

# *Astérisque*

JULIEN DUVAL

**Surfaces convexes dans un bord pseudoconvexe**

*Astérisque*, tome 217 (1993), p. 103-118

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1993\\_\\_217\\_\\_103\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__103_0)

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# SURFACES CONVEXES DANS UN BORD PSEUDOCONVEXE

Julien Duval.

## 1. INTRODUCTION

### a) Enoncé des résultats.

On considère, dans ce texte, la question suivante : soit  $D$  un domaine relativement compact de  $C^2$ , à bord, de classe  $C^2$ , strictement pseudoconvexe, et  $K$  un compact dans le bord de  $D$  ; quels critères géométriques assurent la convexité de ce compact par rapport à l'algèbre  $\mathcal{O}(\bar{D})$  des fonctions holomorphes au voisinage de  $\bar{D}$  ?

Cette notion de convexité intervient naturellement en analyse complexe dans deux types de problèmes :

- l'approximation de fonctions holomorphes : la convexité de  $K$  entraîne par le théorème d'Oka-Weil [8] que toute fonction holomorphe au voisinage de  $K$  est limite uniforme sur  $K$  de fonctions holomorphes au voisinage de  $\bar{D}$ .

- l'extension de fonctions C.R. : la convexité de  $K$  équivaut au fait que toute fonction continue définie sur le complémentaire de  $K$  dans  $\partial D$  et satisfaisant l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle (au sens faible) s'étend en une fonction holomorphe dans  $D$  [11].

Les exemples connus de compacts convexes dans  $\partial D$  sont essentiellement des disques : dans [6], Jöricke montrait directement la propriété d'extension de fonctions C.R. pour tout disque totalement réel - i.e. nulle part tangents à une droite complexe - en analysant son feuilletage caractéristique.

Puis, dans [5], Forstneric et Stout généralisaient ce résultat à tout disque avec un nombre fini de points hyperboliques en utilisant le théorème de remplissage de sphères par des disques holomorphes de Bedford-Klingenberg [2].

Le but de cet article est de poursuivre, dans la lignée de Jöricke, l'étude de la convexité des surfaces dans un bord strictement pseudoconvexe en lisant directement sur le feuilletage caractéristique de la surface les contraintes sur son enveloppe convexe. Pour celà, précisons davantage les définitions.

L'enveloppe convexe  $\widehat{K}$  d'un compact  $K$  contenu dans  $\partial D$  est l'ensemble des points  $x$  de  $D$  satisfaisant l'inégalité  $|f(x)| \leq \text{Sup}_K |f|$  pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{O}(\overline{D})$ . Par exemple, tout disque holomorphe dans  $D$  s'appuyant sur  $K$  sera dans  $\widehat{K}$  par le principe du maximum. Le compact est dit *convexe* si  $\widehat{K} = K$ .

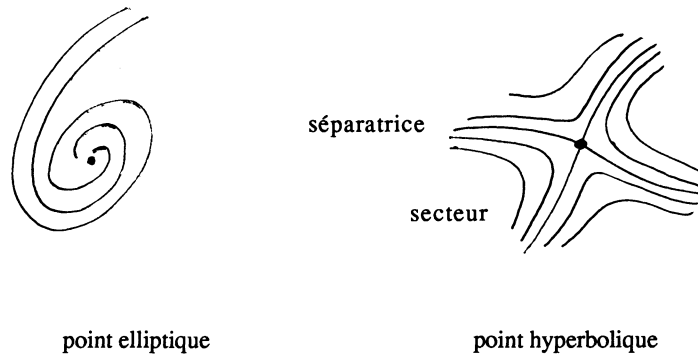
On s'intéresse surtout à l'enveloppe essentielle  $\widehat{K}_{\text{ess}} = \overline{\widehat{K} \setminus K}$  et à sa trace sur le compact,  $\widehat{K}_{\text{ess}} \cap K$ . Par le principe du maximum local de Rossi [9], on sait que  $\widehat{K}_{\text{ess}}$  est contenue dans l'enveloppe convexe de sa trace. La convexité de  $K$  est donc assurée si cette trace est convexe, a fortiori si elle est vide.

