HANS PETER SCHLICKEWEI

Résultats quantitatifs en approximation diophantienne

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 319-331

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__319_0>

RESULTATS QUANTITATIFS EN APPROXIMATION DIOPHANTIENNE

par

Hans Peter SCHLICKEWEI

1. Le Théorème du Sous-espace quantitatif.

Rappelons le théorème de Roth [12]: *Soit α un nombre algébrique de degré $d \geq 2$, soit $\delta > 0$. Alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres rationnels $\frac{x}{y}$ tels que*

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < y^{-2-\delta} \tag{1.1}$$

soit satisfait.

Il est bien connu que ce résultat est ineffectif dans le sens suivant: la preuve ne permet pas d'obtenir des bornes supérieures pour *les valeurs absolues* $|x|, |y|$ des solutions de (1.1). En revanche on peut obtenir par la méthode de Roth des bornes supérieures pour *le nombre* de solutions $\frac{x}{y}$ de (1.1). (cf. Davenport et Roth [3], et plus récemment Bombieri et van der Poorten [1] et Luckhardt [8]). Remarquons que (1.1) est presque la même chose que

$$|y||y\alpha - x| < |\mathbf{x}|^{-\delta} \tag{1.2}$$

où $\mathbf{x} = (x, y)$ et $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dans (1.2) nous avons deux formes linéaires à coefficients algébriques $L_1(\mathbf{x}) = y$, $L_2(\mathbf{x}) = y\alpha - x$ qui sont linéairement indépendantes. La généralisation à n dimensions est le fameux théorème du sous-espace de Wolfgang Schmidt [20] (1972):

Soient $L_1(\mathbf{x}), \ldots, L_n(\mathbf{x})$ des formes linéaires linéairement indépendantes à coefficients algébriques en $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Soit $\delta > 0$. Considérons l'inégalité

$$|L_1(\mathbf{x}) \cdots L_n(\mathbf{x})| < |\mathbf{x}|^{-\delta} \tag{1.3}$$

où $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Alors il existe un nombre fini de sous-espaces propres $U_1, \ldots, U_t$ de $\mathbb{Q}^n$ tels que chaque solution $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ de (1.3) soit contenue dans $\bigcup_{i=1}^{t} U_i$.

Ce théorème a été généralisé indépendamment par Dubois et Rhin [4] et par Schlickewei [13] au cas des valeurs absolues p-adiques.

Dans un travail récent Wolfgang Schmidt a trouvé comment donner une version quantitative de son théorème du sous-espace [22]. Ceci a été généralisé ensuite par Schlickewei aux valuations p-adiques [15] et aux corps des nombres [18]. Nous allons citer ici le résultat principal de [18]. Mais d'abord il nous faut introduire quelques notations.

Soit K un corps de nombres de degré d. Soit $M(K)$ l'ensemble des places de K. A chaque v dans $M(K)$ nous associons la valeur absolue $|\ \ |_v$, normalisée de la manière habituelle: sur $\mathbb{Q}$ on a $|\ \ |_v = |\ \ |$ (valeur absolue standard) si v est archimédienne et $|p|_v = p^{-1}$ si v est au-dessus du nombre premier p. Pour $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ et pour $v \in M(K)$ nous posons

$$|\boldsymbol{\alpha}|_v = \begin{cases} \sqrt{|\alpha_1|_v^2 + \cdots + |\alpha_n|_v^2} & \text{pour } v \text{ archimédienne} \\ \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|_v & \text{pour } v \text{ nonarchimédienne,} \end{cases}$$

et nous écrivons

$$\| \boldsymbol{\alpha} \|_v = |\boldsymbol{\alpha}|_v^{d_v/d}$$

où $d_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$ est le degré local du complété K_v. Finalement nous définissons la hauteur (projective) de $\boldsymbol{\alpha}$ par

$$H(\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{v \in M(K)} \| \boldsymbol{\alpha} \|_v .$$

Etant donnée une forme linéaire $L(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ à coefficients dans K nous définissons

$$\| L \|_v = \| \boldsymbol{\alpha} \|_v \quad \text{et} \quad H(L) = H(\boldsymbol{\alpha}).$$

