

Astérisque

FRANÇOIS BERTELOOT

Un principe de localisation pour les domaines faiblement pseudoconvexes de C^2 dont le groupe d'automorphismes holomorphes n'est pas compact

Astérisque, tome 217 (1993), p. 13-27

http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__13_0

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Un principe de localisation pour les domaines faiblement pseudoconvexes de $\mathbf{C}^2$ dont le groupe d'automorphismes holomorphes n'est pas compact.

François Berteloot

1 Introduction

Considérons un domaine borné de $\mathbf{C}^n$ dont le groupe d'automorphismes analytiques, $\text{Aut}(\Omega)$, n'est pas compact : cela revient à supposer l'existence d'un point ζ situé sur la frontière de Ω et adhérent à une orbite de $\text{Aut}(\Omega)$.

En généralisant un résultat de B. Wong [19], J.P. Rosay a montré que si la frontière de Ω est de classe C^2 et strictement pseudoconvexe en ζ , alors Ω est biholomorphiquement équivalent à la boule unité de $\mathbf{C}^n$ [18]. Une telle caractérisation de Ω par la géométrie de sa frontière au voisinage de ζ , lorsque ζ est un point de faible pseudoconvexité, ne semble possible qu'au prix d'hypothèses supplémentaires. Ainsi, suivant une voie inaugurée par R.E. Greene et S. G. Krantz, plusieurs auteurs supposent que Ω coïncide avec un “domaine modèle” au voisinage de ζ ([7, 12, 14, 15, 16]).

La méthode de dilatation des coordonnées [17], introduite par S. Pincuk, s'est avérée être un outil puissant pour l'étude de ces questions. Elle permit à E. Bedford et S. Pincuk de caractériser les domaines bornés pseudoconvexes de $\mathbf{C}^2$ dont le groupe d'automorphismes analytiques est non compact et la frontière globalement lisse et de type fini [2]. Ces mêmes auteurs ont récemment généralisé leurs résultats à certains domaines de $\mathbf{C}^n$, $n > 2$ ([3, 4]).

Cependant, lorsque la frontière de Ω n'est supposée régulière qu'au voisinage de ζ , la méthode de dilatation pose de délicats problèmes de familles normales. Ces difficultés furent surmontées dans un travail commun à G. Cœuré et l'auteur [8], où l'on caractérisait l'effet attractif exercé sur les disques analytiques par une hypersurface de type fini de $\mathbf{C}^2$. On y montrait alors que, lorsque Ω est

un domaine de $\mathbf{C}^2$ dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini en ζ , Ω est biholomorphiquement équivalent à un domaine modèle $\Omega_P = \{(w, z) \in \mathbf{C}^2 / \operatorname{Re} w + P(z) < 0\}$ où P est un polynôme réel, sous-harmonique et sans termes harmoniques.

L'objet de cette étude est de déterminer le polynôme P . En l'exprimant à l'aide des dérivées de la forme de Levi du bord de Ω en ζ , nous obtenons un analogue du théorème de Rosay pour un domaine Ω dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini en ζ (cf. théorème 2.1). Nous en déduisons un "principe de localisation" pour ces domaines (cf. théorème 2.3). La démonstration requiert de nouvelles dilatations, tant à partir du domaine Ω que du domaine Ω_P ; les questions de convergence sont résolues grâce aux résultats de [8].

2 Notations et présentation des résultats

Pour tout entier m , nous notons $\mathcal{P}_{2m}$ l'ensemble des polynômes réels des variables

z et $\bar{z}$, sous-harmoniques et sans termes harmoniques, dont le degré est au plus égal à $2m$. $\mathcal{H}_{2m}$ désigne le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{P}_{2m}$ qui sont homogènes de degré $2m$. L'espace des polynômes en z et $\bar{z}$ de degré inférieur ou égal à $2m$ est muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

Pour tout polynôme Q , on note $Q_{j\bar{q}}$ le polynôme dérivé : $\frac{\partial^{(j+q)} Q}{\partial z^j \partial \bar{z}^q}$.

À tout élément Q de $\mathcal{P}_{2m}$, on associe un domaine de $\mathbf{C}^2$, noté Ω_Q , défini par

$$\Omega_Q = \{(w, z) / \operatorname{Re} w + Q(z) < 0\}.$$

Soit Ω un domaine de $\mathbf{C}^2$ dont la frontière (notée $b\Omega$) est régulière, pseudoconvexe et de type fini ($2m$) en un point ζ . Il est bien connu (voir, par exemple, la proposition 1.1 de [10]) qu'il existe un système de coordonnées locales holomorphes ramenant ζ en $(0, 0)$ et dans lequel la frontière de Ω est définie par une équation du type :

$$\operatorname{Re} w + H(z) + 0(|z|^{2m} + |w|) = 0,$$

où $H \in \mathcal{H}_{2m}$.

Nous noterons $\mathcal{H}(\zeta)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_{2m}$ pour lesquels un tel système de coordonnées locales existe. On vérifie facilement que :

$$\mathcal{H}(\zeta) = \{\lambda H(e^{i\theta} z) ; \lambda \in \mathbf{R}^{+*}, \theta \in \mathbf{R}\}$$

où H est un élément quelconque de $\mathcal{H}(\zeta)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre principal résultat :

Théorème 2.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^2$ dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini au voisinage de ζ , $\zeta \in b\Omega$. S'il existe une suite $(\varphi_k)_k$ d'automorphismes analytiques de Ω et un point (a, b) de Ω tels que $\lim \varphi_k(a, b) = \zeta$, alors Ω est biholomorphiquement équivalent à Ω_H où $H \in \mathcal{H}(\zeta)$.*

Remarque 2.2 *Si H_1 et H_2 appartiennent à $\mathcal{H}(\zeta)$, alors Ω_{H_1} et Ω_{H_2} sont évidemment biholomorphiquement équivalents.*

