikzcd}$$

tel que s soit une application **biadditive** ce qui a un sens grâce aux lois de composition partielles sur la biextension $\mathcal{P}$). Il revient au même de dire que s est une trivialisation de l'image réciproque de la biextension $\mathcal{P}$ par $h \times h^*$. Cette image réciproque s'identifie canoniquement à un élément de $\mathrm{Ext}^1(Y \otimes_{\mathbb{Z}} Y^*, G_m)$ ([8] SGA 7.1, exposé VII 3.6.5) et la donnée de s équivaut à une trivialisation de cette extension.

L'isomorphisme de bidualité $\tau : A \approx (A^*)^*$ s'étend en un isomorphisme des biextensions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$ relatives à A et A^*. Si alors on échange A et A^*, Y et Y^*, h et h^*, on obtient le **1-motif dual** $M^* = [u^* : Y^* \to G^*]$, où G^* est l'extension de A^* par $T^* = \mathrm{Hom}(Y^*, G_m)$ définie par h et u^* est le relèvement de h^* défini par s.

3.1. — Réalisation ℓ-adique.

Soient S un schéma et $M = [u : Y \to G]$ un $S-1-$motif, avec G extension d'un S-schéma abélien A par un tore T.

Soit n un entier. Pour tout faisceau F en groupes commutatifs, on note ${}_nF$ (resp. F_n) le noyau, (resp. conoyau) de la multiplication par n dans F.

Notons $C(M, n)$ le cône de la multiplication par n dans le motif M, c'est-à-dire le complexe :

$$\begin{aligned} M^{-1} &\to \quad M^{-1} \oplus M^o \to M^o \\ x &\mapsto \quad (-nx, -u(x)) \\ & \qquad\qquad (x, y) \mapsto u(x) - ny \ , \end{aligned}$$

en degrés respectifs -2, -1, 0.

Comme la multiplication par n est injective dans $M^{-1} = Y$ et est un épimorphisme fppf dans $M^o = G$, $C(M, n)$ a une cohomologie concentrée en degré -1. Posons $T_n(M) = H^{-1}(C(M, n))$. Alors $C(M, n)$ est quasi-isomorphe à $T_n(M)[1]$. Et l'on a une suite exacte :

$$0 \to {}_nG \to T_n(M) \to Y_n \to 0 \ .$$

Ainsi $T_n(M)$ est représentable par un S-schéma en groupes fini et plat sur S, qui est étale, si de plus n est inversible sur S.

Soit ℓ un nombre premier. Lorsque n parcourt les puissances de ℓ, le système inductif des $T_{\ell^n}(M)$ conduit à un S-groupe ℓ-divisible noté $T_{\ell^\infty}(M)$, qui est la réalisation ℓ-adique du 1-motif M. La filtration en trois crans de M conduit à une filtration en trois crans de $T_{\ell^\infty}(M)$:

$$0 \hookrightarrow T_{\ell^\infty}(T) \hookrightarrow T_{\ell^\infty}(G) \hookrightarrow T_{\ell^\infty}(M) \ ,$$

dont les quotients successifs sont $T_{\ell^\infty}(T)$, $T_{\ell^\infty}(A)$, $T_{\ell^\infty}(Y) = Y \otimes (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$.

§ 4. — 1-Motifs et Monodromie.

Dans la suite, S désigne le spectre d'un anneau de valuation discrète complet R. On note k le corps résiduel, $p \geq 0$ sa caractéristique, K le corps des fractions, π une uniformisante. On désigne par $\overline{K}$ une clôture algébrique de K.

Bonne et semi-bonne réduction d'un 1-motif.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1-$motif. On dit que M_K a **bonne réduction sur R**, si M_K se prolonge en un $R-1$ motif $M = [u : Y \to G]$. Pour que M_K ait bonne réduction, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :

i) Le groupe localement constant Y_K est non ramifié sur R, c'est-à-dire est donné par une représentation finie non ramifiée de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ dans $\mathbb{Z}^r$ où r est le rang de Y_K. Alors Y_K se prolonge en un S-schéma en groupes localement constant Y.

ii) Le tore T_K de G_K a bonne réduction T sur R. Il revient au même de dire que T_K a un groupe de caractères $Y_K^* = \underline{\mathrm{Hom}}(T_K, \mathbb{G}_m)$ non ramifié au sens précédent.

iii) Le quotient abélien A_K de G_K a bonne réduction sur R, c'est-à-dire se prolonge en un R-schéma abélien A.

Notons que dès que les conditions ii) et iii) sont satisfaites, G_K se prolonge canoniquement en une extension G de A par T. En effet, une telle extension est décrite par un morphisme du groupe des caractères de T_K dans la variété duale A_K^* de A et cette application se prolonge canoniquement sur R, par propreté de A^*.

iv) Le morphisme $u_K : Y_K \to G_K$ se prolonge en un morphisme $u : Y \to G$.

Notons que si M_K a bonne réduction M, celle-ci est unique à isomorphisme unique près.

On dit que le 1-motif M_K a **potentiellement bonne réduction**, s'il acquiert bonne réduction après extension finie de K, c'est-à-dire après remplacement de R par son normalisé dans une extension finie de K. Les conditions i) et ii) ci-dessus sont toujours satisfaites après extension finie étale de K ; pour que M_K ait potentiellement bonne réduction, il faut et il suffit donc que les conditions iii) et iv) soient réalisées après extension finie de K.

Rappelons qu'une K-variété abélienne A_K a une réduction semi-abélienne sur R, si A_K se prolonge en un R-schéma en groupes lisse A, dont la fibre spéciale est extension d'une variété abélienne par un tore.

On dit que le 1-motif M_K a **semi-bonne réduction** si Y_K a bonne réduction Y (condition i) ci-dessus) et si G_K se prolonge en un S-schéma en groupes G lisse, dont la fibre spéciale est extension d'un schéma abélien par un tore. Cette condition équivaut aux conditions suivantes :

ii) Le tore T_K a bonne réduction T.

iii) Le schéma abélien A_K a réduction semi-abélienne A sur R.

Pour établir cette équivalence établissons le lemme suivant :

LEMME 4.1.1. — *Soit G_K une extension d'une variété abélienne A_K par un tore T_K. Pour que G_K s'étende en un S-schéma en groupes lisse G, dont la fibre spéciale est extension d'une variété abélienne par un tore, il faut et il suffit que T_K ait bonne réduction T et que A_K ait réduction semi-abélienne A. De plus G est extension de A par T, G est unique et commute aux extensions* *finies de K.*

Démonstration : Supposons que G_K se prolonge en G, R-schéma en groupes lisse dont la fibre spéciale est extension d'une variété abélienne par un tore. Le quotient de G par l'adhérence schématique $\overline{T}_K$ de T_K dans G est un schéma en groupes A, lisse sur R à fibre spéciale extension d'une variété abélienne par un tore, donc A_K a réduction semi-abélienne.

Examinons d'abord le cas où T_K est un tore déployé, donc se prolonge en un S-tore T. Montrons que l'extension G_K de A_K par T_K se prolonge en une extension de A par T. On est ramené au cas où $T_K = G_m$. Alors G_K est un torseur de base A_K, de groupe $(G_m)_K$; il se prolonge en un torseur de base A, de groupe $\mathbb{G}_m$, comme il résulte du prolongement de A_K à A des faisceaux inversibles. Comme A est à fibre spéciale connexe, ce prolongement est essentiellement unique. Le même raisonnement appliqué à $A \times A$, montre que la structure de groupe s'étend au torseur prolongé ; d'où l'existence d'un schéma en groupes G, extension de A par T, qui prolonge G_K.

Notons G' un schéma en groupes extension de A par T qui prolonge G_K et montrons que l'identité $G_K \approx G'_K$ se prolonge en un isomorphisme $G \approx G'$. Pour cela, considérons dans $G \times G'$ l'adhérence schématique Γ du graphe de l'identité sur la fibre générique. Notons que A est la composante neutre du modèle de Néron $\mathfrak{A}$ de A_K. Soit n un entier premier à p et à l'ordre du groupe des composantes connexes de $\mathfrak{A}_k/A_k$. Alors ${}_nG'$ est étale sur S et est le prolongement étale séparé maximal de ${}_nG'_K$. Par suite l'identité ${}_nG_K \approx {}_nG'_K$ se prolonge en un morphisme ${}_nG \to {}_nG'$ et donc la première projection $\Gamma \to G$ induit un isomorphisme : ${}_n\Gamma \approx {}_nG$. Lorsque n parcourt les entiers permis, la famille des groupes ${}_nG_k$ est schématiquement dense dans G_k, car G_k est extension d'une variété abélienne par un tore. On conclut alors que la première projection $\Gamma \to G$ est quasi-finie, puis, par le “main theorem de Zariski” ([7] 4.4.9), que la première projection $\Gamma \to G$ est un isomorphisme. D'où une flèche $G \to G'$ qui est nécessairement plate, comme on le voit en utilisant encore les points de torsion. Par suite $G \to G'$ est un isomorphisme.

Dans le cas géral où T_K n'est plus nécessairement déployé, il est immédiat par descente, de voir que si G existe, alors T_K a bonne réduction T et G est extension de A par T.

Revenons à la situation générale d'un $K-1$–motif M_K. Alors Y_K et T_K acquièrent bonne réduction après extension finie étale de K. De même, d'après un résultat fondamental de Grothendieck, ([8] SGA 7.1 th. 3.6) la variété abélienne A_K admet réduction semi-abélienne après extension finie de K et on peut choisir cette extension de K étale (confer [6] th. 5.15). Il en résulte que tout $K-1$–motif M_K acquiert une réduction semi-bonne après extension finie étale de K. En particulier, M_K a **potentiellement semi-bonne réduction.**

Nous reviendrons plus loin (4.7) sur la **monodromie finie** qui conduit à la réduction semi-bonne.

4.2. — Considérations de géométrie rigide.

Nous allons maintenant expliquer comment on peut remplacer un $K-1$–motif M_K, par un $K-1$–motif $M'_K = [u'_K : Y'_K \to G'_K]$, sans changer son image dans une catégorie dérivée convenable, de façon que G'_K ait **potentiellement bonne réduction**.

Plaçons-nous en géométrie analytique rigide sur le corps local K.

On dispose d'une foncteur du type "GAGA", qui associe à tout K-schéma localement de type fini X, un K-espace rigide analytique X_{rig}. Ce foncteur est plat, transforme suite exacte de K-schémas en groupes (pour la topologie fppf, resp. étale) en une suite exacte de K-groupes rigides (pour la topologie fppf resp. étale).

En particulier, partant d'un $K-1$–motif $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$, le foncteur "GAGA" lui associe un $K-1$–"motif rigide" :

$$M_{\mathrm{rig}} = [u_{\mathrm{rig}} : Y_{\mathrm{rig}} \to G_{\mathrm{rig}}] \ .$$

Ce foncteur est compatible avec la filtration en 3 crans du 1-motif.

Pour tout entier n, le cône de la multiplication par n dans $M : T_n(M_K)$ est un K-schéma en groupes fini, donc est inchangé par passage à la géométrie rigide. Il en résulte que le foncteur $M \mapsto M_{\mathrm{rig}}$ induit un isomorphisme canonique sur les réalisation ℓ-adiques :

$$(*) \qquad T_{\ell^\infty}(M_K) = T_{\ell^\infty}(M_{\mathrm{rig}}) \ .$$

Rappelons que l'on dispose également d'un foncteur "fibre générique" qui à un R-schéma formel $\widehat{X}$, topologiquement de type fini, complet pour la topologie π-adique (où π est une uniformisante de R), associe un K-espace rigide $\widehat{X}_{\mathrm{rig}}$. Si $\widehat{X}$ est affine d'algèbre A topologiquement de type fini, il lui correspond l'affinoïde $\widehat{X}_{\mathrm{rig}}$ d'algèbre de Tate $A \otimes_R K$ [13].

Ceci étant, partons d'un $K-1$–motif $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$, où G_K est extension d'une variété abélienne A_K par un tore T_K. Supposons d'abord que M_K ait une réduction semi-bonne. En particulier G_K se prolonge en G extension d'un schéma semi-abélien A par un tore T (4.1).

Les assertions suivantes sont énoncées (lorsque $G = A$) dans [12] et démontrées dans [1] et [2], voir aussi [14]. Elles s'étendent sans difficulté au cas où G est extension de A par un tore T :

i) Soit T'_k le tore maximal de la fibre spéciale G_k de G; il contient T_k et se relève canoniquement en un S-tore T' contenant T.

ii) Le complété formel $\widehat{G}$ de G le long de la fibre spéciale G_k est canoniquement extension d'un schéma abélien formel $\widehat{A}'$ par $\widehat{T}'$.

iii) Le schéma abélien formel $\widehat{A}'$ s'algébrise canoniquement en un S-schéma abélien A'. L'extension de $\widehat{A}'$ par $\widehat{T}'$ de ii) s'algébrise canoniquement en une extension G' de A' par T'. En particulier le complété formel $\widehat{G}'$ de G', le long de sa fibre fermée, est canoniquement isomorphe à $\widehat{G}$. On a donc un isomorphisme canonique de schémas formels en groupes :

$$\widehat{h} : \widehat{G}' \approx \widehat{G}$$

(pour ii) et iii) confer [8] SGA 7.1 Lemme 7.2.1).

En particulier, les fibres génériques $\widehat{G}'_{\mathrm{rig}}$ et $\widehat{G}_{\mathrm{rig}}$ sont des sous-groupes rigides ouverts de G'_{rig} et G_{rig} et la fibre générique de $\widehat{h}$ est un isomorphisme $\widehat{h}_{\mathrm{rig}} : \widehat{G}'_{\mathrm{rig}} \approx \widehat{G}_{\mathrm{rig}}$.

iv) $\widehat{h}_{\mathrm{rig}}$ s'étend en un morphisme rigide $f : G'_{\mathrm{rig}} \to G_{\mathrm{rig}}$ étale surjectif de noyau un réseau Λ, de rang $s = \dim(T') - \dim(T)$.

Dans le cas général, G_K n'a plus nécessairement une réduction semi-bonne sur R, mais acquiert réduction semi-bonne après extension étale galoisienne K' de K. Par descente galoisienne, on peut encore construire canoniquement, un K-schéma en groupes G'_K, extension d'une variété abélienne A'_K ayant **potentiellement bonne réduction** par un tore T'_K, et un morphisme rigide $f : G'_{K,\mathrm{rig}} \to G_{K,\mathrm{rig}}$ étale surjectif, de noyau un K-groupe Λ qui est maintenant une forme tordue par une représentation finie de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ du groupe constant $\mathbb{Z}^s$ (conf. [12]).

Considérons alors la suite exacte :

$$0 \to \Lambda \to G'_{K,\mathrm{rig}} \xrightarrow{f} G_{K,\mathrm{rig}} \to 0 \ ,$$

et l'image réciproque de cette extension de $G_{K,\mathrm{rig}}$ par le morphisme $u_{K,\mathrm{rig}} : Y_{K,\mathrm{rig}} \to G_{K,\mathrm{rig}}$ qui intervient dans la définition du 1-motif M_{rig}. On obtient alors une extension $Y'_{K,\mathrm{rig}}$ de $Y_{K,\mathrm{rig}}$ par Λ et un diagramme commutatif à colonnes exactes :

$$(**)\qquad \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda & = & \Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y'_{K,\mathrm{rig}} & \xrightarrow{u'_{K,\mathrm{rig}}} & G'_{K,\mathrm{rig}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_{K,\mathrm{rig}} & \xrightarrow{u_{K,\mathrm{rig}}} & G_{K,\mathrm{rig}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array} \quad .$$

Le groupe rigide étale $Y'_{K,\mathrm{rig}}$ s'algébrise canoniquement en un groupe Y'_K qui, localement pour la topologie étale, est isomorphe à $\mathbb{Z}^{r+s}$, où r est le rang de Y_K. Comme Y'_K est localement fini sur K, le morphisme rigide $u'_{K,\mathrm{rig}}$ s'algébrise canoniquement en un K-morphisme $u'_K : Y'_K \to G'_K$.

On obtient ainsi un nouveau $K-1$–motif M'_K, canoniquement associé au motif M_K. Par construction G'_K a maintenant **potentiellement bonne réduction** et même bonne réduction si M_K a semi-bonne réduction.

THÉORÈME 4.2.2. — *La construction précédente associe canoniquement et fonctoriellement à un $K-1$–motif $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$, un $K-1$–motif $M'_K = [u'_K : Y'_K \to G'_K]$ tel que G'_K ait potentiellement bonne réduction. De plus, on a un morphisme canonique de 1-motifs rigides :*

$$(***)\qquad \mathrm{can} : M'_{K,\mathrm{rig}} \to M_{K,\mathrm{rig}} \ ,$$

qui est un isomorphisme dans la catégorie dérivée $D^b_{\mathrm{rig}}(\mathrm{fppf})$. Il entraîne des isomorphismes canoniques :

$$T_\ell(M'_K) \approx T_\ell(M_K), \text{ pour tout nombre premier } \ell \ .$$

(*on a noté $D_{\mathrm{rig}}(\mathrm{fppf})$, la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux pour la topologie fidèlement plate localement de présentation finie sur le petit site rigide de base* $\mathrm{Spec}(K)$)

La fonctorialité de la construction de M'_K à partir de M_K résulte, d'une part, du fait que tout morphisme de 1-motifs se réalise par un morphisme de complexes (2.3.1), d'autre part, du fait que la construction de l'extension $G'_{K,\mathrm{rig}}$ de $G_{K,\mathrm{rig}}$ est fonctorielle par rapport à G.

Le morphisme can. se lit sur le diagramme $(**)$ et est clairement un isomorphisme dans D^b_{rig}. Les assertions sur les réalisations ℓ-adiques résultent alors de $(*)$.

DÉFINITION 4.2.3. — *Nous dirons que le 1-motif* $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ *est* **strict** *si* G_K *a potentiellement bonne réduction.*

Nous avons ainsi associé canoniquement et fonctoriellement à un $K-$ $1-$motif M_K, un $K-1-$motif strict M'_K et ces deux motifs sont isomorphes dans $D^b_{\mathrm{rig}}(\mathrm{fppf})$.

La proposition suivante est l'analogue en géométrie rigide de 2.3.1. Elle ne sera pas utilisée dans la suite.

PROPOSITION 4.2.4. — *Soient* $M_i = [u_i : Y_i \to G_i]$, $i = 1,2$ *des* $K-1-$*motifs.*

i) *On suppose que* M_1 **est strict**. *Alors tout morphisme* $a : \underline{M}_{1,\mathrm{rig}} \to \underline{M}_{2,\mathrm{rig}}$, *dans* $D^b_{\mathrm{rig}}(\mathrm{fppf})$ *provient d'un morphisme de complexes :*

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{u_1} & G_{1,\mathrm{rig}} \\ {\scriptstyle a_{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_o} \\ Y_2 & \xrightarrow{u_2} & G_{2,\mathrm{rig}} \end{array}$$

ii) *Si* M_1 *et* M_2 *sont stricts, tout morphisme de complexes* $M_{1,\mathrm{rig}} \to M_{2,\mathrm{rig}}$ *est algébrisable et donc provient d'un morphisme* $M_1 \to M_2$.

L'assertion i) se démontre comme 2.3.1 une fois établi que $\mathrm{Hom}(G_{1,\mathrm{rig}}, Y_2) = \mathrm{Ext}^1(G_{1,\mathrm{rig}}, Y_2) = 0$. La première assertion est claire, puisque $G_{1,\mathrm{rig}}$ est connexe tandis que Y_2 est étale. La nullité du Ext^1 est plus délicate. Donnons tout au plus une esquisse de démonstration.

Nous considérons la catégorie des K-espaces rigides de type fini $\mathcal{X}_K$ comme équivalente à celle des R-schémas formels $\mathcal{X}$ topologiquement de type fini, localisée par les éclatements admissibles, c'est-à-dire, dont le centre est à support dans la fibre spéciale (confer [13] et [10]). Nous dirons que $\mathcal{X}$ est un modèle formel de l'espace rigide $\mathcal{X}_K$ et que $\mathcal{X}_K$ est la fibre générique du schéma formel $\mathcal{X}$. Ainsi la catégorie des K-espaces rigides de type fini apparaît comme une certaine pro-catégorie de schémas formels.

PROPOSITION 4.2.5. — *Soit* $\mathcal{X}$ *un schéma formel de type fini, dont la fibre générique* $\mathcal{X}_K$ *est normale. Soit* α_K *un élément de* $H^1(\mathcal{X}_{K,\mathrm{fppf}}, \mathbb{Z})$. *Alors il existe un éclatement admissible* $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$, *tel que* α_K *se prolonge en un élément* α *de* $H^1(\mathcal{X}'_{et}, \mathbb{Z})$. *En particulier* α_K *est représentable par un torseur sous* $\mathbb{Z}$, *de base* $\mathcal{X}_K$, *localement trivial pour la topologie étale. (En d'autres termes, après changement éventuel du modèle formel* $\mathcal{X}$, α_K *s'étend en un torseur formel* α *de base* $\mathcal{X}$, *de groupe* $\mathbb{Z}$, *localement trivial pour la topologie étale).*

Démonstration : A défaut de fondements écrits de la théorie, nous considérerons que, par définition, il existe un morphisme d'espaces rigides u_K : $\mathcal{Z}_K \to \mathcal{X}_K$, fidèlement plat, **de type fini**, qui trivialise α_K. Par platification ([3] ou [10]), on peut alors, quitte à faire un éclatement admissible de $\mathcal{X}$, supposer que u_K est la fibre générique d'un morphisme de type fini, fidèlement plat de R-schémas formels $u : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$. En prenant une quasi-section, on se ramène au cas où, de plus, u est quasi-fini. Après localisation étale $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$, on peut alors supposer que u est fini et plat. Par descente finie fidèlement plate on voir alors que l'image réciproque α'_K de α_K sur $\mathcal{X}'$ est maintenant représentable par un $\mathcal{X}'_K$-torseur $\mathcal{Y}'_K$ sous $\mathbb{Z}$.

Comme l'espace rigide $\mathcal{X}_K$ est supposé normal, on peut, quitte à normaliser $\mathcal{X}$ par un éclatement admissible, supposer $\mathcal{X}$ normal. Alors $\mathcal{X}'$ est normal. Le torseur $\mathcal{Y}'_K$ se prolonge canoniquement en un $\mathcal{X}'$-schéma formel $\mathcal{Y}'$ localement fini normal, et l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{Y}'_K$ se prolonge en une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{Y}'$. A priori, cette action est ramifiée, mais le sous-groupe d'inertie en un point est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui est fini, donc nul. Par suite $\mathcal{Y}'$ est un torseur sous $\mathbb{Z}$, de base $\mathcal{X}'$, localement trivial pour la topologie étale. Finalement, par descente étale relativement au morphisme $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$, il existe un torseur $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{X}$, de groupe $\mathbb{Z}$, localement trivial pour la topologie étale, dont la fibre générique $\mathcal{Y}_K$ représente α_K. D'où la proposition.

PROPOSITION 4.2.6. — *Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma formel de type fini,* **régulier**. *Alors tout élément α_K de $H^1(\mathcal{X}_{K,\mathrm{fppf}}, \mathbf{Z})$ se prolonge en un torseur formel, de base $\mathcal{X}$ de groupe $\mathbb{Z}$.*

Pour tout entier $n > 0$, soit $\alpha_{n,K}$ l'image de α_K dans $H^1(\mathcal{X}_{K,\mathrm{fppf}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ de sorte que $\alpha_{n,K}$ est représenté par un revêtement étale fini $\mathcal{Y}_{n,K}$ de $\mathcal{X}_K$, galoisien de groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. D'après 4.2.5, il existe un éclatement admissible $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$, que l'on peut supposer normal tel que α_K se prolonge en un torseur formel $\mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$, de groupe $\mathbb{Z}$, localement trivial pour la topologie étale. Pour tout entier n, $\mathcal{Y}_{n,K}$ se prolonge donc en un revêtement fini étale $\mathcal{Y}'_n$ de $\mathcal{X}'$. Comme $\mathcal{X}$ est régulier, donc normal, l'éclatement $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense de la fibre fermée $\mathcal{X}'_k$. Par suite le revêtement étale fini $\mathcal{Y}_{n,K}$ de $\mathcal{X}_K$ est non ramifié aux points génériques de $\mathcal{X}_k$. Comme $\mathcal{X}$ est régulier, il résulte alors du théorème de pureté de Zariski ([8] SGA 2 th. 3.4) que $\mathcal{Y}_{n,K}$ s'étend en un revêtement formel fini étale $\mathcal{Y}'_n$. Comme ceci est vrai pour tout n, on en déduit que le revêtement étale $\mathcal{Y}'_k \to \mathcal{X}'_k$ se descend en un revêtement de $\mathcal{X}_k$, puis que $\mathcal{Y}'$ lui-même se descend en un revêtement formel étale $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$.

COROLLAIRE 4.4.7. — *Soit $\mathcal{X}_K$ un espace rigide lisse. Alors $H^1(\mathcal{X}_{K,\mathrm{fppf}}, \mathbb{Z})$ est nul dans chacun des cas suivants :*

i) *$\mathcal{X}_K$ admet un R-modèle formel lisse $\mathcal{X}$ de type fini.*

ii) $\mathcal{X}_K$ *admet un* R *modèle formel tel que* $\mathcal{X}_k$ *soit une courbe géométriquement réduite, ayant pour seules singularités des points doubles ordinaires et dont le graphe est un arbre.*

iii) $\mathcal{X}_K$ *est le groupe multiplicatif rigide* $\mathbb{G}_{m,\mathrm{rig}}$.

Le cas i) résulte de 4.4.6 et du fait qu'un k schéma lisse est géométriquement unibranche, donc n'admet pas de revêtement étale de groupe $\mathbb{Z}$ non trival.

Dans le cas ii), quitte à faire un éclatement admissible de $\mathcal{X}$ qui introduit des chaînes de droites projectives, on peut supposer de plus que $\mathcal{X}$ est régulier et que les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_k$ sont lisses. Un revêment étale de groupe $\mathbb{Z}$, de $\mathcal{X}_k$ est alors localement trivial pour Zariski et admet une description combinatoire au moyen du graphe de $\mathcal{X}_k$, en particulier, un tel revêtement est trival si le graphe est un arbre.

Dans le cas iii), on recouvre $\mathbb{G}_{m,\mathrm{rig}}$ par les couronnes de coordonnée de Laurent t :

$\mathcal{X}_{n,K}$: $-n \leq$ valuation $(t) \leq n$, qui admet comme modèle formel, le schéma formel affine d'équation $R\{x,y\}/xy - \pi^{2n}$. Par le cas ii), on conclut que $H^1(\mathcal{X}_{n,K,\mathrm{fppf}}, \mathbb{Z}) = 0$, puis, par passage à la limite sur n que $H^1(\mathbb{G}_{m,\mathrm{rig},\mathrm{fppf}}, \mathbb{Z}) = 0$.

Ceci étant, revenons à la démonstration de 4.2.4 et prouvons que $\mathrm{Ext}^1(G_{1,\mathrm{rig}}, T_2) = 0$ lorsque G_1 a potentiellement bonne réduction. Comme $\mathrm{Hom}(G_{1,\mathrm{rig}}, Y_2) = 0$, il suffit de le démontrer après extension finie galoisienne de K. On peut donc supposer que $Y_2 = \mathbb{Z}^r$ et que G_1 est extension d'un schéma abélien A_K ayant bonne réduction A, par un tore déployé T_K. Par dévissage, on est ramené au cas où $Y_2 = \mathbb{Z}$ et au cas où $G_1 = A_K$ où $G_{m,K}$ et il suffit clairement d'établir que $H^1(G_{1,\mathrm{rig}}, \mathbb{Z}) = 0$. La conclusion résulte donc de 4.2.7 i) et iii).

Prouvons maintenant l'assertion ii) de 4.2.4. Il suffit de montrer que tout morphisme de $G_{1,\mathrm{rig}} \to G_{2,\mathrm{rig}}$ est algébrisable. Par descente finie, on peut supposer que $G_{i,K}$ a bonne réduction G_i extension d'un schéma abélien A_i par un tore déployé T_i $(i = 1, 2)$.

Soit $\widehat{G}_i$ le complété formel de G_i le long de la fibre spéciale et soit $\widehat{G}_{i,\mathrm{rig}}$ l'espace rigide fibre générique de $\widehat{G}_i$.

LEMME 4.2.8. — *Tout morphisme rigide* $u_{\mathrm{rig}} : G_{1,\mathrm{rig}} \to G_{2,\mathrm{rig}}$ *provient d'un morphisme formel* $\widehat{u} : \widehat{G}_1 \to \widehat{G}_2$.

Considérons successivement :

- le graphe de u_{rig},

- son intersection avec l'ouvert $\widehat{G}_{1,\mathrm{rig}} \times_K \widehat{G}_{2,\mathrm{rig}}$,

- l'adhérence schématique Γ de cette intersection dans le schéma formel produit $\widehat{G}_1 \times_R \widehat{G}_2$. Alors Γ est un R-schéma formel en groupes, plat et la première projection induit une immersion ouverte sur les fibres génériques. L'étude de u_{rig} sur les points de n-torsion $(n,p)=1$, entraîne que la première projection $\Gamma \to \widehat{G}_1$ est un isomorphisme, d'où l'existence de $\widehat{u}$.

Si on réduit $\widehat{u}$ suivant les puissances de l'uniformisante π, on trouve que $\widehat{u}$ induit un morphisme $\widehat{t}$, entre les tores formels $\widehat{T}_i$ et un morphisme $\widehat{a}$ entre les schémas abéliens formels $\widehat{A}_i$. Alors $\widehat{t}$ s'algébrise uniquement en un morphisme $t : T_1 \to T_2$, provenant d'un morphisme sur les groupes de caractères $t^* : Y_2^* \to Y_1^*$, tandis que par ([7] 5.4.1), $\widehat{a}$ s'algébrise en un morphisme $a : A_1 \to A_2$. Finalement u_{rig} s'algébrise en un morphisme $u : G_1 \to G_2$, décrit par un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y_2^* & \xrightarrow{\text{can}} & A_2^* \\ {\scriptstyle t^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a^*} \\ Y_1^* & \xrightarrow{\text{can}} & A_1^* \end{array} .$$

4.3. — Monodromie Géométrique.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1$–motif strict (4.2.3). G_K est donc extension d'une variété abélienne A_K ayant potentiellement bonne réduction par un tore T_K. On note A_K^* la variété abélienne duale de A_K, Y_K^* le groupe des caractères de T_K.

Si $\mathcal{P}_K$ est la biextension de Poincaré de $A_K \times A_K^*$, on rappelle (2.4.1) que la donnée du 1-motif M_K équivaut à la donnée des morphismes $h_K : Y_K \to A_K$, $h_K^* : Y_K^* \to A_K^*$ et d'une trivialisation $s_K : Y_K \times Y_K^* \to \mathcal{P}_K$ de la biextension image réciproque de $\mathcal{P}_K$ par $h_K \times h_K^* : Y_K \times Y_K^* \to A_K \times A_K^*$.

Supposons d'abord que G_K et Y_K aient bonne réduction; alors A_K a bonne réduction A, et $\mathcal{P}_K$ s'étend en une biextension $\mathcal{P}$ de $A \times A^*$ par G_m, ce qui définit une structure entière sur $\mathcal{P}_K$. Prenant la valuation de s_K, on obtient une application bilinéaire canonique

$$\mu_o : Y_K \times Y_K^* \to \mathbb{Z} ,$$

compatible avec l'action de Galois (ici non ramifiée) sur Y_K et Y_K^*.

Si l'on pose $Z_K = Y_K \otimes Y_K^*$, μ_o s'interprète aussi comme un morphisme de $Z_K \to \mathbb{Z}$, noté encore μ_o.

Dans le cas général où Y_K et G_K ont seulement potentiellement bonne réduction, on prolonge canoniquement la valuation de K à $\overline{K}$, avec groupe de valeurs $\mathbb{Q}$. En prenant la valuation de s, on obtient une application biadditive canonique :

$$\mu : Y_K \times Y_K^* \to \mathbb{Q} .$$

Cette application μ est compatible avec les actions de Galois, et se factorise à travers $\mathbb{Z}$ en redonnant μ_o lorsque Y_K et G_K ont bonne réduction. On peut aussi associer à μ un morphisme : $Z_K = Y_K \otimes Y_K^* \to \mathbb{Q}$ (noté encore μ). Nous dirons que μ est la **monodromie géométrique** du 1-motif M_K.

