

Astérisque

JEAN-BENOÎT BOST

JEAN-FRANÇOIS MESTRE

LAURENT MORET-BAILLY

**Sur le calcul explicite des « classes de Chern » des
surfaces arithmétiques de genre 2**

Astérisque, tome 183 (1990), p. 69-105

http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__183_69_0

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur le calcul explicite des “classes de Chern” des surfaces arithmétiques de genre 2.

Jean-Benoît BOST, Jean-François MESTRE, Laurent MORET-BAILLY.

Introduction

Soient K un corps de nombres, A l'anneau des entiers de K et $B = \text{Spec } A$. Dans cet article, nous expliquons comment calculer les invariants $\deg f_*\omega_{X/B}$ et

$$(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) := \deg \langle \omega_{X/B}, \omega_{X/B} \rangle,$$

définis à la Arakelov, attachés à une courbe semi-stable $f : X \rightarrow B$, de fibre générique lisse et de genre 2.

Rappelons que ces deux nombres jouent un rôle analogue, en géométrie arithmétique, à celui des invariants c_1^2 et c_2 d'une surface projective irréductible lisse sur un corps (cf. [7]). En effet, si $f : X \rightarrow B$ est un morphisme surjectif d'une telle surface vers une courbe lisse de genre q , qui fait de X une B -courbe semi-stable de genre g , alors $c_1^2(X)$ et $c_2(X)$ s'expriment simplement en fonction de g , q et des entiers $\deg f_*\omega_{X/B}$ et $(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B})$ (définis au moyen de la théorie classique de l'intersection). Explicitement, il vient d'après [7] (1.2.1 – 1.2.2) et les formules de Riemann-Roch et de Noether:

$$c_1^2(X) = (\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) + 2(2g - 2)(2q - 2)$$

$$c_2(X) = 12 \deg f_*\omega_{X/B} - (\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) + (2g - 2)(2q - 2).$$

En géométrie arithmétique, l'auto-intersection $(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B})$ est, de loin, le plus difficile à évaluer des deux nombres réels $\deg f_*\omega_{X/B}$ et $(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B})$. Pour le calculer, lorsque X est de genre 2, nous procédons en deux étapes:

- Au §1, nous exprimons $(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B})$ au moyen de l'intersection d'Arakelov (P, Q) de deux points de Weierstrass P et Q de X .

- Au §2, nous évaluons la “composante archimédienne” de (P, Q) : si σ est un plongement archimédien de K et si X_σ désigne la surface de Riemann $X \otimes_\sigma \mathbf{C}$, la valeur $G_\sigma(P, Q)$ de la fonction de Green-Arakelov de X_σ peut s'exprimer au moyen des valeurs en des points de 2-torsion de la fonction

de Néron $\|\theta\|$ sur la jacobienne $\text{Pic } X_\sigma$ et de l'intégrale sur $\text{Pic } X_\sigma$ de $\log \|\theta\|$ (cf. [2]).

Indiquons que l'on aurait pu calculer l'invariant $(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B})$ en utilisant la formule pour l'invariant δ de Faltings donnée dans [2] et la formule de Noether pour une surface arithmétique (cf. [5]) sous la forme précisée figurant dans [8]. La méthode suivie dans cet article évite de recourir à ce dernier résultat.

Dans les §3 et §4, nous effectuons le calcul numérique de $\deg f_* \omega_{X/B}$ et $(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B})$ dans des cas particuliers explicites. Nous considérons ainsi la courbe sur $\mathbf{Q}$, lisse, admettant comme modèle plan

$$y^2 = x(x-1)(4x^3 + 13x^2 - 17x + 4).$$

Cette courbe a réduction semi-stable sur $\mathbf{Q}$ et a bonne réduction en dehors de 21737. Son modèle stable $X \rightarrow B = \text{Spec } \mathbf{Z}$ est régulier, de fibre en 21737 une courbe nodale irréductible possédant un unique point singulier. On trouve:

$$\deg f_* \omega_{X/B} = -1,466599 \dots, \quad (\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) = 2,32 \dots$$

Nous considérons ensuite la courbe sur $\mathbf{Q}$, lisse, admettant comme modèle

$$y^2 + y = x^5.$$

Cette courbe, dont la jacobienne est à multiplications complexes par $\mathbf{Z}[\zeta_5]$, où ζ_5 désigne une racine primitive cinquième de 1, a bonne réduction potentielle partout. Sur l'anneau des entiers B' du corps $K' = \mathbf{Q}(\sqrt{1-\zeta_5}, \sqrt[5]{2})$, elle admet un modèle X' ayant bonne réduction partout. Le calcul donne:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[K' : \mathbf{Q}]} \deg f_* \omega_{X'/B'} &= \log 4\pi - \frac{1}{2} \log \Gamma(1/5)^5 \Gamma(2/5)^3 \Gamma(3/5) \Gamma(4/5)^{-1} \\ &= -2,597239125 \dots \\ \frac{1}{[K' : \mathbf{Q}]} (\omega_{X'/B'} \cdot \omega_{X'/B'}) &= 0,2162 \dots \end{aligned}$$

Au moyen de ces valeurs, on vérifie que X' fournit un contre-exemple à certaines conjectures sur les "classes de Chern" des surfaces arithmétiques, du moins dans leur version la plus naïve (cf. §4.5). Le lecteur pourra d'ailleurs constater qu'il en est de même de l'exemple précédent.

Signalons que les invariants des surfaces arithmétiques $\deg f_* \omega_{X/B}$ et $\deg \langle \omega_{X/B}, \omega_{X/B} \rangle$ considérés dans cet exposé sont en fait des invariants de courbes sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Plus précisément, pour toute courbe C lisse, irréductible et complète sur $\overline{\mathbf{Q}}$, de genre ≥ 1 , on peut trouver un corps de nombres K

sur lequel C est définie et a réduction semi-stable. Considérons alors un modèle semi-stable $X \rightarrow B$ de C sur l'anneau des entiers de K et posons

$$e(X) = [K : \mathbf{Q}]^{-1} \deg \langle \omega_{X/B}, \omega_{X/B} \rangle.$$

On peut montrer que le nombre réel $e(X)$ est indépendant du choix du corps K et du modèle X ([7], §5.4). Il en va de même du quotient

$$h(X) = [K : \mathbf{Q}]^{-1} \deg f_* \omega_{X/B},$$

qui n'est autre que la hauteur géométrique (ou hauteur de Faltings stable) de la jacobienne de X .

Nous utilisons dans cet exposé les définitions et notations introduites dans [9], auquel nous renvoyons pour tout ce qui concerne la géométrie d'Arakelov sur les surfaces arithmétiques. En fait, nous ne faisons appel qu'à la théorie de l'intersection d'Arakelov (cf. [1] et [5], §2) dans la version que permet d'en donner l'accouplement de Deligne (cf. [9] et [4]).

