DANIEL LEHMANN

# Théorie homotopique des formes différentielles (d'après D. Sullivan)

*Astérisque*, tome 45 (1977)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__45__1_0>

45 ASTÉRISQUE

1990/1977

# THÉORIE HOMOTOPIQUE DES FORMES DIFFÉRENTIELLES

(d'après D. SULLIVAN)

**Daniel LEHMANN**

(seconde édition revue et augmentée)

Bibliographie complétée et mise à jour
par Daniel TANRÉ

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**
**Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

# TABLE DES MATIÈRES


Pages

INTRODUCTION 3

CHAPITRE I - RAPPELS DE TOPOLOGIE

1) Espaces d'Eilenberg-Mac Lane 7
2) Décomposition de Postnikov 8
3) Espaces nilpotents 11
4) Localisation des espaces nilpotents 12

CHAPITRE II - ALGÈBRES DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES COMMUTATIVES

1) La catégorie $k\text{-ADG}_{(c)}$ 18
2) Extensions principales et algèbres minimales 21
3) Modèle minimal d'une $k\text{-ADG}_{(c)}$ connexe 28

CHAPITRE III - FORMES DIFFÉRENTIELLES SIMPLICIALES

1) Le problème des cochaînes commutatives 37
2) Construction de solutions au problème des cochaînes commutatives 38
3) Transformations 46
4) Foncteur $F : (\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}} \to T_{\mathbb{Q}}$ 52

CHAPITRE IV - TRANSGRESSION

1) Fibrations totalement transgressives 54
2) Application aux fibrations principales 59
3) Application aux espaces nilpotents. Théorème principal 61
4) Remarques sur l'équivalence de catégorie $T_{\mathbb{Q}} \longleftrightarrow (\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}}$ 66

CHAPITRE V - QUELQUES EXEMPLES ET APPLICATIONS

1) Cas où l'algèbre de cohomologie est libre 70
2) Sphères $S^{2n}$ de dimension paire 71
3) Espaces projectifs complexes $P^n(\mathbb{C})$ 72
4) Cas des variétés différentiables 74
5) Fibrés principaux $C^\infty$ et G-ADG 75
6) Espace classifiant d'un groupe nilpotent 78
7) Espaces fonctionnels 83
8) Modèle minimal d'une $\text{ADG}_{(c)}$ libre connexe et simplement connexe 88
9) Espaces formels 92

INDEX TERMINOLOGIQUE 96

BIBLIOGRAPHIE 98

ABSTRACT 145

# INTRODUCTION

Un théorème bien connu de de Rham exprime que l'algèbre $\Omega_{DR}(X)$ des formes différentielles sur une variété différentiable X permet de calculer la cohomologie réelle de X. L'une des conséquences de la théorie de Sullivan est que cette algèbre fournit bien d'autres informations sur la topologie de X ; par exemple, si X est simplement connexe, elle détermine entièrement le "type d'homotopie réel" de X (i.e. les groupes $\pi_n(X) \otimes \mathbb{R}$ et les invariants de Postnikov réels), résultat qui se généralise au cas des espaces nilpotents (c'est-à-dire dont le groupe fondamental est nilpotent, et opère de façon nilpotente sur les groupes d'homotopie d'ordre supérieur).

Le théorème principal de la théorie affirme l'existence d'une équivalence entre la catégorie homotopique $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ des espaces rationnels, et la catégorie $(\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}}$ des $\mathbb{Q}$-algèbres dites "minimales" (qui est une certaine sous-catégorie de la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres différentielles graduées commutatives, avec comme morphisme les "classes d'homotopie").

Associant alors, à chaque espace topologique nilpotent X, son type d'homotopie rationnel $X_{\mathbb{Q}}$, le problème se posera

- d'apprendre à calculer, au moins dans certains cas, la $\mathbb{Q}$-algèbre minimale $\mathcal{M}_X$ associée à $X_{\mathbb{Q}}$, (par exemple, si X est muni d'une structure de variété différentiable, $\mathcal{M}_X \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{R}$ se calcule à partir de $\Omega_{DR}(X)$),

- d'apprendre à utiliser le dictionnaire

$$\mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \longleftrightarrow (\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}} ,$$

afin de lire sur $\mathcal{M}_X$ des informations concernant la topologie de X.

Nous rappellerons pour commencer les principaux ingrédients dont nous aurons besoin :

- tours de Postnikov, localisation des espaces nilpotents, et en particulier définition de la catégorie $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$, au chapitre I,

- algèbres différentielles graduées commutatives, modèles minimaux, et en particulier définition de la catégorie $(\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}}$, au chapitre II,

- formes différentielles simpliciales, et foncteur $(\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ au chapitre III.

Au chapitre IV, la transgression sera l'outil principal qui nous permettra de faire le joint entre l'algèbre et la topologie, et d'esquisser une démonstration de ce que le foncteur $(\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ est une équivalence. [Nous nous contenterons en fait de démontrer qu'il induit une bijection entre les classes d'isomorphie d'objets de chacune de ces 2 catégories]. Au cours de la démonstration, nous verrons apparaître quelques éléments du dictionnaire $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \leftrightarrow (\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}}$.

Le chapitre V, enfin, sera consacré à la description d'exemples, et à l'évocation de que quelques applications.

Sullivan dit que la théorie "était presque comprise dans les années 50". Certes la transgression et la formule de Chevalley étaient déjà connues, au moins pour les fibrations principales en groupe de Lie (A. Borel [4], H. Cartan [6] , G. Hirsch [28]) ainsi que le modèle des espaces homogènes (H. Cartan [7], J.L. Koszul [29], J. Leray [31], l'idée de construire des formes différentielles simpliciales (H. Whitney [48], R. Thom [43], et de les utiliser inductivement dans les fibrations de Postnikov (R. Thom [43] ). D'autre part, dès 1968, D. Quillen avait montré l'existence d'équivalences entre la catégorie $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ et différentes catégories de nature algébrique ([35]), et, depuis 1967, K.T. Chen avait exhibé des liens entre l'homotopie et les formes différentielles [10] [11].

La contribution de Sullivan a cependant été essentielle : sa technique des algèbres minimales (qui constituent le pendant algébrique des tours de Postnikov en topologie) a permis de rendre la théorie aussi simple sur le plan théorique qu'efficace et opérationnelle dans les calculs pratiques et les applications. Ses idées ont été annoncées dans les proceedings de la conférence de Tokyo (1973) [38], et ont été rédigées avec de nombreux développements dans "Infinitesimal computations in Topology" [39] (cf. aussi diverses rédactions et mises au point, en particulier :
E. Friedlander, P.A. Griffiths et J. Morgan [15], Anonymus [2], A.K. Bousfield et V.K.A.M. Gugenheim [5], et S. Halperin [25]).

L'exposé qui suit n'est qu'un résumé de la théorie. Quelques résultats particulièrement typiques ont été choisis, dont nous avons essayé de donner une idée de la démonstration, sans traiter tous les développements possibles ni rechercher le maximum de généralité. Nous nous sommes efforcés, cependant, de rendre ce texte à peu près "self-contained", bien que cette notion soit très subjective, en énonçant au moins explicitement les définitions et les principaux résultats dont nous avions besoin.

C'est à la suite des conférences faites par les collègues du séminaire Lille-Valenciennes durant l'année 1975-76 ainsi que par les participants aux journées sur les formes différentielles organisées en juin 1976 au C.I.R.M. de Marseille-Luminy, qu'une première version abrégée de ce texte a été rédigée.

Le rédacteur qui, bien entendu, n'est pas l'auteur des résultats exposés, remercie vivement J. Cerf de l'avoir encouragé à rédiger cette seconde version.
Il remercie également tous les mathématiciens avec qui il a pu s'entretenir du sujet, entre autres B. Callenaere, D. Evrard, J.C. Thomas, C. Watkiss, M. Zisman,

et en particulier S. Halperin qui a bien voulu relire le manuscrit et permettre ainsi de rectifier certaines erreurs [Le rédacteur prend l'entière responsabilité de celles qui sont restées !].

Une reconnaissance particulière est due enfin à Mesdames Bérat, Lengaigne et Tatti, du Secrétariat Scientifique de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de Lille 1, qui ont réalisé la dactylographie de ce texte avec rapidité et compétence, malgré les continuelles corrections apportées au manuscrit en cours de frappe.

# CHAPITRE I - RAPPELS DE TOPOLOGIE

Il sera toujours sous-entendu, dans la suite, que les espaces topologiques $X$ considérés

- seront connexes,
- auront le type d'homotopie d'un C.W.-complexe,
- auront tous leurs groupes d'homotopie de <u>rang fini</u> [pour $n \geqslant 2$, cela voudra dire $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \pi_n(X)) < +\infty$ ; pour $n = 1$, cela signifiera que $\pi_1(X)$ est limite d'une suite <u>finie</u> d'extensions $0 \to A_\alpha \to \pi_{\alpha+1} \to \pi_\alpha \to 1$ $(\alpha = 0,\ldots,r$, avec $\pi_o = \{0\}$, $\pi_{r+1} = \pi_1(X))$ où $A_\alpha$ est un groupe abélien de rang fini : $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes A_\alpha) < +\infty$] .

Parmi eux, nous allons en considérer certains, dits "nilpotents", dont l'étude est due à P. Hilton [27] (cf. aussi M. Zisman [50]) qui nous seront utiles pour une triple raison :

- leur tour de Postnikov admet un "raffinement principal",
- il y en a "beaucoup" (en particulier tous les espaces simplement connexes, les H-espaces, certains espaces fonctionnels),
- on peut les "localiser".

## 1) *Espaces d'Eilenberg-Mac Lane.*

Soit $\Pi$ un groupe <u>abélien</u> de rang fini, $n$ un entier $\geqslant 1$, et $K(\Pi,n)$ <u>l'espace d'Eilenberg-Mac Lane correspondant</u>, dont le type d'homotopie est bien défini par les conditions :

$$\begin{cases} \pi_i(K(\Pi,n)) = 0 & \text{si } i \neq n \\ \pi_n(K(\Pi,n)) = \Pi & \\ K(\Pi,n) \text{ a le type d'homotopie d'un C.W.-complexe.} & \end{cases}$$

Rappelons que $K(\Pi,n)$ est un représentant du foncteur $H^n(.,\Pi)$ dans la catégorie homotopique :

$$\boxed{H^n(X,\Pi) = [X,K(\Pi,n)]}$$

On donnera au chapitre III une interprétation homotopique analogue pour la cohomologie relative et l'homomorphisme de la suite exacte longue (cf. [14]).

[Pour $n = 1$, on sera amené à considérer aussi des espaces $K(\Pi,1)$ avec un groupe $\Pi$ de rang fini, non nécessairement abélien].

Pour tout groupe abélien $\Pi$ (de rang fini) et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}[K(\Pi,n),K(\mathbb{Q},n)] &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi,\mathbb{Q}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Pi,\mathbb{Q}).\end{aligned}$$

Donc $H^n(K(\Pi,n),\mathbb{Q})$ est égal au dual $W$ du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Pi$.

Nous utiliserons dans la suite, le résultat suivant, que nous admettrons (cf. par exemple R. Thom ([42]) :

l'algèbre de cohomologie $H^*(K(\Pi,n),\mathbb{Q})$ s'identifie à l'algèbre graduée $L_n(W)$ associative et commutative (au sens gradué : $\alpha.\beta = (-1)^{d^o\alpha \,.\, d^o\beta}\beta.\alpha$) librement engendrée par $W = H^n(K(\Pi,n),\mathbb{Q})$ :

- c'est l'algèbre symétrique $S(W)$ si $n$ est pair,
- c'est l'algèbre extérieure $E(W)$ si $n$ est impair,

(les éléments de $W$, étant, dans les 2 cas, considérés comme de dimension $n$).

*Remarque*.- On en déduit, plus généralement, un résultat analogue, pour tout corps $k$ de caractéristique $0$.

## 2 - *Décompositions de Postnikov.*

On sait que tout espace $X$ possède une tour de Postnikov [36] : on appelle ainsi une suite $(X_{n+1} \xrightarrow{q_n} X_n, f_n)_{n\geq 0}$ de fibrations $q_n$ et d'applications $f_n : X \to X_n$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $f_n$ induit un isomorphisme $\pi_i(X) \to \pi_i(X_n)$ pour $i \leq n$,

(ii) $\pi_i(X_n) = 0$ pour $i > n$,

(iii) $q_n . f_{n+1} = f_n$.

($\pi_1(X)$ n'est pas nécessairement abélien ; $X_o$ = point ; $X_1 = K(\pi_1(X),1)$).
Il résulte immédiatement de la suite exacte d'homotopie de la fibration $q_n$ qu'elle a pour fibre un espace $K(\pi_{n+1}(X),n+1)$. Pour un espace $X$ donné, il n'existe qu'une seule tour (à "isomorphisme" près, en un sens qu'il est facile de préciser).

*Remarque*.- Si $X$ n'a qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non nuls, $X = X_n$ pour n assez grand, et par conséquent, le type d'homotopie de $X$ est bien défini par le type d'homotopie de chaque espace $X_n$ de la tour de Postnikov. Dans le cas général nous admettrons que le type d'homotopie de $X$ est défini par la classe d'isomorphie de sa tour de Postnikov.

On est donc amené à considérer plus généralement les fibrations $Y \xrightarrow{q} X$ de fibre $K(\Pi,n)$. La suite exacte d'homotopie implique l'existence d'isomorphismes $\pi_i(Y) \xrightarrow{\cong} \pi_i(X)$ pour $i \neq n, n+1$ et d'une suite exacte
$0 \to \pi_{n+1}(Y) \to \pi_{n+1}(X) \to \Pi \to \pi_n(Y) \to \pi_n(X) \to 0$. Une telle fibration sera dite principale, si $\Pi$ est abélien et si elle est induite par une application classifiante $X \xrightarrow{\ell} BK(\Pi,n) = K(\Pi,n+1)$,

$$\begin{array}{ccc}
K(\Pi,n) & = & \Omega K(\Pi,n+1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y & \longrightarrow & PK(\Pi,n+1) \\
\downarrow q & & p \downarrow \\
X & \xrightarrow{\ell} & K(\Pi,n+1)
\end{array}$$

c'est-à-dire si elle est image réciproque par $\ell$ de la fibration

$$\Omega K(\Pi,n+1)) \to PK(\Pi,n+1) \xrightarrow{p} K(\Pi,n+1),$$

où $PK(\Pi,n+1)$ désigne l'espace (contractile) des chemins dans $K(\Pi,n+1)$ d'origine fixée $y_o$, $\Omega K(\Pi,n+1) = K(\Pi,n)$ l'espace des lacets en $y_o$, et $p$ l'application qui, à tout chemin, associe son extrémité.

<u>*Remarque*</u>.- Notons $\mathcal{E}(X,K(\Pi,n)))$ l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrations principales de base $X$ et fibre $K(\Pi,n)$, et

$$\Psi : H^{n+1}(X,\Pi) \longrightarrow \mathcal{E}(X,K(\Pi,n))$$

l'application qui, à $[\ell] \in [X,K(\Pi,n+1)] = H^{n+1}(X,\Pi)$, associe l'image réciproque de $p$ par $\ell$ : par définition d'une fibration principale, l'application $\Psi$ est surjective ; en fait, elle est <u>bijective</u>, l'application inverse $\Psi^{-1}$ consistant à associer, à la fibration $q$, la 1ère (et unique) obstruction $\Psi^{-1}(q) \in H^{n+1}(X,\Pi)$ à l'existence d'une section de $q$ (cf. par exemple E. Spanier [36]).

<u>*Lemme*</u> *1.1.* - Pour qu'une fibration $K(\Pi,n) \longrightarrow Y \xrightarrow{q} X$ soit principale, il faut et il suffit que $\Pi$ soit abélien et que l'action de $\pi_1(X)$ sur $\pi_n(K(\Pi,n)) = \Pi$ soit triviale.

Puisque $K(\Pi,n+1)$ est simplement connexe, il est clair que l'action de $\pi_1(K(\Pi,n+1))$ sur $\Pi$ définie par la fibration $p$ est triviale, donc - par image réciproque - l'action de $\pi_1(X)$ sur $\Pi$ est triviale pour toute fibration $q$ principale.

Réciproquement, si dans la fibration $Y \xrightarrow{q} X$ de fibre $K(\Pi,n)$, l'action de $\pi_1(X)$ sur $\Pi$ est triviale, la première obstruction $u \in H^{n+1}(X,\underset{\sim}{\Pi})$ à l'existence d'une section de $q$, qui - dans le cas général - est une classe de cohomologie à coefficients dans un système local $\underset{\sim}{\Pi}$ de coefficients (cf. Steenrod [37]), est ici une classe de cohomologie à coefficients constants $u = [\ell] \in H^{n+1}(X,\Pi) =$ $= [X,K(\Pi,n+1)]$, et, puisque $\Psi$ est bijectif d'après la remarque ci-dessus $q = \Psi([\ell])$.

<u>*Corollaire*</u> *1.2.* - Toute fibration $K(\Pi,n) \to Y \to X$ de base $X$ simplement connexe est principale.

En particulier, si $X$ est simplement connexe, (ou, plus généralement, si $\pi_1(X)$ est abélien et opère de façon triviale sur $\pi_n(X)$ pour $n \geq 2$, ce qui est par exemple le cas pour les H-espaces), toute fibration $X_{n+1} \to X_n$ de la tour de Postnikov est principale. La classe d'homotopie $[\ell_{n+1}] \in [X_n, K(\pi_{n+1}(X), n+2)] = H^{n+2}(X_n, \pi_{n+1}(X))$ d'une application classifiante $\ell_{n+1} : X_n \to K(\pi_{n+1}(X), n+2)$ de $X_{n+1} \to X_n$ s'appelle alors le $(n+1)^{\text{ième}}$-invariant de Postnikov.

3 - *Espaces nilpotents.*

On dira, d'une fibration $Y \xrightarrow{q} X$ de fibre $K(\Pi, n)$, qu'elle admet un raffinement principal, s'il existe une suite finie de fibrations

$$(K(\Pi_{\alpha+1}, n) \longrightarrow X^{\alpha+1} \xrightarrow{q^\alpha} X^\alpha)_{\alpha=0,1,\dots,r-1}$$

toutes principales et associées au même entier $n$, telle que

$$q = q^o \circ q^1 \circ \dots \circ q^{r-1} ,$$

(tous les groupes $\Pi_\alpha$ sont abéliens, bien que, pour $n = 1$, $\Pi$ puisse ne pas l'être).

L'espace $X$ sera dit nilpotent si chacune des fibrations $X_{n+1} \to X_n$ de la tour de Postnikov admet un raffinement principal.

*Remarque.*- L'origine de cette terminologie provient du résultat suivant (dont nous ne nous servirons pas ici), qui généralise le lemme I.1. :

(i) Pour que la fibration $q_o : X_1 \to X_o$ (avec $X_1 = K(\pi_1(X), 1)$, $X_o = \{\text{point}\}$) admette un raffinement principal, il faut et il suffit que le groupe $\pi_1(X)$ soit nilpotent.

(ii) Pour que la fibration $q_n : X_{n+1} \to X_n$ admette un raffinement principal, $(n \geq 1)$, il faut et il suffit que l'action de $\pi_1(X)$ sur $\pi_{n+1}(X)$ soit nilpotente.

*Exemples :*

(i) On a déjà vu au § précédent que les espaces simplement connexes d'une part, les H-espaces d'autre part, étaient nilpotents, ainsi - plus généralement- que les espaces simples (c'est-à-dire tels que $(\pi_1(X)$ soit abélien et opère trivialement sur chaque $\pi_n(X)$ pour $n \geq 2)$.

(ii) Hilton démontre aussi que

- la fibre de toute fibration $Y \to X$ dont l'espace total est nilpotent (et la base $X$ connexe) est un espace nilpotent.
- toute composante connexe de l'espace $C((X,x_o),(Y,y_o))$ des applications continues pointées d'un espace pointé dans un autre, est un espace nilpotent.
- toute composante connexe de l'espace $C(X,Y)$ des applications continues d'un polyèdre fini $X$ dans un espace nilpotent $Y$, est un espace nilpotent.

## 4 - *Localisation des espaces nilpotents.*

On dira, d'un espace nilpotent $X$, qu'il est un $\mathbb{Q}$-espace si

(i) $\pi_n(X)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour tout $n \geq 2$,

(ii) la fibration $K(\pi_1(X),1) \to \{\text{point}\}$ est la composée d'une suite finie de fibrations principales

$$X^{\alpha+1} \to X^{\alpha} \ (\alpha = 0,1,\ldots,r-1), \quad \text{de fibre } K(A_\alpha,1),$$

où chaque groupe $A_\alpha$ possède une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel [il revient au même de dire que le groupe nilpotent $\pi_1(X)$ est limite d'une suite finie d'extensions centrales

$$0 \to A_\alpha \to \pi_{\alpha+1} \to \pi_\alpha \to 1 \qquad (\alpha = 0,1,\ldots,r-1)$$

par des groupes abéliens $A_\alpha$ qui sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$, ou encore que l'application $x \to x^n$ de $\pi_1(X)$ dans lui-même, est bijective pour tout entier $n > 0$].

*Remarque*.- La donnée d'une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est entièrement définie par la structure de groupe abélien sous-jacente : un groupe abélien $\Pi$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel si, pour tout entier $n > 0$, la multiplication par $n$ dans $\Pi$, $\Pi \xrightarrow{xn} \Pi$, est bijective, c'est-à-dire si $\Pi$ est divisible et sans torsion).

Notons $\mathcal{T}$ la catégorie dont les objets sont les espaces nilpotents et les morphismes les classes d'homotopie d'applications ; notons $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ la sous-catégorie pleine des $\mathbb{Q}$-espaces : on appellera $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ la <u>catégorie homotopique rationnelle</u>.

On appelle <u>localisation d'un espace nilpotent</u> $X$ la donnée d'un $\mathbb{Q}$-espace $X_o$ et d'une application continue $f : X \to X_o$ possédant la propriété suivante : pour tout $\mathbb{Q}$-espace $Y$ et toute application continue $g : X \to Y$, il existe une application $\bar{g} : X_o \to Y$, unique à homotopie près, telle que $\bar{g} \circ f$ soit homotope à $g$.

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"] & & X_o \arrow[ul, "\bar{g}"'] \end{tikzcd}$$

<u>*Théorème*</u> *1.3.*- Pour qu'une application continue $f : X \to X_o$, définie sur un espace nilpotent $X$ et à valeurs dans un $\mathbb{Q}$-espace $X_o$, soit une localisation de $X$, il faut et il suffit que $f$ induise un isomorphisme en cohomologie rationnelle

$$f^* : H^*(X_o,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{Q}).$$

Tout d'abord, la condition est nécessaire. En effet, $K(\mathbb{Q},n)$ est un $\mathbb{Q}$-espace, et par conséquent, si $f$ est une localisation, elle induit une bijection de $[X_o,K(\mathbb{Q},n)]$ sur $[X,K(\mathbb{Q},n)]$.

Supposons réciproquement que $f$ induise un isomorphisme en cohomologie rationnelle. Soit $g : X \to Y$ une application continue de but $Y$ dans $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$. Notons $Y_{n+1} \xrightarrow{q_n} Y_n$ la $n^{\text{ième}}$ fibration de Postnikov de $Y$ et $g_n$ la composée de $g$ avec l'application naturelle $Y \to Y_n$. Supposons avoir déjà construit une application $\bar{g}_n$ telle que $g_n$ et $\bar{g}_n.f$ soient homotopes. On se propose de relever $\bar{g}_n$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g_n" near start] & Y_{n+1} \arrow[d, "q_n"] \\ X_o \arrow[r, "\bar{g}_n"'] \arrow[ur, dashed, "\bar{g}_{n+1}"' near end] & Y_n \end{tikzcd}$$

en une application $\bar{g}_{n+1}$ telle que $g_{n+1}$ et $\bar{g}_{n+1}.f$ soient homotopes. Décomposons pour cela $q_n$ en suite finie de fibrations principales

$(K(\Pi^{\alpha}_{n+1},n+1) \to Y^{\alpha+1}_{n+1} \to Y^{\alpha}_{n+1})_{\alpha=0,\dots,r-1}$ avec $Y^{o}_{n+1} = Y_n$ et $Y^{r}_{n+1} = Y_{n+1}$.

Les obstructions à relever $\bar{g}_n$ en $\bar{g}_{n+1}$ appartiennent aux espaces de cohomologie relative

$$H^{n+2}(f,\Pi^{\alpha}_{n+1}) \qquad (\alpha = 0,\dots,r-1).$$

Puisque $Y$ est un $\mathbb{Q}$-espace, chaque groupe abélien $\Pi^{\alpha}_{n+1}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ et par conséquent $H^{n+2}(f,\Pi^{\alpha}_{n+1}) = H^{n+2}(f,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \Pi^{\alpha}_{n+1}$. Puisque $f$ induit un isomorphisme en cohomologie rationnelle, tous les groupes $H^{n+2}(f,\mathbb{Q})$ sont nuls, et par conséquent on peut relever $\bar{g}_n$ en $\bar{g}_{n+1}$ à homotopie près.

[Si $f$ était un "CW complexe relatif", et si on avait déjà $\bar{g}_n.f = g_n$, la nullité des espaces $H^{n+2}(f,\Pi^{\alpha}_{n+1})$ permettrait de relever $\bar{g}_n$ en $\bar{g}_{n+1}$ de façon que $q_n \circ \bar{g}_{n+1} = \bar{g}_n$ et $\bar{g}_{n+1} \circ f = g_{n+1}$ (cf. E. Spanier [36]) ; ici $f$ se factorise seulement à travers un CW complexe relatif après composition avec une équivalence d'homotopie, et les égalités ci-dessus ne sont valables qu'à homotopie près].

Par induction sur $n$, on en déduit l'existence d'une application $\bar{g}$ telle que $\bar{g} \circ f$ et $g$ soient homotopes.

Si $\bar{\bar{g}}$ est une autre application telle que $\bar{\bar{g}} \circ f$ et $g$, soient homotopes, et si l'on note $\tilde{f} : X \times I \to X_o \times I$ $(I = [0,1])$ l'application $\tilde{f}(x,t) = (f(x),t)$, on démontre de même que les obstructions à l'existence d'une homotopie entre $\bar{g}$ et $\bar{\bar{g}}$ appartiennent aux espaces $H^{n+2}(\tilde{f},\Pi^{\alpha}_{n+1})$, et sont toutes nulles pour les mêmes raisons. L'application $\bar{g}$ est donc unique à homotopie près. Ceci achève la démonstration du théorème.

*<u>Théorème</u> I.4.-*

i) Tout espace nilpotent $X$ admet une localisation $f : X \to X_o$.

ii) L'application $f$ induit un isomorphisme $\pi_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \pi_n(X_o)$, pour tout $n \geqslant 1$.

*Remarques.*

i) Pour $n = 1$, ce "produit tensoriel" désigne le $\mathbb{Q}$-localisé du groupe nilpotent $\pi_1(X)$ (cf. Hilton [27] : "complétion de Malcev"). Pour éviter d'expliciter les détails techniques correspondants, nous nous contenterons de démontrer cet isomorphisme pour $n \geq 2$. Plus généralement, si $\pi_1(X)$ est nilpotent, on peut définir $\pi_1(X) \underset{\mathbb{Z}}{"\otimes"} k$ pour tout corps $k$ de caractéristique 0.

ii) Il suffit en fait, réciproquement, que l'application $f$ induise des isomorphismes $\pi_n(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \to \pi_n(X_o)$, pour qu'elle soit une localisation de $X$. Mais nous ne nous servirons pas de ce résultat.

iii) L'espace $X_o$, dont le type d'homotopie est bien défini puisque la localisation est la solution d'un problème universel, sera désormais noté $X_{\mathbb{Q}}$. Le type d'homotopie de $X_{\mathbb{Q}}$ sera appelé le <u>type d'homotopie rationnelle de</u> $X$.

Soit $\Pi$ un groupe abélien, et $\iota : \Pi \to \Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$ l'homomorphisme naturel de groupes abéliens. Pour tout $n \geq 1$, notons $\iota_n : K(\Pi,n) \to K(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n)$ l'application (définie à homotopie près) induite par $\iota$ : c'est une localisation de $K(\Pi,n)$ puisque $\iota_n$ induit un isomorphisme en cohomologie rationnelle. On a alors :

*Lemme I.5.-*
Soit $K(\Pi,n) \longrightarrow Y \xrightarrow{q} X$ une fibration principale et $f : X \to X_o$ une localisation de $X$. Il existe alors une localisation $g : Y \to Y_o$ et une fibration principale

$$K(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n) \longrightarrow Y_o \xrightarrow{q_o} X_o,$$

telles que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} K(\Pi,n) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_n"] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ K(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n) \arrow[r] & Y_o \arrow[r, "q_o"'] & X_o \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
K(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n) \arrow[dd, dashed] \arrow[rr, equal] & & K(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n) \arrow[dd, dashed] \arrow[rr, equal] & & K(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n) \arrow[dd] \\
& K(\Pi,n) \arrow[ul, "\iota_n"'] \arrow[ur, "\iota_n"] \arrow[rr, equal] \arrow[dd] & & K(\Pi,n) \arrow[ur, "\iota_n = \Omega\iota_{n+1}"] \arrow[dd] & \\
Y'_o \arrow[rr, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[ddd, dashed, "q'"] & & Y_o \arrow[rr, dashed, "\tilde{\ell}_o"] \arrow[dd, dashed, "q_o"] & & PK(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n+1) \arrow[dd, "p_o"] \\
& Y \arrow[ul, dashed, "\vartheta\Psi"] \arrow[ur, dashed, "g"'] \arrow[rr, "\tilde{\ell}"] \arrow[dd, "q"] & & PK(\Pi,n+1) \arrow[ur, "P\iota_{n+1}"] \arrow[dd, "p"] & \\
& & X_o \arrow[rr, dashed, "\ell_o"] & & K(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n+1) \\
X \arrow[r, equal] & X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\ell"] & & K(\Pi,n+1) \arrow[ur, "\iota_{n+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Considérons en effet une application classifiante $\ell : X \to K(\Pi,n+1)$ de la fibration $q$ et l'application relevée $\tilde{\ell} : Y \to PK(\Pi,n+1)$. Dans le diagramme ci-dessus, $\iota_{n+1} \circ \ell$ est une flèche de $X$ dans un $\mathbb{Q}$-espace : puisque $f$ est une localisation de $X$, il existe une flèche $\ell_o : X_o \to K(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n+1)$, bien définie à homotopie près, telle que $\iota_{n+1} \circ \ell$ et $\ell_o \circ f$ soient homotopes. Notons $Y_o \xrightarrow{q_o} X_o$, $Y'_o \xrightarrow{q'} X$ et $Y''_o \xrightarrow{q''} X$ les fibrés de fibre $K(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n)$ obtenus respectivement comme images réciproques par $\ell_o$, $\ell_o \circ f$ et $\iota_{n+1} \circ \ell$ du fibré $PK(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n+1) \xrightarrow{p_o} K(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n+1)$, et notons $\tilde{\ell}_o : Y_o \to PK(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n+1)$ et $\tilde{f} : Y'_o \to Y_o$ les applications canoniques au-dessus de $\ell_o$ et de $f$. Puisque $\ell_o \circ f$ et $\iota_{n+1} \circ \ell$ sont homotopes, il existe un isomorphisme de fibrés $Y''_o \underset{\cong}{\xrightarrow{\vartheta}} Y'_o$ tel que $q' \circ \vartheta = q''$. Puisque $p_o \circ (P\iota_{n+1} \circ \tilde{\ell}) = (\iota_{n+1} \circ \ell) \circ q$ (où $P\iota_{n+1}$ désigne le morphisme de fibrés au-dessus de $\iota_{n+1}$), on en déduit l'existence d'une unique application $\Psi : Y \to Y''_o$ telle que $q'' \circ \Psi = q$ et $(\widetilde{\iota_{n+1} \circ \ell}) \circ \Psi = P\iota_{n+1} \circ \tilde{\ell}$ (où $(\widetilde{\iota_{n+1} \circ \ell})$ désigne l'application canonique $Y''_o \to PK(\Pi \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q},n+1)$ au-dessus de $\iota_{n+1} \circ \ell$). Notons $g : Y \to Y_o$ l'application composée $\tilde{f} \circ \vartheta \circ \Psi$. De l'égalité $q'' \circ \Psi = q$, on déduit que $g$ commute avec les projections. De l'égalité $(\widetilde{\iota_{n+1} \circ \ell}) \circ \Psi = P\iota_{n+1} \circ \tilde{\ell}$ et du fait que $P\iota_{n+1}$ induit $\Omega\iota_{n+1} = \iota_n$ sur les fibres, on déduit que $g$ induit un morphisme

$$\begin{tikzcd}
K(\Pi,n) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_n"] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\
K(\Pi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},n) \arrow[r] & Y_o \arrow[r, "q_o"] & X_o
\end{tikzcd}$$

de fibrés ; puisque $\iota_n$ et $f$ induisent des isomorphismes en cohomologie rationnelle, un argument standard de comparaison de suites spectrales implique qu'il en est de même pour $g$ ; puisque $Y_o$ est un $\mathbb{Q}$-espace (c'est l'espace total d'une fibration principale dont la fibre et la base sont toutes deux des $\mathbb{Q}$-espaces), on en déduit que $g$ est une localisation. Le lemme en résulte.

*Démonstration du théorème 1.4.* - Elle est évidente, à partir du lemme, puisque tout espace nilpotent s'obtient à partir d'un point par une suite de fibrations principales.

## CHAPITRE II - ALGÈBRES DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES COMMUTATIVES

### 1 - La catégorie $ADG_{(c)}$.

Soit $k$ un corps commutatif de caractéristique $0$ et $k\text{-}ADG_{(c)}$ (ou $ADG_{(c)}$ s'il n'y a pas d'ambigüité sur $k$) la catégorie des $k$-algèbres différentielles $\mathbb{N}$-graduées, associatives, et commutatives (au sens gradué) :

$$A = \bigoplus_{p \geq 0} A^p \quad ,$$

la différentielle $d : A^p \to A^{p+1}$ vérifie : $d(a.b) = da.b + (-1)^{|a|}a.db$ , et la multiplication $A^p \otimes A^q \to A^{p+q}$ vérifie : $b.a = (-1)^{|a|.|b|}a.b$ (où $|a| = p$ si $a \in A^p$).

(Exemple : si $X$ est une variété différentiable, l'algèbre $\Omega_{DR}(X)$ des formes différentielles de de Rham est une $\mathbb{R}\text{-}ADG_{(c)}$).

Dans $ADG_{(c)}$ les produits tensoriels $A \underset{k}{\otimes} B$ considérés seront des produits tensoriels gradués :

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{|b|.|a'|}aa' \otimes bb' \quad ,$$

$$d(a \otimes b) = da \otimes b + (-1)^{|a|}\, a \otimes db \; .$$

(La notion de produit tensoriel gradué correspond à celle de produit de variétés : si $X$ et $Y$ sont 2 variétés différentiables, les formules ci-dessus sont définies de façon que l'inclusion naturelle

$$\Omega_{DR}(X) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \Omega_{DR}(Y) \hookrightarrow \Omega_{DR}(X \times Y) \quad ,$$

devienne un morphisme dans la catégorie $\mathbb{R}\text{-}ADG_{(c)}$).

On notera $AG_{(c)}$ la catégorie des $k$-algèbres $\mathbb{N}$-graduées, commutatives (considérée parfois comme la sous-catégorie pleine de $ADG_{(c)}$ formée des algèbres à différentielle nulle), et on notera $H^* : ADG_{(c)} \longrightarrow AG_{(c)}$ le foncteur cohomologie. D'une $k\text{-}ADG_{(c)}$, on dira qu'elle est connexe si $H^0(A) = k$ , et qu'elle est <u>simplement connexe</u> si $H^o(A) = k$ et $H^1(A) = 0$.