PROPOSITION 4.3.1. — *Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1-$motif strict* (4.2.3)

i) *Pour que M_K ait potentiellement bonne réduction, il faut et il suffit que la monodromie géométrique μ de M_K soit nulle.*

ii) *Supposons que Y_K et G_K aient bonne réduction. Pour que M_K ait bonne réduction il faut et il suffit que μ_o soit nulle.*

Démonstration : Il suffit d'établir ii). Soient Y et G les bonnes réductions sur R de Y_K et G_K. Alors le $K-1-$motif M_K a bonne réduction si et seulement si u_K se prolonge en u de $Y \to G$, c'est-à-dire si et seulement si la trivialisation $s_K : Y_K \times Y_K^* \to \mathcal{P}_K$, se prolonge en une application $s : Y \times Y^* \to \mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si μ_o est nulle.

Enfin notons que si l'on remplace K par une extension finie K', d'indice de ramification e sur K, la monodromie géométrique de $M_K \otimes_K K'$ devient $e\mu$. En particulier, si Y_K et G_K acquièrent bonne réduction après extension finie de K d'indice de ramification e, alors $e\mu$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

4.4. — Filtration par la monodromie.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1-$motif strict (4.2.3).

Notons qu'il existe un plus grand quotient Y_K'' de Y_K, et un plus grand quotient $Y_K''^*$ de Y_K^*, tels que la monodromie $\mu : Y_K \otimes Y_K^* \to \mathbb{Q}$ se factorise à travers $\mu'' : Y_K'' \otimes Y_K''^* \to \mathbb{Q}$. De plus, Y_K'' et $Y_K''^*$ sont sans torsion et μ'' est non-dégénéré des deux côtés (i.e. Y_K'' et $Y_K''^*$ ont même rang et l'application canonique $Y_K'' \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y_K''^*, \mathbb{Q})$, déduite de μ'', est injective).

Soit $\widetilde{Y}_K = \mathrm{Ker}(Y_K \to Y_K'')$ et soit T_K'' le sous-tore du tore maximal T_K de G_K dont le groupe de caractères est $Y_K''^*$. Notons $\widetilde{u}_K : \widetilde{Y}_K \to G_K$ la restriction de u_K. Clairement $\widetilde{M}_K = [\widetilde{u}_K : \widetilde{Y}_K \to G_K]$ est le "plus grand" sous-1-motif de M_K dont la monodromie est nulle, c'est-à-dire le plus grand sous-motif qui a potentiellement bonne réduction. Le motif quotient $M_K/\widetilde{M}_K$ s'identifie au groupe étale $Y_K''[1]$.

4.5. — Monodromie et choix d'une uniformisante.

Partons d'un $K-1-$motif strict (4.2.3) $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$. Nous allons maintenant étudier des décompositions éventuelles de $u_K : Y_K \to G_K$ en une somme $u_K = u_K^1 + u_K^2$ telle que :

- le motif $M_K^1 = [u_K^1 : Y_K \to G_K]$ ait potentiellement bonne réduction.

- $u^2_K : Y_K \to G_K$ se factorise à travers le tore T_K de G_K.

Supposons que la monodromie $\mu : Y_K \times Y^*_K \to \mathbb{Q}$ se factorise à travers $\mathbb{Z}$ et **choisissons une uniformisante** π **de** R. Si alors on modifie la section $s_K : Y_K \times Y^*_K \to \mathcal{P}_K$, associée au 1-motif M_K, en la section :

$$\begin{aligned} s^1_\pi : Y_K \times Y^*_K &\to \mathcal{P}_K \\ (y, y^*) &\to \pi^{-\mu(y,y^*)} s(y, y^*) \ , \end{aligned}$$

il lui correspond un $K - 1$–motif : $M^1_{K,\pi} = [u^1_{K,\pi} : Y_K \to G_K]$, dont la monodromie est clairement nulle et donc qui a potentiellement bonne réduction.

Si alors on pose $u^2_{K,\pi} = u_K - u^1_{K,\pi}$, on obtient un morphisme de $Y_K \to G_K$ qui se factorise à travers T_K et a pour expression :

$$(*) \qquad \begin{aligned} u^2_{K,\pi} : Y_K \to T_K &= \underline{\mathrm{Hom}}(Y^*_K, G_m) \\ y &\mapsto (y^* \mapsto \pi^{\mu(y,y^*)}) \ . \end{aligned}$$

En fait, avec les notations introduites dans 4.4, $u^2_{K,\pi}$ se factorise même en $Y_K \to Y''_K \to T''_K \to T_K$, où les applications extrêmes sont les surjections et injections canoniques et où l'application centrale est :

$$y'' \mapsto (y''^* \to \pi^{\mu''(y'',u''^*)}) \ .$$

On a ainsi établi le résultat suivant :

PROPOSITION 4.5.1. — *Soit* $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ *un* $K - 1$*–motif strict dont la monodromie* μ *se factorise à travers* $\mathbb{Z}$. *Alors, à tout choix d'une uniformisante* π *de* R *on associe canoniquement une décomposition*

$$u_K = u^1_{K,\pi} + u^2_{K,\pi}$$

où $u^2_{K,\pi}$ *se factorise à travers le tore* T_K *de* G_K *et est donnée par la formule* $(*)$ *tandis que le* $K - 1$*–motif* $M^1_{K,\pi} = [u^1_{K,\pi} : Y_K \to G_K]$ *a potentiellement bonne réduction.*

REMARQUES 4.5.2. —

i) Supposons que Y_K et G_K aient bonne réduction respective Y et G. Alors μ est évidemment à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et le 1-motif $M^1_{K,\pi}$, considéré ci-dessus, a bonne réduction $M^1_\pi = [u^1_\pi : Y \to G]$.

ii) Le 1-motif $M^1_{K,\pi}$ dépend de π. Quand π varie, on peut regrouper les diverses réalisations obtenues dans une construction universelle de la façon suivante :

Soit U le schéma formel en groupes des unités de R, c'est-à-dire le complété $(\widehat{\mathbb{G}}_m)$ de $\mathbb{G}_m$ le long de sa fibre fermée. Les uniformisantes π de R sont les sections sur R, d'un torseur Π sous U. Au-dessus de U, on peut appliquer à "l'uniformisante universelle", les constructions ci-dessus. Ainsi au-dessus de l'espace rigide Π_{rig}, fibre générique de Π, on obtient une décomposition canonique de $u_K \times_K \Pi_{\text{rig}}$ en $u^1 + u^2$, où u^2 se factorise à travers le tore T_K et est donné par la formule $(*)$ où π désigne maintenant l'uniformisante universelle, tandis que u^1 correspond à un 1-motif sur Π_{rig} qui a potentiellement bonne réduction M^1 sur Π.

iii) Cherchons maintenant, indépendamment du choix d'une uniformisante π, à quelle condition on peut écrire $u_K = u_K^1 + u_K^2$ de façon que le $K-1-$motif $M_K^1 = [u_K^1 : Y_K \to G_K]$ ait potentiellement bonne réduction et que u_K^2 se factorise à travers le tore T_K.

Pour cela, il nous faut préciser les structures entières en jeu. Supposons d'abord que la partie abélienne A_K ait bonne réduction A. On dispose alors d'une biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $A \times A^*$ par $\mathbb{G}_m$. Par complétion le long de la fibre fermée, puis passage à la fibre générique on obtient une biextension $\mathcal{P}_{\text{rig}}$ de $A_{K,\text{rig}} \times A^*_{K,\text{rig}}$ par le groupe des unités U_{rig}. Dans le cas général où A_K a seulement potentiellement bonne réduction, il existe encore une telle extension canonique $\mathcal{P}_{\text{rig}}$, comme on le voit par descente. La biextension de Poincaré $\mathcal{P}_K$ se déduit alors de $\mathcal{P}_{\text{rig}}$ en la poussant de U_{rig} à $(\mathbb{G}_m)_{\text{rig}}$, puis en algébrisant.

Par image réciproque de $\mathcal{P}_{\text{rig}}$ par le morphisme

$$h_K \times h_K^* : Y_K \times Y_K^* \to A_K \times A_K^* \ ,$$

on obtient une biextension de $Y_K \times Y_K^*$ par U_{rig}, soit encore une extension $\mathcal{E}_{\text{rig}}$ de $Z_K = Y_K \otimes_Z Y_K^*$ par U_{rig} (confer 2.4.1). En composant avec l'immersion ouverte canonique $U_{\text{rig}} \to (\mathbb{G}_m)_{\text{rig}}$, on obtient une extension E_{rig} de Z_K par $(\mathbb{G}_m)_{\text{rig}}$.

Ceci étant, la donnée du 1-motif $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ équivaut à une trivialisation $\sigma_K : Z_K \to E_{\text{rig}}$ de l'extension E_{rig} et le 1-motif M_K a potentiellement bonne réduction si et seulement si σ_K se factorise à travers $\mathcal{E}_{\text{rig}}$.

On en déduit immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION 4.5.3. — *Les décompositions $u_K = u_K^1 + u_K^2$ correspondent canoniquement aux trivialisations $\tau : Z_K \to \mathcal{E}_{\text{rig}}$ de l'extension $\mathcal{E}_{\text{rig}}$. Le morphisme $u_K^2 : Y_K \to T_K$ correspond alors au morphisme différence $\sigma_K \tau^{-1} : Z_K \to (\mathbb{G}_m)_{\text{rig}}$, (qui est automatiquement algébrisable).*

Notons que les points à valeur dans K du quotient $(\mathbb{G}_m)_{\text{rig}}/U_{\text{rig}}$ s'identifient canoniquement à $\mathbb{Q}$, via la valuation (avec action triviale de Galois$(\overline{K}/K)$).

On obtient alors la suite exacte :

$$\mathrm{Hom}(Z_K \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Hom}(Z_K, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Ext}(Z_K, U_{\mathrm{rig}}) \to \mathrm{Ext}(Z_K, \mathbb{G}_m) .$$

L'élément $\mathcal{E}_{\mathrm{rig}}$ de $\mathrm{Ext}(Z_K, U_{\mathrm{rig}})$ est l'image de la monodromie μ élément de $\mathrm{Hom}(Z_K, Q)$. Si $\mathcal{E}_{\mathrm{rig}}$ est triviale, μ provient d'un élément de $\mathrm{Hom}(Z_K, G_m) = \mathrm{Hom}(Y_K, T_K)$ qui correspond au facteur u_K^2.

4.6. — Monodromie et réalisation ℓ-adique.
Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1$–motif strict (4.2.3) et soit n un entier ≥ 1. On a donc (3.1) une suite exacte de K-schémas en groupes finis :

$$0 \to {}_nG_K \to {}_nM_K \to Y_K/nY_K \to 0 .$$

Passant à la limite projective sur les n qui sont des puissances d'un nombre premier ℓ, on obtient une suite exacte de groupes ℓ-divisibles :

$$0 \to T_\ell(G_K) \to T_\ell(M_K) \to Y_K \otimes Z_\ell \to 0 .$$

Supposons d'abord que Y_K et G_K aient bonne réduction et soit n un entier ≥ 1 premier à la caractéristique résiduelle p de R. Nous allons décrire l'action sur ${}_nM_K$ du sous-groupe d'inertie I de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Supposons d'abord R strictement hensélien, de sorte que $I = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Il existe alors une unique sous-extension K_n de $\overline{K}$, de degré n : l'extension modérée de degré n. Elle est galoisienne de groupe $\mu_n(K)$, le groupe des racines $n$èmes de 1 dans K. Plus précisément, si v_n est la valuation de K_n, de groupe $\mathbb{Z}$, il existe un morphisme canonique surjectif $t_n : I \to \mu_n = \mu_n(K)$, tel que, pour tout $x \in K_n$ et tout $\sigma \in I$ on ait :

$$(*) \qquad \sigma(x) = x t_n(\sigma)^{v_n(x)} .$$

pour tout x de K_n tel que $x^n \in K$.

Lorsque R n'est plus supposé strictement hensélien, et que K_n désigne l'extension modérée de degré n de l'extension maximale non ramifiée K_{nr} de K, la formule ci-dessus reste valable pour x dans K_n et σ dans I. De plus, le morphisme t_n est équivariant sous l'action de $\mathrm{gal}(\overline{k}/k)$ opérant par automorphismes intérieurs sur I, et par son action naturelle sur $\mu_n(K) = \mu_n(k)$.

Un point de ${}_nM_K$ devient rationnel sur K_n et est représentable par un couple (y, g), $y \in Y(K_n)$, $g \in G(K_n)$, tels que $u(y) = ng$. Le point de ${}_nM_K$ est nul si et seulement si (y, g) est de la forme $(nz, u(z))$, $z \in Y(K_n)$. L'application $(y, g) \mapsto y$, induit l'application canonique ${}_nM \to Y/nY$.

Soit σ dans le groupe d'inertie $\mathrm{Gal}(K_n/K_{nr})$. Alors

$$ {}^{\sigma}(y,g) = (y, {}^{\sigma}g) = (y,g) + (0, {}^{\sigma}g - g) \ . \tag{1} $$

Choisissons une uniformisante τ de K_n telle que $\tau^n = \pi$. Pour tout entier m, on a alors d'après (*) :

$$ \sigma(\tau^m) = \tau^m t_n(\sigma)^m \ . \tag{2} $$

Notons R_n l'anneau des entiers de K_n.

Soit H le sous-groupe de $T(K_n)$ formé des points h, tels que $\chi(h)$ soit une puissance de τ, pour tout caractère χ du tore T. Alors $T(K_n) = H \oplus T(R_n)$, et

$$ G = H \oplus G(R_n) \ . $$

On peut donc décomposer g en :

$$ g = h + a \ , \ \text{avec } h \text{ dans } H \text{et } a \text{ dans } G(R_n) \ . $$

Comme $u(y) = ng$, et ${}^{\sigma}y = y$, ${}^{\sigma}g - g$ est un élément de $G(K_n)$ annulé par n.

Par ailleurs, vu le choix de H et (*), ${}^{\sigma}h - h$ est un élément de $T(K_n)$ qui est annulé par n. Comme ${}^{\sigma}g - g = {}^{\sigma}h - h + {}^{\sigma}a - a$, on voit que ${}^{\sigma}a - a$ est lui aussi annulé par n. Mais l'élévation à la puissance n-ème est un morphisme étale dans G et ${}^{\sigma}a - a$ a une image nulle dans $G(k)$, donc ${}^{\sigma}a - a = 0$. Par suite

$$ {}^{\sigma}g - g = {}^{\sigma}h - h \ . \tag{3} $$

Soit alors χ un caractère de T. Le caractère χ, composé avec la valuation de K_n, donne une application additive de $T(K_n)$ dans $\mathbb{Z}$. Celle-ci s'étend en une application additive $v_{n,\chi} : G(K_n) \to \mathbb{Z}$, qui s'annule sur $G(R_n)$. En particulier :

$$ v_{n,\chi}(g) = v_{n,\chi}(h) \ . \tag{4} $$

D'après (*) et le choix de h, on a alors $\chi(\sigma h) = \chi(h) t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(h)}$, et donc, compte-tenu de (3) et (4) :

$$ \chi({}^{\sigma}g - g) = \chi({}^{\sigma}h - h) = t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(h)} = t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(g)} \ . \tag{5} $$

Il résulte de la définition de la monodromie géométrique μ_0 (4.3), que pour tout y dans $Y(K)$ et tout χ caractère de T, on a :

$$(6) \qquad v_{n,\chi}(u(y)) = n\mu_0(y \otimes \chi) \ ,$$

l'entier n qui figure à droite provenant de la ramification de K_n par rapport à K.

Avec les notations précédentes, on a $u(y) = ng$ et il vient donc : $v_{n,\chi}(g) = \mu_0(y \otimes \chi)$.

Finalement, on trouve :

$$(7) \qquad \chi({}^\sigma g - g) = t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(g)} = t_n(\sigma)^{\mu_0(y\otimes\chi)} \ .$$

Nous sommes alors en mesure d'expliciter l'action de Galois sur les points d'ordre n du motif M, en fonction de la monodromie géométrique.

La donnée de la monodromie géométrique

$$\mu_o : Y \otimes Y^* \to \mathbb{Z} \ ,$$

équivaut à la donnée d'une application linéaire :

$$\begin{aligned} &Y \to \mathrm{Hom}(Y^*, \mathbb{Z}) \\ &y \mapsto [\chi \mapsto \mu_o(y, \chi)] \ . \end{aligned}$$

Par tensorisation avec les racines n-èmes de l'unité, on obtient une application canonique :

$$\nu_n : Y \otimes \mu_n \to \mathrm{Hom}(Y^*, \mu_n) = {}_nT \ .$$

Pour tout ℓ premier inversible sur R, on obtient de même une application canonique :

$$\nu_{\ell^\infty} : Y(1) = Y \otimes T_{\ell^\infty}(1) \to T_{\ell^\infty}(T) \ .$$

Les formules (1) et (7) obtenues ci-dessus entraînent alors :

Pour tout point x de ${}_nM$, d'image y dans Y/nY, on a

$${}^\sigma x = x + \nu_n(y \otimes t_n(\sigma)) \ .$$

Si l'on considère l'application composée

$$\mathcal{N}_n : {}_nM \otimes \mu_n \to Y/nY \otimes \mu_n \to {}_nT \to {}_nM \ ,$$

comme un "endomorphisme" nilpotent de carré nul, on peut écrire

${}^\sigma x = \mathrm{Exp}(\mathcal{N}_n(x \otimes t_n(\sigma)))$ qui est la formule usuelle pour la monodromie.

En résumé :

Proposition 4.6.1. — *Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1-$motif, tel que Y_K et G_K aient bonnes réductions respectives Y et G. Notons T le sous-tore de G et soit ℓ un nombre premier inversible sur R.*

A l'entier ℓ et à la monodromie géométrique

$$\mu_o : Y \to \mathrm{Hom}(Y^*, \mathbb{Z}) \ ,$$

on associe canoniquement l'opérateur de carré nul :

$$\mathcal{N}_{\ell^\infty} : T_{\ell^\infty}(M)(1) \to Y \otimes \mathbb{Z}_{\ell^\infty}(1) \to T_{\ell^\infty}(T) \to T_{\ell^\infty}(M)$$

où les flèches extrêmes sont les surjections et injections canoniques et où la flèche médiane est ν_{ℓ^∞}, déduite de la monodromie géométrique.

Alors l'action de l'inertie I sur $T_{\ell^\infty}(M)$ se factorise à travers le caractère modéré t_{ℓ^∞} et est donnée par la formule :

$${}^\sigma x = \mathrm{Exp}(\mathcal{N}_{\ell^\infty}(x \otimes t_{\ell^\infty}(\sigma))) \ .$$

De plus, cette formule est compatible avec l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur les deux membres.

4.7. — Monodromie finie.

Soit de nouveau R un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K, de corps résiduel k de caractéristique $p \geq 0$. Soit $\overline{K}$ (resp. $\overline{k}$) une clôture algébrique séparable de K (resp. k). On note $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ qui est extension de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ par le groupe d'inertie I.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1-$motif strict (4.2.3). Reprenons les notations de 4.4 :

- le plus grand sous-motif $\widetilde{M}_K = [\widetilde{u}_K : \widetilde{Y}_K \to G_K]$ de M_K ayant potentiellement bonne réduction.
- $Y''_K = Y_K/\widetilde{Y}_K$, Y''^*_K, T''_K et l'application non dégénérée :

$$\mu'' : Y''_K \otimes Y''^*_K \to \mathbb{Q} \ .$$

La discussion qui suit est directement inspirée de [16] .

Soit K' une extension finie étale galoisienne de K de groupe de Galois $\mathcal{G}'$ et soit R' la clôture intégrale de R dans K'. Supposons que $Y_{K'}$ et $G_{K'}$ aient respectivement bonne réduction Y' et G' sur R'. Alors $(\widetilde{M}_K) \otimes_K K' = \widetilde{M}_{K'}$ se réalise comme sous-motif $\widetilde{u}_{K'} : \widetilde{Y}_{K'} \to G_{K'}$ de $M_{K'}$ et a bonne réduction $\widetilde{M}' = [\widetilde{u}' : \widetilde{Y}' \to G']$ sur R'.

Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}'$, soit $\widetilde{M}^{(\sigma)}_{K'}$ (resp. $\widetilde{M}'^{(\sigma)}$) le motif déduit de $\widetilde{M}_{K'}$ (resp. $\widetilde{M}'$) par l'automorphisme de K' (resp. R') induit par σ. Comme $\widetilde{M}_{K'}$ provient de $\widetilde{M}_K$, on a un isomorphisme canonique de descente $\alpha(\sigma) : \widetilde{M}_{K'} \approx \widetilde{M}'^{(\sigma)}_{K'}$ qui satisfait à la condition de cocycle : $\alpha(\sigma\tau) = {}^\sigma\alpha(\tau)\alpha(\sigma)$. Ces isomorphismes se prolongent en des isomorphismes $\alpha(\sigma) : \widetilde{M}' \to \widetilde{M}'^{(\sigma)}$, vérifiant également la condition de cocycle $\alpha(\sigma\tau) = {}^\sigma\alpha(\tau)\alpha(\sigma)$. En particulier, si l'on restreint α à la fibre fermée de $\widetilde{M}'_{k'}$ au-dessus du corps résiduel k' de R' et si l'on restreint σ au sous-groupe d'inertie I' de G', on obtient un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} I' &\to \mathrm{Aut}(\widetilde{M}'_{k'}) \\ \sigma &\to \alpha(\sigma) \, . \end{aligned}$$

Proposition 4.7.1. —

i) *Il existe une extension finie* **étale** K' *de* K, *telle que* $M_{K'}$ *ait semi-bonne réduction.*

ii) *Si* R *est* **strictement hensélien**, *il existe une plus petite extension* K' *de* K *telle que* $M_{K'}$ *ait semi-bonne réduction. Cette extension est étale galoisienne et, avec les notations précédentes, son groupe de Galois est l'image de* I' *dans* $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$.

Soit n *un entier* ≥ 3 *et premier à* p *caractéristique de* k.

iii) *Pour que* M_K *ait semi-bonne réduction il faut et il suffit que l'action de Galois sur* $T_n(\widetilde{M}_K)$ *soit non-ramifiée, en particulier il suffit que l'action de Galois sur* $T_n(M_K)$ *soit non ramifiée.*

Démonstration : L'assertion i) a déjà été notée et résulte du fait que si Y_K (resp. G_K) acquiert bonne réduction après extension radicielle de K, il a déjà bonne réduction, comme il résulte du critère de Néron-Ogg-Shafarevic (confer [16] th. 1).

Prouvons ii). Supposons R strictement hensélien. Si M_K a semi-bonne réduction, alors $\widetilde{M}_K$ a bonne réduction et donc l'image de I' dans $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$ est nulle. Réciproquement, si l'image de I' dans $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$ est nulle, pour ℓ premier distinct de p, l'action de G sur $T_\ell(\widetilde{M}_K)$ est non ramifiée et il résulte encore du critère de Néron-Ogg-Shafarevic que $\widetilde{M}_K$ a bonne réduction. En particulier, le sous-tore T''_K (4.4) a bonne réduction et donc l'action de Galois sur Y''^*_K est non ramifiée. Comme μ'' est non-dégénérée, il en résulte que l'action de Galois sur Y''_K est aussi non ramifiée. Après tensorisation par $\mathbb{Q}$, l'action de Galois sur Y_K devient semi-simple. Comme les actions de Galois sur $\widetilde{Y}_K$ et sur Y''_K sont non ramifiées, il en est de même de l'action de Galois sur Y_K et donc Y_K a bonne réduction. D'où ii).

Quant à l'assertion iii), elle résulte de l'analogue du critère de Serre [15].

On obtient ainsi un morphisme canonique $\rho : I \to \mathrm{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$, d'image finie H : **la monodromie finie** du motif M_K.

Soit M_K un $K-1-$motif strict et supposons R strictement hensélien. Alors tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ opère sur Y'_K, sur le groupe des caractères Y^*_K du tore T_K et sur la réduction A'_k du quotient abélien $A_{K'}$. On obtient dans les trois cas, des polynômes caractéristiques à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit $P(\sigma)$ le produit de ces trois polynômes.

PROPOSITION 4.7.3. — *Soit ℓ premier, distinct de la caractéristique résiduelle p. Alors pour tout σ dans le groupe d'inertie I, le polynôme caractéristique de σ opérant sur $T_{\ell^\infty}(M_K)$ est $P(\sigma)$ et est à coefficients entiers.*

Par dévissage, on se ramène au cas d'une filtration à un cran. Le cas torique et le cas étale sont immédiats; le cas abélien se déduit de Weil (confer [11] chap. IV th. 4).

PROPOSITION 4.7.4. — *Soit M_K un $K-1-$Motif strict* (4.2.3) *et supposons que le corps résiduel k soit fini à q éléments. Notons σ un élément du groupe de Weil de K qui relève le Frobenius de k et soit ℓ premier, distinct de la caractéristique résiduelle de k. Alors le polynôme caractéristique de σ opérant sur $T_\ell(M_K)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et est indépendant de ℓ. Les valeurs absolues des racines sont respectivement 1, q, $q^{1/2}$ sur les crans étales, toriques et abéliens du motif.*

Démonstration : On procède par dévissage pour se ramener à une filtration en un seul cran et on termine comme dans ([16] th. 3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bosch, W. Lütkebohmert. — Stable Reduction and uniformization of abelian varieties. I.Math. Ann. 270 (1985), 349-379, II. Invent. Math. 78 (1984), 257-297.

[2] S. Bosch, W. Lütkebohmert. — Degenerating abelian varieties. Topology, Vol. 30, N° 4 (1991), 653-698.

[3] S. Bosch, W. Lütkebohmert. — Formal and rigid Geometry II : Flattening Techniques (à paraître).

[4] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. — Néron models. Ergebnisse (1990).

[5] P. Deligne. — *Théorie de Hodge III*, Pub. Math. IHES N° 44, 1975.

[6] M. Deschamps. — Réduction semi-stable p. 1-34, Séminaire Szpiro sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux. Astérisque N° 86 S.M.F. (1981).

[7] A. Grothendieck, J. Dieudonné. — *Eléments de géométrie algébrique III*, Pub. Math. IHES N° 11, 1961.

[8] A. Grothendieck. — Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie :

SGA 1 (1960-61) : Revêtements Etales et Groupe Fondamental. Lecture Notes in Mathematics N° 224 (1971).

SGA 2 (1962) : Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. Advanced studies in Pure Mathematics. Masson North-Holland (1968)

SGA 7.1 (1967-1969) : Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique. Lecture Notes in Mathematics N° 288 (1972).

[9] R. Kiehl. — Der Endlichkeitssatz für eignetliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.* **2**, (1967), 191-214.

[10] F. Mehlmann. — Flache Homomorphismen affinoider Algebren. Schriftenreihe des Math. Inst. Univ. Münster, 2 Ser. 19 (1981).

[11] D. Mumford. — *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1970.

[12] M. Raynaud. — Variétés abéliennes et géométrie rigide, *Actes congrès intern. math. Nice* **1**, (1970), 473-477.

[13] M. Raynaud. — Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,... Table ronde d'analyse non archimédienne, *Mémoire de la Soc. Math. de France* **39-40**, (1974), 319-327.

[14] M. Reversat, M. Van der Put. — Construction analytique rigide de variétés abéliennes, *Bul. Soc. Math. de France* **117**, (1989), 415-444.

[15] J.-P. Serre. — Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon $n \geq 3$. Application à l'exposé 17 du séminaire Cartan 1960-61.

[16] J.-P. Serre, J. Tate. — Good reduction of abelian varieties, *Ann. of Math.* **88**, (1968), 492-517.

Michel Raynaud
URA D0752 du CNRS
Université de Paris-Sud
Mathématiques, bât. 425
91405 ORSAY Cédex (France)

Exposé VIII

REPRÉSENTATIONS ℓ–ADIQUES POTENTIELLEMENT SEMI–STABLES

par **Jean–Marc Fontaine**

Introduction

Dans tout cet exposé, K est un corps complet pour une valuation discrète, de caractéristique 0, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Pour toute extension L de K contenue dans $\overline{K}$, on note G_L le groupe de Galois de l'extension $\overline{K}/L$ et I_L son groupe d'inertie (i.e. le sous–groupe qui opère trivialement sur le corps résiduel).

Le but de cet exposé est de donner un traitement unifié des représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables de G_K, que le nombre premier ℓ soit ou non égal à p. C'est ainsi que, lorsque k est fini, on peut associer à une telle représentation une représentation du groupe de Weil–Deligne de G_K[1].

Au paragraphe 1, on introduit la notion de ℓ–module de Deligne. Pour $\ell \neq p$, c'est une variante de la notion de représentation du groupe de Weil–Deligne de K qui est commode pour étudier les représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables lorsque l'on ne fait aucune hypothèse sur k. Pour $\ell = p$, c'est essentiellement la notion de (φ, N, G_K)–module introduite dans [Exp. III] également pour l'étude des représentations semi–stables. Au paragraphe 2, on s'intéresse à ces représentations, on introduit un foncteur,

[1] Ceci jouera un rôle essentiel dans [FM94] où nous étudierons les **représentations ℓ–adiques géométriques** du groupe de Galois d'un corps de nombres (i.e. les représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables en toute place et non ramifiées en dehors d'un nombre fini d'entre elles). Cf. aussi [BK90] et [FP94].

pour $\ell \neq p$, qui permet de passer des ℓ–modules de Deligne aux représentations de G_K et qui doit être compris comme l'analogue de ce qui a été fait dans [Exp. III] pour $\ell = p$. On termine en énonçant des conjectures sur la cohomologie étale ℓ–adique.

Conventions

On note $\mathbb{Z}_\ell(1)$ le $\mathbb{Z}_\ell$–module libre de rang 1 qui est la limite projective des $\mu_{\ell^n}(\overline{K})$, $\mathbb{Q}_\ell(1) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_\ell(i) = \mathrm{Sym}^i_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(1)$ et $\mathbb{Q}_\ell(-i)$ le dual de $\mathbb{Q}_\ell(i)$. Si V est un $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel muni d'une action de G_K, on pose $V(i) = V \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Si G est un groupe profini, une **représentation ℓ–adique de G** est un $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G. On note $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$ la catégorie de ces représentations.

Comme dans [Exp. III], si $\mathcal{T}$ est une catégorie tannakienne sur un corps, une **sous–catégorie tannakienne de $\mathcal{T}$** est une sous–catégorie strictement pleine de $\mathcal{T}$ contenant un objet de dimension non nulle et stable par sous–objet, quotient, somme–directe, produit tensoriel et dual.

1. — Modules de Deligne

1.1. — Généralités

1.1.1. — Supposons $\ell \neq p$. Nous appelons **ℓ–module de Deligne** (relatif à $\overline{K}/K$) la donnée d'un $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel Δ muni d'une action linéaire de G_K et d'une application $\mathbb{Q}_\ell$–linéaire G_K–équivariante

$$N : \Delta \longrightarrow \Delta(-1)\,.$$

Notons P_0 le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel $\overline{k}$ de $\overline{K}$. Le corps P_0 est muni d'une action naturelle de G_K, l'action du groupe d'inertie I_K étant triviale, et d'un Frobenius σ (induit par $x \longmapsto x^p$ sur $\overline{k}$). Appelons **p–module de Deligne** (relatif à $\overline{K}/K$) la donnée d'un P_0–espace vectoriel Δ muni d'une action semi–linéaire de G_K, d'un Frobenius, i.e. d'une application injective, σ–linéaire,

$$\varphi : \Delta \longrightarrow \Delta\,,$$

commutant à l'action de G_K, et d'une application P_0–linéaire, G_K–équivariante

$$N : \Delta \longrightarrow \Delta$$

vérifiant $N\varphi = p\varphi N$.

1.1.2. — Posons $\mathbb{Q}'_\ell = \mathbb{Q}_\ell$ si $\ell = p$ et $\mathbb{Q}'_\ell = P_0$. La **dimension** d'un ℓ–module de Deligne est la dimension du $\mathbb{Q}'_\ell$–espace vectoriel sous–jacent. Les ℓ–modules de Deligne forment une catégorie : un morphisme est une application $\mathbb{Q}'_\ell$–linéaire qui commute à l'action de G_K, à celle de N et, si $\ell = p$, à celle de φ. On note $\underline{\mathrm{Del}}_\ell(G_K)$ la sous–catégorie pleine de la catégorie des ℓ–modules de Deligne dont les objets sont les Δ qui sont de dimension finie et vérifient

(*) l'action de G_K est continue et I_K opère à travers un quotient fini,

(**) l'opérateur de "monodromie" N est nilpotent (lorsque $\ell \neq p$, cela signifie que, si l'on note encore $N : \Delta(-i) \to \Delta(-i-1)$ l'application $N \otimes id_{\mathbb{Q}_\ell(-i)}$, l'application

$$N^r : \Delta \longrightarrow \Delta(-r)$$

est nulle pour r suffisamment grand).