Précisons que, si M est une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$, nous munissons $\mathcal{O}_{M \times M}(\Delta_M)$ de la métrique bipermise normalisée comme en [9], (4.11.4.2), condition 4 — c'est-à-dire de la métrique définie par la fonction de Green-Arakelov sur $M \times M$ — et ω_M de la métrique qui s'en déduit (cf. [9], §4.11.3). Les “crochets de Deligne” considérés plus loin seront munis des métriques déduites de ces dernières. En outre, nous munissons $H^0(M, \omega_M)$ du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par

$$(\alpha | \beta) = \frac{i}{2} \int_M \alpha \wedge \bar{\beta}, \quad (1)$$

et $\Lambda^g H^0(M, \omega_M)$ de la métrique $\|\cdot\|$ qui s'en déduit:

$$\|\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_g\|^2 = \det((\alpha_k | \alpha_l))_{1 \leq k, l \leq g} \quad (2)$$

(cf. [9], §4.12). Ce dernier choix de métrique intervient pour définir $\deg f_* \omega_{X/B}$. Il est malheureusement quelque peu arbitraire. La métrique $\|\cdot\|'$ définie par

$$\|\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_g\|'^2 = \det \left(\frac{i}{2\pi} \int_M \alpha_k \wedge \bar{\alpha}_l \right)_{1 \leq k, l \leq g}$$

est peut-être plus naturelle. Nous noterons $\deg' f_* \omega_{X/B}$ le degré d'Arakelov de $f_* \omega_{X/B}$ calculé en munissant $\Lambda^g f_* \omega_{X/B}$ de cette métrique aux places archimédiennes. Il vient

$$\deg' f_* \omega_{X/B} = \deg f_* \omega_{X/B} + \frac{g}{2} [K : \mathbf{Q}] \log \pi$$

et

$$h'(X) := [K : \mathbf{Q}]^{-1} \deg' f_* \omega_{X/B} = h(X) + \frac{g}{2} \log \pi.$$

1. Faisceau canonique et points de Weierstrass des courbes de genre 2

1.1. Calcul du faisceau canonique

Dans ce paragraphe et le suivant, on se donne un schéma B et une B -courbe $f : X \rightarrow B$ projective lisse à fibres géométriquement connexes de genre 2.

Le $\mathcal{O}_B$ -module $f_*\omega_{X/B}$ est localement libre de rang 2 et le morphisme “canonique”

$$\pi : X \longrightarrow \Gamma := \mathbf{P}(f_*\omega_{X/B})$$

est un revêtement double (génériquement séparable dans chaque fibre) de Γ , qui est une B -courbe localement isomorphe à $\mathbf{P}_B^1$ pour la topologie de Zariski sur B . Par définition de π , on a un isomorphisme canonique

$$\omega_{X/B} \xrightarrow{\sim} \pi^*\mathcal{O}_\Gamma(1). \quad (3)$$

On note σ l’involution hyperelliptique de X , *i.e.* l’involution associée à π .

Si L et M sont deux faisceaux inversibles sur X , on note $\langle L, M \rangle$ l’accouplement de Deligne de L et M : c’est un faisceau inversible sur B , défini à isomorphisme unique près. Si D est un diviseur de Cartier sur X , on notera $\langle D, M \rangle$ pour $\langle \mathcal{O}_X(D), M \rangle$.

Soit $P : B \rightarrow X$ une section de f : l’image de P est un diviseur relatif dans X , également noté P . Ainsi, si M est un faisceau inversible sur X , on a (par définition de $\langle \cdot, \cdot \rangle$) un isomorphisme canonique $P^*M \xrightarrow{\sim} \langle P, M \rangle$.

Le diviseur $P + \sigma P$ est image réciproque par π du diviseur $\pi(P)$ sur Γ . Ce dernier est l’image d’une section de Γ sur B , de sorte que $\mathcal{O}_\Gamma(\pi(P))(-1)$ provient de B . Compte tenu de (3), on en déduit que $\omega_{X/B} \otimes \mathcal{O}_X(-P - \sigma P)$ est de la forme f^*L , où L est un faisceau sur B . On calcule L par restriction à la section P ; on obtient ainsi

$$L = \langle P, \omega_{X/B} \rangle \otimes \langle P, -P - \sigma P \rangle.$$

La formule d’adjonction

$$\langle P, P \rangle \xrightarrow{\sim} \langle -P, \omega_{X/B} \rangle$$

donne alors

$$L = \langle P, -2P - \sigma P \rangle.$$

On dispose ainsi d’un isomorphisme canonique

$$\omega_{X/B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(P + \sigma P) \otimes f^*\langle P, -2P - \sigma P \rangle. \quad (4)$$

Le cas qui nous intéresse est celui où P est un point de Weierstrass de X , c’est-à-dire où $P = \sigma P$:

PROPOSITION 1 – *Pour toute section P σ -invariante de f , il existe un unique isomorphisme*

$$\omega_{X/B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(2P) \otimes f^*\langle P, P \rangle^{\otimes -3} \quad (5)$$

induisant par restriction à la section P l'isomorphisme d'adjonction

$$\langle P, \omega_{X/B} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle P, P \rangle^{\otimes -1}.$$

De plus, lorsque $B = \text{Spec } \mathbb{C}$, l'isomorphisme (5) est une isométrie lorsque l'on munit les deux membres de leurs métriques hermitiennes canoniques d'Arakelov-Faltings.

Démonstration. L'existence d'un isomorphisme (5) résulte des calculs qui précèdent; il est clair qu'on peut, en multipliant par une section de $\mathcal{O}_B^\times$, imposer la condition d'adjonction qui détermine alors (5) de manière unique. Enfin, si $B = \text{Spec } \mathbb{C}$, l'isomorphisme (5) multiplie les métriques d'Arakelov par une constante, car ces métriques sont admissibles et ont donc même courbure. Comme l'isomorphisme d'adjonction est une isométrie, (5) est une isométrie au point P , donc partout. ■

1.2. Auto-intersection du faisceau canonique

Conservons les notations du paragraphe précédent, et considérons deux sections σ -invariantes P et Q de f . Outre l'isomorphisme (5), on a aussi

$$\omega_{X/B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(2Q) \otimes f^*\langle Q, Q \rangle^{\otimes -3}. \quad (6)$$

On peut alors calculer $\langle \omega_{X/B}, \omega_{X/B} \rangle$ en utilisant respectivement (5) et (6) pour chacun des arguments, ce qui donne

$$\langle \omega_{X/B}, \omega_{X/B} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle P, Q \rangle^{\otimes 4} \otimes \langle P, P \rangle^{\otimes -6} \otimes \langle Q, Q \rangle^{\otimes -6}. \quad (7)$$

Pour se débarrasser des auto-intersections au second membre, on remarque que le faisceau $\mathcal{O}_X(2P - 2Q)$ provient d'un faisceau sur B , comme il résulte par exemple de (5) et (6). Donc $\langle 2P - 2Q, P - Q \rangle$ est canoniquement trivial, ce qui donne

$$\langle P, Q \rangle^{\otimes 4} \xrightarrow{\sim} \langle P, P \rangle^{\otimes 2} \otimes \langle Q, Q \rangle^{\otimes 2}. \quad (8)$$

On obtient ainsi, en reportant dans (7):

PROPOSITION 2 – *Pour tout couple (P, Q) de sections σ -invariantes de f , il existe un isomorphisme canonique de faisceaux inversibles sur B*

$$\langle \omega_{X/B}, \omega_{X/B} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle P, Q \rangle^{\otimes -8}. \quad (9)$$

De plus, lorsque $B = \text{Spec } \mathbb{C}$, l'isomorphisme ci-dessus est une isométrie lorsque l'on munit les deux membres de leurs normes hermitiennes canoniques.