Nous allons maintenant définir le pendant algébrique de la notion d'homotopie différentiable

$$X \underset{t=1}{\overset{t=0}{\rightrightarrows}} X \times \mathbb{R} \longrightarrow Y$$

entre 2 applications différentiables de $X$ dans $Y$.

Soit $k(t,dt) = S(t) \underset{k}{\otimes} E(dt)$ la k-$ADG_{(c)}$ (acyclique) définie par $|t| = 0$, $|dt| = 1$ et $d(t) = dt$ (produit tensoriel gradué de l'algèbre symétrique $S(t)$ sur $t$, et de l'algèbre extérieure $E(dt)$ sur $dt$).

($\mathbb{R}(t,dt)$ s'identifie à la sous-algèbre de $\Omega_{DR}(\mathbb{R})$ formée des formes différentielles à coefficients polynomiaux).

Soient $f_o$ et $f_1$ deux morphismes $B \rightrightarrows A$ de k-$ADG_{(c)}$. On appelle <u>homotopie</u> de $f_o$ sur $f_1$ tout morphisme $F : B \longrightarrow A \underset{k}{\otimes} k(t,dt)$ tel que $\rho_o \circ F = f_o$ et $\rho_1 \circ F = f_1$

$$B \xrightarrow{F} A \underset{k}{\otimes} k(t,dt) \underset{\rho_1}{\overset{\rho_o}{\rightrightarrows}} A$$

où $\rho_o$ et $\rho_1$ sont définis par

$$\rho_o(a \otimes p(t)) = p(0)\, a,\ \rho_o(a \otimes p(t)dt) = 0\ ,$$

et $$\rho_1(a \otimes p(t)) = p(1)\, a,\ \rho_1(a \otimes p(t)dt) = 0\ .$$

On dira que $f_o$ et $f_1$ sont <u>homotopes</u> s'ils sont équivalents pour la relation d'équivalence engendrée par l'existence d'une homotopie.

<u>*Remarque*</u>.- Il existe une autre définition de l'homotopie, mieux adaptée à certains problèmes, équivalente à la précédente (cf. Sullivan [39]).

<u>*Lemme*</u> *II.1*.- Si 2 morphismes $f_o$ et $f_1$ de $ADG_{(c)}$ sont homotopes, ils induisent la même application en cohomologie.

Notons en effet $\int : A \underset{k}{\otimes} k(t,dt) \to A$

l'application k-linéaire $\displaystyle\fint(a \otimes p(t)) = 0$

$$\fint(a \otimes p(t)dt) = (-1)^{|a|} \left(\int_0^1 p(t)dt\right)a$$

*Remarque*.- C'est ici, pour pouvoir donner un sens à l'intégrale $\int_0^1 p(t)dt$ que l'on a besoin de supposer $k$ de caractéristique 0).

Supposons qu'il existe une homotopie $F$ de $f_0$ sur $f_1$, et posons $h = \fint \circ F$ : on vérifie alors sans peine que $f_1 - f_0 = d.h + h.d$ , et par conséquent $H(f_1) = H(f_0)$.

Le cas général où $f_0$ et $f_1$ sont homotopes en résulte immédiatement.

On notera $[B,A]$ l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes $f : B \to A$ d'$\mathrm{ADG}_{(c)}$.

Soit $W$ un k-espace vectoriel, supposé de dimension finie, $n$ un entier $\geq 0$, et $W^*$ son dual. Notons $L_n(W)$ l'$\mathrm{ADG}_{(c)}$ libre engendrée par $W$ en dimension $n$, avec différentielle $d = 0$. (Si $n$ est impair $L_n(W)$ est égal à l'algèbre extérieure $E(W)$ sur $W$ ; si $n$ est pair $L_n(W)$ est égale à l'algèbre symétrique $S(W)$).

*Lemme II.2.*- Pour toute $\mathrm{ADG}_{(c)}$ $A$, on a un isomorphisme naturel :

$$[L_n(W),\ A] \xrightarrow{\ \cong\ } H^n(A) \otimes_k W^* .$$

En effet, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ADG}_{(c)}}(L_n(W),A) \cong \mathrm{Hom}_k(W,Z^n(A)) = Z^n(A) \otimes_k W^*$ , où l'on a noté $Z^n(A)$ les n-cocycles de $A$. Si 2 morphismes de $L_n(W)$ dans $A$ sont supposés homotopes, ils ont même image par l'application

$$\mathrm{Hom}_k(W,Z^n(A)) \to \mathrm{Hom}_k(W,H^n(A)) = H^n(A) \otimes_k W^*$$

(à cause du lemme II.1).

Réciproquement, supposons que 2 applications k-linéaires $\varphi$ et $\psi$ de $W$ dans $Z^n(A)$ aient même image par composition avec $Z^n(A) \to H^n(A)$ : à l'aide d'une base de $W$, on construit une application $h : W \to A^{n-1}$ telle que

$\Psi - \psi = d \circ h$.

Definissons alors $\tilde{F} : L_n(W) \to A \underset{k}{\otimes} k(t,dt)$

par sa restriction $F : W \to Z^n(A \underset{k}{\otimes} k(t,dt))$ à $W$,

en posant :

$$F(\xi) = \psi(\xi) + t.dh(\xi) + (-1)^n h(\xi)dt :$$

puisque $\rho_0 \circ F = \psi$ et $\rho_1 \circ F = \Psi$, $\psi$ et $\Psi$ sont les restrictions à $W$ de 2 applications homotopes.

Par analogie avec le fait que, pour tout groupe abélien $\Pi$ de rang fini, et tout C.W.-complexe $X$, on a :

$$H^*(K(\Pi,n),k) = L_n(W)$$

et $$[X,K(W^*,n)] = H^n(X,k) \underset{k}{\otimes} W^*$$

pour $W^* = k \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi$, l'ADG$_{(c)}$ $(L_n(W),\ d = 0)$ sera appelée <u>algèbre d'Eilenberg-Mac Lane</u> de type $(W,n)$.

## 2 - *Extensions principales et algèbres minimales.*

A la notion topologique de fibration principale

$$\begin{array}{ccc}
K(\Pi,n) & = & K(\Pi,n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y & \xrightarrow{\tilde{\ell}} & PK(\Pi,n+1) \\
\downarrow q & & \downarrow p \\
X & \xrightarrow{\ell} & K(\Pi,n+1)
\end{array}$$

va correspondre la notion algébrique d'<u>extension principale</u>

$$\begin{tikzcd}
L_n(W) \arrow[r, equal] & L_n(W) \\
A \underset{\tau}{\otimes} L_n(W) \arrow[u] & L_{n+1}(W) \underset{i}{\otimes} L_n(W) \arrow[u] \arrow[l, "\tilde{\tau}"'] \\
A \arrow[u, "\beta"] & L_{n+1}(W) \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[l, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

de la façon suivante : $A$ désigne une k-ADG$_{(c)}$, $W$ un k-espace vectoriel de de dimension finie, $\tau$ un morphisme de $(L_{n+1}(W), d = 0)$ dans $A$, $A \underset{\tau}{\otimes} L_n(W)$ désigne le produit tensoriel gradué de $A$ et $L_n(W)$, muni de la différentielle $d_\tau$ définie par $d_\tau(a \otimes 1) = d_A a \otimes 1$ ($d_A$ désignant la différentielle de $A$),

et $\qquad d_\tau(1 \otimes w) = \tau w \otimes 1$ ,

tandis que $L_{n+1}(W) \underset{i}{\otimes} L_n(W)$ correspond au cas particulier où l'on prend pour $A$ l'algèbre $(L_{n+1}(W), d = 0)$, et pour $\tau$ l'identité dans $L_{n+1}(W)$.

*Lemme II.3.-*

i) L'algèbre $L_{n+1}(W) \underset{i}{\otimes} L_n(W)$ est acyclique,

ii) La classe d'isomorphie de $A \underset{\tau}{\otimes} L_n(W)$ dans k-ADG$_{(c)}$ ne dépend que de la classe d'homotopie $[\tau]$ de $\tau$ dans $[L_{n+1}(W), A]$ ,

iii) Le carré $(\beta, \tilde{\tau}, \tau, \alpha)$ est "cocartésien" i.e. $A \underset{\tau}{\otimes} L_n(W)$ est une somme amalgamée ("push out").

Notons $\Phi$ l'homomorphisme de k-ADG$_{(c)}$ de $L_{n+1}(W) \underset{i}{\otimes} L_n(W)$ dans $[L_{n+1}(W) \underset{i}{\otimes} L_n(W)] \otimes k(t,dt)$ défini par $\Phi(1 \otimes w) = t(1 \otimes w)$ [d'où $\Phi(w \otimes 1) = dt(1 \otimes w) + t(w \otimes 1)$] , et

$\int$ l'application linéaire de degré $-1$ de

$$[L_{n+1}(W) \underset{i}{\otimes} L_n(W)] \otimes k(t,dt) \quad \text{dans} \quad [L_{n+1}(W) \underset{i}{\otimes} L_n(W)]$$

définie comme dans la démonstration du lemme II.1.

Posant $s = \int \circ \Phi$, on a alors $ds + sd = \mathrm{Id}$ (en effet, $d \circ \int + \int \circ d = \rho_1 - \rho_o$,

$\Phi$ commute aux différentielles, et $(\rho_1 - \rho_0) \circ \Phi = \mathrm{Id}$). On en déduit la partie (i) du lemme.

Soient $\tau$ et $\tau'$ 2 morphismes homotopes de $(L_{n+1}(W), d = 0)$ dans $A$ : il existe donc une application linéaire $\alpha : W \to A^n$ telle que, pour tout $w \in W$, $\tau'(w) - \tau(w) = d\alpha(w)$. On définit alors un isomorphisme de k-ADG$_{(c)}$

$$A \underset{\tau}{\otimes} L_n(W) \xrightarrow[\cong]{\sigma} A \underset{\tau'}{\otimes} L_n(W)$$

en posant : $\sigma(a \otimes 1) = a \otimes 1$, et $\sigma(1 \otimes w) = 1 \otimes w - \alpha(w) \otimes 1$. Ceci prouve la partie (ii) du lemme.

La partie (iii) se vérifie sans difficulté.

Nous aurons besoin, au chapitre IV, d'un résultat un peu plus précis que la partie (ii) du lemme II.3.

Pour toute k-ADG$_{(c)}$ $A$, notons tout d'abord A-ADG$_{(c)}$ la catégorie des flèches de source $A$ dans k-ADG$_{(c)}$ : un objet de A-ADG$_{(c)}$ est donc la donnée d'une k-ADG$_{(c)}$ $B$ et d'un morphisme $A \xrightarrow{\pi_B} B$ de k-ADG$_{(c)}$ ; un morphisme de $(B_1, \Pi_1)$ dans $(B_2, \Pi_2)$ est un morphisme $\psi : B_1 \to B_2$ de k-ADG$_{(c)}$ tel que $\psi \circ \Pi_1 = \Pi_2$. Toute extension principale $A \underset{\tau}{\otimes} L_n(W)$ sera considérée comme un objet de A-ADG$_{(c)}$ grâce à l'inclusion naturelle $a \to a \otimes 1$ (qui commute aux différentielles). Tout morphisme $\psi : A \underset{\tau}{\otimes} L_n(W) \to (B, \pi_B)$ est défini par sa restriction $\psi_0 : W \to B^n$ aux éléments de la forme $1 \otimes w$ avec $w \in W$, qui vérifie $d_B \circ \psi_0 = \pi_B \circ \tau$. Inversement, toute application linéaire $\psi_0 : W \to B^n$ vérifiant la relation ci-dessus se prolonge de façon unique en un morphisme $\psi : A \underset{\tau}{\otimes} L_n(W) \to (B, \pi_B)$ de A-ADG$_{(c)}$. On a alors le

*Lemme II.4.-*

Pour que deux extensions principales $A \underset{\tau}{\otimes} L_n(W)$ et $A \underset{\tau'}{\otimes} L_{n'}(W')$ soient isomorphes dans la catégorie A-ADG$_{(c)}$, il faut et il suffit que soient vérifiées simultanément les conditions suivantes :

$n = n'$ ; il existe un isomorphisme $\sigma : W \xrightarrow[\cong]{} W'$ d'espaces vectoriels et

une application linéaire $\alpha : W \to A^n$ tels que $\tau' \circ \sigma - \tau = d\alpha$.
En particulier, l'ensemble $\mathcal{E}(A,L_n(W))$ des classes d'isomorphie d'extensions principales de $A$ par $L_n(W)$ est isomorphe à

$$[(L_n(W),d = 0),A] = \mathrm{Hom}_k(W,H^{n+1}(A)).$$

Il est clair que ces conditions sont suffisantes : l'application

$$\varphi_o : W \to A \otimes_{\tau'} L_n(W')$$

définie par $\varphi_o(w) = 1 \otimes \sigma(w) - \alpha(w) \otimes 1$ se prolonge en effet de façon unique en un morphisme $\varphi : A \otimes_\tau L_n(W) \to A \otimes_{\tau'} L_n(W')$, qui est un isomorphisme dans $A\text{-ADG}_{(c)}$ (l'inverse étant défini par l'application $w' \to 1 \otimes \sigma^{-1}(w') + \alpha\sigma^{-1}(w') \otimes 1$ de $W'$ dans $A \otimes_\tau L_n(W)$).

Réciproquement, il est tout d'abord clair que la condition $n = n'$ est nécessaire. Soit donc $\varphi_o : W \to [A \otimes_{\tau'} L_n(W')]^n$ la restriction à $W$ d'un isomorphisme $\varphi$, et $\psi_o : W' \to [A \otimes_\tau L_n(W)]^n$ la restriction de l'isomorphisme inverse. Puisque $[A \otimes_{\tau'} L_n(W')]^n = W' \oplus A^n$, $\varphi_o$ se décompose de façon unique sous la forme

$$\varphi_o(w) = 1 \otimes \sigma(w) - \alpha(w) \otimes 1$$

et la commutation avec les différentielles $\varphi \circ d_\tau = d_{\tau'} \circ \varphi$ impose la relation $\tau' \circ \sigma - \tau = d\alpha$.

De même $\psi_o$ se décompose de façon unique sous la forme

$$\psi_o(w') = 1 \otimes \sigma'(w') + \beta(w') \otimes 1$$

et la relation $(\psi_o \circ \varphi_o)(w) = 1 \otimes w$ implique $\sigma' \circ \sigma = 1_W$ et $\beta \circ \sigma = \alpha$ ; en particulier, on voit que $\sigma$ est inversible, d'où le lemme.

*Remarque*.- Nous n'avons fait, pour l'instant, que mimer algébriquement la définition d'une fibration principale, mais nous verrons au chapitre IV que, pour certaines algèbres $A$ telles que $H^*(A) \cong H^*(X,k)$, on a bien $H^*(A \underset{\tau}{\otimes} L_n W) \cong H^*(Y,k)$ comme on pouvait l'espérer ($W$ désignant le dual du k-espace vectoriel $k \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi$, et $\tau$ correspondant à l'application classifiante de la fibration principale $Y \to X$ par l'isomorphisme du lemme II.2).

De même qu'un espace nilpotent $X$ s'obtient à partir d'un point par une suite de fibrations principales $(K(\Pi_\alpha, n_\alpha) \to X_{\alpha+1} \to X_\alpha)_{\alpha \in I}$ où $n_\alpha$ est une fonction croissante de $\alpha$, finie en chaque dimension (i.e. : $\forall n$, l'ensemble des $\alpha \in I$ tels que $n_\alpha = n$ est fini), on va s'intéresser aux k-ADG$_{(c)}$ $\mathcal{M}$ obtenues à partir de $(L_o(k),\ d = 0)$ par une suite d'extensions principales.

$(\mathcal{M}_\alpha \to \mathcal{M}_{\alpha+1} \to L_{n_\alpha}(W_\alpha))_{\alpha \in I}$ , où $n_\alpha$ est une fonction croissante de $\alpha$, finie en chaque dimension. De telles algèbres seront dites <u>nilpotentes</u> (ou minimales nilpotentes).

On qualifiera, plus généralement, de <u>minimale</u> une k-ADG$_{(c)}$ $\mathcal{M}$ possédant les propriétés suivantes

i) $\mathcal{M}$ est <u>libre</u> en tant que k-AG$_{(c)}$ : il existe un k-espace vectoriel gradué $W = \bigoplus_{n \geq 1} W^n$ tel que

$$\mathcal{M} = L(W) = E(W^{\text{impair}}) \underset{k}{\otimes} S(W^{\text{pair}})$$

[produit tensoriel gradué de l'algèbre extérieure $E(W^{\text{impair}})$ construite sur $\bigoplus_{i \geq 0} W^{2i+1}$, et de l'algèbre symétrique $S(W^{\text{pair}})$ construite sur $\bigoplus_{i \geq 1} W^{2i}$]

ii) il existe un ensemble bien ordonné $I$ tel que

. $W = \bigoplus_{\alpha \in I} W_\alpha$ ,

. chaque espace $W_\alpha$ est formé d'éléments homogènes [i.e. $\forall \alpha \in I$ , $\exists n_\alpha$ (nécessairement unique) tel que $W_\alpha \subset W^{n_\alpha}$],

. $n_\alpha$ est une fonction croissante de $\alpha$,

. $\forall \alpha \in I$, $\quad d\,W_\alpha \subset L(\bigoplus_{\beta < \alpha} W_\beta)$.

*Remarques*.-

i) Par définition d'une algèbre minimale, $W^0 = \{0\}$, d'où $\mathcal{M}^0 = k = H^0(\mathcal{M})$.

ii) Dire que la différentielle $d\xi$ de tout générateur $\xi \in W^n$ s'exprime à l'aide des générateurs de dimension $\leq n$, équivaut à dire qu'elle est décomposable :

notant $\mathcal{M}^+$ l'idéal maximal $\bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{M}^n$ de $\mathcal{M}$, $d\, W^n \subset \mathcal{M}^+ . \mathcal{M}^+$ .

D'une algèbre minimale $\mathcal{M}$, on dira qu'elle est nilpotente si chaque espace $W^n$ est de dimension finie [il revient au même de dire que chaque espace $W_\alpha$ est de dimension finie et que la fonction croissante $\alpha \to n_\alpha$ est finie en chaque dimension].

*Remarque*.- Soit $\mathcal{M} = L(W)$ avec $W = \bigoplus_{n\geq 1} W^n$ une algèbre minimale nilpotente et

$$d : W^1 \longrightarrow \overset{2}{\Lambda} W^1$$

la restriction à $W^1$ de la différentielle. Par dualité, on en déduit une application bilinéaire alternée

$$\overset{2}{\Lambda}\, \Pi_1 \xrightarrow{[,]} \Pi_1$$

(où $\Pi_1$ désigne l'espace vectoriel dual de $W^1$), et la condition $d^2 = 0$ exprime que le crochet ci-dessus vérifie l'identité de Jacobi : $\Pi_1$ est donc muni d'une structure d'algèbre de Lie. La décomposition

$$W^1 = \bigoplus_{n_\alpha = 1} W_\alpha \quad \text{et la relation} \quad d\, W_\alpha \subset L(\bigoplus_{\beta<\alpha} W_\beta)$$

expriment que cette algèbre de Lie $\Pi_1$ est nilpotente. Cette algèbre de Lie est la transcription algébrique de la notion de groupe fondamental $\pi_1(X)$ nilpotent, en le sens suivant : si $k = \mathbb{R}$, et si $\mathcal{M}$ "représente" un espace nilpotent X, en un sens qui sera précisé plus loin, le groupe $\pi_1(X)$ "$\otimes_{\mathbb{Z}}$" $\mathbb{R}$ est égal au groupe de Lie réel connexe et simplement connexe $G(\Pi_1)$, admettant $\Pi_1$ comme algèbre de Lie.

De façon analogue, pour $n \geq 2$, la différentielle $d$, restreinte à $W^n$, prend ses valeurs dans $(W^1 \otimes W^n) \oplus (\mathcal{M}^{++})^{n+1}$ (avec $\mathcal{M}^{++} = \bigoplus_{p\geq 2} \mathcal{M}^p$). Notons

$$W^n \xrightarrow{\partial_n} W^1 \otimes W^n$$

l'application obtenue par composition de $d$ avec la projection sur $W^1 \otimes W^n$. Par dualité, on obtient une application $\Pi_1 \xrightarrow{\rho_n} \operatorname{End} \Pi_n$ (où $\Pi_n$ désigne l'espace vectoriel dual de $W^n$). La relation $d^2 = 0$ implique alors que $\rho_n$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. La décomposition $W^n = \bigoplus_{n_\alpha = n} W_\alpha$ et la relation $d\, W_\alpha \subset L(\bigoplus_{\beta<\alpha} W_\beta)$ expriment que l'action $\rho_n$ de $\Pi_1$ sur $\Pi_n$ est nilpotente. L'interprétation est analogue au cas $n = 1$ : si $k = \mathbb{R}$, et si $\mathcal{M}$ "représente" l'espace nilpotent $X$, $\Pi_n = \pi_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, et la structure de $G(\Pi_1)$ module sur $\Pi_n$ définie par $\rho_n$ n'est autre que l'action canonique de $\pi_1(X)$ sur $\pi_n(X)$ (après tensorisation par $\mathbb{R}$).

Même lorsque le mot "représenter" aura été défini, nous ne démontrerons pas ces affirmations, que nous n'utiliserons pas.

*Cas d'une algèbre minimale simplement connexe.*

On a alors le

*Lemme II. 5.-*

i) Pour qu'une algèbre minimale $\mathcal{M} = (L(W),d)$ soit simplement connexe, il faut et il suffit que $W^1 = 0$ $(W = \bigoplus_{n\geq 2} W^n)$.

ii) Soit $W = \bigoplus_{n\geq 2} W^n$ un espace vectoriel gradué sans élément de dimension 0 ou 1. Les 4 conditions suivantes sont alors équivalentes :

a) $(L(W),d)$ est une $ADG_{(c)}$ minimale,

b) la différentielle de tout générateur $w \in W$ est décomposable ,

c) $d\, W^n \subset L(\bigoplus_{i\leq n-1} W^i)$ ,

d) $d\, W^n \subset L(\bigoplus_{i\leq n} W^i)$ .

Il est clair que si $W^1 = 0$ , $\mathcal{M}$ est simplement connexe, car alors $\mathcal{M}^1 = 0$. Réciproquement, soit $\alpha_o$ le plus petit élément de $I$ : on a nécessairement $d\,W_{\alpha_o} = 0$ , et $W_{\alpha_o} \not\subset \mathrm{Im}\,d$ puisque tout cobord est décomposable. Donc, si $n_{\alpha_o}$ désigne l'entier tel que $W_{\alpha_o} \subset W^{n_{\alpha_o}}$ , la cohomologie $H^{n_{\alpha_o}}(\mathcal{M})$ est certainement non nulle. Si $\mathcal{M}$ est simplement connexe, $n_{\alpha_o}$ doit donc être au moins égal à 2, d'où la partie (i) du lemme.

On suppose désormais $W = \bigoplus_{n\geq 2} W^n$ , et on suppose que $(L(W),d)$ est une $ADG_{(c)}$.

a) $\Longrightarrow$ b) est une propriété évidente qu'on a déjà notée, et qui n'a rien à voir avec le fait que $W^1 = 0$.

b) $\Longrightarrow$ c) ; soit $w \in W^n$ : $dw$ est un élément de dimension $n+1$ , qui s'exprime donc à l'aide des générateurs de dimension au plus $n+1$ . Comme $W^o = W^1 = 0$ , $dw$ ne peut être décomposable que s'il s'exprime à l'aide des générateurs de dimension au plus $n-1$.

c) $\Longrightarrow$ d) est évident.

d) $\Longrightarrow$ a) ; il suffit de prendre pour $I$ l'ensemble (bien ordonné) des entiers $n \geq 2$, pour que la définition d'une algèbre minimale soit satisfaite , compte tenu de ce que $V^1 = 0$.

<u>Catégorie $(M\text{-}ADG)_k$</u> : on notera ainsi la catégorie dont les objets sont les $k\text{-}ADG_{(c)}$ qui sont minimales nilpotentes, et les morphismes les classes d'homotopie $[\mathcal{M},\mathcal{N}]$ de morphismes $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de $k\text{-}ADG_{(c)}$.

## 3 - *Modèle minimal d'une* $ADG_c$ *connexe.*

Dans ce paragraphe les seules $ADG_{(c)}$ considérées seront des algèbres avec élément unité.

Appelons <u>quasi-isomorphisme</u> $f : A \to B$ tout homomorphisme $f$ d'$ADG_{(c)}$ induisant un isomorphisme en cohomologie et appelons <u>c-équivalence</u> dans $k\text{-}ADG_{(c)}$ la relation d'équivalence engendrée par l'existence d'un quasi-isomorphisme.

*Théorème II.6.-*

i) Pour toute k-ADG$_{(c)}$ A supposée connexe (au sens cohomologique : $H^o(A) \cong k$), il existe un quasi-isomorphisme $\mathcal{M}_A \xrightarrow{\rho_A} A$ où $\mathcal{M}_A$ est une algèbre minimale.

ii) L'algèbre $\mathcal{M}_A$ est bien définie à isomorphisme près ($\mathcal{M}_A$ s'appelle le <u>modèle minimal</u> de A).

iii) Tout homomorphisme $f : A \to B$ de k-ADG$_{(c)}$ se relève en un homomorphisme $\hat{f}$, rendant commutatif à homotopie près le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_A & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathcal{M}_B \\ \downarrow{\rho_A} & & \downarrow{\rho_B} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

iv) Si f est un quasi-isomorphisme, $\hat{f}$ est un isomorphisme entre algèbres minimales.

*Remarque.-* Ce théorème admet une généralisation importante à la catégorie des A-ADG$_{(c)}$, le théorème énoncé ci-dessus étant relatif au cas $A = (L_o(k), d=0)$.

*Corollaire.-* Dans toute classe de c-équivalence de k-ADG$_{(c)}$ connexes, il existe une algèbre minimale, et une seule à isomorphisme près.

Nous nous contenterons de démontrer le théorème dans le cas d'une algèbre A simplement connexe (démonstration initiale de Sullivan), en nous inspirant de [15] et [45]. Le cas général a été rédigé par S. Halperin dans [25].

*1°) Existence de* $\mathcal{M}_A \xrightarrow{\rho_A} A$.

Soit donc A une k-ADG$_{(c)}$ vérifiant $H^o(A) = k$ et $H^1(A) = 0$. Posons $W^2 = H^2(A)$, $\mathcal{M}(2) = (L(W^2), d = 0)$, et définissons $\rho_2 : (L_2(W^2), d = 0) \to A$,

après avoir choisi une section $\sigma$ de la projection $Z^2(A) \underset{\sigma}{\rightleftarrows} W^2 = H^2(A)$ ,
en posant $\rho_2(w) = \sigma(w)$. Il est clair que $H^i(\rho_2)$ est bijectif pour $i = 0,1$ et $2$, tandis que $H^3(\rho_2)$ est injectif (puisque $L_2(W^2)$ n'a pas d'élément en dimension 3).

L'algèbre d'Eilenberg-Mac Lane $\mathcal{M}(2)$ est d'autre part une algèbre minimale.

Supposons avoir défini plus généralement une algèbre minimale $\mathcal{M}(n)$ et un morphisme $\rho_n : \mathcal{M}(n) \to A$ de k-ADG$_{(c)}$ possédant les propriétés suivantes (notées $*_n$) :

i) $\mathcal{M}(n) = L(\bigoplus_{2\leq i\leq n} W^i)$ a tous ses générateurs de dimension au plus $n$,

ii) $H^i(\rho_n)$ est bijectif pour $i \leq n$ ,

iii) $H^{n+1}(\rho_n)$ est injectif .

Nous allons alors définir une extension principale

$$\mathcal{M}(n) \longrightarrow \mathcal{M}(n+1) \longrightarrow L_{n+1}(W^{n+1})$$

de $\mathcal{M}(n)$ ainsi qu'un prolongement $\rho_{n+1}$ de $\rho_n$ à $\mathcal{M}(n+1)$, vérifiant $(*_{n+1})$. L'idée est d'ajouter 2 sortes de générateurs de dimension $n+1$ : les premiers pour rendre $H^{n+1}(\rho_n)$ surjectif en ajoutant des cocycles correspondant à son conoyau, les deuxièmes pour rendre $H^{n+2}(\rho_n)$ injectif en "tuant" son noyau. De façon précise, posons

$$W^{n+1}_{(1)} = \mathrm{Coker}\left[H^{n+1}(\rho_n) : H^{n+1}(\mathcal{M}(n)) \to H^{n+1}(A)\right]$$

$$W^{n+1}_{(2)} = \mathrm{Ker}\left[H^{n+2}(\rho_n) : H^{n+2}(\mathcal{M}(n)) \to H^{n+2}(A)\right]$$

et
$$W^{n+1} = W^{n+1}_{(1)} \oplus W^{n+1}_{(2)} \quad .$$

Notons $\sigma$ une section de la projection $Z^{n+2}(\mathcal{M}(n)) \underset{\sigma}{\overset{[\;]}{\rightleftarrows}} H^{n+2}(\mathcal{M}(n))$ et definissons

$$\tau_{n+1} : W^{n+1} \longrightarrow Z^{n+2}(\mathcal{M}(n))$$

en posant
$$\tau_{n+1}(w) = 0 \quad \text{pour} \quad w \in W^{n+1}_{(1)}$$

$$\tau_{n+1}(w) = \sigma(w) \quad \text{pour} \quad w \in W^{n+1}_{(2)}$$

Prenons alors pour $\mathcal{M}(n+1)$ l'extension principale $\mathcal{M}(n) \underset{\tau_{n+1}}{\otimes} L_{n+1}(W^{n+1})$ correspondante.

Pour définir $\rho_{n+1}$, on se donne

i) une section $\alpha$ de la projection $H^{n+1}(A) \underset{\alpha}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Coker}\, H^{n+1}(\rho_n)$

ii) une section $\beta$ de la projection $Z^{n+1}(A) \underset{\beta}{\overset{[\ ]}{\rightleftarrows}} H^{n+1}(A)$

iii) une section $\gamma$ de la surjection $A^{n+1} \underset{\gamma}{\overset{d}{\rightleftarrows}} B^{n+2}(A)$

(où $B^{n+2}(A)$ désigne les $n+2$ - cobords de $A$) et l'on définit l'extension $\rho_{n+1}$ de $\rho_n$ à $\mathcal{M}(n+1)$ en posant :

$$\rho_{n+1}(1 \otimes w) = (\beta \circ \alpha)(w) \quad \text{pour} \quad w \in W^{n+1}_{(1)} ,$$

$$\rho_{n+1}(1 \otimes w) = (\gamma . \rho_n . \sigma)(w) \quad \text{pour} \quad w \in W^{n+1}_{2} .$$

- On vérifie sans difficulté que $\rho_{n+1}$ commute aux différentielles, que $H^i(\rho_{n+1})$ reste bijectif pour $i \leq n$, et que $H^{n+1}(\rho_{n+1})$ reste injectif.

- Mais $H^{n+1}(\rho_{n+1})$ est surjectif, puisque $H^{n+1}(A) = \mathrm{Im}\, H^{n+1}(\rho_n) \oplus (W_1^{(n+1)})$, et que chacun de ces 2 facteurs appartient à $\mathrm{Im}\, H^{n+1}(\rho_{n+1})$.

- $H^{n+2}(\rho_{n+1})$ est injectif : en effet, puisque $W^1 = 0$, $(\mathcal{M}(n+1))^{n+2} = (\mathcal{M}(n))^{n+2}$, et par conséquent $\rho_{n+1}$ et $\rho_n$ coïncident sur $Z^{n+2}(\mathcal{M}(n+1))$ ; en particulier, si $x$ est un tel $(n+2)$ - cocycle vérifiant $\rho_{n+1}(x) = dy$, il existe $w \in W^{n+1}_{(2)}$ tel que $x$ et $d_{\tau_{n+1}}(1 \otimes w)$ soient cohomologues ; la classe de cohomologie de $x$ est donc nulle et $H^{n+2}(\rho_{n+1})$ est injectif.

- On obtient alors $\mathcal{M} \xrightarrow{\rho} A$ comme limite inductive des homomorphismes $\mathcal{M}(n) \xrightarrow{\rho_n} A$, où $\mathcal{M}(n)$ désigne la sous-algèbre de $\mathcal{M}$ engendrée par les générateurs de dimension $\leq n$ ($\mathcal{M}$ est la réunion des algèbres $\mathcal{M}(n)$).

*Remarque*.- L'hypothèse $H^1(A) = 0$

- d'une part a permis de faire démarrer la récurrence en construisant $(\mathcal{M}(2), \rho_2)$ vérifiant $(*_2)$ ,
- d'autre part a été utilisée dans la démonstration de ce que $H^{n+2}(\rho_{n+1})$ était injectif.

2°) *Tout quasi-isomorphisme entre algèbres minimales est un isomorphisme.*

Soit $\psi : L(V) \to L(W)$ un quasi-isomorphisme entre 2 algèbres minimales $\mathcal{M} = L(\bigoplus_{n\geq 2} V^n)$ et $\mathcal{N} = L(\bigoplus_{n\geq 2} W^n)$, que nous supposerons toujours simplement connexes. Notons

$$\psi_n : L(\bigoplus_{2\leq i\leq n} V^i) \longrightarrow L(\bigoplus_{2\leq i\leq n} W^i)$$

la restriction de $\psi$ aux sous-algèbres minimales $\mathcal{M}(n)$ et $\mathcal{N}(n)$ engendrées par les générateurs de dimension $\leq n$.

Puisque $d\,V^2 = 0$ , et puisque tout cobord est décomposable, $H^2(\mathcal{M}) = V^2$ ; de même $H^2(\mathcal{N}) = W^2$ , et puisque $\psi$ est un quasi-isomorphisme, $\psi$ induit un isomorphisme $V^2 \to W^2$ :

Autrement dit $\psi_2 : \mathcal{M}(2) \to \mathcal{N}(2)$ est un isomorphisme.

Supposons avoir démontré plus généralement que $\psi_n$ est un isomorphisme : nous allons montrer qu'il en est de même pour $\psi_{n+1}$. Soit $\iota : \mathcal{M}(n) \hookrightarrow \mathcal{M}$ l'inclusion canonique , induisant $[\iota]^*$ en cohomologie. Soit $j : H^{n+1}(\mathcal{M}) \to V^{n+1}$ l'application ainsi définie : puisque $\mathcal{M}^{n+1} = \mathcal{M}^{n+1}(n) \oplus V^{n+1}$ , tout cocycle $x \in Z^{n+1}(\mathcal{M})$ se décompose de façon unique sous la forme $x = y + v$ ; on pose alors $j[x] = v$ , après avoir remarqué qu'un cobord de $\mathcal{M}^{n+1}$ ne contient certainement pas de générateur de dimension $> n$ ($\mathcal{M}$ est minimale, tout cobord doit donc être décomposable), et que, par conséquent, $v$ ne dépend que de la classe de cohomologie de $x$. Soit $\partial : V^{n+1} \to H^{n+2}(\mathcal{M}(n))$ l'application qui, à tout générateur $v \in V^{n+1}$ , associe la classe de cohomologie du cocycle $dv \in Z^{n+2}(\mathcal{M}(n))$ de $\mathcal{M}(n)$.

*Lemme* II.7.-

La suite

$$H^{n+1}(\mathcal{M}(n)) \xrightarrow{[\iota]^{n+1}} H^{n+1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{j} V^{n+1} \xrightarrow{\partial} H^{n+2}(\mathcal{M}(n)) \xrightarrow{[\iota]^{n+2}} H^{n+2}(\mathcal{M})$$

est exacte.