1.1.3. — **Remarque.** Soit Δ un ℓ–module de Deligne de dimension finie :

i) Si $\ell = p$, l'application $\varphi : \Delta \to \Delta$ est bijective car, si Δ' désigne le P_0–espace vectoriel déduit de Δ par l'extension des scalaires σ, on peut voir φ comme une application P_0–linéaire injective de Δ' dans Δ et Δ et Δ' ont la même dimension.

ii) Toujours si $\ell = p$, Δ vérifie la condition (**) car, si r est suffisamment grand, il n'y a pas d'application P_0–linéaire non nulle N_0 de Δ dans lui–même telle que $N_0\varphi = p^r\varphi N_0$.

iii) Supposons maintenant $\ell \neq p$ et supposons aussi que le caractère donnant l'action de G_K sur $\mathbb{Q}_\ell(1)$ ne soit pas d'ordre fini (ce qui revient à dire que, si $\ell \neq 2$ (resp. $= 2$) et si k' est un corps obtenu en adjoignant au corps résiduel k les racines ℓ–ièmes (resp. quatrièmes) de l'unité, alors k' ne contient qu'un nombre fini de racines de l'unité d'ordre une puissance de

ℓ) ; alors Δ vérifie (**) car, pour r assez grand, il n'y a pas d'application $\mathbb{Q}_\ell$–linéaire G_K–équivariante non nulle de Δ dans $\Delta(-r)$.

1.1.4. — Si Δ_1 et Δ_2 sont deux ℓ–modules de Deligne, le produit tensoriel $\Delta_1 \otimes \Delta_2$ est le produit tensoriel des $\mathbb{Q}'_\ell$–espaces vectoriels sous–jacents, muni de son action naturelle de G_K, avec N défini par $N(a_1 \otimes a_2) = Na_1 \otimes a_2 + a_1 \otimes Na_2$ (en identifiant, lors $\ell \neq p$, $\Delta_1 \otimes \mathbb{Q}_\ell(-1) \otimes \Delta_2$ à $\Delta_1 \otimes \Delta_2 \otimes \mathbb{Q}_\ell(-1)$) et, lorsque $\ell = p$, φ défini par $\varphi(a_1 \otimes a_2) = \varphi a_1 \otimes \varphi a_2$.

On a aussi un objet–unité qui est $\mathbb{Q}'_\ell$ avec action naturelle de G_K (triviale si $\ell \neq p$), $N = 0$ et, si $\ell = p$, $\varphi = \sigma$; lorsque Δ_1 et Δ_2 sont de dimension finie, on a aussi une notion de **hom interne** : le ℓ–module de Deligne $\mathrm{Hom}(\Delta_1, \Delta_2)$ est le $\mathbb{Q}'_\ell$–espace vectoriel des applications $\mathbb{Q}'_\ell$–linéaires de Δ_1 dans Δ_2, muni de l'action naturelle de G_K, l'opérateur N étant défini par (avec des notations évidentes)

$$(N\eta)(a) = N(\eta(a)) - \eta(N(a)),$$

et, si $\ell = p$, on a $(\varphi\eta)(a) = \varphi(\eta(\varphi^{-1}(a))$.

En particulier, ces opérations font de $\underline{Del}_\ell(G_K)$ une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_\ell$ (au sens, par exemple, de [De90], n° 2.8) ; lorsque $\ell \neq p$, celle–ci est neutre.

1.2. — Modules de Deligne et (φ, N, G_K)–modules

1.2.1. — Soit K_0^{nr} l'extension maximale non ramifiée de $K_0 = \mathrm{Frac}\, W(k)$ contenue dans $\overline{K}$. Si, dans la définition de la catégorie $\underline{Del}_p(G_K)$, on remplace P_0 par K_0^{nr}, on obtient la catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K)$ des (φ, N, G_K)–modules discrets de dimension finie définie dans [Exp.III], n° 4.2.

En fait, on a une équivalence naturelle entre ces deux catégories : losque k est algébriquement clos, $P_0 = K_0^{nr}$ et $\underline{Del}_p(G_K) = \underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K)$. Dans le cas général, P_0 s'identifie au complété de K_0^{nr} pour la topologie p–adique. Si D est un objet de $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K)$, l'action de G_K (resp. φ, N) s'étend par semi–linéarité (resp. semi–linéarité, linéarité) à $P_0 \otimes_{K_0^{nr}} D$ qui devient ainsi un objet de $\underline{Del}_p(G_K)$ que nous appelons le **complété de** D et notons $\underline{Co}(D)$. On peut considérer $\underline{Co}$ de manière naturelle comme un $\otimes$–foncteur

$$\underline{Co} = \underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K) \longrightarrow \underline{Del}_p(G_K)\,.$$

PROPOSITION 1.2.2. — *Le foncteur*

$$\underline{Co} : \underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K) \longrightarrow \underline{Del}_p(G_K)$$

induit une $\otimes$*-équivalence entre ces deux catégories*

Preuve : considérons la catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(G_K)$ (resp. $\underline{\widehat{\mathrm{Mod}}}(G_K)$) des K_0^{nr}-espaces (resp. P_0-espaces) vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire discrète de G_K (resp. continue de G_K, avec action discrète de I_K). On dispose d'un foncteur de complétion que nous notons encore

$$\underline{Co} : \underline{\mathrm{Mod}}(G_K) \longrightarrow \underline{\widehat{\mathrm{Mod}}}(G_K)\,.$$

Pour tout objet Δ de $\underline{\widehat{\mathrm{Mod}}}(G_K)$, notons $\underline{\text{Déco}}(\Delta)$ le sous-ensemble de Δ formé des x dont le stabilisateur est ouvert dans G_K. On voit que $\underline{\text{Déco}}(\Delta)$ est un sous-K_0^{nr}-espace vectoriel de Δ et que cette construction est fonctorielle. La proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 1.2.3. — i) *Si D est un objet de $\underline{\mathrm{Mod}}(G_K)$, l'inclusion de D dans $\underline{Co}(D)$ identifie $\underline{\text{Déco}}(\underline{Co}(D))$ à D ;*

ii) *Si Δ est un objet de $\underline{\widehat{\mathrm{Mod}}}(G_K)$, $\underline{\text{Déco}}(\Delta)$ est de dimension finie sur K_0^{nr} et la flèche naturelle $\underline{Co}(\underline{\text{Déco}}(\Delta)) \to \Delta$ est un isomorphisme.*

Preuve : (i) Soit $d_1, d_2, \ldots, d_r$ une base de D sur K_0^{nr}. Si l'on identifie D à un sous-K_0^{nr}-espace vectoriel de $\Delta = \underline{Co}(D)$, les d_i forment aussi une base de Δ sur P_0. Soit $d = \sum\limits_{1 \leq i \leq r} \lambda_i d_i \in \Delta$, avec les $\lambda_i \in P_0$. Il s'agit de prouver que $d \in \underline{\text{Déco}}(\Delta)$ si et seulement si $\lambda_i \in K_0^{nr}$ pour tout i. Il est clair que la condition est suffisante. Réciproquement, si $d \in \underline{\text{Déco}}(\Delta)$, le stabilisateur de d et celui de chaque d_i sont ouverts dans G_K et il en est de même de l'intersection H de ces $r+1$ sous-groupes de G_K. Mais, si $h \in H$, $hd = d$ implique que $h(\lambda_i) = \lambda_i$, pour tout i. On a donc $\lambda_i \in (P_0)^H = (K_0^{nr})^H \subset K_0^{nr}$.

(ii) Choisissons une base $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r\}$ de Δ sur P_0. Pour tout $g \in G_K$, notons $\rho(g)$ la matrice dont la j-ième colonne est formée des composantes de $\rho(\delta_j)$ sur la base δ. Comme I_K opère sur Δ à travers un quotient fini, on peut trouver une extension finie galoisienne L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que le groupe d'inertie I_L opère trivialement sur Δ. La restriction de ρ à G_L se factorise à travers $G_L/I_L = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k_L)$ (où k_L est le corps résiduel de L) et définit un 1–cocycle continu de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k_L)$ à valeurs dans $GL_r(P_0)$. Comme $H^1_{cont}(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k_L), GL_r(P_0))$ est trivial (cf. [Se89], p. III–33), on peut, quitte à changer la base δ, supposer que $h\delta_i = \delta_i$ pour tout i et tout $h \in G_L$. Mais alors, pour tout $g \in G_K$ et tout $h \in G_L$, il existe $h' \in G_L$ tel que $hg = gh'$ et on doit avoir $\rho(hg) = \rho(h) \cdot h(\rho(g)) = h(\rho(g))$ qui doit aussi être égal à $\rho(gh') = \rho(g) \cdot g(\rho(h')) = \rho(g)$; les coefficients de $\rho(g)$ doivent donc être dans $(P_0)^{G_L} \subset K_0^{nr}$. On en déduit que le sous–K_0^{nr}–espace vectoriel D de Δ engendré par les δ_i est stable par G_K et est un objet de $\underline{\mathrm{Mod}}(G_K)$. On a alors $\Delta = \underline{Co}(D)$ et l'assertion résulte alors facilement de (i).

1.2.4. — Remarque. Le lemme montre que $\underline{\text{Déco}}$ est un quasi–inverse de

$$\underline{Co} : \underline{\mathrm{Mod}}(G_K) \longrightarrow \underline{\widehat{\mathrm{Mod}}}(G_K)\,.$$

Si Δ est un objet de $\underline{Del}_p(G_K)$, le sous–K_0^{nr}–espace vectoriel $\underline{\text{Déco}}(\Delta)$ de Δ est stable par G_K, φ et N et devient un objet de $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K)$. On peut aussi considérer $\underline{\text{Déco}}$ comme un quasi–inverse de

$$\underline{Co} : \underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K) \longrightarrow \underline{Del}_p(G_K)\,.$$

1.3. — Modules de Deligne et groupe de Weil–Deligne

Les numéros 1.3.1 à 1.3.3 sont, pour l'essentiel, une généralisation triviale mais naturelle de [De73], § 8 (cas où k est fini) dont le but est de traiter simultanément les deux cas intéressants : celui où k est fini et celui où il est algébriquement clos.

1.3.1. — On appelle **groupe de Weil** W_K (relatif à $\overline{K}/K$) le sous–groupe de G_K formé des éléments dont l'image dans $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ est une puissance entière du Frobenius absolu σ ; si $w \in W_K$, on note $\alpha(w)$ l'unique $a \in \mathbb{Z}$ tel que w agit sur $\overline{k}$ comme σ^a. On voit donc que

– si k est fini avec p^h éléments, le Frobenius géométrique relatif à k est un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et s'identifie à σ^{-h}, de sorte que l'on a suite exacte

$$1 \longrightarrow I_K \longrightarrow W_K \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \longrightarrow 1\,;$$

– sinon on a $W_K = I_K$ et $\alpha(w) = 0$ pour tout $w \in W_K$.

On considère W_K comme un schéma en groupes sur $\mathbb{Q}$, limite projective des schémas en groupes constants W_K/H, pour H parcourant les sous-groupes ouverts de I_K invariants dans G_K.

On note $'W_K$ **le groupe de Weil–Deligne** relatif à $\overline{K}/K$, c'est-à-dire le schéma en groupes sur $\mathbb{Q}$ qui est le produit semi-direct de W_K par le groupe additif $\mathbb{G}_a$, sur lequel W_K opère par

$$wxw^{-1} = p^{\alpha(w)}x\,.$$

Si k n'est pas fini, c'est donc le produit direct du groupe pro-algébrique constant I_K par $\mathbb{G}_a$; dans ce cas, si P est le complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$, on a $'W_K = 'W_P$.

Pour tout corps E de caractéristique 0, on note $\underline{\mathrm{Rep}}_E('W_K)$ la catégorie des **représentations** E**–linéaires** de dimension finie de $'W_K \otimes E$. Un objet de cette catégorie peut être considéré comme un triplet (Δ, ρ_0, N) où Δ est un E–espace vectoriel de dimension finie, $\rho_0 : W_K \to \mathrm{Aut}_E(\Delta)$ un homomorphisme dont le noyau contient un sous-groupe ouvert de I_K et $N : \Delta \to \Delta$ une application linéaire vérifiant

$$\rho_0(w) \cdot N = p^{\alpha(w)} \cdot N \cdot \rho_0(w)\,, \text{ pour tout } w \in W_K\,.$$

On se propose de munir tout ℓ–module de Deligne d'une action $\mathbb{Q}'_\ell$–linéaire de $'W_K$.

1.3.2. — Dans la suite, si $\ell \neq p$, **on choisit** $t \in \mathbb{Q}_\ell(1)$ non nul. Pour tout ℓ–module de Deligne Δ, on note

$$N_t : \Delta \longrightarrow \Delta$$

l'application définie par $N\delta = N_t\delta \otimes t^{-1}$. Si $w \in W_K$ et $\delta \in \Delta$, on a $w(N\delta) = p^{\alpha(w)} \cdot N_t(w(\delta))$. Autrement dit le triplet $\underline{W}_{\ell,t}(\Delta) = \underline{W}_t(\Delta) = (\Delta, \rho_0, N_t)$, où $\rho_0 : W_K \to \mathrm{Aut}_E(\Delta)$ est la restriction de l'homomorphisme donnant l'action de G_K sur Δ, est une représentation $\mathbb{Q}_\ell$–linéaire de $'W_K$.

Il est clair que l'on peut considérer $\underline{W}_{\ell,t} = \underline{W}_t$ comme un $\otimes$–foncteur exact (et donc fidèle) de $\underline{Del}_\ell(G_K)$ dans $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}('W_K)$. Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion sur t, on écrit $\underline{W}$ (ou $\underline{W}_\ell$) au lieu de $\underline{W}_t$ (ou $\underline{W}_{\ell,t}$).

PROPOSITION 1.3.3. — *Supposons $\ell \neq p$.*

i) *Si t et t' sont deux éléments non nuls de $\mathbb{Q}_\ell(1)$ et si Δ est un objet de $\underline{Del}_\ell(G_K)$, $\underline{W}_t(\Delta)$ et $\underline{W}_{t'}(\Delta)$ sont isomorphes ;*

ii) *si k est algébriquement clos, le foncteur $\underline{W}_t$ est pleinement fidèle et induit une $\otimes$–équivalence entre $\underline{Del}_\ell(G_K)$ et $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}('W_K)$;*

iii) *si k est fini, choisissons $g_0 \in W_K$ tel que $g_0 \notin I_K$; le foncteur W_t est pleinement fidèle et induit une $\otimes$–équivalence entre $\underline{Del}_\ell(G_K)$ et la sous–catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}('W_K)$ formée des Δ tels que les racines du polynôme caractéristique de $\rho_0(g_0)$ (dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$) sont des unités ℓ–adiques.*

Preuve : L'assertion (i) résulte du lemme 1.3.4 ci–dessous et (ii) est triviale. Si k est fini, et si f désigne un relèvement dans W_K du Frobenius géométrique, G_K est engendré topologiquement par f et I_K d'où (iii) lorsque $f = g_0$. Le cas général s'en déduit en remarquant que, si Δ est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}('W_K)$, il existe des entiers r, $s \neq 0$ tels que $\rho(g_0)^r = \rho(f)^s$.

LEMME 1.3.4. — *Supposons k algébriquement clos ou fini et $\ell \neq p$. Choisissons $t \in \mathbb{Q}_\ell(1)$ et $a \in \mathbb{Q}_\ell$ non nuls. Soit Δ un objet de $\underline{Del}_\ell(G_K)$. Pour tout $\delta \in \Delta$, posons $N\delta = N_t(\delta) \otimes t^{-1}$. Il existe un automorphisme τ du $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel Δ qui est G_K–équivariant et vérifie $N_t\tau = a\tau N_t$.*

Si k est algébriquement clos, l'action de $G_K = I_K$ se factorise à travers un quotient fini et est donc semi–simple. Quitte à décomposer Δ en somme directe, on se ramène au cas où Δ est irréductible, et on voit qu'alors, il existe une représentation simple Δ_0 de G_K et un entier r tel que $\Delta \simeq (\Delta_0)^r$, avec

$$N_t(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r) = (\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r, 0)\,;$$

on peut alors choisir τ défini par

$$\tau(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r) = (\delta_1, a\delta_2, \dots, a^{r-1}\delta_r)\,.$$

Si k est fini (cf. [De73]), lemme 8.4.3), pour tout $g \in G_K$, posons $gt = \chi_\ell(g)t$ et notons

$$\rho_0 : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta)$$

l'homomorphisme qui donne l'action de G_K sur Δ. Pour tout $g \in G_K$, il existe un entier $n > 0$ tel que $\rho_0(g^m u) = \rho_0(ug^m)$ pour tout $u \in G_K$ dès que n divise m ; ceci nous permet de choisir $g_0 \in G_K$ tel que $\chi_\ell(g_0)$ ne soit pas d'ordre fini et $\rho_0(g_0 u) = \rho_0(ug_0)$ pour tout $u \in G_K$. Choisissons une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_\ell}$ de $\mathbf{Q}_\ell$ et notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des orbites de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_\ell}/\mathbf{Q}_\ell)$ agissant sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, l'orbite de $\chi_\ell(g_0)\alpha$ ne dépend que de l'orbite c de α et nous la notons $\nu(c)$. Si, pour tout $c \in \mathcal{T}$, on note Δ_c le plus grand sous-espace vectoriel de Δ stable par g_0 sur lequel toutes les valeurs propres de $\rho_0(g_0)$ sont dans $\mathcal{T}$, on a $\Delta = \oplus_{c\in\mathcal{T}}\Delta_c$. Comme, pour tout $\delta \in \Delta$, on a $g_0(N_t\delta) = \chi_\ell(g_0)\cdot N_t(g_0\delta)$, on a $N_t(\Delta_c) \subset \Delta_{\nu(c)}$. Si, pour tout $c \in \mathcal{T}$ tel que $\Delta_c \neq 0$, on note $r(c)$ le plus grand entier r tel que $\Delta_{\nu^{-r}(c)} \neq 0$, on voit que l'on peut choisir τ défini par

$$\tau\delta = a^{r(c)}\delta \quad \text{si } \delta \in \Delta_c\,.$$

1.3.5. — Supposons maintenant $\ell = p$. Si Δ est un p-module de Deligne, on peut faire agir W_K linéairement sur Δ en posant

$$\rho_0(w) = w\cdot\varphi^{-\alpha(w)}\,;$$

on vérifie que le triplet $\underline{W}_p(\Delta) = \underline{W}(\Delta) = (\Delta, \rho_0, N)$ est bien une représentation P_0-linéaire de $'W_K$. On obtient ainsi un $\otimes$-foncteur $\mathbf{Q}_p$-linéaire exact

$$\underline{W}_p = \underline{W} : \underline{Del}_p(G_K) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{P_0}('W_K)\,.$$

1.3.6. — La première catégorie est tannakienne sur $\mathbf{Q}_p$ et la seconde sur P_0. Le foncteur $\underline{W}$ n'est donc pas pleinement fidèle. On a :

Proposition. — *Si Δ_1 et Δ_2 sont deux objets de $\underline{Del}_p(G_K)$, l'application naturelle*

$$P_0 \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Hom}_{\underline{Del}_p(G_K)}(\Delta_1,\Delta_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)}(\underline{W}(\Delta_1),\underline{W}(\Delta_2))$$

est injective ; c'est un isomorphisme si k est fini.

Preuve : Si $\mathbb{1}$ (resp. $\mathbb{1}'$) est l'objet unité de $\underline{Del}_p(G_K)$ (resp. $\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)$), on a $\mathrm{Hom}_{\underline{Del}_p(G_K)}(\Delta_1, \Delta_2) = \mathrm{Hom}_{\underline{Del}_p(G_K)}(\mathbb{1}, \Delta_1^* \otimes \Delta_2)$ et

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)}(\underline{W}(\Delta_1), \underline{W}(\Delta_2)) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)}(\mathbb{1}', \underline{W}(\Delta_1)^* \otimes \underline{W}(\Delta_2)) .$$

Comme $\underline{W}$ est un $\otimes$–foncteur, on est ramené, quitte à remplacer Δ_2 par $\Delta_1 \otimes \Delta_2$ au cas où $\Delta_1 = \mathbb{1}$. On a alors les identifications

$$\mathrm{Hom}_{\underline{Del}_p(G_K)}(\mathbb{1}, \Delta_2) = \{\delta \in \Delta_2 \mid \varphi\delta = \delta\,,\ g\delta = \delta \text{ si } g \in G_K\,,\ N\delta = 0\} \text{ et}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)}(\mathbb{1}', \Delta_2) = \{\delta \in \Delta_2 \mid \rho_0(w)(\delta) = \delta\,,\ \text{si } w \in W_K\,,\ N\delta = 0\} .$$

Quitte à remplacer Δ_2 par $(\Delta_2)_{N=0} \cap (\Delta_2)^{I_K}$, on peut supposer que I_K opère trivialement et que $N = 0$.

L'injectivité de l'application résulte de ce que, comme φ est σ–linéaire, si des éléments de Δ_2 fixes par φ sont linéairement indépendants sur P_0, ils le sont aussi sur $(P_0)^\sigma = \mathbb{Q}_p$.

Si k est fini avec p^h éléments et si l'on choisit $g_0 \in G_K$ tel que $\alpha(g_0) = h$, on a $g_0 \in W_K$, $\rho_0(g_0) = \varphi^{-h} g$ et

$$D := \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Rep}}_{P_0}('W_K)}(\mathbb{1}', \Delta_2) = \{\delta \in \Delta_2 \mid g_0\delta = \varphi^h\delta\} \text{ tandis que}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{Del}_p(G_K)}(\mathbb{1}, \Delta_2) = \{\delta \in \Delta_2 \mid g_0\delta = \varphi\delta = \delta\} = \{\delta \in D \mid \varphi\delta = \delta\} .$$

La continuité de l'action de G_K sur Δ_2 implique l'existence d'un réseau Λ du P_0–espace vectoriel Δ_2 stable par g_0 et g_0^{-1}. Alors $\Lambda_0 = \Lambda \cap D$ est un réseau de D stable par g_0 et g_O^{-1} ; sur ce réseau φ^h est bijectif; ceci implique que Δ est "de pente 0" donc, puisque le corps résiduel de P_0 est algébriquement clos, que Δ est engendré par les éléments fixes par φ, d'où la surjectivité.

1.3.7. — Disons qu'un ℓ–module de Deligne Δ est **semi–stable** si I_K opère trivialement sur Δ (ou sur $\underline{W}(\Delta)$, cela revient au même). De même, si L est une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$, on dit qu'un ℓ–module de Deligne Δ **devient semi–stable sur** L si I_L opère trivialement.

Si $p = \ell$ et si L/K est galoisienne, $\Delta_{st,L} = \Delta^{G_L}$ a une structure naturelle de $(\varphi, N, G_{L/K})$–module (cf. [Exp. II, n° 4.2); il porte une structure de représentation L_0–linéaire de dimension finie de $'W_K$ (avec action triviale de I_L) et on le note alors $\underline{W}_{st,L}(\Delta)$. L'application naturelle de $P_0 \otimes_{L_0} \Delta_{st,L}$ dans Δ est injective et est un isomorphisme si et seulement si Δ devient semi–stable sur L ; dans ce cas $\underline{W}(\Delta)$ s'identifie à la représentation P_0–linéaire de $'W_K$ déduite de $\underline{W}_{st,L}(\Delta)$ par l'extension des scalaires $L_0 \subset P_0$.

En particulier, lorsque Δ est semi–stable, la représentation P_0–linéaire $\underline{W}(G_K)$ provient par extension des scalaires de la représentation K_0–linéaire $\underline{W}_{st}(\Delta) := \underline{W}_{st,K}(\Delta)$.

2. — Représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables

On conserve les hypothèses et notations du paragraphe précédent.

2.1. — Les différents types de représentations ℓ–adiques

2.1.1. — On sait ce que signifie pour une représentation p–adique V de G_K d'être cristalline, semi–stable, potentiellement cristalline, potentiellement semi–stable (cf. [Exp. III], n° 5.1.4, 5.6.1, 5.6.8). Au lieu de dire que V est (potentiellement) cristalline, on dira aussi que V **a (potentiellement) bonne réduction.**

2.1.2. — Supposons $\ell \neq p$. Nous disons qu'une représentation ℓ–adique V de G_K

– **a bonne réduction** si elle est non ramifiée (i.e. si I_K opère trivialement) ;

– **est semi–stable** si l'action de I_K est unipotente ;

– **a potentiellement bonne réduction** (resp. **est potentiellement semi–stable**) s'il existe une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que V, en tant que représentation ℓ–adique de G_L a bonne réduction (resp. est semi–stable) ; cela revient à dire qu'il existe un sous–groupe ouvert de I_K qui opère trivialement (resp. de façon unipotente) sur V.

2.1.3. — Pour ℓ quelconque, la sous–catégorie pleine[2] $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,f}(G_K)$ (resp.

[2] La notation "f" pour les représentations qui ont bonne réduction est due à Kato qui y voit l'analogue, dans ce contexte, des représentations modulo ℓ que Serre appelle "finies".

$\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,st}(G_K)$, $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,pf}(G_K)$, $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,pst}(G_K)$) de la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)$ des représentations ℓ–adiques de G_K dont les objets sont les représentations qui ont bonne réduction (resp. sont semi–stables, ont potentiellement bonne réduction, sont potentiellement semi–stables) est une sous–catégorie tannakienne et on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,pf}(G_K) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,f}(G_K) & & & & \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,pst}(G_K) \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell,st}(G_K) & & \end{array}$$

où les flèches sont des "inclusions", toutes strictes, sauf la dernière lorsque l'on a simultanément

i) $\ell \neq p$

ii) si k' est un corps obtenu en adjoignant à k les racines ℓ–ièmes (resp. 4–ièmes si $\ell = 2$) de l'unité, le corps k' ne contient qu'un nombre fini de racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ).

Lorsque $\ell = p$, on a $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_p,pst}(G_K) \subset \underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G_K)$ (catégorie des représentations de de Rham, cf. [Exp. III], n° 3.7). A notre connaissance, la question de savoir si cette inclusion est ou non stricte est un problème ouvert.

2.2. — Les anneaux Bst, ℓ

2.2.1. — Si $\ell \neq p$, on pose $B_\ell = \mathbb{Q}_\ell$ sur lequel on fait opérer G_K trivialement. Si $\ell = p$, on pose $B_p = B_{cris}$; c'est une P_0–algèbre (donc a fortiori une $\mathbb{Q}_p$–algèbre) munie d'une action de G_K et d'un Frobenius φ (cf. [Exp. II]).

2.2.2. — Choisissons un élément $q \in K$ qui n'est ni 0 ni une unité. Nous allons associer à q une B_ℓ–algèbre $B_{st,\ell}$ munie d'une action de G_K et d'une dérivation G_K–équivariante

$$N : B_{st,\ell} \longrightarrow B_{st,\ell}(-1)$$

dont le noyau est B_ℓ.

Pour cela, posons $V_{\ell,q} = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_{\ell,q}$, avec

$$T_{\ell,q} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} (\overline{K}/q^{\mathbb{Z}})_{\ell^n}.$$

Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T_{\ell,q}$, et si, pour tout n, on choisit un relèvement $\hat{a}_n$ de a_n dans $\overline{K}$, on a $\hat{a}_n^{\ell^n} = q^{r_n}$ avec $r_n \in \mathbb{Z}$ et la suite des r_n converge ℓ-adiquement dans $\mathbb{Z}_\ell$ vers une limite $\nu(a)$ qui est indépendante du choix des relèvements. L'application ν se prolonge en une application $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire, G_K-équivariante, de $V_{\ell,q}$ sur $\mathbb{Q}_\ell$, dont le noyau s'identifie à $\mathbb{Q}_\ell(1)$. Autrement dit, $V_{\ell,q}$ est une représentation ℓ-adique de dimension 2 de G_K et on a une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(1) \longrightarrow V_{\ell,q} \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow 0,$$

qui, en tensorisant avec $\mathbb{Q}_\ell(-1)$, donne naissance à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow V_{\ell,q}(-1) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(-1) \longrightarrow 0,$$

et nous notons encore ν la projection de $V_{\ell,q}(-1)$ sur $\mathbb{Q}_\ell(-1)$.

2.2.3. — Comme $V_{\ell,q}(-1)$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension 2, la $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_\ell} V_{\ell,q}(-1)$ est isomorphe à une algèbre de polynômes en deux indéterminées. On note $B_{\ell,q}$ le quotient de cette algèbre que l'on obtient en identifiant l'élément-unité de cette algèbre ("1 en degré 0") avec l'élément $1 \in \mathbb{Q}_\ell \subset V_{\ell,q}(-1) = \mathrm{Sym}^1 V_{\ell,q}(-1)$ ("1 en degré 1"). Si v est un élément de $V_{\ell,q}(-1)$ qui n'est pas dans $\mathbb{Q}_\ell$, $B_{\ell,q}$ est donc l'algèbre des polynômes, à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$, en l'indéterminée v.

Le noyau de la projection de $\mathrm{Sym}_{\mathbb{Q}_\ell} V_{\ell,q}(-1)$ sur $B_{\ell,q}$ est stable par G_K qui opère donc sur $B_{\ell,q}$. En tant que $\mathbb{Q}_\ell[G_K]$-module, $B_{\ell,q}$ s'identifie à $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Sym}^n_{\mathbb{Q}_\ell} V_{\ell,q}(-1)$, l'application de transition de $\mathrm{Sym}^n V_{\ell,q}(-1)$ dans $\mathrm{Sym}^{n+1} V_{\ell,q}(-1)$ étant la multiplication par $1 \in V_{\ell,q}(-1)$.

On note $N : B_{\ell,q} \to B_{\ell,q}(-1)$ l'unique $\mathbb{Q}_\ell$-dérivation qui envoie $v \in V_{\ell,q}(-1)$ sur $1 \otimes \nu(v)$. Il est clair qu'elle est G_K-équivariante.

2.2.4. — On pose alors $B_{st,\ell,q} = B_{\ell,q}$ si $\ell \neq p$ et $B_{st,p,q} = B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{p,q}$. S'il n'y a pas de risque de confusion, on pose $B_{st,\ell} = B_{st,\ell,q}$. On identifie, comme on pense, B_{cris} et $B_{p,q}$ a des sous–anneaux de $B_{st,p}$. Ce dernier anneau est muni

– d'une action de G_K : on a $g(b \otimes c) = gb \otimes gc$ si $g \in G_K$, $b \in B_{cris}$, $c \in B_{p,q}$;

– d'une action du Frobenius φ : on a $\varphi(b \otimes c) = \varphi b \otimes c$ si $b \in B_{cris}$, $c \in B_{p,q}$;

– d'une dérivation $N : B_{st,p} \to B_{st,p}(-1)$: on a $N(b \otimes c) = b \otimes Nc$ si $b \in B_{cris}$, $c \in B_{p,q}$.

On voit que l'action de φ et celle de N commutent à celle de G_K. Si l'on fait agir φ sur $B_{st,p}(-1)$ par $\varphi(d \otimes a) = \varphi d \otimes a$, si $d \in B_{st,p}$ et $a \in \mathbb{Q}_p(-1)$, l'action de N commute à celle de φ.