THÉORÈME 1. [18] *Soit K une extension normale de $\mathbb{Q}$ de degré d. Soit S un sous-ensemble de cardinalité s de $M(K)$. Pour chaque $v \in S$, soient $L_1^{(v)}, \dots L_n^{(v)}$ des formes linéaires en $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, à coefficients dans K, linéairement indépendantes. Soit $0 < \delta < 1$. Considérons l'inégalité*

$$\prod_{v \in S} \prod_{i=1}^{n} \frac{\| L_i^{(v)}(\boldsymbol{\beta}) \|_v}{\| L_i^{(v)} \|_v \| \boldsymbol{\beta} \|_v} < H(\boldsymbol{\beta})^{-n-\delta} . \tag{1.4}$$

Alors il existe des sous-espaces propres $S_1, \dots, S_{t_1}$ de K^n avec

$$t_1 = c(n, d, s, \delta) = \left[(8sd)^{2^{34nd} s^6 \delta^{-2}} \right] \tag{1.5}$$

tels que chaque solution $\boldsymbol{\beta} \in K^n$ de (1.4) ou bien *soit contenue dans $\bigcup_{i=1}^{t_1} S_i$* ou bien *ait une hauteur satisfaisant*

$$H(\boldsymbol{\beta}) < \max \left\{ (n!)^{\frac{9}{\delta}}, \quad H(L_i^{(v)})^{\frac{9nsd}{\delta}} \quad (v \in S;\ i = 1, \dots, n) \right\} . \tag{1.6}$$

Le résultat quantitatif de W. Schmidt [22] traite le cas où S contient une seule valeur absolue archimédienne et où les solutions $\boldsymbol{\beta}$ sont prises dans $\mathbb{Q}^n$.

La partie interessante dans le Théorème 1 est le fait que la borne (1.5) pour le nombre de sous-espaces ne dépende que du degré d de K, de la dimension n, du nombre des valeurs absolues intervenant, et de δ. En particulier la constante ne dépend pas du discriminant du corps, elle ne dépend pas des formes $L_i^{(v)}$ ni des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ correspondants aux valeurs absolues nonarchimédiennes dans S. Nous allons voir plus bas que ce théorème donne des bornes supérieures uniformes pour le nombre de solutions d'une grande classe d'équations diophantiennes.

2. Réduction du Théorème 1 au cas rationnel.

Dans [15] nous avons démontré l'énoncé suivant, que est une variante du Théorème 1 dans laquelle les solutions sont rationnelles.

THÉORÈME 2. [15] *Soit K un corps de nombres de degré d. Soit R un sous-ensemble de $M(\mathbb{Q})$ de cardinalité r contenant la place à l'infini. Pour chaque*

$v \in R$, on choisit une extension $|\ |_v$ de v à K, et on se donne des formes linéaires $L_1^{(v)}, \ldots, L_n^{(v)}$ en $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ à coefficients dans K, linéairement indépendantes. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Considérons l'inégalité

$$(2.1) \qquad \prod_{v \in S} \left|L_1^{(v)}(\mathbf{x}) \cdots L_n^{(v)}(\mathbf{x})\right|_v < \left(\prod_{v \in S} \left|\det\left(L_1^{(v)}, \ldots, L_n^{(v)}\right)\right|_v\right) |\mathbf{x}|^{-\varepsilon}.$$

Alors il existe des sous-espaces propres $T_1, \ldots T_{t_2}$ de $\mathbb{Q}^n$ avec

$$(2.2) \qquad t_2 = \left[(8sd!)^{2^{26n} s^6 \delta^{-2}}\right]$$

tels que chaque solution $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ de (2.1) ou bien *soit contenue dans $\bigcup_{i=1}^{t_2} T_i$* ou bien *ait une norme $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_x^2}$ vérifiant*

$$(2.3) \qquad |\mathbf{x}| < \max\left\{(n!)^{\frac{8}{\varepsilon}}, \quad H(L_i^{(v)}) \quad (v \in S,\ i = 1, \ldots, n)\right\}.$$

Nous ne parlerons pas ici de la preuve du Théorème 2. Nous remarquons seulement qu'elle a besoin de toute la machinerie de Thue–Siegel–Roth–Schmidt. Au lieu de donner des détails sur cela nous nous contenterons d'indiquer comment on peut déduire le Théorème 1 du Théorème 2.