On déduit immédiatement du théorème 2.1 et du lemme 2.6 énoncé ci-après le principe de localisation suivant :

Théorème 2.3 *Soient Ω_j ($j = 1, 2$) deux domaines bornés de $\mathbb{C}^2$ dont les frontières sont pseudoconvexes et de types finis aux voisinages des points $\zeta_j \in b\Omega_j$. Supposons qu'il existe des suites $(\varphi_{k,j})_k$ d'automorphismes analytiques de Ω_j et des points (a_j, b_j) de Ω_j tels que $\lim \varphi_{k,j}(a_j, b_j) = \zeta_j$. Alors Ω_1 et Ω_2 sont biholomorphiquement équivalents si et seulement si $\mathcal{H}(\zeta_1) = \mathcal{H}(\zeta_2)$.*

Remarque 2.4 *Les théorèmes 2.1 et 2.3 restent probablement vrais lorsque le domaine Ω n'est pas borné mais tel que son adhérence soit contenue dans un ouvert taut. Le lemme 2.5 montre en particulier que les domaines Ω_P ($P \in \mathcal{P}_{2m}$) satisfont cette condition. Une telle version de nos résultats caractériserait donc les domaines modèles Ω_H ($H \in \mathcal{H}_{2m}, m \in \mathbb{N}^*$) parmi certains domaines non bornés de $\mathbb{C}^2$ dont le groupe d'automorphismes est non compact.*

Il serait également intéressant de caractériser les polynômes P de $\mathcal{P}_{2m}$ dont le domaine Ω_P associé est biholomorphe à un ouvert borné de $\mathbb{C}^2$.

La démonstration du théorème 2.1 requiert l'utilisation des lemmes suivants ; ils seront établis dans le § 4.

Lemme 2.5 *Soit σ_∞ une fonction de classe C^2 sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ telle que $\sigma(0) = 0$ et $\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial} \partial \sigma_\infty = +\infty$. Soit $(\sigma_k)_k$ une suite de fonctions sous-harmoniques convergeant uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers σ_∞ . Soient ω un domaine quelconque de $\mathbb{C}^p$ ($p \geq 1$) et z_0 un point fixé dans ω . Alors toute suite d'applications holomorphes $h_k : \omega \rightarrow \mathbb{C}^2$, telle que $h_k(\omega) \subset \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 ; \operatorname{Re} w + \sigma_k(z) < 0\}$ et $\{h_k(z_0), k \in \mathbb{N}\}$ soit relativement compact dans $\{(w, z) \in \mathbb{C}^2 ; \operatorname{Re} w + \sigma_\infty(z) < 0\}$, est une famille normale.*

Lemme 2.6 *Soient $Q \in \mathcal{P}_{2m}$ et $H \in \mathcal{H}_{2m}$. Si Ω_Q et Ω_H sont biholomorphes, alors la partie homogène de plus haut degré de Q est égale à $\lambda H(e^{i\nu} z)$, où $\lambda > 0$ et $\nu \in [0, 2\pi]$.*

Lemme 2.7 *Soit $Q \in \mathcal{P}_{2m}$ tel que $\deg(Q) > 2$. On suppose qu'il existe une suite de nombres complexes $(z_k)_k$ telle que $\lim |z_k| = +\infty$ et $\lim Q_{j\bar{q}}(z_k) = 0$ pour $j, q > 0$ et $(j + q) < \deg Q$. Alors, il existe $\nu \in [0, 2\pi]$ tel que :*

i) $\lim \operatorname{Re}(e^{i\nu} z_k) = 0 ;$

ii) $Q = \lambda[(2 \operatorname{Re} e^{i\nu} z)^s - 2(e^{i\nu} z)^s]$ où $\lambda > 0$ et $s = \deg Q$.

Lemme 2.8 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbf{C}^2$ dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini au voisinage de ζ . On suppose qu'il existe un biholomorphisme f de Ω sur Ω_Q ($Q \in \mathcal{P}_{2m}$) ainsi qu'une suite (w_k, z_k) dans Ω_Q tels que :*

i) $\lim(|w_k|^2 + |z_k|^2) = +\infty ;$

ii) $|\operatorname{Re} w_k + Q(z_k)| \geq c > 0 ; \forall k \in \mathbf{N} ;$

iii) $\lim f(w_k, z_k) = \zeta .$

Alors : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(-1 + it, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(-1 - it, 0) = \zeta .$

3 Preuve du théorème 2.1

La démonstration s'effectue en trois étapes.

Soit $2m$ le type de la frontière de Ω en ζ et H un élément de $\mathcal{H}(\zeta)$. Il a été établi dans [8] que pour tout point (a, b) de Ω , il existe un polynôme Q appartenant à $\mathcal{P}_{2m}$ et un biholomorphisme Ψ de Ω sur Ω_Q tels que $\Psi(a, b) = (-1, 0)$. Notre première étape précise ce résultat :

• *Il existe $(a, b) \in \Omega$ tel que, pour tout $Q \in \mathcal{P}_{2m}$, l'existence d'un biholomorphisme $\Psi : \Omega \rightarrow \Omega_Q$ vérifiant $\Psi(a, b) = (-1, 0)$ force l'égalité $\deg Q = 2m$.*

Quitte à effectuer un changement de variable holomorphe local, on supposera que $\zeta = (0, 0)$ et que pour un voisinage V de $(0, 0)$ assez petit :

$$(w, z) \in V \cap \Omega \Leftrightarrow \operatorname{Re} w + H(z) + 0(|w| + |z|^{2m}) < 0.$$

Considérons une suite de points $(a_k, b_k) = (\frac{-1}{k}, 0)$ qui, pour k assez grand, sont dans $\Omega \cap V$ et une suite de biholomorphismes $\Psi_k : \Omega \rightarrow \Omega_{Q_k}$ ($Q_k \in \mathcal{P}_{2m}$) tels que $\Psi_k(a_k, b_k) = (-1, 0)$. Il nous suffit d'établir que $\deg Q_k = 2m$ pour k assez grand. En composant Ψ_k avec une transformation du type $(w, z) \mapsto (w, \lambda_k z)$ ($\lambda_k > 0$), on peut supposer que $\|Q_k\| = 1$ et donc que, après une éventuelle extraction, $(Q_k)_k$ converge vers un élément Q_∞ de $\mathcal{P}_{2m}$.