On se restreindra au cas des surfaces. On se fixe donc dans la suite une surface  $S$  de dimension réelle 2, compacte, lisse, à bord, connexe ou non, de classe  $C^2$ , contenue dans  $\partial D$ .

Regardons, en tout point de la surface, l'intersection du plan tangent à la surface avec l'unique droite complexe tangente au bord de  $D$  ; ces deux plans étant contenus dans l'hyperplan tangent à  $\partial D$ , on obtient en général une droite réelle tangente à la surface sauf aux points où le plan tangent à la surface coïncide avec cette droite complexe, les points dits *complexes*.

De cette manière, on décrit sur  $S$  un champ de directions avec singularités, que l'on intègre en un feuilletage de dimension 1 et de classe  $C^1$  avec singularités, le *feuilletage caractéristique* de la surface.

Les points complexes d'une surface générique sont isolés et de deux types, *elliptique* ou *hyperbolique* [3]. On peut les distinguer par le feuilletage caractéristique qui dessinera un foyer près d'un point elliptique et une selle près d'un point hyperbolique (cf. Fig.1). Un point elliptique sera toujours un obstacle à la convexité car il fait germer des petits disques holomorphes s'appuyant sur la surface [3]. On ne traitera donc que des surfaces sans point elliptique.



**Fig. 1.** Feuilletage caractéristique près des points complexes génériques.

Dans le cas particulier où l'enveloppe de  $S$  possède de la structure analytique, par exemple s'il existe un disque holomorphe dans  $D$  à bord tracé sur la partie totalement réelle de la surface, on sait que le bord de ce disque est transverse au feuilletage caractéristique. En effet, ce disque ne peut avoir un contact de l'intérieur avec le bord du domaine par stricte pseudoconvexité. De même, si un disque holomorphe qui s'appuie sur la surface touche un point hyperbolique, on sait dans certains cas (cf. [2]) que son bord doit traverser au moins une séparatrice issue de ce point.

Le résultat central de ce texte étend ces remarques à l'enveloppe essentielle.

**b) Commentaires et exemples.**

- Discutons d'abord le corollaire 1 pour les anneaux.

Considérons pour cela un tore dans  $\partial D$  dont le feuilletage caractéristique est défini par les niveaux réguliers d'une application  $f$  à valeurs dans le cercle  $S^1$ ; autrement dit ce feuilletage est une fibration en cercles sur le cercle. Soit maintenant un compact  $K$  dans ce tore tel que  $f_*(\pi_1(K)) = 0$ , par exemple un anneau dont l'âme est homologue aux cercles caractéristiques. Alors  $f$  se relève au voisinage de  $K$  en une fonction à valeurs réelles via l'exponentielle, et  $K$  est donc convexe par le corollaire 1.

On peut fabriquer des exemples de tels tores dans  $S^3$  en prenant la préimage d'une courbe fermée dans  $S^2$  par la fibration de Hopf. On vérifie que leurs feuilles caractéristiques sont toutes des cercles, ou toutes denses.

- Regardons maintenant le tore standard  $|z| = |w| = 1$  dans les bords de la famille d'ellipsoïdes d'équations  $q|z|^2 + p|w|^2 = p + q$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers positifs premiers entre eux. On obtient une famille de feuilletages caractéristiques en cercles translétés du cercle paramétré par  $z \mapsto (z^p, z^{-q})$  pour  $|z| = 1$ . D'après ce qui précède, tout anneau sur le tore standard dont l'âme est homologue à l'un de ces cercles sera convexe par rapport aux fonctions holomorphes définies au voisinage de l'ellipsoïde correspondant, donc par rapport aux polynômes puisque l'ellipsoïde l'est. On retrouve ainsi le résultat d'Alexander [1].

- Par contre, un anneau à feuilletage caractéristique radial ne rentre pas dans le cadre du corollaire 1. Et, de fait, on construit des exemples non convexes de tels anneaux en collant un petit ruban totalement réel dans  $\partial D$  le long d'une courbe bordant un disque holomorphe à l'intérieur de  $D$ .

