

Astérisque

PHILIPPE RAMBOUR

**Éléments fixes du complété d'une clôture séparable
sous l'action de son groupe de Galois**

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 285-294

http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__285_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉLÉMENTS FIXES DU COMPLÉTÉ D'UNE CLÔTURE SÉPARABLE SOUS L'ACTION DE SON GROUPE DE GALOIS

par Philippe RAMBOUR

Soit R un anneau, noëthérien, normal, intègre de corps des fractions K , et soit I un idéal de R qui ne soit pas confondu avec R tout entier.

On désigne par :

- R_s l'anneau des entiers sur R d'une clôture séparable K_s de K ;
- G le groupe $\text{Gal}(K_s/K)$;
- \hat{R}_s le complété de R_s pour la topologie définie par IR_s .

Le problème est de déterminer \hat{R}_s^G qui est l'ensemble des éléments fixes du complété de R_s sous l'action de G .

J. Ax a répondu à la question dans le cas où le corps K est un corps local de caractéristique 0 ou p , c'est-à-dire un corps muni d'une valuation à valeur dans un groupe abélien et par laquelle K est hensélien [1]. Dans ce travail nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'anneau R_s est séparé pour la topologie I -adique et s'injecte donc dans \hat{R}_s . En caractéristique p , l'anneau \hat{R}_s contient une clôture radicielle de R , notée \sqrt{R} , et \hat{R}_s^G l'ensemble des points fixes de \hat{R}_s sous l'action de G n'est autre que l'adhérence de \sqrt{R} dans \hat{R}_s .*

Pour obtenir la dernière assertion nous utiliserons des approximations d'un élément de R_s qui dépendront du diamètre des conjugués, méthode mise au point par J. Ax [1].

I. — Séparation de R_s pour la topologie I -adique

PROPOSITION 1. — Si $I \neq R$ alors $\bigcap_n I^n R_s$ est réduite à 0 et R_s est donc séparé pour la topologie définie par IR_s .

Démonstration : supposons d'abord que I est un idéal principal. Il existe alors un élément x de R qui est un générateur de I . Puisque R est normal et noethérien et $I \neq R$ il existe une valuation v vérifiant $v(x) > 0$ et cette valuation se prolonge à R_s . D'où si a appartient à $\bigcap_n I^n R_s$, alors $v(a) = +\infty$ et donc $a = 0$.

Démontrons maintenant la propriété dans le cas où I n'est pas forcément un idéal principal.

Notons S le schéma affine $\text{Spec } R$ et soit \tilde{S} le normalisé de l'éclaté \hat{S} par rapport au sous-schéma fermé $Y = \text{Spec}(R/I)$. Montrons tout d'abord que l'application canonique $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ est une application surjective. Pour cela remarquons que l'on peut écrire π comme la composée $\pi_2 \circ \pi_1$ où π_1 est l'application canonique de \tilde{S} dans \hat{S} , π_2 l'application canonique de \hat{S} dans S . π_1 et π_2 étant deux applications surjectives, il en est de même pour π .

π_1 est surjective : c'est le *going down* théorème (voir MATSUMURA : Commutative Algebra [2]).

π_2 est surjective : si $V = S - Y$, alors π_2 est un isomorphisme de $\pi_2^{-1}(V)$ sur V . Comme π_2 est propre, π_2 est fermé donc $\pi_2(\hat{S})$ est un fermé de S contenant V . Comme S est intègre S est aussi irréductible donc on a forcément $\pi_2(\hat{S}) = S$.

Soit maintenant $U = \text{Spec } A$ un ouvert affine de \tilde{S} . On sait que A est un anneau noethérien normal et si U est choisi assez petit parmi les ouverts affines vérifiant : $\pi^{-1}(Y) \cap U \neq \emptyset$ alors IA est un idéal principal de A , distinct de A . D'après ce qui a été démontré dans le cas principal on sait que $\bigcap_n I^n A_s = \{0\}$ avec A_s clôture intégrale de A contenue dans K_s . Puisque R est contenu dans A , alors R_s est contenu dans A_s et $\bigcap_n I^n R_s$ est réduite à 0.