En effet, $j[x] = 0$ signifie que $x \in Z^{n+1}(\mathcal{M}(n))$, c'est-à-dire que $[x] \in \operatorname{Im}[\iota]^{n+1}$, d'où l'exactitude en $H^{n+1}(\mathcal{M})$. La condition $\partial v = 0$ signifie qu'il existe un élément $y \in \mathcal{M}^{n+1}(\eta)$ tel que $d(y + v) = 0$, c'est-à-dire que $v = j\,[y + v]$, d'où l'exactitude de $V^{n+1}$. Soit $z \in Z^{n+2}(\mathcal{M}(n))$ ; dire que $[\iota]^{n+2}\,[z] = 0$ signifie que $z$ est un cobord dans $\mathcal{M}$ ; parce que $\mathcal{M}$ est minimale, ceci n'est possible que s'il existe $v \in V^{n+1}$ tel que $z = dv$, soit $[z] = \partial v$, d'où l'exactitude en $H^{n+2}(\mathcal{M}(n))$.

Montrons alors que $\psi_{n+1}$ est un isomorphisme, sachant que $\psi_n$ l'est. La naturalité de la suite exacte du lemme implique que $\psi$ induit un morphisme de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
H^{n+1}(\mathcal{M}(n)) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_n^*"] & H^{n+1}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi^*"] & V^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\psi}_{n+1}"] & H^{n+2}(\mathcal{M}(n)) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_n^*"] & H^{n+2}(\mathcal{M}) \arrow[d, "\psi^*"] \\
H^{n+1}(\eta(n)) \arrow[r] & H^{n+1}(\eta) \arrow[r] & W^{n+1} \arrow[r] & H^{n+2}(\eta(n)) \arrow[r] & H^{n+2}(\eta)
\end{tikzcd}$$

où $\bar{\psi}_{n+1}$ est l'application induite par $\psi$ sur les générateurs de dimension n+1. Or $\psi_n^*$ est un isomorphisme d'après l'hypothèse de récurrence, et $\psi^*$ aussi puisque $\psi$ est un quasi-isomorphisme ; le lemme des 5 nous permet alors de conclure : $\bar{\psi}_{n+1}$ est un isomorphisme, donc aussi $\psi_{n+1} = (\psi_n, \bar{\psi}_{n+1})$.

On en déduit, par induction, que tous les $\psi_n$ sont des isomorphismes, donc $\psi = \varinjlim_n \psi_n$ aussi.

3°) *Tout homomorphisme de* $k\text{-ADG}_{(c)}$, *dont la source est une algèbre minimale, se factorise, à homotopie près, à travers un quasi-isomorphisme au but.* De façon précise, nous allons montrer que, pour tout quasi-isomorphisme $\psi : A \to C$, et tout morphisme $g : \mathcal{M} \to C$ dont la source est une algèbre minimale, il existe $h : \mathcal{M} \to A$ telle que $\psi \circ h$ et $g$ soient homotopes.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\psi"] \\ \mathcal{M} \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Puisqu'une algèbre minimale s'obtient par une suite d'extensions principales, il suffit de montrer que pour tout quasi-isomorphisme $\psi : A \to C$, toute extension principale $B \xrightarrow{\iota} B \otimes_\tau L_n(V)$ et tout couple $(f,g)$ de morphismes $f : B \to A$ et $g : B \otimes_\tau L_n(V) \to C$ tels que $\psi \circ f$ et $g \circ \iota$ soient homotopes

$$\begin{tikzcd} C & & B \otimes_\tau L_n(V) \arrow[ll, "g"'] \arrow[dll, dashed, "h"'] \\ A \arrow[u, "\psi"] & & B \arrow[ll, "f"] \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

on peut étendre $f$ en un morphisme $h : B \otimes_\tau L_n(V) \to A$ $(h \circ \iota = f)$ tel que $\psi \circ h$ et $g$ soient homotopes.

Tout d'abord, on va montrer qu'on peut se ramener au cas où $\psi \circ f = g \circ \iota$, grâce au lemme suivant (qui correspond algébriquement à la propriété de "relèvement des homotopies" pour une fibration principale) :

*Lemme II.8.*-

Soit $F : B \to C \otimes k(t,dt)$ une homotopie de $\rho_0 \circ F = g \circ \iota$ sur $\rho_1 \circ F = \psi \circ f$.

Il existe alors une homotopie $H : B \otimes_\tau L_n(V) \longrightarrow C \otimes k(t,dt)$, prolongeant $F$, de $\rho_0 \circ H = g$ sur une flèche $\rho_1 \circ H = g'$ telle que $g' \circ \iota = \psi \circ f$.

$$\begin{tikzcd} C & & B \otimes_\tau L_n(V) \arrow[ll, "g"'] \arrow[dll, dashed, "H"'] \\ C \otimes k(t,dt) \arrow[u, "\rho_0"] & & B \arrow[ll, "F"] \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Soit $K = \operatorname{Ker} \rho_0$ ; puisque $\rho_0$ est un quasi-isomorphisme surjectif, $H^i(K) = 0$ pour $i \geq 0$. Soit $\sigma : Z^{n+1}(K) \rightarrowtail K^n$ une section de $d : K^n \twoheadrightarrow Z^{n+1}(K)$.

Il est facile de vérifier que, pour tout $v \in V$, $F\tau(v) - (g \circ \iota \circ \tau(v)) \otimes 1$ est un $n+1$-cocycle de $K$.

Soit alors $H$ l'extension de $F$ définie par :

$$H(1 \otimes v) = (g(1 \otimes v)) \otimes 1 + \sigma\left[F\tau(v) - (g \circ \iota \circ \tau(v)) \otimes 1\right] :$$

puisque $\sigma$ prend ses valeurs dans $K$, $\rho_o \circ H = g$ ; et le terme correctif $\sigma\left[F\,\tau(v) - (g \circ \iota \circ \tau(v)) \otimes 1\right]$ est précisément ajouté pour que $d\,H(1 \otimes v) = F\,\tau(v)$, c'est-à-dire pour que $H$ commute aux différentielles. Prenant pour $g'$ le morphisme $\rho_1 \circ H$, ceci achève la démonstration du lemme.

Supposons donc désormais que $\psi \circ f = g \circ \iota$. Observons tout d'abord que $f \circ \tau$ prend ses valeurs dans les cobords de $A$ : en effet, pour tout $v \in V$, $\tau(v) \in Z^{n+1}(B)$, donc $f \circ \tau(v) \in Z^{n+1}(A)$, mais

$$\begin{tikzcd} C & & B \otimes_\tau L_n(V) \arrow[ll, "g"'] \arrow[lldd, dashed, "h_\gamma"'] \\ \\ A \arrow[uu, "\psi"] & & B \arrow[ll, "f"] \arrow[uu, hook, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \tau(v) &= g \circ \iota \circ \tau(v) \\ &= g\, d_\tau(1 \otimes v) \\ &= dg(1 \otimes v) \end{aligned}$$

est un cobord de $C$ ; comme $\psi$ est un quasi-isomorphisme, $f \circ \tau(v)$ ne peut qu'être un cobord de $A$. Soit donc $\gamma$ une section de $A^n \underset{\gamma}{\overset{d}{\rightleftarrows}} d(A^n) \subset Z^{n+1}(A)$ : on définit une extension $h_\gamma : B \otimes_\tau L_n(V) \to A$ de $f$, en posant $h_\gamma(1 \otimes v) = \gamma f\,\tau(v)$ ; puisque $d\,h_\gamma(1 \otimes v) = f\,\tau(v)$, $h_\gamma$ commute aux différentielles. Le problème va consister à modifier $h_\gamma$ en un morphisme $h_1$, de telle façon que $\psi \circ h_1$ et $g$ soient homotopes.

$$\begin{tikzcd} C \times C & & B \otimes_\tau L_n(V) \arrow[ll, "G_\gamma"'] \arrow[lldd, dashed, "H_\gamma"'] \\ \\ C \otimes k(t,dt) \arrow[uu, "\rho=(\rho_o{,}\rho_1)"] & & B \arrow[ll, "\tilde{g}"] \arrow[uu, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Soient donc $\tilde{g} : B \to C \otimes k(t,dt)$ l'application

$$\tilde{g}(b) = (g \circ \iota)(b) \otimes 1 = (\psi \circ f)(b) \otimes 1$$

et $G_\gamma : B \otimes_\tau L_n(V) \to C \times C$ l'application $G_\gamma = (g, \psi \circ h_\gamma)$. Soit $H_\gamma : B \otimes L_n(V) \to C \otimes k(t,dt)$ l'unique homomorphisme d'$AG_{(c)}$ prolongeant $\tilde{g}$ défini par

$$H_\gamma(1 \otimes v) = (1-t)\ g(1 \otimes v) + t\ \psi\ .\ h_\gamma(1 \otimes v)\ ;$$

posant $\rho = (\rho_o,\rho_1)$, il est bien clair que $\rho \circ H_\gamma = G_\gamma$. Mais, en général, $H_\gamma$ ne commute pas aux différentielles : l'expression $\delta(v) = d\ H_\gamma(1 \otimes v) - \tilde{g}(\tau(v))$ n'a aucune raison d'être nulle :

$$\delta(v) = dt_\Lambda(\psi\ h_\gamma - g)\ (1 \otimes v)\ .$$

Toutefois $(\psi\ h_\gamma - g)\ (1 \otimes v)$ est un cocycle de C. Puisque $\psi$ est un quasi-isomorphisme, il existe une application linéaire $\Psi : V \to Z^n(A)$ telle que pour tout $v \in V$, $\psi \circ \Psi(v)$ et $(\psi\ h_\gamma - g)(1 \otimes v)$ soient cohomologues. Soit donc $\eta : V \to C^{n-1}$ une application linéaire telle que $(\psi\ h_\gamma - g)(1 \otimes v) - (\psi\ .\ \Psi)(v) = d\eta(v)$. Soit $h_1$ l'unique extension de $f$ à $B \underset{\tau}{\otimes} L_n(V)$ définie par $h_1(1 \otimes v) = h_\gamma(1 \otimes v) - \Psi(v)$ [puisque $d\Psi = 0$, $dh_1(1 \otimes v) = dh_\gamma(1 \otimes v) = f\tau(v)$, et $h_1$ commute aux différentielles]. Définissons alors l'homotopie $H_1 : B \underset{\tau}{\otimes} L_n(V) \longrightarrow C \otimes k(t,dt)$ comme l'unique homomorphisme d'$ADG_c$ étendant $\tilde{g}$, et vérifiant :

$$H_1(1 \otimes v) = (1-t)\ g(1 \otimes v) + t\ \psi\ h_1(1 \otimes v) + dt_\Lambda \eta(v)\ :$$

on a évidemment $\rho_o \circ H_1 = g$ et $\rho_1 \circ H_1 = \psi \circ h_1$. [Le fait que $H_1$ commute aux différentielle se vérifie aisément].

4°) *Conclusion de la démonstration du théorème II.5.-*

La partie (i) résulte de 1°), (ii) de 2°), et (iii) de 3°). Considérons deux quasi-isomorphismes $\mathcal{M} \xrightarrow{\rho} A$ et $\mathcal{M}' \xrightarrow{\rho'} A'$ : puisque $\mathcal{M}$ est minimale et que $\rho'$ est un quasi-isomorphisme, il existe (d'après 3°) un morphisme $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ tel que $\rho' \circ \psi$ et $\rho$ soient homotopes ; puisque $\rho$ et $\rho'$ sont des quasi-isomorphismes, il en est de même de $\psi$ : puisque $\mathcal{M}'$ est minimale, $\psi$ est un isomorphisme d'après 2°, on en déduit (ii).

# CHAPITRE III - FORMES DIFFÉRENTIELLES SIMPLICIALES

Pour relier la topologie du chapitre I et l'algèbre du chapitre II (les fibrations principales et les extensions principales, les décompositions de Postnikov et les algèbres minimales,...), nous aurons besoin d'une "bonne" théorie des cochaînes commutatives permettant d'associer fonctoriellement à tout espace X une $\mathbb{Q}$-ADG$_{(c)}$ $A_{\mathbb{Q}}(X)$ dont la cohomologie soit naturellement isomorphe à $H^*(X,\mathbb{Q})$. On pourra alors, en particulier, associer à tout espace topologique X le modèle minimal $\mathcal{M}_X$ de $A_{\mathbb{Q}}(X)$, défini à isomorphisme près.

Puisque la cohomologie singulière de X n'est autre que la cohomologie de l'ensemble simplicial $S_*(X)$ des simplexes singuliers de X, il suffira évidemment de définir $A_{\mathbb{Q}}(.)$ sur les ensembles simpliciaux, pour obtenir un foncteur sur $\mathcal{T}$ par composition avec $S_*(.)$. Par abus de notation, on conviendra de noter encore $A_{\mathbb{Q}}(.) : \mathcal{T} \to \mathbb{Q}$-ADG$_{(c)}$ ce foncteur composé.

## 1) Le problème des cochaînes commutatives.

Soit donc $\mathcal{S}$ la catégorie des ensembles simpliciaux, k un corps commutatif de caractéristique 0, et k-ADG la catégorie des k-algèbres différentielles graduées (non nécessairement commutatives).

On appelle <u>théorie de</u> k-<u>cochaînes</u> la donnée d'un foncteur contravariant

$$(.) : \mathcal{S} \to \text{k-ADG}$$

vérifiant les axiomes suivants :

(i) Pour tout ensemble simplicial K, A(K) possède un <u>élément unité</u>, et toute application simpliciale $K \to K'$ induit un morphisme $A(K') \to A(K)$ respectant les éléments unités.

(ii) Pour tout sous-ensemble simplicial L de K, l'inclusion simpliciale $\iota : L \to K$ induit un homomorphisme $A(K) \xrightarrow{A(\iota)} A(L)$ <u>surjectif</u>.

[On notera alors $A(K,L)$ la k-ADG, sans élément unité, égale au noyau de $A(\iota)$].

(iii) Pour tout sous-ensemble simplicial $L$ de $K$, la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte

$$0 \to A(K,L) \to A(K) \to A(L) \to 0$$

est naturellement isomorphe à la suite exacte longue de cohomologie simpliciale :

$$\dots \longrightarrow H^p(K,L;k) \longrightarrow H^p(K;k) \longrightarrow H^p(L;k) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(K,L;k) \longrightarrow \dots$$

*Remarque*.- L'axiome (ii) permet d'étendre le foncteur $A$ à la catégorie $\mathcal{S}^2$ des paires simpliciales $(K,L)$ [$\mathcal{S}$ s'identifiant à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}^2$ dont les objets sont les paires $(K,\emptyset)$].

D'une théorie de k-cochaînes, au sens précédent, on dira

- qu'elle est une solution au problème des k-cochaînes commutatives, si $A$ prend ses valeurs dans la sous-catégorie $k\text{-ADG}_{(c)}$ des k-ADG commutatives,
- qu'elle vérifie l'axiome de dégénérescence si, pour tout ensemble simplicial $K$ de dimension $\leq n$ (i.e. dont tous les simplexes sont dégénérés en dimension $> n$), on a $A^p(K) = 0$ pour $p > n$.
- qu'elle vérifie l'axiome des limites inductives si elle transforme toute limite inductive en limite projective.

*Exemple*.- Le foncteur $C^*(.,k)$ (cochaînes simpliciales à coefficients dans k) est une théorie de k-cochaînes, mais n'est pas une solution au problème des cochaînes commutatives, car la multiplication d'Alexander-Whitney n'est pas commutative.

2) *Construction de solutions au problème des cochaînes commutatives*.

Le principe de la construction, dû à Thom [43] et Whitney [48] pour $k = \mathbb{R}$, et adapté par Sullivan pour $k = \mathbb{Q}$ (donc pour tout corps de caractéristique 0), est de généraliser la situation d'un polyèdre dont les faces sont des simplexes affines d'un espace euclidien : sur un tel polyèdre, il est "naturel" d'appeler p-forme différentielle $\omega$ une collection $(\omega_\sigma)_\sigma$ de p-formes $\omega_\sigma$ sur chaque face

$\sigma$, se recollant convenablement sur les intersections ($\omega_\sigma$ et $\omega_\tau$ coïncident sur $\sigma \cap \tau$) ; on définit alors un produit (commutatif au sens gradué) et une différentielle, en posant :

$$(\omega \wedge \omega')_\sigma = \omega_\sigma \wedge \omega'_\sigma \quad \text{et} \quad (d\omega)_\sigma = d_{DR}(\omega_\sigma).$$

Notons $\Delta_n$ le n-simplexe euclidien $(\sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geqslant 0)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\Delta_n \underset{\partial_i}{\overset{\sigma_i}{\rightleftarrows}} \Delta_{n+1}$ les opérateurs habituels de (co)-face et de (co)-dégénérescence

$\partial_i(t_o,\dots,t_n) = (t_o,\dots,t_{i-1},0,t_i,\dots,t_n)$, pour $0 \leqslant i \leqslant n+1$,

$\sigma_i(t_o,\dots,t_{n+1}) = (t_o,\dots,t_{i-1},t_i + t_{i+1},t_{i+2},\dots,t_{n+1})$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$.

Soit $\underline{\Delta}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles $\Delta_n$ et les morphismes les applications obtenues par composition de $\partial_i$ et de $\sigma_i$. Rappelons alors qu'on appelle <u>objet simplicial</u> dans une catégorie $C$ la donnée d'un foncteur contravariant $K : \underline{\Delta} \to C$ (ou - ce qui revient au même - la donnée d'une famille $(K_n,d_i,s_i)$ d'objets de $C$ et de morphismes $K_{n-1} \xleftarrow{d_i} K_n \xrightarrow{s_i} K_{n+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ vérifiant les habituelles formules de commutation), et <u>morphisme simplicial</u> dans $C$ la donnée d'une transformation naturelle entre deux tels foncteurs.

Notons $A_{DR}(\Delta_n)$ la $\mathbb{R}$-ADG$_{(c)}$ des formes différentielles sur $\Delta_n$ (i.e. des restrictions à $\Delta_n$ de formes différentielles définies sur un voisinage de $\Delta_n$ dans l'hyperplan $t_o + t_1 + \dots + t_n = 1$ de $\mathbb{R}^{n+1}$). Les applications (différentiables) $\sigma_i$ et $\partial_i$ induisent des opérateurs $A_{DR}(\Delta_{n-1}) \xleftarrow{d_i} A_{DR}(\Delta_n) \xrightarrow{s_i} A_{DR}(\Delta_{n+1})$ de sorte que la famille $(A_{DR}(\Delta_n),d_i,s_i)$ est une $\mathbb{R}$-ADG$_{(c)}$ simpliciale (i.e. un objet simplicial de $\mathbb{R}$-ADG$_{(c)}$), noté $A_{DR}$ dans la suite.

De façon générale, soit $A$ une <u>k-ADG simpliciale</u>, avec élément unité, non nécessairement commutative :

(pour tout $n \geqslant 0$, $A_n = \sum_{p \geqslant 0} A_n^p$, est une k-ADG avec élément unité, et les morphismes $A_n \underset{d_i}{\overset{s_i}{\rightleftarrows}} A_{n+1}$ de face et de dégénérescence sont des morphismes de k-ADG respectant les éléments unité ; pour tout $p \geqslant 0$, $A^p$ est un k-espace vectoriel simplicial).

Pour tout ensemble simplicial $K$ et tout entier $p \geqslant 0$, on notera

$A^p(K) = \mathrm{Hom}_S(K,A^p)$ l'espace vectoriel des applications simpliciales $\sigma \to \omega_\sigma$ de $K$ dans $A^p$ ; sur $A(K) = \bigoplus_{p\geq 0} A^p(K)$, on définit une structure de k-ADG en posant $(\omega.\omega')_\sigma = \omega_\sigma.\omega'_\sigma$ et $(d\omega)_\sigma = d(\omega_\sigma)$. On définit ainsi un foncteur contravariant $A(.) : S \to$ k.ADG associé à $A$.

*Remarque*.- Soit $\omega : K \to A^p$ un élément de $A^p(K)$. Dire que $\omega$ commute aux opérateurs faces sert à exprimer, dans ce contexte plus général, la condition de recollement $\omega_\sigma|_{\sigma\cap\tau} = \omega_\tau|_{\sigma\cap\tau}$ sur les polyèdres. Dire que $\omega$ commute aux opérateurs de dégénérescence sert à éviter qu'il y ait "trop" d'éléments dans $A^*(K)$ : si $A_n^p = 0$ pour $p > n$ (ce qui est le cas, par exemple, pour $A_{DR}$), et si $A(.)$ est une théorie, elle vérifiera l'axiome de dégénérescence.

Pour pouvoir espérer que $A(.)$ puisse être une théorie de k-cochaînes, il est évidemment nécessaire qu'elle satisfasse aux 2 axiomes suivants (exibés par R. Swan [41]) :

(a) Pour tout $n \geq 0$, la k-ADG, $A_n = \bigoplus_{p\geq 0} A_n^p$ est acyclique (i.e. $H^o(A_n) = k$, $H^p(A_n) = 0$ pour $p \geq 1$). Plus précisément, la suite

$$0 \to k \to A^o \to A^1 \to A^2 \to \dots$$

est exacte (dans la catégorie abélienne des k-espaces vectoriels simpliciaux, $k$ étant identifié à l'espace vectoriel simplicial simplicialement trivial : $(k)_n = k$ pour tout $n \geq 0$, tous les opérateurs de face et de dégénérescence étant l'identité $1_k : k \xrightarrow{\cong} k$).

(b) Pour tout $p \geq 0$, le k-espace vectoriel simplicial $A^p = (A_n^p)_{n\geq 0}$ est contractile [i.e. la suite $\to A_n^p \xrightarrow{\delta} A_{n-1}^p \to \dots \to A_1^p \xrightarrow{\delta} A_o^p \to 0$ est exacte , où $\delta$ désigne la différentielle simpliciale $\sum_i (-1)^i d_i$ (notant $A_{n,o}^p$ le sous-espace des éléments $u$ de $A_n^p$ tels que, pour tout $i \geq 1$, $d_i u = 0$, il revient encore au même de dire que la suite

$$\dots \to A_{n,o}^p \xrightarrow{d_o} A_{n-1,o}^p \xrightarrow{d_o} \dots \to A_{o,o}^p \to 0 \text{ est exacte}].$$

Si l'on veut en outre que $A(.)$ vérifie l'axiome de dégénérescence, il faut supposer vérifié en plus l'axiome :

(c) $A^p_n = 0$ si $p > n$.

Notons en effet $\Delta[n]$ l'ensemble simplicial engendré par un seul simplexe en dimension $n$, $\partial\Delta[n]$ son bord, et $\iota : \partial\Delta[n] \longrightarrow \Delta[n]$ l'inclusion simpliciale naturelle. La condition (a) exprime alors que l'algèbre $A(\Delta[n])$ (qui est égale à $A_n$) a même cohomologie que $\Delta[n]$, ce qui résulte de l'axiome (iii). La condition (b), elle, exprime que $A^p(\iota) : A^p(\Delta[n]) \to A^p(\partial\Delta[n])$ est surjectif, ce qui résulte de l'axiome (ii). La condition (c) est évidente si $A(.)$ vérifie l'axiome de dégénérescence. Réciproquement, on a le :

*Théorème III.1* (ou "*théorème de de Rham simplicial*").-

(i) Si la k-ADG simpliciale avec éléments unité $A$ vérifie les axiomes (a) et (b) de Swan, le foncteur $A(.)$ est une théorie de k-cochaînes vérifiant l'axiome des limites inductives.

(ii) Si, en outre, $A$ est une k-ADG$_{(c)}$ simpliciale, $A(.)$ est une solution au problème des cochaînes commutatives. Et si $A$ vérifie l'axiome (c), $A(.)$ satisfait à l'axiome de dégénérescence.

La 2ème partie du théorème est évidente. Nous allons nous contenter de résumer la démonstration de la 1ère partie, renvoyant à H. Cartan [8] ou C. Watkiss [46] pour une rédaction détaillée.

Notons $L(p)$ l'espace vectoriel simplicial $\mathrm{Ker}(A^p \xrightarrow{d} A^{p+1})$. La suite d'espaces vectoriels simpliciaux

$$0 \longrightarrow L(p-1) \longrightarrow A^{p-1} \xrightarrow{d} L(p) \longrightarrow 0$$

est exacte, d'après l'axiome (a). Comme toute suite exacte courte de groupes abéliens simpliciaux, c'est une fibration de Kan, et $A^{p-1}$ est contractile, tandis que $k \cong L(0)$, d'après l'axiome (b). On en déduit, par récurrence sur $p$, que $L(p)$ a le type d'homotopie d'un espace d'Eilenberg Mac Lane $K(k,p)$, de sorte que la fibration de Kan ci-dessus s'interprète comme la fibration principale universelle

$$K(k,p-1) \longrightarrow PK(k,p) \longrightarrow K(k,p).$$

Dire qu'un cocycle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K,L(p))$ de $A^{p}(K)$ est un cobord, signifie alors que $f$ se relève à $A^{p-1}$ qui est contractile, donc que $f$ est homotope à 0. La cohomologie $H^p(A(K))$ s'identifie donc à l'espace $[K,L(p)]$ des classes d'homotopie de $K$ dans $L(p)$. Puisque $L(p)$ est un classifiant pour $H^p(.,k)$, $H^p(A(K))$ est naturellement isomorphe à $H^p(K,k)$, en tant que groupe abélien.

Le cas relatif se traite de façon analogue, sachant que $H^p(K,L;k)$ s'identifie cette fois à l'ensemble $[\iota,d_p]$ des classes d'homotopie de couples $(f,g)$ tels que

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\iota"'] & A^{p-1} \arrow[d, "d_p"] \\ K \arrow[r, "f"] & L(p) \end{tikzcd}$$

$d_p.g = f\ .\ \iota$ (on dit que $(f_o,g_o)$ et $(f_1,g_1)$ sont homotopes s'il existe $F : K \times I \to L(p)$ et $G : L \times I \to A^{p-1}$ tels que $d_p\ .\ G = F\ .\ (\iota \times 1_I)$, avec $(f_o,g_o) = (F,G)|_{K\times\{0\},L\times\{0\}}$ et $(f_1,g_1) = (F,G)|_{K\times\{1\},L\times\{1\}}$ (cf. par exemple, Eckmann [14], à l'adaptation près au contexte simplicial).

Que $A(\iota) : A(K) \to A(L)$ soit surjectif, résulte de l'axiome (b) qui permet de démontrer par récurrence sur $n$ que $A(sk_nK) \to A(sk_nL)$ est surjectif, $sk_n$ désignant le n-squelette (cf. Watkiss ([46]) pour plus de détails).

Que les suites exactes longues de l'axiome (iii) soient naturellement isomorphes, résulte de l'interprétation homotopique de cette suite exacte (cf. [14]) :

$$\ldots \longrightarrow [L,L(p-1)] \xrightarrow{\partial} [\iota,d_p] \xrightarrow{\pi^*} [K,L(p)] \xrightarrow{\iota^*} [L,L(p)] \longrightarrow \ldots \quad .$$

$$\begin{tikzcd} & L(p-1) \arrow[d] \\ L \arrow[ur, "g"] \arrow[r, dashed, "\bar{g}"] \arrow[d, "\iota"'] & A^{p-1} \arrow[d, "d_p"] \\ K \arrow[r, dashed, "0"] & L(p) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\iota"'] & A^{p-1} \arrow[d, "d_p"] \\ K \arrow[r, "f"] & L(p) \end{tikzcd}$$

On a en effet les formules

$$\partial[g] = [(0,\bar{g})]$$

(où $\bar{g}$ désigne la composée $L \xrightarrow{g} L(p-1) \longrightarrow A^{p-1}$), ainsi que $\pi^*([(f,g)]) = [f]$ et $\iota^*([f]) = [f \circ \iota]$.

Il reste à démontrer

1°) que l'isomorphisme de groupes abéliens gradués

$$(H.A)(.) \overset{\sim}{=} H(.,k)$$

défini ci-dessus est en fait un isomorphisme de k-algèbres : nous le verrons au § 3 (corollaire III.6).

2°) que $A(.)$ vérifie l'axiome des limites inductives : ceci résulte du fait, qu'en tant que foncteur covariant de $\mathcal{S}^{opp}$ dans k-ADG, il admet un adjoint à gauche $<.>_A$ : k-ADG $\to \mathcal{S}^{opp}$ défini par $<.>_A = \mathrm{Hom}_{ADG}(.,A)$ (pour toute ADG $\Lambda$, $(<\Lambda>_A)_n = \mathrm{Hom}_{ADG}(\Lambda, A_n)$ les opérateurs de face et dégénérescence étant induits par ceux de $A$) ; la formule d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{ADG}(\Lambda, A(K)) \overset{\sim}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K, <\Lambda>_A)$$

se vérifie sans difficulté.

*Exemples*.-

1°) $A_{DR}$, définie plus haut, est une $\mathbb{R}$-ADG$_{(c)}$ simpliciale vérifiant les axiomes (a), (b) et (c) :

- Le lemme de Poincaré (appliqué à n'importe quel voisinage ouvert convexe de $\Delta_n$ dans l'hyperplan $t_o + t_1 + \dots + t_n = 1$ de $\mathbb{R}^{n+1}$) permet de démontrer que $A_{DR}(\Delta_n) = (A_{DR})_n$ est acyclique, d'où (a).
- Soit $\omega(t_1 \dots t_n)$ une p-forme sur la $0^{\underline{\text{ième}}}$ face $t_o = 0$ de $\Delta_n$, nulle sur le bord de cette $0^{\underline{\text{ième}}}$ face : on définit alors une p-forme $\tilde{\omega}(t_o \dots t_n)$ sur $\Delta_n$ en posant $\tilde{\omega}(t_o \dots t_n) = \varphi(t_o)\omega(\frac{t_1}{1-t_o}, \frac{t_2}{1-t_o}, \dots, \frac{t_n}{1-t_o})$, $\varphi$ désignant une fonction $C^\infty$ à valeurs réelles, définie au voisinage de $[0,1]$, égale à 1 en 0, et identiquement nulle au voisinage de 1 ; il est clair que la restriction de $\tilde{\omega}$ aux faces $t_i = 0$ est nulle si $i \geq 1$ et est égale à $\omega$ pour $i = 0$. Ceci prouve que $A^p_{DR}$ est contractile, d'où (b).
- La vérification de (c) est immédiate.

[Dans ce cas où $X$ est une variété, on prendra garde à distinguer l'algèbre $\Omega_{DR}(X)$ des formes différentielles sur $X$, et l'algèbre $A_{DR}(X)$ des formes différentielles simpliciales au sens précédent sur l'espace topologique sous-jacent].

2°) Soit $A_{\mathbb{Q}}$ la $\mathbb{Q}$-ADG$_{(c)}$ simpliciale obtenue en prenant pour $(A_{\mathbb{Q}})_n$ le sous-espace de $(A_{DR})_n = A_{DR}(\Delta_n)$ constitué par les formes différentielles $\sum \omega_{i_1 \ldots i_p} dt^{i_1} \wedge \ldots \wedge dt^{i_p}$ dont les coefficients $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ par rapport aux coordonnées barycentriques $(t_o, t_1, \ldots, t_n)$ sont des polynomes à coefficients rationnels [puisque la relation $t_o + t_1 + \ldots + t_n = 1$ est un polynome à coefficients rationnels, cette condition ne dépend pas du choix de celle des coordonnées barycentriques qu'on a exprimée en fonction des autres !] ; cette $\mathbb{Q}$-ADG$_{(c)}$ simpliciale vérifie aussi (a), (b) et (c) :

- l'opérateur classique d'homotopie $h : A^p_{DR}(\Delta_n) \to A^{p-1}_{DR}(\Delta_n)$ tel que $1_{A^p_n} = dh + hd$ vérifie : $h(A^p_{\mathbb{Q}})_n \subset (A_{\mathbb{Q}})^{p-1}_n$ ; $(A_{\mathbb{Q}})_n$ est donc acyclique, d'où (a).
- la vérification de (b) est analogue à celle faite pour $A_{DR}$, à condition de remplacer la fonction $(\psi(t_o)$, de classe $C^\infty$, par le polynome $(1-t_o)^N$, où $N$ désigne un entier suffisamment grand pour que $1-t_o$ ne figure pas dans les dénominateurs des coefficients de $\omega(\frac{t_1}{1-t_o}, \ldots, \frac{t_n}{1-t_o})$.
- (c) est évident.

3°) Plus généralement, définissons $A_k = A_{\mathbb{Q}} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} k$ (i.e. $(A_k)_n = (A_{\mathbb{Q}})_n \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} k)$ pour tout corps $k$ commutatif de caractéristique 0 : c'est une $k$-ADG$_{(c)}$ qui vérifie encore (a), (b) et (c), puisqu'il en est ainsi de $A_{\mathbb{Q}}$.

*Corollaire III.2.* - Pour tout corps $k$ commutatif de caractéristique 0, $A_k(.)$ est une solution au problème des $k$-cochaînes commutatives, vérifiant l'axiome de dégénérescence, et l'axiome des limites inductives.

*Remarque* .-

De même que le théorème classique de de Rham est un cas particulier d'un résultat de théorie des faisceaux, le théorème de de Rham simplicial se généralise aussi de la façon suivante : Notons $\mathcal{A}b$ (resp. $\mathcal{SA}b$) la catégorie abélienne des groupes abéliens (resp. des groupes abéliens simpliciaux). Pour tout ensemble simplicial $K$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K,.) : \mathcal{SA}b \to \mathcal{A}b$ est exact à gauche. La catégorie $\mathcal{SA}b$ possédant "suffisamment" d'objets injectifs (i.e. tout groupe abélien simplicial se plongeant dans un objet injectif de $\mathcal{SA}b$), on a une "bonne" théorie des foncteurs dérivés à droite : on définit la cohomologie $H^p(K,G)$ à valeurs dans un groupe abélien simplicial $G$ comme étant égale à la "valeur" en $G$ du $p^{\text{ième}}$ foncteur dérivé à droite

$$R^p\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K,.)\quad .$$

Les groupes abéliens simpliciaux contractiles jouent alors le même rôle que les faisceaux flasques :

- tout groupe abélien simplicial se plonge dans un groupe abélien simplicial contractile,
- tout facteur direct d'un groupe abélien simplicial contractile est contractile,
- si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte de groupes abéliens simpliciaux, $C$ est contractile pourvu que $A$ et $B$ le soient, et l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K,C)$ est alors surjective.

Un argument standard d'algèbre homologique (R. Godement [16], A. Grothendieck [19]) permet alors d'affirmer :

(i) que tout groupe abélien simplicial contractile $C$ vérifie $H^p(K,C) = 0$ pour $p \geq 1$,

(ii) que tout groupe abélien simplicial $G$ admet une résolution contractile

$$0 \to G \to C_0 \to C_1 \to C_2 \to \dots .$$

(suite exacte dans $\mathcal{S}\mathcal{A}b$, avec $C_p$ contractile pour tout $p \geqslant 0$),

(iii) que, pour une telle résolution contractile de $G$, $H^p(K,G)$ est isomorphe au $p^{\underline{\text{ième}}}$ groupe de cohomologie du complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K,C_o) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K,C_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K,C_2) \to \dots .$$

[Dire que la suite $0 \to G \to C_o \to C_1 \to C_2 \to \dots$ est exacte généralise l'axiome (a). Dire que $C_p$ est contractile généralise (b)].

Bien entendu, si le groupe abélien simplicial $G$ est simplicialement trivial $H^*(K,G)$ est la cohomologie simpliciale ordinaire comme il résulte du théorème III.1.

3) *Transformations*.