Soit $(\Delta_k)_k$ la suite de dilatations définies par $\Delta_k(w, z) = (kw, k^{1/2m}z)$. Soient également $(\tilde{\Omega}_k)_k$ et $(\tilde{D}_k)$ les suites de domaines définis par $\tilde{\Omega}_k =$

$\Delta_k(\Omega \cap V)$ et $\tilde{D}_k = \Psi_k(\Omega \cap V)$. Posons $\tilde{\Psi}_k = \Psi_k|_{\Omega \cap V} \circ \Delta_k^{-1}$ et étudions la suite de biholomorphismes $(\tilde{\Psi}_k)_k$ de $\tilde{\Omega}_k$ sur $\tilde{D}_k$. On vérifie sans peine que :

$$(3.1) \quad \tilde{\Psi}_k(-1, 0) = (-1, 0) \quad \text{pour tout } k.$$

$$(3.2) \quad \tilde{\Omega}_k \text{ converge vers } \Omega_H.$$

Montrons que, de plus :

$$(3.3) \quad \tilde{D}_k \text{ converge vers } \Omega_{Q_\infty}.$$

Ω_{Q_k} converge vers Ω_{Q_∞} car Q_k converge vers Q_∞ . Le théorème de Montel montre qu'après une éventuelle extraction la suite $\Psi_k^{-1} : \Omega_{Q_k} \rightarrow \Omega$ converge uniformément sur tout compact de Ω_{Q_∞} . Or, il n'existe aucune courbe holomorphe non triviale passant par ζ et contenue dans $b\Omega$, ainsi ζ est la seule valeur d'adhérence de $(\Psi_k^{-1})_k$ et donc Ψ_k^{-1} converge vers ζ . Il s'en suit que pour tout compact K contenu dans Ω_{Q_∞} , on a $\Psi_k^{-1}(K) \subset \Omega \cap V$ (c'est-à-dire $K \subset \tilde{D}_k$) pour k assez grand. Par ailleurs, si K est un compact contenu dans $\Omega_{Q_\infty}^c$ alors $K \subset \Omega_{Q_k}^c \subset \tilde{D}_k^c$ pour k assez grand. Ceci établit (3).

Enfin, montrons qu'à une éventuelle extraction près :

(3.4) *La suite $(\tilde{\Psi}_k)_k$ converge uniformément sur tout compact de Ω_H vers une application holomorphe $\tilde{\Psi} : \Omega_H \rightarrow \Omega_{Q_\infty}$ telle que $\tilde{\Psi}(-1, 0) = (-1, 0)$; la suite $(\tilde{\Psi}_k^{-1})_k$ converge uniformément sur tout compact de Ω_{Q_∞} .*

La convergence de $(\tilde{\Psi}_k)_k$ vers une application $\tilde{\Psi}$ à valeurs dans $\overline{\Omega}_{Q_\infty}$ résulte du lemme 2.5. Puisque $\tilde{\Psi}(-1, 0) = \lim \tilde{\Psi}_k(-1, 0) = (-1, 0)$, le principe du maximum appliqué à $\operatorname{Re} \tilde{\Psi}_1 + Q_\infty \circ \tilde{\Psi}_2$ (où $\tilde{\Psi} = (\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2)$) montre qu'en fait $\tilde{\Psi}(\Omega_H) \subset \Omega_{Q_\infty}$. La convergence de $(\tilde{\Psi}_k^{-1})_k$ est établie grâce à la proposition du § 3 de [8].

Un théorème de Greene et Krantz (cf. [13], pp. 161-162) montre que, sous les conditions 4.1 à 3.4, $\tilde{\Psi}$ réalise un biholomorphisme de Ω_H sur Ω_{Q_∞} . Ainsi, d'après le lemme 2.6, $\deg Q_\infty = \deg H = 2m$.

La conclusion s'en suit puisque les polynômes Q_k sont de degré au plus $2m$.

La seconde étape de notre démonstration consiste à exhiber un "bon" domaine modèle, $\Omega_{\tilde{Q}}$, biholomorphe à Ω .

• Il existe un polynôme $\hat{Q}$ ($\hat{Q} \in \mathcal{P}_{2m}$) dont la partie homogène de plus haut degré est égale à H , ainsi qu'un biholomorphisme $\hat{\Psi}$ de Ω sur $\Omega_{\hat{Q}}$ tel que $\hat{\Psi}(a, b) = (-1, 0)$.

Soit $\hat{\Psi}$ le biholomorphisme de Ω sur $\Omega_{\hat{Q}}$ construit dans [8]. Alors $\hat{\Psi}(a, b) = (-1, 0)$ et $\hat{Q}$ est la limite d'une suite de polynômes $(\hat{Q}_k)_k$ définis par :

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{\varepsilon_k} \sum_{l=2}^{2m} (\tau_k)^l P_k^l$$

où $(\varepsilon_k)_k, (\tau_k)_k$ sont des suites réelles strictement positives de limites nulles et $(P_k^l)_k$ ($l = 2, \dots, 2m$) des suites de polynômes homogènes de degré l telles que : $\lim \|P_k^l\| = 0$ si $l < 2m$ et $\lim P_k^{2m} = H$. D'après la première étape, $\hat{Q}$ est de degré $2m$ et donc $\tau_k \approx \varepsilon_k^{1/2m}$. Ainsi la partie homogène de plus haut degré de $\hat{Q}$ est proportionnelle à H . Il reste à composer $\hat{\Psi}$ avec une transformation $(w, z) \rightarrow (w, \lambda z), \lambda > 0$ pour assurer l'égalité.