Démonstration. L'assertion sur les normes découle du fait que les isomorphismes (5), (6), (8) sont des isométries: cela résulte de la proposition 1 et, pour (8), du fait que la métrique d'Arakelov sur $\mathcal{O}_X(2P - 2Q)$ devient une métrique constante lorsque l'on trivialisé $\mathcal{O}_X(2P - 2Q)$ (puisque (5) et (6) sont des isométries) et que, par conséquent, la métrique sur $\langle 2P - 2Q, P - Q \rangle$, canoniquement trivialisé, est la métrique triviale. ■

1.3. Extension aux courbes singulières

On considère maintenant une B -courbe $f : X \rightarrow B$ projective et plate, à fibres géométriquement connexes de genre arithmétique 2 et de Gorenstein. Ainsi, l'on dispose encore d'un faisceau dualisant $\omega_{X/B}$ qui est un $\mathcal{O}_X$ -module inversible. On suppose de plus que f est lisse au-dessus d'un ouvert schématiquement dense U de B .

Soit P une section de f contenue dans l'ouvert de lissité de X sur B (de sorte que son image est un diviseur de Cartier dans X), et telle que $P|_U$ soit invariante par l'involution canonique de X_U . La proposition 1, appliquée au-dessus de U , affirme l'existence d'une section partout non nulle sur U du faisceau $\omega_{X/B} \otimes \mathcal{O}_X(-2P) \otimes f^*\langle P, P \rangle^{\otimes 3}$ laquelle, d'après nos hypothèses, peut être vue comme une section méromorphe s_P de ce faisceau sur X . Notons V_P le diviseur de s_P . Son support est disjoint de X_U , et l'on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\omega_{X/B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(2P) \otimes f^*\langle P, P \rangle^{\otimes -3} \otimes \mathcal{O}_X(V_P). \quad (10)$$

PROPOSITION 3 – *Conservons les hypothèses et les notations des deux derniers alinéas.*

- i) *La restriction du diviseur V_P à la section P est le diviseur nul; en particulier le faisceau $\langle P, V_P \rangle$ est trivial.*
- ii) *Si B est normal, ou si X est une B -courbe stable, alors le support de V_P est disjoint de P .*
- iii) *Si X est normal ou est une B -courbe stable, et si de plus les fibres de f sont irréductibles, alors $V_P = 0$.*

Démonstration. i) Si l'on restreint s_P à la section P , on trouve une section méromorphe de $\langle P, \omega_{X/B} \rangle \otimes \langle P, P \rangle$ prolongeant la trivialisé sur U donnée par la formule d'adjonction. Or celle-ci se prolonge en une trivialisé sur B puisque f est lisse au voisinage de P , d'où l'assertion.

ii) Si B est normal, on le remplace par son localisé en un point maximal du fermé $P^{-1}(\text{Supp } V_P)$, et X par son localisé au point correspondant de P . Alors B est de dimension 1 (le point fermé est support d'un diviseur de Cartier) et X est lisse sur B donc V_P est simplement un multiple de la fibre fermée. La conclusion résulte alors de i).

Le cas stable se déduit du précédent par réduction au cas "universel" où B est le champ des courbes stables de genre 2 (qui est lisse sur $\mathbf{Z}$ donc normal).

iii) résulte de ii) dans le cas normal: le support de V_P est de codimension 1 et disjoint de X_U donc est image réciproque d'un fermé de B , et ii) s'applique car B est automatiquement normal, X étant lisse sur B au voisinage de P . Le cas stable s'en déduit comme ci-dessus, la courbe stable de genre 2 universelle étant lisse sur $\mathbf{Z}$. ■

PROPOSITION 4 - *On conserve les hypothèses de la proposition précédente, et on considère une section Q de f satisfaisant aux mêmes hypothèses que P . L'isomorphisme (9) sur U se prolonge en un isomorphisme*

$$\langle \omega_{X/B}, \omega_{X/B} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle P, Q \rangle^{\otimes -8} \otimes \langle P, V_Q \rangle^{\otimes -1} \otimes \langle Q, V_P \rangle^{\otimes -1} \otimes \langle V_P, V_Q \rangle. \quad (11)$$

Démonstration. Il suffit de reprendre les calculs de 1.2. en utilisant (10). Les termes $\langle P, V_P \rangle$ et $\langle Q, V_Q \rangle$ disparaissent en vertu de la proposition 3 i), et l'on remarque que le faisceau $\mathcal{O}_X(2P - 2Q + V_P - V_Q)$ provient de la base, de sorte que son intersection avec $P - Q$ est triviale. ■

Résumons les résultats obtenus dans les trois derniers paragraphes:

THÉORÈME 1 - *Soient B un schéma, et $f : X \rightarrow B$ une B -courbe projective et plate, à fibres géométriquement connexes de genre arithmétique 2 et de Gorenstein, tel que f soit lisse au-dessus d'un ouvert schématiquement dense U de B .*

Soient P et Q deux sections de f contenues dans l'ouvert de lissité de f , tels que $P|_U$ et $Q|_U$ soient invariantes par l'involution hyperelliptique de X_U .

Supposons X normal ou B -stable, et les fibres de f irréductibles.

1) *On dispose d'un isomorphisme canonique*

$$\langle \omega_{X/B}, \omega_{X/B} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle P, Q \rangle^{\otimes -8}. \quad (12)$$

2) *Supposons de plus que B soit le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres et notons $(\cdot)$ l'intersection d'Arakelov sur X . Alors on a l'égalité numérique*

$$(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) = -8(P \cdot Q). \quad (13)$$

Démonstration. 1) résulte de (11) et de la proposition 3, iii), et 2) de ce que l'isomorphisme (12) est une isométrie aux places archimédiennes d'après la proposition 1. ■

2. La fonction de Green-Arakelov d'une surface de Riemann de genre 2

2.1. Rappels sur la fonction $\|\theta\|$ et la fonction G

Rappelons quelques formules données dans [5].

Soit X une surface de Riemann compacte et connexe de genre $g > 0$.