2.2.5. — Soient R et $Fr\, R$ comme dans l'exposé II (n° 3.1). Choisissons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{K}$ vérifiant $a_0 = q$ et, pour tout n, $a_{n+1}^p = a_n$. Notons a (resp. α) l'élément de $Fr\, R$ (resp. $V_{p,q}$) qu'il définit. On peut considérer α comme un élément de $B_{st,p}$: si t est un élément non nul de $\mathbb{Q}_p(1) \subset B_{cris}$, on a $\alpha \otimes t^{-1} \in V_{p,q}(-1)$ et on peut écrire $\alpha = t \otimes (\alpha \otimes t^{-1})$. Il existe un unique homomorphisme λ_q de $(Fr\, R)^*$ dans le groupe additif de $B_{st,p}$ qui prolonge l'application

$$\lambda : R^* \longrightarrow B_{cris} \quad \text{(cf. [Exp. II], n° 3.1)}$$

et vérifie $\lambda_q(a) = \alpha$. L'application λ_q est indépendante du choix de la suite des a_n. La propriété universelle de l'anneau B_{st} (*loc. cit.*) implique qu'il existe donc un unique homomorphisme de la B_{cris}–algèbre B_{st} dans $B_{st,p}$ envoyant $\lambda(a)$ sur α et que cette application est un isomorphisme. Nous l'utilisons **pour identifier $B_{st,p}$ et B_{st}.**

Cette identification est compatible à l'action de G_K et à celle de φ. En ce qui concerne l'action de N, soit

$$i : B_{st,p}(-1) = B_{st}(-1) \longrightarrow B_{st}$$

l'isomorphisme canonique qui envoie $b \otimes t^{-1}$ sur bt^{-1}. Si v est la valuation normalisée par $v(q) = 1$ si q est entier (resp. $v(q) = -1$ si q n'est pas entier), et si $N_v : B_{st} \to B_{st}$ est l'opérateur de monodromie qui lui est associé ([Exp. II], n° 3.2), on a

$$N_v = i \circ N \ (\text{resp.} -i \circ N)$$

(l'application i commute à l'action de G_K mais pas à celle de φ (on a $i(\varphi(b \otimes t^{-1}) = \varphi b \cdot t^{-1} = p \cdot \varphi(bt^{-1}) = p \cdot \varphi(i(b \otimes t^{-1})$, ce qui explique que $N\varphi = \varphi N$ alors que $N_v\varphi = p\varphi N_v$.

2.2.6. — On voit donc que, si q et q' sont deux éléments de K qui ne sont ni 0 ni des unités, les anneaux $B_{st,p,q}$ et $B_{st,p,q'}$ sont canoniquement isomorphes (ils s'identifient tous deux à B_{st}), cet isomorphisme étant compatible avec l'action de G_K et celle de φ (mais pas celle de N si q/q' n'est pas une unité).

Pour tout corps E, posons $Kum_\ell(E) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} (\varprojlim E^*/(E^*)^{\ell^n})(= H^1(E, \mathbb{Q}_\ell(1)))$. Lorsque $\ell \neq p$, pour qu'il existe un isomorphisme G_K–équivariant de $B_{st,\ell,q'}$ sur $B_{st,\ell,q}$, il faut et il suffit que les images $\overline{q}'$ et $\overline{q}$ de q' et q dans $Kum_\ell(K)$ engendrent le même $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel (où le même $\mathbb{Q}$–espace vectoriel, cela revient au même). S'il en est ainsi, si $\overline{q}' = a\overline{q}$, avec $a \in \mathbb{Q}$, si l'on choisit $t \in \mathbb{Q}_\ell(1)$ non nul et si l'on fixe un relèvement α de q dans $V_{\ell,q}$, les homomorphismes G_K–équivariants $\psi : B_{st,\ell,q'} \to B_{st,\ell,q}$ correspondent bijectivement aux relèvements α' de q dans $V_{\ell,q'}$ (via $\psi \longmapsto \psi(\alpha' \otimes t^{-1}) = a\alpha \otimes t^{-1})$; avec des notations évidentes, $\psi N' = aN\psi$.

Si q est choisi, $Kum_\ell(K)$ s'identifie à la somme directe du $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel engendré par l'image de q et de $Kum_\ell(k)$, ce qui fait que tous les $B_{st,\ell,q}$ sont isomorphes si et seulement si $Kum_\ell(k) = 0$. C'est en particulier le cas lorsque k est algébriquement clos où lorsque k est fini.

2.3. — Les foncteurs $\underline{\widehat{D}}_{pst}$ et $\underline{V}_{pst}$

Dans ce numéro, s'il n'y a pas de risque de confusion, on pose $B = B_{st,\ell}$. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous–groupes ouverts de I_K.

2.3.1. — L'anneau B a une structure naturelle de ℓ–module de Deligne (lorsque $\ell = p$, comme on l'a déjà remarqué au n° 2.2.5, on peut indifféremment considérer N comme une application de B dans $B(-1)$ commutant à φ ou comme un endormorphisme de B vérifiant $N\varphi = p\varphi N$, via l'isomorphisme canonique de $B(-1)$ sur B qui envoie $b \otimes a$ sur ba si $b \in B$ et

$a \in \mathbf{Q}_p(-1) \subset B$).

2.3.2. — Pour toute représentation ℓ-adique V de G_K, le $\mathbf{Q}'_\ell$-espace vectoriel $B \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} V$ a une structure naturelle de ℓ-module de Deligne : si $b \in B$ et $v \in V$, on a, pour tout $g \in G_K$, $g(b \otimes v) = gb \otimes gv$, $N(b \otimes v) = Nb \otimes v$ (en identifiant $B(-1) \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} V$ à $(B \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} V)(-1)$ si $\ell \neq p$) et, si $\ell = p$, $\varphi(b \otimes v) = \varphi b \otimes v$.

On pose

$$\underline{\widehat{D}}_{pst,q}(V) = \varinjlim_{H \in \mathcal{H}} (B \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} V)^H ;$$

c'est de façon naturelle un ℓ-module de Deligne (sous-objet de $B \otimes V$). On écrit $\underline{\widehat{D}}_{pst}$ au lieu de $\underline{\widehat{D}}_{pst,q}$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

THÉORÈME. — *Soient V une représentation ℓ-adique de G_K et $\Delta = \underline{\widehat{D}}_{pst}(V)$. Alors*

i) *on a $\dim_{\mathbf{Q}'_\ell} \Delta \leq \dim_{\mathbf{Q}_\ell} V$ et Δ est un objet de $\underline{Del}_\ell(G_K)$;*

ii) *l'application naturelle*

$$\alpha_V : B \otimes_{\mathbf{Q}'_\ell} \Delta \longrightarrow B \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} V$$

est injective ;

iii) *les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) $\dim_{\mathbf{Q}'_\ell} \Delta = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} V$,

(b) *α_V est un isomorphisme,*

(c) *la représentation V est potentiellement semi-stable.*

Preuve : Soit $H \in \mathcal{H}$. On a $B^H = \mathbf{Q}'_\ell$ (cf., si $\ell = p$, [Exp. III], prop. 5.1.2, appliquée au cas où le corps de base est le complété de $\overline{K}^H$; le cas $\ell \neq p$ est immédiat). Par ailleurs, l'anneau B est H-régulier (cf. [Exp. III], n° 1.4) :

– si $\ell = p$, c'est la proposition 5.1.2 de [Exp. III], appliquée au cas où le corps de base est le complété de $\overline{K}^H$;

– si $\ell \neq p$, l'anneau B est intègre, on a $B^H = (FracB)^H = \mathbf{Q}_\ell$; si $b \in B$ est un élément non nul tel que la $\mathbf{Q}_\ell$-droite engendrée par b est stable par H, $b \in \mathbf{Q}_\ell$ et est inversible dans B et cela résulte du corollaire 1.6.6 de [Exp. III].

Les résultats de ce théorème sont alors immédiats (cf. [Exp. III], prop. 1.4.2 et 1.8.2).

2.3.3. — **Remarque** : Rappelons que $B_\ell = \mathbf{Q}_\ell$ si $\ell \neq p$ et que $B_p = B_{cris}$. Pour toute représentation ℓ-adique, posons $\widehat{\underline{D}}_{st,q}(V) = \widehat{\underline{D}}_{st}(V) = (B \otimes V)^{I_K}$, $\widehat{\underline{D}}_{br}(V) = (B_\ell \otimes V)^{I_K}$ et $\widehat{\underline{D}}_{pbr}(V) = \varinjlim_{H \in \mathcal{H}} (B_\ell \otimes V)^H$.

Soient V une représentation ℓ-adique potentiellement semi-stable de G_K et $\Delta = \widehat{\underline{D}}_{pst}(V)$; alors

(a) V est semi-stable si et seulement si I_K opère trivialement sur Δ et alors $\Delta = \widehat{\underline{D}}_{st}(V)$,

(b) V a potentiellement bonne réduction si et seulement si $N = 0$ sur Δ et alors $\Delta = \widehat{\underline{D}}_{pbr}(V)$,

(c) V a bonne réduction si et seulement si $N = 0$ et I_K opère trivialement sur Δ, auquel cas $\Delta = \widehat{\underline{D}}_{br}(V)$.

2.3.4. — Les représentations ℓ-adiques (potentiellement) semi-stables sont donc les représentations qui sont (potentiellement) B-admissibles au sens de [Exp. III] (n° 1.5 et 1.8). En particulier, la restriction de $\widehat{\underline{D}}_{pst}$ à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,pst}(G_K)$ peut être considérée comme un $\otimes$-foncteur exact de cette catégorie dans $\underline{Del}_\ell(G_K)$.

Si Δ est un ℓ-module de Deligne, le produit tensoriel $B \otimes \Delta$ aussi (cf. n° 1.1.4).

Proposition. — *Supposons $\ell \neq p$.*

i) *Pour tout objet Δ de $\underline{Del}_\ell(G_K)$,*

$$\underline{V}_{pst}(\Delta) = \{v \in B \otimes \Delta \mid Nv = 0\}$$

est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,pst}(G_K)$.

ii) *Le foncteur $\widehat{\underline{D}}_{pst}$ induit une $\otimes$-équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,pst}(G_K)$ et $\underline{Del}_\ell(G_K)$. Le foncteur $\underline{V}_{pst}$ est un quasi-inverse.*

Preuve : On vérifie par récurrence sur la longueur de Δ que $\underline{V}_{pst}(\Delta)$ est un $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie égale à celle de Δ, avec action de

I_K potentiellement unipotente et que N est surjectif sur $B \otimes \Delta$ (lorsque Δ est simple, de dimension d sur $\mathbb{Q}_\ell$, $\underline{V}_{pst}(\Delta) = \Delta$ tandis que $B \otimes \Delta \simeq B^d$ en tant que B–module avec action de N et le résultat est évident). D'où (i). On voit aussi que l'application naturelle de $B \otimes \underline{V}_{pst}(\Delta)$ dans $B \otimes \Delta$ est un isomorphisme de B–modules compatible aussi bien avec les actions de G_K qu'avec les structures de ℓ–modules de Deligne. L'assertion (ii) résulte alors du théorème 2.3.2.

2.3.5. — Remarque : Lorsque $\ell = p$, comme on l'a vu dans l'exposé III, il faut rajouter une filtration sur $\widehat{\underline{D}}_{pst}(V)$ pour pouvoir retrouver V : de façon précise, si l'on note

$$\log_q : \overline{K}^* \longrightarrow \overline{K}$$

l'unique prolongement du logarithme usuel qui vérifie $\log_q(q) = 0$, le choix de ce logarithme définit un plongement de $B = B_{st,p,q} = B_{st}$ dans B_{dR} ([Exp. II]), n° 4.2) et permet, si V est une représentation p–adique potentiellement semi–stable, d'identifier $(\overline{K} \otimes_{K_0} \underline{D}_{pst}(V))^{G_K}$ à $\underline{D}_{dR}(V)$ et donc de le munir d'une structure de K–espace vectoriel filtré ([Exp. III], th. 5.6.7).

Rappelons que $P = KP_0 \subset C$, complété de $\overline{K}$ et notons $\overline{P}$ la fermeture algébrique de P dans C. Si V est comme ci–dessus et si $\Delta = \widehat{\underline{D}}_{pst}(V)$, on a aussi $(\overline{P} \otimes_{P_0} \Delta)^{G_K} = (\overline{K} \otimes_{K_0} \underline{D}_{pst}(V))^{G_K} = \underline{D}_{dR}(V)$ et le $\overline{P}$–espace vectoriel $\overline{P} \otimes_{P_0} \Delta$ s'identifie à $\overline{P} \otimes_K \underline{D}_{dR}(V)$; on le munit de la filtration déduite de celle de $\underline{D}_{dR}(V)$ par extension des scalaires. On voit alors que V *s'identifie au sous–*$\mathbb{Q}_p$*–espace vectoriel* $\underline{V}_{pst}(\Delta)$ de $B \otimes \Delta$ *formé des* v *vérifiant* $\varphi v = v$, $Nv = 0$ *et dont l'image dans* $B_{dR} \otimes_{P_0} \Delta = B_{dR} \otimes_{\overline{P}} (\overline{P} \otimes \Delta)$ *est dans le* Fil^0 *de ce* $\overline{P}$*–espace vectoriel filtré).*

On laisse au lecteur qui en éprouverait le besoin le soin de traduire en termes de "p–modules de Deligne filtrés" le théorème 5.6.7 de l'exposé III : le foncteur $\widehat{\underline{D}}_{pst}$ induit une $\otimes$–équivalence entre représentaitons p–adiques potentiellement semi–stables et "p–modules de Deligne filtrés admissibles", le foncteur $\underline{V}_{st}$ étant un quasi–inverse. Lorsque k est algébriquement clos cette dernière catégorie n'est autre que la catégorie $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$; dans le cas général, le foncteur $\underline{\text{Déco}}$ induit une $\otimes$–équivalence entre ces deux catégories.

PROPOSITION 2.3.6. — *Soient q et q' deux éléments de K qui ne sont ni nuls ni des unités, V une représentation ℓ-adique potentiellement semi-stable, $\Delta = \underline{\widehat{D}}_{pst,q}(V)$ et $\Delta' = \underline{\widehat{D}}_{pst,q'}(V)$: supposons que $\ell = p$ ou bien que k est algébriquement clos ou encore que k est fini. Alors, les ℓ-modules de Deligne Δ et Δ' sont isomorphes.*

Preuve : Lorsque $\ell = p$, Δ et Δ' s'identifient en tant que P_0-espaces vectoriels munis d'une action de G_K et de φ. Si l'action de N n'est pas, en général, la même, Δ et Δ' sont des p-modules de Deligne isomorphes (cf. [Exp. III], n° 5.2.3 et 5.6.8 ; en revanche Δ et Δ' ne sont en général pas isomorphes en tant que p-modules de Deligne **filtrés**).

Supposons maintenant $\ell \neq p$. Dans ce cas (n° 2.2.6), si r et s sont des entiers non nuls tels que $q'^s = q^r$ et si $a = r/s \in \mathbf{Q}$, il existe un isomorphisme $\psi : B_{st,\ell,q'} \to B_{st,\ell,q}$ commutant à G_K mais vérifiant $\psi N = aN\psi$. Si on l'utilise pour identifier Δ et Δ', on est ramené à vérifier qu'il existe un automorphisme τ du $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel Δ qui est G_K-équivariant et vérifie $\tau N = aN\tau$, ce qui n'est autre que le lemme 1.3.4.

2.3.7. — En composant avec le foncteur $\underline{W}$ (cf. n° 1.3.2 et 1.3.5), on obtient un foncteur

$$\underline{W\widehat{D}}_{pst} = \underline{W} \circ \underline{\widehat{D}}_{pst} : \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell}(G_K) \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}'_\ell}('W_K)$$

(ou, s'il y a risque de confusion, $\underline{W\widehat{D}}_{pst,q,t_\ell}$ si $\ell \neq p$, $\underline{W\widehat{D}}_{pst,q}$ si $\ell = p$), dont la restriction à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbf{Q}_\ell,pst}(G_K)$ est un $\otimes$-foncteur exact.

On peut le décrire "directement" en disant que

$$\underline{W\widehat{D}}_{pst}(V) = \varinjlim_{H \in \mathcal{H}} (B' \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} V)^H ,$$

où $B' = B'_{st,\ell}$ est une $\mathbf{Q}'_\ell$-algèbre munie d'une action $\mathbf{Q}_\ell$-linéaire de I_K, d'une dérivation N commutant à l'action de I_K et d'une action de W_K via un homomorphisme

$$\rho_0 : W_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{Q}_\ell'\text{-algèbres}}(B') ,$$

tel que, si $w \in W_K$, on ait $\rho_0(w) \cdot N = p^{\alpha(w)} \cdot N \cdot \rho_0(w)$ et, si $h \in H \in \mathcal{H}$, $\rho_0(w^{-1}) h \rho_0(w) \in H$.

Si $\ell \neq p$, on prend $B' = B$ avec l'action naturelle de $I_K \subset G_K$, $N = N_t$ (si $N : B \to B$ est l'opérateur déjà défini, on a $Nb = N_t b \otimes t^{-1}$, pour tout $b \in B$) et ρ_0 étant obtenu en composant l'inclusion de W_K dans G_K avec l'action naturelle de G_K.

Si $\ell = p$, c'est un tout petit peu plus subtil : on prend $B' = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(B)$ (si v est comme au n° 2.2.3, on a $B' = B'_{cris} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(B_{cris})$) de sorte que φ est bijectif sur B'. L'action de I_K et celle de N sont induites par celles que l'on a sur B (on a $g(B') = B'$ pour tout $g \in I_K$ et $N(B') \subset B'$). Enfin ρ_0 est défini par $\rho_0(w) = \varphi^{-\alpha(w)}w$.

On récupère alors les structures que l'on cherche sur chaque $(B' \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} V)^H$ en faisant agir I_K, N et W sur $B' \otimes V$ par

$$g(b \otimes x) = gb \otimes gx, \quad N(b \otimes x) = Nb \otimes x \quad \text{et} \quad \rho_0(w)(b \otimes x) = \rho_0(w) \otimes w(x)\,.$$

Bien sûr, pour tout ℓ, on a aussi

$$\underline{W\widehat{D}}_{pst}(V) = \varinjlim_{H \in \mathcal{H}} (B \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} V)^H)\,,$$

mais, si $\ell = p$, seul les $\rho_0(w)$ pour $\alpha(w) \leq 0$ opèrent sur $B \otimes V$ (sur chaque $(B \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} V)^H$, ils induisent des bijections et on peut donc définir $\rho_0(w)$ pour $\alpha(w) > 0$ par $\rho_0(w) = (\rho_0(w^{-1})^{-1})$.

2.3.8. — Supposons $\ell \neq p$. Habituellement le dictionnaire entre représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables et ℓ-modules de Deligne se fait sans utiliser l'anneau $B_{st,\ell}$ (cf. [De73], lorsque k est fini) : choisissons un 1-cocycle continu

$$c \in Z^1_{cont}(G_K, \mathbf{Q}_\ell(1))$$

dont la classe dans $H^1_{cont}(G_K, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est la classe d'isomorphisme de l'extension

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_\ell(1) \longrightarrow V_{\ell,q} \longrightarrow \mathbf{Q}_\ell \longrightarrow 0\,.$$

Pour tout objet Δ de $\underline{Del}_\ell(G_K)$, N est un 0-cocycle continu de G_K à valeurs dans le $\mathbf{Q}_\ell[G_K]$-module des applications $\mathbf{Q}_\ell$-linéaires de Δ dans $\Delta(-1)$ qui s'identifie à $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}_\ell}(\Delta)(-1)$. Le cup-produit $N \cup c \in Z^1_{cont}(G_K, \mathrm{End}_{\mathbf{Q}_\ell}(\Delta))$;

comme son image est formée d'éléments nilpotents, on peut considérer le 1–cocycle

$$e^{N\cup c} : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta)\,.$$

Notons $\underline{V}_{\ell,q,c}(\Delta)$ le $\mathbb{Q}_\ell$–espace vectoriel Δ muni de l'action de G_K

$$\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta)$$

définie par $\rho(g) = g \circ e^{N\cup c}(g) = g \circ e^{(N\cup c)(g)}$. Si l'on choisit $t \in \mathbb{Q}_\ell(1)$ non nul, si l'on pose $c(g) = c_t(g)t$, pour tout $g \in G_K$, et si l'on note N_t l'endomorphisme nilpotent de Δ défini par $N\delta = N_t\delta \otimes t^{-1}$, on a $\rho(g) = \exp(c_t(g)N_t)$.

On peut considérer $\underline{V}_{\ell,q,c}$ comme un foncteur de $\underline{Del_\ell}(G_K)$ dans $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)$.

2.3.9. — Les foncteurs $\underline{V}_{\ell,q,c}$ et $\underline{V}_{\ell,pst}$ sont naturellement équivalents. Plus précisément, se donner c revient à se donner une section $\mathbb{Q}_\ell$–linéaire $s : \mathbb{Q}_\ell \to V_{\ell,q}$ de la projection canonique de $V_{\ell,q}$ sur $\mathbb{Q}_\ell$ (et alors $c(g) = g(s(1)) - s(1)$, pour tout $g \in G_K$). Posons $\beta = s(1) \otimes t^{-1} \in V_{\ell,q}(-1)$ (où t est comme ci–dessus).

Soient Δ un objet de $\underline{Del_\ell}(G_K)$ et $V = \underline{V}_{\ell,st}(\Delta)$. On peut voir Δ et V comme des sous $\mathbb{Q}_\ell$–espaces vectoriels de $B \otimes \Delta = B \otimes V$. Soit alors $\eta : \Delta \to B \otimes \Delta$ l'application définie par

$$\eta(\delta) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\beta^i}{i!} \cdot N_t^i\delta\,.$$

Proposition. — *Avec les notations ci–dessus, η est une bijection de Δ sur V. Si ξ est la bijection réciproque, si $g \in G_K$ et $v \in V$,*

$$\xi(gv) = \rho(g)(\xi(v))\,.$$

Preuve : standard.

2.4. — Cohomologie étale ℓ–adique

2.4.1. — Rappelons, cf. [De73], n° 8.7) que si F est une extension d'un corps E de caractéristique 0 et si Δ est une représentation F–linéaire de $'W_K$, on dit que Δ **est définie sur** E si, étant donnés une E–structure D de Δ et un corps algébriquement clos Ω contenant F, la représentation Ω–linéaire de $'W_K$ que l'on déduit de Δ par extension des scalaires est isomorphe à ses conjuguées sous $\mathrm{Aut}(\Omega/E)$, (agissant sur $\Omega \otimes_F \Delta = \Omega \otimes_E D$ via $\tau(\omega \otimes d) = \tau(\omega) \otimes d)$; cette condition est indépendante des choix de D et Ω.

Si Δ **est rationnelle sur** E (i.e. s'il existe une représentation E–linéaire D de $'W_K$ telle que Δ soit isomorphe à $F \otimes_E D$), Δ est définie sur E mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

2.4.2. — Soient E un corps de caractéristique 0. Rappelons que (cf. [De73], dans le cas particulier où k est fini) si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'extensions de E et, pour chaque i, Δ_i est une représentation E_i–linéaire de $'W_K$, on dit que $(\Delta_i)_{i \in I}$ est **une famille compatibles de représentations de** $'W_K$ si chaque Δ_i est définie sur E et si, quelque soient $i, j \in I$, si Ω est un corps algébriquement clos contenant E_i et E_j les représentations Ω–linéaires de $'W_K$ déduites par extensions des scalaires de Δ_i et Δ_j sont isomorphes.

2.4.3. — Choisissons $q \in K$ qui n'est ni 0 ni une unité et, pour chaque $\ell \neq p$, un élément non nul $t_\ell \in \mathbb{Q}_\ell(1)$.

Soient X une variété algébrique propre et lisse sur K et $m \in \mathbb{N}$. Pour chaque ℓ,

$$H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

est une représentation ℓ–adique de G_K. On pose (cf. n° 2.3.7)

$$H^m_{pst,\ell}(X) = \underline{W\widehat{D}}_{pst}(H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

(ou, s'il y a risque de confusion, $H^m_{pst,\ell,q,t_\ell}(X)$ si $\ell \neq p$, $H^m_{pst,p,q}(X)$ si $\ell = p$).

CONJECTURE $C_{WD}(X, m)$. — *Supposons q et les t_ℓ choisis comme ci-dessus. Soient X une variété algébrique propre et lisse sur K et $m \in \mathbb{N}$. Alors les $H^m_{pst,\ell}(X)$ pour ℓ premier, forment un système compatible de représentations de $'W_K$.*

Il résulte des propositions 1.3.3 et 2.3.6 que cette conjecture est indépendante du choix de q et des t_ℓ.

Remarquons aussi que si k n'est pas fini, cette conjecture ne donne des renseignements que sur l'action du groupe d'inertie sur la cohomologie étale. Autrement dit, elle est équivalente à celle que l'on obtient en remplaçant K par P, complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$, et X par $X \otimes P$.

2.4.4. — On conjecture aussi que $H^m_{pst,\ell}$ est F–semi–simple (au sens de Deligne, [De73], n° 8.6), i.e. que l'action de W_K sur $H^m_{pst,\ell}(X)$ est semi–simple. Lorsque le corps résiduel n'est pas fini, W_K opère à travers un quotient fini et ceci est automatique. Lorsque k est fini, cela peut s'énoncer ainsi :

CONJECTURE $C_{\ell,ss}(X,m)$. — *Supposons k fini et choisissons $w_0 \in G_K$ tel que $w_0 \notin I_K$. Soient X une variété algébrique propre et lisse sur K et $m \in \mathbb{N}$. Alors l'automorphisme du $\mathbb{Q}'_\ell$–espace vectoriel $H^m_{pst,\ell}(X)$ donnant l'action de w_0 est semi–simple.*

2.4.5. — Rappelons ([De80], n° 1.6) que si Δ est une espace vectoriel sur un corps, muni d'un endomorphisme nilpotent N, la filtration de Jacobson–Morosov sur Δ est l'unique filtration finie croissante $(F^{JM}_i\Delta)_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $N(F^{JM}_i\Delta) \subset F^{JM}_{i-2}\Delta$ et que N induise un isomorphisme

$$N^i : Gr^{JM}_i\Delta \longrightarrow Gr^{JM}_{-i}\Delta\,.$$

CONJECTURE $C_{WD}(X,m)_{\text{faible}}$. — *Sous les hypothèses de la conjecture $C_{WD}(X,m)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le caractère de la représentation de W_K sur $Gr^{JM}_i H^m_{pst,\ell}(X)$ est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et indépendant de ℓ.*

On vérifie (cf. [De73], prop. 8.9) que $C_{WD}(X,m)_{\text{faible}} \Longrightarrow C_{WD}(W,m)$ et que l'on a l'implication inverse dès que l'action de W_K sur les $H^m_{pst,\ell}(X)$ est semi–simple, ce qui est automatique si le corps résiduel n'est pas fini.

2.4.6. — **Remarques** : i) Hormis ce qui se passe pour $\ell = p$, les conjectures ci–dessus sont "classiques" (cf. [De73] dans le cas où k est fini).

ii) Le théorème de monodromie ℓ–adique de Grothendieck (cf. [Exp. I]) nous assure que, si $\ell \neq p$, la représentation ℓ–adique $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est potentiellement semi–stable ; en particulier la dimension sur $\mathbb{Q}_\ell$ de $H^m_{pst,\ell}(X)$ est égale au m–ième nombre de Betti $b^m(X)$ de X et est indépendante de ℓ ; cette conjecture implique donc que $\dim_{P_0} H^m_{pst,p}(X) = b^m(X) = \dim_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ donc que la représentation p–adique $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ doit être potentiellement semi–stable, ce qui est la "conjecture de monodromie p–adique" (cf. [Exp. III], n° 6.2).

iii) Toutes ces conjectures sont connues lorsque X est une courbe ou une variété abélienne (cf. [Exp. VII] et [Fo94]).

iv) Lorsque X a bonne réduction, $C_{WD}(X,m)_{\text{faible}}$ est connue : pour tout ℓ, la représentation $H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ a bonne réduction et l'action de I_K sur $H^m_{\ell,pst}(X)$ est triviale tandis que $N = 0$; si k n'est pas fini, la conjecture ne dit rien de plus ; si k est fini, elle revient à affirmer que le polynôme caractéristique de Frobenius est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et indépendant de ℓ (cf. [De74] pour $\ell \neq p$, [KM74] pour $\ell = p$).

v) Nous renvoyons à [Exp.I], § 3 et [RZ82] pour les quelques résultats partiels connus dans le cas où X admet un modèle semi–stable sur l'anneau des entiers de K. Dans ce cas, I_K agit trivialement sur les $H^m_{\ell,pst}(X)$ pour $\ell \neq p$. Si en outre $\dim X < (p-1)/2$, les résultats de Kato [Exp.VI] impliquent que l'action de I_K est aussi triviale sur $H^m_{p,pst}(X)$ et que $\dim_{P_0} H^m_{pst,p}(X) = b^m(X)$.

vi) Utilisant la notion de "log–motif" sur un corps fini, nous reviendrons dans [Fo94] sur une version plus "motivique" des conjectures ci–dessus ainsi que sur des variantes avec poids et nous démontrerons ces conjectures pour les 1–motifs.

2.4.7. — Comme dans [ExpIII], n° 6.3, faisons semblant de savoir ce qu'est un **motif mixte sur K à coefficients dans $\mathbb{Q}$.**

Pour chaque nombre premier ℓ, un tel motif M a une réalisation ℓ–adique $H_\ell(M)$ de G_K dont la dimension $b(M)$ est indépendante de ℓ. Il est raisonnable de conjecturer que celle–ci est *potentiellement semi–stable* ; on dispose donc, pour chaque ℓ, d'une représentation $\mathbb{Q}'_\ell$–linéaire de dimension $b(M)$ de $'W_K$

$$H_{pst,\ell}(M) = \underline{W\widehat{D}}_{pst}(H_\ell(M)) .$$

On conjecture encore que *chaque $H_{pst,\ell}(M)$ est F–semi–simple, définie sur*

$\mathbb{Q}$ *et que les* $H_{pst,\ell}(M)$ *forment un système compatible de représentations de* $'W_K$. Bien sûr, ceci peut encore se réinterpréter comme au n° 2.4.4.

Remarquons que *ces conjectures sont des théorèmes pour les* 1*–motifs* (cf. [Exp.VII] et [Fo94]).

BIBLIOGRAPHIE

[BK90] S. BLOCH and K. KATO. — *L-functions and Tamagawa numbers of motives,* in the Grothendieck Festschrift, vol. 1, Prog. in Math. 86, Birkhaüser, Boston (1990), 333–400.

[De73] P. DELIGNE. — *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L,* in Modular Functions of One Variable, vol. 2, Lecture Notes in Math. 349, Springer (1973), 501–595.

[De74] P. DELIGNE. — *La conjecture de Weil I,* Pub. Math. I.H.E.S. 43 (1974), 273–307.

[De80] P. DELIGNE. — *La conjecture de Weil II,* Pub. Math. I.H.E.S. 52 (1980), 137–252.

[De90] P. DELIGNE. — *Catégories tannakiennes,* in The Grothendieck Festschrift, vol. II, Birkhaüser, Boston (1990), 111–195.

[Fa89] G. FALTINGS. — *Crystalline cohomology and p-adic étale cohomology,* in Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins Univ. Press (1989), 25–80.

[Fo94] J.-M. FONTAINE. — Log-*motifs et* 1-*motifs,* en préparation.

[FM94] J.-M. FONTAINE and B. MAZUR. — *Geometric Galois representations,* en préparation.

[FP94] J.-M. FONTAINE et B. PERRIN-RIOU. — *Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L,* in Motives, Proceedings of the Seattle conference, à paraître.

[KM74] N. KATZ et W. MESSING. — *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields,* Inv. Math. 23 (1974), 73–77.

[RZ82] M. RAPOPORT und T. ZINK. — *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Characteristik,* Inv. Math. 68 (1982), 21–201.

[Se89] J.-P. SERRE. — *Abelian ℓ-adic Representations and Elliptic Curves,* 2ème éd., Addison–Wesley, Redwood City 1989.

[Exp.I] L. ILLUSIE. — *Autour du théorème de monodromie locale,* exposé I, dans ce volume.

[Exp.II] J.-M. FONTAINE. — *Le corps des périodes p-adiques,* exposé II, dans ce volume.

[Exp.III] J.-M. FONTAINE. — *Représentations p-adiques semi-stables,* exposé III, dans ce volume.

[Exp.VI] K. KATO. — *P-adic étale cohomology in the semi-stable reduction case,* exposé VI, dans ce volume.

[Exp.VII] M. RAYNAUD. — 1-*Motifs et monodromie géométrique,* exposé VII, dans ce volume.