Remarque 3.1 On montre dans [8] qu'il existe une suite de biholomorphismes $(T_k)_k$, définis sur $\Omega \cap V$, telle que $(T_k(\Omega \cap V))_k$ converge vers $\Omega_{\hat{Q}}$. Le biholomorphisme $\hat{\Psi}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(T_k \circ \varphi_k)_k$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω .

La fin de la démonstration repose sur l'étude du "comportement asymptotique" de la suite $\hat{\Psi} \circ \varphi_k(a, b)$. A cet effet, nous noterons (w_k, z_k) pour $\hat{\Psi} \circ \varphi_k(a, b)$ et ε_k désignera la quantité $|r_{\hat{Q}}(\hat{\Psi} \circ \varphi_k(a, b))|$ où $r_{\hat{Q}}(w, z) = \operatorname{Re} w + \hat{Q}(z)$. Nous établirons que :

- i) Si $\lim \varepsilon_k = 0$ et $\limsup |z_k| = +\infty$ alors $H = \lambda[(2 \operatorname{Re} z)^{2m} - 2 \operatorname{Re} z^{2m}], (\lambda > 0)$ et Ω est biholomorphe à Ω_H .
- ii) Si $\lim \varepsilon_k = 0$ et $\limsup |z_k| < +\infty$ alors $\hat{Q}(z + z_0) = H(z), (z_0 \in \mathbb{C})$ et Ω est biholomorphe à Ω_H .
- iii) Si $\limsup \varepsilon_k > 0$ alors $H = \lambda |z|^{2m} (\lambda > 0)$ et Ω est biholomorphe à Ω_H .

Lorsque $\hat{Q}$ est de degré 2, la preuve du théorème 2.1 est achevée dès la seconde étape. Nous supposons donc dorénavant que $\deg \hat{Q} > 2$. Commençons par considérer le cas où $\lim \varepsilon_k = 0$. Soit $(Q_k)_k$ la suite de polynômes définis par :

$$Q_k(z) = \frac{1}{\varepsilon_k} \sum_{j,q>0} \frac{\hat{Q}_{j\bar{q}}(z_k)}{(j+q)!} \nu_k^{j+q} z^j \bar{z}^q$$

où $\nu_k > 0$ est choisi de façon telle que $\|Q_k\| = 1$.

On remarquera que :

$$\varepsilon_k Q_k(z) = \hat{Q}(\nu_k z + z_k) - \sum_{j=1}^{2m} \frac{\nu_k^j}{j!} (\hat{Q}_j(z_k) z^j + \bar{\hat{Q}}_j(z_k) \bar{z}^j) - \hat{Q}(z_k).$$

Ainsi $Q_k \in \mathcal{P}_{2m}$ et l'on pourra supposer que Q_k converge vers un élément Q_∞ de $\mathcal{P}_{2m}$ tel que $\|Q_\infty\| = 1$.

Posons $\Phi_k(w, z) = (w', z')$ où

$$\begin{cases} w' &= \frac{1}{\varepsilon_k} [w - w_k - \varepsilon_k + 2 \sum_{j=1}^{2m} \frac{\hat{Q}_j(z_k)}{j!} (z - z_k)^j] \\ z' &= \frac{1}{\nu_k} [z - z_k] \end{cases}$$

On vérifie, grâce aux identités précédentes, que Φ_k réalise un biholomorphisme de $\Omega_{\hat{Q}}$ sur Ω_{Q_k} tel que $\Phi_k(w_k, z_k) = (-1, 0)$.

Soit $(T_k)_k$ la suite de “transformations” évoquée dans la remarque 3.1. Posons $\tilde{\Omega}_k = T_k(\Omega \cap V)$ et $\tilde{D}_k = \Phi_k \circ \hat{\Psi}(\Omega \cap V)$. On dispose alors d’une suite de biholomorphismes $\tilde{\Psi}_k$ de $\tilde{\Omega}_k$ sur $\tilde{D}_k$ définis par $\tilde{\Psi}_k = (\Phi_k \circ \hat{\Psi})|_{\Omega \cap V} \circ T_k^{-1}$. En procédant comme dans la première étape, on montre que $(\tilde{\Psi}_k)_k$ converge vers un biholomorphisme $\tilde{\Psi}$ de $\Omega_{\hat{Q}}$ sur Ω_{Q_∞} tel que $\tilde{\Psi}(-1, 0) = (-1, 0)$. Ainsi $\tilde{\Psi} \circ \hat{\Psi}$ est un biholomorphisme de Ω sur Ω_{Q_∞} tel que $\tilde{\Psi} \circ \hat{\Psi}(a, b) = (-1, 0)$. Donc, d’après la première étape, Q_∞ est de degré $2m$. Or, par définition même de la suite $(Q_k)_k$, ceci n’est possible que si $\tau_k \approx \varepsilon_k^{1/2m}$ et $\lim \hat{Q}_{j\bar{q}}(z_k) = 0$ pour $j, q > 0$ et $(j + q) < 2m$. Alors, lorsque $\limsup |z_k| = +\infty$, le lemme 2.7 montre qu’à un changement de variable inessentiel près, $\hat{Q} = \lambda[(2 \operatorname{Re} z)^{2m} - 2 \operatorname{Re} z^{2m}]$, $\lambda > 0$. L’assertion (i) résulte donc de la seconde étape. Lorsque $\limsup |z_k| < +\infty$, on peut, sans perte de généralité, supposer que $\lim z_k = z_0$. Alors $\hat{Q}_{j\bar{q}}(z_0) = 0$ pour $j, q > 0$ et $(j + q) < 2m$, si bien que la transformation Φ , définie par :

$$\Phi(w, z) = (w + 2 \sum_{j=1}^{2m} \frac{\hat{Q}_j(z_0)}{j!} (z - z_0)^j, z - z_0)$$

réalise un biholomorphisme de $\Omega_{\hat{Q}}$ sur Ω_H . Ceci justifie l’assertion (ii).

