AST

Méthodes semi-classiques Volume 1 - Pages préliminaires

Astérisque, tome 207 (1992), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1992__207__1_0>

207 ASTÉRISQUE

1992

MÉTHODES SEMI-CLASSIQUES

Volume 1

École d'Été (Nantes, juin 1991)

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification (par article, dans l'ordre de la table des matières) :

35P20, 35Q40
58G03, 58G15, 58G25
81U, 47F, 35P
35R30, 35P05, 81C10

TABLE DES MATIERES

page

INTRODUCTION

Avec le soutien du C.N.R.S et de la D.R.E.D, l'année académique 1990/91 fût une année spéciale consacrée aux méthodes semiclassiques.

A l'origine les méthodes semi-classiques désignaient les techniques utilisées par les physiciens pour essayer de comprendre les relations subtiles existant entre la mécanique classique de Newton et la mécanique quantique de Heisenberg-Schrödinger (lorsque la constante de Planck $\hbar$ devient négligeable par rapport aux autres grandeurs physiques: masse, énergie, distances, ...). L'exemple fondamental est la méthode B.K.W (Brillouin, Kramers, Wentsel) qui consiste à construire des solutions asymptotiques, par rapport à la constante de Planck, de l'équation de Schrödinger. Cette méthode est restée longtemps formelle. La justification mathématique rigoureuse a nécessité l'élaboration de théories sophistiquées qui ont vu le jour dans les années 1970 (indice de Maslov, opérateurs intégraux de Fourier-Hörmander). A partir de ces travaux de base, de nombreux mathématiciens se sont attaqués avec succès à divers problèmes issus de la physique et se traduisant par l'étude spectrale d'opérateurs pseudo-différentiels, dépendant de paramètres. Citons quelques exemples parmi les plus connus:

- le comportement du spectre de l'opérateur de Schrödinger lorsque la constante de Planck tend vers zéro (régle de Bohr-Sommerfeld, effet tunnel)
- le comportement asymptotique des grandes valeurs propres (formules du type Weyl)
- la trace du noyau de la chaleur lorsque la température tend vers zéro et les invariants géométriques associés
- diffusion quantique ou acoustique: problèmes à plusieurs corps, problèmes inverses, résonances
- systèmes périodiques: analyse du spectre de bande, problèmes inverses
- description de certains systèmes quantiques désordonnés: potentiels quasi périodiques, équation de Harper, chaos quantique
- limite thermodynamique.

Durant ces quinze dernières années, les méthodes semi-classiques se sont beaucoup enrichies avec le développement de l'analyse microlocale des équations aux dérivées partielles et de leurs solutions. De nombreux mathématiciens (et physiciens!) ont participé à ce développement. Parmi les travaux que l'on peut considérer comme fondamentaux mentionnons en particulier ceux de S. Agmon, Y. Colin de Verdière, J. Chazarain, L. Hörmander, V. Ivrii, J. Leray,V. Maslov, R. Melrose, J. Sjöstrand, A. Voros (je cite ces noms car il me semble bien représenter le rapprochement fructueux qui s'est effectué durant cette période entre l'analyse des équations aux dérivées partielles et la physique-mathématique).

Deux volumes de la collection **Astérisque** regroupent les actes de l'Ecole d'Eté et du Colloque International organisés à Nantes, en Juin 1991. L'Ecole d'Eté était centrée sur quatre cours: V. Ivrii (Asymptotiques Spectrales); M.A Shubin (Théorie spectrale sur les variétés non compactes); A. Soffer (Problèmes à N-corps) et G. Ulhmann (Problèmes inverses). Le Colloque International comportait vingt conférences portant sur des thèmes variés, illustrant la puissance des méthodes semi-classiques appliquées aux équations de la mécanique quantique ou à l'équation des ondes acoustiques. Les sujets abordés concernent principalement l'équation de Schrödinger sous différents aspects: N-corps, champs magnétiques, limite thermodynamique, solitons, cristaux. Deux exposés sont consacrés à la diffusion acoustique par un obstacle et à la conjecture de Lax-Philips sur les résonances.

En conclusion, je voudrais remercier les institutions et les personnes qui ont permis le succès de cette année spéciale sur les méthodes semiclassiques, en premier lieu le C.N.R.S en la personne de J.P Ferrier et la D.R.E.D en la personne de J. Giraud. Je remercie également tous ceux qui ont participé à l'organisation des différents colloques qui se sont déroulés entre Novembre 1990 et Juin 1991, en particulier les collègues suivants: J. Bellissard, J.M.Bismut, A. Ben.Arous, J.M. Combes, C. Gérard , A. Grigis , J.C Guillot, B. Helffer, A. Martinez, J.F.Nourrigat, F. Pham, J. Sjöstrand, A.Unterberger, A. Voros.
Je remercie l'université de Nantes et le conseil général de Loire-Atlantique pour le soutien qu'ils nous ont apporté.
D. Macé-Ramette a assuré avec dévouement et compétence le secrétariat de cette année spéciale, je l'en remercie.

