Astérisque

NORBERT SCHAPPACHER

Les conjectures de Beilinson pour les courbes elliptiques

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 305-317

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__305_0>

Les Conjectures de Beilinson pour les courbes elliptiques

Norbert Schappacher

Table des Matières

S.M.F.
Astérisque 198-199-200 (1991)

0. Remarques préliminaires

Dans ce rapport qui se veut une introduction pour non-spécialistes, j'essaie de décrire ce qu'on sait — et ce qu'on ignore — des conjectures de Beilinson relatives aux valeurs spéciales aux points entiers de la fonction L d'une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$. Quelques remarques préliminaires s'imposent.

D'abord, force est de constater que le point de vue des courbes elliptiques proposé ici n'est pas suggéré par la nature des conjectures et résultats en jeu, mais par le désir de rester aussi concret que possible. En fait, nous verrons à plusieurs endroits que le formalisme de Beilinson a tendance à nous faire sortir du cadre des courbes elliptiques.

Soulignons d'ailleurs que 'courbe elliptique' veut dire ici : 'courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$'. Ceci est essentiel; car dans toutes les conjectures motiviques sur des valeurs spéciales de fonctions L, on traite une variété (plus généralement un motif) V définie sur un corps de nombres K par l'intermédiaire de sa restriction des scalaires à $\mathbf{Q}$, $R_{K/\mathbf{Q}}V$. Si V est une courbe elliptique, alors $R_{K/\mathbf{Q}}V$ est une variété abélienne sur $\mathbf{Q}$ de dimension $[K : \mathbf{Q}]$, ce qui nous jetterait dans des eaux bien plus froides que celles du cas des courbes .....

Le cadre des courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$ — pour peu naturel qu'il soit — me permet d'éviter dans cet exposé le formalisme général et abstrait des conjectures de Beilinson. Bien sûr, le prix qu'on paie est que les diverses méthodes présentées ici sembleront vraiment différentes. Le lecteur intéressé pourra se rapporter aux premiers chapitres du livre [Rapoport, Schappacher, Schneider 1988] pour la théorie générale. D'autre part, à la fin, on mentionnera brièvement quelques résultats obtenus depuis la rédaction de ce livre.

Dernière remarque préliminaire: l'approche qu'on prend ici retrace partiellement l'évolution historique des conjectures dont la version générale et actuelle est due à Beilinson.

1. La fonction L

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$. La fonction L de E est définie par le produit eulérien suivant, convergent pour tout $s \in \mathbf{C}$, $\Re(s) > 3/2$.

$$L(E,s) = \prod_p L_p(E,s)^{-1}, \tag{1.0}$$

où, pour tout nombre premier p de *bonne réduction* pour E — c'est-à-dire pour tout p tel qu'on puisse trouver une équation pour E qui, lue *modulo* p, définit une courbe non-singulière $\tilde{E}_p$ sur le corps fini $\mathbf{F}_p$ — le facteur eulérien en p est donné par

$$L_p(E,s) = (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}); \quad a_p = p + 1 - |\tilde{E}_p(\mathbf{F}_p)|. \tag{1.1}$$

Nous ne précisons pas ici les facteurs eulériens aux *mauvaises places* p — mais *voir* (3.4). De même nous ne définissons pas ici le *conducteur* N de la courbe E. C'est un entier positif divisible précisément par les nombres premiers où E a mauvaise réduction.

Posons

$$\Lambda(E,s) = N^{s/2}\Gamma(s)(2\pi)^{-s}L(E,s).$$

On conjecture que cette fonction possède un prolongement holomorphe à tout le plan complexe satisfaisant à l'équation fonctionnelle suivante, valable pour tout $s \in \mathbf{C}$:

$$\Lambda(E,s) = w\ \Lambda(E,2-s), \tag{1.2}$$

avec un nombre réel w de valeur absolue 1, donc: $w = \pm 1$.

Cette conjecture est connue précisément dans les cas où on sait que $L(E,s)$ est la transformée de Mellin d'une forme modulaire parabolique sur $\Gamma_0(N)$. Ceci s'exprime de façon géométrique en disant que E est paramétrée par une courbe modulaire $X_0(N)$. C'est-à-dire qu'il existe une application non-constante $\phi: X_0(N) \longrightarrow E$ définie sur $\mathbf{Q}$. On conjecture, d'après Taniyama et Shimura, que toute courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ admet une telle paramétrisation, et, d'après Weil, cette conjecture découlerait de certaines propriétés analytiques — dont l'équation fonctionnelle ci-dessus — de certaines fonctions du même type que la fonction $L(E,s)$.

Nous supposerons par la suite que E soit paramétrée par une courbe modulaire $X_0(M)$. Nous disposerons donc du prolongement analytique de $L(E,s)$; mais cette hypothèse nous permettra aussi de faire certaines constructions 'modulaires' ....

Choisissons en fait pour M l'entier positif minimal pour lequel une paramétrisation $\phi: X_0(M) \longrightarrow E$ existe. Alors on sait, d'après une longue suite de travaux dont le plus récent est dû à Carayol [Carayol 1983], que c'est le conducteur de E: $M = N$.

2. Le centre de symétrie

Le but des conjectures de Beilinson relatives à E est de prédire, à un facteur rationnel non nul près, la valeur $L^{(r)}(E,n)$ de la première dérivée non nulle de la fonction $L(E,s)$ en tout entier s. Le premier point qui vient à l'esprit — et dans un sens le plus critique — est $s = 1$, le centre de symétrie de l'équation fonctionnelle. Or, l'ordre r de L en $s = 1$ aussi bien que la valeur $L^{(r)}(E,n)$ font l'objet des *conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer*. Ce 'point central' $s = 1$ est aussi traité par les conjectures générales de Beilinson. Mais il en représente un cas limite. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les adaptations nécessaires dans le cadre de Beilinson pour traiter le point central ne sont que brièvement mentionnées dans [Rapoport, Schappacher, Schneider 1988]. Soucieux de présenter les conjectures de Beilinson à l'état pur, nous laisserons de même de côté le point $s = 1$ dans la suite de cet exposé.