Considérons pour finir le cas où $\limsup \varepsilon_k > 0$. Soit $(g_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le groupe à un paramètre d’automorphismes analytiques de Ω défini par :

$$g_t(w, z) = \hat{\Psi}^{-1}[\hat{\Psi}(w, z) + (0, it)].$$

D’après le lemme 2.8, on a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} g_t(w, z) = \zeta$ pour tout $(w, z) \in \Omega$. L’assertion (iii) résultera alors de l’étude menée dans les paragraphes 3 et 4 de [2] et

du lemme 6 de [3], pourvu que l'action définie par $(g_t)_t$ puisse être prolongée différentiablement à $\bar{\Omega}$ sur un voisinage de ζ . Justifions tout d'abord l'existence d'un prolongement continu. D'après [11], il existe un voisinage W de ζ et une fonction continue :

$$\begin{aligned} \sigma : (b\Omega \cap \bar{W}) \times (\bar{\Omega} \cap W) &\rightarrow]-\infty, 0] \\ (\eta, (w, z)) &\mapsto \sigma_\eta(w, z) \end{aligned}$$

telle que :

- i) σ_η est p.s.h. sur $\Omega \cap W$;
- ii) $\sigma_\eta < 0$ sur $(\bar{\Omega} \cap W) - \{\eta\}$ et $\sigma_\eta(\eta) = 0$;
- iii) $|\sigma_\eta(w, z) - \sigma_\eta(w', z')| \leq C|(w, z) - (w', z')|$ pour tous $\eta \in b\Omega \cap \bar{W}$, $(w, z) \in \bar{\Omega} \cap W$.

Puisque σ est continue, il existe $a > 0$ tel que $\sigma_\eta(w, z) < -a$ pour tout $\eta \in b\Omega \cap \bar{W}$ et tout $(w, z) \in \bar{\Omega} \cap bW$. On voit facilement que si U est au voisinage de ζ assez petit : $\sigma_\eta(w, z) > \frac{-a}{2}$ pour tout $\eta \in b\Omega \cap \bar{U}$ et tout $(w, z) \in \bar{\Omega} \cap U$. Définissons alors $\tilde{\sigma}_\eta$ par $\tilde{\sigma}_\eta = \sup(\sigma_\eta, -a)$ sur $\bar{\Omega} \cap W$ et $\tilde{\sigma}_\eta = -a$ sur $\Omega \cap W^c$. On vérifie aisément que $\tilde{\sigma}_\eta$ satisfait les propriétés suivantes :

- i) $\tilde{\sigma}_\eta$ est p.s.h. négative sur Ω ;
- ii) $\tilde{\sigma}_\eta(\eta) = 0$;
- iii) $|\tilde{\sigma}_\eta(w, z) - \tilde{\sigma}_\eta(w', z')| \leq C|(w, z) - (w', z')|$ pour $(w, z), (w', z') \in \bar{\Omega} \cap U$.

Soit V_1 un voisinage de ζ assez petit pour que $b\Omega \cap V_1$ soit régulière. En appliquant le lemme de Hopf à la fonction $\tilde{\sigma}_\eta \circ g_{-t}$, tout en s'assurant d'une certaine uniformité en η et t , on obtient : $\tilde{\sigma}_\eta \circ g_{-t}(w', z') \leq -Md((w', z'), b\Omega)$, $\forall \eta \in b\Omega \cap \bar{U}$, $\forall (w', z') \in \Omega \cap V_1$, $\forall t \in [-1, 1]$ où $M > 0$.

Si V_0 est un voisinage de ζ assez petit, alors pour tout $(w, z) \in \Omega \cap V_0$, il existe $\eta \in b\Omega \cap U$ tel que $|\eta - (w, z)| = d((w, z), b\Omega)$. Compte tenu des propriétés ii) et iii) de $\tilde{\sigma}_\eta$, il vient donc : $\forall (w, z) \in \Omega \cap V_0$, $\exists \eta \in b\Omega \cap U$ tel que $\tilde{\sigma}_\eta(w, z) \geq -Cd((w, z), b\Omega)$.

De ces deux majorations, on déduit :

$$\forall (w, z) \in \Omega \cap V_0, \forall t \in [-1, 1] : g_t(w, z) \in \Omega \cap V_1 \Rightarrow$$

$$d[g_t(w, z), b\Omega] \leq \frac{C}{M}d[(w, z), b\Omega]$$

En utilisant cette estimation et en adaptant la démonstration de [9], on obtient l'existence d'un voisinage W_2 de ζ tel que :

$$\forall t \in [-1, 1], \forall (w, z) \in W_2 \cap \Omega, \forall (w', z') \in W_2 \cap \Omega : \\ |g_t(w, z) - g_t(w', z')| \lesssim |(w, z) - (w', z')|^{1/2m}$$

Les travaux de Catlin montrent que $b\Omega$ satisfait la condition R locale en ζ (cf. [6] preuve du théorème 3). L'utilisation des coordonnées canoniques de Bergman permet alors d'établir que ce prolongement est en fait différentiable.

4 Preuves des lemmes

Preuve du lemme 2.5

Il suffit de considérer le cas où ω est le disque unité de $\mathbb{C}$. En effet, un résultat de H. Alexander (cf. [1] théorème 6.2) stipule qu'alors la conclusion reste vraie lorsque ω est une boule euclidienne de $\mathbb{C}^p$ et le cas général s'en déduit facilement.