Pour transformer (1.4) en une forme ressemblant à (2.1) nous remarquons d'abord que pour chaque $v \in S$ nous avons

$$\| L_1^{(v)} \|_v \cdots \| L_n^{(v)} \|_v \leq \| \det(L_1^{(v)}, \ldots, L_n^{(v)}) \|_v \left(H(L_1^{(v)}) \cdots H(L_n^{(v)})\right)^{d_v}.$$

On voit immédiatement que si

$$H(\boldsymbol{\beta})^{\frac{\delta}{2}} > H^{nds} \text{ où } H = \max\{H(L_i^{(v)}) \ (v \in S; \quad i = 1, \ldots, n)\}$$

alors (1.4) implique

$$(2.4) \qquad \prod_{v \in S} \frac{\| L_1^{(v)}(\boldsymbol{\beta}) \cdots L_n^{(v)}(\boldsymbol{\beta}) \|_v}{\| \boldsymbol{\beta} \|_v^n} < \left(\prod_{v \in S} \| \det(L_1^{(v)}, \ldots, L_n^{(v)}) \|_v\right) H(\boldsymbol{\beta})^{-n-\frac{\delta}{2}}.$$

Notons que (2.4) est homogène en $\boldsymbol{\beta}$. Par conséquent nous pouvons supposer sans perte de généralité que le vecteur $\boldsymbol{\beta}$ dans (2.4) a des composantes entières algébriques dans K.

L'idée générale est maintenant d'utiliser une base entière de K sur $\mathbb{Q}$ disons $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ et d'exprimer $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ dans cette base c'est à dire

$$\beta_i = x_{i1}\gamma_1 + \cdots + x_{id}\gamma_d \tag{2.5}$$

avec $x_{ij} \in \mathbb{Z}$, puis de remplacer $\boldsymbol{\beta}$ par $\mathbf{x} = (x_{11}, \ldots, x_{1d}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nd}) \in \mathbb{Z}^{nd}$ et enfin d'utiliser le Théorème 2. Grâce à cette transformation, nous pouvons simplifier la situation en supposant que pour tout v dans S, si p est la place de $M(\mathbb{Q})$ que divise v, S contient toutes les places de K au dessus de p. Les formes $L_1^{(v)}, \ldots, L_n^{(v)}$ avec $v \mid p$ sont transformées par (2.5) dans des formes $M_{11}^{(p)}, \ldots, M_{n1}^{(p)}, \ldots, M_{1d}^{(p)}, \ldots M_{nd}^{(p)}$ en $x_{11}, \ldots, x_{1d}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nd}$, et on voit aisément qu'on a

$$\prod_{\substack{v \in S \\ v \mid p}} \| L_1^{(v)}(\boldsymbol{\beta}) \cdots L_n^{(v)}(\boldsymbol{\beta}) \|_v = |M_{11}^{(p)}(\mathbf{x}) \cdots M_{nd}^{(p)}(\mathbf{x})|_p^{\frac{1}{d}}.$$

En outre nous obtenons

$$\prod_{\substack{v \in S \\ v \mid p}} \| \det(L_1^{(v)}, \ldots L_n^{(v)} \|_v = |\det(M_{11}^{(p)}, \ldots M_{nd}^{(p)})|_p^{\frac{1}{d}} |D_K|_p^{-\frac{1}{2d}}$$

où D_K dénote le discriminant de K sur $\mathbb{Q}$. Pour appliquer le Théorème 2 il suffira de remplacer $H(\boldsymbol{\beta})$ par $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_{11}^2 + \cdots + x_{nd}^2}$ avec x_{ij} défini dans (2.5).