De même, ce corollaire ne s'applique pas à un anneau totalement réel présentant un cycle limite. Dans ce cas également, on peut construire des exemples non convexes de tels anneaux bordant un anneau holomorphe à l'intérieur de  $D$ .

**THEOREME.**     *i) Dans la partie totalement réelle de la surface, l'enveloppe essentielle ne peut toucher une feuille caractéristique sans la traverser. En particulier, si une feuille est dans le bord de  $S$ , l'enveloppe essentielle ne la rencontre pas.*

*ii) Si l'enveloppe essentielle rencontre un point hyperbolique, elle coupe au moins deux des secteurs du complémentaire des séparatrices de ce point dans tout petit voisinage sur la surface.*

Ce théorème permet de contraindre a priori la trace de l'enveloppe essentielle sur la surface, et, dans les cas favorables, entraîne la convexité de  $S$ . La première application concerne les surfaces totalement réelles.

**COROLLAIRE 1.** *Si le feuilletage caractéristique de  $S$  peut être défini par les niveaux d'une fonction continue à valeurs réelles, alors  $S$  est convexe.*

En effet, dans le cas contraire, la trace de l'enveloppe essentielle sur la surface est non vide par le principe du maximum local de Rossi. Le maximum de la fonction sur cette trace correspond à une feuille caractéristique que l'enveloppe essentielle ne peut traverser, contredisant le i) du théorème.

Par exemple, par la théorie de Poincaré-Bendixson, les feuilles caractéristiques d'un disque totalement réel doivent aller du bord au bord. On construit aisément une fonction satisfaisant les hypothèses du corollaire 1, ce qui permet de retrouver le résultat de Jöricke [6].

Si on utilise également le comportement de l'enveloppe près des points hyperboliques, on obtient une autre démonstration du résultat de Forstneric et Stout :

**COROLLAIRE 2** [5]. *Un disque n'ayant que des points hyperboliques comme points complexes est convexe.*

- Un cas particulier du corollaire 2 est le résultat de Stout [5] sur la convexité polynômiale d'un voisinage d'un point hyperbolique sur une surface dans  $\mathbb{C}^2$ . En voici une démonstration fondée sur le i) du théorème illustrant la méthode utilisée dans la suite pour montrer le corollaire 2.

Admettons un instant qu'un petit voisinage de ce point hyperbolique peut être vu dans un bord strictement convexe  $\partial D$  après biholomorphisme du plan complexe. On a donc un feuilletage caractéristique dessinant une selle, que l'on peut définir par les niveaux d'une fonction continue à valeurs réelles, nulle sur les séparatrices, strictement positive sur une paire de secteurs opposés et strictement négative sur l'autre.

Par le même argument que pour le corollaire 1, en considérant le maximum et le minimum de la fonction sur la trace de l'enveloppe essentielle sur le voisinage, on en déduit que cette trace est contenue dans la réunion des séparatrices, donc est réduite au plus au point hyperbolique par une autre application du i) du théorème. Or un point isolé est toujours convexe. Par le principe de Rossi, on obtient que le voisinage est convexe par rapport aux fonctions holomorphes sur  $D$ , donc par rapport aux polynômes, puisque  $D$  l'est.

Construisons  $D$  maintenant. Ecrivons un voisinage du point hyperbolique sous la forme  $w = z\bar{z} + \gamma(\bar{z}^2 - z^2) + O(3)$ , avec  $\gamma > 1/2$  après un biholomorphisme du plan complexe [3]. Donc, sur ce voisinage,  $u = z\bar{z} + f(z)$  et  $v = g(z)$  avec  $u = \text{Re}(w)$ ,  $v = \text{Im}(w)$ ,  $f(z) = O(3)$  et  $g(z) = O(2)$ . Il en résulte que ce voisinage est contenu dans l'hypersurface  $u = z\bar{z} + v^2 + f - g^2$  qui est strictement convexe près de l'origine. Il suffit alors de couper cette hypersurface par un hyperplan  $u = \varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$  petit, puis de lisser les angles et convexifier la partie plate pour obtenir  $D$ .