II. — \hat{R}_s contient une clôture radicielle de R

PROPOSITION 2. — Si R est de caractéristique p , l'anneau \hat{R}_s contient une clôture radicielle de R , on la note \sqrt{R} .

Démonstration : soit β un élément de R et N un entier naturel. On va montrer que \hat{R}_s contient une solution de $X^{p^N} = \beta$. Pour cela fixons un élément

non nul de I , appelé a . Pour tout entier naturel m supérieur à N on définit X_m comme étant une racine de l'équation :

$$X^{p^N} - a^{p^m} X = \beta(1).$$

Puisque cette équation est séparable X_m est bien un élément de R_s . Nous allons montrer que la suite $(X_m)_{m>N}$ ainsi définie est une suite de Cauchy dans R_s . Elle sera alors convergente dans \hat{R}_s , avec une limite X_0 qui vérifiera, en faisant tendre m vers l'infini dans (1), $X_0^{p^N} = \beta$. Donc X_0 sera donc une racine p^N -ième de β , ce qui démontrera le théorème cherché.

Si m et m' vérifient $m' > m > N$, on a :

$$X_m^{p^N} - X_{m'}^{p^N} = a^{p^m} X_m - a^{p^{m'}} X_{m'}$$

$$\left(\frac{X_m - X_{m'}}{a^{p^m - N}} \right)^{p^N} = X_m - a^{p^{m'} - p^m} X_{m'}.$$

Cette dernière égalité prouve que $(X_m - X_{m'})/a^{p^{m'} - p^m}$ est un élément entier sur R_s , et puisque R_s est un anneau normal $(X_m - X_{m'})/a^{p^{m'} - p^m}$ est un élément de R_s . Si α cet élément, l'égalité $X_m - X_{m'} = a^{p^{m'} - p^m} \alpha$ permet de savoir que $X_m - X_{m'}$ est un élément de $I^{p^{m'} - p^m}$ ce qui prouve que la suite $(X_m)_{m>N}$ est bien une suite de Cauchy, ce qui achève la démonstration.

III. — Diamètre des conjugués

Dans tout le paragraphe on supposera la caractéristique de K égale à p .

DÉFINITION 1. — Pour α élément de R_s , avec $\alpha \neq 0$, on pose :

$$\delta(\alpha) = \max\{n/\alpha \in I^n\}.$$

DÉFINITION 2. — Si K' est une extension finie de K on pose, si α est un élément de R_s :

$$\Delta_{K'} = \min\{n/\delta(\sigma(\alpha) - \alpha) \in I^n, \sigma \in \text{Gal}(K_s/K')\}.$$

Remarque : si α est un élément de K' , on pose :

$$\Delta_{K'}(\alpha) = +\infty.$$

On remarque : $\Delta_{K'}(\alpha) \geq \delta(\alpha)$ pour toute extension finie K' de K .

PROPOSITION 3.. — Il existe deux réels a et b tels que pour tout α de R_s il existe β de \sqrt{R} vérifiant $\alpha - \beta \in I^{[a\Delta_{K(\alpha)}]+b}$, et si $[K(\alpha) : K]$ premier à p , alors $\alpha - \beta \in I^{\Delta_{K(\alpha)}}$.

Démonstration :

(a) Démontrons tout d'abord la proposition dans le cas où $[K(\alpha) : K]$ premier à p . On remarque alors que $\text{Tr}_{K(\alpha)/K}(\alpha)$ appartient à R puisque R est normal et donc $\text{Tr}_{K(\alpha)/K}(\alpha)/[K(\alpha) : K]$ est également un élément de R et de plus :

$$\left((\text{Tr}_{K(\alpha)/K}(\alpha)) / [K(\alpha) : K] \right) - \alpha = \sum \frac{\alpha' - \alpha}{[K(\alpha) : K]}$$

α' parcourant les K conjugués de α . Ce dernier terme est un élément de $I^{\Delta_{K(\alpha)}}$.