Nantes, le 21 Décembre 1992

D. Robert

RESUMES

1. IVRII Victor. *Semiclassical spectral asymptotics*

These lectures are devoted to semiclassical spectral asymptotics with accurate remainder estimates and their applications to spectral asymptotics of other types.In 0.*Introduction*, the brief description of the hyperbolic operator method is given. In I. *Why one should study local semiclassical spectral asymptotics?* we show how starting from rather classical theorems concerning LSSA (local semiclassical spectral asymptotics) one can weaken their conditions. In 2. *How local semiclassical spectral asymptotics yield standard spectral asymptotics?* we show how LSSA yield asymptotics of eigenvalues tending to $+\infty$ for operators on compact manifolds and for operators on $\mathbf{R}^d$ with potentials increasing at infinity and asymptotics of eigenvalues tending to -0 for operators in $\mathbf{R}^d$ with potentials decreasing at infinity. In 3 *How can one derive local semiclassical spectral asymptotics in the general case?*, we present basic ideas permitting us to use the hyperbolic operator method for general matrix operators and for operators on manifolds with boundary. In 4. *Propagation of singularities*, we apply the short-time propagation of singularities in order to justify the previous section construction; then in 5. *Tauberian theorem*, we derive LSSA. We treat the long-time propagation of singularities in order to improve the remainder estimate in LSSA in 6. *How to improve remainder estimate in the case of non periodic trajectories?* and in 7. *How to improve remainder estimate in the case of periodic trajectories?*, In the last case the final formula contains non-Weylian term. In 8. *Eigenvalue estimates and asymptotics for spectral problems with singularities*, we split LSSA and Lieb-Cwickel-Rozenbljum eigenvalue estimate and derive estimates above and below for the number of the eigenvalues for the Schödinger operator. Taking this operator depending on some parameters we obtain asymptotics with respect to this parameter. In 9. *Generalizations. Non-Weylian asymptotics*, more advanced development of the theory is presented.

2. SHUBIN Michael.*Spectral theory of elliptic operators on non-compact manifolds*

General aspects of spectral theory of elliptic operators on non-compact manifolds are studied. Methods of proving the coincidence of minimal and maximal operators are descibed and a review of the known results are given. Exponential weight estimates for the decay of the Green function on manifolds of bounded geometry are proved. Applications of these estimates to Schnol type theorems are given (these theorem give conditions of growth to be imposed on a non-trivial generazed eigenfunction to garantee that the corresponding eigenvalue is in the spectrum). This is done in particular on manifold of bounded geometry with the exponential growth of the volume of the balls. Estimates of growth of generalized eigenfunctions for almost all points in the spectrum (with respect to the spectral measure) are given.

3. SOFFER Avy. *On the many body problem in quantum mechanics*
I describe some of the main ideas and tools of the N-body scattering theory. Emphasis is given to the recent developments based on phase space and time dependent techniques. Also, the relationship to some problems in harmonic analysis, PDE and spectral theory, is noted.

4. ULHMANN Gunther. *Inverse boundary value problems and applications*
In these notes we give an overview of inverse boundary value problems. In these problems one attemps to discover internal properties of a body by making measurements at the boundary. We concentrate mainly in the problem of determining the conductivity of a body by making measurements of voltage potentials and corresponding fluxes at the boundary. This problem is often referred to as *Electric Impedance Tomography.* We give applications to inverse scattering as well as inverse spectral problems.

We consider first the *isotropic case.* In this case the conductivity does not depend on direction. We reduce the problem to an inverse boundary value problemfor the Schrödinger equation, at zero energy, for a compactly supported potential. More precisely the known information is encoded by the it Dirichlet to Neumann map. In this notes we describe how the construction of exponential growing solutions allows to prove that the potential is uniquely determined by knowledge of this map in dimension $n > 2$. We also discuss progress made in the two dimensional case. The method allow also to find reconstruction methods as well as to obtain estimates of the potential in terms of the given Dirichlet to Neumann map. The same techniques are used to prove similar results for the inverse scattering problem at a fixed energy. In the most general case in which the conductivity depends on direction, usually referred to as *anisotropic case*, there is a natural obstruction to uniqueness. We report on the progress made on this problem.