Usuellement la procédure pour arriver à cette situation consiste à choisir un multiple de $\boldsymbol{\beta}$, disons $\lambda\boldsymbol{\beta}$, tel que $\lambda\boldsymbol{\beta}$ ait des composants entières, et tel que

$$\prod_{v \in M_0(K)} \| \lambda\boldsymbol{\beta} \|_v \geq |D_K|^{-\frac{1}{2}};$$

nous avons noté $M_0(K)$ les places nonarchimédiennes de K. Alors un calcul simple montre, que nous pouvons remplacer (2.4) par

$$\begin{aligned} &\prod_{p \in S(\mathbb{Q})} |M_{11}^{(p)}(\mathbf{x}) \cdots M_{nd}^{(p)}(\mathbf{x})|_p \\ &< \Big(\prod_{p \in S} |\det(M_{11}^{(p)}, \ldots, M_{nd}^{(p)})|_p\Big) |D_K|^c \Big(\prod_{v \in M_\infty(K)} \| \boldsymbol{\beta} \|_v\Big)^{-d\frac{\delta}{2}}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $M_\infty(K)$ désigne les places à l'infini de K, où $S(\mathbb{Q})$ désigne les places de $\mathbb{Q}$ qui sont au-dessous des places de S, et où c est une constante positive, qui ne dépend que de n et de s. Pour remplacer

$$\prod_{v\in M_\infty(K)} \| \boldsymbol{\beta} \|_v \quad \text{par} \quad |\mathbf{x}|$$

on choisit usuellement une unité ε dans K telle que

$$|\varepsilon\boldsymbol{\beta}|_v \le e^{cR_K} \Big| \prod_{v\in M_\infty(K)} \| \boldsymbol{\beta} \|_v \tag{2.7}$$

pour chaque valeur absolue archimédienne $|\ \ |_v$ de K, où R_K est le régulateur de K et où c est une constante positive qui ne dépend que du degré d de K. Mais on ne sait majorer e^{cR_K} que par une expression qui dépend exponentiellement de D_K; une telle borne donnerait finalement une inégalité du type

(2.8)

$$\prod_{p\in S(\mathbb{Q})} |M_{11}^{(p)}(\mathbf{x})\cdots M_{nd}^{(p)}(\mathbf{x})|_p < \left(\prod_{p\in S(\mathbb{Q})} \left| \det(M_{11}^{(p)},\dots,M_{nd}^{(p)}) \right|_p \right) e^{D_K^{c_1}} |\mathbf{x}|^{-\frac{\delta}{4}}$$

où c_1 est une constante positive.

Pour obtenir un résultat qualitatif cette méthode suffit, et en effet elle a été appliquée dans W. Schmidt [21] aussi bien que dans Schlickewei [14]. Dans le cas quantitatif la situation est plus compliquée. Pour appliquer le Théorème 2 à (2.8) nous remarquons que le facteur $e^{D_K^{c_1}}$ a une influence dévastatrice: nous obtiendrons une valeur t_1 dans (1.5) qui dépendrait de D_K.

Une méthode pour éviter ce problème est de choisir un multiple entier algébrique de $\boldsymbol{\beta}$, disons $\lambda\boldsymbol{\beta}$, avec $|N_{K/\mathbb{Q}}(\lambda)| \le |D_K|^{\frac{1}{2}}$ tel que (2.7) puisse être remplacé par

$$\max_{v\in M_\infty(K)} |\lambda\boldsymbol{\beta}|_v \le |D_K|^{\frac{1}{2d}} \prod_{v\in M_\infty(K)} \| \boldsymbol{\beta} \|_v, \tag{2.9}$$

ce qui est possible d'après le théorème de Minkowski. Si nous appliquons cette procédure nous aboutissons finalement à

(2.10)

$$\prod_{p\in S(\mathbb{Q})} |M_{11}^{(p)}(\mathbf{x})\cdots M_{nd}^{(p)}(\mathbf{x})|_p < \left(\prod_{p\in S(\mathbb{Q})} \left| \det(M_{11}^{(p)},\dots,M_{nd}^{(p)}) \right|_p \right) |D_K|^c |\mathbf{x}|^{-\frac{\delta}{4}}.$$

Il reste une difficulté: nous avons toujours le discriminant dans (2.10), mais d'une manière moins méchante que dans (2.8). Pour maîtriser la situation, le détour que nous prenons consiste à partager les solutions $\boldsymbol{\beta}$ de (1.4) en classes de la manière suivante: deux solutions $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\beta}'$ appartiennent à la même classe C_L, si les composantes $\beta_1, \ldots, \beta_n$ de $\boldsymbol{\beta}$ et $\beta_1', \ldots, \beta_n'$ de $\boldsymbol{\beta}'$ définissent le même corps intermédiaire L avec $K \supset L \supset \mathbb{Q}$. Comme le nombre de corps intermédiaires L est borné par 2^d, il est clair que notre problème est résolu si nous savons traiter chaque classe C_L.