Pour l'étude des variétés, il nous sera utile de savoir que la transformation naturelle $A_{\mathbb{R}}(.) \to A_{D\mathbb{R}}(.)$, définie par l'inclusion de $\mathbb{R}$-ADG$_{(c)}$ simpliciales, $A_{\mathbb{R}} \hookrightarrow A_{DR}$ induit un isomorphisme en cohomologie.

Tout morphisme $\lambda : A \to B$ de k-ADG simpliciales induit une transformation naturelle $\lambda(.) : A(.) \to B(.)$.

*Théorème III.3.* - Si $A$ et $B$ vérifient chacune les axiomes (a) et (b) et si, pour tout $n \geqslant 0$, $\lambda_n : A_n \to B_n$ est un homomorphisme respectant les unités (ce qui implique que $\lambda(\Delta[n])$ induise un isomorphisme $k \xrightarrow{\cong} k$ en cohomologie de dimension 0), $\lambda(.)$ induit alors un isomorphisme d'algèbres en cohomologie $(H.A)(.) \to (H.B)(.)$.

Notons, en effet, $L(p)$ et $M(p)$ les espaces vectoriels simpliciaux noyaux respectifs de $A^p \xrightarrow{d} A^{p+1}$ et $B^p \xrightarrow{d} B^{p+1}$. Notons $\overline{\lambda}^p : L(p) \to M(p)$ le morphisme d'espaces vectoriels simpliciaux induit par $\lambda$ : le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L(p) & \longrightarrow & A^p & \longrightarrow & L(p+1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\lambda}^p} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^p} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\lambda}^{p+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & M(p) & \longrightarrow & B^p & \longrightarrow & M(p+1) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

commute. Puisque, par hypothèse, $\bar{\lambda}^o$ est un isomorphisme, que $A^o$ et $B^o$ sont contractiles, $\bar{\lambda}^o$ et $\lambda^o$ sont des équivalences d'homotopie, donc aussi $\bar{\lambda}^1$ d'après le lemme des 5. Puisque $A^p$ et $B^p$ sont contractiles, $\lambda^p$ est une équivalence d'homotopie ; par récurrence sur $p$, on en déduit que tous les $\bar{\lambda}^p$ sont des équivalences d'homotopie. Or $\lambda^p(.) : (H^p.A)(.) \to (H^p.B)$ s'identifie à la transformation $[.,L(p)] \to [.,M(p)]$ induite par $\bar{\lambda}^p : L(p) \to M(p)$. Le théorème en résulte.

Soient $A$ et $B$ deux k-ADG simpliciales avec élément unité. On définit alors une 3ème K-ADG avec élément unité, notée $A \otimes B$, en prenant pour $(A \otimes B)_n$ le produit tensoriel gradué $A_n \underset{k}{\otimes} B_n$ et pour opérateurs $d_i^{A\otimes B}$ et $s_i^{A\otimes B}$ les applications $d_i^{A\otimes B} = d_i^A \otimes d_i^B$ et $s_i^{A\otimes B} = s_i^A \otimes s_i^B$. On notera $\iota_{A\otimes B} : A \to A \otimes B$ et $j_{A\otimes B} : B \to A \otimes B$ les inclusions simpliciales canoniques.

*Lemme III.4.*- Si $A$ et $B$ vérifient toutes deux les axiomes (a) et (b), $A \otimes B$ les vérifie aussi.

. Si $A_n$ et $B_n$ sont acycliques, $A_n \underset{k}{\otimes} B_n$ l'est aussi, d'où l'axiome (a).

. Soit $A_*$ le complexe

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\delta^A} A_n \xrightarrow{\delta^A} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

(où $\delta^A = \sum(-1)^i d_i^A$). Définissons, de façon analogue les complexes $B_*$ et $(A \otimes B)_*$ à partir des k-ADG simpliciales $B$ et $A \otimes B$. Le théorème d'Eilenberg-Zilber (cf. Godement [16]) affirme que $(A \otimes B)_*$ a même homologie que le complexe produit tensoriel $A_* \underset{k}{\otimes} B_*$ . En particulier, si $A_*$ et $B_*$ ont une homologie nulle, $(A \otimes B)_*$ aussi, d'où l'axiome (b).

*Corollaire* III.5.- Soit $K$ un ensemble simplicial.

Sous les hypothèses du lemme III.4, les algèbres de cohomologie de $A(K)$ et $B(K)$ sont naturellement isomorphes.

Il suffit d'appliquer le théorème à $A(K) \xrightarrow{\iota_{A\otimes B}(K)} (A \otimes B)(K) \xleftarrow{j_{A\otimes B}(K)} B(K)$

*Corollaire* III.6.- (fin de la démonstration du théorème de de Rham simplicial).

Si $A$ est une k-ADG simpliciale vérifiant les axiomes (a) et (b), l'isomorphisme $H(A(K)) \longrightarrow H(K,k)$ du théorème III.1 est en fait un isomorphisme de k-algèbres.

Appliquons en effet le corollaire III.5 au cas où l'un prend pour $B$ la k-ADG $C_k$ définie par $(C_k)_n = C^*(\Delta[n],k)$ (avec les opérateurs face et dégénérescence évidents), en observant que $C_k(.)$ est isomorphe à $C^*(.,k)$.

*Remarque*.-

Pour toute k-ADG simpliciale $A$ vérifiant (a) et (b), C. Watkiss introduit dans [46] une k-ADG simpliciale $\tilde{A}$, autre que $A \otimes C_k$, et 2 morphismes de k-ADG simpliciales respectant les unités

$$A \xrightarrow{\mu_A} \tilde{A} \xleftarrow{\nu_A} C_k$$

Il démontre que $\tilde{A}$ vérifie encore les axiomes (a) et (b) (donc que $\mu_A$ et $\nu_A$ induisent encore des isomorphismes en cohomologie. Bien que plus compliquée à construire que $A \otimes C_k$, la k-ADG simpliciale $\tilde{A}$ présente l'intérêt suivant. Pour tout ensemble simplicial $K$, notons

$$I : A^p_{DR}(K) \longrightarrow C^p(K,\mathbb{R})$$

l'intégration de de Rham qui, à toute p-forme simpliciale $\omega = (\omega_\sigma) \in \mathrm{Hom}_S(K,A^p_{DR})$, associe la p-cochaîne $I\omega : K_p \to \mathbb{R}$ définie par

$$(I\omega)\,(\sigma) = \int_{\Delta_p} \omega_\sigma \,.$$

D'après la formule de Stokes, $I\omega$ commute aux opérateurs $d$ et définit donc un homomorphisme d'espaces vectoriels gradués $H^*(A_{DR}(K) \longrightarrow H^*(K,\mathbb{R})$. Watkiss démontre alors que $\nu_{A_{DR}}(K) \,.\, I$ et $\mu_{A_{DR}}(K)$ coïncident en cohomologie. Cela prouve que $I$ <u>induit en cohomologie un isomorphisme d'algèbres</u>.

Le même résultat vaut aussi, bien entendu, en remplaçant $A_{DR}$ par $A_k$ et $\mathbb{R}$ par $k$ (on remarque, si $\omega \in A^p_{\mathbb{Q}}(K)$, que l'intégrale $\int_{\Delta_p} \omega_\sigma$ est un nombre rationnel).

C'est parfois cet énoncé, plutôt que celui du théorème III.1, que certains auteurs appellent "théorème de de Rham simplicial".

Nous avons construit, au corollaire III.2, une solution $A_k(.)$ au problème des k-cochaînes commutatives, vérifiant l'axiome de dégénérescence, et l'axiome des limites inductives. Bien que nous ne ferons pas un usage explicite de ce résultat dans la suite, il appartient à la philosophie générale de la théorie, de comprendre que le modèle minimal de la k-ADG$_{(c)}$ $A_k(K)$ associée à un ensemble simplicial $K$ ne dépend pas, en fait, du choix **de cette** solution. C'est ce qui va résulter du

<u>*Théorème*</u> *III.7.*- Soient $A(.)$ et $B(.)$ 2 solutions au problème des k-cochaînes commutatives, vérifiant l'axiome de dégénérescence, et l'axiome des limites inductives.
Il existe alors une c-équivalence naturelle entre $A$ et $B$ (i.e. : une suite $A_o = A, A_1,\dots,A_n = B$ de foncteurs $A_i : \mathcal{S}^{opp} \to$ k-ADG$_{(c)}$ et de transformations naturelles $\lambda_i : A_i \to A_{i+1}$ ou $\lambda_i : A_{i+1} \to A_i$ induisant un isomorphisme $(H.A_i)(.) \cong (H.A_{i+1})(.)$ en cohomologie).
En particulier, pour tout ensemble simplicial $K$, les modèles minimaux $\mathcal{M}_{A(K)}$ et $\mathcal{M}_{B(K)}$ sont isomorphes.

1°) Nous allons d'abord nous ramener au cas où $A(.)$ et $B(.)$ sont définies à partir d'une k-ADG$_{(c)}$ simpliciale par le procédé du théorème III.1.

Soit $A(.) : \mathcal{S} \to k\text{-ADG}_{(c)}$ un foncteur contrevariant. On lui associe naturellement une $k\text{-ADG}_{(c)}$ simpliciale $A_\Delta$, en restreignant $A(.)$ à la catégorie $\underline{\Delta}$, identifiée de façon naturelle, à une sous catégorie de $\mathcal{S}$ : $(A_\Delta)_n = A(\Delta[n])$, les morphismes de face et dégénérescence étant induits par $\Delta[n-1] \underset{\sigma_i}{\overset{\partial_i}{\rightleftarrows}} \Delta[n]$. On en déduit un autre foncteur contrevariant $A_\Delta(.) : \mathcal{S} \to k\text{-ADG}_{(c)}$ en posant $A_\Delta(.) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(.,A_\Delta)$, ainsi qu'une transformation naturelle $\gamma_A : A(.) \to A_\Delta(.)$ définie de la façon suivante : à tout élément $\omega \in A^p(K)$ on associe $\gamma_A(\omega) = \tilde{\omega} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K, A^p_\Delta)$ par la formule : $\tilde{\omega}(\tilde{\sigma}) = A(\tilde{\sigma})\ (\omega)$ [$\sigma \in K_n$ est interprété comme une application simpliciale $\tilde{\sigma} : \Delta[n] \to K$, qui induit

$$A(\tilde{\sigma}) : A^p(K) \to A^p(\Delta[n]) = (A^p_\Delta)_n\ ] \quad .$$

*Lemme III.8.-*

Si $A(.)$ est une solution au problème des $k$-cochaînes commutatives, vérifiant l'axiome de dégénérescence et l'axiome des limites inductives, $\gamma_A$ induit un isomorphisme $(H \circ A)(.) \xrightarrow{\cong} (H \circ A_\Delta)(.)$ en cohomologie.

Tout d'abord, si $A(.)$ est une solution au problème des $k$-cochaînes vérifiant l'axiome de dégénérescence, il en est nécessairement de même pour $A_\Delta(.)$, car $A_\Delta$ vérifie alors les axiomes (a), (b) et (c) du théorème III.1.

Soit alors $K$ un ensemble simplicial, et $\tilde{K}_n = sk_n K$ son $n$ squelette.

Pour tout entier $n \geq 1$, $\gamma_A$ induit un homomorphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A(\tilde{K}_n,\tilde{K}_{n-1}) & \longrightarrow & A(\tilde{K}_n) & \longrightarrow & A(\tilde{K}_{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\gamma}_n} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_n} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{n-1}} & & \\
0 & \longrightarrow & A_\Delta(\tilde{K}_n,\tilde{K}_{n-1}) & \longrightarrow & A_\Delta(\tilde{K}_n) & \longrightarrow & A_\Delta(\tilde{K}_{n-1}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

d'où un homomorphisme de suites exactes longues :

$$\begin{tikzcd}
H^{p-1}(A(\tilde{K}_{n-1})) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & H^p(A(\tilde{K}_n,\tilde{K}_{n-1})) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\gamma}_n"] & H^p(A(\tilde{K}_n)) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_n"] & H^p(A(\tilde{K}_{n-1})) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & H^{p+1}(A(\tilde{K}_n,\tilde{K}_{n-1})) \arrow[d, "\bar{\gamma}_n"] \\
H^{p-1}(A_\Delta(\tilde{K}_{n-1})) \arrow[r] & H^p(A_\Delta(\tilde{K}_n,\tilde{K}_{n-1})) \arrow[r] & H^p(A_\Delta(\tilde{K}_n)) \arrow[r] & H^p(A_\Delta(\tilde{K}_{n-1})) \arrow[r] & H^{p+1}(A_\Delta(\tilde{K}_n,\tilde{K}_{n-1}))
\end{tikzcd} .$$

Ces suites exactes longues appartiennent à des couples exacts définissant des suites spectrales convergeant respectivement vers $(H \circ A)(K)$ et $(H \circ A\ )(K)$ et admettant respectivement $(H^p \circ A)(\tilde{K}_n,\tilde{K}_{n-1})$ et $(H^p \circ A_\Delta)(\tilde{K}_n,\tilde{K}_{n-1})$ comme termes $E_1^{n,p-n}$, le morphisme de suites spectrales défini par $\gamma_A$ induisant $\bar{\gamma}_n$ au niveau des termes $E_1$. Il suffit donc de démontrer que $\bar{\gamma}_n$ est un isomorphisme pour tout entier $n \geqslant 1$, pour pouvoir en déduire que $\gamma_A(K) : (H \circ A)(K) \to (H \circ A_\Delta)(K)$ est un isomorphisme. Puisque $\gamma_A$ transforme les sommes en produits, il suffit de démontrer que

$$A(\Delta[n],\ \partial\Delta[n]) \longrightarrow A_\Delta(\Delta[n],\ \partial\Delta[n])$$

induit un isomorphisme en cohomologie, pour démontrer qu'il en est de même de $\bar{\gamma}_n$. D'après le lemme des 5, tout revient donc à démontrer que $\hat{\gamma}_{n-1} = \gamma_A(\partial\Delta[n])$ induit un isomorphisme en cohomologie.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A(\Delta[n],\ \partial\Delta[n]) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\gamma}_n"] & A(\Delta[n]) \arrow[r, "A(\iota)"] \arrow[d, equal] & A(\partial\Delta[n]) \arrow[r] \arrow[d, "\hat{\gamma}_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A\ (\Delta[n],\partial\Delta[n]) \arrow[r] & (A_\Delta)_n \arrow[r, "A_\Delta(\iota)"] & A_\Delta(\partial\Delta[n]) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

($\iota$ désignant l'inclusion simpliciale $\partial\Delta[n] \to \Delta[n]$). On sait déjà que les 2 algèbres $(H.A)(\partial\Delta[n])$ et $(H.A_\Delta)(\partial\Delta[n])$ sont toutes 2 isomorphes à $H(S^{n-1},k)$, puisque $A$ et $A_\Delta$ sont 2 théories de k-cochaînes.

Il reste donc à démontrer $\hat{\gamma}_{n-1}$ est surjectif en cohomologie de dimension $n-1$. Soit donc $[\omega]$ un élément non nul de $H^{n-1}(A_\Delta(\partial\Delta[n]))$, défini par une forme $\omega \in A_\Delta^{n-1}(\partial\Delta[n])$ . Puisque $A_\Delta(\iota)$ est surjectif

$\hat{\gamma}_{n-1}$ l'est aussi au niveau des formes : il existe donc $\omega_1 \in A^{n-1}(\partial\Delta[n])$ telle que $\hat{\gamma}_{n-1}(\omega_1) = \omega$. Mais puisque $A$ vérifie l'axiome de dégénérescence, $d\omega_1$ est nécessairement nulle, et définit par conséquent une classe de cohomologie $[\omega_1]$ dont l'image est $[\omega]$. Ceci achève la démonstration du lemme.

2°) Démonstration du théorème.

La suite de transformations naturelles

$$A(.) \xrightarrow{\gamma_A} A\,(.) \xrightarrow{i_{A\otimes B}(.)} (A_\Delta \otimes B_\Delta)(.) \xleftarrow{j_{A\otimes B}(.)} B_\Delta(.) \xleftarrow{\gamma_B} B(.)$$

réalise la c-équivalence naturelle cherchée.

4) *Foncteur* $F : (\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$.

On note ainsi le foncteur composé

$$(\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\mathrm{I}} [\mathbb{Q}\text{-ADG}_{(c)}] \xrightarrow{\mathrm{II}} [\mathcal{S}] \xrightarrow{|\cdot|} \mathcal{T}\,, \quad \text{où}$$

. I désigne l'inclusion naturelle de $(\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}}$ dans la catégorie $[\mathbb{Q}\text{-ADG}_{(c)}]$ dont les objets sont les $\mathbb{Q}\text{-ADG}_{(c)}$ et les flèches les classes d'homotopie de morphismes d'$\mathrm{ADG}_{(c)}$,

. II désigne le foncteur obtenu à partir de $<.>_A$ par passage aux classes d'homotopie ($[\mathcal{S}]$ désignant la catégorie homotopique simpliciale),

. et $|\cdot|$ désigne le foncteur réalisation géométrique de Milnor (sur les classes d'homotopie).

Nous verrons au chapitre IV que $F$ prend ses valeurs dans $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ et est une équivalence de catégories.

# CHAPITRE IV - TRANSGRESSION

Soit $A_{\mathbb{Q}}(.)$ la solution au problème des $\mathbb{Q}$-cochaînes commutatives, définie au chapitre III. Soit $\Pi$ un groupe abélien de rang fini, $W$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi,\mathbb{Q})$, et $X$ un espace topologique. Notons $\mathcal{E}(X,K(\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi,n))$ [resp. $\mathcal{E}(A_{\mathbb{Q}}(X),L_n(W))$] l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrations principales de base $X$ et fibre $K(\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi,n)$ [resp. d'extensions principales de $A_{\mathbb{Q}}(X)$ par $L_n(W)$].

On obtient, par composition de (a), (b), (c) et (d), une <u>bijection</u> $\Phi$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(X,K(\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi,n)) \arrow[rr, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, equal, "\wr\ (a)"] & & \mathcal{E}(A_{\mathbb{Q}}(X),L_n(W)) \arrow[d, equal, "\wr\ (d)"] \\
{[X,K(\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi,n+1)]} \arrow[r, phantom, "\overset{(b)}{\cong}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W,H^{n+1}(X,\mathbb{Q})) \arrow[r, phantom, "\overset{(c)}{\cong}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W,H^{n+1}(A_{\mathbb{Q}}(X)))
\end{tikzcd}$$

où (a) a été défini au chapitre I (remarque précédant le lemme I.1.) ,

(b) résulte de la représentation du foncteur $H^{n+1}(.,\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi)$ par $K(\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi,n+1)$,

(c) résulte des propriétés de $A_{\mathbb{Q}}(.)$ étudiées au chap. III ,

(d) résulte du lemme II.4.

Cette bijection associe, à chaque (classe d'isomorphie de) fibration principale

$$K(\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi,n) \to Y \xrightarrow{q} X$$

une (classe d'isomorphie de) $\mathbb{Q}$-ADG$_{(c)}$

$$\Phi(q) = A_{\mathbb{Q}}(X) \underset{[\tau]}{\otimes} L_n(W) .$$

Mais, pour que cette bijection puisse s'étendre par récurrence aux différentes fibrations principales de la tour de Postnikov du localisé $X_{\mathbb{Q}}$ d'un espace nilpotent (correspondance entre $\mathbb{Q}$-espaces et $\mathbb{Q}$-algèbres minimales), il est indispensable que les algèbres $A_{\mathbb{Q}}(X) \underset{[\tau]}{\otimes} L_n(W)$ et $A_{\mathbb{Q}}(Y)$ soient c-équivalentes, i.e. aient même modèle minimal.

La propriété qu'ont les fibrations principales d'être "totalement transgressives", va être l'argument fondamental qui permettra de le démontrer.

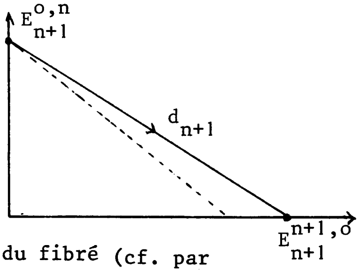
1) *Fibrations totalement transgressives*. (cf. C. Chevalley, H. Cartan et G. Hirsch, J.L. Koszul, A Borel [7], [28], [29] et [4]).

Soit $F \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{q} X$ une fibration, où $F$ désigne la fibre en un point de base $a_o$ de $X$ (supposé connexe comme toujours).

Soit $k$ un corps de caractéristique $0$. Un élément $[y] \in H^n(F,k)$ sera dit <u>transgressif</u>, s'il existe $[x] \in \tilde{H}^{n+1}(X,k)$ tel que $\tilde{q}^*[x] = \partial[y]$ dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^n(Y,k) \arrow[r, "\iota^*"] & H^n(F,k) \arrow[r, "\partial"] & H^{n+1}(Y,F;k) \arrow[r] & H^{n+1}(Y,k) \\
& H^n(p^t;k) \arrow[u] \arrow[r] & \tilde{H}^{n+1}(X,k) \arrow[u, "\tilde{q}^*"] \arrow[r, "\cong"] & H^{n+1}(X,k) \arrow[u, "q^*"]
\end{tikzcd}$$

Dans le cas où $\Pi_1(X,a_o)$ opère trivialement sur $H^n(F,k)$, il revient au même de dire que $[y]$ appartient au sous-espace $E^{o,n}_{n+1}$ des éléments de $E^{o,n}_2 = H^n(F,k)$ tels que $d_2[y] = 0,\dots,d_n[y] = 0$, et que $[x]$ se projette sur $d_{n+1}[y]$ par l'application naturelle :




$\tilde{H}^{n+1}(X,k) = E_2^{n+1,o} \twoheadrightarrow E^{n+1,o}_{n+1}$ de la suite spectrale du fibré (cf. par exemple, Spanier [36]).

On dit alors que $[x]$ est <u>une transgression</u> de $[y]$.

Si $A(.)$ est une solution au problème des k-cochaînes commutatives et s'il existe un cocycle $y \in Z^nA(F)$, de classe de cohomologie $[y]$, un cocycle $x \in Z^{n+1}(A(X,p^t)$ de classe $[x]$ et un élément $u \in A^n(Y)$ tels que $q^*\alpha_o x = du$

et $\iota^* u = y$ ($\alpha_o$ désignant l'inclusion naturelle $A(X,p^t) \to A(X)$), il est alors clair que $[y]$ est transgressif et que $[x]$ en est une transgression.

Réciproquement, on a le

<u>Lemme</u> *IV.1.*- Si $[y]$ est transgressif et si $[x]$ en est une transgression, il existe alors, pour toute solution $A(.)$ au problème des k-cochaînes commutatives, pour tout cocycle $y \in Z^n A(F)$ dans la classe de cohomologie $[y]$ et pour tout cocycle $x \in Z^{n+1} A(X,p^t)$ dans la classe de cohomologie $[x]$, un élément $u \in A^n(Y)$ tel que $\iota^* u = y$ et $du = q^* \alpha_o x$.

Considérons en effet le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A(Y,F) \arrow[r, "\alpha"] & A(Y) \arrow[r, "\iota^*"] & A(F) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A(X,p^t) \arrow[r, "\alpha_o"] \arrow[u, "\tilde{q}^*"] & A(X) \arrow[r, "\iota_o"] \arrow[u, "q^*"] & A(p^t) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Soit $y \in Z^n(A(F))$. Puisque $\iota^*$ est surjectif, il existe $u_1 \in A^n(Y)$ tel que $\iota^* u_1 = y$. Puisque $\partial[y] = \tilde{q}^*[x]$, il existe $\lambda \in Z^{n+1} A(Y,F)$ et $\lambda_1 \in A^n(Y,F)$ tels que $\tilde{q}^* x = \lambda + d\lambda_1$ et $\alpha\lambda = du_1$. On en déduit

$$\alpha\tilde{q}^* x = \alpha\lambda + \alpha d\lambda_1, \quad \text{soit} \quad q^*\alpha_o(x) = d(u_1 + \alpha\lambda_1).$$

Or $\iota^*(u_1 + \alpha\lambda_1) = y$ ; l'élément $u = u_1 + \alpha\lambda_1$ répond donc aux conditions cherchées.

On dira que la fibration $F \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{q} X$ est <u>totalement transgressive</u> (relativement à k) si

1) $\Pi_1(X,a_o)$ opère trivialement sur $H^*(F,k)$,

2) La cohomologie $H^*(F,k)$ est libre en tant qu'algèbre graduée associative, et commutative : il existe un k-espace vectoriel gradué $V$ tel que

$$H^*(F,k) = L(V) \quad ,$$

3) Tout générateur $v \in V$ est transgressif.

Supposons la fibration $F \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{q} X$ totalement transgressive (relativement à $k$), avec $H^*(F,k) = L(V)$, et soit $A_k(.)$ la solution au problème des k-cochaînes commutatives définie en III : il existe donc une application $\mu : V \to A_k(Y)$ linéaire et de degré 0, ainsi qu'une application $\tau : V \to Z(A_k(X))$ linéaire et de degré + 1, telles que, pour tout élément $v$ de $V$, $\iota^*\mu(v)$ soit un cocycle, $\quad [\iota^*\mu(v)] = v$ , $\quad$ et $\quad d\mu(v) = q^*\tau(v)$ .

(l'application composée $[\tau] : V \xrightarrow{\tau} Z(A_k(X)) \xrightarrow{[\ ]} H(A_k(X))$ s'appelle une <u>transgression</u> de la fibration).

Soit $A_k(X) \underset{\tau}{\otimes} L(V)$ le produit tensoriel gradué des algèbres $A_k(X)$ et $L(V)$, muni de la différentielle $d_\tau$ définie par $d_\tau(x \otimes 1) = dx \otimes 1$, $d_\tau(1 \otimes v) = \tau(v) \otimes 1$, et soit $\Gamma_\mu : A_k(X) \underset{\tau}{\otimes} L(V) \to A_k(Y)$ le morphisme de $A_k(X)$ - $ADG_{(c)}$ défini par $\Gamma_\mu(x \otimes 1) = q^*(x)$ et $\Gamma_\mu(1 \otimes v) = \mu(v)$.

<u>*Théorème IV.2.-*</u>

$\Gamma_\mu$ est un $H^*(X,k)$ - quasi-isomorphisme (i.e. induit un isomorphisme de $H^*(X,k)$-$AG_{(c)}$ en cohomologie).

L'espace $X$ ayant le type d'homotopie d'un C.W.-complexe, on peut se ramener au cas où il est un C.W.-complexe, dont on notera $X_p$ le p-squelette. Posons $Y_p = q^{-1}(X_p)$.

L'application $\Gamma_\mu$ induit, pour tout entier $p \geq 1$, un morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_k(X_p,X_{p-1}) \underset{\tau_p}{\otimes} L(V) & \longrightarrow & A_k(X_p) \underset{\tau_p}{\otimes} L(V) & \longrightarrow & A_k(X_{p-1}) \underset{\tau_{p-1}}{\otimes} L(V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bar\Gamma_p} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_p} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_{p-1}} & & \\
0 & \longrightarrow & A_k(Y_p,Y_{p-1}) & \longrightarrow & A_k(Y_p) & \longrightarrow & A_k(Y_{p-1}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(où $\tau_p$ désigne l'application composée $V \to ZA_k(X) \to ZA_k(X_p)$), induisant un morphisme de suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H\left(A_k(X_p,X_{p-1}) \underset{\tau_p}{\otimes} L(V)\right) & \longrightarrow & H\left(A_k(X_p) \underset{\tau_p}{\otimes} L(V)\right) & \longrightarrow & H\left(A_k(X_{p-1}) \underset{\tau_{p-1}}{\otimes} L(V)\right) & \xrightarrow{\partial} \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle (\bar{\Gamma}_p)^*} & & \downarrow{\scriptstyle (\Gamma_p)^*} & & \downarrow{\scriptstyle (\Gamma_{p-1})^*} & \\
\cdots \longrightarrow & (H.A_k)(Y_p,Y_{p-1}) & \longrightarrow & (H.A_k)(Y_p) & \longrightarrow & (H.A_k)(Y_{p-1}) & \xrightarrow{\partial} \cdots
\end{array}$$

Ces suites exactes longues appartiennent à des couples exacts définissant des suites spectrales convergeant respectivement vers $H(A_k(X) \underset{\tau}{\otimes} L(V))$ et $(H.A_k)(Y)$.

L'application $\Gamma_\mu$ définit un morphisme de suites spectrales, et $\bar{\Gamma}_p$ est l'application induite sur les termes $E_o$. Il suffit donc de montrer que $\bar{\Gamma}_p$ induit un isomorphisme en cohomologie, pour que l'argument classique de comparaison permette d'achever la démonstration.

Notons $(V_r)^s$ le sous-espace vectoriel de $L(V)$ engendré par les produits $v_1.v_2. \ldots . v_r$ de $r$ éléments de $V$, qui sont de dimension $s$ dans $L(V)$ $(\sum_{i=1}^{r} \dim v_i = s)$, et posons $F_r = 0$ pour $r > 0$, et $F_r = A_k(X_p,X_{p-1}) \otimes (\sum_{-r \leq i \leq 0} V_{-i})$ pour $r \leq 0$.

On définit ainsi une filtration décroissante de $A_k(X_p,X_{p-1}) \otimes L(V)$ et chaque terme de la filtration est respecté par la différentielle $d_{\tau_p}$.

La suite spectrale associée vérifie

$$E_o^{r,s} = \left[A_k(X_p,X_{p-1}) \otimes V_{-r}\right]^{r+s}$$

et
$$E_1^{r,s} = \left[H(X_p,X_{p-1} \,;\, k) \otimes V_{-r}\right]^{r+s} \qquad \text{pour } r \leq 0$$

(et $E_a^{r,s} = 0$ pour $r > 0$).

Puisque $H^i(X_p,X_{p-1} \,;\, k) = 0$ pour $i \neq p$,

$$E_1^{r,s} = H^p(X_p, X_{p-1} \; ; \; k) \otimes [V_{-r}]^{r+s-p} \; .$$

La différentielle $d_1 : H^p(X_p, X_{p-1}) \otimes [V_{-r}]^{r+s-p} \to H^p(X_p, X_{p-1}) \otimes [V_{-r}]^{r+s-p+1}$ ne peut qu'être nulle,car $d_{\tau_p}$ n'augmente pas le degré des termes en $L(V)$. Par récurrence, toutes les différentielles sont nulles (même argument), et

$$H^i[A_k(X_p, X_{p-1}) \underset{\tau_p}{\otimes} L(V)] \cong H^p(X_p, X_{p-1}; k) \underset{k}{\otimes} [L(V)]^{i-p} \; ,$$

(où $\cong$ désigne un isomorphisme de k-espaces vectoriels).

Par excision, on a <u>aussi</u> :

$$H^i(Y_p, Y_{p-1} \; ; \; k) \cong H^p(X_p, X_{p-1}; k) \underset{k}{\otimes} [L(V)]^{i-p} \; .$$

Puisque $\Gamma_p$ et $\Gamma_{p-1}$ sont respectivement des morphismes de $A_k(X_p)$-algèbres et $A_k(X_{p-1})$-algèbres, $\bar{\Gamma}_p$ est un morphisme de $A_k(X_p, X_{p-1})$-algèbres et induit en cohomologie un morphisme de $H^p(X_p, X_{p-1})$-modules. Soit $[x] \otimes v_1 \; . \; \dots \; . \; v_i$ un élément de $H^p(X_p, X_{p-1}) \otimes [L(V)]^{i-p}$, et $x \in Z^p A_k(X_p, X_{p-1})$ un cocycle représentatif de $[x]$ : $\bar{\Gamma}_p(x \otimes v_1 \; . \; \dots \; . \; v_j) = q^*(x) . \Gamma_\mu(v_1) \; . \; \dots \; . \; \Gamma_\mu(v_j)$ et l'élément qui lui correspond par l'excision

$$H^i(Y_p, Y_{p-1}) \cong H^p(X_p, X_{p-1} \; ; \; k) \underset{k}{\otimes} [L(V)]^{i-p} \; .$$

est $[x] \otimes v_1 \; . \; \dots \; . \; v_j$ (car $[\iota^* \Gamma_\mu(v_s)] = v_s$).

[c'est parce que $\Pi_1(X, a_0)$ opère trivialement sur $H^*(F,k)$ que l'isomorphisme d'excision ci-dessus est bien défini !]

Ainsi $\bar{\Gamma}_p$ induit un isomorphisme en cohomologie, d'où le théorème.

<u>*Remarque*</u>.- Dans le cas général où la fibration $F \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{q} X$ n'est plus nécessairement totalement transgressive, le "modèle" de la $A(X)$-$ADG_{(c)}$ $A_k(Y)$ (au sens de la remarque qui suit l'énoncé du théorème III.6) prend la forme d'un quasi-isomorphisme $A_k(X) \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{M} \to A_k(Y)$ de $A_k(X)$-$ADG_{(c)}$, $\mathcal{M}$ désignant une k-algèbre minimale, et $\tau$ un terme de "transgression" intervenant dans la diffé-

rentielle (en tant qu'algèbre graduée, $A(X) \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{M}$ n'est rien d'autre que le produit tensoriel gradué $A(X) \otimes \mathcal{M}$). P.P. Grivel [18] et S. Halperin [24] ont démontré que, pour une classe assez large de fibrations, $\mathcal{M}$ est bien égal au k-modèle minimal $k \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathcal{M}_F$ de la fibre, comme on pouvait l'espérer [si $H^*(F,k)$ est l'algèbre graduée libre $L(V)$, $k \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathcal{M}_F$ est égal à $(L(V), d = 0)$].

## 2 - *Applications aux fibrations principales.*

Soit $\Pi$ un groupe abélien de rang fini et $Y \xrightarrow{q} X$ une fibration principale de fibre $K(\Pi,n)$ induite par une application classifiante $\ell$ :

$$\begin{tikzcd}
K(\Pi,n) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega K(\Pi,n+1) \arrow[d] \\
Y \arrow[r] \arrow[d, "q"] & PK(\Pi,n+1) \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "\ell"] & K(\Pi,n+1)
\end{tikzcd}$$

Posons $W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi,k)$ $(W^* = k \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi)$, et rappelons que les espaces $H^n(K(\Pi,n),k)$ et $H^{n+1}(K(\Pi,n+1),k)$ sont tous deux isomorphes à $W$.

Lemme IV.3. -

La fibration principale $Y \xrightarrow{q} X$ est totalement transgressive (relativement à tout corps $k$ de caractéristique 0). Il existe en outre un isomorphisme $\sigma : H^n(K(\Pi,n),k) \xrightarrow{\cong} H^{n+1}(K(\Pi,n+1),k)$ d'espaces vectoriels, tel que l'application composée $[\tau] : H^n(K(\Pi,n),k) \underset{\cong}{\xrightarrow{\sigma}} H^{n+1}(K(\Pi,n+1),k) \xrightarrow{\ell^*} H^{n+1}(X,k)$ soit une transgression de la fibration.

La conclusion étant évidemment respectée par image réciproque, il suffit de démontrer le lemme dans le cas de la fibration principale universelle $PK(\Pi,n+1) \xrightarrow{p} K(\Pi,n+1)$. Or :

1) Puisque $K(\Pi,n+1)$ est simplement connexe, son groupe fondamental n'a aucune peine à opérer trivialement sur $H^*(K(\Pi,n),k)$.

2) La cohomologie de la fibre est libre, puisqu'isomorphe à $L_n(W)$.