3. En sortant du centre

En dehors du centre $s = 1$, l'équation fonctionnelle (1.2), jointe à la convergence du produit eulérien (1.0) aux entiers > 1, détermine déjà l'ordre de $L(E,s)$ aux points entiers: $L(E,n) \neq 0$ pour $n \geq 2$ et $L(E,m) = 0 \neq L'(E,m)$ pour $m \leq 0$.

Le premier couple de nombres qu'il s'agit de caractériser à un multiple rationnel près est donc

$$L'(E,0) \quad \text{et} \quad L(E,2). \tag{3.0}$$

Bloch — *voir* [Bloch 1978] — a formulé et développé la conjecture de Beilinson relative à ces valeurs.[1]

D'après Bloch, on conjecture que les nombres (3.0) sont liés à des régulateurs de certains éléments du groupe $K_2(E)$. Nous ne reprenons pas la définition de ce K-groupe de Quillen.[2] Mais nous allons en voir quelques éléments. Pour le moment, disons simplement qu'on construit une application 'régulateur' sur $K_2(E)$ que nous écrivons de façon un peu naïve en choisissant une différentielle non nulle $\omega \in H^0(E,\Omega^1)$ définie sur $\mathbf{R}$;

$$r_\omega: K_2(E) \longrightarrow \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

[1] Avant on savait interpréter des valeurs spéciales de la fonction zêta d'un corps de nombres de façon K-théorique, grâce au travail de Borel [Borel 1974] — *cf.* aussi les conjectures de Lichtenbaum.

[2] L'article fondamental reste, bien sûr, [Quillen 1973].

Le folklore du sujet dit que le noyau de l'homomorphisme r_ω est précisément $K_2(E)_{tors}$.[3] Donc, *si* $K_2(E)$ est de rang 1 *modulo* torsion — *cf.* la conjecture [Bloch 1978, p. 512] —, *alors* l'image de r_ω serait un réseau dans $\mathbf{R}$. Tensoriser par $\mathbf{Q}$ en ferait une $\mathbf{Q}$-droite dans $\mathbf{R}$, dont on conjecture que c'est l'unique $\mathbf{Q}$-droite dans $\mathbf{R}$ qui contient $\omega_1 L'(E,0)$, où

$$\omega_1 = \Big| \int_{E^\circ(\mathbf{R})} \omega \Big| \tag{3.2}$$

est la période réelle de la différentielle choisie.

En fait, le rang de $K_2(E)$ ne vaut pas toujours 1, *i.e.*, n'est pas toujours égal à l'ordre du zéro de $L(E,s)$ en $s=0$. Ceci a été remarqué par Bloch et Grayson [Bloch, Grayson 1986], à l'aide de calculs sur ordinateur, pour certaines courbes elliptiques. Pour comprendre ce qui se passe, il faut considérer de plus près l'arithmétique de la courbe E. Ecrivons une partie de la suite exacte de localisation [Quillen 1973, §7, Prop. 3.1] du modèle régulier $\mathcal{E}$ relative à sa fibre générique E :[4]

$$\coprod_p K'_2(\mathcal{E}_p) \longrightarrow K_2(\mathcal{E}) \longrightarrow K_2(E) \xrightarrow{\partial=\coprod \partial_p} \coprod_p K'_1(\mathcal{E}_p) \longrightarrow (\text{torsion ?}) \tag{3.3}$$

Ici, le premier terme est de torsion et les conjectures générales de Beilinson impliquent que le dernier terme est réduit à son sous-groupe de torsion. Mais les groupes K'_1[5] des fibres spéciales du modèle régulier se calculent explicitement, mise à part la torsion : $K'_1(\mathcal{E}_p) \otimes \mathbf{Q}$ est non nul si et seulement si E a mauvaise réduction multiplicative déployée en p. Autrement dit, si la réduction $\tilde{E}_p$ en p est une courbe singulière avec un point double dont les droites tangentes sont déjà définies sur le corps $\mathbf{F}_p$, non seulement sur $\mathbf{F}_{p^2}$. Dans ce cas on trouve $L_p(E,s) = 1 - p^{-s}$ de sorte qu'on a

$$dim_{\mathbf{Q}}\, K'_1(\mathcal{E}_p) \otimes \mathbf{Q} = 1 = \mathrm{ord}_{s=0}\, L_p(E,s). \tag{3.4}$$

Les *Conjectures de Beilinson* relatives aux nombres (3.0) s'énoncent alors comme ceci:

3.5 Conjecture.

(i) $dim_{\mathbf{Q}}\, K_2(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{Q} = 1$.

(ii) $r_\omega(K_2(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{Q}) = \omega_1 . L'(E,0)\ \mathbf{Q}$.

4. Problèmes de K-théorie

En essayant de traiter cette conjecture on se heurte à deux difficultés contradictoires : d'une part on ignore si $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$ est un espace vectoriel de dimension finie; d'autre part on a du mal à construire explicitement des éléments non nuls dans cet espace.

---

[3] L'analogie avec le cas des corps de nombres est souvent appropriée. Ici on peut se souvenir de l'application logarithmique sur les unités d'un corps de nombres qui définit son régulateur. — *Cf.* la note suivante.