## 2. DEMONSTRATIONS.

### a) Les outils pour le théorème.

L'outil principal est la caractérisation d'Oka de l'enveloppe d'un compact  $K$  dans  $\partial D$  que l'on peut formuler de la manière suivante :

**CRITERE [8].** *Un point n'est pas dans l'enveloppe de  $K$  si on peut y faire passer une courbe analytique  $A_0$  s'insérant dans une famille continue  $(A_t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , de courbes analytiques définies au voisinage de  $\bar{D}$ , évitant toutes  $K$ , et sortant de  $\bar{D}$  (i.e.  $A_1$  ne coupe plus  $\bar{D}$ ).*

La définition précise d'Oka pour une famille continue de courbes analytiques est l'existence d'une famille continue d'équations globales au voisinage de  $\bar{D}$  pour les courbes.

On peut l'affaiblir en ne réclamant des équations globales variant continûment que sur un voisinage de la famille de courbes. En effet, on pourra se ramener au cas précédent en résolvant un deuxième problème de Cousin à paramètres, ce qui est possible car, comme la famille sort de  $\bar{D}$ , toutes les courbes sont balayables au sens d'Oka (cf. [8], mémoire n° 3). Les familles construites par la suite le seront dans ce cadre.

En appliquant directement ce critère à la trace de l'enveloppe essentielle de  $K$  et par le principe du maximum local de Rossi, on obtient le :

**CRITERE.** *Soit  $(A_t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , une famille continue de courbes analytiques définies au voisinage de  $\bar{D}$ , évitant la trace de l'enveloppe essentielle de  $K$  et sortant de  $\bar{D}$ , alors la famille ne rencontre pas l'enveloppe essentielle de  $K$ .*

Dans notre cas, celui d'une surface  $S$ , voici l'énoncé dont on se servira.



LEMME 1. Soient  $(A_t)$  et  $(B_t)$  deux familles continues de courbes analytiques au voisinage de  $\bar{D}$ , sortant de  $\bar{D}$  et telles que :

i)  $A_0$  et  $B_0$  coupent  $S$  transversalement en un point  $s$  avec des signes d'intersection opposés et ne rencontrent pas la trace de l'enveloppe essentielle hors de  $s$ ,

ii)  $A_t$  et  $B_t$  évitent la trace de l'enveloppe essentielle pour  $t > 0$ ,

Alors  $s$  n'est pas dans l'enveloppe essentielle de  $S$ .

DEMONSTRATION. Notons  $f_t$  et  $g_t$  les équations globales de  $A_t$  et  $B_t$ . L'hypothèse i) signifie que  $f_0$  et  $g_0$  forment des coordonnées locales près de  $s$  et que la surface  $S$  près de ce point s'écrit comme le graphe  $g_0 = h(f_0)$  d'un difféomorphisme local  $h$  de  $\mathbb{C}$  préservant l'origine et renversant l'orientation.

La technique de [4] montre alors qu'on peut se fixer  $b = \varepsilon h_{\bar{z}}(0)$  avec  $\varepsilon > 0$  de sorte que la réunion des courbes analytiques  $C_a$  d'équations  $(f_0 - a)(g_0 - h(a)) + b = 0$  évite  $S$  et remplit tout un voisinage de  $s$  dans le complémentaire de la surface, si  $a$  décrit un petit disque de  $\mathbb{C}$  centré en 0.

Montrer que  $s$  n'est pas dans  $\hat{S}_{ess}$  revient à trouver un voisinage  $V$  de  $s$  tel qu'aucun point de  $V \setminus S$  n'est dans l'enveloppe de  $S$ . Il suffit donc de construire, pour chacune des courbes  $C_a$ , une famille continue de courbes partant de  $C_a$  et satisfaisant les hypothèses du critère précédent. Voici la construction de cette famille en quatre étapes :

- la première partie est décrite par les équations  $(f_0 - ta)(g_0 - h(ta)) + b = 0$ , pour  $t$  variant de 1 à 0;

- la deuxième partie sera donnée par  $f_t g_t + b = 0$ , pour  $t$  variant de 0 à  $u > 0$  assez petit pour que cette famille évite encore  $S$  près de  $s$  ;

- la troisième partie est paramétrée par  $f_u g_u + t b = 0$ , pour  $t$  variant de 1 à 0. Par hypothèse sur les courbes  $A_t$  et  $B_t$  pour  $t > 0$ , elle évitera bien la trace de l'enveloppe essentielle;

- enfin, on sort la famille de  $D$  en considérant les équations  $f_t g_t = 0$ , pour  $t$  variant de  $u$  à 1.