Maintenant pour la classe C_L correspondant au corps L, nous procédons comme ci-dessus, sauf que nous remplaçons $\boldsymbol{\beta}$ par la transformation (en supposant $\boldsymbol{\beta} \in L^n$)

$$\beta_i = x_{i1}\gamma_1 + \cdots + x_{i\ell}\gamma_\ell$$

où $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$ est une base entière de L sur $\mathbb{Q}$. Nous obtenons ainsi une formule analogue à (2.10), mais avec des formes $M_{11}^{(p)}, \ldots, M_{n\ell}^{(p)}$, et avec D_K remplacé par D_L pour les solutions $\boldsymbol{\beta} \in C_L$. D'après un théorème de Silverman [25], pour chaque vecteur $\boldsymbol{\beta}$ dans K^n, qui définit L, nous avons la minoration

$$H(\boldsymbol{\beta}) \geq c(\ell)|D_L|^{1/(2\ell(\ell-1))}. \tag{2.11}$$

Revenons à (1.4) en nous limitant à des solutions $\boldsymbol{\beta}$ dans C_L. En utilisant la borne inférieure (2.11) nous pouvons montrer avec un "principe de trous" que les solutions $\boldsymbol{\beta} \in C_L$ de (1.4) avec $H(\boldsymbol{\beta}) < |D_L|^c$ sont contenues dans l'union d'un nombre de sous-espaces propres de K^n, qui est plutôt petit par rapport à la borne (1.5). En tenant compte de cela nous pouvons en fait supposer que $H(\boldsymbol{\beta})$ est très grand par comparaison à $|D_L|$, ce qui va impliquer dans (2.10) que $|\mathbf{x}|^{\delta/8} > |D_L|^c$. Ainsi nous obtenons pour C_L une inégalité du type

$$\prod_{p \in S(\mathbb{Q})} |M_{11}^{(p)}(\mathbf{x}) \cdots M_{n\ell}^{(p)}(\mathbf{x})|_p < \left(\prod_{p \in S(\mathbb{Q})} \left| \det(M_{11}^{(p)}, \ldots, M_{n\ell}^{(p)}) \right|_v \right) |\mathbf{x}|^{-\delta/8}, \tag{2.12}$$

à laquelle nous pouvons appliquer le Théorème 2.

3. Equations en S-unités.

Une des conséquences principales du Théorème 1 est le résultat suivant sur les équations en S-unités.

THÉORÈME 3. [19] *Soit K un corps de nombres de degré d. Soit S un sous-ensemble de $M(K)$ de cardinalité s contenant toutes les places à l'infini. Nous dirons qu'un élément $x \in K^*$ est une S-unité si $\| x \|_v = 1$ pour chaque $v \notin S$. Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments non nuls de K. Alors le nombre $N(a_1, \dots, a_n)$ de solutions de l'équation*

$$(3.1) \qquad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 1$$

en S-unités $x_1, \dots, x_n$, tels qu'aucune sous-somme propre $a_{i_1} x_{i_1} + \cdots + a_{i_k} x_{i_k}$ s'annulle, satisfait

$$(3.2) \qquad N(a_1, \dots, a_n) \leq (4sd!)^{2^{36nd!} s^6}.$$

Le Théorème 3 prouve une vieille conjecture de Siegel [24]. Rappelons que Mahler [9] était le premier à étudier les équations en S-unités dans le cas particulier $n = 2$, $K = \mathbb{Q}$, $a_1 = a_2 = 1$. Il a montré que le nombre de solutions est fini. Dans le cas $n = 2$ Evertse [5] en 1984 a obtenu un résultat beaucoup plus précis que (3.2). En effet il a montré que

$$N(a_1, a_2) \leq 3 \cdot 7^{d+2s}.$$

Pour n quelconque, van der Poorten et Schlickewei [10] en 1982 et indépendamment Evertse [6] en 1984 ont démontré, que (3.1) n'admet qu'un nombre fini de solutions en S-unités. Ces résultats étaient obtenus par une application du théorème du sous-espace $\mathfrak{p}$-adique qualitatif de Schlickewei [14]. En 1988 Evertse et Györy [7] ont démontré

$$N(a_1, \dots, a_n) < C(n, K, S),$$

c'est-à-dire qu'il existe une borne pour $N(a_1, \dots, a_n)$ qui ne dépend pas du choix particulier de $a_1, \dots, a_n$ dans K. Mentionons que le cas rationnel du Théorème 3 a été démontré dans [16].