Jean–Marc Fontaine
URA D0752 du C.N.R.S.
Mathématiques, Bât. 425
Université Paris–Sud
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE

Exposé IX

THÉORÈME DE COMPARAISON p-ADIQUE POUR LES SCHÉMAS ABÉLIENS

I : CONSTRUCTION DE L'ACCOUPLEMENT DE PÉRIODES

par Jean-Pierre Wintenberger

Soit p un nombre premier. Soit A un schéma abélien sur $\mathrm{Spec}(R[1/p])$, où R est un anneau intègre et normal de corps des fractions de caractéristique 0, et soit A un schéma abélien sur $\mathrm{Spec}(R[1/p])$. Notons $H^1_{dR}(A/R[1/p])$ la cohomologie de de Rham relative de A sur $R[1/p]$. Soit F le corps des fractions de R, $\overline{F}$ une clôture algébrique de F, $\eta = \mathrm{Spec}(F)$, $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(\overline{F})$ et $T_p(A_{\overline{\eta}})$ le module de Tate de $A_{\overline{\eta}}$. Cette première partie a pour but de construire l'accouplement de périodes :

$$H^1_{dR}(A/R[1/p]) \times T_p(A_{\overline{\eta}}) \to B^+_{dR}(\widetilde{R}/R).$$

L'anneau $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R)$ est une version relative de l'anneau B^+_{dR} introduit par J.-M. Fontaine comme coefficients pour les théorèmes de comparaison p-adiques (voir [Fo-Ill] et [Ill] pour des rapports sur le sujet) ($\widetilde{R}$ est une sous-R-algèbre de la fermeture intégrale $\overline{R}$ de R dans $\overline{F}$, $\widetilde{R}$ devant vérifier certaines propriétés; voir 4). Dans la partie II, nous donnerons les propriétés que l'on est en droit d'attendre d'un tel accouplement (compatibilité à la dualité, à la connexion de Gauss-Manin) et nous en déduirons la compatibilité des cycles de Hodge absolus au théorème de comparaison p-adique pour les variétés abéliennes (compatibilité obtenue indépendamment par D. Blasius, par une autre méthode esquissée dans [Og]).

L'accouplement de périodes est un analogue p-adique de la version relative de l'accouplement : $H^1_{dR}(A/\mathbb{C}) \times H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$, définie par l'intégration des formes différentielles, pour A variété abélienne sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

La construction proposée suppose l'une des hypothèses suivantes :

1) R est un trait (donc de corps des fractions de caractéristique 0; la théorie n'a d'intérêt que si la caractéristique résiduelle est p) ;

2) $A \to \mathrm{Spec}(R[1/p])$ se prolonge en un schéma abélien $G \to \mathrm{Spec}(R)$;

3) $A \to \mathrm{Spec}(R[1/p])$ est muni d'une polarisation de degré premier à p et se prolonge en un schéma semi-abélien $G \to \mathrm{Spec}(R)$ (grâce à un argument de M. Raynaud, qui permet de se ramener au cas d'une polarisation principale, cf remarques 3) du 2.2.3. , et le lemme de Gabber, cf [De], après un changement de base propre et surjectif , on peut aussi faire la construction dans le cas où A est seulement supposé polarisé).

Sous la première hypothèse, la construction est entièrement due à J.-M. Fontaine et W. Messing. Elle utilise l'extension vectorielle universelle de A, reprenant en cela une idée de R.F. Coleman (note added in proof de [Col]).

La construction utilise des structures entières (i.e. sur $\mathrm{Spec}(R)$) de A. Si A se prolonge en un schéma abélien G sur $\mathrm{Spec}(R)$, on utilise G comme structure entière. Si R est un trait, J.-M. Fontaine et W. Messing utilisent un modèle propre et plat A_o de A sur $\mathrm{Spec}(R)$, et le critère valuatif de propreté pour prolonger les sections de torsion de A à $\mathrm{Spec}(\overline{R})$. Pour effectuer la construction sous l'hypothèse 3, nous dégageons la notion de section contrôlée par une famille finie de modèles entiers d'ouverts de A. Nous voyons cette notion comme une notion relative d'ensemble borné (remarque 2 du 2.1.3). Nous prouvons que toutes les sections de torsion de A sont contrôlées par la même famille finie de modèles entiers d'ouverts de A (th. 2.2.2. et remarque

3) du 2.2.3.). Pour ce faire, nous utilisons que, grâce à G. Faltings, les restrictions de G à certains sous-schémas formels de Spec(R) admettent une uniformisation à la Mumford ([Mum 72]) : nous contrôlons les dénominateurs des valeurs aux sections de torsion de fonctions rationnelles quotients de deux fonctions thêta. Pour une autre construction de l'accouplement de périodes, utilisant les fonctions thêta, dans le cas où la base est un trait, voir P. Colmez ([Colm]).

Une version relative du théorème de comparaison p-adique est donnée dans [Fa 90]. Pour le cas des modules des variétés abéliennes, voir [Fa Ch] p. 241 et [Fa 92] n° 5.1 : la relation entre ces derniers résultats et les nôtres n'est pas claire pour nous.

Voici le plan de notre travail. Dans le 1, nous rappelons brièvement la construction des épaississements p-adiques universels et de $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R)$ (voir aussi [Fo]). Notre construction diffère de celle utilisée dans [Fa 90] en ceci que, d'une part elle suppose que l'élévation à la puissance p est surjective dans $\widetilde{R}/p\widetilde{R}$ et que d'autre part, $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R)$ est naturellement une $R[1/p]$-algèbre (remarques 2 et 3 du 4.2). Dans le 2, nous développons notre théorie des sections contrôlées dans un cadre plus général que celui dont nous avons besoin : $G \to \mathrm{Spec}(R)$ est un schéma semi-abélien principalement polarisé qui est un schéma abélien au-dessus de Spec($R[1/q]$) (seul le cas où $q = p$ est utilisé). L'objet du 3 est de nous fournir les outils pour remonter les sections de torsion de A en un sous-groupe borné de sections de l'extension vectorielle universelle de A : cela nous permet, dans le 4, de mettre en œuvre la construction de J.-M. Fontaine et W. Messing.

Je remercie J.-M. Fontaine et W. Messing de m'avoir expliqué leur construction de l'accouplement de périodes dans le cas d'un trait. Je remercie aussi M. Raynaud pour les nombreuses conversations que nous avons eues. Il s'agit d'une version remaniée selon les conseils du referee que je remercie pour ceux-ci. Mes remerciements vont aussi à Mme Bonnardel qui s'est chargée de la frappe du manuscrit.

Dans tout ce qui suit, si G est un (schéma en) groupe(s) et n un entier, on note G_n le noyau de la multiplication par n dans G ; on désigne par G_{tor} le système inductif des G_n.

Signalons que dans 2 et 3, nous notons q en indice du symbole d'un anneau ou d'un schéma, l'anneau localisé pour la partie multiplicative engendrée par q et le sous-schéma ouvert complémentaire du fermé $q = 0$. Dans 1 et 4, pour $q = p$, nous prenons la notation $[1/p]$. Cette incohérence provient de ce qu'il nous est difficile de noter $\mathbb{Z}_p$ l'anneau $\mathbb{Z}[1/p]$ et de ne pas alléger nos notations dans les 2 et 3.

1. **Epaissisements p-adiques universels ;** $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R)$.

2. **Contrôle des sections de torsion d'un schéma abélien.**

2.1. **Définitions.**

2.2. **Enoncé du théorème.**

Démonstration du théorème :

2.3. **Construction des modèles entiers .**

2.4. **Rappels sur l'uniformisation des schémas abéliens** ([Fa Ch]) ; **évaluation des fonctions thêta aux sections de torsion.**

2.5. **Contrôle des dénominateurs de valeurs de quotients de fonctions thêta en certaines sections de torsion.**

2.6. **Fin de la démonstration du théorème.**

3. **Relèvements de sections contrôlées.**

3.1. **Cas des torseurs sous un schéma vectoriel.**

3.2. **Cas d'une extension d'un schéma en groupes par un schéma vectoriel.**

3.3. **Epaississement de la base.**

3.4. **Epaississement de la base : cas des groupes.**

3.5. **Cas mixte.**

4. **Construction de l'accouplement de périodes.**

1. Epaissisements p-adiques universels (voir aussi [Fo]); $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R)$.

1.1.

1.1.1. Soit $\widetilde{R}$ un anneau (commutatif unitaire). On note $\mathcal{R}(\widetilde{R})$ l'anneau limite projective des $(\widetilde{R}/p\widetilde{R})_n$, $n \in \mathbb{N}$, où $(\widetilde{R}/p\widetilde{R})_n = \widetilde{R}/p\widetilde{R}$ et où $(\widetilde{R}/p\widetilde{R})_{n+1} \to (\widetilde{R}/p\widetilde{R})_n$ est l'élévation à la puissance p. L'anneau $\mathcal{R}(\widetilde{R})$ est parfait de caractéristique p.

Soit $\widehat{\widetilde{R}}$ le séparé complété de $\widetilde{R}$ pour la topologie p-adique. Si $x = (\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}(\widetilde{R})$, et si, pour tout n, x_n est un relèvement de $\overline{x_n}$ dans $\widetilde{R}$, pour tout n, la suite $(x_m^{p^{m-n}})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\widehat{x}_n$ de $\widehat{\widetilde{R}}$, qui ne dépend pas du choix des relèvements. Si à x on associe la suite $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient un isomorphisme du monoïde multiplicatif $(\mathcal{R}(\widetilde{R}), \times)$ sur celui des suites $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\widehat{\widetilde{R}}$ vérifiant $\widehat{x}^p_{n+1} = \widehat{x}_n$. Comme $\widehat{\widetilde{R}}/p\widehat{\widetilde{R}} \simeq \widetilde{R}/p\widetilde{R}$, on a $\mathcal{R}(\widetilde{R}) \simeq \mathcal{R}(\widehat{\widetilde{R}})$.

Plus généralement, *soit $E \to \widehat{\widetilde{R}}$ un épaississement p-adique de $\widehat{\widetilde{R}}$ (d'ordre e)*, i.e. E est un anneau séparé et complet pour la topologie p-adique et $E \to \widehat{\widetilde{R}}$ un homomorphisme surjectif dont le noyau I vérifie $I^{e+1} = (0)$. On vérifie sans peine que, si $(\overline{x}_n) \in \mathcal{R}(\widetilde{R})$ et si x_n est pour tout n, un relèvement de $\overline{x}_n$ dans E, alors pour tout n, la suite $(x_m^{p^{m-n}})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de E qui ne dépend pas du choix des relèvements. On en déduit que l'homomorphisme naturel $\mathcal{R}(E) \to \mathcal{R}(\widehat{\widetilde{R}}) \simeq \mathcal{R}(\widetilde{R})$ est un isomorphisme.

1.1.2. Soit $W(\mathcal{R}(\widetilde{R}))$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathcal{R}(\widetilde{R})$. Comme $\mathcal{R}(\widetilde{R})$ est parfait, si à $x \in \mathcal{R}(\widetilde{R})$, on associe la suite des représentants de Teichmüller $r(x^{1/p^n}) \in W(\mathcal{R}(\widetilde{R}))$, on obtient un isomorphisme naturel de $\mathcal{R}(\widetilde{R})$ sur $\mathcal{R}(W(\mathcal{R}(\widetilde{R})))$.

Si $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W(\mathcal{R}(\widetilde{R}))$, on pose $\Theta(\underline{x}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p^n(\widehat{x_n})_n \in \widehat{\widetilde{R}}$.

L'application $\Theta : W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \to \widehat{\widetilde{R}}$ est un homomorphisme d'anneaux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Theta \bmod .p^{n+1}$ est le composé des deux homomorphismes d'anneaux :

- $W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \to W_n(\widetilde{R}/p\widetilde{R})$, qui à $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe $((\overline{x_0})_n, \ldots, (\overline{x_n})_n)$,

- $W_n(\widetilde{R}/p\widetilde{R}) \to \widetilde{R}/p^{n+1}\widetilde{R}$, qui à $(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ associe $x_0^{p^n} + px_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n x_n$, où $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des relèvements quelconques dans $\widetilde{R}/p^{n+1}\widetilde{R}$ de $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$.

L'homomorphisme Θ est caractérisé par le fait qu'il induit l'isomorphisme naturel de $\mathcal{R}(W(\mathcal{R}(\widetilde{R})))$ sur $\mathcal{R}(\widetilde{R})$. Il en résulte que, si E est un épaississement p-adique de $\widehat{\widetilde{R}}$, l'homomorphisme $W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \xrightarrow{\sim} W(\mathcal{R}(E))) \to E$ est l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \arrow[d] \arrow[dr, "\Theta"] & & \\
E \arrow[r] & \widehat{\widetilde{R}} \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Si l'élévation à la puissance p est surjective dans $\widetilde{R}/p\widetilde{R}$, Θ est surjectif. On voit alors que le quotient de $W(\mathcal{R}(\widetilde{R}))$ par l'adhérence de $(\mathrm{Ker}\ \Theta)^{e+1}$ dans $W(\mathcal{R}(\widetilde{R}))$ (pour la topologie p-adique) est un épaississement p-adique universel d'ordre e de $\widehat{\widetilde{R}}$.

Dans toute la suite du 1, on suppose que l'élévation à la puissance p est surjective dans $\widetilde{R}/p\widetilde{R}$.

1.1.3. Soit R un anneau et supposons $\widetilde{R}$ muni d'une structure de R-algèbre. On appelle *R-épaississement p-adique de* $\widehat{\widetilde{R}}$ un épaississement

p-adique $E \to \widehat{\widetilde{R}}$ de $\widehat{\widetilde{R}}$, tel que E soit muni d'une structure de R-algèbre et que $E \to \widehat{\widetilde{R}}$ soit un R-homomorphisme. Le séparé complété de $(W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \otimes R)/(\mathrm{Ker}\,\Theta \otimes id)^{e+1}$ pour la topologie p-adique, muni du R-homomorphisme sur $\widehat{\widetilde{R}}$ défini par Θ, est un R-épaississement p-adique universel de $\widehat{\widetilde{R}}$ d'ordre e.

1.1.4. Supposons $\widetilde{R}$ sans p-torsion. Notons $\mathcal{W}_e$ le quotient de $(W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \otimes R)/(\mathrm{Ker}\ \Theta \otimes id)^{e+1}$ par sa p-torsion et $\mathcal{I}_e = \mathrm{Ker}(\mathcal{W}_e \to \widehat{\widetilde{R}})$. Comme $\widehat{\widetilde{R}}$ est sans p-torsion, on a :

$$\mathcal{I}_e = \mathrm{Ker}(\mathcal{W}_e \to \widehat{\widetilde{R}})[1/p] \cap \mathcal{W}_e \ ;$$

De plus : $(\mathcal{I}_e)^{e+1} = (0)$.

Notons $\widehat{\mathcal{W}_e}$ et $\widehat{\mathcal{I}}_e$ les séparés complétés de $\mathcal{W}_e$ et $\mathcal{I}_e$ respectivement pour la topologie p-adique. Comme $\widehat{\widetilde{R}}$ est sans p-torsion, on a la suite exacte :

$$0 \to \widehat{\mathcal{I}}_e \to \widehat{\mathcal{W}_e} \to \widehat{\widetilde{R}} \to 0 \ ,$$

et $(\widehat{\mathcal{I}}_e)^{e+1} = (0)$. On voit alors que $\widehat{\mathcal{W}_e} \to \widehat{\widetilde{R}}$ est un objet universel dans la catégorie des R-épaississement p-adiques de $\widehat{\widetilde{R}}$ d'ordre e qui sont sans p-torsion. On pose :

$$B^+_{dR}(\widetilde{R}/R) = \varprojlim_{e \in \mathbb{N}} (\widehat{\mathcal{W}_e}[1/p]) \ .$$

1.1.5. Remarques.

1) Soit k un anneau parfait de caractéristique p. Notons W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et supposons donnée sur R une structure de W- algèbre. Alors, comme $\mathcal{R}(W) = k$, il résulte du 1.1.2 que W est formellement étale (pour la topologie p-adique) sur l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers

p-adiques. Si E est un épaississement p-adique de $\hat{\tilde{R}}$, on voit alors que E est naturellement muni d'une structure de W-algèbre et dans le 1.1.3 et le 1.1.4, on peut remplacer $W(\mathcal{R}(\tilde{R})) \otimes R$ par $W(\mathcal{R}(\tilde{R})) \otimes_W R$.

2) Soit R' une R-algèbre formellement étale pour la topologie p-adique et supposons donnée sur $\tilde{R}$ une structure de R'-algèbre prolongeant sa structure de R-algèbre. Alors les catégories des R et des R'-épaississements p-adiques de $\hat{\tilde{R}}$ s'identifient. En particulier, $B^+_{dR}(\tilde{R}/R) = B^+_{dR}(\tilde{R}/R')$, (si $\tilde{R}$ est sans p-torsion).

3) Supposons $\tilde{R}$ sans p-torsion. Soit R' une R-algèbre finie telle que $R'[1/p]$ soit étale sur $R[1/p]$, et supposons donnée sur $\tilde{R}$ une structure de R'-algèbre prolongeant sa structure de R-algèbre. Alors l'homomorphisme naturel $B^+_{dR}(\tilde{R}/R) \to B^+_{dR}(\tilde{R}/R')$ est un isomorphisme. Soit, en effet, e un entier et notons $\widehat{\mathcal{W}}_{eR}$ (resp. $\widehat{\mathcal{W}}_{eR'}$) le R-épaississement (resp. le R'-épaississement) p-adique universel d'ordre e parmi ceux qui sont sans p-torsion (1.1.4)). Construisons un homomorphisme $\widehat{\mathcal{W}}_{eR'}[1/p] \to \widehat{\mathcal{W}}_{eR}[1/p]$ inverse de l'homomorphisme naturel. Comme $R'[1/p]$ est étale sur $R[1/p]$, la structure de $R'[1/p]$-algèbre sur $\hat{\tilde{R}}$ $[1/p]$ se remonte de manière unique à $\widehat{\mathcal{W}}_{eR}[1/p]$. Pour tout entier a, notons $\widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_{eR}$ le R-épaississement p-adique de $\hat{\tilde{R}}$:

$$\widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_{eR} = \widehat{\mathcal{W}}_{eR} + p^{-a}F^1\widehat{\mathcal{W}}_{eR} + \cdots + p^{-ae}F^e\widehat{\mathcal{W}}_{eR} \ ,$$

où, pour tout i, $F^i\widehat{\mathcal{W}}_{eR}$ est l'adhérence pour la topologie p-adique dans $\widehat{\mathcal{W}}_{eR}$ de la puissance i-ème du noyau de $\widehat{\mathcal{W}}_{eR} \to \hat{\tilde{R}}$. Alors comme R' est finie sur R, pour a suffisamment grand, l'image de R' dans $\widehat{\mathcal{W}}_{eR}$ est contenue dans $\widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_{eR}$. Cela munit $\widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_{eR}$ d'une structure de R'-algèbre remontant celle de $\hat{\tilde{R}}$ et fournit un homomorphisme $\widehat{W}_{eR'} \to \widehat{W}^{(a)}_{eR}$, d'où un homomorphisme de $B^+_{dR}(\tilde{R}/R')$ dans $B^+_{dR}(\tilde{R}/R)$. On en déduit aisément que $B^+_{dR}(\tilde{R}/R) \simeq B^+_{dR}(\tilde{R}/R')$.

2. Contrôle des sections de torsion d'un schéma abélien.

Dans tout le 2, S est un schéma et q un élément de $\Gamma(S, O_S)$ qui n'est pas diviseur de 0 dans O_S. Pour tout S-schéma S', on note S'_q le sous-schéma ouvert de S' complémentaire du fermé $q = 0$.

2.1. Définitions.

2.1.1. Si X est un S_q-schéma séparé et de type fini, un *S-modèle entier de X* est la donnée d'un S-schéma séparé et de type fini X_o tel que O_{X_o} soit sans q-torsion avec un isomorphisme $(X_o)_q \simeq X$.

2.1.2. Soit X un S_q-schéma séparé et de type fini. Soit $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille *finie* d'ouverts de X et pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $U_{\lambda,0}$ un S-modèle entier de U_λ (on ne demande pas que les $U_{\lambda,0}$ se recollent en un S-modèle entier de X). Si S' est un S-schéma avec q non diviseur de 0 dans $O_{S'}$, et si $z : S'_q \to X$ est une section de X, on dit que $(U_{\lambda,0})_{\lambda \in \Lambda}$ *contrôle* z s'il existe un recouvrement ouvert $(S'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de S' et, pour chaque λ, une section $S'_\lambda \to U_{\lambda,0}$ de $U_{\lambda,0}$ qui prolonge la restriction de z à $(S'_\lambda)_q$.

2.1.3. Remarques.

1) a) Supposons que, pour chaque λ, $U_{\lambda,0} = X_o$ pour un S-modèle entier X_o de X. Alors, comme q est non diviseur de 0 dans $O_{S'}$, on voit facilement que la section $z : S'_q \to X_q$ est contrôlée par $(U_{\lambda,0})$ si et seulement si elle provient d'une morphisme de S' dans X_o.

b) Comme q est non diviseur de 0 dans $O_{S'}$ et que les $U_{\lambda,0}$ sont séparés sur S, on voit facilement que la section $S'_\lambda \to U_{\lambda,0}$ est uniquement déterminée par sa restriction à $(S'_\lambda)_q$.

c) Comme les $U_{\lambda,0}$ sont de type fini sur S, on voit facilement que $z : S'_q \to X_q$ est contrôlée par $(U_{\lambda,0})_{\lambda \in \Lambda}$, si et seulement si, pour tout $s' \in S'$, il existe $\lambda \in \Lambda$ et un morphisme $z_{s'} : \mathrm{Spec}(O_{S',s'}) \to U_{\lambda,0}$ tel que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(0_{S',s'})_q$ provienne de $z_{s'}$ (on a noté $O_{S',s'}$ l'anneau local de S'

en s').

2) Soit V un anneau de valuation discrète. Notons K son corps des fractions, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $\overline{V}$ la fermeture intégrale de V dans $\overline{K}$. Prenons $S = \mathrm{Spec}(V)$, $S' = \mathrm{Spec}(\overline{V})$ et pour q une uniformisante de V.

Soit Δ un sous-ensemble de $X(\overline{K})$. Alors, pour qu'il existe $(U_{\lambda,0})_{\lambda\in\Lambda}$ contrôlant tous les éléments de Δ, il faut et il suffit que Δ soit borné dans $X(\overline{K})$, au sens de [BLR] n° 1.1.

Si X est la fibre générique d'un V-schéma propre et plat X_o, il résulte du critère valuatif de propreté que X_o contrôle tout élément de $X(\overline{K})$. Si X est projectif, on peut prendre pour X_o l'adhérence schématique de X dans $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K \hookrightarrow \mathbb{P}^n_V$.

3) Avec V et q comme dans 2), prenons $S = \mathrm{Spec}(V[T])$ et $X = S_q \times \mathbb{P}^1$. Notons $R = V[T]$, $X = \mathrm{Spec}(R_q[Z]) \cup \mathrm{Spec}(R_q[Z^{-1}])$, $X = U_1 \cup U_2$, et pour chaque entier a,

$$U_{1,0}^{(a)} = \mathrm{Spec}(R[q^a Z]),\ U_{2,0}^{(a)} = \mathrm{Spec}(R[q^a Z^{-1}])\ .$$

Comme R est factoriel, on voit facilement que les sections z de X qui sont contrôlées par $(U_{\lambda,0}^{(a)})_{\lambda\in 1,2}$ sont 0, ∞, et les $z \in \mathrm{Frac}(R)$ tels que $z = q^{a'} z_1/z_2$ avec $-a \leq a' \leq a$, z_1 et z_2 éléments de R non divisibles par q, et z_1 et z_2 fortement étrangers i.e. $z_1 R + z_2 R = R$. En particulier $T/(T-q)$ définit une section de X qui n'est pas contrôlée par $(U_{\lambda,0}^{(a)})_{\lambda\in 1,2}$ pour aucun a.

4) Supposons S et X affines et soit Δ un ensemble de sections de $X \to S_q$. Alors, pour qu'il existe $(U_{\lambda,0})_{\lambda\in\Lambda}$ contrôlant tous les éléments de Δ, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\text{(I)} \qquad \forall f \in \Gamma(X, O_X)\ \exists a \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \Delta,\ q^a f(z) \in \Gamma(S, O_S).$$

De plus, si c'est le cas, il existe $(U_{\lambda,0})_{\lambda\in\Lambda}$ réduit à un S-modèle entier de X qui contrôle tous les éléments de Δ.

En effet, supposons d'abord qu'il existe $(U_{\lambda,0})_{\lambda\in\Lambda}$ contrôlant tous les éléments de Δ. On peut supposer que les $U_{\lambda,0}$ sont affines, $U_{\lambda,0} = \mathrm{Spec}(\Gamma_\lambda)$.

Soit $f \in \Gamma(X, O_X)$. Il existe un entier a tel que, si $f_{|U\lambda}$ est la restriction de f à U_λ, on ait, pour tout λ, $q^a\ f_{|U_\lambda} \in \Gamma_\lambda$. Soit $z \in \Delta$. Comme O_S est sans q-torsion et que $q^a f(z) \in \Gamma(S_\lambda, O_S)$ pour tout λ, on a bien $q^a f(z) \in \Gamma(S, O_S)$.

Réciproquement, supposons que l'on ait (I). Soit f_i un ensemble fini de générateurs de la $\Gamma(S, O_S)_q$-algèbre $\Gamma(X, O_X)$. Si, pour chaque i, a_i est un entier tel que $q^{a_i} f_i(z) \in \Gamma(S, O_S)$ pour tout $z \in \Delta$, on voit que la sous-algèbre de la $\Gamma(S, O_S)$-algèbre $\Gamma(X, O_X)$ engendrée par les $q^{a_i} f_i$ définit bien un modèle entier X_0 de X qui contrôle tous les éléments de Δ.

2.2. Énoncé du théorème.

On suppose S normal et intègre. Soit $A \to S_q$ un schéma abélien de dimension d. Soit $\eta = \mathrm{Spec}(F)$ le point générique de S, $\overline{F}_{alg}$ une clôture algébrique de F et $\overline{S}_{alg}$ le normalisé de S dans $\mathrm{Spec}(\overline{F}_{alg})$. Comme, pour tout entier n, le noyau A_n de la multiplication par n dans A est fini sur S_q, toute section de torsion de A sur $\mathrm{Spec}(\overline{F}_{alg})$ se prolonge à $(\overline{S}_{alg})_q$. Soient $\overline{F}$ la clôture séparable de F dans $\overline{F}_{alg}$ et $\overline{S}$ le normalisé de S dans $\mathrm{Spec}(\overline{F})$. Comme, pour tout entier n premier à la caractéristique de F, A_n est génériquement séparable, toute section de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F provient d'une section $\overline{S}_q \to A$.

2.2.1. REMARQUE. Si A se prolonge en un schéma abélien G sur S, (resp. si S est le spectre d'un trait et q en est une uniformisante), toute section de torsion se prolonge en une section $\overline{S}_{alg} \to G$ (resp. une section de $\overline{S}_{alg}$ dans un modèle propre et plat A_0 de A sur S, cf. remarque 2 du 2.1.3) ; toute section de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F se prolonge en une section $\overline{S} \to G$ (resp. $\overline{S} \to A_0$).

2.2.2. THÉORÈME. — *On suppose que :*

- S est noethérien, (rappelons que S est supposé normal et intègre) ;

- 2 est inversible dans $\Gamma(S_q, O_S)$,

- A est principalement polarisé et se prolonge en un schéma semi-abélien G sur S (à fibres connexes).

On suppose donné un nombre premier ℓ inversible dans $\Gamma(S, O_S)$.

Soit b un entier. Soit F_1 une extension finie et séparable de F contenue dans $\overline{F}$ telle que les éléments de $A_{8\ell^b}(\overline{F})$ soient rationnels sur F_1. Notons S_1 le normalisé de S dans $\mathrm{Spec}(F_1)$.

Alors, pour b suffisamment grand, il existe une famille finie de S_1-modèles entiers d'ouverts de $A \times_{S_q} (S_1)_q$ qui contrôle toute section de torsion de A sur $\overline{S}_q$ qui est tuée par un entier n premier à la caractéristique de F.

2.2.3. REMARQUES.

1) Sans l'hypothèse relative au nombre premier ℓ, le théorème entraîne que, localement sur S, pour la topologie définie par les morphismes étales et finis, il existe des modèles entiers contrôlant les sections de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F.

2) L'hypothèse que l'ordre des sections est premier à la caractéristique de F n'intervient qu'au 2.4.8, lorsqu'on utilise la finitude d'une clôture intégrale dans une extension séparable. Il est possible qu'un examen plus soigneux de la démonstration permette de se débarrasser de cette hypothèse.

3) (argument dû à M. Raynaud). Soit A et S comme dans l'énoncé du théorème, sauf qu'au lieu de supposer A principalement polarisé, on

suppose seulement A muni d'une polarisation de noyau d'ordre m premier à la caractéristique de F. Soit F_2 une extension finie et séparable de F contenue dans $\overline{F}$ telle que les éléments de $A_m(\overline{F})$ soient rationnels sur F_2. Notons S_2 la fermeture intégrale de S dans F_2. Alors, si m est inversible dans O_S, la conclusion du théorème reste vraie, après changement de base à S_2. Si m est seulement supposé premier à la caractéristique de F, il existe S_2' normal avec $S_2' \to S_2$, propre, birationnel, $S_2' \to S_2$ isomorphisme au dessus de l'ouvert où m est inversible, tel que la conclusion du théorème reste vraie après changement de base à $\overline{S_2'}$,$\overline{S_2'}$ désignant le normalisé de S_2' dans Spec$(\overline{F})$.

En effet, notons $\lambda : A \to A^*$ la polarisation. Soit L_η un faisceau inversible sur la fibre générique de A définissant λ. Soit N un sous-groupe de Ker$(\lambda)(\mathrm{F}_2)$, qui est isotrope maximal pour l'accouplement défini par L_η ([Mum 66]). Soit A'_η le quotient de A_η par N. Alors L_η provient d'un faisceau inversible L'_η sur A'_η et L'_η induit une polarisation principale sur A'_η. Soit $\overline{N}$ l'adhérence schématique de N dans $G \times_S S_2$. Le schéma $\overline{N}$ est quasi-fini sur S_2, puisque c'est un sous-schéma fermé du noyau $(G \times_S S_2)_m$ de la multiplication par m dans $G \times_S S_2$. Si m est inversible dans O_S, il est étale sur S_2, car $(G \times_S S_2)_m$ est, en tant que schéma sur S_2, isomorphe à une somme d'ouverts de S_2. Sans hypothèse sur m, grâce à la platification par éclatement de [Ra-Gr], il existe un éclatement $S_2'' \to S_2$ de S_2, qui est un isomorphisme sur l'ouvert où m est inversible, tel que le transformé strict $\overline{N''}$ de $\overline{N}$ par $S_2'' \to S_2$ soit plat sur S_2''. Soit S_2' le normalisé de S_2'' dans F_2, et $\overline{N'} = \overline{N''} \times_{S_2''} S_2'$. Alors, $\overline{N}$ (respectivement $\overline{N'}$), est un schéma en groupes quasi-fini et plat sur S_2 (respectivement S_2'). La relation de passage au quotient fppf qu'il définit sur le morphisme d'élévation à la puissance m $G \times_S S_2 \to G \times_S S_2$ (respectivement $G \times_S S_2' \to G \times_S S_2'$) est effective d'après le 5) du théorème 1 de [Ra]. Notons G' le quotient; c'est un schéma semi-abélien sur S_2 (respectivement S_2') qui prolonge A'_η et $A' = G'_q$ est un schéma abélien sur $(S_2)_q$ (respectivement $(S_2')_q$) qui est principalement polarisé car A'_η l'est. On peut donc lui appliquer le théorème. Pour b entier suffisamment grand, soit F_3 extension finie et séparable de F_2 contenue dans $\overline{F}$ telle que les éléments de $A'_{8\ell^b}(\overline{F})$ soient rationnels sur F_1 et désignons par S_3

(respectivement S_3') le normalisé de S_2 (respectivement S_2') dans $\operatorname{Spec}(F_3)$. Il existe une famille finie $(\mathcal{U}_i')$ de S_3-modèles (respectivement S_3'-modèles) entiers d'ouverts de A', qui contrôlent les sections de $A'_{\overline{F}}$ qui sont de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F. Il est facile de voir que les $(\mathcal{U}_i)$, normalisés des $(\mathcal{U}_i')$ dans A'_{F_3}, contrôlent bien les sections de torsion de $A_{\overline{F}}$ qui sont de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F.

Démonstration du théorème :

Par un argument de passage à la limite, on se ramène au cas où R est de type fini sur $\mathbf{Z}$, et donc excellent, ce que nous supposerons désormais.