On vérifie que cette famille convient. □

En vue d'appliquer ce lemme, décrivons un procédé simple permettant de construire des courbes analytiques localisées près d'un point  $s$  du bord de  $D$ . On peut toujours supposer, après un biholomorphisme global du plan complexe, que  $D$  est strictement convexe près de  $s$ . Il suffit alors de considérer des droites complexes proches de la droite complexe tangente à  $\partial D$  en  $s$ . Par convexité, elles couperont  $D$  en des petits disques holomorphes localisés près de  $s$ .

Précisons les intersections de ces disques avec la surface  $S$ . On suppose, pour cela, que  $s$  est situé dans la partie totalement réelle de la surface. On se fixe une orientation de la surface en  $s$ . Comme  $\partial D$  est naturellement orienté comme bord de son intérieur, on en déduit une orientation du feuilletage caractéristique en choisissant un champ de vecteurs  $\vec{t}$  tangent au feuilletage tel que l'orientation de  $S$  suivie de  $i\vec{t}$  (qui est transverse à  $S$  mais tangent à  $\partial D$ ) redonne l'orientation de  $\partial D$ .

Par ailleurs, si  $x$  et  $y$  sont deux points du bord de  $D$  assez proches de  $s$ , et  $L(x,y)$  est la droite complexe les joignant, on se fixe la notation suivante :

NOTATION. On appelle  $\Delta(x,y)$  la composante connexe contenant  $x$  et  $y$  de l'intersection de  $L(x,y)$  avec un domaine légèrement plus grand que  $D$ .

On est maintenant en mesure de décrire les intersections de ces disques avec la surface :

LEMME 2. *Il existe un voisinage de  $s$  sur la surface tel que, si on considère deux de ses points  $x$  et  $y$  joints par une feuille caractéristique orientée de  $x$  vers  $y$ , alors le disque holomorphe  $\Delta(x,y)$  ne rencontre la surface qu'en ces deux points, négativement en  $x$  et positivement en  $y$ .*

DEMONSTRATION. Considérons la droite complexe  $L$  tangente au bord de  $D$  en  $s$ , et  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  la restriction à la surface de la projection orthogonale parallèlement à  $L$ .

La principale remarque est que  $f$ , considérée comme application plan sur plan, possède une singularité qui est un pli [7]. Ce fait, facile à vérifier, provient de ce que  $L$  et  $S$  ont un contact uniquement dans une direction réelle et que ce contact est quadratique par la convexité de  $D$ . En particulier, il existe un voisinage  $U$  de  $s$  dans la surface pour lequel les préimages de  $f|_U$  contiennent au plus deux points, et s'il y en a deux exactement, alors  $f$  est régulière près de ces points avec des degrés opposés. Par stabilité des plis, quitte à restreindre un peu  $U$ , ces propriétés restent vraies pour une petite perturbation  $C^2$  de  $f$ .

C'est le cas, en particulier, de la restriction à  $S$  de la projection orthogonale parallèlement à  $L(x,y)$  si  $x$  et  $y$  sont assez proches de  $s$  et situés sur la même feuille caractéristique. De plus,  $L(x,y)$  étant proche de  $L$ , on peut s'assurer que  $\Delta(x,y)$  est un petit disque holomorphe qui ne coupe la surface que dans  $U$ . On en déduit alors, en traduisant géométriquement les propriétés précédentes, que les seules intersections de  $\Delta(x,y)$  avec la surface sont en  $x$  et  $y$ , transverses avec des signes d'intersection opposés. La vérification des signes d'intersection peut se voir directement dans  $\partial D$  et est laissée au lecteur.  $\square$

**b) Le théorème, cas totalement réel.**

Supposons que l'enveloppe essentielle reste d'un côté d'une feuille caractéristique non singulière  $\gamma$  près d'un point  $s$  de cette feuille.