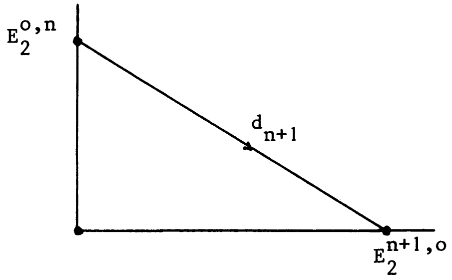
3) Puisque la suite spectrale de la fibration $p$ vérifie

$E_2^{m*} = 0$ pour $0 < m < n$

on a nécessairement :

$$E_2^{o,n} = E_{n+1}^{o,n}$$

et $$E_2^{n+1,o} = E_{n+1}^{n+1,o} .$$




La première de ces 2 égalités signifie déjà que tout élément $[y] \in W = H^n(K(\Pi,n),k)$ est transgressif.

La seconde signifie que $d_{n+1}$ prend ses valeurs dans $H^{n+1}(K(\Pi,n+1,k) = W$.

Montrons que l'application linéaire $d_{n+1}$ est injective. On en déduira qu'elle est un isomorphisme. Or $\operatorname{Ker} d_{n+1} = E_{n+2}^{o,n} = E_\infty^{o,n} = H^n(PK(\Pi,n+1),k) = 0$.

Il suffit donc de prendre $d_{n+1}$ comme isomorphisme $\sigma$, pour achever la démonstration du lemme IV.3.

<u>*Corollaire*</u> *IV.4.* -

Soit donc $A_k(.)$ la solution au problème des k-cochaînes commutatives définie en III.

**Identifions $H^n(K(\Pi,n),k)$ à $W$ et $H^{n+1}(K(\Pi,n+1,k)$ à $H^n(K(\Pi,n),k) = W$**

par l'isomorphisme $\sigma$ du lemme IV.3. Alors :

(i) Les $A_k(X)$-ADG$_{(c)}$ $A_k(X) \underset{[\tau]}{\otimes} L_n(W)$ et $A_k(Y)$ sont $A_k(X)$-quasi-isomorphes, où $[\tau] : W \to (H^{n+1}.A_k)(X)$ correspond à $\ell^* : W \to H^{n+1}(X,k)$ par l'isomorphisme naturel $(H^{n+1}.A_k)(X) \overset{c}{\cong} H^{n+1}(X,k)$ défini au chapitre III (un $A_k(X)$-quasi-isomorphisme, est un morphisme de $A_k(X)$-ADG$_{(c)}$ induisant un isomorphisme en cohomologie). Elles ont donc en particulier même modèle minimal.

(ii) Pour $k = \mathbb{Q}$, on trouve en particulier que l'extension principale $\Phi(q)$ de $A_{\mathbb{Q}}(X)$, associée à une fibration principale $Y \xrightarrow{q} X$ par la bijection $\Phi$ définie dans l'introduction du présent chapitre, est c-équivalente à $A_{\mathbb{Q}}(Y)$.

*Remarque*.- Si $k \neq \mathbb{Q}$, cela n'a pas d'intérêt de parler des fibrations de fibre $K(k \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi, n)$ car le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de cet espace n'admet aucune structure naturelle de k-espace vectoriel (la structure de groupe abélien ne suffisant plus, alors, à définir une telle structure).

D'autre part, il n'est plus vrai que :

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(k \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi, k)$ soit égal à $\mathrm{Hom}_k(k \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi, k)$.

## 3) *Application aux espaces nilpotents.*

Soit $X$ un espace nilpotent : il s'obtient à partir d'un point par une "suite" de fibrations principales

$$(K(\Pi_\alpha, n_\alpha) \longrightarrow X_{\alpha+1} \xrightarrow{q_\alpha} X_\alpha)_{\alpha \in I}$$

où
- $I$ est un ensemble bien ordonné,
- $X_0 = \{\text{point}\}$ , $0$ désignant le plus petit élément de $I$,
- la fonction $\alpha \to n_\alpha$ de $I$ dans $\mathbb{N}^*$ est croissante et finie en chaque dimension (i.e. $\forall n$, l'ensemble des indices $\alpha$ tels que $n_\alpha = n$ est fini).

Notons $\ell_\alpha : X_\alpha \to K(\Pi_\alpha, n_\alpha+1)$ une application classifiante de $q_\alpha$.

Etant donné un corps $k$ de caractéristique $0$, notons $V_\alpha$ le $k$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi_\alpha, k)$ et $V^n = \bigoplus_{n_\alpha = n} V_\alpha$. Soit $A_k(.)$ la solution au problème des $k$-cochaînes commutatives définie au chapitre III et $\mathcal{M}_\alpha \xrightarrow{\rho_\alpha} A_k(X_\alpha)$ le $k$-modèle minimal de $X_\alpha$ dont le théorème II.6 (partie (i)) affirme l'existence (l'algèbre $\mathcal{M}_\alpha$ est minimale, $\rho_\alpha$ est un quasi-isomorphisme : on notera $[\rho_\alpha]$ l'isomorphisme induit en cohomologie).

Soit $\ell_\alpha^* \in \mathrm{Hom}_k(V_\alpha, H^{n_\alpha+1}(X,k))$ l'application induite par $\ell_\alpha$ en cohomologie, $[\tau_\alpha] \in \mathrm{Hom}_k(V_\alpha, H^{n_\alpha+1}(A_k(X_\alpha))$ l'application qui lui correspond par l'isomorphisme

$$(H.A_k)(.) \cong H(.,k) \text{ du chapitre III,}$$

et

$$[\tilde{\tau}_\alpha] = [\rho_\alpha]^{-1}.[\tau_\alpha] \in \mathrm{Hom}(V_\alpha, H^{n_\alpha+1}(\mathcal{M}_\alpha)).$$

<u>*Lemme*</u> *IV.5.* -

(i) $\mathcal{M}_{\alpha+1} \cong \mathcal{M}_\alpha \underset{[\tilde{\tau}_\alpha]}{\otimes} L_{n_\alpha}(V_\alpha)$.

(ii) $\mathcal{M}_\alpha \cong L(\bigoplus_{\beta<\alpha} V_\beta)$ , (isomorphisme de $k$-$AG_{(c)}$, les éléments de $V_\beta$ étant considérés comme de dimension $n_\beta$).

(iii) $\bigoplus_{\substack{\beta<\alpha \\ n_\beta = n}} V_\beta \cong \mathrm{Hom}(\Pi_n(X_\alpha),k)$ $\left(\cong \mathrm{Hom}(\Pi_n(X),k) \quad \text{pour } n < n_\alpha\right)$.

Choisissons une application linéaire $\tilde{\tau}_\alpha : V_\alpha \to Z^{n_\alpha+1}(\mathcal{M}_\alpha)$ dont la composée avec la projection $Z^{n_\alpha+1}(\mathcal{M}_\alpha) \to H^{n_\alpha+1}(\mathcal{M}_\alpha)$ soit égale à $[\tilde{\tau}_\alpha]$. L'application $\tau_\alpha = \rho_\alpha . \tilde{\tau}_\alpha : V_\alpha \to Z^{n_\alpha+1} A_k(X_\alpha)$ permet alors de prolonger $\rho_\alpha$ en un homomorphisme $\tilde{\rho}_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \underset{\tilde{\tau}_\alpha}{\otimes} L_{n_\alpha}(V_\alpha) \to A_k(X_\alpha) \underset{\tau_\alpha}{\otimes} L_{n_\alpha}(V_\alpha)$ de k-ADG$_{(c)}$ qui est un quasi-isomorphisme, puisque $\rho_\alpha$ en est un. Comme, d'autre part, $A_k(X_\alpha) \underset{\tau_\alpha}{\otimes} L_{n_\alpha}(V_\alpha)$ est quasi-isomorphe à $A_k(X_{\alpha+1})$ d'après le lemme IV.3., on obtient en composant un quasi-isomorphisme

$$\mathcal{M}_\alpha \underset{\tilde{\tau}_\alpha}{\otimes} L_{n_\alpha}(V_\alpha) \to A_k(X_{\alpha+1}) .$$

Supposons alors avoir déjà démontré, par récurrence sur $\alpha$, que $\mathcal{M}_\alpha$ est isomorphe à $L(\underset{\beta<\alpha}{\oplus} V_\beta)$ en tant que $AG_{(c)}$, avec $\dim V_\beta = n_\beta$.

L'algèbre $\mathcal{M}_\alpha \underset{\tilde{\tau}_\alpha}{\otimes} L_{n_\alpha}(V_\alpha)$ est alors isomorphe à $L(\underset{\beta<\alpha+1}{\oplus} V_\beta)$. Or, pour faire démarrer la récurrence, il suffit d'observer que $X_o = \{\text{point}\}$ et $\mathcal{M}_o = (L_o(k),\ d = 0)$.

Puisque $\mathcal{M}_\alpha$ est une algèbre minimale, la différentielle $d_{\tilde{\tau}_\alpha}$ des éléments de $V_\beta$ pour $\beta < \alpha$, qui est la même que la différentielle dans $\mathcal{M}_\alpha$, appartient à $L(\underset{\gamma<\beta}{\oplus} V_\gamma)$. Pour $\beta = \alpha$, $d_{\tilde{\tau}_\alpha} V_\alpha = \tilde{\tau}_\alpha(V_\alpha)$ appartient à $\mathcal{M}_\alpha = L(\underset{\gamma<\alpha}{\oplus} V_\gamma)$. Ceci prouve que la k-ADG$_{(c)}$ $\mathcal{M}_\alpha \underset{\tilde{\tau}_\alpha}{\otimes} L_{n_\alpha}(V_\alpha)$ est minimale. La partie (ii) du théorème II.6 permet de conclure que cette algèbre minimale, quasi-isomorphe à $A_k(X_{\alpha+1})$, ne peut qu'être égale à $\mathcal{M}_{\alpha+1}$. Ceci achève la démonstration des parties (i) et (ii). La partie (iii) s'en déduit immédiatement, par récurrence sur $\alpha$, grâce à la suite exacte d'homotopie de la fibration $q_\alpha$, et du fait que la fonction $\alpha \to n_\alpha$ est croissante. Ceci achève la démonstration du lemme.

Puisqu'en outre, la réunion $\mathcal{M} = \varinjlim_\alpha \mathcal{M}_\alpha$ des algèbres $\mathcal{M}_\alpha$ est le modèle de $\varinjlim_\alpha A_k(X_\alpha)$, et que l'application naturelle $\varinjlim_\alpha A_k(X_\alpha) \to A_k(X)$ est un quasi-isomorphisme, $\mathcal{M}$ est le modèle de $A_k(X)$.

On en déduit le

*Théorème* IV.6. -

La réunion $\mathcal{M} = \varinjlim_{\alpha} \mathcal{M}_\alpha$ des algèbres $\mathcal{M}_\alpha$ est une algèbre minimale

- dont l'espace des générateurs de dimension $n$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{Hom}(\Pi_n(X),k)$,

- et dont la différentielle est définie par la donnée des invariants de Postnikov partiels $1 \otimes [\ell_\alpha] \in k \otimes_{\mathbb{Z}} H^{n_\alpha+1}(X_\alpha,\Pi_\alpha)$.

Cette algèbre $\mathcal{M}$ est égale au modèle minimal de $A_k(X)$.

Réciproquement, pour $k = \mathbb{Q}$, on a le

*Lemme* IV.7.-

Toute $\mathbb{Q}$-algèbre minimale $\mathcal{M} = L(\bigoplus_{\beta\in J} V_\beta)$ est le modèle d'un $\mathbb{Q}$-espace $X$, obtenu comme limite d'une tour : $\left(K(\Pi_\alpha,n_\alpha) \to X_{\alpha+1} \xrightarrow{q_\alpha} X_\alpha\right)_{\alpha\in I}$, où chaque $X_\alpha$ est un $\mathbb{Q}$-espace topologique, $\Pi_\alpha$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel dual de $V_\alpha$ (supposé de dimension finie), et $n_\alpha$ la dimension des éléments de $V_\alpha$ dans $\mathcal{M}$. Le modèle minimal de $X_\alpha$ est égal à la sous-algèbre $\mathcal{M}_\alpha = L(\bigoplus_{\beta<\alpha} V_\beta)$.

Supposons en effet avoir déjà construit le $\mathbb{Q}$-espace $X_\alpha$ ayant pour modèle $\mathcal{M}_\alpha = L(\bigoplus_{\beta<\alpha} V_\beta)$. Soit $\rho_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \to A_{\mathbb{Q}}(X_\alpha)$ un quasi-isomorphisme, et $\tau_\alpha : V_\alpha \to Z^{n_\alpha+1}(A_{\mathbb{Q}}(X_\alpha))$ l'application composée

$$V_\alpha \xrightarrow{d_{\mathcal{M}}} Z^{n_\alpha+1}(\mathcal{M}_\alpha) \xrightarrow{\rho_\alpha} Z^{n_\alpha+1} A_{\mathbb{Q}}(X_\alpha).$$

En tant que k-ADG$_{(c)}$, $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ est quasi-isomorphe à $A_{\mathbb{Q}}(X_\alpha) \otimes_{\tau_\alpha} L_{n_\alpha}(V_\alpha)$.

L'unique fibration principale

$$K(\Pi_\alpha,n_\alpha) \longrightarrow X_{\alpha+1} \xrightarrow{q_\alpha} X_\alpha \qquad (\text{avec } \Pi_\alpha = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V_\alpha,\mathbb{Q})),$$

qui lui correspond par la bijection

$$\Phi : \mathcal{C}(X_\alpha,K(\Pi_\alpha,n_\alpha)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(A_{\mathbb{Q}}(X_\alpha),L_{n_\alpha}(V_\alpha)),$$

a un espace total $X_{\alpha+1}$ qui a même modèle minimal que $A_{\mathbb{Q}}(X_\alpha) \underset{\tau_\alpha}{\otimes} L_{n_\alpha}(V_\alpha)$ (Corollaire IV.4) : ce modèle ne peut donc qu'être égal à $\mathcal{M}_{\alpha+1}$.

*Théorème IV.8. (théorème principal).-*

Il existe une correspondance bijective (encore notée $\Phi$) entre types d'homotopie de $\mathbb{Q}$-espaces $X$ (ou classes d'isomorphie de tours de $\mathbb{Q}$-espaces) et classes d'isomorphie de $\mathbb{Q}$-algèbres minimales $\mathcal{M} = (L(V),d)$.

Dans cette correspondance,

- l'espace $V^n = \bigoplus_{n_\alpha=n} V_\alpha$ des générateurs de dimension $n$ de $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\Pi_n(X),\mathbb{Q})$,
- la différentielle $d$ est définie par les invariants de Postnikov $[\ell_\alpha] \in H^{n_\alpha+1}(X_\alpha,\Pi_\alpha)$ où $\Pi_\alpha = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V_\alpha,\mathbb{Q})$.

*Cas particulier des espaces simplement connexes.*

Si $X$ et $\mathcal{M} = L(\bigoplus_{i\geq 2} V^i)$ sont simplement connexes, on note $\mathcal{M}(n)$ la sous-algèbre $L(\bigoplus_{2\leq i\leq n} V^i)$ de $\mathcal{M}$ engendrée par les générateurs de dimension au plus $n$ : $\mathcal{M}(n)$ est alors le modèle minimal du $n^{\text{ième}}$ espace $X_n$ de la tour de Postnikov. A la fibration principale :

$$\begin{array}{ccc}
K(\Pi_{n+1}(X),n+1) & = & \Omega K(\Pi_{n+1}(X),n+2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_{n+1} & \longrightarrow & PK\Pi_{n+1}(X),n+2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_n & \xrightarrow{\ell_n} & K(\Pi_{n+1}(X),n+2)
\end{array}$$

correspond alors l'extension principale :

$$\begin{array}{ccc}
L_{n+1}(V^{n+1}) & = & L_{n+1}(V^{n+1}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{M}(n+1) = \mathcal{M}(n) \underset{[\tau_n]}{\otimes} L_{n+1}(V^{n+1}) & \longleftarrow & L_{n+2}(V^{n+1}) \underset{i}{\otimes} L_{n+1}(V^{n+1}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{M}(n) & \xleftarrow{\tau_n} & (L_{n+2}(V^{n+1}),d=0)
\end{array}$$

$[\ell_n]$ et $[\tau_n]$ se correspondant par la bijection du lemme II.2.

4) *Remarques sur l'équivalence de catégories.*

$T_{\mathbb{Q}} \longleftrightarrow (\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}}$ :

(cf. la définition de $T_{\mathbb{Q}}$ au chap. I § 4

et de $(\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}}$ au chap. II, fin § 2).

Nous venons d'établir une bijection entre les classes d'isomorphie d'objets de chacune de ces 2 catégories. Ainsi que nous l'avons annoncé dans l'introduction, il existe en fait entre elles une équivalence de catégorie. Nous allons nous contenter d'esquisser les idées essentielles permettant de le prouver, renvoyant à Bousfield et Gugenheim [5] pour une démonstration détaillée.

Tout d'abord, il faut noter que la correspondance $X \rightsquigarrow \mathcal{M}_X$ qui, à tout espace $X$, associe le modèle minimal de $A_{\mathbb{Q}}(X)$ n'est <u>pas</u> fonctorielle : $\mathcal{M}_X$ n'est en effet défini qu'à isomorphisme près.

Par contre, on a déjà observé au chapitre III que le foncteur contravariant $A_{\mathbb{Q}}(.) : \mathcal{S} \to \mathbb{Q}\text{-ADG}_{(c)}$ admettait un adjoint $\langle\cdot\rangle_{A_{\mathbb{Q}}} : \mathbb{Q}\text{-ADG}_{(c)} \to \mathcal{S}$ [à gauche quand on considère ces foncteurs comme covariants sur $\mathcal{S}^{opp}$ : pour tout ensemble simplicial $K$, et toute $\mathbb{Q}\text{-ADC}_{(c)}$ $\Lambda$ : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K,\langle\Lambda\rangle_{A_{\mathbb{Q}}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-ADG}}(\Lambda, A_{\mathbb{Q}}(K))$].

Notons $|\bullet| : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ le foncteur réalisation géométrique de Milnor [32], et prenons pour $\Lambda$ une Q-algèbre minimale $\mathcal{M}$ : Sullivan démontre alors ([39]) que l'espace $X_{\mathcal{M}} = |\langle\mathcal{M}\rangle_{A_Q}|$ est un $\mathbb{Q}$-espace, et qu'il admet $\mathcal{M}$ comme modèle. D'autre part, les foncteurs $\langle\cdot\rangle_{A_{\mathbb{Q}}}$ et $|\cdot|$ passent aux quotients modulo les homotopies, et définissent donc, sur les catégories homotopiques, le foncteur composé $(\mathcal{M}\text{-ADG})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{F} \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ défini au chapitre III. Nous venons de montrer en outre que $F(\mathcal{M})$ admet $\mathcal{M}$ comme modèle minimal.

<u>*Théorème*</u> *IV.9.* -

Le foncteur $(\mathcal{M}\text{-ADG})_Q \xrightarrow{F} \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ est une équivalence de catégories. En outre la bijection qui lui est associée entre classes d'isomorphie d'objets n'est autre que la bijection $\Phi$ du théorème IV.8.

Puisqu'on sait déjà que $\Phi$ est bijective, il suffit de montrer que $F$ est bijectif sur les homomorphismes ; on démontre pour cela, la suite d'identifications ($Y$ étant un espace, et $\mathcal{M}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre minimale) :

$$[Y, X_{\mathcal{M}}] \overset{\alpha}{=} [S_*(Y), \langle\mathcal{M}\rangle_{A_{\mathbb{Q}}}] \overset{\beta}{=} [\mathcal{M}, A_{\mathbb{Q}}(Y)] \overset{\gamma}{=} [\mathcal{M}, \mathcal{M}_Y]$$

($\alpha$) est le théorème de Milnor : $S_*(.)$ et $|\cdot|$ sont adjoints en tant que foncteurs sur les catégories homotopiques.

($\beta$) résulte de ce que l'adjonction entre les foncteurs $A_{\mathbb{Q}}(.)$ et $\langle\cdot\rangle_{A_{\mathbb{Q}}}$ passe aux catégories homotopiques.

($\gamma$) résulte du théorème II.6.

Bien entendu, on peut aussi démontrer que l'application $[\mathfrak{m},\eta] \xrightarrow{F} [X_\eta, X_{\mathfrak{m}}]$ est bijective par récurrence sur les fibrations de Postnikov : posons $\mathfrak{m} = L(\bigoplus_\alpha V_\alpha)$ et $\eta = L(\bigoplus_i W_i)$.

Puisque les fonctions $\alpha \to n_\alpha$ et $i \to n_i$ sont finies en chaque degré, on peut toujours se ramener au cas où les 2 ensembles d'indices $\{\alpha\}$ et $\{i\}$ sont égaux et les fonctions $\alpha \to n_\alpha$ sont les mêmes (quitte à ajouter, si besoin est, des espaces $W_\alpha = \{0\}$ ou $W_i = \{0\}$ pour égaliser le nombre d'indices $\alpha$ en chaque degré). La démonstration se fait alors par récurrence sur $\alpha$ : soit $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-ADG}_{(c)}}(\mathfrak{m},\eta)$ induisant $\psi_\alpha : \mathfrak{m}_\alpha \to \eta_\alpha$, où l'on a posé :

$$\mathfrak{m}_\alpha = L(\bigoplus_{\beta<\alpha} V_\beta)$$

$$\text{et} \quad \eta_\alpha = L(\bigoplus_{\beta<\alpha} W_\beta) \quad .$$

Soit $X_\alpha = X_{\mathfrak{m}_\alpha}$ et $Y_\alpha = X_{\eta_\alpha}$.

Supposons avoir déjà démontré que l'application $F_\alpha : [\mathfrak{m}_\alpha, \eta_\alpha] \to [Y_\alpha, X_\alpha]$ induite par le foncteur $F$ est bijective, et soit $\psi_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-ADG}_{(c)}}(\mathfrak{m}_\alpha, \eta_\alpha)$.

On est alors ramené à démontrer le

*Lemme.-*

L'ensemble des classes d'homotopie $\tilde{\Psi}$ appartenant à $[Y_{\alpha+1}, X_{\alpha+1}]$, qui rendent le diagramme ci-dessous homotopiquement commutatif

$$
\begin{tikzcd}
Y_{\alpha+1} \arrow[r, dashed, "\tilde{\Psi}"] \arrow[d] & X_{\alpha+1} \arrow[d] \\
Y_{\alpha} \arrow[r, "F_{\alpha}(\psi_{\alpha})"] & X_{\alpha}
\end{tikzcd}
$$

correspond biunivoquement aux classes d'homotopie $[\Psi] \in [\mathfrak{m}_{\alpha+1}, \eta_{\alpha+1}]$ induisant $[\psi_{\alpha}]$ par restriction à $\mathfrak{m}_{\alpha}$ de l'application $[\Psi] \to [\tilde{\Psi}] = F[\Psi]$.

$$
\begin{tikzcd}
 & PK(W_{\alpha}^{*}, n_{\alpha}+1) \arrow[rr] \arrow[dd] & & PK(V_{\alpha}^{*}, n_{\alpha}+1) \arrow[dd] \\
Y_{\alpha+1} \arrow[ur, "\tilde{h}_{\alpha}"] \arrow[rr, dashed, "\tilde{\Psi}"] \arrow[dd] & & X_{\alpha+1} \arrow[ur, "\tilde{\ell}_{\alpha}"'] \arrow[dd] & \\
 & K(W_{\alpha}^{*}, n_{\alpha}+1) \arrow[rr] & & K(V_{\alpha}^{*}, n_{\alpha}+1) \\
Y_{\alpha} \arrow[ur, "h_{\alpha}"] \arrow[rr, "F_{\alpha}(\psi_{\alpha})"] & & X_{\alpha} \arrow[ur, "\ell_{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}
$$

C'est une version relative du corollaire IV.4. La démonstration, qui se fait par une méthode analogue, est laissée au lecteur.

## CHAPITRE V - QUELQUES EXEMPLES ET APPLICATIONS

Pour tout espace nilpotent $X$, on notera $\mathcal{M}_X$ son modèle minimal (i.e. le modèle de la $\mathbb{Q}$-ADG$_{(c)}$ $A_{\mathbb{Q}}(X)$). Pour tout corps $k$ de caractéristique $0$, on notera $(\mathcal{M}_X)_k$ la $k$-ADG$_{(c)}$ $k \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathcal{M}_X$ (égale au modèle de $A_k(X)$).

### 1 - *Cas où l'algèbre de cohomologie est libre.*

Soit $L(V) = H^*(X,\mathbb{Q})$ l'algèbre de cohomologie d'un espace connexe $X$, où $V = \bigoplus_{n \geqslant 1} V^n$ désigne un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué, de dimension finie en chaque degré.

*Proposition* V.1. -

Posons $\Pi_n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V^n,\mathbb{Q})$ ; on a alors : $X_{\mathbb{Q}} = \prod_{n \geqslant 1} K(\Pi_n,n)$ (tous les invariants de Postnikov sont nuls et $\Pi_n = \mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Pi_n(X)$), et $\mathcal{M}_X$ est égale à l'algèbre de cohomologie $L(V)$ elle-même, munie de la différentielle $d = 0$.

Notons en effet $\rho : V \to Z(A_{\mathbb{Q}}(X))$ une application $\mathbb{Q}$-linéaire, associant à tout élément $v \in V^n \subset H^n(X,\mathbb{Q})$ un cocycle représentatif $\rho(x) \in Z^n A_{\mathbb{Q}}(X)$. Cette application s'étend, de façon unique, en un quasi-isomorphisme

$$(L(V), d = 0) \xrightarrow{\rho} A_{\mathbb{Q}}(X).$$

Puisque $(L(V),d = 0)$ est une algèbre minimale, la clause d'unicité (partie ii du théorème II.6) implique que cette algèbre minimale ne peut qu'être celle de $X$.

*Exemples*.-

a) Pour $X = S^{2n+1}$ (sphère de dimension impaire), on a alors

$\mathcal{M}_{S^{2n+1}} = (E(\xi_{2n+1}), d = 0)$.

(algèbre extérieure à 1 seul générateur $\xi_{2n+1}$ de dimension $2n+1$).

b) Si $X = G$ est un groupe de Lie connexe, il a même type d'homotopie qu'un sous-groupe compact maximal $K$ : sa cohomologie réelle est alors égale à la $\mathbb{R}$-algèbre extérieure $E(P_K)$ construite sur l'espace vectoriel gradué $P_K$ des éléments primitifs de $K$ (qui sont tous de degré impair ; $(\mathcal{M}_G)_{\mathbb{R}}$ est donc égal à $(E(P_K),\ d=0)$.

c) Plus généralement, si $X$ est un H-espace connexe de type fini, on sait que sa cohomologie est une algèbre libre [c'est en particulier le cas de l'espace $\Omega(Z,x_o)$ des lacets d'un espace simplement connexe $Z$ en un point de base $x_o$ ; $\mathcal{M}_{\Omega(Z,x_o)}$ est alors égal à $(L(V),\ d=0)$ avec $V^n = \mathrm{Hom}(\Pi_{n+1}(Z),\mathbb{Q})$, $n \geqslant 1$ ; si $Z$ n'est pas simplement connexe, l'algèbre $(L(V),\ d=0)$ est le modèle de la composante connexe du lacet constant en $x_o$].

d) Si $X = BG$ où $G$ désigne, comme en b, un groupe de Lie connexe, admettant $K$ comme sous-groupe compact maximal, on désigne par $\sum P_K$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel gradué obtenu par suspension de $P_K$ : $(\sum P_K)^n = (P_K)^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 2$.
On sait que $H^*(BG,\mathbb{R})$ est alors égale à l'algèbre symétrique $S(\sum P_K)$ ; donc $(\mathcal{M}_{BG})_{\mathbb{R}} = S(\sum P_K)$.

2 - <u>*Sphères*</u> $S^{2n}$ <u>*de dimension paire.*</u>

Voici le diagramme topologique représentant la construction du localisé $(S^{2n})_{\mathbb{Q}}$ :

$$\begin{tikzcd}
 & K(\mathbb{Q},4n-1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & K(\mathbb{Q},4n-1) \arrow[d] & \\
 & (S^{2n})_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & PK(\mathbb{Q},4n) \arrow[d] & \text{contractile} \\
S^{2n} \arrow[ur, "\text{localisation}"] \arrow[r, "x"] \arrow[rr, bend right, "x^2 \sim 0"'] & K(\mathbb{Q},2n) \arrow[r, "\iota^2"] & K(\mathbb{Q},4n) &
\end{tikzcd}$$

(x représente la classe fondamentale $[x] \in H^{2n}(S^{2n},\mathbb{Q})$ et $\iota$ la classe fondamentale $[\iota] \in H^{2n}(K(\mathbb{Q},2n),\mathbb{Q})$, de sorte que $[\iota^2 \circ x] = [x]^2 = 0$).

Voici le diagramme algébrique dual :

$$\begin{tikzcd}
 & E(\eta) \arrow[r, equal] & E(\eta) \quad |\eta| = 4n-1 \\
 & S(\xi) \otimes E(\eta) \arrow[u] \arrow[dl, "\text{quasi-isomorphisme}"'] & S(\xi') \otimes E(\eta) \arrow[u] \arrow[l] \quad \text{acyclique} \\
A_{\mathbb{Q}}(S^{2n}) & S(\xi) \arrow[l, "\hat{x}"'] \arrow[u, "d\eta = \xi^2,\ d\xi = 0"'] & S(\xi') \arrow[l, "\hat{\iota}^2"'] \arrow[u, "d\eta = \xi',\ d\xi' = 0"']
\end{tikzcd}$$

$$|\xi| = 2n, \quad d\xi = 0 \qquad\qquad |\xi'| = 4n, \quad d\xi' = 0$$

(avec $\hat{\iota}^2(\xi') = \xi^2$, $\hat{x}(\xi)$ = n'importe quel 2n-cocycle représentant x).

Ainsi

$$\boxed{\mathcal{M}_{S^{2n}} = S(\xi) \otimes E(\eta) \quad \text{avec} \quad |\xi| = 2n, \quad |\eta| = 4n-1 \quad d\xi = 0 \quad d\eta = \xi^2}$$

On retrouve en particulier :

$$\mathrm{rg}(\pi_i(S^{2n})) = \begin{cases} 0 & i \neq 2n,\ 4n-1 \\ 1 & i = 2n,\ 4n-1 \end{cases}$$

3 - *Espaces projectifs complexes* $P^n(\mathbb{C})$.

Voici le diagramme topologique représentant la construction du localisé $(P^n(\mathbb{C}))_{\mathbb{Q}}$ :

$$
\begin{tikzcd}
& K(\mathbb{Q},2n+1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & K(\mathbb{Q},2n+1) \arrow[d] \\
& (P^n(\mathbb{C}))_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & PK(\mathbb{Q},2n+2) \arrow[d] \\
P^n(\mathbb{C}) \arrow[ur, "\text{localisation}"] \arrow[r, "x"] \arrow[rr, bend right, "x^{n+1} \sim 0"'] & K(\mathbb{Q},2) \arrow[r, "\iota^{n+1}"] & K(\mathbb{Q},2n+2)
\end{tikzcd}
$$

($x$ représente ici la classe rationnelle de Chern $(C_1)_{\mathbb{Q}} \in H^2(P^n(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ du fibré canonique en droites complexes de base $P^n(\mathbb{C})$), et $\iota$ la classe fondamentale $[\iota] \in H^2(K(\mathbb{Q},2),\mathbb{Q})$.

Voici le diagramme algébrique dual :

$$
\begin{tikzcd}
& & |\eta| = 2n+1 \\
& E(\eta) \arrow[r, equal] & E(\eta) \\
& S(\xi) \otimes E(\eta) \arrow[u] \arrow[dl, "\text{quasi-isomorphisme}"'] & S(\xi') \otimes E(\eta) \arrow[u] \arrow[l] \\
A_{\mathbb{Q}}(P^n(\mathbb{C})) & S(\xi) \arrow[l, "\hat{x}"'] \arrow[u, "{d\eta = \xi^{n+1},\ d\xi = 0}"'] & S(\xi') \arrow[l, "\hat{\iota}^{n+1}"'] \arrow[u, "{d\eta = \xi',\ d\xi' = 0}"'] \\
& |\xi| = 2 & |\xi'| = 2n+2 \\
& d\xi = 0 & d\xi' = 0
\end{tikzcd}
$$

(avec $\hat{\iota}^{n+1}(\xi') = \xi^{n+1}$ et $\hat{x}(\xi)$ = n'importe quel 2-cocycle représentant $x$).

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{M}_{P^n(\mathbb{C})} = S(\xi) \otimes E(\eta) \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} |\xi| = 2 & |\eta| = 2n+1 \\ d\xi = 0 & d\eta = \xi^{n+1} \end{matrix}} \; .$$

On retrouve en particulier

$$\mathrm{rg}(\pi_i(P^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq 2, \; 2n+1 \\ 1 & \text{pour } i = 2, \; 2n+1 \end{cases}$$

4 - *Cas des variétés différentiables.*

Dans le cas ou $X$ est une variété $C^\infty$, il est plus commode de manipuler l'algèbre usuelle $\Omega_{DR}(X)$ des formes différentielles que les algèbres $A_{\mathbb{Q}}(X)$ $A_{\mathbb{R}}(X) = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} A_{\mathbb{Q}}(X)$ ou $A_{DR}(X)$ de formes différentielles simpliciales sur l'espace topologique sous-jacent, d'où l'utilité du

*Théorème* V.2. -

Les $\mathbb{R}$-ADG$_{(c)}$ $\Omega_{DR}(X)$ et $A_{\mathbb{R}}(X) = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} A_{\mathbb{Q}}(X)$ sont c-équivalentes. En particulier, le modèle $\mathcal{M}_{\Omega_{DR}(X)}$ de $\Omega_{DR}(X)$ est isomorphe à $(\mathcal{M}_X)_{\mathbb{R}}$.

Notons, en effet, $S_*^\infty(X)$ le sous-ensemble simplicial de $S_*(X)$ formé des simplexes singuliers qui sont $C^\infty$ : l'inclusion naturelle simpliciale $\alpha : S_*^\infty(X) \hookrightarrow S_*(X)$ est une équivalence d'homotopie.

Soit $\rho : \Omega_{DR}^*(X) \to A_{DR}(S_*^\infty(X))$ l'application qui, à toute p-forme $\omega \in \Omega_{DR}^p(X)$, associe la p-forme simpliciale $\rho_\omega : S_n^\infty(X) \to A_{DR}^p(\Delta_n)$ définie par $(\rho_\omega)_\sigma = \sigma^*\omega$ [rappelons que $\sigma : \Delta^n \to X$ est une application différentiable, qui induit par conséquent $\sigma^* : \Omega_{DR}(X) \to \Omega_{DR}(\Delta_n) = A_{DR}(\Delta_n)$].

On en déduit une suite d'homomorphismes de $\mathbb{R}$-ADG$_{(c)}$ :

$$\begin{tikzcd} \Omega_{DR}(X) \arrow[r, "\rho"] & A_{DR}(S^\infty(X)) \arrow[d, equal] & A_{\mathbb{R}}(S^\infty(X)) \arrow[l, "u"'] & A_{\mathbb{R}}(S(X)) . \arrow[l, "A_{\mathbb{R}}(\alpha)"'] \arrow[d, "u"] \\ & A_{DR}(S^\infty(X)) & & A_{DR}(S(X)) = A_{DR}(X) \arrow[ll, "A_{DR}(\alpha)"'] \end{tikzcd}$$

Or $\rho$ est un quasi-isomorphisme (qui sert d'intermédiaire dans la démonstration du théorème de de Rham classique) ; $u$ est aussi un quasi-isomorphisme d'après le théorème III.3., ainsi que $A_{\mathbb{R}}(\alpha)$ et $A_{DR}(\alpha)$ puisque $\alpha$ est une équivalence d'homotopie. Cette suite de quasi-isomorphismes réalise les c-équivalences cherchées.