[4] Voici l'analogie avec le cas d'un corps de nombres k: dans ce cas, le K-groupe correspondant à $\zeta(k,0)$ et $\mathrm{rés}_{s=1}\, \zeta(k,s)$ est K_1, et on a $K_1(k) = k^*$, mais $K_1(\mathcal{O}_k) = \mathcal{O}_k^*$: les unités, qui donnent le régulateur usuel.

[5] Ce sont les groupes analogues aux K-groupes, mais définis en termes de modules cohérents au lieu de modules projectifs. Les théories K' et K coincident sur les schémas réguliers. — Pour calculer les $K'_1(\mathcal{E}_p)$, on se sert de dévissages du type indiqués dans [Quillen 1973, §7, n° 3]. Il s'avère que, à torsion près, on obtient l'homologie du graphe dual de $\mathcal{E}$.

Le premier problème est le plus difficile. Posons $J = H^0(E, \mathcal{K}_2)/\ K_2(\mathbf{Q})$, où $\mathcal{K}_2$ est le faisceau (de Zariski) sur E associé au préfaisceau qui à un ouvert U de E associe $K_2(\Gamma(U, \mathcal{O}_E))$. On sait grâce à Raskind [Raskind 1984] — le cas considéré ici remonte en fait à Bloch — que, pour tout entier $n > 0$, le groupe $J/n.J$ est fini. De plus — *voir* [Soulé 1985] — on sait que $H^0(E, \mathcal{K}_2) \otimes \mathbf{Q} = K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$. Par conséquent, $K_2(E)/nK_2(E).K_2(E)_{tors}$ est fini, pour tout $n > 0$. Mais ceci n'implique pas que $K_2(E)/K_2(E)_{tors}$ est de type fini. Faudrait-il construire une espèce de 'hauteur' sur $K_2(E)$ .....?

Quant à la construction d'éléments de $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$, on dispose à présent de deux méthodes différentes : soit on travaille 'sur la courbe elle-même', soit on utilise la paramétrisation modulaire. Chaque fois qu'on a ainsi construit des éléments non nuls dans $K_2(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{Q}$, on cherche à comparer leurs régulateurs à $L'(E, 0)$ selon 3.5 (ii). On parle alors du problème de démontrer une *conjecture de Beilinson faible* relative au sous-espace des éléments construits. Bien sûr, si l'on savait démontrer 3.5 (i), toutes ces conjectures faibles seraient équivalentes entre elles, et à la conjecture 3.5 (ii) tout entière.

5. Construction d'éléments de $K_2(E)$ 'sur la courbe E'

Cette première méthode pour se donner des éléments de $K_2(E)$ s'appuie essentiellement sur les points de torsion de E.[6] En fait, pour tout $d > 1$, on construit une application

$$\xi = \xi_d \colon \mathbf{Q}[E_d]^\circ \longrightarrow K_2(E) \otimes \mathbf{Q}, \tag{5.0}$$

où $\mathbf{Q}[E_d]^\circ$ est le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel des diviseurs à coefficients rationnels sur E qui sont *définis sur* $\mathbf{Q}$ *en tant que diviseurs*, de degré zéro et à support dans les points de d-torsion de E.

Nous donnerons une esquisse de la construction de ξ_d dans le numéro suivant. Pour l'instant, caractérisons ξ_d par l'application $r_\omega \circ \xi_d$.

Rappelons que ω_1 est la période réelle de ω. Choisissons ω_2 tel que $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ait une partie imaginaire $y = \Im(\tau)$ positive et tel que le réseau $L = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau \subset \mathbf{C}$ soit le réseau rendant $(\mathbf{C}/L, dz)$ isomorphe à $(E, \frac{\omega}{\omega_1})$ sur $\mathbf{C}$. Nous utiliserons des notations (légèrement modifiées) de [Weil 1976, *chap. VIII*] :

$$A(L) = \frac{y}{\pi}, \quad \langle \gamma, x \rangle = exp\,(\frac{\gamma\overline{x} - x\overline{\gamma}}{A(L)}). \tag{5.1}$$

Pour tout diviseur $\mathbf{a} = \sum_{x \in \mathbf{C}/L} a_x(x)$ sur $E(\mathbf{C})$ et tout entier $\nu \geq 0$, on pose alors, pour tout s tel que $\Re(s) > \frac{\nu}{2} + 1$:

$$K_\nu(0, \mathbf{a}, s) = \sum_{x \in \mathbf{C}/L} a_x \sum_{\gamma \in L}{}' \langle \gamma, x \rangle \frac{\overline{\gamma}^\nu}{(\gamma\overline{\gamma})^s}. \tag{5.2}$$

Pour $s \in \mathbf{C}$ quelconque, les valeurs de ces *doubles séries de Kronecker* sont définies par prolongement analytique.

Avec ces notations, les éléments de $\mathbf{Q}[E_d]^\circ$ s'identifient sur $\mathbf{C}$ à des diviseurs $\mathbf{a}$ comme ci-dessus sur $E(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}/L$. On normalise alors ξ de telle façon que, pour tout $\mathbf{a} = \sum_{d.x=0} a_x(x)$ appartenant à $\mathbf{Q}[E_d]^\circ$, on ait

$$r_\omega(\xi_d(\mathbf{a})) = -d^2\omega_1\ (\frac{y}{\pi})^2 K_1(0, \mathbf{a}, 2). \tag{5.3}$$

Cette méthode nous donne donc la conjecture de Beilinson faible suivante (utiliser l'équation fonctionnelle (1.2) pour traduire (3.5) (ii) en un énoncé en $s = 2$) :

[6] Il y a quelques exemples d'éléments non nuls de $K_2(E)$ obtenus à partir de points rationnels d'ordre *infini* — *voir* [Mestre, Schappacher 1990, 1.3.3].