On va appliquer le lemme 1 pour montrer que ce point n'est pas dans l'enveloppe essentielle. Pour celà, construisons les deux familles nécessaires grâce au lemme 2. On suppose donc la surface orientée et le domaine strictement convexe près de  $s$ . Regardons un point  $x$  situé avant  $s$  sur  $\gamma$  pour son orientation naturelle. Par le lemme 2,  $\Delta(x,s)$  coupe  $S$  uniquement en  $s$  et  $x$ , positivement en  $s$  et négativement en  $x$ . Cette propriété reste vraie pour  $\Delta(x',s')$  avec  $s'$  et  $x'$  assez proches respectivement de  $s$  et  $x$ . On se donne deux tels points sur une feuille caractéristique  $\gamma'$  parallèle à  $\gamma$  tracée du côté ne rencontrant pas du tout l'enveloppe essentielle. On paramètre un petit arc joignant  $s$  à  $s'$  par  $\alpha(t)$ , et l'arc de  $\gamma'$  allant de  $x'$  à  $s'$  par  $\beta(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

La première famille  $(A_t)$  débute par  $\Delta(x',\alpha(t))$ , pour  $t$  variant de 0 à 1, puis se poursuit avec  $\Delta(\beta(t), s')$ , toujours pour  $t$  variant de 0 à 1. A ce stade, on atteint la droite tangente à  $D$  en  $s'$  qui ne touche  $D$  qu'en  $s'$  par convexité. On finit en translatant cette droite parallèlement à elle-même pour la sortir complètement de  $\bar{D}$ .

La famille  $(B_t)$  est construite de façon identique, en remplaçant  $x$  par  $y$  qui sera situé cette fois-ci après  $s$  sur  $\gamma$ .

On vérifie que ces deux familles de courbes satisfont les hypothèses du lemme 1, ce qui conclut.  $\square$

**c) Le théorème, cas hyperbolique.**

Supposons que la trace de l'enveloppe essentielle sur  $S$  reste dans un secteur  $\Sigma$  délimité par deux séparatrices consécutives près d'un point hyperbolique  $h$ . On va montrer qu'alors elle ne rencontre pas un voisinage de  $h$ .

Pour celà, comme précédemment, on peut supposer  $D$  strictement convexe près de  $h$  et on oriente la surface par l'orientation canonique de la tangente à  $S$  en  $h$ , qui est une droite complexe. Celà oriente aussi le feuilletage caractéristique.

Remarquons d'abord qu'en basculant un peu cette tangente complexe en  $h$ , on peut construire un disque holomorphe  $\Delta$  transverse à la surface en  $h$  et évitant le secteur  $\Sigma$ . Il suffit de basculer l'hyperplan tangent à  $\partial D$  en  $h$  en conservant le secteur dans un demi-espace et de considérer la composante de l'intersection de la droite complexe contenue dans cet hyperplan passant par  $h$  avec un voisinage de  $D$ .

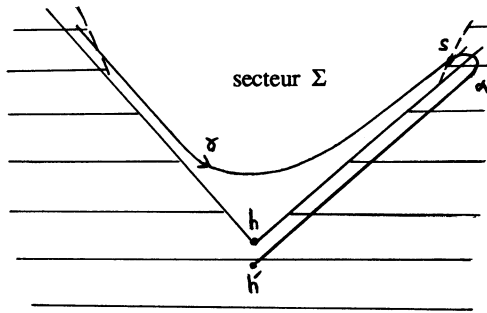
L'intersection de  $\Delta$  et de  $S$  en  $h$  sera forcément positive car  $h$  est un point complexe pour ces deux surfaces. Ces propriétés resteront vraies pour des petites perturbations de  $\Delta$ , par exemple pour les disques  $\Delta(k, h')$  où  $k$  est un point donné de  $\partial D \cap \Delta$  différent de  $h$  et  $h'$  décrit un petit voisinage  $V$  de  $h$ . En particulier, ces disques couperont positivement la surface en  $h'$ .