(b) Pour montrer la proposition dans ce cas nous allons avoir besoin des lemmes suivants :

LEMME 1. — On se donne K' et K'' deux extensions finies séparables de K avec K' contenu dans K'' et vérifiant $[K'' : K'] = p$. Alors si α est un élément de R_s appartenant à K'' on a :

(i) on peut trouver β un élément de R' , où R' est l'anneau des entiers de K' , qui soit tel que :

$$\alpha^p - \beta \in I^{\Delta_{K'(\alpha)} + \delta(\alpha)(p-1)}$$

(ii) pour tout entier naturel n non nul on peut trouver un élément β_n de R' avec :

$$\alpha^{p^n} - \beta_n \in I^{\Delta_{K'(\alpha)} p^n (1-a^n)} \quad \text{où} \quad a = (p-1)/p.$$

Démonstration du Lemme 1 :

Si α est un élément de K' il n'y a rien à démontrer. Sinon $[K'(\alpha) : K']$ vaut p et on peut faire la démonstration ci-dessous.

(i) Si $\alpha_1 \cdots \alpha_p$ désigne les racines du polynôme minimal de α sur K' , on pose $\eta_i = \alpha_i - \alpha$. Alors

$$\begin{aligned} N_{K'(\alpha)/K'}(\alpha) &= \prod_{i=1}^p \alpha_i = \prod_{i=1}^p (\alpha + \eta_i) \\ &= \alpha^p + b_1 \alpha^{p-1} + \cdots + b_p. \end{aligned}$$

En remarquant que les b_j sont, au signe près, les j -ième fonctions symétriques élémentaires de η_j pour $1 \leq j \leq p$, et que les η_j sont des éléments de $I^{\Delta_{K'}(\alpha)}$ on obtient facilement que : $N_{K'(\alpha)/K'}(\alpha) - \alpha^p$ est un élément d'un I^N avec :

$$N \geq \min_{1 \leq j \leq p} ((p-j)\delta(\alpha) + j\Delta_{K'}(\alpha)) = \Delta_{K'}(\alpha) + \delta(\alpha)(p-1)$$

en utilisant que $\Delta_{K'}(\alpha) \geq \delta(\alpha)$.

Comme R' est normal, on a $N_{K'(\alpha)/K'}(\alpha)$ élément de R d'où le résultat.

(ii) Démontrons d'abord par récurrence sur n que l'on peut trouver un élément β_n de R' vérifiant :

$$\alpha^{p^n} - \beta_n \in I^{\Delta_{K'}(\alpha)p^n(1-a^n/p^n)+(p-1)^n\delta(\alpha)}$$

La formule annoncée sera alors une conséquence immédiate de ce résultat.

Si $n = 1$ c'est ce que l'on a obtenu au (i).

Montrons maintenant la formule pour n quelconque. D'après l'hypothèse de récurrence il existe un élément β_{n-1} de R' vérifiant :

$$\alpha^{p^{n-1}} - \beta_{n-1} \in I^{\Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1}(1-a^{n-1})+(p-1)^{n-1}\delta(\alpha)}$$

posons $x_{n-1} = \alpha^{p^{n-1}} - \beta_{n-1}$.

$$\delta(x_{n-1}) \geq \Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1}(1-a^{n-1}) + (p-1)^{n-1}\delta(\alpha).$$

et

$$\Delta_{K'}(x_{n-1}) = \Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1}$$

grâce au (i) on sait qu'il existe β un élément de R' vérifiant

$$x_{n-1}^p - \beta \in I^{\Delta_{K'}(x_{n-1})+\delta(x_{n-1})(p-1)}$$

ce qui implique, d'après les remarques ci-dessus :