Remarque.- Nous avons déjà observé qu'il n'y a pas de "bonne" théorie de la $\mathbb{R}$-localisation, en particulier parce que cela n'a aucun sens de supposer que les groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ d'un espace $X$ $(n \geq 2)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Par abus de langage, nous appellerons quand même type d'homotopie réel d'un espace topologique $X$ la classe d'isomorphie de $\mathbb{R} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathfrak{M}_X$ dans $\mathbb{R}$-$ADG_{(c)}$, et plus généralement $k$-type d'homotopie ($k$ corps de caractéristique 0) la classe d'isomorphie de $k \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathfrak{M}_X$.

Le théorème V.2. conduit alors à poser le problème suivant : existe-t-il deux espaces nilpotents ayant même $k$-type d'homotopie pour une certaine extension $k$ de $\mathbb{Q}$, et des types d'homotopie rationnelle distincts ? La réponse est oui : il suffit de construire des algèbres minimales à l'aide de formes quadratiques sur les réels ayant même signature, mais non rationnellement équivalentes.

## 5 - Fibrés principaux $C^\infty$ et G-ADG.

Sur l'$ADG_{(c)}$ $\Omega_{DR}(P)$ des formes différentielles sur un $G$-fibré principal différentiable $P \to X$, le groupe de Lie $G$ opère, induisant une représentation infinitésimale $x \to \theta_x$ de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et des champs de vecteurs fondamentaux permettant de définir, pour tout élément $x$ de $\mathfrak{g}$, un produit intérieur $i_x$.

Plus généralement, on appelle G-ADG, une $\mathbb{R}$-$ADG_{(c)}$ $U$, sur laquelle opère un groupe de Lie $G$ ; pour tout élément $x$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$, on note $\theta_x : U^p \to U^p$ la dérivation de degré 0 telle que $x \to \theta_x$ soit la représentation de $\mathfrak{g}$ dans $U$ associée à celle de $G$. On suppose enfin donnée une application linéaire $x \to i_x$ qui, à tout élément $x \in \mathfrak{g}$, associe une antidérivation $i_x : U^p \to U^{p-1}$ de degré $-1$, telle que soient vérifiées les relations de Cartan [6] :

$$\begin{cases} i_{[x,y]} = i_x \cdot \theta_y - i_y \cdot \theta_x \\ \theta_x = i_x \cdot d + d \cdot i_x \end{cases} .$$

Notons $.IU = U^G$ la sous-$ADG_{(c)}$ de $U$ formée des éléments <u>invariants</u> de $U$ ($U^G \subset \bigcap_{x \in \mathfrak{g}} \mathrm{Ker}\, \theta_x$ ; si $G$ est connexe, cette inclusion devient une égalité).

$.SBU = \bigcap_{x \in \mathfrak{g}} \mathrm{Ker}\, i_x$ la sous-$AG_{(c)}$ de $U$ formée des éléments <u>semi-basiques</u>.

$.BU = IU \cap SBU$ la sous-$ADG_{(c)}$ formée des éléments <u>basiques</u> [si $U = \Omega_{DR}(P)$ où $P$ est un $G$-fibré principal $C^\infty$ de base $X$, $BU = \Omega_{DR}(X)$].

Si $H$ désigne un sous-groupe de Lie de $G$, toute $G$-$ADG_{(c)}$ $U$ est aussi une $H$-$ADG_{(c)}$ par restriction de l'action de $G$ à $H$, et des opérateurs $\theta_x$ et $i_x$ aux éléments $x$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $H$ : on note alors $I_H U$, $SB_H U$ et $B_H U$ les algèbres correspondant à cette restriction.

Supposons $G$ <u>connexe</u> et son algèbre de Lie <u>réductive</u>.

Notons $P_G$ l'espace vectoriel gradué des éléments primitifs de $G$ $[P_G \subset H^*(G,\mathbb{R}) = E(P_G)]$ et $Q_G = \sum P_G$ $[Q_G \subset H^*(BG,\mathbb{R}) = S(Q_G)]$.

Rappelons alors ([6], [17]) la

*<u>Proposition</u> V.3. (Chevalley-Cartan).-*

**(i) Si $G$ opère sur $U$ de façon complètement réductible ou si $U$ est l'espace $\Omega_{DR}(P)$ des formes différentielles sur un $G$-fibré principal $P$, l'inclusion naturelle $IU \xhookrightarrow{r} U$ est un quasi-isomorphisme.**

(ii) S'il existe une connexion sur $U$, il existe une inclusion $BU \otimes E(P_G) \xhookrightarrow{s} IU$ d'$ADG_{(c)}$ qui est un quasi-isomorphisme (où

$\tau : (P_G)^n \to Z^{n+1}(BU)$ est la composée de la transgression $(P_G)^n \xrightarrow[\cong]{\tau_G} (Q_G)^{n+1}$ avec l'homomorphisme de Chern-Weil $S(Q_G) \to Z(BU)$ associé à la connexion).

*Remarque* :

Si $P \to X$ est un $G$-fibré principal $C^\infty$, il admet toujours une connexion. Si $G$ est compact connexe, la fibration $P \to X$ est totalement transgressive et le théorème V.3 est un cas particulier du théorème IV.2. Le modèle $(\mathfrak{m}_P)_{\mathbb{R}}$ de $P$ est donc le même que celui de $BU \otimes_\tau E(P_G)$.

*Application aux espaces homogènes.*

Soit $G$ un groupe de Lie compact connexe, $H$ un sous-groupe de Lie connexe fermé et $G/H$ l'espace homogène correspondant. Notons $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de $G$ et $H$, $\iota : H \to G$ l'inclusion naturelle et $B\iota : BH \to BG$ la fibration induite (de fibre $G/H$).

On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^*(G,\mathbb{R}) = E(P_G) \supset P_G \arrow[d, "\iota^*"] \arrow[r, "\tau_G", "\simeq"'] & Q_G \subset S(Q_G) = H^*(BG,\mathbb{R}) \arrow[d, "(B\iota)^*"] \\
H^*(H,\mathbb{R}) = E(P_H) \supset P_H & S(Q_H) = H^*(BH,\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

Notons $C(G/H)$ la $\mathbb{R}$-ADG$_{(c)}$ égale au produit tensoriel gradué $S(Q_H) \otimes E(P_G)$, muni de la différentielle $D$ égale à $0$ sur $S(Q_H) \otimes 1$, et vérifiant $D(1 \otimes \xi) = (B\iota)^* . (\tau_G)(\xi) \otimes 1$ pour $\xi \in P_G$.

Rappelons (H. Cartan [7]) que la cohomologie de cette algèbre est isomorphe à celle de $G/H$. Plus précisément, on a la

*Proposition V.4.*

Les $\mathbb{R}$-ADG$_{(c)}$ $C(G/H)$ et $\Omega_{DR}(G/H)$ sont c-équivalentes.

Elles ont donc même modèle minimal.

Voici en effet une suite de quasi-isomorphismes réalisant la c-équivalence cherchée :

$$\Omega_{DR}(G/H) \xleftarrow{\alpha} C(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \xleftarrow{\beta} B_H(W(\mathfrak{h}) \otimes C(\mathfrak{g})) \xleftarrow{\gamma} C(G/H).$$

. On a désigné par $\alpha$ l'inclusion dans $B_H(\Omega_{DR}(G)) = \Omega_{DR}(G/H)$ de $B_H[C(\mathfrak{g})]$ (ou $C(\mathfrak{g})$ est identifié aux formes différentielles sur $G$ invariantes à gauche) d'après J.L. Koszul [30], $\alpha$ est un quasi-isomorphisme :

. Notant $W(\mathfrak{h})$ l'algèbre de Weil de $\mathfrak{h}$ (cf. [6]), $C(\mathfrak{g})$ et $W(\mathfrak{h})$ sont deux $H.ADG_{(c)}$ ; donc aussi leur produit tensoriel gradué $W(\mathfrak{h}) \otimes C(\mathfrak{g})$ , et $\beta$ est l'homomorphisme induit sur les éléments basiques par l'inclusion de $H.ADG_{(c)}$ :

$$C(\mathfrak{g}) \to W(\mathfrak{h}) \otimes C(\mathfrak{g}).$$

Puisque $W(\mathfrak{h})$ est acyclique cette inclusion est un quasi-isomorphisme, il en est donc de même de l'inclusion $\beta$ induite sur les éléments basiques.

La structure naturelle de G-ADG sur $C(\mathfrak{g})$ en induit une sur $W(\mathfrak{h}) \otimes C(\mathfrak{g})$ $(g(u \otimes v) = u \otimes g.v,\ i_x(u \otimes v) = u \otimes i_x v, \theta_x(u \otimes v) = u \otimes \theta_x v)$ et la sous-algèbre $B_H(W(\mathfrak{h}) \otimes C(\mathfrak{g}))$ en est une sous-G-ADG. L'homomorphisme

$\gamma : S(Q_H) \otimes E(P_G) \to B_H(W(\mathfrak{h}) \otimes C(\mathfrak{g}))$ n'est autre que la composée $s \circ r$ des homomorphismes définis à la proposition V.3 : c'est donc un quasi-isomorphisme.

## 6 - *Espace classifiant d'un groupe nilpotent.*

Traitons explicitement l'exemple prototype du groupe $N_{\mathbb{Z}}$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & m & p \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } m, n, p \in \mathbb{Z}.$$

Si l'on note $N_{\mathbb{R}}$ le groupe de Lie des matrices $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, le $N_{\mathbb{Z}}$-revêtement galoisien $N_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{Z}} \backslash N_{\mathbb{R}}$ est universel, car $N_{\mathbb{R}}$ est contractile (difféomorphe à $\mathbb{R}^3$). Par conséquent, la variété compacte de dimension 3 égale à $N_{\mathbb{Z}} \backslash N_{\mathbb{R}}$ est un espace classifiant $BN_{\mathbb{Z}}$ pour le groupe $N_{\mathbb{Z}}$.

Les produits de matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & m & p \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+m & c+p+an \\ 0 & 1 & b+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & c+\lambda \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

montrent que la $\mathbb{R}$-fibration principale $\mathbb{R} \to N_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\bar{p}} \mathbb{R}^2$ définie par $\bar{p}(a,b,c) = (a,b)$ définit, par passage aux quotients mod $N_{\mathbb{Z}}$ une $S^1$-fibration principale $C^\infty$ au-dessus du tore $S^1 \to BN_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{p} T^2$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R} = S^1 = K(\mathbb{Z},1) \arrow[d] \\
N_{\mathbb{R}} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{p}"] & N_{\mathbb{Z}}\backslash N_{\mathbb{R}} = BN_{\mathbb{Z}} \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{R}^2 = T^2 = K(\mathbb{Z}^2,1)
\end{tikzcd}$$ .

Puisque tout fibré principal $C^\infty$ admet une application classifiante, il existe donc $\ell : K(\mathbb{Z}^2,1) \to K(\mathbb{Z},2)$ tel que la fibration $p$ s'écrive comme image réciproque par $\ell$

$$\begin{array}{ccc}
K(\mathbb{Z},1) & = & K(\mathbb{Z},1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
BN_{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & PK(\mathbb{Z},2) \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow \\
K(\mathbb{Z}^2,1) & \xrightarrow{\ \ell\ } & K(\mathbb{Z},2)
\end{array} .$$

La classe de cohomologie $[\ell] \in H^2(T^2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ est non nulle : elle est en effet égale à la classe d'Euler de la fibration $p$ ; or celle-ci est donnée par la formule de Gauss-Bonnet $[\ell] = \int_{T^2} \Omega$ où $\Omega$ désigne la 2-forme de courbure de n'importe quelle connexion sur $p$. Nous allons en choisir une particulière.

Notons $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ les champs de vecteurs invariants à gauche sur $N_{\mathbb{R}}$ engendrés par les éléments

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de l'algèbre de Lie $\mathfrak{N}$ de $N_{\mathbb{R}}$, et notons $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ la base duale dans le module (libre) des 1-formes sur $N_{\mathbb{R}}$ : puisqu'elles sont invariantes à gauche, ces formes définissent par passages aux quotients mod $N_{\mathbb{Z}}$ des 1-formes $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ sur $N_{\mathbb{Z}} \backslash N_{\mathbb{R}}$.

Puisque $[\tilde{A},\tilde{B}] = \tilde{C}$, $[\tilde{A},\tilde{C}] = 0$, $[\tilde{B},\tilde{C}] = 0$, on obtient par dualité $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, $d\gamma = -\alpha \wedge \beta$, d'où : $d\bar{\alpha} = 0$, $d\bar{\beta} = 0$, $d\bar{\gamma} = -\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}$.

Les 1-formes $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ sont invariantes par l'action à droite de $S^1$, $\bar{\gamma}$ est une forme de connexion, $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont des formes basiques (relativement à la $S^1$-fibration principale p) et $\Omega = -\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}$ est la 2-forme de courbure de $\bar{\gamma}$. Puisque $\int_{T^2} \bar{\alpha} \wedge \bar{\beta} = 1$, on en déduit que $[\ell]$ est un générateur de $H^2(T^2,\mathbb{Z})$.

Par localisation, on obtient :

$$\begin{tikzcd}
K(\mathbb{Q},1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & K(\mathbb{Q},1) \arrow[d] \\
(BN_{\mathbb{Z}})_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & PK(\mathbb{Q},2) \arrow[d] \\
K(\mathbb{Q}^2,1) \arrow[r, "\ell_{\mathbb{Q}}"] & K(\mathbb{Q},2)
\end{tikzcd}$$

d'où le modèle minimal de $BN_{\mathbb{Z}}$ :

$$\begin{tikzcd}
 & E(w) \arrow[r, equal] & E(w) & |w| = 1 \\
dw = -u \wedge v & E(u,v) \otimes E(w) \arrow[u] & S(r) \otimes E(w) \arrow[l] \arrow[u] & dw = r \\
 & E(u,v) \arrow[u] & S(r) \arrow[l, "\tau"'] \arrow[u] & \tau(r) = -u \wedge v \\
 & |u|=|v|=1 & |r| = 2 & \\
 & du = 0 = dv & dr = 0 &
\end{tikzcd}$$

On a donc démontré la

<u>*Proposition*</u> *V.5.* -

Le modèle minimal de $BN_{\mathbb{Z}}$ est égal à l'algèbre extérieure $E(u,v,w)$ à 3 générateurs u,v et w de degré 1, avec $du = dv = 0$, $dw = -u \wedge v$.

On observe en particulier, en tensorisant par $\mathbb{R}$, que le modèle minimal réel de $BN_{\mathbb{Z}}$ est isomorphe à l'algèbre $C(\mathfrak{N})$ des cochaînes (scalaires) sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{N}$ de $N_{\mathbb{R}}$.

*Remarques*.-

*1)* Ce résultat est général. Si $\Pi$ est un groupe nilpotent, limite d'une suite finie d'extensions centrales

$$0 \longrightarrow A_\alpha \longrightarrow \Pi_{\alpha+1} \longrightarrow \Pi_\alpha \longrightarrow 1$$

$$(\alpha = 0,1,\ldots,r-1 \quad \text{avec } \Pi_o = 1, \quad \Pi_r = \Pi)$$

par des groupes abéliens $A_\alpha$ de rang <u>fini</u>, il admet une "complétion de Malcev" (notée $\Pi \underset{\mathbb{Z}}{"\otimes"} \mathbb{R}$ au chapitre I), qui est un groupe de Lie contractile, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\Pi)$ est nilpotente.

Le modèle minimal réel du classifiant $B\Pi$ de $\Pi$ est alors isomorphe à l'$ADG_{(c)}$ $C^*(\mathfrak{g}(\Pi))$ des cochaînes (scalaires) sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\Pi)$.

Réciproquement, toute algèbre minimale dont les générateurs sont tous de degré 1 est l'algèbre des cochaînes sur une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$. Cette algèbre minimale est le modèle du classifiant $B\Pi$ de n'importe quel groupe nilpotent $\Pi$ admettant comme complétion de Malcev le groupe de Lie simplement connexe (donc contractile) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

En particulier, soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_X$ le modèle minimal d'un espace nilpotent $X$ et $\mathfrak{m}(1)$ la sous-algèbre minimale engendrée par les générateurs de degré 1 : l'inclusion $\mathfrak{m}(1) \to \mathfrak{m}$ représente alors l'application classifiante du <u>revêtement universel</u> $\tilde{X}$ de $X$, tandis que le modèle minimal $\tilde{\mathfrak{m}}$ de $\tilde{X}$ s'obtient à partir de $\mathfrak{m}$ en identifiant à $0$ tous les générateurs de degré 1 ; $\mathfrak{m}(1)$ est donc l'algèbre des formes invariantes à gauche sur le groupe de Lie $G(\Pi_1(X))$ obtenu à partir de $\Pi_1(X)$ par complétion de Malcev.

2) Soit $\omega \in \Omega^1_{DR}(X) \otimes \mathfrak{g}$ une 1-forme sur une variété différentiable $X$, à coefficients dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie $G$, vérifiant l'équation de Maurer-Cartan

$$d\omega + \frac{1}{2}\,\omega \wedge \omega = 0.$$

On sait qu'elle définit un homomorphisme de groupes $\pi_1(X,x_o) \xrightarrow{\rho_\omega} G$, une fois fixé un point de base $x_o$ dans $X$. Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente, $\rho_\omega$ se calcule alors en termes d'<u>intégrales itérées</u> (Chen [12]).
Par exemple, si $G = N_{\mathbb{R}}$, se donner $\omega$ consiste à se donner trois 1-formes $x$, $y$, $z \in \Omega^1_{DR}(X)$ vérifiant $dx = dy = 0$, $dz = -x \wedge y$. Pour tout lacet $\lambda : [0,1] \to X$ en en $x_o$, différentiable par morceaux, notons $\lambda_t$ la restriction de $\lambda$ à $[0,t]$ et $⨍_\lambda x$ la fonction $t \to \int_{\lambda_t} x$. On a alors :

$$\rho_\omega[\lambda]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \int_\lambda x & \int_\lambda z + \int_\lambda (⨍_\lambda x)y \\ 0 & 1 & \int_\lambda y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(en particulier, $\int_\lambda z + \int_\lambda (⨍_\lambda x)y$ ne dépend que de la classe d'homotopie de $[\lambda]$).

## 7 - <u>*Espaces fonctionnels*</u>.

L'idée essentielle, due à Thom [44], est de considérer certains espaces fonctionnels comme solution d'un problème universel dans une catégorie d'espaces topologiques, de transposer ce problème universel dans la catégorie des $ADG_{(c)}$, de construire une solution au problème universel algébrique, et de montrer enfin que cette solution algébrique est - sinon égale - du moins c-équivalente au modèle de l'espace fonctionnel.

A titre d'exemple, nous allons calculer le modèle minimal de l'espace $\mathcal{C}(S^1,X)$

des lacets (libres) sur un espace topologique simplement connexe $X$ (cf. D. Sullivan et M. Vigue [40]).

Supposons la topologie de $X$ définie par une métrique, et $\mathcal{C}(S^1,X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Puisque $X$ est simplement connexe, $\mathcal{C}(S^1,X)$ est connexe ; et c'est un espace nilpotent, d'après Hilton [27].

Pour tout espace compact $Z$, l'application naturelle d'adjonction $\mathcal{C}(Z,\mathcal{C}(S^1,X)) \to \mathcal{C}(Z \times S^1,X)$

$$\begin{tikzcd}
Z \times S^1 \arrow[d, "\varphi \times 1_{S^1}"'] \arrow[drr, "\tilde{\varphi}"] & & \\
\mathcal{C}(S^1,X) \times S^1 \arrow[rr, "e"] & & X
\end{tikzcd}$$

est bijective. [Elle associe, à toute application $\varphi : Z \to \mathcal{C}(S^1,X)$, l'application $\tilde{\varphi} : Z \times S^1 \to X$ définie par $\tilde{\varphi}(z,\theta) = e(\varphi(z),\theta)$, $e$ désignant l'application d'évaluation].

Soit $\mathcal{M} = (L(V),d)$ le modèle de $X$, et $(L_1(\xi),d = 0)$ le modèle de $S^1$. On va chercher à résoudre, de façon duale, le problème universel suivant : trouver une $ADG_{(c)}$ $\mathcal{X}$ et un morphisme $\varepsilon : \mathcal{M} \to \mathcal{X} \otimes L_1(\xi)$ d'$ADG_{(c)}$ tels que,

$$\begin{tikzcd}
A \otimes L_1(\xi) & & \\
\mathcal{X} \otimes L_1(\xi) \arrow[u, "\Psi \otimes 1_\xi"] & & \mathcal{M} \arrow[ll, "\varepsilon"'] \arrow[ull, "\tilde{\Psi}"']
\end{tikzcd}$$

pour toute $ADG_{(c)}$ $A$, l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{ADG_{(c)}}(\mathcal{X},A) \to \mathrm{Hom}_{ADG_{(c)}}(\mathcal{M},A \otimes L_1(\xi))$$

qui, à $\Psi : \mathfrak{X} \to A$, associe l'homomorphisme $\tilde{\Psi} = (\Psi \otimes 1_\xi).\varepsilon$ de $\mathfrak{M}$ dans $A \otimes L_1(\xi)$ soit bijective.

Un homomorphisme d'algèbres $\tilde{\Psi} : L(V) \to A \otimes L_1(\xi)$ est défini par sa restriction $V \to A \otimes L_1(\xi)$ aux générateurs de $\mathfrak{M}$, et cette restriction s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme

$$\tilde{\Psi}(v) = r(v) \otimes 1 + \bar{r}(v) \otimes \xi$$

où $r : V \to A$ est une application linéaire de degré 0 ,
et $\bar{r} : V \to A$ est une application linéaire de degré -1.

Notons alors $\bar{V} = \bigoplus_{n \geq 1} (\bar{V})^n$ l'espace vectoriel gradué défini par $(\bar{V})^{n-1} = V^n$ $(n \geq 2)$.

Soit $\mathfrak{X}$ l'algèbre graduée $L(V \oplus \bar{V}) = L(V) \otimes L(\bar{V})$ et $\varepsilon : \mathfrak{M} \to \mathfrak{X} \otimes L_1(\xi) = L(V) \otimes L(\bar{V}) \otimes L_1(\xi)$ l'homomorphisme d'algèbres graduées défini par :

$$\varepsilon(v) = v \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \bar{v} \otimes \xi$$

où $\bar{v}$ désigne l'image de $v$ par l'identification $V^n = (\bar{V})^{n-1}$ : il est alors clair que $(\mathfrak{X}, \varepsilon)$ ainsi défini est solution du problème universel que l'on peut définir de façon analogue dans la catégorie $AG_{(c)}$ au lieu de $ADG_{(c)}$.

On va définir maintenant une différentielle $d_{\mathfrak{X}}$ sur $\mathfrak{X}$ de façon que $\varepsilon$ commute aux différentielles :

$$d_{\mathfrak{X}}(v \otimes 1) \otimes 1 + d_{\mathfrak{X}}(1 \otimes \bar{v}) \otimes \xi = \varepsilon(dv).$$

Si l'on note $\iota : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ l'antidérivation de degré -1 définie par

$$\iota(v \otimes 1) = (-1)^{|v|}\, 1 \otimes \bar{v} \quad \text{et} \quad \iota(1 \otimes \bar{v}) = 0,$$

on vérifie que $\varepsilon : L(V) \to \mathfrak{X} \otimes L_1(\xi)$ satisfait, pour tout élément

$\alpha \in L(V)$ à la formule : $\varepsilon(\alpha) = (\alpha \otimes 1) \otimes 1 + (-1)^{|\alpha|}\iota(\alpha \times 1) \otimes \xi$.

On en déduit la différentielle $d_{\mathfrak{X}}$ :

$$\begin{cases} d_{\mathfrak{X}}(v \otimes 1) = dv \otimes 1, \\ d_{\mathfrak{X}}(1 \otimes \bar{v}) = (-1)^{|dv|}\iota(dv) . \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier alors que $(\mathfrak{X}, d_{\mathfrak{X}}, \varepsilon)$ est solution du problème universel donné dans la catégorie $ADG_{(c)}$. On observe que l'algèbre $(\mathfrak{X}, d_{\mathfrak{X}})$ est minimale si $\mathcal{M} = (L(V),d)$ l'est.

Notons alors $\tilde{\mathfrak{X}}$ le modèle minimal de l'espace des lacets $\mathcal{C}(S^1,X)$ : l'application d'évaluation $e : \mathcal{C}(S^1,X) \times S^1 \to X$ donne naissance à un homomorphisme d'$ADG_c$ $\tilde{\lambda} : \mathcal{M} \to \tilde{\mathfrak{X}} \otimes L_1(\xi)$ : par définition du problème universel dont $\mathfrak{X}$ est solution, il existe donc un homomorphisme $\lambda : \mathfrak{X} \to \tilde{\mathfrak{X}}$ tel que $(\lambda \otimes 1_{L_1(\xi)}).\varepsilon = \tilde{\lambda}$.

Soient alors $x_o$ un point de base dans $X$, et $\theta_o$ un point de base dans $S^1$. L'application $p : \mathcal{C}(S^1,X) \to X$ définie par $p(\gamma) = \gamma(\theta_o)$ est une fibration, dont la fibre en $x_o$ est l'espace $\Omega(X,x_o)$ des lacets en $x_o$. Cette fibration admet une section $s : X \to \mathcal{C}(S^1,X)$ qui associe, à tout point $x$, le lacet constant égal à $x$. Cette fibration donne naissance au diagramme

$$\begin{tikzcd} L(V) \arrow[r, shift left, "p^*"] & \tilde{\mathfrak{X}} \arrow[l, shift left, "s^*"] \arrow[r] & L(\bar{V}), \end{tikzcd}$$

où $s^* \circ p^* = 1_{L(V)}$ et $(L(\bar{V}),d=0)$ est le modèle de $\Omega(X,x_o)$ d'après la proposition V.1 (exemple c). Le diagramme ci-dessous étant commutatif :

$$\begin{tikzcd} L(V) \arrow[r, shift left, "p^*"] \arrow[d, equal] & \tilde{\mathfrak{X}} \arrow[l, shift left, "s^*"] \arrow[r] & L(\bar{V}) \arrow[d, equal] \\ L(V) \arrow[r, shift left, "(p_1)^*"] & \mathfrak{X} = L(V)\otimes L(\bar{V}) \arrow[l, shift left, "(s_1)^*"] \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r] & L(\bar{V}) \end{tikzcd}$$

(où $(p_1)^*(v) = v \otimes 1$ et $(s_1)^*(v \otimes 1) = v$, $(s_1)^*(1 \otimes \bar{v}) = 0$), $\lambda$ ne peut qu'être bijectif : c'est donc un isomorphisme. On a ainsi démontré la :

*Proposition* V.6. -

Si un espace simplement connexe $X$ admet pour modèle minimal $\mathcal{M} = (L(V),d)$, l'espace $\mathcal{C}(S^1,X)$ des lacets libres admet pour modèle minimal.

$$\mathfrak{X} = L(V \oplus \bar{V}) = L(V) \otimes L(\bar{V}) \qquad (\text{où } (\bar{V})^{n-1} = V^n)$$

avec
$$d_{\mathfrak{X}}(v \otimes 1) = dv \otimes 1$$

et
$$d_{\mathfrak{X}}(1 \otimes \bar{v}) = (-1)^{|dv|}\iota(dv).$$

*Exemple* :

Si $X = S^{2n}$, le modèle $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{C}(S^1,S^{2n})$ est l'algèbre $S(\xi_{2n},\bar{\eta}_{4n-2}) \otimes E(\bar{\xi}_{2n-1},\eta_{4n-1})$ muni de la différentielle :

$$d\xi_{2n} = 0,\quad d\bar{\xi}_{2n-1} = 0$$
$$d\eta_{4n-1} = (\xi_{2n})^2, d\bar{\eta}_{4n-2} = 2\xi_{2n} \otimes \bar{\xi}_{2n-1} .$$

*Remarques* :

1) D. Sullivan et M. Vigue ([40]) ont utilisé ce calcul de $\mathfrak{X}$ pour rendre opérationnel un théorème de Gromoll et Meyer affirmant l'existence, sur toute variété riemannienne sur $X$, d'une infinité de géodésiques périodiques géométriquement distinctes, pourvu que la suite des nombres de Betti de $\mathcal{C}(S^1,X)$ ne soit pas bornée : il suffit pour cela que l'algèbre $H^*(X,\mathbb{Q})$ ne puisse être engendrée par un seul élément.

2) On peut calculer plus généralement, par un procédé analogue, un modèle algébrique pour l'espace des sections d'un fibré (cf. [44]). Haefliger a en particulier utilisé ce calcul pour démontrer la conjecture de Bott qui affirme que la

cohomologie de Guelfand Fuks de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur une variété est isomorphe à la cohomologie de l'espace des sections d'un certain fibré. Bien entendu, l'$ADG_{(c)}$ exhibée par Haefliger est intéressante en elle-même, car plus manipulable que l'espace des sections d'un fibré ! (cf. [21], [22])

3) Le fait que l'$ADG_{(c)}$ construite dans le cas de $\mathcal{C}(S^1,X)$ soit minimale est exceptionnel ; dans le cas général, le modèle algébrique trouvé est seulement une algèbre libre, qui peut avoir des générateurs de degré 0 ou négatif.

On peut cependant en calculer le modèle minimal (cf. Watkiss [47]), en se débarassant d'abord des générateurs de degré $\leq 0$, puis en appliquant une méthode générale, due à Sullivan, pour calculer le modèle minimal d'une $ADG_{(c)}$ libre connexe que nous allons exposer au § suivant.

## 8 - *Modèle minimal d'une $ADG_{(c)}$ libre connexe et simplement connexe.*

Nous avons vu déjà plusieurs exemples d'$ADG_{(c)}$ libres $(L(V),d)$ non minimales, mais c-équivalentes au modèle minimal des espaces étudiés (cas des espaces homogènes, ou d'espaces fonctionnels), d'où l'intérêt d'une méthode générale de calcul de leur modèle minimal.

D'une $ADG_{(c)}$, on dira qu'elle est contractile si elle est libre, de la forme $(L(W' \oplus W),d)$ où $d|_{W'} = 0$ et $d|_W$ est un isomorphisme de $W$ sur $W'$.

Soit donc $(L(V),d)$ une $ADG_{(c)}$ libre, connexe $(V = \bigoplus_{n\geq 1} V^n)$, et simplement connexe $[H^1(L(V),d)) = 0]$.

Notons $L^{++}(V)$ l'idéal de $L(V)$ engendré par les éléments décomposables, et $d' : V^n \to V^{n+1}$ la composante sur $V^{n+1}$ de la différentielle

$$d : V^n \to (L(V))^{n+1} = V^{n+1} \oplus (L^{++}(V))^{n+1} .$$

*Proposition V.7.* -

Le modèle minimal $L(V')$ de $(L(V),d)$ est alors engendré par l'espace vectoriel gradué $V' = H^*(V,d')$ (cohomologie de $V$, muni de la différentielle $d'$).

Soient en effet $V'$ un supplémentaire de $\operatorname{Im} d'$ dans $\operatorname{Ker} d'$ et $W$ un supplémentaire de $\operatorname{Ker} d'$ dans $V$ :

$$\begin{cases} V = \operatorname{Im} d' \oplus V' \oplus W \\ d' \text{ est nul sur } \operatorname{Im} d' \text{ et sur } V' \\ d'|_W \text{ est un isomorphisme } W \xrightarrow[\cong]{} \operatorname{Im} d' \ . \end{cases}$$

Soit $W'$ l'image de $W$ par $d$ dans $L(V)$ : $d$ est un isomorphisme de $W$ sur $W'$.

Montrons que $W' + (V' \oplus W)$ engendre tout $L(V)$ ; $V^{n+1} = d'W^n \oplus V'^{n+1} \oplus W^{n+1}$ sera engendré par $W' + (V' \oplus W)$ si $d'W^n$ l'est ; or $d'W^n \in (W')^{n+1} + [L^{++}(V)]^{n+1}$ ; il suffit que $\bigoplus_{i=1}^{n} V^i$ soit engendré par $W' + (V' \oplus W)$, pour qu'il en soit de même de $[L^{++}(V)]^{n+1}$, donc de $d'W^n$, donc de $V^{n+1}$ ; puisque, pour $n = 1$, $[L^{++}(V)]^2$ est engendré par $V'^1 \oplus W^1$, la récurrence peut démarrer. Puisque $\dim W' = \dim \operatorname{Im} d'$, la somme $W' + V' \oplus W$ est donc directe, et

$$\begin{aligned} L(V) &= L(W' \oplus V' \oplus W). \\ &= L(V') \otimes L(W' \oplus W). \end{aligned}$$

En outre, la sous-algèbre $C = L(W' \oplus W)$ est stable par $d$ et contractile, et $V'$ est isomorphe à $H(V,d')$.

Notons $<C^+>$ l'idéal homogène engendré par les éléments degré $> 0$ de $C$ : il est stable par $d$, de sorte que la différentielle $d$ de $L(V)$ définit par passage aux quotients une différentielle $d_1$ sur l'algèbre quotient $L(V)/<C^+>$.

Cette algèbre quotient est évidemment isomorphe à $L(V')$, et la différentielle de tout générateur $v' \in V'$ est décomposable puisque $d'|_{V'} = 0$. Elle est donc minimale, pourvu qu'elle soit simplement connexe. Tout revient donc à démontrer le

*Lemme V.8.* -

Soit $A$ une $ADG_{(c)}$, $C = L(W' \oplus W)$ une sous-$ADG_{(c)}$ contractile de $A$, et supposons qu'il existe une sous-$ADG_{(c)}$ $B$ de $A$ (non nécessairement stable par d) telle que $A = B \otimes C$ (en tant qu'algèbres graduées). Notant $\langle C^+ \rangle$ l'idéal homogène (nécessairement stable par $d$) engendré par les éléments de degré $> 0$ de $C$, l'application naturelle $A \xrightarrow{\pi} A/\langle C^+ \rangle$ est un quasi-isomorphisme.

Bien entendu, il suffit de démontrer ce lemme lorsque $\dim W$ ($= \dim W'$) $= 1$ , le cas général s'en déduisant ensuite par récurrence (éventuellement transfinie) sur $\dim W$.

Soit donc $\{x\}$ une base (homogène) de $W$ et $\{y = dx\}$ la base correspondante de $W'$.

Supposons d'abord l'élément $x$ de dimension paire. Tout élément $u \in A = B \oplus \langle C^+ \rangle$ s'écrit de façon unique, sous la forme :

$$u = b + \sum_{r \geq 1} b'_r \, x^r + \sum_{r \geq 0} b''_r \, y \, x^r$$

où $b, b'_r, b''_r \in B$. On a alors

$$du = db + \sum_{r \geq 1} db'_r \, . \, x^r + \sum_{r \geq 0} \left( db''_r + (-1)^{|b'_{r+1}|} (r+1) b'_{r+1} \right) y \, . \, x^r .$$

Dire que $u$ est un cocycle équivaut donc à $db = 0$, $b'_{r+1} = (-1)^{|b''_r|} \frac{1}{r+1} db''_r$ pour $r \geq 0$ ($db'_r = 0$ pour $r \geq 1$), et l'on a alors :

$$u = b + d\left( \sum_{r \geq 0} (-1)^{|b''_r|} b''_r \, . \, \frac{x^{r+1}}{r+1} \right).$$

Si $b = 0$, on obtient en particulier que tout cocycle dans $\langle C^+ \rangle$ est un cobord, et par conséquent si un cocycle $u \in A$ est un cobord modulo $\langle C^+ \rangle$, c'est un cobord : c'est dire que $\pi : A \to A/\langle C^+ \rangle$ est injectif en cohomologie. Le calcul montre aussi que si un élément $u \in A = B \oplus \langle C^+ \rangle$ a une différentielle $du$ dans $\langle C^+ \rangle$, c'est que sa composante $b$ sur $B$ est un cocycle : on en déduit que $\pi$ est surjectif en cohomologie.