Ce qui est interessant avec la borne (3.2) n'est pas tellement la forme explicite mais d'abord le fait que la borne ne dépend pas de $a_1, \dots, a_n$, ensuite que la dépendance en K ne fait intervenir que le degré d de K, et enfin que la borne dépend seulement de la cardinalité de S (et non pas des idéaux premiers particuliers contenus dans S).

La preuve du théorème 3 se fait à partir du Théorème 1 de la manière suivant. Au lieu de (3.1), nous étudions l'équation homogène

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1}x_{n+1} = 0 \tag{3.3}$$

en S-unités $x_1, \ldots, x_{n+1}$, où aucune sous-somme propre $a_{i_1}x_{i_1} + \cdots + a_{i_k}x_{i_k}$ ne s'annulle, et nous prouvons que le nombre de solutions projectives $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de (3.3) est borné par (3.2). Posons

$$\beta_i = a_ix_i \quad (i = 1, \ldots, n+1) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n). \tag{3.4}$$

Il suffit de traiter l'équation

$$\beta_1 + \cdots + \beta_{n+1} = 0. \tag{3.5}$$

Nous introduisons les formes linéaires

$$\begin{aligned} L_1(\boldsymbol{\beta}) &= \beta_1 \\ &\vdots \\ L_n(\boldsymbol{\beta}) &= \beta_n \\ L_{n+1}(\boldsymbol{\beta}) &= \beta_1 + \cdots + \beta_n. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Notons que nous avons $L_{n+1}(\boldsymbol{\beta}) = -\beta_{n+1}$ à cause de (3.5) et (3.4). Comme les x_i sont des S-unités nous obtenons grâce à (3.4)

$$\prod_{v\in S} \| L_1(\boldsymbol{\beta}) \cdots L_{n+1}(\boldsymbol{\beta}) \|_v = \prod_{v \in S} \| a_1 \cdots a_{n+1} \|_v \, . \tag{3.7}$$

Pour $v \notin S$, nous avons $\| \beta_i \|_v = \| a_i \|_v$. Choisissons pour chaque $v \in S$ un indice $i(v)$ avec

$$\| \beta_{i(v)} \|_v = \max_{1 \le j \le n+1} \| \beta_j \|_v$$

et posons $I(v) = \{1, \ldots, n+1\} \backslash \{i(v)\}$. Alors (3.7) implique

$$\prod_{v\in S} \prod_{i \in I(v)} \| L_i(\boldsymbol{\beta}) \|_v = \left(\prod_{v \in S} \| a_1 \cdots a_{n+1} \|_v \right) \prod_{v\in S} \max_{1 \le j \le n+1} \| \beta_j \|_v^{-1} \, . \tag{3.8}$$

Après un calcul simple nous déduisons de (3.8) en posant
$A = (\prod_{v\in S} \| a_1 \cdots a_{n+1} \|_v)(\prod_{v \notin S} \max_{1 \le i \le n+1} \| a_i \|_v^{n+1})$

$$\prod_{v\in S} \prod_{i\in I(v)} \frac{\| L_i(\boldsymbol{\beta}) \|_v}{\| L_i \|_v \| \boldsymbol{\beta} \|_v} < c(n) A H(\boldsymbol{\beta})^{-n-1}. \tag{3.9}$$

Si nous supposons que

$$H(\boldsymbol{\beta})^{\frac{1}{2}} > c(n)A, \tag{3.10}$$

nous pouvons appliquer le Théorème 1 à (3.9) avec $\delta = \frac{1}{2}$. Par conséquent les solutions de (3.5) avec (3.10) sont contenues dans la réunion de $c(n, d, s, \frac{1}{2})$ sous-espaces propres de l'espace U de K^{n+1} défini par (3.5).