On se restreint à la partie du secteur contenue dans  $V$ , que l'on note encore  $\Sigma$ . D'après le cas totalement réel du théorème, l'enveloppe essentielle de  $S$  ne touche pas les deux séparatrices dans le bord de  $\Sigma$ . Donc toute feuille caractéristique régulière  $\gamma$  de  $\Sigma$  assez proche de  $h$  a ses extrémités en dehors de l'enveloppe essentielle de  $S$ . En fait, on a plus :

**ASSERTION.**  *$\gamma$  ne rencontre pas du tout l'enveloppe essentielle de  $S$ .*

Sinon, considérons le dernier point  $s$  de  $\gamma$  appartenant à  $\widehat{S}_{\text{ess}}$  quand on parcourt  $\gamma$  dans le sens positif. On va appliquer le lemme 1 en construisant les deux familles de la manière suivante :

- pour  $(A_t)$ , on note  $\alpha$  un chemin tracé dans  $V$  et allant de  $s$  à un point  $h'$  proche de  $h$  hors du secteur  $\Sigma$  (cf. Fig. 2). On débutera la famille par  $\Delta(k, \alpha(t))$ , pour  $t$  variant de 0 à 1, aboutissant à  $\Delta(k, h')$ , puis on fait sortir ce disque holomorphe de  $D$  en translatant l'hyperplan le contenant parallèlement à lui-même en laissant  $\Sigma$  dans l'un des deux demi-espaces.



on a hachuré la partie évitée a priori par l'enveloppe essentielle

Fig. 2. L'arc  $\alpha$ .

- pour  $(B_t)$ , choisissons un point  $y$  juste après  $s$  sur la feuille  $\gamma$  et notons  $\beta$  l'arc de  $\gamma$  allant de  $s$  à  $y$ . La famille commence par  $\Delta(\beta(t), y)$ , pour  $t$  variant de 0 à 1, aboutit à la droite complexe tangente à  $\partial D$  en  $y$  que l'on peut sortir en la translatant parallèlement à elle-même.

On vérifie que ces deux familles satisfont les hypothèses du lemme 1. Cela implique que  $s$  n'était pas dans l'enveloppe essentielle, ce qui est contradictoire. L'assertion est donc montrée.

A ce stade, on sait que l'enveloppe essentielle ne rencontre un voisinage  $V$  du point hyperbolique sur la surface qu'en  $h$  au plus. En appliquant le principe de Rossi, on obtient que  $\widehat{S}_{\text{ess}}$  est contenue dans  $(S \setminus V \cup \{h\})_{\text{ess}}$ , donc dans  $(S \setminus V \cup \Delta')_{\text{ess}}$  où  $\Delta'$  est un petit disque totalement réel évitant  $S \setminus V$  et dont une partie du bord est une caractéristique contenant  $h$ . Par le i) du théorème, on en déduit bien que l'enveloppe essentielle ne rencontre pas  $h$ .

#### d) Le corollaire 2.

Donnons-nous un disque  $\Delta$  avec un nombre fini de points hyperboliques. Examinons pour commencer les séparatrices de ces points. Par le théorème de Poincaré-Bendixson, elles iront nécessairement au bord ou à un autre point hyperbolique et ne peuvent créer de cycles.

Leur réunion forme donc un nombre fini d'arbres dans ce disque. Appelons *terminal* un tel arbre de séparatrices séparant le disque en composantes connexes dont l'une au plus n'est pas totalement réelle.

ASSERTION. *Il existe au moins un arbre terminal.*

Admettons provisoirement ce fait pour montrer le corollaire.

Notons  $T$  cet arbre terminal. Pour des raisons topologiques, chacune des composantes de  $\Delta \setminus T$  est un disque  $\Delta_1$ . Remarquons qu'il existe, pour un tel disque  $\Delta_1$  totalement réel, une fonction continue  $f$  dont les niveaux définissent le feuilletage caractéristique, et minimale et constante sur  $\partial\Delta_1 \cap T$ . En considérant le maximum de  $f$  sur  $\widehat{S}_{\text{ess}} \cap \Delta_1$  comme dans la démonstration du corollaire 1, on voit que l'enveloppe essentielle doit éviter  $\Delta_1$ .

Elle ne rencontre donc  $\Delta$  que dans  $\Delta_2 \cup \{h_i\}$ , où les  $h_i$  sont les points hyperboliques de  $T$ , et  $\Delta_2$  est l'unique composante du complémentaire de  $T$  non totalement réelle. Par le ii) du théorème, comme  $\Delta_2$  ne touche qu'un des secteurs de ces points hyperboliques, on obtient que la trace de l'enveloppe essentielle sur  $\Delta$  reste dans  $\Delta' = \Delta_2 \setminus (\cup V_i)$ , où les  $V_i$  sont des petits voisinages des points  $h_i$ . Par le principe de Rossi,  $\widehat{\Delta}_{\text{ess}}$  est dans  $\widehat{\Delta}'_{\text{ess}}$  et  $\Delta'$  a moins de points hyperboliques que  $\Delta$ . On se ramène ainsi de proche en proche à un disque totalement réel qui relève du corollaire 1.

Montrons pour finir l'assertion. A chaque arbre  $T$ , on associe sur  $\partial\Delta$  l'ensemble de ses extrémités  $\partial T$ . Voici un certain nombre de faits aisés à établir :

- les composantes de  $\partial\Delta \setminus \partial T$  sont en correspondance bijective avec les composantes de  $\Delta \setminus T$ ;

- les composantes totalement réelles de  $\Delta \setminus T$  correspondent aux composantes de  $\partial\Delta \setminus \partial T$  ne rencontrant pas les extrémités d'un autre arbre ;
- les extrémités de deux arbres  $T$  et  $T'$  ne s'enlacent jamais, i.e.  $\partial T$  est entièrement contenu dans une composante de  $\partial\Delta \setminus \partial T'$  et réciproquement.

Supposons que  $T$  ne soit pas terminal. Une des composantes  $C$  de  $\partial\Delta \setminus \partial T$  doit rencontrer les extrémités d'un autre arbre  $T'$  et donc contient  $\partial T'$ . De la même manière, si  $T'$  n'est pas terminal, deux composantes au moins de  $\partial\Delta \setminus \partial T'$  correspondent à des composantes non totalement réelles du complémentaire de  $T'$ . L'une d'entre elles  $C'$  est donc entièrement contenue dans  $C$  et contient toutes les extrémités d'un troisième arbre, etc... Cet algorithme doit s'arrêter en un temps fini et aboutit à un arbre terminal.  $\square$

### Références.

1. H. Alexander, Totally real sets in  $C^2$ , Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), 131-133.
2. E. Bedford, W. Klingenberg, On the envelope of holomorphy of a 2-sphere in  $C^2$ , J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 623-656.
3. E. Bishop, Differentiable manifolds in complex Euclidean spaces, Duke Math. J. 32 (1965), 1-22.
4. J. Duval, Un exemple de disque polynômialement convexe, Math. Ann. 281 (1988), 583-588.
5. F. Forstneric, E.L. Stout, A new class of polynomially convex sets, Ark. för Mat. 29 (1991), 51-62.
6. B. Jöricke, Removable singularities of CR-functions, Arkiv för Mat. 26 (1988), 117-143.
7. J. Martinet, Singularities of smooth functions and maps, London Math. Soc. Lect. Note Series, n° 58, Cambridge U.P., 1982.
8. K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Iwanami Shoten, Tokyo, Japon (1961), 1983.



9. H. Rossi, The local maximum modulus principle, *Ann. of Math.* 72 (1960), 1-11.
10. G. Stolzenberg, Polynomially and rationally convex sets, *Acta Math.* 109 (1963), 259-289.
11. E.L. Stout, Removable singularities for the boundary values of holomorphic functions, to appear in the proceedings of the Mittag-Leffler special year in several complex variables.

Laboratoire d'analyse,  
Université Paul Sabatier,  
118, route de Narbonne,  
31062 Toulouse cedex, France.