$$\begin{aligned} \delta(\alpha^{p^n} - \beta_{n-1}^p - \beta) &\geq \Delta_{K'}(\alpha)p^{n-1} \\ &\quad + (p-1)(\Delta_{K'}(\alpha)(1-a^{n-1})p^{n-1} + (p-1)^{n-1}\delta(\alpha)). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que si l'on pose $\beta_{n-1}^p + \beta = \beta_n$ et que si l'on fait un petit calcul pour transformer $p^{n-1} + p^{n-1}(1-(p-1/p)^{n-1})(p-1)$ en $p^n(1-(p-1/p)^n)$ on obtient

$$\delta(\alpha^{p^n} - \beta) \geq \Delta_{K'}(\alpha)p^n(1-a^n) + (p-1)^n\delta(\alpha)$$

qui est le résultat annoncé.

LEMME 2. — Soit $H_m \supset H_{m-1} \supset \dots \supset H_1 \supset H_0$ une tour d'extensions finies séparables de K avec $[H_i : H_{i-1}] = p$ pour $1 \leq i \leq m$. On appelle R_0 l'anneau des entiers de H_0 par rapport à R , et R_i l'anneau des entiers de H_i sur R_0 . Si α est un élément de H_m et si n est un entier naturel donné on peut trouver un élément β_{m-i} de R_{m-i} vérifiant :

$$\alpha^{p^{ni}} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1-a^n)^i} \quad 1 \leq i \leq m.$$

Démonstration : Démontrons ce lemme par récurrence.

Pour $i = 1$ c'est une application immédiate du point (ii) du lemme 1 avec $K' = H_{m-1}$ en remarquant que puisque H_0 est contenu dans H_{m-1} , $\Delta_{H_0}(\alpha) \leq \Delta_{H_{m-1}}(\alpha)$.

Démontrons maintenant le lemme pour un i quelconque $1 \leq i \leq m$.

D'après l'hypothèse de récurrence il existe β_{i-1} élément de R'_{m-i+1} avec

$$\alpha^{p^{n(i-1)}} - \beta_{m-i+1} \in I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{n(i-1)}(1-a^n)^{(i-1)}}. \quad (I)$$

on a

$$\Delta_{H_0}(\beta_{m-i+1}) \geq \Delta_{H_0}(\alpha)p^{n(i-1)}(1-a^n)^{(i-1)}(1)$$

en effet si σ un élément de $Gal(K_s/H_0)$, et si $\alpha' = \sigma(\alpha)$, et si $\beta'_{m-i+1} = \sigma(\beta_{m-i+1})$, alors :

$$\begin{aligned} \beta'_{m-i+1} - \beta_{m-i+1} &= \beta'_{m-i+1} - \alpha'^{p^{n(i-1)}} + \alpha'^{p^{n(i-1)}} \\ &\quad + \alpha^{p^{n(i-1)}} - \alpha^{p^{n(i-1)}} - \beta_{m-i+1} \end{aligned}$$

en remarquant que $\beta'_{m-i+1} - \alpha'^{p^{n(i-1)}}$ et $\beta_{m-i+1} - \alpha^{p^{n(i-1)}}$ sont des éléments de $I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{n(i-1)}(1-a^n)^{(i-1)}}$ et comme $\alpha^{p^{n(i-1)}} - \alpha'^{p^{n(i-1)}}$ dans $I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{n(i-1)}}$ on obtient l'inégalité (1).

Si l'on applique maintenant le résultat (ii) du lemme 1 avec $K' = H_{m-i}$ on peut trouver un élément de R_{m-i} avec :

$$\beta_{m-i+1}^{p^n} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_{m-i}}(\beta_{m-i+1}) \cdot p^n(1-a^n)} \quad (II)$$

et remarquant que $\Delta_{H_{m-i}}(\beta_{m-i+1}) \geq \Delta_{H_0}(\beta_{m-i+1})$

$$\beta_{m-i+1}^{p^n} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_0}(\beta_{m-i+1})p^n(1-a^n)}.$$

Soit d'après l'inégalité (1) :

$$\beta_{m-i+1}^{p^n} - \beta_{m-i} \in I^{\Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1-a^n)^i} \quad (II')$$

D'autre part en élevant $\alpha^{p^{n(i-1)}} - \beta_{m-i+1}$ à la puissance p^n la relation (I) donne :

$$\delta(\alpha^{p^{ni}} - \beta_{m-i+1}^{p^n}) \geq \Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1 - a^n)^i \quad (I')$$

d'où en combinant (II') et (I') :

$$\delta(\alpha^{p^{ni}} - \beta_{m-i}) \geq \Delta_{H_0}(\alpha)p^{ni}(1 - a^n)^i.$$

ce qui est le résultat annoncé.