La courbe X s'identifie à une sous-variété complexe de $\text{Pic}^1 X$ grâce au plongement jacobien $j : X \longrightarrow \text{Pic}^1 X$, qui associe à un point x de X la classe du fibré $\mathcal{O}(x)$ dans $\text{Pic} X$. On désigne par Θ le sous-ensemble analytique de $\text{Pic}^{g-1} X$, de codimension 1, constitué des sommes de $g - 1$ éléments de X .

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_g)$ une base orthonormée de $H^0(X, \omega_X)$, muni du produit scalaire défini par la formule (1) (avec $M = X$). Notons α'_k l'unique forme différentielle de type $(1, 0)$ sur $\text{Pic} X$ invariante par translation et telle que $\alpha_k = j^* \alpha'_k$ et posons :

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{i}{2g} \sum_{k=1}^g \alpha_k \wedge \bar{\alpha}_k \\ \mu &= \frac{i}{2} \sum_{k=1}^g \alpha'_k \wedge \bar{\alpha}'_k.\end{aligned}$$

Ce sont des formes différentielles positives sur X et $\text{Pic} X$, respectivement, indépendantes du choix de la base $(\alpha_1, \dots, \alpha_g)$. On a :

$$\int_X \nu = 1 \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{g} j^* \mu. \quad (14)$$

La $2g$ -forme $\frac{1}{g!} \mu^g$ définit une mesure de Haar sur $\text{Pic} X$, pour laquelle chacune des composantes $\text{Pic}^k X$ de $\text{Pic} X$ est de mesure 1.

Le fibré en droites $\mathcal{O}(\Theta)$ sur $\text{Pic}^{g-1} X$ possède une unique métrique $\|\cdot\|_{\mathcal{O}(\Theta)}$ telle que :

1. la forme de courbure de $\mathcal{O}(\Theta)$ muni de cette métrique soit $-2\pi i \mu$;
2. si l'on pose $\|\theta\| = \|\mathbf{1}\|_{\mathcal{O}(\Theta)}$, où $\mathbf{1}$ désigne la section canonique, de diviseur Θ , du fibré $\mathcal{O}(\Theta)$, alors :

$$\int_{\text{Pic}^{g-1} X} \|\theta\|^2 \frac{1}{g!} \mu^g = 2^{-g/2}.$$

Si Z est une matrice dans le demi-espace de Siegel $\mathcal{H}_g$, on pose pour

tout $z \in \mathbf{C}^g$:

$$\begin{aligned}\theta(z; Z) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}^g} \exp(\pi i {}^t n \cdot Z \cdot n + 2\pi i {}^t n \cdot z) \\ \|\theta\|_0(z; Z) &= (\det Y)^{\frac{1}{4}} \exp(-\pi {}^t y \cdot Y^{-1} \cdot y) \mid \theta(z; Z) \mid,\end{aligned}$$

où Y (resp. y) désigne la partie imaginaire de Z (resp. z).

On pose aussi, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^g \times \mathbf{R}^g$:

$$\theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](0; Z) = \exp(\pi i {}^t a \cdot Z \cdot a + 2\pi i {}^t a \cdot b) \theta(Za + b; Z).$$

Supposons maintenant le groupe $H_1(X, \mathbf{Z})$ muni d'une base symplectique, c'est-à-dire d'une base $\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ telle que

$$a_i \cdot a_j = 0, \quad b_i \cdot b_j = 0, \quad a_i \cdot b_j = \delta_{ij}.$$

Notons $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ la base "canonique" de $H^0(X, \omega_X)$ et $\Omega = (\Omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq g}$ la matrice des périodes associées à $\mathcal{B}$. Elles sont définies par les relations :

$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \int_{b_i} \omega_j = \Omega_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq g).$$

La variété abélienne $\text{Pic}^0 X$ s'identifie alors à $\mathbf{C}^g / \mathbf{Z}^g + \Omega \mathbf{Z}^g$. Compte tenu de cette identification, on a l'égalité de formes différentielles sur $\text{Pic}^0 X$:

$$\mu = \frac{i}{2} \sum_{k, l=1}^g (Y^{-1})_{kl} dz_k \wedge d\bar{z}_l,$$

où Y désigne la partie imaginaire de Ω . Le diviseur des zéros de $\theta(\cdot; \Omega)$ est $\mathbf{Z}^g + \Omega \mathbf{Z}^g$ -périodique et définit donc un diviseur Θ_0 de $\text{Pic}^0 X$. Il existe un unique élément $\Delta_{\mathcal{B}}$ de $\text{Pic}^{g-1} X$ tel que $\Theta = \Theta_0 + \Delta_{\mathcal{B}}$, et l'on a pour tout $z \in \mathbf{C}^g$:

$$\|\theta\|([z] + \Delta_{\mathcal{B}}) = \|\theta\|_0(z; \Omega).$$

De plus, $2\Delta_{\mathcal{B}}$ est la classe de ω_X dans $\text{Pic}^{2g-2} X$.

Rappelons aussi que la fonction de Green-Arakelov de X est l'unique fonction

$$G : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

non nulle en dehors de la diagonale telle que pour tout $x \in X$, $\log G(x, \cdot)$ soit une fonction intégrable sur X et vérifie les conditions :

$$\int_X \log G(x, y) \nu(y) = 0 \tag{15}$$

$$d' d'' \log G(x, \cdot) = \pi i (\nu - \delta_x), \tag{16}$$

où δ_x désigne la masse de Dirac en x .

Enfin, nous notons $\|\cdot\|_A$ la métrique d'Arakelov sur ω_X . Sa 2-forme de courbure est égale à $-2\pi i (2g - 2)\nu$.

2.2. Les invariants $\|\Delta_2\|(X)$ et $\|H\|(X)$ et la fonction $\|J\|$

Nous supposons dorénavant que le genre de X est égal à 2. La courbe X est donc hyperelliptique. Nous noterons σ l'involution hyperelliptique et $\mathcal{W}$ l'ensemble des six points de Weierstrass de X , c'est-à-dire des points fixes de σ (cf. §1.1).

La courbe X s'identifie au diviseur Θ par le plongement jacobien j . Nous pratiquons désormais cette identification. Nous considérons ainsi les points de X comme des éléments de $\text{Pic}^1 X$.

Notons K la classe d'isomorphisme de ω_X dans $\text{Pic}^2 X$. L'involution $t \mapsto K - t$ de $\text{Pic}^1 X$ laisse invariants $\|\theta\|$, μ et Θ ; sa restriction à Θ , identifié à X , coïncide avec σ . En particulier, pour tout point $W \in \mathcal{W}$, on a $2W = K$. De plus, $\sum_{W \in \mathcal{W}} W = 3K$.