5.4 Conjecture. *Pour tout $d > 1$ et tout $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E_d]^\circ$; si $\xi(\mathbf{a}) \in K_2(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{Q} \subseteq K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$, alors*

$$y^2 K_1(0, \mathbf{a}, 2) \in L(E, 2).\mathbf{Q}.$$

Pour rendre cette conjecture vraiment explicite, il faut pouvoir décider :

(5.5) Pour quel $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E_d]^\circ$, l'élément $\xi(\mathbf{a})$ de $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$ appartient-il à $K_2(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{Q}$?

(5.6) Pour quel $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E_d]^\circ$, la série $K_1(0, \mathbf{a}, 2)$ est-elle non nulle ?

La réponse complète à la première question est donnée par une formule calculant les symboles modérés ∂_p de (3.3) à un facteur non nul près. *Voir* [Bloch, Grayson 1986], [Mestre, Schappacher 1990, 1.5.1 et 2.5.1] et [Schappacher, Scholl 1990]. La formule dépend des degrés des réstrictions de $\mathbf{a}$ aux composantes irréductibles de la fibre spéciale $\mathcal{E}_p$ et fait intervenir le troisième polynôme de Bernoulli.

En ce qui concerne (5.6), $K_1(0, \mathbf{a}, 2)$ ne devrait pas s'annuler 'sans raison'. Malheureusement il y a en général de très fortes raisons qui forcent la plupart des $K_1(0, \mathbf{a}, 2)$ à être nulles. En effet, la fonction $x \mapsto K_1(x', x, s)$ est impaire. Donc, si le diviseur $\mathbf{a}$ est invariant par $x \mapsto -x$, alors $K_1(0, \mathbf{a}, 2) = 0$. Or, si l'image de Galois par l'action sur les points de d-torsion $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(E_d)$ contient -1, cette invariance est forcée par le fait que $\mathbf{a}$ est défini sur $\mathbf{Q}$.

Cette condition sur l'image de Galois est souvent satisfaite. Elle vaut systématiquement pour tout $d > 1$, dès que l'image de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ dans $\mathrm{Aut}(E_{tors}) = GL_2(\hat{\mathbf{Z}})$ est aussi grand que possible, c'est-à-dire d'indice deux — par exemple, si E est la courbe *37A*,[7] discutée dans [Serre 1972, *exemple 5.5.6*].

6. Définition de ξ

Une partie de la suite exacte de localisation de E par rapport à son corps de fonctions rationnelles $\mathbf{Q}(E)$ s'écrit :

$$\coprod_{P \in E} K_2(\mathbf{Q}(P)) \longrightarrow K_2(E) \longrightarrow K_2(\mathbf{Q}(E)) \xrightarrow{\partial = \coprod \partial_P} \coprod_{P \in E} \mathbf{Q}(P)^* \longrightarrow K_1(E) \tag{6.1}$$

Ici, $\mathbf{Q}(P)$ est le corps de définition du point P de E. D'après un théorème de Matsumoto, on a, pour tout corps F,

$$K_2(F) \cong F^* \otimes_{\mathbf{Z}} F^* / \langle f \otimes (1-f) \mid f \in F - \{0, 1\} \rangle. \tag{6.2}$$

De plus, si F est un corps de nombres, alors $K_2(F)$ est un groupe de torsion. On obtient donc une injection $K_2(E) \otimes \mathbf{Q} \hookrightarrow K_2(\mathbf{Q}(E)) \otimes \mathbf{Q}$.

Dans 6.2, le 'symbole' dans $K_2(F)$ correspondant à $f \otimes g$ est noté $\{f, g\}$. Le symbole modéré ∂_P est donné par la formule bien connue

$$\partial_P(\{f, g\}) = (-1)^{ord_P(f) ord_P(g)} \frac{f^{ord_P(g)}}{g^{ord_P(f)}}(P). \tag{6.3}$$

[7] On cite parfois des courbes par le nom qui leur est donné dans la "Table 1" de [Modular Functions ... IV].

Alors l'application ξ_d se construit en termes de symboles $\{f,g\} \in K_2(\mathbf{Q}(E))$. Etant donné $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E_d]^\circ$, choisissons des fonctions $f,g \in \mathbf{Q}(E)$ de diviseurs $(f) = d\mathbf{a}$, resp. $(g) = 2[d^2(0) - \sum_{d.y=0}(y)]$. Par un lemme de Bloch [Bloch 1980, p. 8.6f], [Deninger, Wingberg 1988, Lemma 5.2], quitte à modifier le symbole $\{f,g\} \in K_2(\mathbf{Q}(E))$ par l'addition d'un symbole du type $\{h,c\}$, $h \in \mathbf{Q}(E)^*, c \in \mathbf{Q}^*$, on tombe dans $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$; c'est l'élément $\xi_d(\mathbf{a})$ recherché.

Le régulateur sur $K_2(\mathbf{Q}(E)) \otimes \mathbf{Q}$ est normalisé par la règle : si $\phi, \psi \in \mathbf{Q}(E)$ avec $(\phi) = \sum p_x(x)$, $(\psi) = \sum q_x(x)$, alors

$$r_\omega(\{\phi,\psi\}) = -\frac{1}{2}\omega_1 \, A(L)^2 \sum_{x,y} p_x q_y \; K_1(0, x-y, 2). \tag{6.4}$$

Ceci mène à la formule (5.3) ci-dessus (noter que les $\{h,c\}$ ont un régulateur nul).
Remarquons que, si $d, e > 1$, alors on a

$$\xi_{de} = e^2 \xi_d. \tag{6.5}$$

7. Premier Cas: Courbes à multiplications complexes

Dans ce cas, la conjecture faible 5.4 a été démontrée par Bloch, *cf.* [Bloch 1978], [Bloch 1980]. Un exposé de cette démonstration du point de vue des conjectures générales de Beilinson se trouve dans [Deninger, Wingberg 1988]. Une présentation à la fois élémentaire et très raffinée a été donnée par Rohrlich, [Rohrlich 1987]. Voici son résultat.