(c) Démonstration de la proposition 3 dans le cas $[\tilde{K} : K] = p^m$.

Où \tilde{K} désigne une extension galoisienne de degré minimale de K contenant α . En utilisant que $\text{Gal}(\tilde{K}(\alpha) : K)$ est résoluble on peut obtenir une tour d'extensions séparables :

$$\tilde{K} = K_m \supset K_{m-1} \supset \dots \supset K_1 \supset K_0 = K.$$

On appelle R_i l'anneau des entiers de K_i sur R . Soit n un entier naturel. Si on applique le lemme 2 avec $i = m$ et $H_m = \tilde{K}$, $H_0 = K$, on obtient l'existence d'un élément β_0 de R vérifiant :

$$\alpha^{p^{nm}} - \beta_0 \in I^{\Delta_K(\alpha)p^{nm}}(1 - a^n)^m.$$

Si l'on choisit maintenant n tel que :

$$1 - (p - 1/p)^n \geq 1/2,$$

on obtient :

$$\alpha^{p^{nm}} - \beta_0 \in I^{\Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2]}.$$

Si l'on admet pour l'instant que $x^{p^j} \in I^N$ implique :

$$x \in I^{[N/p^j]-r+1}$$

avec r désignant le nombre de générateurs de I , on obtient que si β vaut $\beta_0^{1/p^{nm}}$ alors :

$$\alpha - \beta \in I^{[\Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2]/p^{nm}]-r+1}.$$

En remarquant que l'on peut choisir encore n pour que :

$$[\Delta_K(\alpha)[p^{nm}/2]/p^{nm}] \geq \left\lceil \frac{\Delta_K(\alpha)}{2} \right\rceil - 1.$$

On obtient : $\alpha - \beta \in I^{[\Delta(\alpha)/2]-r}$ ce qui est le résultat voulu. Reste à démontrer le lemme suivant :

LEMME 3. — Si A est un anneau de caractéristique p pour lequel $x \mapsto x^p$ est bijectif, si J un idéal de A engendré par r éléments de A , alors si n et N sont deux entiers naturels $x^{p^n} \in J^N$ implique $x \in J^{\lfloor N/p^n \rfloor - r + 1}$.

Démonstration : démontrons ce lemme grâce à une récurrence sur r , où r désigne le nombre des générateurs.

Si $r = 1$. Alors I est un idéal principal et la propriété $x \mapsto x^p$ bijectif donne le résultat.

Montrons maintenant la propriété pour r quelconque. Posons $J = (y_1, \dots, y_r)$ et $H = (y_2, \dots, y_r)$. Si x est tel que $x^{p^n} \in J^N$ on peut écrire :

$$x^{p^n} = X_0 y_1^N + X_1 y_1^{N-1} + \dots + X_i y_1^{N-i} + \dots + X_N$$

avec X_i élément de H^i pour i vérifiant $0 \leq i \leq N$. On obtient ainsi que :

$$x = X_0^{1/p^n} y_1^{N/p^n} + X_1^{1/p^n} y_1^{(N-1)/p^n} + \dots + X_i^{1/p^n} y_1^{(N-i)/p^n} + \dots + X_N^{1/p^n} \quad (1).$$

Comme

$$\left\lfloor \frac{N-i}{p^n} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{N}{p^n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i}{p^n} \right\rfloor - 1.$$

y_1^{N-i/p^n} est donc un élément de $J^{\lfloor N/p^n \rfloor - \lfloor i/p^n \rfloor - 1}$ et d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à H on sait que X_i^{1/p^n} est un élément de $H^{\lfloor i/p^n \rfloor - r + 2}$. Donc chaque terme de la sommation (1) appartient à : $J^{\lfloor N/p^n \rfloor - \lfloor i/p^n \rfloor - 1 + \lfloor i/p^n \rfloor - r + 2}$ c'est-à-dire à : $J^{\lfloor N/p^n \rfloor - r + 1}$ ce qui démontre le lemme.