Il est assez facile d'exprimer à une constante additive près la fonction $\log G$ au moyen de la fonction $\log \|\theta\|$ (cf. *infra*, identités (34) à (37)). La constante additive en question est déterminée par la condition (15) et son calcul exige donc *a priori* l'évaluation de l'intégrale sur X de $\log \|\theta\|$ composé avec le plongement jacobien, convenablement translaté. Heureusement, il est possible d'exprimer une telle intégrale au moyen de certaines valeurs de $\log \|\theta\|$ et de l'intégrale de $\log \|\theta\|$ sur $\text{Pic}^1 X$. Cela permet de calculer $G(P, Q)$, lorsque $P, Q \in \mathcal{W}$, directement à partir d'une matrice des périodes de X , sans faire intervenir le plongement jacobien de X .

Il est commode, pour ce calcul, d'introduire deux invariants $\|\Delta_2\|(X)$ et $\|H\|(X)$ attachés à la courbe X , ainsi qu'une fonction $\|J\|$ sur $X \times X$ (cf. [2]).

Nous posons, pour toute matrice Z dans le demi-espace de Siegel $\mathcal{H}_2$:

$$\Delta_2(Z) = 2^{-12} \prod_{(a,b) \in \mathcal{P}} \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right] (0; Z)^2,$$

où $\mathcal{P}$ désigne un ensemble de représentants, modulo $\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2$, des couples $(a, b) \in (\frac{1}{2}\mathbf{Z})^2 \times (\frac{1}{2}\mathbf{Z})^2$ tels que $4 {}^t a.b$ soit pair. Comme fonction de Z , Δ_2 est une forme $\text{Sp}_4(\mathbf{Z})$ -modulaire, de poids 10 et non nulle sur le complémentaire de l'orbite sous $\text{Sp}_4(\mathbf{Z})$ des matrices diagonales dans $\mathcal{H}_2$. Nous définissons alors une fonction $\|\Delta_2\|$ sur $\mathcal{H}_2$, invariante sous $\text{Sp}_4(\mathbf{Z})$, en posant :

$$\|\Delta_2\|(Z) = (\det \text{Im } Z)^5 \mid \Delta_2(Z) \mid.$$

Soit Ω la matrice des périodes de X associée à une base symplectique $\mathcal{B}$ de $H_1(X, \mathbf{Z})$. Le nombre réel strictement positif $\|\Delta_2\|(\Omega)$ ne dépend que de X ; nous le noterons $\|\Delta_2\|(X)$. Soit $\mathbf{P}$ l'ensemble des 10 points P de $\text{Pic}^1 X \setminus \Theta$ tels que $2P = K$; c'est aussi l'ensemble des points de $\text{Pic}^1 X$ de

la forme $P + Q + R - K$, où P , Q et R sont trois points de Weierstrass de X distincts. Il vient :

$$\|\Delta_2\|(X) = 2^{-12} \prod_{M \in \mathbf{P}} \|\theta\|^2(M).$$

Par ailleurs, nous posons

$$\log \|H\|(X) = \int_{\text{Pic}^1 X} \log \|\theta\| \frac{\mu^2}{2}.$$

Nous posons, pour tout $(z, z') \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$:

$$J(z, z') = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial z_1}(z, \Omega) & \frac{\partial \theta}{\partial z_1}(z', \Omega) \\ \frac{\partial \theta}{\partial z_2}(z, \Omega) & \frac{\partial \theta}{\partial z_2}(z', \Omega) \end{vmatrix}.$$

Nous définissons alors une fonction $\|J\|$ sur $X \times X$, indépendante du choix de $\mathcal{B}$, en posant pour tout couple $(x, x') \in X \times X$:

$$\|J\|(x, x') = (\det Y) \exp[-\pi {}^t y \cdot Y^{-1} \cdot y - \pi {}^t y' \cdot Y^{-1} \cdot y'] |J(z, z')|,$$

où z (resp. z') désigne un point de $\mathbf{C}^2$ tel que $x - \Delta = [z]$ (resp. $x' - \Delta = [z']$) dans $\text{Pic}^0(X) = \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2 + \Omega\mathbf{Z}^2$, et où y (resp. y') désigne la partie imaginaire de z (resp. z').

Pour tout couple (P, Q) de points de Weierstrass de X distincts, on dispose de la relation de Rosenhain (cf. [14], p. 433):

$$\|J\|(P, Q) = \pi^2 \prod_{W \in \mathcal{W} \setminus \{P, Q\}} \|\theta\|(P + Q + W - K). \quad (17)$$

2.3. Fonction de Green et points de Weierstrass

Pour évaluer les termes archimédiens dans l'intersection d'Arakelov de deux points de Weierstrass d'une surface arithmétique de genre 2, nous ferons appel au théorème suivant:

THÉORÈME 2 (cf. [2])— *Pour tout couple (P, Q) de points de Weierstrass de X distincts, on a*

$$G(P, Q)^2 = (2\pi)^{-2} \|\Delta_2\|(X)^{-1/4} \|H\|(X) \|J\|(P, Q).$$

En posant, pour tout $M \in \mathbf{P}$, $\varepsilon_{PQ}(M) = 1$ si M est de la forme $P + Q + W - K$ avec $W \in \mathcal{W} \setminus \{P, Q\}$, et $\varepsilon_{PQ}(M) = -1$ sinon, on peut réécrire cette formule comme suit:

$$G(P, Q)^4 = 4 \prod_{M \in \mathbf{P}} \|\theta\|(M)^{\varepsilon_{PQ}(M)} \|H\|(X)^2.$$

On en déduit:

COROLLAIRE – Pour tout point de Weierstrass P de X , on a

$$\prod_{Q \in \mathcal{W} \setminus \{P\}} G(P, Q)^2 = 4 \|\Delta_2\| (X)^{-1/4} \|H\| (X)^5.$$

La démonstration du théorème 2 figure en appendice, à la fin de l'article.

3. Une famille de courbes de genre 2

3.1. La courbe C_F d'équation $y^2 + y = F(x)/x(x-1)$.

Dans ce paragraphe et les suivants, on considère un polynôme unitaire de degré 3

$$F(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$$

à coefficients dans un anneau intègre A , tel que $F(0)$ et $F(1)$ soient *inversibles* dans A . On s'intéressera notamment au cas *universel* où a, b, c sont des indéterminées et où A est l'anneau $\mathbf{Z}[a, b, c, c^{-1}, (1 + a + b + c)^{-1}]$.