Soit D le disque unité de $\mathbb{C}$ et $h_k : D \rightarrow \mathbb{C}^2$ une suite d'applications analytiques satisfaisant les hypothèses du lemme 2.5. On supposera pour fixer les idées que $h_k(0) = (-1, 0)$ et que h_k est continue sur $\bar{D}$ pour tout k . Notons $h_k = (h_{k_1}, h_{k_2})$. La formule de Gauss donne :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} \int_{|u| \leq t} \Delta(\sigma_k \circ h_{k_2}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_k \circ h_{k_2}(e^{i\theta} d\theta) - \sigma_k(0).$$

On en déduit que pour tout $r > 1$:

$$\left(\int_r^1 \frac{dt}{t} \right) \left(\int_{h_{k_1}(|u| \leq r)} \Delta \sigma_k \right) \leq -\operatorname{Re} h_{k_1}(0) - \sigma_k(0) \lesssim 1.$$

Il en résulte que, si K_1 et K_2 sont des compacts disjoints de $\mathbb{C}$ tels que $\int_{K_1} \Delta \sigma_\infty$ et $\int_{K_2} \Delta \sigma_\infty$ soient assez grands, alors $h_{k_1}(|u| \leq r)$ ne contient ni K_1 ni K_2 pour k assez grand. La normalité de $(h_{k_2})_k$ en découle, celle de $(h_{k_1})_k$ suit puisque $\operatorname{Re} h_{k_1} \leq -\sigma_k \circ h_{k_2}$.

Preuve du lemme 2.6

• Notons Ψ un biholomorphisme de Ω_H sur Ω_Q . D'après [2] (voir aussi [5]), il existe une fonction $g \in \mathcal{O}(\Omega_Q) \cap C(\bar{\Omega}_Q)$ et des entiers k et N tels que, pour $(|w| + |z|)$ assez grand :

- i) $|g(w, z)| \approx [|w|^{2k} + |z|^2]^{1/N}$,
- ii) $\arg g(w, z) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

La fonction $\Phi(w, z) = \frac{\alpha g(w, z) - 1}{\alpha g(w, z) + 1}$, où α est une constante positive assez petite, est holomorphe bornée sur Ω_Q et vérifie :

- i) $|\Phi(w, z)| < 1$ pour $(|w| + |z|)$ assez grand.
- ii) $\lim_{(|w|+|z|) \rightarrow +\infty} \Phi(w, z) = 1$.

• Vérifions l'existence de $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \inf |\Psi(x + it_0, 0)| < +\infty$: si un tel réel n'existait pas, on aurait $\lim_{x \rightarrow 0^-} \Phi \circ \Psi(x + it, 0) = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et la fonction $\Phi \circ \Psi$ serait identique à 1 sur le demi-plan $\operatorname{Re} w < 0$, ce qui est absurde.

• On peut donc supposer que $\lim_n \Psi(x_n, 0) = (w_0, z_0) \in b\Omega_Q$, avec $x_n < 0$ et $\lim_n x_n = 0$. Alors, d'après [9], Ψ se prolonge homéomorphiquement au bord de Ω_H sur un voisinage de $(0, 0)$. Les résultats de Bell, (cf. [6]) montrent que ce prolongement est difféomorphe. On en déduit que la partie homogène de plus haut degré de Q est de la forme annoncée.

Preuve du lemme 2.7

Notons $z_k = \lambda_k e^{i\theta_k}$ et θ une valeur d'adhérence de $(\theta_k)_k$. On supposera que $\theta = \lim \theta_k$ et, quitte à changer z en $ize^{-i\theta}$, que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Soit $P = Q_{11}$; $P = H^{(0)} + \dots + H^{(v)}$ où $H^{(j)}$ désigne un polynôme homogène de degré j . On a donc par hypothèse :

$$(*) \quad |P_{j\bar{q}}(z_k)| \lesssim 1 \quad \text{pour } j, q \geq 0.$$

Comme $P_{j\bar{q}}(z_k) = \lambda_k^{r-(j+q)} [H_{j\bar{q}}^{(r)}(e^{i\theta_k}) + 0(\frac{1}{\lambda_k})]$ pour $j + q \leq r$, on en déduit que $H_{j\bar{q}}^{(r)}(i) = 0$ pour $j + q < r$. De sorte que $H^{(r)}(z + i) = H^{(r)}(z)$ et $H^{(r)} = \alpha_r (\operatorname{Re} z)^r$, $\alpha_r \in \mathbf{R}$. Il s'en suit que $P_{r-1,0}(z_k) = \alpha_r r! (\operatorname{Re} z_k) + 0(1)$ et donc que $|\operatorname{Re} z_k| \lesssim 1$.

Ainsi $P - H^{(r)}$ satisfait également la condition (*) et, en itérant ce procédé, on obtient :

$$P = \sum_{p=0}^r \alpha_p (\operatorname{Re} z)^p.$$

Soit x une valeur d'adhérence de $(\operatorname{Re} z_k)_k$ puisque pour $(j + q) < r$: $P_{j\bar{q}}(x) = \lim P_{j\bar{q}}(\operatorname{Re} z_k) = \lim P_{j\bar{q}}(z_k) = 0$, il est clair que $x = 0$ (donc

$\lim \operatorname{Re} z_k = 0$) et que $P = \alpha_r(\operatorname{Re} z)^r$. Q ne possédant pas de termes harmoniques, on a alors :

$$Q = \lambda[(2 \operatorname{Re} z)^{r+2} - 2 \operatorname{Re} z^{r+2}]$$

où $\lambda > 0$.

Enfin, P n'étant pas constant, on remarquera que $(\theta_k)_k$ ne peut avoir qu'une seule valeur d'adhérence.