(d) Démonstration de la proposition 3 dans le cas général.

Soit donc α un élément de R_s tel que $[K(\alpha) : K]$ n'est pas un entier premier à p . Si \tilde{K} désigne encore une extension galoisienne de K de degré minimal contenant α , on a : $[\tilde{K} : K] = qp^m$ avec q premier à p .

Si G' est un p -groupe de Sylow de $\text{Gal}(K(\alpha)/K)$. Soit H l'ensemble des points fixes de G' dans \tilde{K} . On sait qu'alors H est une extension finie de K contenue dans \tilde{K} et telle que :

- \tilde{K} est une extension galoisienne de H .
- $[\tilde{K}(\alpha) : H] = p^n$.

On appelle R' l'anneau des entiers de H . Si n désigne un entier naturel on peut appliquer à $\tilde{K}(\alpha)$ et H ce qui a été fait au (b) avec H dans le rôle de K . On peut donc obtenir γ avec γ élément de R' et :

$$\alpha - \gamma \in I^{\lfloor \Delta_H(\alpha)/2 \rfloor - r}.$$

D'après a) on sait qu'il existe un élément β_0 de R vérifiant $\gamma - \beta_0 \in I^{\Delta_K(\gamma)}$.

Puisque K est contenu dans H , $\Delta_K(\alpha) \leq \Delta_H(\alpha)$ d'où

$$\alpha - \gamma \in I^{[\Delta_K(\alpha)/2]-r} \quad (1)$$

et comme en (b) on peut montrer que :

$$\Delta_K(\gamma) \geq [\Delta_K(\alpha)/2] - r.$$

d'où

$$\gamma - \beta_0 \in I^{[\Delta_K(\alpha)/2]-r}. \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$\alpha - \beta_0 \in I^{[\Delta_K(\alpha)/2]-r}$$

IV. — Éléments fixes sous l'action du groupe $G = \text{Gal}(K_s/K)$

PROPRIÉTÉ 4. — *Si K un corps de caractéristique p , on a, avec les notations introduites au début de l'article :*

$$\hat{R}_s^G = \overline{\sqrt{R}},$$

où $\overline{\sqrt{R}}$ désigne l'adhérence de \sqrt{R} pour la topologie I -adique.

Démonstration : si x est un élément de \hat{R}_s^G pour tout entier N il existe un α qui est un élément de R_s avec $x - \alpha$ élément de $I^N \hat{R}_s$. Si σ est un élément de G on a toujours $x - \sigma(\alpha)$ élément de $I^N \hat{R}_s$, et donc $\alpha - \sigma(\alpha)$ élément de $I^N \hat{R}_s$ d'où $\Delta_K(\alpha) \geq N$.

Donc on peut trouver, d'après la proposition 3, un élément β dans \sqrt{R} où $\alpha - \beta$ est un élément soit de $I^{[N/2]-r} \hat{R}_s$. Donc $x - \beta$ est un élément de $I^{[N/2]-r} \hat{R}_s$. Il en résulte que x est un élément de l'adhérence de \sqrt{R} . La réciprocity étant immédiate on obtient la propriété annoncée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Ax. — Zeros of Polynomials over local fields, the Galois Action, *Journal of Algebra*, 15, 1970, 417-428.
- [2] H. Matsumura. — Commutative Algebra, Second Edition, Mathematics Lecture Note Series, The Benjamin.cuminings publishing company.

PH. RAMBOUR
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
URA D0752
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX