

Astérisque

AST

**Sur la cohomologie équivariante des variétés
différentiables - Pages préliminaires**

Astérisque, tome 215 (1993), p. 1-3

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__215__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__215__1_0)

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

215

ASTÉRIQUE

1993

**SUR LA COHOMOLOGIE
ÉQUIVARIANTE
DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES**

Michel DUFLO, Shrawan KUMAR, Michèle VERGNE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification : 19L47 • 22E45 • 57R91

Table des matières.

Introduction.....	3
I. M. Duflo et M. Vergne. Cohomologie équivariante et descente	
Introduction	5
1 Cohomologie équivariante	10
1.1 Cohomologie équivariante: définition	
1.2 Cohomologie équivariante d'un espace homogène	
1.3 G -algèbres différentielles	
1.4 Connexions	
1.5 Classes caractéristiques	
1.6 Algèbre de Weil et cohomologie équivariante	
1.7 Action libre	
1.8 Actions principales et espaces homogènes	
2 Méthode de descente	35
2.1 Groupes presque algébriques	
2.2 Bottes de fonctions invariantes	
2.3 Fonctions généralisées et descente	
2.4 Actions régulières	
3 Bottes de classes de cohomologie	48
3.1 Germes de formes différentielles équivariantes	
3.2 Bottes et bouquets de formes différentielles équivariantes	
3.3 Images réciproques de bottes	
3.4 Espaces homogènes	
3.5 Théorie de Chern-Weil	
4 Groupe métalinéaire et orientations	63
4.1 Transformations infinitésimalement elliptiques	
4.2 Groupe $\text{Pin}(V)$	
4.3 Groupe $\text{ML}(V)$	
4.4 Fibrés G -équivariants et points fixes	
4.5 Fibrés métalinéaires orientés	

5	Bottes de cohomologie équivariante tordue	79
5.1	Cohomologie équivariante tordue	
5.2	Bottes et bouquets de formes équivariantes tordues	
5.3	Bottes tordues pour le point	
5.4	Bottes tordues des espaces homogènes	
6	Images directes	95
6.1	Fibrés euclidiens	
6.2	Intégration	
6.3	Fibrés de Clifford	
	Bibliographie	107

II. S. Kumar and M. Vergne. Equivariant cohomology with generalized coefficients

	Introduction	109
1	Notation	114
2	G-equivariant cohomology with generalized coefficients	115
3	Koszul complexes	126
4	Induction of equivariant differential complexes	135
5	Equivariant cohomology of homogeneous spaces	143
6	Künneth formula and applications	155
7	Equivariant cohomology and subgroups	159
8	Reduction to the maximal torus	162
9	The case of a free action	165
10	A spectral sequence for T-equivariant cohomology	184
11	Localization formula	191
12	Appendix – A splitting for d_g	195
	References	203
	Summary	205

Introduction

Soit G un groupe de Lie réel opérant dans une variété M . Le complexe de de Rham équivariant et sa cohomologie $H_G^*(M)$ ont été introduits par H. Cartan. Si l'action de G sur M est libre, $H_G^*(M)$ est la cohomologie $H^*(G \backslash M)$ de l'espace des orbites et si M est le point $\bullet$, $H_G^*(\bullet)$ est l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G . A chaque fibré G -équivariant sur M muni d'une connexion G -invariante sont associées des classes de Chern équivariantes. Il s'est avéré indispensable de considérer des objets cohomologiques plus généraux tels que l'algèbre $H_G^\infty(M)$ de cohomologie équivariante à coefficients C^∞ qui est une algèbre sur $H_G^\infty(\bullet) = C^\infty(\mathfrak{g})^G$, et l'espace $H_G^{-\infty}(M)$ de cohomologie équivariante à coefficients $C^{-\infty}$ qui est un module pour $H_G^\infty(M)$, et pour laquelle $H_G^{-\infty}(\bullet)$ est l'espace des fonctions généralisées invariantes $C^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$.

Le premier des deux articles réunis ici, *Cohomologie équivariante et descente*, par Michel Duflo et Michèle Vergne, étudie une généralisation, notée $\mathcal{K}_G(M)$, de la cohomologie $H_G^\infty(M)$. C'est une algèbre sur $\mathcal{K}_G(\bullet) = C^\infty(G)^G$. On peut la considérer comme un analogue global de $H_G^\infty(M)$ et comme une version à la de Rham de la K -théorie équivariante de M . La construction de $\mathcal{K}_G(M)$ est basée sur la considération des points fixes dans M des éléments de G contenus dans un sous-groupe compact. Tout au moins lorsque G lui-même est compact, et sous certaines conditions d'orientation, "l'intégrale" sur M d'un élément de $\mathcal{K}_G(M)$ est une fonction G -invariante sur G .

Le deuxième article, *Equivariant cohomology with generalized coefficients*, par Shrawan Kumar et Michèle Vergne, entreprend une étude systématique des espaces $H_G^{-\infty}(M)$. On découvre des classes remarquables qui n'ont pas d'équivalent dans la théorie C^∞ . En particulier lorsque l'action de G sur M est libre, l'intégrale sur M d'un élément de $H_G^{-\infty}(M)$ est une fonction généralisée sur $\mathfrak{g}$ de support 0. Lorsque G est compact, une suite spectrale permet de comparer $H_G^{-\infty}(M)$ et la cohomologie équivariante $H_G^*(M)$.

Les deux articles, bien qu'ayant des motivations communes, peuvent être lus indépendamment.