Preuve du lemme 2.8

• Soit Φ la fonction holomorphe sur Ω_Q introduite au début de la preuve du lemme 2.6. Choisissons une constante $A > 0$ assez grande et $a > 0$ une constante assez petite de façon à ce que la fonction $\tilde{\Phi}$ définie par $\tilde{\Phi} = \max(|\Phi|^2 - 1, -a)$ sur $\Omega_Q - \{|w|^2 + |t|^2 \leq A\}$ et $\tilde{\Phi} = -a$ sur $\Omega_Q \cap \{|w|^2 + |t|^2 \leq A\}$ soit plurisousharmonique négative sur Ω_Q . Par construction, $\tilde{\Phi}$ satisfait l'estimation :

$$(4.1) \quad |\tilde{\Phi}(w, z)| \lesssim [|w|^2 + |z|^{2m}]^{-1/N} \quad \text{pour } |w|^2 + |z|^2 \geq M > 0$$

où M est une constante assez grande.

En appliquant le lemme de Hopf à $\tilde{\Phi} \circ f^{-1}$, il est classique de déduire de 4.1 l'existence d'un voisinage V de ζ tel que

$$(4.2) \quad d(f(w, z), b\Omega) \lesssim (|w|^2 + |z|^{2m})^{-1/N}$$

pour $f(w, z) \in V$ et $|w|^2 + |z|^2 \geq M$.

($d(\cdot, b\Omega)$ désignant la distance euclidienne au bord de Ω).

• Soit $(w, z_k) \in \Omega_Q$ tel que $f(w, z_k) \in V$. La proposition du § 3 de [8], appliquée au disque analytique $h : \Delta \rightarrow \Omega$ défini par $h(u) = f(w + |c_k|u, z_k)$ où $c_k = \operatorname{Re} w + Q(z_k)$ permet d'obtenir aisément :

$$(4.3) \quad |u| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |h(u) - h(0)| \lesssim d(h(0), b\Omega)^{1/2m}.$$

Les estimations suivantes, fondamentales pour la suite, découlent alors immédiatement de 4.2, 4.3 et des inégalités de Cauchy.

$$(4.4) \quad \left| \frac{\partial f_1}{\partial w}(w, z_k) \right|, \left| \frac{\partial f_2}{\partial w}(w, z_k) \right| \lesssim \frac{1}{|\operatorname{Re} w + Q(z_k)| [|w|^2 + |z_k|^{2m}]^\alpha}$$

pour $f(w, z_k) \in V \cap \Omega$, $|w|^2 + |z_k|^2 \geq M$

où $\alpha = (2mN)^{-1}$.

• Soit $(F_k)_k$ la suite d'applications de $[0, +\infty[$ dans Ω par $F_k(x) = f(w_k - x, z_k)$. Nous montrons, dans un premier temps, que $(F_k)_k$ converge uniformément

vers ζ . Supposons que cela ne soit pas. Puisque $\lim F_k(0) = \zeta$ (cf. iii), on trouverait une boule B centrée en ζ et contenue dans V ainsi qu'une suite $(X_k)_k, X_k \in]0, +\infty[$, telles que $F_k(X_k) \in bB$ et $F_k([0, X_k]) \subset \bar{B} \subset V$. Compte tenu de (4.4) et (ii), on aurait alors :

$$(4.5) \quad |F_k(X_k) - F_k(0)| \lesssim \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+c)[(x - \operatorname{Re} w_k)^2 + B_k]^\alpha}$$

où $B_k = (\operatorname{Im} w_k)^2 + |z_k|^{2m}$.

Ceci s'avèrera absurde lorsque nous aurons montré que l'intégrale du second membre, que nous noterons $I_k = \int_0^{+\infty} h_k(x)dx$, tend vers 0. Si, après une éventuelle extraction, $\lim \operatorname{Re} w_k = -\infty$ alors $h_k(x) \leq (x+c)^{-(2\alpha+1)}$ pour k assez grand et le théorème de Lebesgue montre que $\lim I_k = 0$. Dans le cas contraire, il existe $K \geq 0$ tel que $\operatorname{Re} w_k \geq -K$ pour tout k . Puisque $\operatorname{Re} w_k = -Q(z_k)$, la condition (i) se traduit par $\lim B_k = +\infty$. En posant $y = x - \operatorname{Re} w_k$, il vient :

$$(4.6) \quad I_k = \int_K^\infty \frac{dy}{(y+c+\operatorname{Re} w_k)[y^2+B_k]^\alpha} + \int_{-\operatorname{Re} w_k}^K \frac{dy}{(y+c+\operatorname{Re} w_k)[y^2+B_k]^\alpha}.$$

On montre facilement à l'aide du théorème de Lebesgue que la première de ces deux intégrales tend vers 0. Pour la seconde, on utilise la majoration suivante :

$$(4.7) \quad \int_{-\operatorname{Re} w_k}^K \frac{dy}{(y+c+\operatorname{Re} w_k)[y^2+B_k]^\alpha} \leq B_k^{-\alpha} \int_{-\operatorname{Re} w_k}^B \frac{dy}{(y+c+\operatorname{Re} w_k)}$$

et, le second membre étant égal à $B_k^{-\alpha} \ln\left(\frac{K+c+\operatorname{Re} w_k}{c}\right)$, l'on observe que $\operatorname{Re} w_k \lesssim -Q(z_k) \lesssim B_k$ si $\lim \operatorname{Re} w_k = +\infty$.