Posons $B = \text{Spec } A$ et notons $\bar{F}$ l'homogénéisé de F :

$$\bar{F}(X, T) = T^3 F(X/T).$$

Vu l'hypothèse sur F , la fonction rationnelle $F(x)/x(x-1)$ sur $\mathbf{P}_B^1$ détermine un B -morphisme

$$\begin{aligned} \beta : \mathbf{P}_B^1 &\longrightarrow \mathbf{P}_B^1 \\ (X : T) &\longmapsto (\bar{F}(X, T) : XT(X - T)). \end{aligned}$$

De même la fonction $y^2 + y$ détermine un B -morphisme

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbf{P}_B^1 &\longrightarrow \mathbf{P}_B^1 \\ (Y : Z) &\longmapsto (Y^2 + YZ : Z^2) \end{aligned}$$

(par convention on identifie $\lambda \in \mathbf{A}^1$ à $(\lambda : 1) \in \mathbf{P}^1$, et on pose $\infty = (1 : 0)$). On définit alors la courbe C_F “d'équation $y^2 + y = F(x)/x(x-1)$ ” comme le B -schéma produit fibré au-dessus de $\mathbf{P}_B^1$ de $\alpha : \mathbf{P}_B^1 \rightarrow \mathbf{P}_B^1$ et $\beta : \mathbf{P}_B^1 \rightarrow \mathbf{P}_B^1$. On dispose ainsi d'un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} C_F & \xrightarrow{\beta'} & \mathbf{P}_B^1 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathbf{P}_B^1 & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{P}_B^1. \end{array}$$

PROPOSITION 5 -

i) Le morphisme structural $f : C_F \rightarrow B$ est plat et localement d'intersection complète; ses fibres géométriques sont intègres, de genre arithmétique 2 et ont au plus un point singulier.

ii) Le morphisme f admet trois sections W_0, W_1 et W_∞ , contenues dans le lieu de lissité de f et se projetant respectivement par π sur les sections 0, 1, ∞ de $\mathbf{P}_B^1$ et par β' sur la section ∞ de $\mathbf{P}_B^1$; le revêtement double π est ramifié le long de W_0, W_1 et W_∞ , tandis que β' y est étale.

iii) Si $2 = 0$ dans l'anneau A , π est étale hors de W_0, W_1 et W_∞ , et C est lisse sur B .

iv) Supposons que A soit un corps de caractéristique $\neq 2$. Notons $R(X)$ le polynôme (de degré 3) $X(X-1) + 4F(X)$ et désignons par C'_F la courbe dans $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)_B$ d'équation affine

$$z^2 = \frac{R(x)}{x(x-1)}.$$

On dispose d'un diagramme commutatif, dont la première ligne est un isomorphisme:

$$\begin{array}{ccc} C_F & \xrightarrow{\iota} & C'_F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathbf{P}_B^1 & = & \mathbf{P}_B^1 \end{array}$$

où π' et ι sont donnés en coordonnées affines par

$$\pi'(x, z) = x \quad \text{et} \quad \iota(x, y) = (x, 2y + 1).$$

Par conséquent, π est ramifié exactement aux points 0, 1, ∞ et au-dessus des zéros de R . De plus, un point de C est singulier (resp. singulier ordinaire) si et seulement si son image par β dans $\mathbf{P}_B^1$ est à distance finie et est racine multiple (resp. double) de $R(x)$. En particulier, la courbe C_F admet au plus un point singulier.

Démonstration. Par définition, C_F est définie dans $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)_B$ par le polynôme bihomogène $Z^2 \bar{F}(X, T) - XT(X-T)(Y^2 + YZ)$. Ainsi C_F est un diviseur relatif dans $(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)_B$; il est donc plat et localement d'intersection complète sur B .

Montrons ii). L'existence de W_0, W_1 et W_∞ est immédiate. De plus la réunion (disjointe) de ces trois sections est l'image réciproque par β' de la

section à l'infini de $\mathbf{P}_B^1$. Cela implique que β' est étale, et donc que C est lisse sur B , le long de W_0 , W_1 et W_∞ . Enfin α est ramifié à l'infini, d'où l'assertion sur π .

Si $2 = 0$ dans A , α est étale en-dehors de la section à l'infini de $\mathbf{P}_B^1$. L'assertion sur π dans iii) en résulte par changement de base, ainsi que la lissité de C compte tenu de ii).

Supposons maintenant 2 inversible dans A . Les assertions de iv) sont évidentes. De plus, lorsque A est un corps de caractéristique $\neq 2$, C_F est irréductible: sinon, comme elle est revêtement double de $\mathbf{P}_B^1$, elle serait réunion de deux composantes isomorphes à $\mathbf{P}_B^1$; cela est exclu, compte tenu par exemple de la ramification en W_0 .

Reste à établir que les fibres géométriques de C_F sont de genre arithmétique 2. Il suffit pour cela de considérer le cas universel. L'assertion est alors claire au point générique de B et donc toujours vérifiée, puisque B est irréductible et f plat. ■

REMARQUE. Si A est un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$, toute courbe sur A , complète, lisse et de genre 2 est isomorphe à une courbe C_F de la forme ci-dessus, avec R sans racine multiple.

3.2. Calcul¹ de $\langle \omega_{C_F/B}, \omega_{C_F/B} \rangle$

Conservons les notations de 3.1. et plaçons-nous dans le cas universel. Le schéma B est alors lisse sur $\mathbf{Z}$ et de dimension relative 3, de sorte que, d'après la proposition 5 i), C_F est un schéma de Cohen-Macaulay et de dimension 5. D'autre part, il résulte de la proposition 5, iii) et iv), que le lieu singulier relatif de f est fini sur B et se projette sur un fermé strict de B ; il est donc de codimension ≥ 2 (égale à 2, en fait) dans C_F . On en conclut (critère de Serre) que C_F est un schéma normal et l'on peut donc appliquer le théorème 1 à $f : C_F \rightarrow B$, en prenant pour P et Q deux des sections W_0, W_1, W_∞ . On obtient ainsi, pour $i, j \in \{0, 1, \infty\}$, un isomorphisme

$$\langle \omega_{C_F/B}, \omega_{C_F/B} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle W_i, W_j \rangle^{\otimes -8}.$$

Si de plus $i \neq j$, alors W_i et W_j sont disjoints donc $\langle W_i, W_j \rangle$ est canoniquement trivialisé; il en est donc de même de $\langle \omega_{C_F/B}, \omega_{C_F/B} \rangle$, cette trivialisatation dépendant *a priori* de i et j .

Par changement de base, cela s'étend immédiatement à une base B quelconque; d'où:

¹ Les résultats de cette section ne sont pas utilisés dans la suite de l'article.

PROPOSITION 6 – Pour $(i, j) \in \{0, 1, \infty\}^2$, on dispose d'un isomorphisme commutant à tout changement de base

$$\langle \omega_{C_F/B}, \omega_{C_F/B} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle W_i, W_j \rangle^{\otimes -8} \quad (18)$$

qui, lorsque C_F est lisse sur B , coïncide avec l'isomorphisme (9) (pour $X = C_F$, $P = W_i$, $Q = W_j$). De plus il existe une trivialisatıon de $\langle \omega_{C_F/B}, \omega_{C_F/B} \rangle$ sur B , commutant à tout changement de base. ■

3.3. Calcul de $f_*\omega_{C_F/B}$

Sous les hypothèses de 3.1. notons x et y les fonctions rationnelles sur C_F définies respectivement par les morphismes π et β' et posons $z = 2y + 1$. Supposons d'abord C_F lisse sur B . On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on a alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(x) &= 2W_0 - 2W_\infty, \\ \operatorname{div}(z) &= \operatorname{div}(R(x)) - W_0 - W_1 + 2W_\infty, \\ \operatorname{div}(dx) &= \operatorname{div}(R(x)) + W_0 + W_1, \end{aligned}$$

de sorte que si l'on pose

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{z dx}{R(x)} = \frac{dx}{x(x-1)z} \\ \omega_2 &= \frac{xz dx}{R(x)} = \frac{dx}{(x-1)z}, \end{aligned} \quad (19)$$

alors le diviseur de ω_1 (resp. ω_2) est $2W_\infty$ (resp. $2W_0$). Ceci implique que (ω_1, ω_2) est une base du $\mathcal{O}_B$ -module $f_*\omega_{C_F/B}$.