7.1 Théorème. *[Rohrlich 1987] Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ telle que $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{Q}}} E$ soit isomorphe à un idéal $\mathcal{B} = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ du corps quadratique imaginaire K. Alors pour tout choix de fonctions $\mathbf{Q}$-rationnelles sur E : $f,g \in \mathbf{Q}(E)$ à support dans E_{tors}, on trouve que*

$$\frac{r_\omega(\{f,g\})}{\omega_1 L'(E,0)} = -\sum_{x,y \in E_{tors}} (\mathrm{ord}_x f)(\mathrm{ord}_y g)\, \alpha(x-y),$$

avec des nombres rationnels $\alpha(x-y)$ qui ne dépendent que de l'orbite de $(x,y) \in E_{tors} \times E_{tors}$ sous l'action diagonale de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ et qui peuvent être calculés explicitement en termes du caractère de Hecke χ de K correspondant à E. De plus, pour un choix convenable de $f,g \in \mathbf{Q}(E)$, on trouve que $r_\omega(\{f,g\}) \neq 0$.

On démontre ce résultat grâce au fait bien connu — dû à Deuring — que la fonction L d'une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ à multiplications complexes par K (définies sur $\overline{\mathbf{Q}}$) est une fonction L de Hecke du corps K : $L(E,s) = L(\chi,s)$. Et la fonction L d'un caractère de Hecke de K s'écrit comme combinaison linéaire de séries de Kronecker — c'est un exercice sur la théorie du corps de classes de K.

Notons qu'une courbe à multiplications complexes a partout bonne réduction potentielle — son invariant j est entier —, donc n'a jamais réduction multiplicative. Par conséquent, ∂ dans 3.3 est identiquement zéro et la question 5.5 a une réponse triviale.

Le cas des courbes à multiplications complexes est donc très favorable à la méthode du §5 poue se donner des éléments de $K_2(E)$. Rappelons quand même, du côté négatif, qu'on ne sait ni la finitude de $dim_{\mathbf{Q}} K_2(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{Q} = dim_{\mathbf{Q}} K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$, ni si les symboles $\{f,g\}$ considérés dans le théorème engendrent un $\mathbf{Q}$-espace fini.

8. Le cas général

Les courbes sans multiplication complexe sont beaucoup moins bien adaptées à la méthode du §5 — aussi bien pour des raisons théoriques qu'à cause de l'insuffisance de nos connaissances actuelles.

D'abord nous avons déjà remarqué à la fin du §5 qu'il peut très bien arriver en général que les images de toutes les applications ξ_d ne contiennent que des éléments de régulateurs zéro. La méthode du §5 ne nous donne donc pas de conjecture faible non triviale.

Supposons donc pour le reste de ce numéro que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ est suffisamment petite pour au'il existe des $r_\omega \circ \xi_d$ d'image non nulle. Alors, si E n'a pas de multiplication complexe, on ne sait pas démontrer la conjecture 5.4 — exception faite des rares cas où une comparaison de l'image des ξ_d aux éléments donnés par la méthode modulaire est possible: *voir* §10 plus loin. Toutefois on a des résultats numériques très convaincants, dûs à Bloch et Grayson [Bloch, Grayson 1986].[8] Bien sûr, ces calculs de quotients

$$\frac{y^2\, K_1(0,\mathbf{a},2)}{L(E,2)}$$

ne peuvent jamais *démontrer* que ce sont des nombres rationnels dès que $\partial(\xi_d(\mathbf{a})) = 0$. Mais le fait que Bloch et Grayson trouvent systématiquement et avec une excellente précision des fractions sans facteur premier surprenant est très rassurant. Tout ce qu'on peut *démontrer* sur ordinateur est que certaines séries $K_1(0,\mathbf{a},2)$ sont non nulles.

Il est intéressant de remarquer que ces vérifications numériques sont aussi un test, du côté des séries de Kronecker, de la conjecture suivante, conséquence formelle de 3.3 et 3.5,(i) :

$$(8.1) \qquad dim_{\mathbf{Q}}\, K_2(E) \otimes \mathbf{Q} \stackrel{?}{=} 1 + |\{p \mid L_p(E.s) = 1 - p^{-s}\}|$$

En fait, comme on ne calcule que des éléments de la forme $\xi_d(\mathbf{a})$, le test est même plus fin :

Le phénomène des 'relations exotiques'

La différence la plus importante entre le cas général et celui des courbes à multiplications complexes est l'écart entre $K_2(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{Q}$ et $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$, décrit selon 3.3 par le symbole modéré ∂. Le comportement de ∂ sur les éléments de la forme $\xi_d(\mathbf{a})$, joint à la conjecture 8.1, prédit donc la dimension du $\mathbf{Q}$-espace engendré par les $\xi_d(\mathbf{a})$. On cherche alors numériquement un nombre correspondant de dépendances linéaires sur $\mathbf{Q}$ entre les nombre réels $K_1(0,\mathbf{a},2)$. On appelle parfois *relations exotiques* ces relations linéaires entre séries de Kronecker forcées par le symbole modéré ∂, et non expliquées par la seule dimension conjecturée de l'espace ambiant $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$.

9. Construction modulaire d'éléments de $K_2(E)$

La deuxième méthode pour se donner des éléments de $K_2(E)$ repose sur l'hypothèse — que nous avons faite vers la fin du §1 — que E est paramétrée par une courbe modulaire. La méthode est due à Beilinson [Beilinson 1985] — pour les détails on renvoie à [Schappacher, Scholl 1988]. Voici l'idée principale.