Si $x$ est de dimension impaire, la décomposition de $u$ s'écrit cette fois :

$$u = b + \sum_{r \geq 1} b'_r \, y^r + \sum_{r \geq 0} b''_r \, y^r \, x,$$

$$du = db + \sum_{r \geq 0} \left( db'_{r+1} + (-1)^{|b''_r|} b''_r \right) y^{r+1} + \sum_{r \geq 0} db''_r \, y^r . \, x$$

et par conséquent $u$ est un cocycle si $db = 0$ et $b''_r = (-1)^{|b'_{r+1}|} db'_{r+1}$ pour $r \geq 0$, de sorte qu'on a alors :

$$u = b + d\Big(\sum_{r\geq 0} (-1)^{|b'_{r+1}|} b'_{r+1} \cdot y^r \cdot x\Big).$$

Le reste de la démonstration est inchangé.

*Remarque*.- Sullivan en déduit que $(L(V),d)$ est isomorphe au produit tensoriel $\mathcal{M} \otimes C$ où $\mathcal{M}$ est minimale et $C$ contractile, ce qui est un résultat un peu plus fort, (il s'agit d'un produit tensoriel d'$ADG_{(c)}$, c'est-à-dire que $\mathcal{M} \otimes C$ est muni de la différentielle totale du bicomplexe).

*Exemple d'application.*

Reprenons l'exemple de l'espace homogène $G/H$ ($G$ compact connexe et $H$ fermé connexe) du § 6, et supposons en outre $G$ simplement connexe. On a alors $V = Q_H \oplus P_G$ et $d' = D$, de sorte que : $\mathrm{Hom}(\pi_{\mathrm{pair}}(G/H),\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{coker}(B\iota^* : Q_G \to Q_H)$, tandis que $\mathrm{Hom}(\pi_{\mathrm{impair}}(G/H),\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}\ \iota^* : P_G \to P_H$ (Olnischik [34], Wu Wen Tsün [49], Greub Halperin Van Stone [17])

*Remarques*.-

Le calcul de $V' = H^*(V,d')$

$= \mathrm{Hom}(\pi_*(X),\mathbb{Q})$

suffit pour certaines applications. Voici quelques exemples, de certaines d'entre elles

1) S. Halperin appelle complexes <u>finis</u> les espaces connexes et simplement connexes $X$ tels que les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}(\pi_*(X),\mathbb{Q})$ et $H^*(X,\mathbb{Q})$ soient tous deux de dimension totale finie.

Posant alors : $\chi_c(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H^i(X,\mathbb{Q})$ et

$$\chi_\pi(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}(\pi_i(X),\mathbb{Q})$$

il démontre ([23]) que l'on a toujours, pour ces espaces :

$$\chi_\pi(X) \leq 0 \quad \text{et} \qquad \chi_c(X) \geq 0,$$

ainsi que l'équivalence des 3 conditions :

$$\begin{aligned} \chi_\pi(X) &< 0 \\ \chi_c(X) &= 0, \\ \tilde{H}^{pair}(X,\mathbb{Q}) &= 0 . \end{aligned}$$

Par exemple, pour $X = G/H$ comme au § 6, avec $G$ simplement connexe, $\chi_\pi(G/H) = -(\mathrm{rg}\ G - \mathrm{rg}\ H)$.

Plus généralement, si un groupe de Lie compact connexe $K$ opère presque librement sur $X$ (i.e. avec des groupes d'isotropie tous finis), alors $\chi_\pi(X) \leq -\mathrm{rg}\ K$ (cf. C. Allday et S. Halperin [1]).

2) Sullivan calcule les groupes d'homotopie de n'importe quelle composante connexe d'un espace d'applications $\mathcal{C}(X,Y)$ avec $Y$ nilpotent (cf. par exemple [2]).

9 - *Espaces formels*.

En général, la donnée du type d'homotopie rationnelle d'un espace $X$ est plus fine que celle de sa seule cohomologie rationnelle, et le calcul de $\mathcal{M}_X$ dépend de l'algèbre $A_\mathbb{Q}(X)$ elle-même, (conformément à un principe qui s'est appliqué assez souvent en géométrie différentielle ces dernières années : ne pas se précipiter trop vite sur la cohomologie de de Rham, les formes pouvant aussi être intéressantes en elles-mêmes ; cf. une autre application de ce principe à la formation d'invariants secondaires du type Chern-Simons).

Il se peut, cependant, dans certains cas particuliers, que le type d'homotopie rationnel de $X$ puisse se déduire "formellement" de $H^*(X,\mathbb{Q})$.

De façon générale, on dira, d'un espace topologique $X$, qu'il est formel si les $\mathbb{Q}$-$\mathrm{ADG}_{(c)}$ $A_\mathbb{Q}(X)$ et $(H^*(X,\mathbb{Q}), d = 0)$ sont c-équivalentes (i.e. si $\mathcal{M}_X$ est égal au modèle minimal de $(H^*(X,\mathbb{Q}), d = 0)$). Lorsqu'il en est ainsi cela reste évidemment vrai pour $\mathcal{M}_X \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} k$ et $H^*(X,k)$ pour tout corps k de caractéristique 0. Mais réciproquement, s'il existe un corps k de caractéristique 0 tel que $\mathcal{M}_X \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} k$ soit le modèle minimal de $(H^*(X,k),d = 0)$, X est formel : ce résultat a été démontré indépendamment par D. Sullivan, et - suivant une autre méthode - par S. Halperin et J. Stasheff [26]).

*Exemples d'espaces formels.*

1°) Si $H^*(X,\mathbb{Q})$ est libre (en tant que $AG_{(c)}$), X est formel : nous l'avons vu au § 1 de ce chapitre.

2°) Les espaces $S^{2n}$ et $P^n(\mathbb{C})$ du § 7 sont également formels : en effet :

$$H(S^{2n},\mathbb{Q}) = Q[\xi]/\xi^2 \quad \text{avec} \quad |\xi| = 2n$$

et l'application $(\mathbb{Q}[\xi]/\xi^2,d = 0) \to A_{\mathbb{Q}}(S^{2n})$ envoyant $\xi$ sur n'importe quel 2n-cocycle dans $A_{\mathbb{Q}}(S^{2n})$ représentant la classe fondamentale $\xi$ est un quasi-isomorphisme ; pour $P^n(\mathbb{C})$, la démonstration est analogue.

3°) Les sphères, les espaces projectifs complexes, les groupes de Lie compacts connexes, admettent tous une structure d'espace riemannien symétrique compact. Plus généralement, on a le

*Théorème V.9. (Sullivan).-*

Tout espace nilpotent X qui possède une structure d'espace riemannien symétrique compact orientable, est formel.

En effet, pour un espace riemannien compact orientable, l'inclusion : $(H(X),d=0) \to \Omega_{DR}(X)$ de l'espace $H(X)$ formes harmoniques dans l'algèbre de de Rham induit un isomorphisme en cohomologie ; cependant, cette inclusion n'est pas un homomorphisme d'algèbres en général, car le produit extérieur de 2 formes harmoniques peut ne pas être harmonique ; toutefois, pour les espaces riemanniens symétriques G/H, les formes harmoniques sont les formes invariantes par G :

elles constituent donc une sous-algèbre de $\Omega_{DR}(X)$, de sorte que $(H^*(X,R),d=0)$ est quasi-isomorphe à $\Omega_{DR}(X)$. Le théorème V.2. permet d'achever la démonstration.

4°) Dans le même ordre d'idées, utilisant cette fois-ci les formes holomorphes en plus des formes harmoniques comme algèbres intermédiaires, P. Deligne, P. Griffiths J. Morgan et D. Sullivan ont démontré ([13]) que les espaces simplement connexes admettant une structure de variété kaehlerienne compacte sont également formels.

*Exemple d'espace non formel.*

Soit $X$ l'espace $BN_{\mathbb{Z}}$ du § 6 avec $\mathcal{M}_X = E(u,v,w)$, $(|u| = |v| = |w| = 1$, $du = dv = 0$, $dw = u \wedge v)$.

Il est clair que $u \wedge w$ est un cocycle non cohomologue à $0$.
Supposons que $E(u,v,w)$ soit le modèle minimal de $(H,d = 0)$ où $H = H^*(E(u,v,w))$ ; puisque $H^1$ admet pour base $([u],[v])$ et que $[u].[v] = 0$, tout quasi-isomorphisme $\rho : E(u,v,w) \to (H,d=0)$ vérifierait : $\rho(u) = [u]$, $\rho(v) = [v]$, $\rho(w) = \lambda[u] + \mu[v]$ et $\rho(u \wedge w) = 0$, ce qui est impossible puisque $[u \wedge w] \neq 0$ : ceci prouve que $X$ n'est pas formel.

*Remarques.*

1) J. Stasheff et S. Halperin ont pu construire des "obstructions à la formalité" de la façon suivante : à toute $k\text{-ADG}_{(c)}$ $(A,d)$ ils associent un "modèle bigradué" qui n'est rien d'autre que le modèle minimal $(L(V),\delta)$ de $(H(A),d = 0)$, puis un "modèle filtré" : c'est une $k\text{-ADG}_{(c)}$ c-équivalente à $A$, isomorphe à $L(V)$ en tant que $k\text{-AG}_{(c)}$ mais avec une différentielle $D$ différente de $\delta$ ; c'est la "perturbation" $D-\delta$ de $\delta$ qui exprime plus ou moins l'obstruction cherchée à la formalité, et c'est parce que la nullité de ces obstructions ne dépend pas du corps de base $k$ (pourvu qu'il soit de caractéristique 0), que la $k$-formalité de $(\mathcal{M}_X)_k$ équivaut à celle de $\mathcal{M}_X$.

2) En remplaçant tours de Postnikov par structures cellulaires, en permutant les rôles de l'homotopie et de la cohomologie, ainsi que ceux des algèbres différentielles graduées commutatives et des algèbres de Lie graduées, divers auteurs (H.J. Baues et J.M. Lemaire [3], Niessendorfer [33] et Miller ) ont construit une théorie duale de celle de Sullivan, conduisant à une notion duale de formalité qui n'est pas équivalente à la première.

## INDEX TERMINOLOGIQUE

[par ordre d'entrée en texte]

*CHAPITRE I* -

- espace topologique,
- espace d'Eilenberg-Mac Lane,
- tour de Postnikov, invariants de Postnikov,
- fibration principale,
- raffinement principal d'une fibration,
- espace nilpotent ; catégorie homotopique $\mathcal{T}$,
- $\mathbb{Q}$-espaces et catégorie homotopique rationnelle $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$,
- localisation,
- type d'homotopie rationnelle .

*CHAPITRE II* -

- catégories k-ADG$_{(c)}$ et k-AG$_{(c)}$,
- algèbre de de Rham $\Omega_{DR}(X)$,
- produit tensoriel gradué,
- algèbre connexe, algèbre simplement connexe,
- homotopie entre morphismes de k-ADG$_{(c)}$,
- algèbre d'Eilenberg-Mac Lane,
- extension principale d'une k-ADG$_{(c)}$,
- algèbre nilpotente ; algèbre minimale,
- catégorie $(\mathcal{M}\text{-ADG})_k$ ,
- quasi-isomorphisme, c-équivalence,
- modèle minimal d'une k-ADG$_{(c)}$.

*CHAPITRE III* -

- catégorie $\mathcal{S}$ des ensembles simpliciaux,
- théorie de k-cochaînes,
- solution au problème des k-cochaînes commutatives,
- axiome de dégénérescence (ou axiome (c)), axiome des limites inductives,
- k-ADG simpliciale,
- axiomes (a) et (b),
- théorème de de Rham simplicial,
- Algèbres $A_{\mathbb{Q}}(X)$, $A_k(X)$, $A_{DR}(X)$ [ne pas confondre avec $\Omega_{DR}(X)$],

- foncteur k-$ADG_{(c)} \longrightarrow \mathcal{S}$,
- modèle minimal $\mathcal{M}_X$ d'un espace nilpotent.

*CHAPITRE IV* -

- transgression,
- fibrations totalement transgressives,
- théorème principal.

*CHAPITRE V* -

- k-type d'homotopie,
- espace formel .

## RÉFÉRENCES


[1] ALLDAY C. et HALPERIN S : *Lie group actions on spaces of finite rank* [Preprint - janvier 1977]

[2] ANONYMUS : Rédaction des conférences de Sullivan à Orsay en 1973-74 (Manuscrit)

[3] BAUES H.J. et LEMAIRE J.M. : *Minimal models in homotopy theory* [Preprint - 1976]

[4] BOREL A. : *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts* [Ann. of Math 57 (1953), 115-207]

[5] BOUSFIELD A.K. et GUGENHEIM V.K.A.M. : *On* PL *de Rham theory and rational homotopy type* [Preprint]

[6] CARTAN H. : *Notions d'algèbre différentielle : application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie* [Colloque de Topologie - Bruxelles 1950]

[7] CARTAN H. : *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal* [Colloque de Topologie - Bruxelles 1950]

[8] CARTAN H. : *Théories cohomologiques* [Inventiones mathematicae 35-261-271 (1976)]

[9] CENKL B. : *Intégrales itérées* [Journées sur les formes différentielles - Luminy 1976]

[10] CHEN K.T. : *Homotopy of algebras* [Journal of Algebra 10 - 183 - 193 (1968)]

[11] CHEN K.T. : *Differential forms and homotopy groups* [J. of differential Geometry 6-1971-231-246]

[12] CHEN K.T. : *Algebras of iterated path integrals and fundamental groups* [Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971) - 359-379] -et autres articles-

[13] DELIGNE P., MORGAN J., GRIFFITHS P., and SULLIVAN D. : *The real homotopy theory of Kaehler manifolds* [Inventiones Math. 29, 245-254, (1975)]

[14] ECKMANN B. : *Homotopie et cohomologie* [Séminaire de Mathématiques supérieures - Montréal (1964)]

[15] FRIEDLANDER E., GRIFFITHS P.A. et MORGAN J. : *Homotopy theory and differential forms*
[Seminario di Geometria - Firenze (1972)]

[16] GODEMENT R. : *Théorie des faisceaux*
[Hermann (1958)]

[17] GREUB W., HALPERIN S. et VANSTONE R. : *Connections, curvature and cohomology* Vol III - *cohomology of principal bundles and homogeneous spaces*
[Academic Press (1976)]

[18] GRIVEL P.P. : Thèse
[Université de Genève (1975)]
et exposé aux journées de Luminy (1976)

[19] GROTHENDIECK A. : *Sur quelques points d'algèbre homologique*
[Tohoku Math. J. (1956)]

[20] GROVE K., HALPERIN S. et VIGUE-POIRRIER M. : *The rational homotopy theory of isometry invariant curves*
[Preprint (1977)]

[21] HAEFLIGER A. : *Sur la cohomologie de Guelfand-Fuks*
[Comptes rendus des journées de Dijon, (1974), Lectures notes de Springer]

[22] HAEFLIGER A. : *Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs*
[à paraître aux annales de l'E.N.S.]

[23] HALPERIN S. : *Finiteness in the minimal models of Sullivan*
[à paraître aux Trans. Am. Math. Soc. (1975)]

[24] HALPERIN S. : *Rational fibrations, minimal models, and fibrings of homogeneous spaces*
[Preprint (1976)]

[25] HALPERIN S. : Lecture Notes *on minimal models*
[Séminaire Lille-Valenciennes (1976-77)]

[26] HALPERIN S. et STASHEFF J. : *Obstructions to homotopy equivalences*
[Preprint (1976)]

[27] HILTON P. : *Localisation of nilpotent spaces : in Topology and its applications,*
[Lectures notes in Pure and Applied Mathematics - Dekker - (1975)] -et autres articles-

[28] HIRSCH G. : *Sur la structure multiplicative de l'anneau de cohomologie d'un espace fibré*
[C.R. Acad. Sci. Paris (1950)]

[29] KOSZUL J.L. : *Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression*
[Colloque de Topologie - Bruxelles - (1950)]

[30] KOSZUL J.L. : *Homologie et Cohomologie des algèbres de Lie* [Bulletin de la Soc. Math. de France 78, 65-127, (1950)]

[31] LERAY J. : *Sur l'homologie des groupes de Lie, des espaces homogènes et des espaces fibrés principaux* [Colloque de Topologie - Bruxelles (1950)]

[32] MILNOR J. : *The geometric realization of a semi simplicial complex* [Ann. of Math. 65, 357-362, (1957)]

[33] NIESSENDORFER et MILLER T : *Formal and coformal spaces* [Notre Dame preprint]

[34] OLNISHCHIK A.L. : *Topological invariants of homogeneous spaces* [Matem. Zametki 12 (6), 761-768 (1972)]

[35] QUILLEN D. : *Rational Homotopy Theory* [Ann. of Math. 90, 205-295 (1969)]

[36] SPANIER E. : Algebraic Topology (Mac. Graw. Hill)

[37] STEENROD N. : *The topology of fibre bundles* [Princeton University press (1951)]

[38] SULLIVAN D. : *Differential forms and the topology of manifolds* [Volume of proceedings of the Conference on manifolds, Tokyo, (1973)]

[39] SULLIVAN D. : *Infinitesimal computations in topology* [à paraître (1975)]

[40] SULLIVAN D. et VIGUE-POIRRIER M. : *The homology theory of the closed geodesic problem* [à paraître in the Journal of Differential Geometry]

[41] SWAN R.G. : *Thom's theory of differential forms on simplicial sets*

[42] THOM R. : *Opérations en cohomologie réelle* [Séminaire H. Cartan (1955)]

[43] THOM R. : Cours à l'Université de Chicago (1957)

[44] THOM R. : *L'homologie des espaces fonctionnels* [Colloque de Topologie algébrique - Louvain (1956)]

[45] THOMAS J.C. : *Fibrés minimaux algébriques et transgression* [Séminaire Lille-Valenciennes (1975-76)]

[46] WATKISS C. : *Cochaînes commutatives sur les ensembles simpliciaux*
[Séminaire Lille-Valenciennes (1975-76)]

[47] WATKISS C. : *The nilpotent model for a function space*
[Journées sur les formes différentielles - Luminy (1976)]

[48] WHITNEY H. : *Geometric Integration Theory*
[Princeton University - Press (1957)]

[49] WU WEN TSÜN. : 吴文俊: 代数拓朴的一个新函子, «科学通报», **7** (1975), 311—312.
吴文俊: 代数拓朴 *I** 函子论——齐性空间的实拓朴, «数学学报», **18** (1975), 162—172.

[50] ZISMAN M. : *Localisation des espaces nilpotents*
[Journées sur les formes différentielles - Luminy (1976)]

Daniel LEHMANN
Département de Mathématiques
Université de Lille I
B.P. 36
59650 VILLENEUVE D'ASCQ

# BIBLIOGRAPHIE EN HOMOTOPIE RATIONNELLE.

Daniel TANRÉ

Comme le montre la longue liste ci-après, la théorie du type d'homotopie rationnelle d'un espace a fourni de nombreux résultats. Dans "Infinitesimal Computations in Topology", Dennis Sullivan montre que les idées étaient déjà chez H. Poincaré, E. Cartan, G. De Rham, H. Cartan, J.L. Koszul, R. Thom, H. Whitney et D. Kan. Le support algébrique, sous sa forme actuelle, apparaît dans D. Quillen (1967). On peut ensuite distinguer deux courants :

- une vision de l'espace en CW-complexe dans J.F. Adams et P. Hilton (1956) et dans D. Quillen (1969) ;
- une vision de l'espace en tour de Postnikov, avec une structure commutative venant des formes différentielles : D. Sullivan (1971, 1977), S. Halperin (Mémoires S.M.F., 1983). Pour ces deux derniers articles, la date de parution tardive cache leur influence. Circulant sous la forme de preprint, de notes d'exposés, de cours, l'article de D. Sullivan pose les fondements mêmes de la théorie. Quant à "Lecture on minimal models", plusieurs tirages de preprint des universités de Lille et Toronto ont été épuisés avant cette parution à la S.M.F..

Une algébrisation du type d'homotopie rationnelle existe également dans les travaux de K.T. Chen. Ses connexions homologiques formelles ont la particularité de faire intervenir les formes différentielles et la structure cellulaire. Parmi les résultats cités en référence, le texte de Chen (1977, Bull. A.M.S.) fournira une vision d'ensemble des résultats et définitions.

Outre les travaux purement d'homotopie rationnelle, cette bibliographie comprend les principaux "articles historiques" ainsi que les développements dans d'autres domaines apportés par les techniques du modèle minimal : modèles en homologie cyclique, homotopie modérée (tame homotopy), feuilletages, enlacements,...

Récemment, J.E. Roos a mis en évidence un lien entre l'homotopie rationnelle et l'algèbre locale : un dictionnaire s'est alors développé pendant plusieurs années. Il a été mis à jour par L. Avramov et S. Halperin en 1986. Par homogénéité, les seuls articles d'algèbre locale cités ici sont ceux comportant un lien direct avec la topologie.

Lille, le 27 novembre 1986

[1] J.F. ADAMS
On the Cobar construction,
Proc. N.A.S. USA 42 (1956), p. 409-412.

[2] J.F. ADAMS, P. HILTON
On the chain algebra of a loop space,
Comment. Math. Helv. 30 (1955), p. 305-330.

[3] J. AGUADE
Realizability of cohomology algebras : a survey,
Public. Seccio' de Mat. (Barcelona) 26-2 (1982), p. 25-68.

[4] C. ALLDAY
On the rank of a space,
T.A.M.S. 166 (1972), p. 173-184.

[5] C. ALLDAY
Rational Whitehead products and a spectral sequence of Quillen,
Pacific J. of Math. 46 (1973), p. 313-323.

[6] C. ALLDAY
Rational Whitehead products and a spectral sequence of Quillen II,
Houston J. of Math. 3 (1977), p. 301-308.

[7] C. ALLDAY
On the rational homotopy of fixed point sets of torus actions,
Topology 17 (1978), p. 95-100.

[8] C. ALLDAY
Rational homotopy actions and torus actions,
Houston J. of Math. 5 (1979), p. 1-19.

[9] C. ALLDAY
A family of unusual torus group actions,
Contemporary Math. A.M.S. 36 (1985), p. 107-111.
Group actions on manifolds, Boulder, Colo. 1983.

[10] C. ALLDAY, S. HALPERIN
Lie group actions on spaces of finite rank,
Quart. J. of Math. Oxford 29 (1978), p. 63-76.

[11] C. ALLDAY, S. HALPERIN
La théorie de Sullivan-De Rham pour la cohomologie d'Alexander-Spanier,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 148-152.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[12] C. ALLDAY, S. HALPERIN
Sullivan-De Rham theory for rational Alexander-Spanier cohomology,
Houston J. of Math. 10-1 (1984), p. 15-33.

[13] C. ALLDAY, V. PUPPE
On the rational homotopy of circle actions,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1051 (1984), p. 533-539.
Algebraic Topology, Aarhus 1982.

[14] C. ALLDAY, V. PUPPE
On the localization theorem at the cochain level and free torus actions,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1172 (1985), p. 1-16.
Algebraic Topology, Göttingen 1984.

[15] C. ALLDAY, V. PUPPE
On the rational homotopy Lie algebra of a fixed point set of a torus action,
Preprint.

[16] M. ANDRÉ
Sur les fibrés en algèbre et en topologie,
Preprint, Lausanne (1981).

[17] P. ANDREWS, M. ARKOWITZ
Sullivan's minimal models and higher order Whitehead products,
Can. J. of Math. 30-5 (1978), p. 961-982.

[18] D. ANICK
Construction d'espaces de lacets et d'anneaux locaux à séries de Poincaré-Betti non rationnelles,
C.R.A.S. Paris 290 (1980).

[19] D. ANICK
A counterexample to a conjecture of Serre,
Ann. of Math. 115 (1982), p. 1-33.

[20] D. ANICK
Comment "A counterexample to a conjecture of Serre",
Ann. of Math. 116 (1982), p. 661.

[21] D. ANICK
The smallest $\Omega$-irrational CW-complex,
J. of Pure and Applied Algebra 28 (1983), p. 213-222.

[22] D. ANICK
Connections between Yoneda and Pontrjagin algebras,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1051 (1984), p. 331-350.
Algebraic Topology, Aarhus, 1982.

[23] D. ANICK
A model of Adams-Hilton type for fiber squares,
Illinois J. of Math. 29 (1985), p. 463-502.

[24] D. ANICK
Diophantine equations, Hilbert series and undecidable spaces,
Ann. of Math. 122 (1985), p. 87-112.

[25] D. ANICK
A rational homotopy analog of Whitehead's problem,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p. 28-31.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology and local rings 1983 Stockholm.

[26] D. ANICK
A loop space whose homology has torsion of all orders,
Pacific J. of Math. 123 (1986), p. 257-262.

[27] D. ANICK
On the homology of associative algebra,
T.A.M.S. 296 (1986), p. 641-659.

[28] D. ANICK
Computing rational homotopy groups is #P-Hard,
Preprint.

[29] D. ANICK
Generic algebras and CW-complexes,
Preprint.

[30] D. ANICK, S. HALPERIN
Commutative rings, algebraic topology, graded Lie algebras and the work of Jan-Erik Roos,
J. of Pure and Applied Algebra 38 (1985), p. 103-110.

[31] M. ARKOWITZ
Localization and H-spaces,
Aarhus Univ. Mat. Inst. Lecture Notes 44 (1976).

[32] M. ARKOWITZ
Formal differential graded algebras and homomorphisms,
Max-Planck Institüt, Bonn (1986).

[33] M. AUBRY
Un modèle rationnel de la suite spectrale de Serre,
J. of Pure and Applied Algebra 41 (1986), p. 1-8.

[34] M. AUBRY, J.M. LEMAIRE
Zero divisors in enveloping algebras of graded Lie algebras,
J. of Pure and Applied Algebra 38 (1985), p. 159-166.

[35] M. AUBRY, J.M. LEMAIRE
Sommes connexes fibrées en cercles,
Bull. S.M.F. 113 (1985), p. 459-462.

[36] M. AUBRY, J.M. LEMAIRE
Homotopies d'algèbres de Lie et de leurs algèbres enveloppantes,
Preprint.

[37] L. AVRAMOV
Local Algebra and Rational Homotopy,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 15-43.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[38] L. AVRAMOV
Golod homomorphisms,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p. 59-78.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology
and local rings 1983 Stockholm.

[39] L. AVRAMOV
Torsion in loop space homology,
Topology 25 (1986), p. 155-157.

[40] L. AVRAMOV, S. HALPERIN
Through the looking glass : a dictionary between rational homotopy theory and local algebra,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p. 1-27.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology
and local rings 1983 Stockolm.

[41] I. BABENKO
The Poincaré series of iterated loop spaces,
Russian Math. Surveys 34-3 (1979), p. 193-194.

[42] I. BABENKO
On analytical properties of Poincaré series of loop spaces,
Math. Zam. 27 (1980), p. 751-764.

[43] I. BABENKO
On real homotopy properties of complete intersections,
Math. Izvestija USSR 15 (1980), p. 241-258.

[44] J. BARGE
Structures différentiables sur les types d'homotopie simplement connexes,
Ann. Scient. E.N.S. 9 (1976), p. 1-33.

[45] H.J. BAUES
Rationale homotopietypen,
Bonn Preprint (1975), p. 1-13.

[46] H.J. BAUES
The chains on the loops and 4 dimensional homotopy type,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 44-59.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[47] H.J. BAUES
On homotopy classification problems
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1172 (1985), p. 17-55.
Algebraic Topology, Göttingen, 1984.

[48] H.J. BAUES
Algebraic Homotopy Theory,
à paraître.

[49] H.J. BAUES, J.M. LEMAIRE
Minimal models in homotopy theory,
Math. Ann. 225-3 (1977), p. 219-242.

[50] J.J. BENTEL
Infinite covering spaces and associated symmetric forms,
Thesis Stanford University (1974).

[51] R. BODY
Regular rational homotopy types,
Comment. Math. Helv. 50 (1975), p. 80-92.

[52] R. BODY, R. DOUGLAS
Homotopy types within a rational homotopy type
Topology 13 (1974), p. 209-214.

[53] R. BODY, R. DOUGLAS
Rational homotopy and unique factorization,
Pacific J. of Math. 75 (1978), p. 331-338.

[54] R. BODY, R. DOUGLAS
Tensor products of graded algebras and unique factorization,
Amer. J. of Math. 101 (1979), p. 909-914.

[55] R. BODY, R. DOUGLAS
Unique factorization of rational homotopy types
Pacific J. of Math. 90 (1980), p. 21-26.

[56] R. BODY, D. SULLIVAN
Homotopy types which telescope,
Preprint U.C.S.D. La Jolla California.

[57] R. BØGVAD
Graded Lie algebras in local algebra and rational homotopy,
Thèse Stockholm (1983).

[58] R. BØGVAD
Some elementary results on the cohomology of graded Lie algebras,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 156-166.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[59] R. BØGVAD
The enveloping algebra of a graded Lie algebra of global dimension two contains a free subalgebra on two generators.
J. of Pure and Applied Algebra 38 (1985), p. 213-216.

[60] R. BØGVAD, S. HALPERIN
On a conjecture of Roos,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1985), p. 120-127.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology and local rings 1983 Stockholm.

[61] A. BOREL
Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts,
Ann. of Math. 57 (1953), p. 115-207.

[62] P. BOULLAY, F. KIEFER, M. MAJEWSKI, H. SCHEERER, M. STELZER, M. UNSÖLD, E. VOGT
Tame homotopy via differential forms,
Preprint Berlin (1986).

[63] A.K. BOUSFIELD, V.K.A.M. GUGENHEIM
On P.L. De Rham theory and rational homotopy type,
Memoirs of A.M.S. 179 (1976).

[64] R. BROWN
Non-abelian cohomology and the homotopy classification of maps,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 167-172.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[65] D. BURGHELEA
The rational homotopy groups of Diff(M) and Homeo(M) in the stability range,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 763 (1979), p. 604-626.
Algebraic Topology, Aarhus, 1978.

[66] D. BURGHELEA
Cyclic homology and algebraic K-theory of spaces I,
American Math. Soc. Summer Institute in Algebraic K-theory, Boulder, Colorado (1983).

[67] D. BURGHELEA
Rational homotopy theory, group actions and algebraic K-theory of topological spaces,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 60-86.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[68] D. BURGHELEA, F. FIEDOROWICZ
Cyclic homology and algebraic K-theory of spaces II
Topology 25 (1986), p. 303-317.

[69] D. BURGHELEA, M. VIGUE-POIRRIER
A model for cyclic homology and algebraic K-theory of 1-connected topological spaces,
J. of Differential Geometry 22 (1985), p. 243-253.

[70] O. BURLET
Cobordismes de plongements et produits homotopiques,
Comment. Math. Helv. 46-3 (1971), p. 277-288.

[71] M. BÖKSTEDT
The rational homotopy of WhDiff(*),
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1051 (1984), p. 25-37
Algebraic Topology Aarhus, 1982.

[72] E. CARTAN
Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos,
C.R.A.S. Paris 187 (1928).

[73] H. CARTAN
La transgression dans un groupe de Lie et dans un fibré principal,
Colloque de Topologie (espaces fibrés), (1950), p. 58-71,
Bruxelles.

[74] H. CARTAN
Homologie et cohomologie d'une algèbre graduée,
Exposé séminaire Cartan, numéro 15 (1958).

[75] H. CARTAN
Théories cohomologiques,
Invent. Math. 35 (1976), p. 261-271.

[76] B. CENKL
Extensions of De Rham theory,
Northeastern University, Boston (1976).

[77] B. CENKL
Cohomology operations from higher products in the De Rham complex,
Preprint.

[78] B. CENKL, R. PORTER
Complétion de Lazard des groupes par les formes différentielles.
C.R.A.S. Paris 288 (1979).

[79] B. CENKL, R. PORTER
Malcev's completion of a group and differential forms,
J. of Differential Geometry, 15 (1980), p. 531-542.

[80] B. CENKL, R. PORTER
Modèles pour la théorie de l'homotopie modérée,
C.R.A.S. Paris 290 (1980).

[81] B. CENKL, R. PORTER
Tame homotopy
Colecao Atlas 13 (1980), p. 1-32
Scociedade Brasileira de Matematica Segundo Encontro
Brasileiro de Topologica.

[82] B. CENKL, R. PORTER
Cup-i product and higher homotopies in the De Rham complex,
Public. Seccio' de Mat. (Barcelona) 26-3 (1982), p. 9-29.

[83] B. CENKL, R. PORTER
Differential forms and torsion in the fundamental group,
Advances in Math. 48-2 (1983), p. 189-204.

[84] B. CENKL, R. PORTER
De Rham theorem with cubical forms,
Pacific J. of Math. 112 (1984), p. 35-47.

[85] B. CENKL, R. PORTER
Lazard completion of a group and free differential graded algebra models over subrings of the rationals,
Topology 23 (1984), p. 445-464.

[86] B. CENKL, R. PORTER
Algebraic categories and the homotopy theory of some CW-complexes,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 173-178
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[87] B. CENKL, R. PORTER
Foundations of De Rham theory,
Preprint Boston (1986).

[88] K.T. CHEN
Iterated integrals of differential forms and loop space homology,
Ann. of Math. 97 (1973), p. 217-246.

[89] K.T. CHEN
Fundamental groups. Nilmanifolds and iterated integrals,
Bull. A.M.S. 79 (1973), p. 1033-1035.

[90] K.T. CHEN
Iterated integrals. Fundamental groups and covering spaces,
T.A.M.S. 206 (1975), p. 83-98.

[91] K.T. CHEN
Reduced Bar constructions on De Rham complexes
Academic Press (1976)
Algebra Topology and Category.

[92] K.T. CHEN
Iterated Path Integrals,
Bull. A.M.S. 83 (1977), p. 831-879.

[93] K.T. CHEN
Extension of $C^\infty$-function Algebra by Integrals and Malcev completion of $\Pi_1$.
Advances in Math. 23 (1977), p. 181-210.

[94] K.T. CHEN
Loop spaces and differential forms,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 87-95
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[95] G. DE RHAM
Intégrales multiples et Analysis situs,
C.R.A.S. Paris 188 (1928).

[96] P. DELIGNE, P. GRIFFITHS, J. MORGAN, D. SULLIVAN
The real homotopy theory of Kähler manifolds,
Invent. Math. 29 (1975), p. 245-254.

[97] M. DJAHANBANI
Homotopie rationnelle d'un espace nilpotent et modèle minimal,
Thèse Lille (France), (1984).

[98] R. DOUGLAS
The uniqueness of Coproduct Decompositions for algebras over a field,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 673 (1978), p. 1-6.
Proceedings, University of Columbia, Vancouver, 1977.

[99] R. DOUGLAS
Positive weight homotopy types,
Illinois J. of Math. 27 (1983), p. 597-606.

[100] R. DOUGLAS, L. RENNER
Uniqueness of product and coproduct decompositions in rational homotopy theory,
T.A.M.S. 264 (1981), p. 165-180.

[101] A. DURFEE
Notes on mixed Hodge theory and rational homotopy theory,
Preprint.

[102] W. DWYER
The tame homotopy groups of a suspension,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 658 (1978), p. 165-168.

[103] W. DWYER
Tame Homotopy Theory,
Topology 18 (1979), p. 231-338.

[104] M. DYER
Rational homology and Whitehead products,
Pacific J. of Math. 40 (1972), p. 59-71.

[105] T. EKEDAHL
Two examples of smooth projective varieties with non-zero Massey products,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p. 128-132.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology and local rings 1983 Stockholm.