Sans hypothèse de lissité sur f , il est clair sur les formules (19) que ω_1 et ω_2 sont définies et non nulles au point générique de chaque fibre de f . En particulier, dans le cas universel, leurs diviseurs (lorsqu'elles sont vues comme sections rationnelles du $\mathcal{O}_{C_F}$ -module inversible $\omega_{C_F/B}$) sont finis sur B et par suite, puisque C_F est normal, égaux respectivement à $2W_\infty$ et $2W_0$. On en déduit, pour B quelconque (puisque la formation de $f_*\omega_{C_F/B}$ commute à tout changement de base):

PROPOSITION 7 – Les formes ω_1 et ω_2 de (19) forment une base du $\mathcal{O}_B$ -module $f_*\omega_{C_F/B}$.

On retrouve ainsi le fait que $\langle \omega_{C_F/B}, \omega_{C_F/B} \rangle$ est trivial puisque $\omega_{C_F/B}$ admet deux sections globales dont les diviseurs sont disjoints.

3.4. Construction de courbes de genre 2 sur un corps de nombres

Dans ce paragraphe et le suivant, on se donne un corps de nombres K . On note A l'anneau des entiers de K et $B = \text{Spec } A$.

PROPOSITION 8 – *Soit $F \in A[X]$ un polynôme unitaire de degré 3 tel que $F(0)$ et $F(1)$ soient des unités de A et que le discriminant Δ de*

$$R(X) = X(X - 1) + 4F(X)$$

soit non nul. La fibre générique $C_{F,K}$ de la B -courbe C_F d'équation $y^2 + y = F(x)/x(x - 1)$, définie en 3.1, est lisse, géométriquement connexe et de genre 2 sur K . La B -courbe C_F a bonne réduction en caractéristique 2, et mauvaise réduction en une place finie v de K de caractéristique $\neq 2$ si et seulement si $v(\Delta) > 0$. Dans ce cas, la fibre de C_F en v est une courbe intègre de genre géométrique 1 avec un unique point double Σ_v , à savoir le point de coordonnées $(x_0, 0)$, où x_0 est l'unique racine multiple de $R \bmod v$; ce point est ordinaire (resp. cuspidal) si x_0 est une racine double (resp. triple) de $R \bmod v$; lorsque x_0 est racine double de $R \bmod v$, Σ_v est un point régulier de C_F si et seulement si $v(\Delta) = 1$.

Cet énoncé est conséquence directe de la proposition 5, à l'exception de la dernière assertion, qui découle d'un calcul local facile.

On a vu (prop. 5, iv)) que la courbe $C_{F,K}$ admet comme modèle plan

$$z^2 = \frac{R(x)}{x(x - 1)}.$$

On en déduit, en posant $t = x(x - 1)z$, qu'elle admet aussi le modèle plan

$$t^2 = x(x - 1)R(x).$$

La proposition suivante rassemble des conséquences directes des propositions 8, 5, 7, du théorème 1 et des définitions de $\deg f_* \omega_{C_F/B}$ et de l'intersection d'Arakelov.

PROPOSITION 9 – *Reprenons les notations de la proposition précédente, et supposons que, pour toute place finie v de K , les racines de $R \bmod v$ sont de multiplicité ≤ 2 . Alors la courbe lisse $C_{F,K}$ sur K de modèle plan*

$$t^2 = x(x - 1)R(x) \tag{20}$$

a réduction semi-stable sur K et a bonne réduction en dehors des places finies v de K telles que $v(\Delta) > 0$ et $\text{Car } v \neq 2$. Son modèle stable sur B est C_F .

Les points W_0 et W_1 de $C_{F,K}$ d'abscisse ² 0 et 1, et le point à l'infini W_∞ (dans le modèle (20)) définissent des diviseurs disjoints dans C_F .

Les formes différentielles

$$\omega_1 = \frac{dx}{t} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{x dx}{t}$$

forment une base de l'espace des formes différentielles de première espèce sur $C_{F,K}$, qui est aussi une base du $\mathcal{O}_B$ -module $f_*\omega_{C_F/B}$.

Pour tout plongement σ de K dans $\mathbf{C}$, notons C_σ la surface de Riemann déduite de $C_{F,K}$ par σ et G_σ la fonction de Green-Arakelov de C_σ , et posons

$$A_\sigma = \frac{i}{2} \int_{C_\sigma} \omega_1 \wedge \overline{\omega_1}, \quad B_\sigma = \frac{i}{2} \int_{C_\sigma} \omega_1 \wedge \overline{\omega_2} \quad \text{et} \quad D_\sigma = \frac{i}{2} \int_{C_\sigma} \omega_2 \wedge \overline{\omega_2}.$$

Il vient alors

$$\deg f_*\omega_{C_F/B} = -\frac{1}{2} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log(A_\sigma D_\sigma - |B_\sigma|^2),$$

et, pour tout $(i, j) \in \{0, 1, \infty\}^2$, $i \neq j$,

$$(\omega_{C_F/B} \cdot \omega_{C_F/B}) = 8 \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}} \log G_\sigma(W_i, W_j).$$

REMARQUE. La condition de la proposition précédente sur les multiplicités des racines de $R \bmod v$ est vérifiée dès que $v(\Delta) \leq 1$ pour toute place finie v de K telle que $\text{Car } v \neq 2$. Dans ce cas, le modèle stable C_F est régulier.

3.5. Applications numériques

Au moyen de la proposition 9, on peut construire des surfaces arithmétiques $f: C_F \rightarrow B$ pour lesquelles le calcul des invariants $\deg f_*\omega_{C_F/B}$ et $(\omega_{C_F/B} \cdot \omega_{C_F/B})$ se ramène à des calculs "aux places infinies".

Pour évaluer numériquement ces invariants, on choisit, pour chaque plongement σ de K dans $\mathbf{C}$, une base symplectique

$$\mathcal{B}_\sigma = (a_{\sigma,1}, a_{\sigma,2}, b_{\sigma,1}, b_{\sigma,2})$$

de $H_1(C_\sigma, \mathbf{Z})$. Puis on calcule les périodes de ω_1 et ω_2 dans cette base. On forme ainsi les matrices

$$\Omega'_\sigma = \left(\int_{a_{\sigma,i}} \omega_j \right)_{1 \leq i,j \leq 2} \quad \text{et} \quad \Omega''_\sigma = \left(\int_{b_{\sigma,i}} \omega_j \right)_{1 \leq i,j \leq 2}.$$

²Par abscisse, nous entendons la coordonnée x .