Dans la construction de ξ au §6, on faisait appel à un lemme de Bloch qui permettait de relever des symboles de $K_2(\mathbf{Q}(E))$ à $K_2(E)$. En général, ce lemme s'applique à une courbe

[8] En préparant notre travail [Mestre, Schappacher 1990], Mestre et moi avons refait quelques-uns des calculs de Bloch et Grayson, et aussi traité d'autres courbes.

(projective lisse) X sur un corps F et des fonctions rationnelles $f, g \in F(X)$ dont les diviseurs sont à support dans un ensemble X^∞ de points de $X(\overline{F})$ tels que, pour tous $x, y \in X^\infty$, le diviseur de degré zéro $(x)-(y)$ soit un point de torsion de la jacobienne $\mathrm{Jac}(X)$. Alors quitte à modifier le symbole $\{f,g\} \in K_2(F(X))$ par un symbole du type $\{h,c\}$, $h \in F(X)^*, c \in F^*$, on peut le relever dans $K_2(X) \otimes \mathbf{Q}$.

On applique ce lemme aux courbes modulaires $X = X(\Gamma)$ relatives aux sous-groupes de congruence Γ de $SL_2(\mathbf{Z})$, avec pour X^∞ l'ensemble des *pointes*. Cet ensemble satisfait l'hypothèse du lemme d'après le théorème de Manin et Drin'feld. Les fonctions f, g seront alors celles dont les diviseurs sont concentrés aux pointes, autrement dit, ce sont des *unités modulaires*.

Soit donc $X = X(\Gamma)$ une courbe modulaire avec $\Gamma \subseteq \Gamma_0(N)$. Par conséquent on a un morphisme propre $\phi : X \longrightarrow X_0(N) \longrightarrow E$. Pour ce genre de morphisme, $\phi_* : K_2(X) \longrightarrow K_2(E)$ existe. Appelons $\mathcal{P}$ le sous-espace de $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$ engendré par tous les éléments de la forme $\phi_*(\{f,g\})$, où f, g sont des unités modulaires sur $X(\Gamma)$ et Γ décrit les sous-groupes de congruence de $\Gamma_0(N)$. Alors Beilinson démontre le

9.1 Théorème. *(i)* $r_\omega(\mathcal{P}) = \omega_1 L'(E,0)$.
(ii) $\mathcal{P} \subseteq K_2(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{Q}$.

La démonstration part de la formule qui définit le régulateur d'un symbole $\{f,g\}$. La voici, à un facteur normalisant $*$ près qu'il est inutile de préciser ici.

$$r_\omega(\{f,g\}) = * \int_{X(\mathbf{C})} \log|f| \, \overline{\left(\frac{dg}{g}\right)} \wedge \phi^*\omega. \tag{9.2}$$

Cette formule est générale, c'est-à-dire qu'elle est aussi valable dans le cadre de l'application ξ construite au §6. Le fait qu'elle se traduit alors en une combinaison de séries de Kronecker se démontre soit par une analyse harmonique — *voir* [Deninger, Wingberg 1988] — soit par d'autres astuces analytiques — comme l'analogue de la méthode de Rankin et Selberg évoqué dans [Rohrlich 1987].[9]

Pour déduire 9.1 (i) de la formule 9.2, on interpréte le terme $\log|f|$ comme une série d'Eisenstein non holomorphe et le terme $\overline{d \log g}$ comme le conjugué complexe d'une série d'Eisenstein holomorphe. Cette dernière se décompose selon des caractères de Dirichlet pairs χ, et l'intégrale qui en résulte se lit finalement comme une convolution de Rankin-Selberg. Elle donne, à quelques facteurs moins essentiels près, le produit $L(E \otimes \chi, 1).L(E,2)$ dont le premier terme correspond à la période ω_1. — Nous renvoyons à [Schappacher, Scholl 1988] pour tous les détails.

La démonstration de 9.1 (ii) était insuffisante dans [Beilinson 1985] et est donnée dans [Schappacher, Scholl 1988, §7].

10. Comparaison entre les deux types de construction d'éléments de $K_2(E)$

Ce qu'on sait démontrer dans cette direction est tellement piètre qu'il convient à peine d'y consacrer un numéro de ce rapport. Le problème est que les points de torsion de la courbe E utilisés dans l'approche du §5 ne se ramènent que très exceptionnellement aux pointes de $X_0(N)$. Plus exactement, soit P un sous-schéma en groupes fini de E défini sur $\mathbf{Q}$. Afin de

[9] Pour ramener les expressions trouvées par Rohrlich aux séries de Kronecker que nous utilisons, il faut encore faire intervenir l'équation fonctionnelle des doubles séries de Kronecker [Weil 1976, p. 80, formule (32)].

comparer directement $r_\omega(\xi_{|P|}(\mathbf{a}))$, pour tout $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[P]^\circ$, au régulateur d'un élément convenable de $\mathcal{P}$, il faudrait que $\phi^{-1}(P) \subseteq X^\infty$. Mais ceci n'arrive presque jamais : le degré de $X_\circ(N) \longrightarrow E$ croît déjà plus vite avec N que le nombre des pointes.

Quelques exemples où une comparaison peut quand même être effectuée se déduisent de certaines courbes *involutoires* convenables : *voir* [Mestre, Schappacher 1990, 1.6]. Le premier exemple, particulièrement simple, est la courbe $E = X_1(11)$ dont la torsion rationnelle est identique à l'ensemble des pointes.[10] Sur ordinateur on vérifie que $K_1(0, \mathbf{a}, 2) \neq 0$ pour un choix convenable de $\mathbf{a}$ à support dans les points rationnels de E. $X_1(11)$ est donc une des rares courbes E sans multiplication complexe pour lesquelles on sait démontrer la conjecture 5.4 pour les diviseurs $\mathbf{a} \in \mathbf{Q}[E(\mathbf{Q})_{tors}]^\circ$.

En général, trouver de tels exemples revient à démontrer que certaines intersections de groupes de congruence sont encore des sous-groupes de congruence. C'est souvent un problème épineux.

11. Généralisation du théorème modulaire.

Dans [Beilinson 1986], Beilinson démontre une 'conjecture de Beilinson faible' pour les courbes elliptiques (paramétrées comme toujours par une courbe modulaire) relative à tous les nombres $L'(E, m)$, $L(E, n)$ avec $m \leq 0$, $n \geq 2$. Pour comprendre la difficulté de la chose, il faut savoir d'abord que les conjectures de Beilinson lient $L(E, n)$ aux régulateurs sur $K^{(n)}_{2(n-1)}(E)$, la partie graduée de poids n par rapport à la filtration γ sur $K_{2(n-1)}(E)$. Pour $n > 2$ cet espace vectoriel est de nature assez différente de $K_2(E) \otimes \mathbf{Q} = K^{(2)}_2(E)$: les indices supérieurs et inférieurs n'étant plus les mêmes, on sort des K-groupes 'à la Milnor'; $K^{(n)}_{2(n-1)}(E)$ n'est plus engendré par des 'symboles', *i.e.*, par des éléments obtenus par cup-produit à partir de K_1. Aucun analogue des méthodes qu'on a vues plus haut n'est donc directement applicable aux K-groupes en question.

Le remède est de passer à une variété auxiliaire $V \xrightarrow{\psi} E$ de dimension telle que l'homomorphisme de Gysin ψ_* aboutissant à $K^{(n)}_{2(n-1)}(E)$ provienne d'un K-groupe 'symbolique' de V. Les variétés utilisées par Beilinson sont les variétés de Kuga-Sato d'ordre $n-2$ attachées aux courbes modulaires $X \longrightarrow X_\circ(N) \longrightarrow E$ comme ci-dessus :

$$V \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{A} \times_X \ldots \times_X \mathcal{A},$$

où $\mathcal{A}$ est la courbe elliptique universelle au-dessus de X — on peut supposer $N > 3$ — et on prend $n-2$ fois le produit fibré. Alors V est de dimension relative $n-2$ sur X et donc sur E, et $\psi_* : K^{(2(n-1))}_{2(n-1)}(V) \longrightarrow K^{(n)}_{2(n-1)}(E)$. Les fonctions sur V qui remplacent les unités modulaires du théorème 9.1 sont encore celles dont les diviseurs sont concentrés au-dessus des pointes de X.

C'est Scholl qui a récemment étendu la démonstration de Beilinson à toutes les valeurs aux points entiers (non centraux) des fonctions L de formes modulaires f de poids ≥ 2. Une des difficultés de base de ce travail était de définir un vrai motif (au sens de Grothendieck, découpé par des cycles algébriques ...) dont la fonction L est $L(f, s)$. — *Cf.* [Scholl 1989].

Notons en passant que, en dehors de $s = 0$, $s = 2$, il n'y a conjecturalement pas de différence entre $K^{(n)}_{2(n-1)}(E)$ et $K^{(n)}_{2(n-1)}(\mathcal{E})$. Ceci découle d'une suite analogue à 3.3 et de conjectures sur la K-théorie de schémas sur les corps finis.

[10] Noter que, pour la comparaison, il n'est pas suffisant de savoir que les pointes *engendrent* la torsion rationnelle.

12. Le théorème de Deninger.

Dans [Deninger 1989], Deninger démontre une conjecture de Beilinson faible pour les courbes elliptiques à *multiplications complexes* relative à tous les nombres $L'(E,m)$, $L(E,n)$ avec $m \leq 0$, $n \geq 2$. Sa méthode est plus ou moins analogue à celle du §5, mais s'inspire aussi du travail de Beilinson mentionné ci-avant. En fait au lieu des variétés de Kuga-Sato utilisées par Beilinson, Deninger considère le motif $Sym^{2n-3}E$. La clé de sa démonstration est l'observation selon laquelle les multiplications complexes permettent de définir un morphisme de motifs $Sym^{2n-3}E \xrightarrow{\psi} H^1(E)$. En fait un des ingrédients de la définition de ψ est l'application

$$id_E \times \sqrt{d_K} : E \times E \longrightarrow E,$$

où K est le corps des multiplications complexes de E et l'élément $\sqrt{d_K} \in K$ est identifié à un endomorphisme de E. — Pour un peu plus de détails sur la méthode de Deninger, le lecteur peut consulter l'exposé introductoire [Deninger 1988].

Mentionnons que la méthode s'étend assez naturellement à toutes les fonctions L de Hecke des corps quadratiques imaginaires.

13. Généralisation du travail de Bloch et Grayson.

Si l'on veut généraliser le travail de Deninger aux courbes elliptiques sans multiplication complexe, on ne se heurte pas seulement aux difficultés — déjà monstrueuses — rencontrées lors du passage du §7 au §8, mais l'absence d'un morphisme ψ comme ci-avant change assez fondamentalement les règles du jeu: Comme on ne peut plus redescendre à la courbe elle-même, on est amené à comparer de façon numérique les valeurs spéciales $L(Sym^k E, k+1)$ à des déterminants de valeurs spéciales de séries de Kronecker. Ici des obstructions provenant du symbole symbole modéré resurgissent comme au §8, et on découvre numériquement des 'relations exotiques' entre séries de Kronecker.

Ainsi on a vérifié dans [Mestre, Schappacher 1990], pour un certain nombre de courbes E sans multiplication complexe, que

$$\frac{y^4}{\pi^2} \text{ dét} \begin{pmatrix} K_2(0,\mathbf{a},3) & K_0(0,\mathbf{a},2) \\ K_2(0,\mathbf{b},3) & K_0(0,\mathbf{b},2) \end{pmatrix} \in L(Sym^2 E, 3)\ \mathbf{Q}$$

si les diviseurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q}[E_{tors}]^\circ$ échappent aux obstructions provenant du symbole modéré — obstructions qui se calculent par une formule analogue à celle mentionnée au paragraphe suivant 5.6, mais qui fait maintenant intervenir le quatrième polynôme de Bernoulli. Le fait que le régulateur est devenu un vrai déterminant tient à ce que la dimension du K-groupe en question, $K_3^{(3)}(Sym^2 E)_{\mathbf{Z}}$, est conjecturée d'être 2, tout comme l'ordre du zéro de $L(Sym^2 E, s)$ en $s = 0$.

Au §8 on était amené à supposer que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ est suffisamment petite pour admettre des $r_\omega \circ \xi_d$ d'image non nulle. Maintenant, le fait qu'on veut avoir un déterminant non nul à l'aide de diviseurs qui échappent aux obstructions provenant du symbole modéré impose des conditions plus sévères. Ainsi on démontre dans [Mestre, Schappacher 1990, 3.4] que, *à $\mathbf{Q}$-isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de courbes elliptiques E sur $\mathbf{Q}$ d'invariant j non-entier, munies d'un point rationnel T d'ordre fini, telles qu'il existe des diviseurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Q}[\langle T \rangle]^\circ$ qui échappent aux obstructions provenant du symbole modéré et tels que le déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} K_2(0,\mathbf{a},3) & K_0(0,\mathbf{a},2) \\ K_2(0,\mathbf{b},3) & K_0(0,\mathbf{b},2) \end{pmatrix}$$

soit non-nul.

Bibliographie

A. Beilinson (1985), Higher regulators and values of L-functions, *J. Soviet Math.* **30** (1985), 2036–2070.

A. Beilinson (1986), Higher regulators of modular curves; *in : Contemporary Mathematics* **55** (1986), Part I, 1–34

S. Bloch (1978), Algebraic K-theory and Zeta Functions of Elliptic Curves, Proc. ICM Helsinki 1978, 511–515

S. Bloch (1980), Lectures on algebraic cycles; *Duke Univ. Math. Series* **IV**

S. Bloch, D. Grayson (1986), K_2 and the L-functions of elliptic curves. Computer calculations; *in : Contemporary Mathematics* **55** (1986), Part I, 79–88

S. Bloch, K. Kato (1989), $L-$functions and Tamagawa numbers of motives, *preprint*

A. Borel (1974), Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta, Ann. Scuola Normale Superiore **7**, 613–636

H. Carayol (1983), Sur les représentations l- adiques attachées aux formes modulaires de Hilbert, CRAS Paris, Sér. I, t. **296** (25 avril 1983), 629–632

C. Deninger (1988), Higher regulators of elliptic curves with complex multiplication; *in : Sém. Théorie de Nombres Paris* 1986/87, C. Goldstein (ed.), Birkhäuser 1988

C. Deninger (1989), Higher regulators and Hecke L-series of imaginary quadratic fields I, *Inventiones Math.* **96** (1989), 1–69; II, *preprint*

C. Deninger, K. Wingberg (1988), On the Beilinson conjectures for elliptic curves with complex multiplication; *in :* Rapoport, Schappacher, Schneider (ed.s), Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions, *Perspectives in Math.* **4**, Acad. Press 1988, 249–272

J-F. Mestre, N. Schappacher (1990), Séries de Kronecker et fonctions L des puissances symétriques de courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$, *à paraître* Proc. 1989 Texel Conference, Birkhäuser

Modular Functions of One Variable, IV, Antwerp Proceedings 1972; Springer *Lect. Notes Math.* **476**

D. Quillen (1973), Higher algebraic K-theory, I; *in :* Algebraic K-theory I — Higher K-theories, Proc. Battele Inst. 1972, Springer *Lect. Notes Math.* **341**, 77–139

D. Ramakrishnan (1989a), Regulators, Algebraic Cycles, and Values of L-functions, *Contemporary Mathematics* **83**, 183–310

D. Ramakrishnan (1989b), Problems arising from the Tate and Beilinson conjectures in the context of Shimura varieties; *preprint* 1989

M. Rapoport, N. Schappacher, P. Schneider (ed.s) (1988), Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions, *Perspectives in Math.* **4**, Acad. Press 1988

W. Raskind (1984), "Le théorème de Mordell-Weil faible" pour $H^0(X,\mathcal{K}_2)/\ K_2k$, CRAS Paris, Sér. I, t. **299** (7 mai 1984), 241–244

D.E. Rohrlich (1987), Elliptic curves and values of L-functions; *in : Can. Math. Soc. Conf. Proc.* **7** (1987), 371–387

N. Schappacher, and A.J. Scholl (1988), Beilinson's Theorem on Modular Curves; *in :* Rapoport, Schappacher, Schneider (ed.s), Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions, *Perspectives in Math.* **4**, Acad. Press 1988, 273–304

N. Schappacher, A.J. Scholl (1990), The boundary of the Eisenstein symbol, *preprint*

A.J. Scholl (1989), Motives for modular forms; *Inventiones math.* **100**, 419–430

J.-P. Serre (1972), Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, *Inventiones Math.* **15** (1972), 259–331; Œuvres, III: no. 94

C. Soulé (1985), Opérations en K-théorie algébrique, *Can. J. Math.* **37**, 488–550

A. Weil (1976), Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker; *Ergebnisse* **88**, Springer 1976.

Norbert Schappacher
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
D-5300 Bonn 2
West-Germany