2.3. Contruction des modèles entiers .

2.3.1. On peut clairement supposer S affine, $S = \operatorname{Spec}(R)$, $\overline{S} = \operatorname{Spec}(\overline{R})$. Soit F_1 une extension finie de F contenue dans $\overline{F}$ comme dans l'énoncé du théorème. Après extension des scalaires à F_1, A possède une structure symplectique de niveau $8\ell^b$, i.e., [Fa Ch] chap. 1. 1.8., un isomorphisme symplectique $A_{8\ell^b} \simeq (\mu_{8\ell^b})^d \times (\mathbb{Z}/8\ell^b)^d$, les racines de l'unité d'ordre $8\ell^b$ étant aussi rationnelles sur F_1. Choisissons une telle structure de niveau. Soit R_1 la fermeture intégrale de R dans F_1 ; l'isomorphisme symplectique $A_{8\ell^b} \simeq (\mu_{8\ell^b})^d \times (\mathbb{Z}/8\ell^b)^d$ se prolonge à $\operatorname{Spec}(R_1)_q$. Choisissons de même un isomorphisme $\mu_{8\ell^b} \simeq \mathbb{Z}/8\ell^b$ sur $\operatorname{Spec}(R_1)_q$.

Pour tout faisceau inversible relativement ample L_q' sur A, on note $H(L_q')$ le sous-groupe de A noyau de la polarisation $A \to A'$ associée à L_q' et $\mathcal{G}(L_q')$ le groupe des automorphismes de L_q' au-dessus des translations par les sections de $H(L_q')$ ([Mum 66] ou [MB 81]). On a donc la suite exacte :

$$1 \to \mathbb{G}_m \to \mathcal{G}(L_q') \to H(L_q') \to 1 \ .$$

Notons $\lambda : A \to A'$ la polarisation principale de A. Soit L_q' le faisceau inversible rigidifié sur A image inverse par (id, λ) du fibré de Poincaré sur $A \times A'$. Le faisceau inversible L_q' est donc totalement symétrique et $H(L_q') \simeq A_2$. L'isomorphisme symplectique, après extension des scalaires à

$\mathrm{Spec}(R_1)_q$, de A_8 avec $(\mu_8)^d \times (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^d$ induit sur $L_q'^2$ une θ-structure symétrique ([Mum 66]), i.e. un isomorphisme de $\mathcal{G}(L_q'^2)$, muni de l'automorphisme δ_{-1} induit par la symétrie, sur le groupe théta standard muni de son involution. Cette θ-structure permet de définir une section $A_2 \to \mathcal{G}(L_q'^2)$, dont l'image est formée de sections fixes par δ_{-1}. Cette section permet de descendre $L_q'^2$ en L_q symétrique avec $L_q'^2 \simeq [2]^*L_q \simeq L_q^4$ ([MB 81]). D'après un théorème de Moret-Bailly, le faisceau inversible rigidifié symétrique L_q se prolonge de manière unique en un faisceau inversible rigidifié L sur G ([MB] th. 3.3 du chap. II).

2.3.2. Soit $k = \ell$ si $\ell \neq 2$ et $k = 4$ si $\ell = 2$; supposons b choisi tel que $\ell^b \geq k$.

LEMME. — *Après extension des scalaires à* $\mathrm{Spec}(R_1)_q$, *le* $\mathbb{G}_m$*-torseur* $\mathcal{G}(L_q^k) \to H(L_q^k) = A_k$ *est trivial.*

Démonstration. : Après extension des scalaires à $\mathrm{Spec}(R_1)_q$, on a un isomorphisme symplectique $A_{4k} \simeq (\mu_{4k})^d \times (\mathbb{Z}/4k\mathbb{Z})^d$. Cet isomorphisme définit une théta-structure symétrique sur le faisceau inversible rigidifié totalement symétrique L_q^{2k} ([Mum 66]), donc une trivialisation du $\mathbb{G}_m$-torseur $\mathcal{G}(L_q^{2k})$ sur A_{2k}. Comme on dispose d'un homomorphisme $\eta_2 : \mathcal{G}(L_q^{2k}) \to \mathcal{G}(L_q^k)$ coiffant la multiplication par 2 ([Mum 66]), on voit que l'on peut trivialiser le $\mathbb{G}_m$-torseur $\mathcal{G}(L_q^k) \to A_k$.

2.3.3. Après extension des scalaires à $\mathrm{Spec}(R_1)_q$, on a $A_k \simeq (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^d \times (\mu_k)^d \simeq (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{2d}$. Pour chaque $\xi \in A((R_1)_q)_k$, on note g_ξ une section de $\mathcal{G}(L_q^k)$ au-dessus de ξ. Si θ est un élément non nul de $\Gamma(A, L_q)$, on pose :

$$X_\xi = g_\xi(\theta^k)/\theta^k \ .$$

On définit ainsi une fonction rationnelle sur $G \times_S \mathrm{Spec}(R_1)$, qui ne dépend pas du choix de θ, et le choix de g_ξ la définit à une unité de $(R_1)_q$ près.

2.3.4. Soit a un entier que nous choisirons suffisamment grand. Pour ξ' une section de $A((R_1)_q)_{\ell^b}$, notons $t^*_{\xi'}(X_\xi)$ la fonction rationnelle sur $G \times_S \mathrm{Spec}(R_1)$ déduite de X_ξ par translation par ξ'. Notons $\Gamma^{(a)}_{\xi'}$ la sous-R_1-algèbre du corps des fractions rationnelles de $G \times_S \mathrm{Spec}(R_1)$ engendrée par les $q^a t^*_{\xi'}(X_\xi)$, ξ décrivant $A((R_1)_q)_k$. Comme L^k_q est relativement très ample et que les $g_\xi(\theta^k)$ engendrent $\Gamma(A, L^k_q)$ ([M 66] th. 2), $\mathrm{Spec}(\Gamma^{(a)}_{\xi'})_q$ s'identifie à l'ouvert $A - t^*_{-\xi'}(\Theta_A)$, où Θ_A est le diviseur théta associé à L_q. La famille des $\mathrm{Spec}(\Gamma^{(a)}_{\xi'})$ forme une famille finie de modèles entiers d'ouverts de $A \times_{S_q} \mathrm{Spec}(R_1)_q$, indexée par les $\xi' \in A((R_1)_q)_{\ell^b}$.

Nous nous proposons de prouver que, pour a et b assez grand, cette famille de modèles entiers contrôlent les sections de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F. Pour ceci, nous montrons au prochain numéro comment évaluer aux sections de torsion les fonctions θ, à l'aide de leur développements de Fourier partiels, puis dans le numéro suivant, nous contrôlons les dénominateurs de certaines sections de torsion.

Exemple : Soit E la courbe elliptique de Tate $\mathbf{G}_{\mathrm{m}} \backslash q^{\mathbf{Z}}$ sur $R = \mathbf{Z}[[q]]$. Soient $\theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](z,\tau)$, $a, b \in \{0, \frac{1}{2}\}$, les séries théta usuelles :

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{\pi i (n+a)^2 \tau + 2\pi i (n+a)(z+b)}.$$

On voit facilement que le modèle entier engendré par les fonctions $\dfrac{\theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]}{\theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]}$, $a, b \in \{0, \frac{1}{2}\}$, $(a,b) \neq (0,0)$, contrôle toute section de torsion provenant d'une puissance fractionnaire q^α de q, avec $]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}[$. Les translatés par les points de ℓ^b-torsion, $b \geq 1$ si $\ell \neq 2$, $b \geq 2$ si $\ell = 2$, contrôlent toutes les sections de torsion.

2.4. Rappels sur l'uniformisation des schémas abéliens ([FaCh]) ; évaluation des fonctions thêta aux sections de torsion.

2.4.1. Dans tout le 2.4. , on reprend les notations du 2.3. et on se donne de plus un idéal I de R, $I = \sqrt{I}$, et tel que $\mathrm{Spec}(R/I)$ est connexe, tel que la dimension des sous-tores maximaux des fibres de G aux points de $\mathrm{Spec}(R/I)$ est constante (on note cette constante t). Comme $G_q \to \mathrm{Spec}(R_q)$ est un schéma abélien, si $t \neq 0$, on a $\mathrm{Spec}(R_q) \cap \mathrm{Spec}(R/I) = \emptyset$ et $q \in I$. On note $\widehat{R}$ le complété I-adique de R, de sorte que $\widehat{R}$ est encore intègre et normal, puisqu'on a supposé R excellent (cf début de la démonstration du théorème). On note $\widehat{I} = I\widehat{R}$, $\widehat{\eta}$ le point générique de $\mathrm{Spec}(\widehat{R})$, et $\widehat{F}$ le corps des fractions de $\widehat{R}$.

On s'intéresse à des propriétés qui sont vraies après restriction à un voisinage étale de $\mathrm{Spec}(R/I)$. Plus précisément, quand on localise, on remplace (R, I) par (R', I'), R' étale de type fini sur R, R' intègre, I' idéal de R', $I' = \sqrt{I'}$ tel que $\mathrm{Spec}(R'/I')$ est connexe d'image dans $\mathrm{Spec}(R)$ contenue dans $\mathrm{Spec}(R/I)$, et on peut trouver des $(R'_j, I'_j)_{j \in J}$, les (R'_j, I'_j) comme ci-dessus, J ensemble fini d'indices, tel que $\mathrm{Spec}(R/I)$ soit recouvert par les images des $\mathrm{Spec}(R'_j/I'_j)$.

2.4.2. Après localisation (au sens du numéro précédent) , on peut supposer que la partie torique de la fibre de G sur $\mathrm{Spec}(R/I)$ est déployée. Soit G_{for} le complété formel de G pour la topologie I-adique. Le schéma en groupes formel G_{for} s'algébrise en l'extension de Raynaud $\widetilde{G} \to \widehat{R}$ ([FaCh] chap. 2 §1) :

$$1 \to T \to \widetilde{G} \to \widetilde{A} \to 1 .$$

De même, pour le schéma semi-abélien G', qui prolonge le schéma abélien dual de A_η ([FaCh] chap.2 §2, [MB85] chap.4 th. 7.1.) :

$$1 \to T' \to \widetilde{G}' \to \widetilde{A}' \to 1 ,$$

et $\widetilde{A}'$ s'identifie au schéma abélien dual de $\widetilde{A}$. Notons X et Y les groupes de caractères de T et T' respectivement. La polarisation principale λ_L associée à L détermine une polarisation principale $\lambda_{\widetilde{A}} : \widetilde{A} \to \widetilde{A}'$ et un isomorphisme $\phi : Y \to X$. On note $c' : Y \to \widetilde{A}(\widehat{R})$ et $c : X \to \widetilde{A}'(\widehat{R})$ les homomorphismes opposés de ceux déterminés par les extensions de Raynaud $\widetilde{G}'$ et $\widetilde{G}$ respectivement (nous prenons le même signe que dans [FaCh] chap. 2 §5).

2.4.3. D'après [MB85] chap. 1 n. 7., après localisation, la restriction du torseur cubiste L_{for} à T_{for} est triviale. Choisissons en une trivialisation. Une telle trivialisation détermine un faisceau inversible $\mathcal{M}$ sur $\widetilde{A}$ tel que L_{for} s'identifie au complété formel de $\gamma^*(\mathcal{M})$, où on a désigné par γ la projection : $\widetilde{G} \to \widetilde{A}$ ([Br] ou [MB 85] chap. I n° 7). On pose $\widetilde{L} = \gamma^*(\mathcal{M})$. On a donc une action que l'on note $t \mapsto T_t^*$ du tore T sur $\widetilde{L}$, relevant l'action de T sur $\widetilde{G}$ par translations.

Soit m un entier ≥ 1. Pour chaque $\chi \in X$, on note :

$$\Gamma(\widetilde{G}, \widetilde{L}^m)_\chi = \{\theta \in \Gamma(\widetilde{G}, \widetilde{L}^m) | \forall t \in T,\ T_t^*(\theta) = \chi(t)\theta\} .$$

Alors, pour tout χ, $\Gamma(\widetilde{G}, \widetilde{L}^m)_\chi$ s'identifie au R-module localement libre de type fini $\Gamma(\tilde{A}, \mathcal{M}^m \otimes O_\chi)$, où O_χ est le faisceau inversible sur $\widetilde{A}$ des fonctions f sur $\widetilde{G}$ telles que $T_t^*(f) = \chi(t)f$ pour tout $t \in T$. Le $\widehat{R}$-module $\Gamma(\widehat{\widetilde{G}}, \widehat{\widetilde{L}}^m) = \Gamma(\widehat{G}, \widehat{L}^m)$ s'identifie au complété I-adique de $\oplus_{\chi \in X} \Gamma(\widetilde{G}, \widetilde{L}^m)_\chi$. Pour $\theta \in \Gamma(\widehat{G}, \widehat{L}^m)$, on note $\theta = \sum\limits_{\chi \in X} \theta_\chi$ la décomposition correspondante de θ.

Après localisation , on peut trivialiser $c'^*\mathcal{M}$. Choisissons une telle trivialisation. Notons $P_{\tilde{A}}$ le fibré de Poincaré sur $\widetilde{A} \times_S \widetilde{A}'$. Comme la biextension $(\mathrm{id}, \lambda_{\widetilde{A}})^*(P_{\tilde{A}})$ s'identifie à celle définie sur $m^*(\mathcal{M}) \otimes p_1^*(\mathcal{M}^{-1}) \otimes p_2^*(\mathcal{M}^{-1})$ ([FaCh] chap. 2 §2), une telle trivialisation définit une trivialisation symétrique de $(c' \times c)^* P_{\tilde{A}}$. Cette dernière trivialisation définit un relèvement de $c' : Y \to \widetilde{A}(\widehat{R})$ en $\widetilde{c}' : Y \to \widetilde{G}(\widehat{R})$. La trivialisation de $c'^*\mathcal{M}$ définit alors une action $\widetilde{c}'^*$ de Y sur $\widetilde{L}$ au-dessus de $\widetilde{c}'$ qui vérifie : $\phi(y)(t)\widetilde{c}_y'^* T_t^* = T_t^* \widetilde{c}_y'^*$ pour $y \in Y$ et $t \in T$.

Rappelons que l'on a désigné par $\widehat{F}$ le corps des fractions de $\widehat{R}$. Avec les simplifications d'écriture dues à ce que, comme la polarisation est principale, on a pu trivialiser $c'^*\mathcal{M}$ et $(c' \times c)^* P_{\tilde{A}}$ de façon compatible à ϕ, le théorème 5.1. du chap. 2 de [Fa Ch] dit qu'il existe une fonction $a : Y \to \widehat{F}^*$ et une forme bilinéaire $b : Y \times X \to \widehat{F}^*$ telles que, pour tout $\theta \in \Gamma(G, L^m)$, on ait :

$$\theta_{\chi + m\phi(y)} = a(y)^m b(y, \chi) \widetilde{c}_y'^*(\theta_\chi) .$$

De plus :

1) $a(0) = 1$,

2) pour y et $y' \in Y$, on a :

$$a(y + y') = b(y, \phi(y'))a(y)a(y'),$$

3) $b(y, \phi(y')) = b(y', \phi(y))$,

4) pour $y \neq 0$, $b(y, \phi(y)) \in \widehat{I}$,

5) pour $n \in \mathbb{N}$, $a(y) \in \widehat{I}^n$ pour presque tout y.

La fonction a mod.$\widehat{R}^*$ ne dépend pas du choix de la trivialisation de $c'^*\mathcal{M}$. Elle dépend du choix de $\mathcal{M}$: $a.\mathrm{mod}.\widehat{R}^*$ devient $y \mapsto a(y)b(y, \chi)$ mod $\widehat{R}^*$ si on remplace $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M} \otimes O_\chi$.

2.4.4. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des valuations de $\widehat{F}$ associées aux idéaux premiers de hauteur 1 de $\widehat{R}$. Si $v \in \mathcal{V}$, on note $a_v : Y \to \mathbb{Z}$ et $b_v : Y \times X \to \mathbb{Z}$ les fonctions $y \mapsto v(a(y))$ et $b_v(y, x) = v(b(y, x))$ respectivement. Les propriétés des fonctions a et b rappelées ci-dessus entraînent que :

1) $(y, y') \mapsto b_v(y, \phi(y'))$ est une forme bilinéaire symétrique positive; notons q_v la forme quadratique associée;

2) il existe une forme linéaire $\ell_v : Y \to \mathbb{Q}$ telle que :

$$a_v(y) = 1/2\ q_v(y) + \ell_v(y)$$

3) on a $q_v(y) = 0 \Longrightarrow \ell_v(y) = 0$ (cela résulte de ce que, grâce à 5) du numéro précédent, $a_v(ky)$ est ≥ 0 pour $|k|$ grand).

2.4.5. Montrons que a et b sont à valeurs dans $\widehat{R}_q{}^*$. Si $t = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $t \neq 0$ et donc $q \in I$ (2.4.1.). Notons $\mathcal{V}(q)$ l'ensemble fini des $v \in \mathcal{V}$ telles que $v(q) > 0$. Il s'agit de prouver que a_v et b_v sont identiquement nulles si $v \notin \mathcal{V}(q)$. Soit $v \in \mathcal{V} - \mathcal{V}(q)$ et soit $s(v)$

l'idéal premier de hauteur 1 de $\widehat{R}$ définissant v. On a $s(v) \in \mathrm{Spec}(\widehat{R}_q)$, donc $G_{s(v)}$ est un schéma abélien. On sait ([Fa Ch] cor. 5.11. du chap. III) que si $s \in \mathrm{Spec}(\widehat{R})$, on a :

$$1 \to (\widetilde{G}_s)_{\mathrm{tor}} \to (G_s)_{\mathrm{tor}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes Y_s \to 0$$

où $Y_s = \{y \in Y, b(y, \phi(y)) \in \widehat{R}_s{}^*\}$.

Pour tout entier n, on a :

$$rg((G_{s(v)})_n) = n^{2d}$$
$$rg((\widetilde{G}_{s(v)})_n) = n^{2d-t} \ ,$$

donc $Y_{s(v)} = Y$. On voit que b_v est bien identiquement nulle, et la propriété 3) du numéro précédent entraîne que a_v l'est aussi.

2.4.6. Notons ι_t le morphisme $Y \to T(\widehat{R}_q)$ défini par $b : Y \times X \to \widehat{R}_q{}^*$ et soit $\iota = \iota_t \times \tilde{c}' : Y \to \widetilde{G}(\widehat{R}_q)$. Soit n un entier. Alors $(G_n)_q$ s'identifie au noyau de la multiplication par n dans $\widetilde{G}_q/\iota(Y)$.

Plus précisément, pour m grand , on peut associer à (G, L^m) un modèle relativement complet $\widetilde{P} \to \mathrm{Spec}(\widehat{R})$, vérifiant entre autres propriétés (cf [Fa Ch] chap. III § 3) :

- $\widetilde{P}$ est localement de type fini (mais n'est pas de type fini); on a une immersion ouverte $\widetilde{G} \hookrightarrow \widetilde{P}$, l'action de Y sur $\widetilde{G}_q$ définie par ι se prolonge en une action de Y sur $\widetilde{P}$ que l'on note $y \mapsto S_y$, $\widetilde{L}^m$ se prolonge à $\widetilde{P}$ et S_y se relève en une action S_y^* sur $\widetilde{L}^m$, les actions T_t et T_t^* de T sur $\widetilde{G}$ et $\widetilde{L}^m$ se prolongent à $\widetilde{P}$; on a $\widetilde{G}_q = \widetilde{P}_q$ (reprendre la démonstration du corollaire 4.2 du chap. III de [Fa Ch] en remplaçant $\mathrm{Spec}(\widehat{R})_{\hat{\eta}}$ par $\mathrm{Spec}(\widehat{R})_q$)

- une immersion ouverte $G \hookrightarrow P$, P propre sur $\widehat{R}$, un morphisme $\pi : \widetilde{P}_{\mathrm{for}} \to P_{\mathrm{for}}$ qui identifie P_{for} avec $\widetilde{P}_{\mathrm{for}}/Y$ et un isomorphisme $\pi^*(L_{\mathrm{for}}) = \widetilde{L}_{\mathrm{for}}$; on a $G_q = P_q$ (cf. prop. 4.12 du chap. III de [Fa Ch]).

Notons G^* le schéma en groupes $\bigcup_{y \in Y} S_y(\widetilde{G}) \subset \widetilde{P}$ et soit $Z_y^{(n)}$ le produit fibré défini par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Z_y^{(n)} & \longrightarrow & G^* \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle n} \\ y : \mathrm{Spec}(\widehat{R}) & \longrightarrow & G^* \end{array} .$$

Alors, on a un isomorphisme de G_n avec le quotient de $\amalg_{y \in Y} Z_y^{(n)}$ par l'action naturelle de Y ([Fa Ch] th. 5.9 chap. III). Comme $(G^*)_q = \widetilde{G}_q$, cela justifie l'identification $(G_n)_q \approx (\widetilde{G}_q/\iota(Y))_n$.

2.4.7. Soit $\overline{\widehat{F}}$ une clôture séparable de $\widehat{F}$ et $\overline{\widehat{R}}$ la fermeture intégrale de $\widehat{R}$ dans $\overline{\widehat{F}}$. Notons $G(\overline{\widehat{R}}_q)_{\mathrm{tor}'}$ le groupe des sections de G sur $\overline{\widehat{R}}_q$ qui sont tuées par un entier premier à la caractéristique de $\widehat{F}$, $\widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ le sous-groupe de $\widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)$ formé des $\widetilde{z}$ tels qu'il existe $y \in Y$ et $n \in \mathbb{N}$, n premier à la caractéristique de $\widehat{F}$, avec $n\tilde{z} = \iota(y)$. Si $\tilde{z} \in \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$, on pose $\tilde{y}(\tilde{z}) = n^{-1}y \in Y \otimes \mathbb{Q}$. Il résulte de ce qui précède que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}} & \longrightarrow & G(\overline{\widehat{R}}_q)_{\mathrm{tor}'} & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\|{\scriptstyle id} & & \big\downarrow{\scriptstyle \tilde{y}} & & \big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & (Y \otimes \mathbb{Q})/Y & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

On note $z \mapsto y(z)$ la flèche $G(\overline{\widehat{R}}_q)_{\mathrm{tor}} \to (Y \otimes \mathbb{Q})/Y$.

2.4.8. Soient $z \in G(\overline{\widehat{R}}_q)_{\mathrm{tor}'}$ et n un entier premier à la caractéristique de $\overline{F}$ tel que $nz = 0$. Soit $\widetilde{z} \in \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ relevant z. Soit $\widetilde{z}_t \in T(\overline{\widehat{R}}_q)$ tel que $n\widetilde{z}_t = \iota_t(\widetilde{y}(\widetilde{z}))$ et posons $\widetilde{z}_f = \widetilde{z}\widetilde{z}_t^{-1}$. On a $n\widetilde{z}_f = \widetilde{c}'(n\widetilde{y}(\widetilde{z}))$. Il en résulte que

$\widetilde{z}_f \in \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}})$. Les images $\gamma(\widetilde{z})$ et $\gamma(\widetilde{z}_f)$ de $\widetilde{z}$ et $\widetilde{z}_f$ dans $\widetilde{A}(\overline{\widehat{R}}_q)$ coïncident ; on a donc $\gamma(\widetilde{z}) \in \widetilde{A}(\overline{\widehat{R}})$.

Soit $\widehat{F}'$ une extension finie de $\widehat{F}$ contenue dans $\overline{\widehat{F}}$ telle que z, $\widetilde{z}$, $\widetilde{z}_f$ et $\widetilde{z}_t$ soient définis sur $\widehat{F}'$. Notons $\widehat{R}'$ la fermeture intégrale de $\widehat{R}$ dans $\widehat{F}'$. Comme $\widehat{F}'/\widehat{F}$ est finie et séparable, $\widehat{R}'$ est fini sur $\widehat{R}$ ([MAT] prop. 31.B) et est en particulier séparé et complet pour la topologie $\widehat{I}$-adique.

Proposition. — *On a un isomorphisme naturel de $\widehat{R}'_q$-modules : $z^*(L_q) \simeq \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})_q$. Soit $\theta \in \Gamma(G_q, L_q^m)$. Notons $\theta(z) \in z^*(L_q^m)$ (resp. $\theta_\chi(\widetilde{z}_f) \in \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m)$) l'évaluation de θ en z (resp. de θ_χ en $\widetilde{z}_f$, pour $\chi \in X$). Alors il existe un entier a tel que $\theta(z)$ et les $\theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) \in q^{-a}\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m)$, et on a :*

$$\theta(z) = \sum_{\chi \in X} \theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) \ ,$$

la série convergeant pour la topologie $\widehat{I}$-adique dans le $\widehat{R}'$-module inversible $q^{-a}\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m)$.

Remarque. L'image de $\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})$ dans $z^*(L_q)$ ne dépend pas du choix de la décomposition $\widetilde{z}_f\widetilde{z}_t$ de $\widetilde{z}$ (mais dépend du choix de $\widetilde{z}$). De même, les $\Theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t)$ ne dépendent pas du choix de la décomposition $\widetilde{z} = \widetilde{z}_f\widetilde{z}_t$.

2.4.9. Démonstration de la proposition. Tout d'abord, il suffit de prouver la proposition pour m grand, et tout z : en effet, L étant symétrique, on a un isomorphisme de $(L^m)^{m'^2}$ sur $[m']^*(L^m)$ et la proposition pour mm'^2 et $\widetilde{z}'$ avec $m'\widetilde{z}' = \widetilde{z}$ entraîne la proposition pour m et $\widetilde{z}$.

On peut donc supposer que l'on a un modèle relativement complet $\widetilde{P} \to \mathrm{Spec}(\widehat{R})$ (cf. 2.4.6). On a alors ([CF] chap. III th. 5.9, [Mum 72] th. 4.10) :

- un sous-schéma fermé $\widetilde{Z}_n$ de $\widetilde{P}$, propre sur $\widehat{R}$, avec $(\widetilde{Z}_n)_q \simeq (\widetilde{G}_q/\iota(Y))_n$ (2.3.7) ;

- un sous-schéma fermé Z_n de P, avec $(Z_n)_q = (G_n)_q$;

- le morphisme $\pi : \widetilde{P}_{\mathrm{for}} \to P_{\mathrm{for}}$ induit par restriction un morphisme $(\widetilde{Z}_n)_{\mathrm{for}} \to (Z_n)_{\mathrm{for}}$, qui s'algébrise en $\pi_n : \widetilde{Z}_n \to Z_n$, et π_n induit l'isomorphisme $(G_q/\iota(Y))_n \simeq (G_n)_q$.

La restriction à $(Z_n)_{\mathrm{for}}$ de l'isomorphisme $\pi^*(L_{\mathrm{for}}) \simeq \widetilde{L}_{\mathrm{for}}$ s'algébrise, d'où un isomorphisme de $\pi_n^*(L)$ sur la restriction à $\widetilde{Z}_n$ de $\widetilde{L}$. Grâce au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{z} : \mathrm{Spec}(\widehat{R}'_q) & \longrightarrow & \widetilde{Z}_n \\ \| & & \downarrow {\scriptstyle \pi_n} \\ z : \mathrm{Spec}(\widehat{R}'_q) & \longrightarrow & Z_n \end{array} ,$$

on en déduit un isomorphisme $z^*(L_q) \simeq \widetilde{z}^*(\widetilde{L}_q)$. D'autre part, $T^*_{\widetilde{z}_t}$ induit un isomorphisme $\widetilde{z}^*(\widetilde{L}_q) \simeq (\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}))_q$, d'où l'isomorphisme $\widetilde{z}^*(\widetilde{L}_q) \simeq (\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}))_q$ promis.

Reste à prouver la formule donnant $\theta(z)$. Comme $G_q = P_q$, on peut supposer, quitte à multiplier θ par une puissance de q, que $\theta \in \Gamma(P, L)$. Grâce à l'action de T sur le prolongement de $\widetilde{L}$ à $\widetilde{P}$, on a une décomposition $\pi^*(\theta) = \sum_{\chi \in X} \theta_\chi$, la série convergeant pour la topologie $\widehat{I}$-adique. Si on note $\theta_{\chi|\widetilde{Z}_n}$ la restriction de θ_χ à $\widetilde{Z}_n$, on obtient dans le $\widehat{R}$-module fini $\Gamma(\widetilde{Z}_n, \widetilde{L})$ l'égalité $\pi_n^*(\theta) = \sum_{\chi \in X} \theta_{\chi|\widetilde{Z}_n}$. Soit a un entier tel que l'image de $\Gamma(\widetilde{Z}_n, \widetilde{L})$ dans $\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})_q$ soit contenue dans $q^{-a}\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})$. On a donc $\theta(z), \theta_\chi(\widetilde{z}) = \theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) \in q^{-a}\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})$ et $\theta(z) = \sum_{\chi \in X} \theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t)$.

2.5. Contrôle des dénominateurs des valeurs de quotients de fonctions Θ en certaines sections de torsion.

2.5.1. On reprend les hypothèses et les notations du 2.4. On note Θ_A le diviseur de G_q associé à L_q et $\Theta_{\widetilde{A}}$ le diviseur de $\widetilde{A}$ associé à $\mathcal{M}$. Soit

χ_0 le caractère trivial du tore de l'extension de Raynaud. Il résulte du 2.3.3 que $\theta \mapsto \theta_{\chi_0}$ induit un isomorphisme des $\widehat{R}_q$-modules inversibles $\Gamma(G_q, L_q)$ et $\Gamma(A_q, \mathcal{M}_q)$. On suppose qu'on s'est suffisamment localisé (au sens du 2.4.1) pour que $\Gamma(\widetilde{A}, \mathcal{M})$ soit libre sur $\widehat{R}$ et on note θ un élément de $\Gamma(G_q, L_q)$ tel que θ_{χ_0} soit un générateur de $\Gamma(\widetilde{A}, \mathcal{M})$.

2.5.2. PROPOSITION. — *Il existe* $\delta \in G(\overline{\widehat{R}}_q)_2$, $\widetilde{\delta} \in \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ *relevant* δ *et* D *un voisinage ouvert de* $\widetilde{y}(\widetilde{\delta})$ *dans* $Y \otimes \mathbb{Q}$ *vérifiant :*

1) Pour tout $z \in G(\overline{\widehat{R}}_q)_{tor}$ *d'ordre premier à la caractéristique de* F *et tout* $\overline{s} \in \mathrm{Spec}(\overline{\widehat{R}} / I \overline{\widehat{R}})$ *tels que :*

a) il existe un relèvement $\widetilde{z} \in \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ *de* z *avec* $\widetilde{y}(\widetilde{z}) \in D$,

b) l'image de $\gamma(\widetilde{z})$ *dans la fibre* $\widetilde{A}(k(\overline{s}))$ *n'appartient pas à* $\Theta_{\widetilde{A}} \times k(\overline{s})$ *(*$\gamma(\widetilde{z})$ *appartient à* $\widetilde{A}(\overline{\widehat{R}})$*, cf. 2.4.8., ce qui donne bien un sens à son image dans* $A(k(\overline{s}))$*)* ,

Alors, l'image par z *de* $\mathrm{Spec}((\overline{\widehat{R}}_{\overline{s}})_q)$ *ne rencontre pas* Θ_A.

2) Soit m *un entier et* $\theta' \in \Gamma(G_q, L_q^m)$. *Alors, il existe un entier* a *tel que, pour tout* z *et* $\overline{s}$ *vérifiant a) et b) ci-dessus, on ait :*

$$q^a(\theta'/\theta^m)(z) \in \overline{\widehat{R}}_{\overline{s}} \ .$$

Démonstration.

2.5.3. Si z, $\widetilde{z}$ avec $\widetilde{y}(\widetilde{z}) \in D$ sont comme dans le 1) de la proposition et si $\widetilde{z} = \widetilde{z}_f \widetilde{z}_t$ est une décomposition de $\widetilde{z}$ comme au 2.4.8, rappelons que l'on a un isomorphisme $z^*(L_q) \simeq \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})_q$ et que, avec cet isomorphisme, $\theta(z) = \sum_{\chi \in X} \theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t)$ et de même pour L_q^m et θ' (2.4.8).

2.5.4. LEMME. — *Il existe δ, $\widetilde{\delta}$, D et a comme dans l'énoncé de la proposition, tels que :*

1) *pour tout* $\chi \in X$, $q^a \theta'_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) \in \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m)$,

2) *pour tout* $\chi \in X$ *différent du caractère trivial* χ_0, *on a* $\theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) \in \sqrt{I\,\overline{\widehat{R}}}\,\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})$.