Il reste à considérer les solutions petites, qui ne satisfont pas (3.10), c.à.d. les solutions $\boldsymbol{\beta}$ telles que

$$H(\boldsymbol{\beta}) \leq c_1(n)A^2. \tag{3.11}$$

Pour cela nous appliquons un "principe de trous", qui utilise d'une manière essentielle l'équation (3.5) et qui donne comme résultat que les solutions de (3.5) satisfaisant

$$B \leq H(\boldsymbol{\beta}) \leq BA^{1/(2(n^2-1))} \tag{3.12}$$

sont contenues dans la réunion d'au plus $(n+1)^{2s}\, 2^{2n^2 s}$ sous-espaces propres de l'espace U des solutions de (3.5). Comme l'intervalle $[1, A^2]$ peut être couvert par au plus $4(n^2-1)$ intervalles du type (3.12), nous voyons, que les petites solutions (satisfaisant (3.11)) sont contenues dans la réunion d'au plus $4(n^2-1)(n+1)^{2s}2^{2n^2 s}$ sous-espaces propres de U.

Finalement toutes les solutions de (3.5) sont contenues dans la réunion d'au plus $c(n, d, s)$ sous-espaces propres de U. Le Théorème 3 s'en détuit par récurrence.

Il est bien connu, que le Théorème 3 a beaucoup d'applications (suites récurrentes, équations diophantiennes, théorie algébrique de nombres ...). Indiquons pour terminer deux conséquences simples.

Dans la session de problèmes aux Journées Arithmétiques de Luminy 1989 Bourgain a posé la question suivante: *Soit α un nombre algébrique de degré d, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{Q}(\alpha^n) = \mathbb{Q}(\alpha)$. Existe-t-il une constante $c = c(\alpha)$ ayant la propriété suivante: Pour chaque sous-espace linéaire propre W de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}(\alpha)$ sur $\mathbb{Q}$ l'ensemble $\{n \mid n \in \mathbb{N},\ \alpha^n \in W\}$ a une cardinalité inférieure à $c(\alpha)$?* Il avait besoin de cet énoncé dans [2]. En appliquant le Théorème 3 nous pouvons démontrer

THÉORÈME 4. [11] *Une telle constante* $c(\alpha)$ *existe; plus précisément on peut prendre*

$$c(\alpha) = (4(1+\omega(\alpha)))^{2^{40(d+1)!}(1+\omega(\alpha))^6}$$

où $\omega = \omega(\alpha)$ *est égal au nombre des idéaux premiers dans* $\mathbf{Q}(\alpha)$ *divisant* (α).

Une autre conséquence se situe dans le contexte d'un problème, qui à première vue peut paraître plutôt élémentaire. *Soient* b_1, b_2 *deux nombres naturels* > 1. *Soit* $c \geq 1$ *une constante donnée.* En 1973 Senge et Straus [23] ont démontré: *pour qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres naturels* n *dont la somme des chiffres dans le développement en base* b_1 *et en base* b_2 *soit bornée par* c*, il faut et il suffit que* b_1 *et* b_2 *soient multiplicativement indépendants.* Ils ont démontré cela en appliquant la version $\mathfrak{p}$-adique du Théorème de Roth. On peut formuler le problème d'une manière différente en étudiant les solutions de l'équation exponentielle

$$a_1^{(1)} b_1^{n_1} + \cdots + a_{k_1}^{(1)} b_1^{n_{k_1}} - a_1^{(2)} b_2^{m_1} - \cdots - a_{k_2}^{(2)} b_2^{m_{k_2}} = 0,$$

où les $a_i^{(j)}$ sont les chiffres dans le développement b_j-adique. Le Théorème 3 en effet permet de traiter une question plus générale.

THÉORÈME 5. [17] *Soit* $k \geq 2$. *Soient* $b_1, \ldots b_k$ *des nombres rationnels supérieurs à 1. Soit* $c \geq 1$ *une constante. Alors l'équation*

$$\pm n_1 \pm \cdots \pm n_k = 0$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions en nombres naturels $n_1, \ldots, n_k$ *tels que la somme des chiffres de* n_i *dans le développement en base* b_i *est bornée par* c *si et seulement si pour chaque paire* (i,j) *avec* $i \neq j$ $\quad b_i$ *et* b_j *sont multiplicativement indépendants.*

En outre, si cette hypothèse est vérifiée, le nombre de solutions est borné par

$$(8\omega)^{2^{28kc}\omega^6},$$

où ω *est le nombre de facteurs premiers différents de* $b_1 \cdots b_k$.