[106] F.T. FARRELL, W.C. HSIANG
On the rational homotopy groups of the diffeomorphism groups of discs, spheres and aspherical manifolds,
Proc. Symp. Pure Math. 32 (1978), p. 325-337.

[107] Y. FÉLIX
Dénombrement des types de K-homotopie. Théorie de la déformation,
Mémoires S.M.F. nouvelle série 3 (1980).

[108] Y. FÉLIX
Caractéristique d'Euler homotopique,
C.R.A.S. Paris 291 (1980).

[109] Y. FÉLIX
Modèles bifiltrés : une plaque tournante en homotopie rationnelle,
Can. J. of Math. XXXIII-26 (1981), p. 1448-1458.

[110] Y. FÉLIX
Espaces formels et Π-formels,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 96-108.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[111] Y. FÉLIX
Catégorie LS et invariant e,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 179-182.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[112] Y. FÉLIX, S. HALPERIN
Rational LS-category and its applications,
T.A.M.S. 273 (1982), p. 1-37.

[113] Y. FÉLIX, S. HALPERIN
Formal spaces with finite dimensional rational homotopy,
T.A.M.S. 273 (1982), p. 1-37.

[114] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, C. JACOBSSON, C. LÖFWALL, J.C. THOMAS
The radical of the homotopy Lie algebra,
Pub. IRMA 5 (1986)

[115] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, D. TANRÉ, J.C. THOMAS
The radical of $\Pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$ ,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p. 133-135.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology and local rings 1983 Stockholm.

[116] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS
Sur certaines algèbres de Lie de dérivations,
Ann. Inst. Fourier 32-4 (1982), p. 143-150.

[117] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS
The homotopy Lie algebra for finite complexes,
Publ. I.H.E.S. 56 (1983), p. 387-410.

[118] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS
LS-catégorie et suite spectrale de Milnor-Moore,
Bull. S.M.F. 111 (1983), p. 89-96.

[119] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS
Sur l'homotopie des espaces de catégorie 2,
Math. Scand. 55 (1984), p. 216-228.

[120] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS
The Gorenstein spaces,
Preprint.

[121] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J.C. THOMAS
The structure of $H^*(\Omega X;\mathbb{Z}_p)$,
Preprint.

[122] Y. FÉLIX, J.M. LEMAIRE
On the mapping theorem for LS-category,
Topology 24 (1985), p. 41-43.

[123] Y. FÉLIX, J.M. LEMAIRE
On the mapping theorem for LS-category II
Preprint.

[124] Y. FÉLIX, J.M. LEMAIRE, F. SIGRIST
Sur les cônes itérés et la catégorie de Lusternik-Schnirelmann,
C.R.A.S. Paris 290 (1980).

[125] Y. FÉLIX, D. TANRÉ
Sur la formalité des applications,
à paraître Congrès de Louvain, 1986.

[126] Y. FÉLIX, J.C. THOMAS
Homotopie rationnelle. Dualité et complémentarité des modèles,
Bull. Soc. Math. Belgique 23 (1981), p. 7-19.

[127] Y. FÉLIX, J.C. THOMAS
The radius of convergence of Poincaré series of loop spaces,
Invent. Math. 68 (1982), p. 257-274.

[128] Y. FÉLIX, J.C. THOMAS
Le Tor différentiel d'une fibration non nilpotente,
J. of Pure and Applied Algebra 38 (1985), p. 217-233.

[129] Y. FÉLIX, J.C. THOMAS
Module d'holonomie d'une fibration,
Bull. S.M.F. 113 (1985), p. 255-258.

[130] Y. FÉLIX, J.C. THOMAS
Sur l'opération d'holonomie rationnelle,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p.136-169.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology
and local rings 1983 Stockholm.

[131] Y. FÉLIX, J.C. THOMAS.
Extended Adams-Hilton construction,
Pacific J. of Math. 127 (1987).

[132] Y. FÉLIX, J.C. THOMAS
On the ubiquity of the rational homotopy Lie algebra,
à paraître Bull. Soc. Math. Belgique.

[133] Y. FÉLIX, J.C. THOMAS
Caractérisation des espaces de LS-catégorie deux
à paraître Illinois J. of Math.

[134] J. FRIEDLANDER, S. HALPERIN
An arithmetic characterization of the rational homotopy type
of certain spaces,
Invent. Math. 53 (1979), p. 117-138.

[135] J. FRIEDLANDER, S. HALPERIN
Distinct representatives varieties and rational homotopy,
Journal of number theory 11 (1979), p. 321-323.

[136] A.D. GAVRILOV
Effective computability of rational homotopy type,
Izv. Akad. Nauk SSSR 40-6 (1976), p. 1308-1331.

[137] M. GOLASINSKI
Some remarks on the rational homotopy type of diagrams and reduced $K_o$ ,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 187-191.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[138] T. GOODWILLIE
Cyclic homology, derivations and the free loop space,
Topology 24 (1985), p. 187-215.

[139] T. GOODWILLIE
The general linear group,
Ann. of Math. 121 (1985), p. 383-407.

[140] T. GOODWILLIE
Algebraic K-theory and cyclic homology,
Ann. of Math. 124 (1986), p. 347-402.

[141] P.A. GRIFFITHS, J.W. MORGAN
Rational homotopy theory and differential forms,
Progress in Math. Vol. 16 Birkhäuser (1981).

[142] P.P. GRIVEL
Formes différentielles et suites spectrales,
Ann. Inst. Fourier 29-3 (1979), p. 17-37.

[143] P.P. GRIVEL
Fibrés algébriques de fibre donnée,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 192-197.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[144] K. GROVE, S. HALPERIN
Contributions of rational homotopy to global problems in geometry,
Publ. I.H.E.S. 56 (1983), p. 379-385.

[145] K. GROVE, S. HALPERIN
Dupin hypersurfaces, group actions and the double mapping cylinder,
Preprint.

[146] K. GROVE, S. HALPERIN, M. VIGUÉ-POIRRIER
The rational homotopy theory of certain spaces with applications to geodesics,
Acta Math. 140 (1978), p. 277-303.

[147] V.K.A.M. GUGENHEIM
On Chen's iterated integrals,
Illinois J. of Math. 21-3 (1976), p. 703-715.

[148] V.K.A.M. GUGENHEIM
On the multiplicative structure of the De Rham theory,
J. of Differential Geometry 11 (1976), p. 309-314.

[149] V.K.A.M. GUGENHEIM
On the multiplicative structure of De Rham theory of induced fibrations,
Illinois J. of Math. 22 (1978), p. 604-609.

[150] V.K.A.M. GUGENHEIM, J. STASHEFF
On perturbations and $A_\infty$-structures,
Preprint.

[151] A. HAEFLIGER
Sur la cohomologie de Gelfand-Fuchs,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 484 (1974), p. 121-152.

[152] A. HAEFLIGER
Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs,
Ann. Scient. E.N.S. 9 (1976), p. 503-532.

[153] A. HAEFLIGER
Whitehead products and differential forms,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 652 (1978), p. 13-24.

[154] A. HAEFLIGER
Cohomology of Lie algebra and foliations,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 652 (1978), p. 1-12.

[155] A. HAEFLIGER
On the Gelfand-Fuchs cohomology,
Ens. Math. 24 (1978), p. 143-160.

[156] A. HAEFLIGER
Rational homotopy of the space of sections of a nilpotent bundle,
T.A.M.S. 273 (1982), p. 609-620.

[157] A. HAEFLIGER
The homology of nilpotent Lie groups made discrete,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 206-211.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[158] R.M. HAIN
Twisting cochains and duality between minimal algebras and minimal Lie algebras,
T.A.M.S. 277 (1983), p. 397-411.

[159] R.M. HAIN
Iterated integrals and homotopy periods,
Memoirs of A.M.S. 291 (1984).

[160] R.M. HAIN
The De Rham homotopy theory of complex algebraic varieties,
Preprint (1984).

[161] R.M. HAIN
Iterated integrals, intersection theory and link groups,
Topology 24 (1985), p. 45-66.

[162] R. M. HAIN
Mixed Hodge structures on homotopy groups,
Bull. A.M.S. 14 (1986), p. 111-114.

[163] S. HALPERIN
Finiteness in the minimal models of Sullivan,
T.A.M.S. 230 (1977), p. 173-199.

[164] S. HALPERIN
Rational fibrations, minimal models and fibrings of homogeneous spaces,
T.A.M.S. 244 (1978), p. 199-224.

[165] S. HALPERIN
Modèle de l'espace des lacets libres dans un espace à groupe fondamental non nul,
C.R.A.S. Paris 293 (1981).

[166] S. HALPERIN
Lectures on minimal models,
Mémoires S.M.F. nouvelle série 9-10 (1983).

[167] S. HALPERIN
Spaces whose rational homology and $\Psi$-homotopy are both finite dimensional,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 198-205.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[168] S. HALPERIN
The structure of $\Pi_*(\Omega S)$,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 109-117.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[169] S. HALPERIN
The radical of $\Pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$ II
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p. 199-210.
Nordic summer school on relations between algebraic topology and local rings 1983 Stockholm.

[170] S. HALPERIN
Rational homotopy type and Torus actions,
Preprint.

[171] S. HALPERIN
Toral actions and the invariant $\chi_\Pi(X)$ for non simply connected spaces,
Preprint.

[172] S. HALPERIN
Torsion gaps in the homotopy of finite complexes,
Preprint.

[173] S. HALPERIN, J.M. LEMAIRE
Suites inertes dans les algèbres de Lie graduées,
à paraître Math. Scand.

[174] S. HALPERIN, J.M. LEMAIRE
Notions of category in differential algebra,
Preprint.

[175] S. HALPERIN, G. LEVIN
High skeleta of CW-complexes,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p. 211-217.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology and local rings 1983 Stockholm.

[176] S. HALPERIN, J. STASHEFF
Obstructions to homotopy equivalences,
Advances in Math. 32 (1979), p. 233-279.

[177] S. HALPERIN, J.C. THOMAS
Rational equivalence of fibrations with fibre G/K,
Can. J. of Math. 24-1 (1982), p. 31-43.

[178] S. HALPERIN, C. WATKISS
Relative homotopical algebra,
Preprint.

[179] H.W. HENN
On almost rational co-H spaces,
Proc. A.M.S. 87 (1983), p. 164-168.

[180] P. HILTON
Homotopy theory and duality,
New York, Gordon and Breach (1965).

[181] P. HILTON, G. MISLIN, J. ROITBERG
Localization of nilpotent groups and spaces,
Math. Studies (North Holland) 15 (1975).

[182] P.J. HILTON, J. ROITBERG
On the Zeemann comparison theorem for the homology of quasi-nilpotent fibrations,
Quart. J. of Math. Oxford 27-108 (1976), p. 433-444.

[183] G. HIRSCH
Sur la structure multiplicative de l'anneau de cohomologie d'un espace fibré,
C.R.A.S. Paris 230 (1950).

[184] M.J. HOPKINS
Formulations of cocategory and the iterated suspension,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 212-226.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[185] W.C. HSIANG, R.E. STAFFELD
A model for computing rational algebraic K-theory of simply connected spaces,
Invent. Math. 68 (1982), p. 227-239.

[186] W.C. HSIANG, R.E. STAFFELD
Rational algebraic K-theory of a product of Eilenberg-Mac Lane spaces,
Contemporary Math. 19 (1983), p. 95-114.

[187] S.E. HURDER
Homotopy invariants of foliations,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 788 (1980), p. 49-61.
Topology symposium Siegen, 1979.

[188] S.E. HURDER
Dual homotopy invariants of G-foliations,
Topology 20 (1981), p. 365-387.

[189] S.E. HURDER
On the secondary classes of foliations with trivial normal bundle,
Comment. Math. Helv. 56 (1981), p. 307-326.

[190] S.E. HURDER
The classifying space of smooth foliations,
Illinois J. of Math. 29-1 (1985), p. 108-133.

[191] D. HUSEMOLLER
Loop space decompositions in the theory of exponents,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 118-131.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[192] D. HUSEMOLLER, J.C. MOORE, J. STASHEFF
Differential homological algebra and homogeneous spaces,
J. of Pure and Applied Algebra 5 (1974), p. 113-185.

[193] T. KADEISHVILI
On the homology theory of fibre spaces,
Russian Math. Surveys 35-3 (1980), p. 231-238.

[194] P.J. KAHN, H. SCHEERER
Localisation des groupes et des espaces nilpotents par téles-cope,
C.R.A.S. Paris 281 (1975).

[195] P.J. KAHN, H. SCHEERER
P-universality and fibrewise P-universality in the category of nilpotent groups,
Geom. Dedicata 14-2 (1983), p. 127-139.

[196] D.M. KAN
A combinatorial definition of homotopy groups,
Ann. of Math. 67 (1958), p. 282-312.

[197] D.M. KAN, E.Y. MILLER
Sullivan's de Rham complex is definable in terms of its 0-forms.
Proc. A.M.S. 57-2 (1976), p. 337-339.

[198] D.M. KAN, E.Y. MILLER
Homotopy types and Sullivan's algebras of 0-forms,
Topology 16 (1977), p. 193-197.

[199] T. KOHNO
On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of hypersurfaces,
Nagoya Math. J. 92 (1983), p. 21-37.

[200] T. KOHNO
Differential forms and the fundamental group of the complement of hypersurfaces,
Proc. A.M.S. 40 (1983), p. 655-662.

[201] T. KOHNO
Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures,
Invent. Math. 82 (1985), p. 57-75.

[202] S. KOJIMA
Nilpotent completions and Lie rings associated to link groups,
Comment. Math. Helv. 58 (1983), p. 115-134.

[203] J.L KOSZUL
Homologie et cohomologie des algèbres de Lie,
Bull. S.M.F. 78 (1950), p. 65-127.

[204] J.L. KOSZUL
Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression,
Colloque de Topologie (espaces fibrés) (1951), p. 73-81.

[205] S. KUMAR
A G-minimal model for principal G-bundles,
Ann. Inst. Fourier 32-4 (1982), p. 205-219.

[206] S. KUMAR
Rational homotopy theory of flag varieties associated to Kac Moody groups,
Preprint.

[207] L.A. LAMBE
Two exact sequences in rational homotopy theory relating cup products and commutators,
Proc. A.M.S. 96 (1986), p. 360-364.

[208] L.A. LAMBE, S.B. PRIDDY
Cohomology of nilmanifolds and torsion free, nilpotent groups,
T.A.M.S. 273 (1982), p. 39-55.

[209] A. LEGRAND
$\Pi_1$ et $d_2$ ,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 234-237.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[210] A. LEGRAND
2-classification formelle des G-espaces,
Publ. IRMA Lille 4-7 (1986).

[211] D. LEHMANN
Intégrales itérées,
Publications de Lyon 13 (1976), p. 1-12.

[212] D. LEHMANN
Théorie homotopique des formes différentielles,
S.M.F. Astérisque 45 (1977).

[213] D. LEHMANN
Sur la généralisation d'un théorème de Tischler à certains feuilletages nilpotents,
Indigations 82 (1979), p. 177-189.

[214] D. LEHMANN
Structures de Maurer-Cartan et $\Gamma_\theta$-structures I : Maurer-Cartan foliations,
Publ. IRMA Lille VI-3 (1984).

[215] D. LEHMANN
Structures de Maurer-Cartan et $\Gamma_\theta$-structures II : Espaces classifiants,
S.M.F. Astérisque 116 (1984), p. 134-148.

[216] D. LEHMANN
Modèle relatif des feuilletages,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p. 259-276.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology and local rings 1983 Stockholm.

[217] J.M. LEMAIRE
A finite complex, whose rational homotopy is not finitely generated,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 196 (1971), p. 114-120.

[218] J.M. LEMAIRE
Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 422 (1974).

[219] J.M. LEMAIRE
Homotopie rationnelle de quelques espaces projectifs tronqués,
C.R.A.S. Paris 280 (1975).

[220] J.M. LEMAIRE
Autopsie d'un meurtre dans l'homologie d'une algèbre de chaînes,
Ann. Scient. E.N.S. 11 (1978), p. 93-100.

[221] J.M. LEMAIRE
Sur le type d'homotopie rationnelle des espaces de Ganéa,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 238-247.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[222] J.M. LEMAIRE
Lusternik-Schnirelmann category : an introduction
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p. 259-276.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology and local rings 1983 Stockholm.

[223] J.M. LEMAIRE
Rational homotopy theory. Survey of recent results,
Preprint Nice 117 (1986).

[224] J.M. LEMAIRE, F. SIGRIST
Dénombrement des types d'homotopie rationnelle,
C.R.A.S. Paris 287 (1978).

[225] J.M. LEMAIRE, F. SIGRIST
Sur les invariants liés à la LS-catégorie,
Comment. Math. Helv. 56 (1981), p. 103-122.

[226] P. LÖFFLER, M. RAUSSEN
Symmetrien von Mannigfaltigkeiten und Rationale Homotopietheorie,
Math. Ann. 271 (1985), p. 549-576.

[227] C. LÖFWALL, J.E. ROOS
Cohomologie des algèbres de Lie graduées et série de Poincaré-Betti non rationnelles,
C.R.A.S. Paris 290 (1980).

[228] W. MEIER
Minimal models for non nilpotent spaces,
Comment. Math. Helv. 55 (1980), p. 622-633.

[229] W. MEIER
Rational universal fibrations and flag manifolds,
Math. Ann. 285-3 (1981), p. 329-340.

[230] W. MEIER
Some topological properties of Kähler manifolds and homogeneous spaces,
Math. Z. 183 (1983), p. 473-481.

[231] W. MEIER
On fibre inclusions and Kähler manifolds,
Proc. A.M.S. 88-1 (1983), p. 173-176.

[232] W. MEIER
On block automorphism and compact fibrations of flag manifolds,
Preprint.

[233] W. MEIER, R. STREBEL
Homotopy groups of acyclic spaces,
Quart. J. of Math. Oxford 32-125 (1981), p. 81-95.

[234] P. MERLE
Formalité des espaces et des applications continues,
Thèse Nice (France) (1983).

[235] W. MICHAELIS
Lie coalgebras,
Advances in Math. 38 (1980), p. 1-54.

[236] T. MILLER
Minimal Lie algebras in rational homotopy theory,
University of Notre Dame (1976).

[237] E.Y. MILLER
De Rham cohomology with arbitrary coefficients,
Topology 17 (1978), p. 193-203.

[238] T. MILLER, J. NEISENDORFER
Formal and coformal spaces,
Illinois J. of Math. 22 (1978), p. 565-580.

[239] J.W. MILNOR, J.C. MOORE
On the structure of Hopf algebras,
Ann. of Math. 81 (1965), p. 211-264.

[240] J.M. MOLLER, A. RAUSSEN
Rational homotopy type of spaces of maps into spheres and
complex projective spaces,
T.A.M.S. 292 (1985), p. 721-732.

[241] F. MOREL
Type d'homotopie rationnelle des Q-variétés et formes simpliciales basiques,
C.R.A.S. Paris 285 (1977).

[242] J. MORGAN
The algebraic topology of smooth algebraic varieties,
Publ. Math. I.H.E.S. 48 (1978), p. 137-204.

[243] J. NEISENDORFER
Lie algebras, coalgebras and rational homotopy theory for nilpotent spaces,
Pacific J. of Math. 74-2 (1978), p. 429-460.

[244] J. NEISENDORFER
The rational homotopy groups of complete intersections,
Illinois J. of Math. 23-2 (1979), p. 175-182.

[245] J. NEISENDORFER, L. TAYLOR
Dolbeault homotopy theory,
T.A.M.S. 245 (1978), p. 183-220.

[246] S.P. NOVIKOV
Analytic homotopy theory. Rigidity of homotopy integrals,
Soviet. Math. Dokl. 32 (1985), p. 285-288.

[247] J.F. OPREA
Lifting homotopy actions in rational homotopy theory,
J. of Pure and Applied Algebra 32 (1984), p. 177-190.

[248] J.F. OPREA
Decomposition theorems in rational homotopy theory,
Proc. A.M.S. 96 (1986), p. 505-512.

[249] J.F. OPREA
DGA homology decompositions and a condition of formality,
Illinois J. of Math. 30-1 (1986), p. 122-137.

[250] J.F. OPREA
Descent in rational homotopy theory,
Libertas mathematica 6 (1986), p. 153-165.

[251] J.F. OPREA
Infinite implications in rational homotopy theory,
Preprint.

[252] A. OUADGHIRI
Un modèle de Sullivan en homotopies modérées,
Thèse Lille (France) (1986).

[253] A. OUKILI
Sur l'homologie d'une algèbre de Lie différentielle,
Thèse Nice (France) (1978).

[254] S. PAPADIMA
On the formality of maps,
Ann. Univ. Timisoara Seria Math. 20 (1982), p. 30-40.

[255] S. PAPADIMA
Homotopie rationnelle des espaces de Thom et problèmes de lissage,
C.R.A.S. Paris 297 (1983).

[256] S. PAPADIMA
Poincaré duality and the rational classification of differentiable manifolds,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 268-272.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[257] S. PAPADIMA
The rational homotopy of Thom spaces and the smoothing of homology classes,
Comm. Math. Helv. 60 (1985), p. 601-614.

[258] S. PAPADIMA
The cellular structure of formal homotopy types,
J. of Pure and Applied Algebra 35 (1985), p. 171-184.

[259] S. PAPADIMA
The rational homotopy of Thom spaces and the smoothing of Isolated singularities,
Ann. Inst. Fourier 35 (1985), p. 119-135.

[260] H. POINCARÉ
Analysis Situs,
Journal de l'Ecole Polytechnique 1 (1895), p. 1-123.

[261] M.M. POSTNIKOV
Localization of topological spaces,
Russian Math. Surveys 32-6 (1977), p. 121-184.

[262] A. PROUTÉ
Vers un $\mathbb{Z}_p$-lemme de Hirsch,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 273-277.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[263] V. PUPPE
Cohomology of fixed point sets and deformation of algebras,
Manuscripta Math. 23 (1978), p. 343-354.

[264] V. PUPPE
Deformation of algebras and cohomology of fixed point sets,
Manuscripta Math. 30 (1979), p. 119-136.

[265] V. PUPPE
P.A. Smith theory via deformations,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 278-287.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[266] W. QUI-MING, WU. WEN-TSÜN
Theory of $I^*$-functor in algebraic topology : $I^*$-functor of a fiber space,
Scientia sinica XXI-1 (1978), p. 1-18.

[267] D. QUILLEN
Homotopical algebra,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 43 (1967).

[268] D. QUILLEN
Rational homotopy theory,
Ann. of Math. 90 (1969), p. 205-295.

[269] F. QUINN
Nilpotent classifying spaces and actions of finite groups,
Houston J. of Math. 4-2 (1978), p. 239-248.

[270] R. REE
Lie elements and an algebra associated with shuffles,
Ann. of Math. 68 (1958), p. 210-220.

[271] L.E. RENNER
Automorphism groups of minimal algebras,
Thesis, University of Saskatchewan (1975).

[272] V.S. RETAKH
Massey operations in Lie superalgebras and deformations of complexly analytic algebras,
Functional Analysis and its applications 11 (1977), p. 319-321.

[273] V.S. RETAKH
Massey operations in Lie superalgebras and differentials in the Quillen spectral sequence,
Functional Analysis and its applications 12 (1978), p. 319-321.

[274] J. ROÏTBERG
Nilpotent groups, Homotopy types and Rational Lie Algebras,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 418 (1974), p. 132-137.

[275] J.E. ROOS
Homology of loop spaces and local rings,
Proc. of 18th Scand. Congress Math. Aarhus, (1980).

[276] J.E. ROOS
A mathematical introduction to the 1983 Nordic Summer School,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p. III-VIII.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology and local rings 1983 Stockholm.

[277] H. ROTHENBERG, G.V. TRIANTAFILLOU
An algebraic model for simple homotopy types,
Math. Ann. 269 (1984), p. 301-331.

[278] R. RUCHTI
On formal spaces and their loop space,
Illinois J. of Math. 22 (1978), p. 96-107.

[279] M. SBAÏ
Cocatégorie rationnelle d'un espace topologique,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 288-291
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[280] H. SCHEERER
Arithmeticity of groups of fibre homotopy equivalence classes,
Manuscripta Math. 31 (1980), p. 413-424.

[281] H. SCHEERER
Fibrewise P-universal nilpotent fibration,
Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 98 (1984), p. 89-104.

[282] H. SCHEERER
On rationalized H and co-H spaces,
Manuscripta Math. 51 (1984), p. 63-87.

[283] H. SCHEERER
On decomposable H and co-H spaces,
Topology 25-4 (1986), p. 565-574.

[284] H. SCHEERER
One more facet of a mapping theorem for LS-category,
Public. Seccio' de Mat. (Barcelona) (1986).

[285] M. SCHLESSINGER, J. STASHEFF
The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory,
J. of Pure and Applied Algebra 38 (1985), p. 313-322.

[286] M. SCHLESSINGER, J. STASHEFF
Deformation theory and rational homotopy type,
à paraître Publ. Math. I.H.E.S.

[287] J.P. SERRE
Homologie singulière des espaces fibrés. Applications.
Ann. of Math. 54 (1951), p. 425-505.

[288] J.P. SERRE
Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens,
Ann. of Math. 58 (1953), p. 258-294.

[289] K. SHIBATA
Remarques sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur la sphère,
Bull. S.M.F. 108 (1980), p. 117-136.

[290] K. SHIBATA
On Haefliger's model for the Gelfand-Fuchs cohomology,
Japan J. of Math. 7 (1981), p. 379-415.

[291] K. SHIBATA
Sullivan-Quillen mixed type model for fibrations and the Haefliger model for the Gelfand-Fuchs cohomology,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 292-297.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[292] K. SHIBATA
Sullivan-Quillen mixed type model for fibrations,
J. of Math. Soc. Japan 36 (1984), p. 221-242.

[293] K. SHIBATA
Classifying spaces constructions in rational homotopy theory,
Advanced Studies in Pure Math. 9 (1986), p. 123-128.

[294] K. SHIBATA
A note on the mixed type models in the rational homotopy theory,
Preprint.

[295] K. SHIBATA
A geometric application of the duality between DGA and DGL,
Preprint.

[296] H. SHIGA
Rational homotopy type and self maps,
J. of Math. Soc. Japan 31 (1979), p. 427-434.

[297] H. SHIGA
On L-equivalence classes of submanifolds and formality,
Kodai Math. J. 5 (1982), p. 154-159.

[298] H. SHIGA
Rational homotopy type of cofibrations,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 298-307.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[299] H. SHIGA
Classifying maps and homogeneous spaces,
Preprint.

[300] H. SHIGA, M. TEZUKA
Rational fibrations, homogeneous spaces with positive Euler characteristics and Jacobian,
Preprint.

[301] H. SHIGA, N. YAGITA
Graded algebras having a unique rational homotopy type,
Proc. A.M.S. 85 (1982), p. 623-632.

[302] F. SILVEIRA
Rational homotopy theory of fibrations,
Pacific J. of Math. 113-1 (1984), p. 1-34.

[303] L. SMITH
Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence,
T.A.M.S. 129 (1967), p. 58-93.

[304] L. SMITH
Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 134 (1970).

[305] L. SMITH
On the characteristic zero cohomology of the free loop space,
Amer. J. of Math. 103 (1981), p. 887-910.

[306] R.E. STAFFELD
Rational algebraic K-theory of truncated polynomial rings over a ring of integers in a number field,
à paraître Proc. A.M.S.

[307] J. STASHEFF
Rational homotopy obstruction and perturbation theory,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 673 (1978), p. 7-31
Proceedings, University of British Columbia, Vancouver, 1977.

[308] J. STASHEFF
Rational Poincaré duality spaces,
Illinois J. of Math. 27 (1983), p. 104-109.

[309] J. STASHEFF
Hilton-Eckmann duality revisited,
Contemporary Math. 37 (1985),
Symposium on Algebraic Topology in honor of P. Hilton.

[310] D. SULLIVAN
Topology of manifolds an differential forms,
Proceedings of conference on manifolds (1973),
Tokyo, 1971.

[311] D. SULLIVAN
Genetics of Homotopy Theory and the Adams conjecture,
Ann. of Math. 100 (1974), p. 1-79.

[312] D. SULLIVAN
Infinitesimal computations in topology,
Publ. I.H.E.S. 47 (1977), p. 269-331.

[313] D. SULLIVAN, M. VIGUÉ-POIRRIER
The homology theory of the closed geodesic problem,
J. of Differential Geometry 11 (1976), p. 633-644.

[314] R.G. SWAN
Thom's theory of differential forms on simplicial sets,
Topology 14 (1975), p. 271-273.

[315] D. TANRÉ
Dualité d'Eckmann-Hilton à travers les modèles de Chen-Quillen-Sullivan,
Cahiers de Top. et Géom. Diff. XXII-1 (1981), p. 53-60.

[316] D. TANRÉ
Homotopie rationnelle : Modèles de Chen, Quillen, Sullivan,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1025 (1983).

[317] D. TANRÉ
Fibrations et classifiants,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 132-147.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[318] D. TANRÉ
Cohomologie de Harrison et espaces projectifs tronqués,
J. of Pure and Applied Algebra 38 (1985), p. 353-366.

[319] D. TANRÉ
Cohomologie de Harrison et type d'homotopie rationnelle,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p. 361-370.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology and local rings 1983 Stockholm.

[320] R. THOM
Opérations en cohomologie réelle,
Exposé séminaire Cartan, numéro 17 (1954).

[321] J.C. THOMAS
Homotopie rationnelle des fibrés de Serre,
Ann. Inst. Fourier 31-3 (1981), p. 71-90.

[322] J.C. THOMAS
Eilenberg-Moore models for fibrations,
T.A.M.S. 274-1 (1982), p. 203-225.

[323] J.C. THOMAS
Applications rationnellement équivalentes,
Bull. Soc. Math. Belgique (1982), p. 145-186.

[324] J.C. THOMAS
Algèbre de Lie de dérivations et fibrations,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 303-311,
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[325] G.H. TOOMER
LS category and the Moore spectral sequence,
Math. Z. 138 (1974), p. 123-143.

[326] G.H. TOOMER
The kernel of the rationalized Freundenthal suspension homomorphism,
J. of Pure and Applied Algebra 6 (1975), p. 305-311.

[327] G.H. TOOMER
Two applications of homology decompositions
Can. J. of Math. XXVII-2 (1975), p. 323-329.

[328] G.V. TRIANTAFILLOU
Äquivariante rationale Homotopietheorie,
Bonn Math. Schriften 110 (1978).

[329] G.V. TRIANTAFILLOU
Equivariant minimal models,
T.A.M.S. 274-2 (1982), p. 509-532.

[330] G.V. TRIANTAFILLOU
G-spaces with prescribed equivariant cohomology,
Proc. A.M.S. 89-4 (1983), p. 713-716.

[331] G.V. TRIANTAFILLOU
Rationalization of Hopf G-spaces,
Math. Z. 182 (1983), p. 485-500.

[332] G.V. TRIANTAFILLOU
An algebraic model for G-homotopy types,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 312-336.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[333] H. UNSÖLD
Topological minimal algebras and Sullivan-De Rham equivalence,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 337-343.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[334] N.T. VAN EST
A generalization of the Cartan-Leray spectral sequence,
Proc. Koninkl Ned. Akad. Série A (1958), p. 399-413.

[335] M. VIGUÉ-POIRRIER
Formalité d'une application continue,
C.R.A.S. Paris 289 (1979).

[336] M. VIGUÉ-POIRRIER
Réalisation de morphismes donnés en cohomologie et suite spectrale d'Eilenberg-Moore,
T.A.M.S. 265 (1981), p. 447-484.

[337] M. VIGUÉ-POIRRIER
Dans le fibré de l'espace des lacets libres, la fibre n'est pas en général T.N.C.Z.
Math. Z. 181 (1982), p. 537-542.

[338] M. VIGUÉ-POIRRIER
Homotopie rationnelle et croissance du nombre de géodésiques fermées,
Ann. Scient. E.N.S. 17 (1984), p. 413-431.

[339] M. VIGUÉ-POIRRIER
Sur la croissance des nombres de Betti de l'espace des lacets libres sur un espace donné,
S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 344-348.
Homotopie algébrique et algèbre locale, Luminy, 1982.

[340] M. VIGUÉ-POIRRIER
Cohomologie de l'espace des sections d'un fibré et cohomologie de Gelfand-Fuchs d'une variété,
Lecture Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), p.371-396.
Nordic summer school on relations between Algebraic Topology and local rings 1983 Stockhom.

[341] M. VIGUÉ-POIRRIER
Sur l'homotopie rationnelle des espaces fonctionnels,
Manuscripta Math. 56 (1986), p. 177-191.

[342] M. VIGUÉ-POIRRIER
Sur l'algèbre de cohomologie cyclique d'un espace 1-connexe. Applications à la géométrie des variétés,
à paraître Illinois J. of Math.

[343] C. WATKISS
Cochaînes commutatives sur les ensembles simpliciaux,
Publ. Internes Lille 107 (1976).

[344] WU.WEN-TSÜN
Theory of $I^*$-functor in algebraic topology : real topology of fiber square,
Scientia sinica XVIII-4 (1975), p. 464-482.

[345] WU.WEN-TSÜN
Theory of $I^*$-functor in algebraic topology : effective calculation and axiomatization of $I^*$-functor on complexes,
Scientia sinica XIX-5 (1976), p. 647-664.

[346] WU.WEN-TSÜN
On calculability of $I^*$-measure with respect to complex-union and other related constructions,
Kexue tongbao 25-3 (1980), p. 185-188.

[347] WU.WEN-TSÜN
A constructive theory of algebraic topology,
J. Sys. Sci. & Math. Scis. 1-1 (1981), p. 53-68.

[348] J.H.C. WHITEHEAD
An expression of the Hopf invariant as an integral,
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 33 (1947), p. 117-123.

[349] H. WHITNEY
Geometric Integration Theory,
Princeton University Press (1957).

[350] C.W. WILKERSON
Applications of minimal simplicial groups,
Topology 15 (1976), p. 111-130.

[351] T. YOSHIDA
On the rational homotopy of fixed point sets of circle actions,
Math. J. Okayama Univ. 21 (1979), p. 149-153.

ABSTRACT

========

A very well known theorem by de Rham says that the real cohomology of a smooth manifold $X$ may be computed from the algebra $\Omega_{DR}(X)$ of differential forms on $X$.

As an important corollary of his theory, Sullivan proves in fact that this algebra contains much more topological information about $X$. For instance, if $X$ is simply connected, the algebra gives the whole "real homotopy type" of $X$ (that is the groups $\pi_n(X) \otimes \mathbb{R}$ and the real Postnikov invariants). This result may be generalized to the case of "nilpotent" spaces, that is to spaces whose fundamental group is nilpotent and acts nilpotently on higher homotopy groups.

The principal tool, making the theory very efficient and computable for the applications, is that of minimal algebra (which is, in some sense, the algebraic counterpart to the Postnikov decomposition of a space) : to any topological space $X$, Sullivan associates some commutative differential graded algebra $A_{\mathbb{Q}}(X)$ over $\mathbb{Q}$ (improvment to $\mathbb{Q}$ of a construction made over $\mathbb{R}$ by Thom and Whitney). Then to any commutative DGA, $A$, over a field $k$ with characteristic $0$, Sullivan associates its "minimal" model $\mathcal{M}_A$, and explains (at least if $X$ is nilpotent) how to read the rational homotopy type of $X$ on $\mathcal{M}_{A_{\mathbb{Q}}(X)}$. Furthermore, if $X$ is a smooth manifold, he proves : $\mathcal{M}_{\Omega_{DR}(X)} = \mathcal{M}_{A_{\mathbb{Q}}(X)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.