2.5.5. La proposition résulte facilement du lemme. En effet, grâce au 2) du lemme, $\theta(\widetilde{z}) \in \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})$ et a même image que $\theta_{\chi_0}(\widetilde{z}_f) = \theta_{\chi_0}(\gamma(z))$ dans $\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}) \otimes_{\widehat{R}'} k(\overline{s})$. Par suite, comme par hypothèse, θ_{χ_0} est un générateur de $\Gamma(\widetilde{A}, \mathcal{M})$ et que $\gamma(\widetilde{z})$ n'appartient pas à $\Theta_{\widetilde{A}} \times k(\overline{s})$, $\theta(z)$ est un générateur du $\overline{\widehat{R}}_{\overline{s}}$-module inversible $\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}) \otimes_{\widehat{R}'} \overline{\widehat{R}}_s$, et à fortiori de $z^*(L_q) \otimes_{\widehat{R}'} \overline{\widehat{R}}_{\overline{s}}$, ce qui prouve le 1) de la proposition. De plus, d'après le 1) du lemme, $q^a\theta'(z) \in \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m)$, donc à $\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m) \otimes_{\widehat{R}'} \overline{\widehat{R}}_{\overline{s}}$ et on a bien $q^a(\theta'/\theta^m)(z) \in \overline{\widehat{R}}_{\overline{s}}$.

Prouvons le lemme 2.5.4.

2.5.6. On a, si $y = \phi^{-1}(\chi)$ (cf. 2.4.3) :

$$\theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) = a(y)\chi(\widetilde{z}_t)\widetilde{c}_y'^*(\theta_{\chi_0}(\widetilde{z}_f)) \ .$$

De même, si (χ_i) est un système de représentants des classes de X/mX, on a, si $\chi = \chi_i + m\phi(y)$:

$$\theta'_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) = a^m(y)b(y, \chi_i)\chi(\widetilde{z}_t)\widetilde{c}_y^*(\theta'_{\chi_i})(\widetilde{z}_f) \ .$$

Comme $\iota_t : Y \to T(\widehat{F})$ est défini par b (cf. 2.4.6) et que, si n est un entier premier à la caractéristique de $\widehat{F}$ tel que $nz = 0$, on a $n\widetilde{z}_t = \iota_t(n\widetilde{y}(\widetilde{z}))$ on voit que :

$$\chi(\widetilde{z}_t) = b(\widetilde{y}(\widetilde{z}), \chi) \bmod . \overline{\widehat{R}}^* \ ,$$

où $b(\widetilde{y}(\widetilde{z}), \chi)$ désigne l'unique élément de $\overline{\widehat{F}}^* / \overline{\widehat{R}}^*$ tel que $b(\widetilde{y}(\widetilde{z}), \chi)^n = b(n\widetilde{y}(\widetilde{z}), \chi)$.

Notons $\mathbb{Q}'$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ formé des rationnels dont le dénominateur est premier à la caractéristique de $\widehat{F}$. On voit qu'il suffit de prouver :

1) il existe un entier a_0 tel que $\forall \chi_i$, $\forall y \in Y$, $\forall \widetilde{y} \in D \cap (Y \otimes \mathbb{Q}')$:

$$q^{a_0} a^m(y) b(y, \chi_i) b(\widetilde{y}, \chi_i + m\phi(y)) \in \overline{\hat{R}} \bmod \overline{\hat{R}}^* ,$$

(si a_1 est un entier tel que $q^{a_1}\theta'_{\chi_i} \in \Gamma(\widetilde{A}, \mathcal{M}_{\chi_i})$, $a = a_0 + a_1$ convient),

2) $\forall y \in Y$, $y \neq 0$:

$$a(y) b(\widetilde{y}, \phi(y)) \in \sqrt{I\, \overline{\hat{R}}} \bmod \overline{\hat{R}}^* .$$

Clairement 1) est entraîné par 1') :

1') Soit $D' \subset Y \otimes \mathbb{Q}$ borné; alors il existe a' tel que $\forall y \in Y$, $\forall \widetilde{y} \in D' \cap (Y \otimes \mathbb{Q}')$:

$$q^{a'} a^m(y) b(\widetilde{y}, \phi(y)) b(\widetilde{y}, \chi_i) \in \overline{\hat{R}} \bmod . \overline{\hat{R}}^* .$$

Montrons 1') et 2).

2.5.7. Pour cela, pour toute valuation v de $\widehat{F}$ associée à un idéal premier de hauteur 1 de $\widehat{R}$, soit a_v, b_v, q_v et ℓ_v comme au 2.4.4 et soit, comme au 2.4.5, $\mathcal{V}(q)$ l'ensemble fini des v telles que $v(q) > 0$. Il est clair que si v désigne encore un prolongement quelconque de v à $\overline{\hat{R}}$, et si on prolonge b_v à $(Y \otimes \mathbb{Q}') \times X$ par bilinéarité, on a, pour $\widetilde{y} \in Y \otimes \mathbb{Q}'$ et $x \in X$:

$$v(b(\widetilde{y}, x)) = b_v(\widetilde{y}, x) .$$

Comme D' est borné, pour tout v, $b_v(D', \chi_i)$ est borné. Comme b_v est identiquement nul si $v \notin \mathcal{V}(q)$ (2.4.5), on voit qu'il existe a_1 tel que :

$$\forall \widetilde{y} \in D' \cap (Y \otimes \mathbb{Q}'),\ q^{a_1} b(\widetilde{y}, \chi_i) \in \overline{\hat{R}} \ \mathit{mod.}\ \overline{\hat{R}}^* .$$

Reste à montrer, pour prouver 1'), qu'il existe a_2 avec :

$$\forall y \in Y, \forall \widetilde{y} \in D' \cap (Y \otimes \mathbb{Q}'),\ q^{a_2} a^m(y) b(\widetilde{y}, \phi(y)) \in \overline{\hat{R}} \ mod\ \overline{\hat{R}}^{\,*} \ .$$

Pour cela, il suffit de prouver que, pour chaque $v \in \mathcal{V}(q)$, $ma_v(y) + b_v(\widetilde{y}, \phi(y))$, $y \in Y$ et $\widetilde{y} \in D'$, est minoré.

Comme $q_v(y) = 0$ entraîne $\ell_v(y) = 0$ (2.4.4.), il existe $\widetilde{y}_0 \in Y \otimes \mathbb{Q}$ tel que $m\ell_v(y) = b_v(\widetilde{y}_0, \phi(y))$. L'expression à minorer devient :

(I) : $$m/2\ q_v(y) + b_v(\widetilde{y}_0 + \widetilde{y}, \phi(y)) \ .$$

Soit $b_v = \max_{\widetilde{y} \in D'}(q_v(\widetilde{y}_0 + \widetilde{y}))$. (I) est minoré par :

$$m/2\ q_v(y) - \sqrt{q_v(y)}\sqrt{q_v(\widetilde{y}_0 + \widetilde{y})}$$

et donc par $\min_{u \in \mathbb{R}_+}(m/2\ u - \sqrt{b_v}\sqrt{u})$, ce qui prouve 1') donc 1).

2.5.8. Prouvons 2). Tout d'abord, comme la fonction $y \mapsto a(y)$ est bien déterminée à multiplication par $b(y, \chi)$, $\chi \in X$, près, la symétrie de L entraîne qu'il existe $\chi_1 \in X$ tel que :

$$a(-y) = a(y) b(y, \chi_1) \ .$$

Soit $\widetilde{y}_1 \in 2^{-1}Y$ tel que $2\phi(\widetilde{y}_1) = \chi_1$ et soit $\widetilde{\delta} \in \widetilde{G}(\overline{\hat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ tel que $\widetilde{y}(\widetilde{\delta}) = \widetilde{y}_1$ et tel que l'image δ de $\widetilde{\delta}$ dans $G(\overline{\hat{R}}_q)_{tor'}$ appartienne à $G(\overline{\hat{R}}_q)_2$ (un tel $\widetilde{\delta}$ existe puisque l'on a supposé que la caractéristique de F est différente de 2). Posons :

$$a_1(y) = a(y) b(\widetilde{y}_1, \phi(y)) \,\mathrm{mod}.\ \overline{\hat{R}}^{\,*} \ .$$

On a donc $a_1(y) = a_1(-y) \,\mathrm{mod}.\ \overline{\hat{R}}^{\,*}$, d'où :

$$a_1(y) = b(y, \phi(y))^{1/2} \,\mathrm{mod}.\ \overline{\hat{R}}^{\,*} \ .$$

Prenant $D = \widetilde{y}_1 + D_1$, on voit qu'il suffit de prouver qu'il existe un voisinage D_1 de 0 dans $Y \otimes \mathbb{Q}$ tel que :

$$\forall y \in Y, y \neq 0, \forall \widetilde{y} \in D_1 \cap (Y \otimes \mathbb{Q}'), b(y, \phi(y))^{1/2} b(\widetilde{y}, \phi(y)) \in \sqrt{I\,\overline{\hat{R}}} \bmod . \overline{\hat{R}}^{\,*}.$$

Comme, pour $y \neq 0$, $b(y, \phi(y))^{1/4} \in \sqrt{I\,\overline{\hat{R}}}$, on voit qu'il suffit de trouver D_1 tel que :

$$\forall y \in Y, \forall \widetilde{y} \in D_1 \cap (Y \otimes \mathbb{Q}'), b(y, \phi(y))^{1/4} b(\widetilde{y}, \phi(y)) \in \overline{\hat{R}} \bmod . \overline{\hat{R}}^{\,*} ,$$

autrement dit, pour $v \in \mathcal{V}(q)$ et $q_v(y) = b_v(y, \phi(y))$:

(II) : $$1/4 q_v(y) + b_v(\widetilde{y}, \phi(y)) \geq 0 .$$

On prend D_1 tel que : $\forall \widetilde{y} \in D_1$, $\forall v \in \mathcal{V}(q)$, on ait : $4\sqrt{q_v(\widetilde{y})} \leq 1$. On a :

$$1/4 q_v(y) + b_v(\widetilde{y}, \phi(y)) \geq 1/4 \sqrt{q_v(y)} (\sqrt{q_v(y)} - 4\sqrt{q_v(\widetilde{y})}) .$$

On voit que si $q_v(y) = 0$, (II) est claire. Si $q_v(y) \neq 0$, on a $q_v(y) \geq 1$ et (II) est encore vraie car $4\sqrt{q_v(\widetilde{y})} \leq 1 \leq \sqrt{q_v(y)}$. Cela achève de prouver le lemme, et donc la proposition.

2.6. Fin de la démonstration du théorème.

2.6.1. Choix de a et de b.

Soit, pour tout entier t, S_t le fermé de S défini par $s \in S_t \iff t(s) \geq t$, où $t(s)$ est la dimension du sous-tore maximal de la fibre G_s de G en s. On a donc $S = S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_d \supset S_{d+1} = \phi$ ($d = \dim(G/S)$). Pour chaque entier t, $0 \leq t \leq d$, notons $S_{=t} = S_t - S_{t+1}$.

Soit, pour chaque t, $0 \leq t \leq d$, J_t un ensemble fini d'indices et pour chaque $j \in J_t$, un morphisme étale de type fini $\mathrm{Spec}(R_j) \to S$ et I_j un idéal de R_j tel que l'image de $\mathrm{Spec}(R_j/I_j)$ dans S soit contenue dans $S_{=t}$; on impose que :

- les R_j sont intègres et les I_j sont premiers (pour $t = 0$, on prend $I_j = (0)$);

- les images des $\mathrm{Spec}(R_j/I_j)$, pour $j \in J_t$ recouvrent $S_{=t}$;

- on a les trivialisations du 2.4. pour (R_j, I_j) et (G, L). Donc, on a un faisceau inversible $\mathcal{M}_j$ sur la partie abélienne $\widetilde{A}_j$ de l'extension de Raynaud associée à G. On suppose de plus que le R_j/I_j-module inversible $\Gamma(\widetilde{A}_j, \mathcal{M}_j) \otimes_{\widehat{R}_j} R_j/I_j$ est libre, ce qui entraîne que $\Gamma(\widetilde{A}_j, \mathcal{M}_j)$ est libre sur $\widehat{R}_j$.

Pour chaque j, on choisit $\theta_j \in \Gamma(A, L_q) \otimes_R \widehat{R}_j$ qui s'envoie sur un générateur de $\Gamma(\widetilde{A}_j, \mathcal{M}_j)$. On choisit a_j vérifiant le 2) de la proposition 2.5.2 pour les $g_\xi(\theta_j)$, $\xi \in A((R_1)_q)_k$ ($k = l$ si $l \neq 2$ et $k = 4$ si $l = 2$, cf 2.3.2.). Pour $t \neq 0$, on choisit b_j tel que, si D_j est comme dans la proposition 2.5.2 pour $m = k$, on ait $Y \otimes \mathbb{Q} = \ell^{-b_j} Y + D_j$. On choisit $a = \sup(a_j)$, $b \geq \sup(b_j)$ et $\ell^b \geq k$.

2.6.2. Soit $z \in A(\overline{R}_q)$ une section de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F. Soit F' une extension finie de F contenue dans $\overline{F}$ contenant F_1 telle que $z \in A(F')$. Notons R' la fermeture intégrale de R dans F'; on a donc $z \in A(R'_q)$. Il suffit de prouver que, pour tout $s' \in \mathrm{Spec}(R')$, il existe $\xi' \in A(R'_q)_{\ell^b}$ tel que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(R')_q$ provienne d'une section $\mathrm{Spec}(R'_s) \to \mathrm{Spec}(\Gamma^{(a)}_{\xi'})$ (on a noté $R'_{s'}$ le localisé de R' en s') (1 c) du 2.1.3.).

Soit s l'image de s' dans $\mathrm{Spec}(R)$. Soit j comme au numéro précédent et tel que s appartienne à l'image de $\mathrm{Spec}(R_j/I_j)$. Soit $s_j \in \mathrm{Spec}(R_j/I_j)$ d'image s dans $\mathrm{Spec}(R)$. Soit $s'_j \in \mathrm{Spec}(R_j \otimes_R R')$ au-dessus de (s_j, s') (il existe un tel s'_j d'après EGA1 prop. 3.4.7.) et soit $\mathrm{Spec}(R'_j)$ la composante du schéma normal $\mathrm{Spec}(R_j \otimes_R R')$ telle que $s'_j \in \mathrm{Spec}(R'_j)$. Alors $\mathrm{Spec}(R'_j) \to \mathrm{Spec}(R_j)$ est finie : en effet, comme F'/F est finie séparable, R'/R est finie d'après [Mat] prop. 31 B, et donc aussi donc R'_j/R_j. De plus, $\mathrm{Spec}(R'_j) \to \mathrm{Spec}(R_j)$ est surjectif car $\mathrm{Spec}(R_j \otimes_R R') \to \mathrm{Spec}(R_j)$ est plat au-dessus du point générique de Spec(R) et donc le point générique de toute composante irréductible de Spec($R_j \otimes_R R'$) s'envoie sur le point générique de Spec(R_j). Enfin, F'/F est finie séparable, il en est de même de l'extension des corps de fractions de R'_j et R_j.

Notons $\widehat{R}_j$ le complété de R_j pour la topologie I_j-adique et soit $\widehat{s}_j$ l'image de s_j dans l'isomorphisme $\mathrm{Spec}(R_j/I_j) \simeq \mathrm{Spec}(\widehat{R}_j/\widehat{I}_j)$. Notons $\widehat{R}'_j$ la composante du complété I_j-adique de R'_j qui contient le point $\widehat{s}'_j$ défini par s'_j :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}(R') & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(R'_j) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(\widehat{R}'_j) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(R) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(R_j) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(\widehat{R}_j) \end{array} .$$

On voit facilement comme ci-dessus que $\mathrm{Spec}(\widehat{R}'_j) \to \mathrm{Spec}(\widehat{R}_j)$ est fini surjectif et que l'extension de leurs corps des fractions est séparable. On peut donc supposer $\widehat{R}'_j$ plongé dans $\overline{\widehat{R}}_j$. Soit $\overline{s} \in \mathrm{Spec}(\overline{\widehat{R}}_j)$ au-dessus de $\widehat{s}'_j$.

2.6.3. Soit $D \subset Y \otimes \mathbb{Q}$ comme dans la proposition 2.5.2 (nous reprenons les notations du 2.3 et du 2.4. et nous omettons dans ce numéro l'indice j). D'après le choix de b, il existe $\widetilde{y} \in \ell^{-b}Y$ et $\widetilde{z} \in \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ relevant z avec $\widetilde{y}(\widetilde{z}) - \widetilde{y} \in D$. Soit $\widetilde{\xi}'_0 \in G(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ tel que $\widetilde{y}(\widetilde{\xi}'_0) = \widetilde{y}$ et que l'image ξ'_0 de $\widetilde{\xi}'_0$ dans $G(\overline{\widehat{R}}_q)$ appartienne à $G(\overline{\widehat{R}}_q)_{\ell^b}$. Comme ℓ^b est ≥ 3 et premier à la caractéristique du corps résiduel $k(\overline{s})$, les complémentaires des translatés $t_\delta(\Theta_{\tilde{A}})$ du diviseur $\Theta_{\tilde{A}}$ de $\widetilde{A}$ par les $\delta \in A(k(\overline{s}))_{\ell^b}$ recouvrent $A \times \mathrm{Spec}(k(\overline{s}))$: cela résulte de ce que $\mathcal{M}^{\ell^b}$ est relativement très ample et de ce que le groupe thêta $\mathcal{G}(\mathcal{M}^{\ell^b})$ agit de façon irréductible sur $\Gamma(\widetilde{A}, \mathcal{M}^{\ell^b})$ ([Mum 66] th. 2). Il existe donc $\delta \in \widetilde{A}(\overline{\widehat{R}})_{\ell^b}$ tel que l'image de $\gamma(\widetilde{z} - \widetilde{\xi}'_0) - \delta$ dans $\widetilde{A}(k(\overline{s}))$ n'appartienne pas à $\Theta_{\tilde{A}}(k(\overline{s}))$. Soit $\widetilde{\xi}'_1$ relevant δ dans $\widetilde{G}(\overline{\widehat{R}})_{\ell^b}$ et d'image ξ'_1 dans $G(\overline{\widehat{R}})_{\ell^b}$ et posons $\widetilde{\xi}' = \widetilde{\xi}'_0 + \widetilde{\xi}'_1$, $\xi' = \xi'_0 + \xi'_1$. On a $\widetilde{y}(\widetilde{z} - \widetilde{\xi}') \in D$ et l'image de $\gamma(\widetilde{z}-\widetilde{\xi}')$ dans $\widetilde{A}(k(\overline{s}))$ n'appartient pas à $\Theta_{\widetilde{A}}(k(\overline{s}))$. La proposition 2.5.2 dit alors que la restriction de z à $\mathrm{Spec}((\widehat{R}')_{\hat{s}'})_q$ provient d'une section $\mathrm{Spec}((\widehat{R}')_{\hat{s}'}) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$.

2.6.4. Soit $\widehat{R'_{j,s'_j}}$ le localisé complété de R'_j en s'_j. L'homomorphisme $R'_j \to \widehat{R'_{j,s'_j}}$ induit un homomorphisme $\widehat{R'_j} \to \widehat{R'_{j,s'_j}}$ qui envoie s'_j sur $\widehat{s'_j}$. Il en résulte un morphisme $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{j,s'_j}}) \to \mathrm{Spec}((\widehat{R'_j})_{\hat{s}'_j})$ et la restriction de z à $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{j,s'_j}})_q$ provient d'une section $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{j,s'_j}}) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$.

Notons $\widehat{R'_{s'}}$ le localisé complété de R' en s'. Montrons que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}})_q$ provient d'une section $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}}) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$. En effet, comme $R' \to R'_j$ est étale, $\widehat{R'_{s'}} \to \widehat{R'_{j,s'_j}}$ est étale et fini (SGA1 exp. 1 prop. 2.1. et 4.2.). Il est fidèlement plat et $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{j,s'_j}}) \to \mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}})$ est surjectif. On voit tout d'abord que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}})_q$ se factorise à travers $\mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})_q$. L'image de $\Gamma_{\xi'}^{(a)}$ dans $(\widehat{R'_{s'}})_q$ est contenue dans $\widehat{R'_{j,s'_j}}$; comme $\widehat{R'_{s'}}$ est normal et que $\widehat{R'_{j,s'_j}}$ est fini sur $\widehat{R'_{s'}}$, on voit que l'image de $\Gamma_{\xi'}^{(a)}$ dans $(\widehat{R'_{s'}})_q$ est contenue dans $\widehat{R'_{s'}}$ et la restriction de z à $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}})_q$ provient d'un morphisme $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}}) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$.

On en déduit enfin que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(R'_{s'})_q$ provient d'une section $\mathrm{Spec}(R'_s) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$. En effet, tout d'abord, comme $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}})_q \to \mathrm{Spec}(R'_{s'})_q$ est surjectif, on voit tout d'abord que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(R'_{s'})_q$ se factorise à travers $\mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})_q$. Ensuite, comme $R'_{s'}$ est normal excellent, $\widehat{R'_{s'}}$ est intègre et dans son corps des fractions, on a $R'_{s'} = (R'_{s'})_q \cap \widehat{R'_{s'}}$ (Bourbaki, Algèbre commutative chap. III § 3 n° 5 cor. 4). On voit alors que $\mathrm{Spec}(R'_{s'})_q \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})_q$ se prolonge bien en $\mathrm{Spec}(R'_{s'}) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$, ce qui achève de prouver le théorème.

3. Relèvements de sections contrôlées.

Soient S, S', q, $X \to S_q$, (U_λ) et $(U_{\lambda,0})$ comme au 2.1. Notons f le morphisme $X \to S_q$. On suppose de plus que S, S' et les $U_{\lambda,0}$ sont affines : $S = \mathrm{Spec}(R)$, $S' = \mathrm{Spec}(R')$, $U_{\lambda,0} = \mathrm{Spec}(\Gamma_\lambda)$. On suppose donné un ensemble Δ de sections $z : S'_q \to X$ qui sont contrôlées par les $U_{\lambda,0}$.

3.1. Cas des torseurs sous un schéma vectoriel.

3.1.1. Soient E un R_q-module localement libre de type fini et $V \to S_q$ le fibré vectoriel dont le S_q-module des sections s'identifie au faisceau associé au dual E^* de E. On se donne de plus un espace principal homogène $P \to X$ sous f^*V. Comme S'_q est affine, toute section $z \in \Delta$ se relève en une section $\widehat{z} : S'_q \to P$.

Soit, pour chaque λ, P_λ la restriction de P à U_λ. Comme U_λ est affine, P_λ est trivial. Soit $s_\lambda : U_\lambda \to P_\lambda$ une trivialisation de P_λ. Soit $z \in \Delta$ et soit $\widehat{z} : S'_q \to P$ un relèvement de z. Comme $(U_{\lambda,0})$ contrôle z, il existe un recouvrement ouvert (S'_λ) de S' et des sections $z_\lambda : S'_\lambda \to U_{\lambda,0}$ telles que la restriction de z à $(S'_\lambda)_q$ provienne de z_λ (cf. 2.1) ; quitte à raffiner le recouvrement (S'_λ), on peut supposer les S'_λ affines.

Alors $\widehat{z}$ et $s_\lambda \circ z_\lambda$ restreintes à $(S'_\lambda)_q$ définissent toutes deux une section de $z_\lambda^*(P_\lambda)$ donc un élément de $\Gamma(S'_\lambda, O_{S'}) \otimes_R E^*$ que l'on note $\widehat{z} - s_\lambda \circ z_\lambda$. Soit E_0^* un sous-R-module de type fini de E^* tel que $E^* = E_0^*\, R_q$.

Soit $\widehat{\Delta}$ un ensemble de sections $S'_q \to P$ relevant des éléments de Δ. On dit que $\widehat{\Delta}$ **est borné** s'il existe un entier a tel que, pour tout $\widehat{z} \in \widehat{\Delta}$ d'image z dans Δ, $q^a(\widehat{z} - s_\lambda \circ z_\lambda) \in \Gamma(S'_\lambda, O_{S'})E_0^* \subset \Gamma(S'_\lambda, O_{S'}) \otimes_R E^*$. Cette définition ne dépend clairement pas du choix de E_0^* ; elle dépend à priori du choix des $U_{\lambda,0}$, s_λ et des S'_λ.

3.1.2. PROPOSITION. — *La définition ci-dessus ne dépend pas de ces choix. Il existe un ensemble borné $\widehat{\Delta}$ de relèvements des éléments de Δ.*

3.1.3. REMARQUES.

1) Supposons R noethérien et soit E_0 un sous-R-module de type fini de E qui engendre E en tant que R_q-module. Identifions P_λ à $U_\lambda \times_{S_q} V$ à l'aide de s_λ et soit, pour tout entier a, $P^{(a)}_{\lambda,0}$ le S-modèle entier de P_λ défini par $\mathrm{Sym}_R(q^a E_0) \otimes_R \Gamma_\lambda$ modulo q-torsion. Alors, comme R est supposé noethérien, E_0 est de présentation finie et le dual E_0^* est de type fini et est compatible au changement de base. Il est alors facile de voir que $\widehat{\Delta}$ est borné si et seulement si il existe un entier a tel que les éléments de $\widehat{\Delta}$ sont contrôlés par $(P^{(a)}_{\lambda,0})$.

2) Soit X' un S_q-schéma séparé et de type fini et f un S_q-morphisme de X' dans X. Soit $(U'_{\lambda',0})$ une famille finie de modèles entiers d'ouverts de X' et supposons que, pour tout λ', il existe λ tel que la restriction de f à $U'_{\lambda'}$ provienne d'un S-morphisme de $U'_{\lambda',0}$ dans $U_{\lambda,0}$. Soit Δ' un ensemble de sections de X' qui est contrôlé par les $U'_{\lambda',0}$ et $\widehat{\Delta'}$ un ensemble de relèvements des éléments de Δ' à $f^*(P)$. Alors, on voit facilement que $f(\Delta')$ est contrôlé par les $U_{\lambda,0}$ et $f(\widehat{\Delta'})$ est borné.

Démonstration de la proposition.

3.1.4. Soit $(U'_{\lambda',0})_{\lambda' \in \Lambda'}$ une autre famille finie de S-modèles entiers d'ouverts de X et soit $s'_{\lambda'}$ une famille de sections de P au-dessus des ouverts $U'_{\lambda'}$. Pour prouver que la définition est indépendante des choix faits, il suffit de prouver le lemme suivant :

LEMME. — *Il existe un entier a_0 tel que, si S' est un S-schéma avec $O_{S'}$ sans q-torsion, $z : S'_q \to X$ est une section contrôlée à la fois par $(U_{\lambda,0})$ et par $(U'_{\lambda',0})$, $z_\lambda : S'_\lambda \to U_{\lambda,0}$ et $z'_{\lambda'} : S'_{\lambda'} \to U'_{\lambda',0}$ sont comme au 2.1, $\widehat{z} : S'_q \to P$ un relèvement de z, et a un entier tel que pour tout λ , on ait $q^a(\widehat{z} - s_\lambda \circ z_\lambda) \in \Gamma(S'_\lambda, O_{S'})E_0^*$, alors, pour tout λ', on a $\widehat{z} - s'_{\lambda'} \circ z \in q^{-(a+a_0)}\Gamma(S'_{\lambda'}, O_{S'})E_0^*$.*

Pour cela :

3.1.5. LEMME. — *Il existe un entier a_1, un R-module libre de type fini L et deux morphismes de R-modules $\pi : L \to E_0^*$, $s : E_0^* \to L$, tels que $\pi \circ s = q^{a_1} id_{E_0^*}$.*

Démonstration. : Soit L un R-module libre de type fini avec $\pi : L \to E_0^*$ surjectif. Comme E^* est projectif, $\pi \otimes_R R_q$ a une section s'. Comme E_0^* et L sont de type fini, il existe a_1 tel que $q^{a_1} s'(E_0^*)$ soit inclus dans L. On prend pour s la restriction de $q^{a_1} s'$ à E_0^*.

3.1.6. LEMME. — *Soit M un R-module sans q-torsion. Alors, la q-torsion de $M \otimes_R E_0^*$ est tuée par q^{a_1}.*

Démonstration. : La q-torsion de $M \otimes_R E_0^*$ est tuée $M \otimes_R s$, donc par $(\pi \circ s) \otimes_R M$, i.e. par q^{a_1}.

Montrons le lemme 3.1.4. Notons $U_{\lambda,\lambda',0}$ l'adhérence schématique de $U_\lambda \cap U'_{\lambda'}$ dans $U_{\lambda,0} \times_S U_{\lambda',0}$ et $\Gamma_{\lambda,\lambda'}$ son algèbre affine, de sorte que $\Gamma_{\lambda,\lambda'}$ est l'image de $\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'}$ dans $\Gamma(U_\lambda \cap U'_{\lambda'}, O_X)$. Soit a_2 un entier tel que :

$$q^{a_2}(s_\lambda - s_{\lambda'}) \in \Gamma_{\lambda,\lambda'} E_0^* \subset \Gamma(U_\lambda \cap U'_{\lambda'}, O_X) \otimes_R E^* \ .$$

Alors :

$$\widehat{z} - s_{\lambda'} \circ z_{\lambda'} = \widehat{z} - s_\lambda \circ z_\lambda + (s_{\lambda'} - s_\lambda) \circ z \in q^{-(a+a_2)} \Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, O_{S'}) E_0^* \ .$$

Fixons λ' et notons t_λ l'image de $q^{(a+a_2)}(\widehat{z} - s_{\lambda'} \circ z_{\lambda'})$ dans $\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, O_{S'}) E_0^*$. Alors, pour chaque (λ_1, λ_2) les images de t_{λ_1} et t_{λ_2} dans $\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda_1} \cap S'_{\lambda_2}, O_{S'}) E_0^*$ coïncident. Il résulte du lemme précédent que, si $\widehat{t}_\lambda$ sont des relèvements de t_λ dans $\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, O_{S'}) \otimes_R E_0^*$, alors les $q^{a_1} \widehat{t}_\lambda$ définissent un 0-cocycle de $Z^0((S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}), \widetilde{E}_0^*)$, où $\widetilde{E}_0^*$ est le faisceau de $O_{S'}$-modules associé à $E_0^* \otimes_R R'$. Les $q^{a_1} \widehat{t}_\lambda$ définissent donc un élément $\widehat{t}$ de $\Gamma(S'_{\lambda'}, O_{S'}) \otimes_R E_0^*$. Si $a_0 = a_1 + a_2$ et si t est l'image de $\widehat{t}$ dans $\Gamma(S'_{\lambda'}, O_{S'}) E_0^*$, on a

$$\widehat{z} - s_{\lambda'} \circ z_{\lambda'} = q^{-(a+a_0)} t \in q^{-(a+a_0)} \Gamma(S'_{\lambda'}, O_{S'}) E_0^* \ ,$$

ce qui prouve le lemme et donc la première partie de la proposition.

Montrons l'existence de $\widehat{\Delta}$. Pour $(U_{\lambda,0}) = (U'_{\lambda',0})$ soient $U_{\lambda,\lambda'}$, $U_{\lambda,\lambda',0}$ et $\Gamma_{\lambda,\lambda'}$ comme ci-dessus et soit a_2 tel que $q^{a_2}(s_\lambda - s_{\lambda'}) \in \Gamma_{\lambda,\lambda'} E_0^*$. Si $z \in \Delta$, les $q^{a_2}(s_\lambda - s_{\lambda'}) \circ z$ définissent des éléments $t_{\lambda,\lambda'}$ de $\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, O_{S'})E_0^*$ qui définissent un 1-cocycle de $Z^1((S'_\lambda)_q, \widetilde{E_0^*})$. Il résulte du lemme 3.1.6 que, si $\widehat{t}_{\lambda,\lambda'}$ est un relèvement de $t_{\lambda,\lambda'}$ dans $\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, O_{S'}) \otimes_R E_0^*$, alors les $q^{a_1}\widehat{t}_{\lambda,\lambda'}$ définissent un 1-cocycle de $Z^1((S'_\lambda), \widetilde{E_0^*})$. Comme S' est affine, $H^1(S', \widetilde{E_0^*}) = 0$ et il existe des $\widehat{t}_\lambda \in \Gamma(S_\lambda, O_S) \otimes_R E_0^*$ vérifiant $\widehat{t}_{\lambda'} - \widehat{t}_\lambda = q^{a_1}\widehat{t}_{\lambda,\lambda'}$. Si $a = a_2 + a_1$, et si on désigne par t_λ l'image de $\widehat{t}_\lambda$ dans $\Gamma(S'_\lambda, O_{S'})E_0^*$, on voit que $s_\lambda \circ z_\lambda + q^{-a}t_\lambda$ définit une section $\widehat{z} : S'_q \to P$ relevant z et qui vérifie $q^a(\widehat{z} - s_\lambda \circ z_\lambda) = t_\lambda \in \Gamma(S'_\lambda, O_{S'})E_0^*$. Cela prouve l'existence de $\widehat{\Delta}$.