Références

[1] E. BOMBIERI et A. J. VAN DER POORTEN, Some quantitative results related to Roth's Theorem. *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **45** (1988), 233–248; Corrigenda **48** (1990), 154–155.

[2] J. BOURGAIN, The Riesz–Raikov Theorem for algebraic numbers, à paraître.

[3] H. DAVENPORT et K. F. ROTH, Rational approximation to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 160–167.

[4] E. DUBOIS et G. RHIN, Sur la majoration de formes linéaires à coefficients algébriques réels et p-adiques; Démonstration d'une conjecture de K. Mahler, *C.r. hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris* A **282** (1976), 1211–1214.

[5] J. H. EVERTSE, On equations in S-units and the Thue–Mahler equation, *Inventiones Math.* **75** (1984), 561–584.

[6] J. H. EVERTSE, On sums of S-units and linear recurrences, *Compositio Math.* **53** (1984), 225–244.

[7] J. H. EVERTSE et K. GYÖRY, On the numbers of solutions of weighted unit equations, *Compositio Math.* **66** (1988), 329–354.

[8] H. LUCKHARDT, Herbrand–Analysen zweier Beweise des Satzes von Roth: polynomiale Anzahlschranken, *Journ. of Symb. Logic.* **54** (1989), 234–263.

[9] K. MAHLER, Zur Approximation algebraischer Zahlen I. (Über den größten Primteiler binärer Formen), *Math. Ann.* **107** (1933), 691–730.

[10] A. J. VAN DER POORTEN et H. P. SCHLICKEWEI, The growth conditions for recurrence sequences, *Macquarie Math. Reports*, No. **82–0041**, 1982.

[11] A. J. VAN DER POORTEN et H. P. SCHLICKEWEI, A diophantine problem in harmonic analysis, à paraître dans *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*

[12] K. F. ROTH, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 1–20.

[13] H. P. SCHLICKEWEI, Linearformen mit algebraischen Koeffizienten, *Manuscripta Math.* **18** (1976), 147–185.

[14] H. P. SCHLICKEWEI, The $\mathfrak{p}$-adic Thue–Siegel–Roth–Schmidt theorem, *Arch. Math.* **29** (1977), 267–270.

[15] H. P. SCHLICKEWEI, The number of subspaces occurring in the p-adic subspace theorem in diophantine approximation, *Journ. Reine Angew. Math* **406** (1990), 44–108.

[16] H. P. SCHLICKEWEI, An explicit upper bound for the number of solutions of the S-unit equaiton, *Journ. Reine Angew. Math.* **406** (1990), 109–120.

[17] H. P. SCHLICKEWEI, Linear equations in integers with bounded sum of digits, à paraître dans *Journ. of Number Theory.*

[18] H. P. SCHLICKEWEI, The quantitative subspace theorem for number fields, soumis pour publication.

[19] H. P. SCHLICKEWEI, S-unit equations over number fields, à paraître dans *Inventiones Math.*

[20] W. M. SCHMIDT, Norm form equations, *Annals of Math.* **96** (1972), 526–551.

[21] W. M. SCHMIDT, Simultaneous approximation to algebraic numbers by elements of a number field, *Monatsh. Math.* **79** (1975), 55–66.

[22] W. M. SCHMIDT, The subspace theorem in diophantine approximations, *Compositio Math.* **69** (1989), 121–173.

[23] H. G. SENGE et E. G. STRAUS, PV–numbers and sets of multiplicity, *Per. Math. Hung.* **3** (1973), 93–100.

[24] C. L. SIEGEL, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, *Abh. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. No. 1*, 70 pp. (1929).

[25] J. H. SILVERMAN, Lower bounds for height functions, *Duke Math. Journ.* **51** (1984), 395–403.

Abteilung für Mathematik
Universität Ulm
Oberer Eselsberg
D 7900 Ulm
République Fédérale d'Allemagne