• Nous montrons maintenant qu'il existe une suite $\zeta_k, \zeta_k \in b\Omega$ telle que $\lim \zeta_k = \zeta$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(w_k - x, z_k) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(w_k \pm it, z_k) = \zeta_k$ pour tout k . On peut, d'après ce qui précède, supposer que $F_k([0, +\infty[) \subset V$. On déduit alors de (4.4) et (ii) que :

$$(4.8) \quad \forall X, X' \in [0, +\infty[: |F_k(X) - F_k(X')| \lesssim \int_X^{X'} \frac{dx}{(x+c)[(x - \operatorname{Re} w_k)^2 + B_k]^\alpha}.$$

L'existence de ζ_k s'en trouve justifiée ; la convergence de $(\zeta_k)_k$ résulte de celle de $(F_k)_k$. Il reste à montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(w_k \pm it, z_k) = \zeta_k$. Si cela n'était pas,

on trouverait une boule B centrée en ζ_k et contenue dans V ainsi qu'une suite $(X_l)_l$ telles que $f(w + iX_l, z_k) \notin B$ et $\lim |X_l| = +\infty$. Soit alors $\gamma_l : [0, 1] \rightarrow \Omega_Q$ le segment joignant $(w_k - |X_l|, z_k)$ à $(w_k + iX_l, z_k)$. Puisque $\lim f \circ \gamma_l(0) = \zeta_k$, il existerait $x_l \in [0, 1]$ tel que $f \circ \gamma_l(x_l) \in bB$ et $f \circ \gamma_l([0, x_l]) \subset B \subset V$. D'après (4.4) et (ii), on aurait alors pour l assez grand :

$$(4.9) \quad |f \circ \gamma_l(0) - f \circ \gamma_l(x_l)| \lesssim |X_l| \int_0^{x_l} \frac{du}{(c + (1-u)|X_l|)|X_l|^{2\alpha}} \\ \leq \frac{1}{|X_l|^{2\alpha}} \ln\left(\frac{c + |X_l|}{c}\right).$$

Ce qui est absurde.

• Nous terminons en remarquant que la suite $(\zeta_k)_k$ est en fait constante. Comme $\lim \zeta_k = \zeta$, $b\Omega$ peut être supposé pseudoconvexe et de type fini en ζ_k . Cela permet de montrer que ζ_k est la seule valeur d'adhérence de $f(w \pm it, z)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω_Q . Ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(w \pm it, z) = \zeta_k$ pour tout $(w, z) \in \Omega_Q$ et donc $\zeta_k = \zeta$ pour tout k . Ceci achève la preuve du lemme 2.8.

Je remercie G. Cœuré pour les conseils prodigués lors de la rédaction de ce travail.

Bibliographie

- [1] Alexander, H., *Volume images of varieties in projective space and in Grassmannians*, Trans. Am. Math. Soc. 189 (1974), 237-249.
- [2] Bedford, E., Pincuk, S., *Domains in $\mathbb{C}^2$ with non compact holomorphic automorphism group*, Math. USSR Sbornik, Vol. 63, 141-151, (1989).
- [3] Bedford, E., Pincuk, S., *Domains in $\mathbb{C}^{n+1}$ with non compact automorphism group*, Jour. of Geometric Analysis, Vol. 1, N° 3, 165-191, (1991).
- [4] Bedford, E., Pincuk, S., *Domains in $\mathbb{C}^{n+1}$ with non compact automorphism group (II)*, Preprint.

- [5] Bedford, E., Fornæss J.E., *Biholomorphic maps of weakly pseudoconvex domains*, Duke Math. J. 45, 711-719, (1978).
- [6] Bell S., *Local regularity of C.R. homeomorphisms*, Duke Math. J. 57, 295-300, (1988).
- [7] Berteloot, F., *Sur certains domaines faiblement pseudoconvexes dont le groupe d'automorphismes analytiques est non compact*, Bull. Sc. Math., 2e série, 114, 411-420, (1990).
- [8] Berteloot, F. et Cœuré G., *Domaines de $\mathbb{C}^2$, pseudoconvexes et de type fini ayant un groupe non compact d'automorphismes*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 41 (1), 77-86, (1991).
- [9] Berteloot, F., *A remark on local continuous extension of proper holomorphic mappings*, Proceedings of the Madison Symposium in Complex Analysis, to appear.
- [10] Catlin, D., *Estimates of Invariant metrics on pseudoconvex domains of dimension two*, Math. Z. 200, 429-466, (1989).
- [11] J.E. Fornæss et N. Sibony, *Construction of p.s.h. functions on weakly pseudoconvex domains*, Duke Math. J., 58, 633-655 (1989).
- [12] Greene, R.E., Krantz, S.G., *Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains with non-compact automorphism groups*, Lecture Notes in Mathematics 1268, 122-157 (1987).
- [13] Greene, R.E., Krantz, S.G., *Biholomorphic self maps of domains*, Lecture Notes in Mathematics 1276, 136-207 (1987).
- [14] Kodama, A., *Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains $E(k, \alpha)$ in $\mathbb{C}^n$* , Tôhoku Math. J., vol. 40, 343-365 (1988).
- [15] Kodama, A., *A characterization of certain domains with good boundary points in the sense of Greene-Krantz*,
(I) Kodai Math. J. Vol. 12, 2, 257-269 (1989).
(II) Tôhoku Math. J., Vol. 43, n° 1, 9-25 (1991).
- [16] Kodama, A., Krantz, S.G., Ma, D., *A characterization of generalized complex ellipsoids in $\mathbb{C}^n$ and related results*, Ind. Univ. Math. J., Vol. 41, N°1, 173-195 (1992).
- [17] Pincuk S., *The scaling method and holomorphic mappings*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 52, Part. I, 151-161 (1991).

- [18] Rosay, J.P., *Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de $\mathbb{C}^n$ par son groupe d'automorphismes*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 29 (4), (1979), 91-97.
- [19] Wong, B., *Characterization of the unit ball in $\mathbb{C}^n$ by its automorphisms group*, Inventiones Math. 41, 253-257 (1977).

François Berteloot
Université des Sciences et Technologies de Lille
U.R.A. D 0751
UFR de Mathématiques Pures et Appliquées
F-59655 - Villeneuve d'Ascq Cedex (France)