3.1.7. Remarque. Supposons que Δ soit réduit à un élément z, soit $\widehat{z}_0$ un relèvement de z, et soit $\widehat{\Delta}$ un ensemble de relèvements de z. Alors, il est facile de voir que $\widehat{\Delta}$ est borné si et seulement si il existe un entier a tel que, pour tout $\widehat{z} \in \widehat{\Delta}$, on a $\widehat{z} - \widehat{z}_0 \in q^{-a}R'E_0^*$. En effet, si $\widehat{\Delta}$ est borné, et si (S'_λ) est un recouvrement de S' tel que les restrictions de z aux $(S'_\lambda)_q$ se prolongent comme ci-dessus en des sections de $U'_{\lambda,0}$, il existe un entier a tel que pour tout λ on ait : $\hat{z} - \hat{z_0} \in q^{-a}\Gamma(S'_\lambda, O_{S'})E_0^*$, et on montre comme ci-dessus que l'on a bien : $\hat{z} - \hat{z_0} \in q^{-(a+a_1)}\Gamma(S', O_{S'})E_0^*$.

3.2. Cas d'une extension d'un schéma en groupes par un schéma vectoriel.

On reprend les hypothèses et les notations du 3.1. Supposons de plus que X et P soient des schémas en groupes commutatifs, P extension de X par V. On a alors une suite exacte :

$$1 \to E^* \otimes_{R_q} R'_q \to P(R'_q) \to X(R'_q) \to 0 \; .$$

3.2.1. Proposition. — *Supposons que Δ soit un sous-groupe de $X(R'_q)$. Alors :*

1) *il existe un sous-groupe* $\widehat{\Delta}$ *de* $P(R'_q)$*, qui est borné, et dont l'image dans* $\widehat{\Delta}$ *est* Δ*. Plus précisément, si* $\widehat{\Delta}'$ *est un sous-ensemble borné de* $P(R'_q)$ *d'image* Δ *dans* $X(R'_q)$*, il existe un entier* a *tel que* $\widehat{\Delta} + q^{-a}R'E_0^*$ *soit un sous-groupe borné de* $P(R'_q)$ *;*

2) *si* $\widehat{\Delta}'$ *est un ensemble de relèvements d'éléments de* Δ *qui est borné, il existe un entier* a' *tel que*

$$\widehat{\Delta}' \subset \widehat{\Delta} + q^{-a'}R'E_0^*$$
$$\widehat{\Delta}' \cap (E^* \otimes_{R_q} R'_q) \subset q^{-a'}R'E_0^* \ .$$

Démonstration. :

3.2.2. Lemme. — *Soit* $\widehat{\Delta_1}$ *et* $\widehat{\Delta_2}$ *deux sous-ensembles bornés de relèvements d'éléments de* Δ*. Alors* $\widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2}$ *et* $-\widehat{\Delta_1}$ *sont bornés.*

Démonstration. : Soient a_X un automorphisme du S_q-schéma X et a_P un automorphisme de P au-dessus de a_X, compatible avec un automorphisme du fibré vectoriel V. Pour chaque λ, notons $a_X(U_{\lambda,0})$ le S-modèle entier de $a_X(U_\lambda)$ défini par :

$$a_X(U_\lambda) \overset{a^{-1}}{\simeq} U_\lambda \hookrightarrow U_{\lambda,0} \ .$$

Alors $a_X(\Delta_1)$ est contrôlé par les $a_X(U_{\lambda,0})$ et $a_P(\widehat{\Delta}_1)$ est borné. Appliquant ceci avec $a_X = -id_X$ et $a_P = -id_P$, on voit que $-\widehat{\Delta}_1$ est borné. Appliquant ceci à $X \times_{S_q} X$, $P \times_{S_q} P$ et les automorphismes définis par $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + z_2, z_2)$, on a que $a_P(\widehat{\Delta}_1 \times \widehat{\Delta}_2)$ est un ensemble borné de relèvements de $a_P(\Delta_1 \times \Delta_2) = \Delta_1 \times \Delta_2$. Si pr_1 est la première projection $P \times_{S_q} P \to P$, il résulte facilement de la remarque 2) du 3.1.3. que $pr_1(a(\widehat{\Delta}_1 \times \widehat{\Delta}_2)) = \widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2$ est borné, ce qui achève de prouver le lemme.

Montrons la proposition. Soit a un entier suffisamment grand. Soit $\widehat{\Delta}$ et $\widehat{\Delta}'$ deux sous-ensembles bornés de relèvements des éléments de Δ avec $\widehat{\Delta}$

s'envoyant surjectivement sur Δ. Comme $\widehat{\Delta}' \cap (E^* \otimes_{R_q} R'_q)$ est borné, on a bien $\widehat{\Delta}' \cap (E^* \otimes_{R_q} R'_q) \subset q^{-a} R' E_0^*$ d'après la remarque 3.1.7.. De plus, comme $\widehat{\Delta}' - \widehat{\Delta}$ est borné d'après le lemme, on a $(\widehat{\Delta}' - \widehat{\Delta}) \cap (E^* \otimes_{R_q} R'_q) \subset q^{-a} R' E_0^*$, donc $\widehat{\Delta}' \subset \widehat{\Delta} + q^{-a} R' E_0^*$.

Cela prouve 2). Prouvons 1). Alors, comme d'après le lemme $\widehat{\Delta} + \widehat{\Delta}$ et $-\widehat{\Delta}$ sont bornés, on a :

$$\widehat{\Delta} + \widehat{\Delta} \subset \widehat{\Delta} + q^{-a} R' E_0^* \ ,$$
$$- \widehat{\Delta} \subset \widehat{\Delta} + q^{-a} R' E_0^* \ .$$

Il en résulte que $\widehat{\Delta} + q^{-a} R' E_0^*$ est bien un sous-groupe de $P(R'_q)$, et comme d'après le lemme, il est borné, la proposition est démontrée.

3.3. Epaississement de la base.

On suppose que $S = \operatorname{Spec}(R)$ est noethérien et que X est lisse sur S_q. On se donne un R-épaississement infinitésimal E de R', i.e. E est une R-algèbre avec un R-homomorphisme $E \to R'$ qui est surjectif et dont le noyau I est nilpotent. On suppose que q est non diviseur de 0 dans E. Pour tout entier a, on note $E^{(a)}$ le R-épaississement de R' défini par :

$$E^{(a)} = E + q^{-a} I + q^{-2a} I^2 + \cdots \subset E_q \ .$$

Comme $X \to S_q$ est lisse et que S'_q est affine, tout élément z de Δ se relève en une section $\widehat{z} : \operatorname{Spec}(E)_q \to X$. On voit facilement que, pour chaque relèvement $\widehat{z}$ d'un z contrôlé par $(U_{\lambda,0})$, il existe un entier a tel que $\widehat{z}$ soit contrôlé par les $(U_{\lambda,0})$, lorsqu'on prend $E^{(a)}$ comme structure entière de E_q. On dit qu'un ensemble $\widehat{\Delta}$ de relèvements de sections de Δ est **borné**, s'il existe un entier a comme ci-dessus qui convient pour tous les $\widehat{z} \in \widehat{\Delta}$. Cette définition dépend a priori du choix des $U_{\lambda,0}$.

3.3.1. PROPOSITION. — *Cette définition ne dépend pas de ce choix. Il existe $\widehat{\Delta}$ borné, avec $\widehat{\Delta} \to \Delta$ surjectif.*

Démonstration. : On se ramène immédiatement au cas où $I^2 = (0)$.

Montrons l'existence de $\widehat{\Delta}$.

3.3.2. Supposons d'abord X affine et que la famille $(U_{\lambda,0})$ est réduite à un modèle entier $\mathrm{Spec}(\Gamma)$ de X. Comme Γ est de type fini, il existe une R-algèbre de polynômes P à coefficients dans R et à un nombre fini de variables telles que $\Gamma = P/J$. Comme Γ_q est lisse sur R_q, l'homomorphisme $J_q/J_q^2 \longrightarrow (\Omega^1_{P/R} \otimes_P \Gamma)_q$ admet une rétraction. Comme Γ est noethérien et que J/J^2 est un Γ-module de type fini, sa q-torsion est tuée par une puissance de q. On voit alors facilement qu'il existe un entier a et un Γ-homomorphisme $r : \Omega_{P/R} \otimes_P \Gamma \longrightarrow J/J^2$ tels que, si i désigne l'homomorphisme $J/J^2 \longrightarrow \Omega_{P/R} \otimes_P \Gamma$, on ait $r \circ i = q^a id_{J/J^2}$.

Si $z \in \Delta$, on commence par relever z en un point z' de $\mathrm{Spec}(P)$ à valeurs dans E et ses différents relèvements forment un espace principal homogène sous $\mathrm{Hom}_\Gamma(\Omega_{P/R} \otimes_P \Gamma, I)$. Le point z' définit un homomorphisme de $\mathrm{Hom}_\Gamma(J/J^2, I)$ qui doit être nul pour que z' définisse un relèvement dans $\mathrm{Spec}(\Gamma)$. Comme l'image de $\mathrm{Hom}_\Gamma(\Omega_{P/R} \otimes_P \Gamma, q^{-a} I)$ par l'homomorphisme induit par $i : \mathrm{Hom}_\Gamma(\Omega_{P/R} \otimes_P \Gamma, I)_q \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(J/J^2, I)_q$ contient $\mathrm{Hom}_\Gamma(J/J^2, I)$, on voit que l'on peut bien relever z en $\widehat{z} \in \mathrm{Hom}_{\Gamma-\mathrm{alg}}(\Gamma, E^{(a)})$.

3.3.3. Passons au cas général. Soit, comme au 3.1, $\mathrm{Spec}(\Gamma_{\lambda,\lambda'})$ l'adhérence schématique de $U_\lambda \cap U_{\lambda'}$ dans $U_{\lambda,0} \times_S U_{\lambda',0}$.

Quitte à raffiner le recouvrement S'_λ de S', on peut supposer qu'il existe une famille finie (u_λ) d'éléments de R' avec $S'_\lambda = \mathrm{Spec}(R'[1/u_\lambda])$. Soient $(\widehat{u}_\lambda)$ des relèvements des u_λ dans E. D'après le cas précédemment traité, il existe un entier a_0 tel que tout $z \in \Delta$ possède un relèvement $\widehat{z}_\lambda : \mathrm{Spec}(E^{(a_0)}[1/\widehat{u}_\lambda]) \longrightarrow U_{\lambda,0}$ (remarquer que, dans le numéro précédent, l'entier a ne dépend pas de E, mais seulement de Γ). Notons $I_{\lambda,\lambda'}$ l'idéal noyau de $\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'} \longrightarrow \Gamma_{\lambda,\lambda'}$ définissant l'adhérence schématique dans $\mathrm{Spec}(\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'})$ de l'intersection de la diagonale de X avec $\mathrm{Spec}(\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'})_q$. La restriction de $(z_\lambda, z_{\lambda'})$ à $S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}$ se factorise à travers

$\mathrm{Spec}((\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'})/I_{\lambda,\lambda'})$. Il en résulte que $(\widehat{z}_\lambda, \widehat{z}_{\lambda'})$ définit un élément $f_{\lambda,\lambda'} \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_{\lambda,\lambda'}}(I_{\lambda,\lambda'}/I^2_{\lambda,\lambda'}, q^{-a_0} I[1/\widehat{u}_\lambda \widehat{u}_{\lambda'}])$. Les $f_{\lambda,\lambda'}$ définissent un cocycle de $Z^1((S'_\lambda)_q, \ \mathrm{Hom}_{O_{S'_q}}(z^*(\Omega_{X/S_q}), \widetilde{I}_q))$, où $\widetilde{I}_q$ est le faisceau de $O_{S'_q}$-modules associé à $I_q \otimes_{R_q} R'_q$. Il suffit, pour prouver l'existence de $\widehat{\Delta}$, de montrer qu'il existe un entier a_1, indépendant de z, et une famille de $f_\lambda \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_\lambda}(\Omega_{\Gamma_\lambda/R}, q^{-a_1} I[1/\widehat{u}_\lambda])$, de cobord $f_{\lambda,\lambda'}$. Désignons par $(\ )_0$ le quotient d'un R-module par sa q-torsion. Comme $(\Omega_{\Gamma_\lambda/R} \otimes_{\Gamma_\lambda} \Gamma_{\lambda,\lambda'})_0$ et $(I_{\lambda,\lambda'}/I^2_{\lambda,\lambda'})_0$ sont tous deux des sous-$\Gamma_{\lambda,\lambda'}$-modules de type fini de $(\Omega_{\Gamma_{\lambda,\lambda'}/R})_q$ qui engendrent $(\Omega_{\Gamma_{\lambda,\lambda'}/R})_q$ en tant que $(\Gamma_{\lambda,\lambda'})_q$-module, il existe a_1 tel que, pour tout λ, λ', on ait :

$$q^{a_1}(\Omega_{\Gamma_\lambda/R} \otimes_{\Gamma_\lambda} \Gamma_{\lambda,\lambda'})_0 \subset (I_{\lambda,\lambda'}/I_{\lambda,\lambda'})^2_0 \ .$$

Par suite, si $a = a_0 + a_1$ il existe un entier b tel que :

$$\widehat{u}^b_{\lambda'} f_{\lambda,\lambda'}(\Omega_{\Gamma_\lambda/R}) \subset q^{a_1} I[1/\widehat{u}_\lambda]$$

(on remarquera que b dépend de $\widehat{z}$).

Si $\widehat{v}_\lambda$ sont des éléments de E tels que $\sum \widehat{v}_\lambda \widehat{u}^b_\lambda = 1$, on peut prendre $f_\lambda = \sum_{\lambda'} \widehat{v}_{\lambda'} \widehat{u}^b_{\lambda'} f_{\lambda,\lambda'}$. Cela achève de prouver l'existence de $\widehat{\Delta}$.

3.3.4. Soit, comme au 3.1, $(U'_{\lambda',0})$ une autre famille de modèles entiers contrôlant les éléments de Δ, soit $\widehat{\Delta}'$ un ensemble de relèvements des éléments de Δ qui est borné relativement à $(U_{\lambda,0})$ et montrons que $\widehat{\Delta}'$ est borné relativement à $(U_{\lambda,0})$. Soient $\widehat{z} \in \widehat{\Delta}$ et $\widehat{z}' \in \widehat{\Delta}'$ relevant $z \in \Delta$. Supposons que les (S'_λ) et les $(S'_{\lambda'})$ sont affines et que a convient pour $\widehat{\Delta}$ et $\widehat{\Delta}'$. Fixons λ. Les relèvements $\widehat{z}$ et $\widehat{z}'$ définissent des :

$$f_{\lambda,\lambda'} \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_{\lambda,\lambda'}}(I_{\lambda,\lambda'}/I^2_{\lambda,\lambda'}, q^{-a}\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, \widetilde{I})_0) \ .$$

où $I_{\lambda,\lambda'}$ est le noyau de $\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'} \to \Gamma_{\lambda,\lambda'}$, cf. numéro précédent.

Si a_0 est un entier tel que :

$$q^{a_0}(\Omega_{\Gamma_\lambda/R} \otimes_{\Gamma_\lambda} \Gamma_{\lambda,\lambda'})_0 \subset (I_{\lambda,\lambda'}/I^2_{\lambda,\lambda'})_0 \ ,$$

on a :

$$f_{\lambda,\lambda'}(\Omega_{\Gamma_\lambda/R}) \subset q^{-(a+a_0)}\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, \widetilde{I}) .$$

On en déduit que $\widehat{z}$ et $\widehat{z}'$ définissent un élément f_λ tel qu'il existe un entier a' tel que pour tout λ :

$$f_\lambda(\Omega_{\Gamma_\lambda/R}) \subset q^{-a'}\Gamma(S'_\lambda, \widetilde{I})_0 .$$

Donc $\max(\mathrm{a}, \mathrm{a}')$ convient, relativement à $(U_{\lambda,0})$, pour $\widehat{\Delta}'$.

3.4. Epaississement de la base : cas des groupes.

On reprend les hypothèses et les notations du 3.3. On suppose de plus que R_q est une $\mathbb{Q}$-algèbre et que X est un schéma en groupes abéliens sur S_q. L'application exponentielle identifie le schéma formel vectoriel associé à $\mathrm{Lie}(X)$ au complété formel de X le long de la section nulle. Il en résulte la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Lie}(X) \otimes_{R_q} I_q \xrightarrow{\exp} X(E_q) \to X(R'_q) \to 0 .$$

Proposition. — *Supposons que Δ soit un sous-groupe de $X(R'_q)$. Soit L_0 un sous-R-module de type fini de* $\mathrm{Lie}(X)$ *qui engendre* $\mathrm{Lie}(X)$ *en tant que R_q-module. Alors :*

1) il existe un sous-groupe $\widehat{\Delta}$ de $X(E'_q)$ qui est borné, et dont l'image dans $X(R'_q)$ est Δ. Plus précisément, si $\widehat{\Delta}'$ est un sous-ensemble borné de $X(E_q)$ d'image Δ dans $X(R'_q)$, il existe un entier a tel que $\widehat{\Delta}'+q^{-a}IL_0$ soit un sous-groupe borné de $X(E_q)$. De plus, si $\widehat{\Delta}'$ est un ensemble de relèvements d'éléments de Δ qui est borné, il existe un entier a' tel que :

$$\widehat{\Delta}' \subset \widehat{\Delta} + q^{-a'}IL_0$$
$$\widehat{\Delta}' \cap (\mathrm{Lie}(X) \otimes_{R_q} I_q) \subset q^{-a'}IL_0 .$$

Démonstration. : Elle est semblable à celle de la proposition 3.2.1. Il faut vérifier qu'un sous-ensemble $\widehat{\Delta}'$ de $\mathrm{Lie}(X) \otimes_{R_q} I_q$ est borné si et seulement si il existe un entier a tel que $\widehat{\Delta}' \subset q^{-a} I L_0$; cela résulte par exemple de la remarque 4 du 2.1.3.

3.5. Cas mixte.

Soit de plus P une extension de X comme au 3.2, de sorte que l'on a une suite exacte :

$$0 \to E^* \to \mathrm{Lie}(P) \to \mathrm{Lie}(X) \to 0 \, .$$

Le diagramme suivant est commutatif et ses lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^* \otimes_{R_q} I_q & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} I_q & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(X) \otimes_{R_q} I_q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^* \otimes_{R_q} E_q & \longrightarrow & P(E_q) & \longrightarrow & X(E_q) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^* \otimes_{R_q} R'_q & \longrightarrow & P(R'_q) & \longrightarrow & X(R'_q) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & .
\end{array}$$

Notons $(\mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q)_{\mathrm{fil}}$ le sous-E_q-module de $\mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q$ somme de $\mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} I_q$ et de $E^* \otimes_{R_q} E_q$. On déduit du diagramme ci-dessous la suite exacte :

$$0 \to (\mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q)_{\mathrm{fil}} \to P(E_q) \to X(R'_q) \to 0 \, .$$

Soit Δ un sous-ensemble de $X(R'_q)$ qui est contrôlé par une famille $(U_{\lambda,0})$ et soit, pour chaque entier a, $P^{(a)}_{\lambda,0}$ des modèles entiers de l'image inverse de U_λ dans P comme dans la remarque 1) du 3.1.3. Soit $\widehat{\Delta} \subset P(E_q)$ s'envoyant dans

Δ. On dit que $\widehat{\Delta}$ est borné s'il existe deux entiers a et a' tels que les éléments de $\widehat{\Delta}$ soient contrôlés par les $P_{\lambda,0}^{(a)}$ lorsqu'on prend $E^{(a')}$ comme structure entière pour E_q. Les propositions du 3.2 et 3.4 entraînent la proposition :

PROPOSITION. — *Supposons que Δ soit un sous-groupe de $X(R'_q)$. Soit L_0 un sous-R-module de type fini de* Lie(P) *qui engendre* Lie(P) *en tant que R_q-module et notons $(L_0 \otimes_R E^{(a)})_{\text{fil}}$ le sous-$E^{(a)}$-module de* $(\text{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q)_{\text{fil}}$ *intersection de* $(\text{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q)_{\text{fil}}$ *et de l'image de $L_0 \otimes_R E^{(a)}$ dans* $\text{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q$. *Alors il existe un sous-groupe $\widehat{\Delta}$ de $P(E_q)$ qui est borné et dont l'image dans $X(R'_q)$ est Δ. Il existe un entier a tel que*

$$\widehat{\Delta} \cap (\text{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q)_{\text{fil}} \subset q^{-a}(L_0 \otimes_R E^{(a)})_{\text{fil}} \ .$$

Si $\widehat{\Delta}'$ est borné et s'envoie dans Δ il existe un entier a' tel que :

$$\widehat{\Delta}' \subset \widehat{\Delta} + q^{-a'}(L_0 \otimes_R E^{(a')})_{\text{fil}} \ .$$

Construction de l'accouplement de périodes.

4.1.

4.1.1. Soit p un nombre premier. Soit $S = \mathrm{Spec}(R)$ un schéma affine, avec R intègre et normal, de corps des fractions de caractéristique 0. On suppose p non inversible dans R (sinon, la théorie p-adique qui suit est triviale) et que les nombres premiers $\ell \neq p$ sont inversibles dans R. Soit $A \to S[1/p]$ un schéma abélien. On suppose que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

- S est le spectre un trait (de caractéristique (O,p)) ;

- $A \to S[1/p]$ se prolonge en un schéma abélien $G \to S$;

- $A \to S[1/p]$ est muni d'une polarisation de degré premier à p et se prolonge en un schéma semi-abélien $G \to S$.

Soit $F = \mathrm{Frac}(R)$, $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $F_{p-\text{étale}}$ l'extension maximale de F contenue dans $\overline{F}$ telle que la clôture intégrale de $R[1/p]$ dans $F_{p-\text{étale}}$ soit ind-étale. Soit $\widetilde{F}$ une extension de $F_{p-\text{étale}}$ contenue dans $\overline{F}$ et telle que, si $\widetilde{R}$ est la fermeture intégrale de R dans $\widetilde{F}$;

- $\widetilde{F}$ contient $F_{p-\text{étale}}$.

- l'élévation à la puissance p est surjective dans $\widetilde{R}/p\widetilde{R}$.

Soit, comme au 1, $\widehat{\mathcal{W}_e}$ le R-épaississement p-adique d'ordre e de $\widehat{\widetilde{R}}$, universel parmi ceux qui sont sans p-torsion.

Soit $E(A)$ l'extension vectoriel universelle de A ([Ma-Me], [Me]). On a donc une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{O_{S[1/p]}}(R^1 f_* O_A, O_{S[1/p]}) \to E(A) \to A \to 0 \ ,$$

et l'homomorphisme $H^1_{dR}(A/R[1/p]) \to H^1_{dR}(E(A)/R[1/p])$ induit un isomorphisme de $H^1_{dR}(A/R[1/p])$ sur $\mathrm{Lie}(E(A))$.

Comme au 3.5, on a une suite exacte

$$\text{(I)} \qquad 0 \to \mathrm{Hom}_{R[1/p]-\mathrm{fil}}(H^1_{dR}(A/R[1/p]), \widehat{\mathcal{W}}_e[1/p]) \to E(A)(\widehat{\mathcal{W}}_e[1/p]) \\ \to A(\widehat{\widetilde{R}}\,[1/p]) \to 0\;.$$

où fil signifie que l'homomorphisme envoie $H^0(A, \Omega^1_{A/R[1/p]})$ dans le noyau $\widehat{\mathcal{I}}_e[1/p]$ de l'homomorphisme $\widehat{\mathcal{W}}_e[1/p] \to \widehat{\widetilde{R}}\ [1/p]$. Notons A_{p^∞} la torsion d'ordre une puissance de A. Comme $\widetilde{F} \supset F_{p-\text{étale}}$, on a $A(\overline{F})_{p^\infty} = A(\widetilde{R}[1/p])_{p^\infty}$.

D'après le théorème 2.2.2 et la remarque 3) du 2.2.3. , il existe une extension finie F_1 de F contenue dans $F_{p-\text{étale}}$, et une famille finie de Spec(R_1)-modèles entiers d'ouverts de A (R_1 désigne la clôture intégrale de R dans F_1), tels que les éléments de $A(\widetilde{R}[1/p])_{p^\infty}$ sont contrôlés par les $(U_{\lambda,0})$. Soit H^1_0 un sous-R-module de type fini de $H^1_{dR}(A/R[1/p])$ qui engendre $H^1_{dR}(A/R[1/p])$ en tant que $R[1/p]$-module et, pour tout entier a, $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{fil}}(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}_e^{(a)})$ le sous-R-module de $\mathrm{Hom}_R(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}_e^{(a)})$ des $f \in \mathrm{Hom}_R(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}_e^{(a)})$ qui envoient $H^0(A, \Omega^1_{A/R[1/p]}) \cap H^1_0$ dans $\widehat{\mathcal{I}}_e^{(a)}$ (où $\widehat{\mathcal{W}}_e^{(a)}$ est comme au 3) du 1.1.5). Comme, d'après la remarque 3 du 1.1.5, l'extension des scalaires de R à R_1 ne change pas $\widehat{\mathcal{W}}_e[1/p]$, il résulte du 3.5 qu'il existe un sous-groupe $\widehat{\Delta}$ de $E(A)(\widehat{\mathcal{W}}_e[1/p])$ qui est borné, et qui est tel qu'il existe un entier a avec une suite exacte induite par (I) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{fil}}(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}_e^{(a)}) & \to & \widehat{\Delta} & \to & A(\widetilde{R}[1/p])_{p^\infty} & \to & 0 \\ & & & & \wr\| & & \\ & & & & A(\overline{F})_{p^\infty}\;. & & \end{array}$$

Soit $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément du module de Tate de A. Si $\widehat{z}_n \in \widehat{\Delta}$ est un relèvement de z_n dans $\widehat{\Delta}$, et $f_n = p^n \widehat{z}_n$, on a $f_{n+1} \equiv f_n \bmod p^n$. Il en résulte que les f_n convergent pour la topologie p-adique dans $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{fil}}(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}_e^{(a)})$ vers un élément f, qui ne dépend pas du choix des f_n. Comme si $\widehat{\Delta}'$ est un autre choix pour $\widehat{\Delta}$, il existe a tel que :

$$\widehat{\Delta}' \subset \widehat{\Delta} + p^{-a}\,\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{fil}}(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}_e^{(a)})\;,$$

on voit que f ne dépend pas du choix de $\widehat{\Delta}$. On a donc défini un homomorphisme :

$$T_p(A_{\bar{\eta}}) \to \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{fil}}(H_0^1, \widehat{\mathcal{W}}_e^{(a)})$$

d'où :

$$T_p(A_{\bar{\eta}}) \to \mathrm{Hom}_{R[1/p]-\mathrm{fil}}(H_{dR}^1(A/R[1/p]), \widehat{\mathcal{W}}_e[1/p]) \ ,$$

et passant à la limite projective sur e :

$$T_p(A_{\bar{\eta}}) \times H_{dR}^1(A/R[1/p]) \to B_{dR}^+(\widetilde{R}/R) \ .$$

On voit que cet accouplement envoie $H^0(A, \Omega^1_{A/R[1/p]})$ dans le noyau de l'homomorphisme de $B_{dR}^+(\widetilde{R}/R)$ dans $\widehat{\widetilde{R}}\,[1/p]$.

4.2. Remarques. 1) On peut prendre $\widetilde{F} = \overline{F}$. Si R est lisse sur un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel parfait V et petit au sens de [Fa 90], on peut prendre $\widetilde{F} = F_{p-\text{étale}}$ [Fa 90]. Il me semble vraisemblable qu'on puisse déduire de [Fa 87] qu'on peut aussi prendre $\widetilde{F} = F_{p-\text{étale}}$ si R est étale de type fini sur $V[T_1, T_2]/(T_1T_2 - \pi)$ (pour V comme ci-dessus et π uniformisante de V).

2) Lorsqu'on suppose seulement $R[1/p]$ lisse sur $V[1/p]$, je ne sais pas si l'élévation à la puissance p est surjective dans $\overline{R}_{p-\text{étale}}$; G. Faltings construit cependant un anneau B_{dR}^+ pour traiter le cas de mauvaise réduction, sans permettre de ramification sur $\mathrm{Spec}(R[1/p])$ ([Fa 90]).

3) La présentation de G. Faltings est légèrement différente : il utilise ce que nous notons $B_{dR}^+(\widetilde{R}/\mathbb{Z})$ et un relèvement de la structure de $R[1/p]$-algèbre de $\widetilde{R}[1/p]$ à $B_{dR}^+(\widetilde{R}/\mathbb{Z})$.

4) Si l'on suppose seulement A muni d'une polarisation, on peut faire la construction après un changement de base propre et surjectif, d'après le lemme de Gabber ([De]) et la remarque 3) du 2.2.3..

BIBLIOGRAPHIE

[BLR] . — S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. — *Néron Models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3 Folge, Band 21, Springer Verlag, (1990).

[Br] . — L. Breen. — *Fonctions thêta et théorème du cube*, Lecture Notes in Math. 980 Springer Verlag, (1983).

[Col] R.F. Coleman. — Hodge-Tate periods and p-adic abelian integrals Invent. Math., 78, (1984), 351-379.

[Colm] P. Colmez. — Périodes p-adiques des variétés abéliennes, Math. Ann. 292, 629-644 (1992).

[De] P. Deligne. — Le lemme de Gabber. Dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell. L. Szpiro. Astérisque 127. 1985.

[Fa 87] G. Faltings. — Hodge-Tate structures and modular forms, Math. Ann., 278, (1987), 133-149.

[Fa 90] G. Faltings. — Crystalline cohomology and p-adic galois-representations. Proceedings of the JAMI Inaugural Conference. Algebraic analysis, Geometry and Number Theory, J.-I. Igusa ed., Johns-Hopkins Univ. Press, (1990), 25-79.

[Fa 92] G. Faltings. — Crystalline Cohomology of Semistable Curves, and P-adic Galois Representations, Journal of Algebraic Geometry Vol.1 (et 3), (1992), 61-81.

[Fa Ch] G. Faltings, C.-L.Chai. — *Degeneration of Abelian Varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 Folge Band 22 Springer Verlag (1990).

[Fo] J.-M. FONTAINE, avec un appendice de P. COLMEZ. — Le corps des périodes p-adiques. Ce volume.

[Fo Ill] J.-M. FONTAINE, L. ILLUSIE. — p-adic periods : a survey in Proceedings of the Indo-French Conf. on Geometry, NBHM, Hindustan Book Agency, Dehli (1993), 57-93.

[GIT] D. MUMFORD, J. FOGARTY. — *Geometric Invariant Theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34, Springer Verlag, (1982).

[Ill] L. ILLUSIE. — Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique [d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.] Séminaire Bourbaki n^0 726, juin 1990.

[Mat] H. MATSUMURA. — *Commutative Algebra*, Second Edition, Mathematics Lecture Note Series, Benjamin, (1980).

[Ma-Me] B. MAZUR, W. MESSING. — Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology, Lecture Notes in Math. 370, Springer Verlag, (1974).

[Me] W. MESSING. — The universal extension of an abelian variety by a vector group, Symp. Math. XI, Istituto Nazionale Di Alta Matematica, (1973).

[MB 81] L. MORET-BAILLY. — Familles de courbes et de variétés abéliennes sur $\mathbb{P}^1$ I. Descente des polarisations. Dans : Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, L. Szpiro, Astérisque 86, (1981).

[MB 85] L. MORET-BAILLY. — *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque 129, (1985).

[Mum 66] D. MUMFORD. — On the Equation Defining Abelian Varieties I, Invent. Math. 1, 287-354, (1966).

[Mum 72] D. MUMFORD. — An Analytic Construction of Degenerating Abelian Varieties over Complete Rings, Compositio Math. 3, (1972), 239-272. Reproduit dans [Fa Ch].

[Og] A. OGUS. — A p-adic analogue of the Chowla-Selberg formula. Dans : p-adic Analysis Proceedings, Trento 1989. F. Baldassari, S. Bosch, B. Dwork (Eds) Lecture Notes in Mathematics 1454, (1989).

[Ra] M. RAYNAUD. — Passage au quotient par une relation d'équivalence plate. Proceedings of a Conference on Local Fields. Driebergen. 1967. Ed. T.A. Springer.

[Ra-Gr] M. RAYNAUD, L. GRUSON. — Critères de platitude et de projectivité, Invent. Math. 13, p. 1-89, (1971).

J.-P. WINTENBERGER
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex (France)
e-mail : wintenb.@math.u-strasbg.fr