La matrice des périodes de C_σ associées à $\mathcal{B}_\sigma$ est alors

$$\Omega_\sigma = \Omega''_\sigma \Omega'^{-1}_\sigma.$$

Le calcul de ces périodes peut s'effectuer avec une grande précision, au moyen, par exemple, de l'algorithme quadratiquement convergent de Richelot (du moins lorsque C_σ est définie sur $\mathbf{R}$; cf. [13] ou [3]).

Grâce aux relations bilinéaires de Riemann

$$\int_{X_\sigma} \alpha \wedge \beta = \sum_{i=1}^2 \left[\int_{a_{\sigma,i}} \alpha \cdot \int_{b_{\sigma,i}} \beta - \int_{b_{\sigma,i}} \alpha \cdot \int_{a_{\sigma,i}} \beta \right],$$

on déduit immédiatement des valeurs des matrices Ω'_σ et Ω''_σ celles des produits scalaires A_σ , B_σ et D_σ . On obtient finalement

$$A_\sigma D_\sigma - |B_\sigma|^2 = \det \operatorname{Im} \Omega_\sigma \cdot |\det \Omega'_\sigma|^2. \quad (21)$$

Pour calculer $G_\sigma(W_i, W_j)$, on peut utiliser les formules des paragraphes 2.1 et 2.2 et le théorème 2. Le lecteur se reportera à [10], p. 3.82, pour la détermination du vecteur de Riemann $\Delta_{\mathcal{B}_\sigma}$.

Appliquons ce qui précède au cas où $K = \mathbf{Q}$. Les polynômes unitaires $F \in \mathbf{Z}[X]$ de degré 3 tels que $F(0)$ et $F(1)$ soient des unités s'écrivent soit

$$F(X) = X(X-1)(X-t) + \varepsilon,$$

soit

$$F(X) = X(X-1)(X-t) + \varepsilon(1-2X),$$

avec $t \in \mathbf{Z}$ et $\varepsilon = \pm 1$.

Considérons par exemple la famille

$$F_t(X) = X(X-1)(X-t) + 1.$$

Le discriminant de $R_t(X) = X(X-1) + 4F_t(X)$ vaut

$$256t^4 + 256t^3 - 1568t^2 - 816t - 5591.$$

Pour tout $t \in \mathbf{Z}$, $t \not\equiv 5 \pmod{7}$, on peut vérifier que F_t satisfait aux conditions de la proposition 9, i.e. que, pour tout nombre premier p impair, les racines de $R_t \pmod{p}$ sont de multiplicité au plus 2.

Prenons par exemple $t = -4$. Le discriminant de R_{-4} vaut 21737, qui est un nombre premier, et une équation de $C_{F_{-4}}$ sur $\mathbf{Q}$ est (cf. (20))

$$y^2 = x(x-1)(4x^3 + 13x^2 - 17x + 4).$$

On remarquera le caractère “particulièrement simple” de cette courbe parmi les courbes de genre 2 définies sur $\mathbf{Q}$: elle a réduction semi-stable sur $\mathbf{Q}$, son modèle stable sur $\mathbf{Z}$ est régulier et possède une seule fibre de mauvaise réduction, qui est irréductible et possède un unique point singulier ³. En appliquant les méthodes expliquées plus haut, on obtient

$$\begin{aligned} h(C_{F_{-4}}) &= \deg f_* \omega_{C_{F_{-4}}/B} &= -1,466599\dots \\ h'(C_{F_{-4}}) &= \deg' f_* \omega_{C_{F_{-4}}/B} &= -0,321869\dots \\ e(C_{F_{-4}}) &= (\omega_{C_{F_{-4}}/B} \cdot \omega_{C_{F_{-4}}/B}) &= 2,32\dots \end{aligned}$$

Pour le calcul de l'intégrale quadruple $\log \|H\|$ nécessaire à l'obtention de l'invariant $(\omega_{C_{F_{-4}}/B} \cdot \omega_{C_{F_{-4}}/B})$, on a utilisé la méthode de quadrature de Gauss et, à titre de vérification, une méthode de quadrature de Monte-Carlo. Les calculs ont été effectués sur l'IBM 4341 de l'École normale supérieure. Les temps de calcul ont été négligeables, hormis celui de cette intégrale, qui a nécessité une dizaine de minutes de temps CPU.

4. La courbe $y^2 + y = x^5$

Nous calculons dans cette section les invariants e et h de la courbe sur $\overline{\mathbf{Q}}$ dont une équation affine est

$$y^2 + y = x^5$$

ou encore, grâce aux changements de variable $z = 2y + 1$ et $t = 2^{2/5}x$,

$$z^2 = 4x^5 + 1 \quad \text{ou} \quad z^2 = t^5 + 1.$$

C'est une courbe de genre 2 remarquable; elle est caractérisée par l'une quelconque des propriétés suivantes (cf. [6]):

- Son groupe d'automorphismes est le groupe $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
- Son groupe d'automorphismes n'est pas réduit à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et sa jacobienne est simple.
- Le point correspondant dans la variété de modules des courbes de genre 2 est singulier.

³Rappelons que, d'après Fontaine, la jacobienne d'une courbe C de genre 2 ayant réduction semi-stable sur $\mathbf{Q}$ ne peut avoir bonne réduction en toute place; il existe donc une place v de $\mathbf{Q}$ en laquelle la réduction du modèle stable de C , ou bien possède deux points singuliers, ou bien possède un unique point singulier et est irréductible.

4.1. Bonne réduction

Montrons que la courbe X , propre et lisse sur $\mathbf{Q}$, d'équation affine

$$y^2 + y = x^5$$

acquiert bonne réduction sur une extension convenable de $\mathbf{Q}$.

Le changement de variables

$$x' = \frac{1}{x} \quad y' = \frac{x^2}{y}$$

établit un isomorphisme entre des ouverts des courbes affines lisses sur $\mathbf{Z}[1/5]$ d'équations $y^2 + y = x^5$ et $x' + x'^3 y' = y'^2$. Ainsi, X admet un modèle lisse sur $\text{Spec } \mathbf{Z}[1/5]$.

Vérifions que X a bonne réduction potentielle sur $\mathbf{Z}_5$. On a vu plus haut qu'elle admet comme équation $z^2 = t^5 + 1$ sur le corps $\mathbf{Q}(\sqrt[5]{2})$. Cette équation s'écrit encore ⁴

$$z^2 = \prod_{i=0}^4 (t + \zeta_5^i).$$

Sur le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{1 - \zeta_5})$, elle devient

$$w^2 = u \prod_{i=1}^4 (u - \alpha_i), \tag{22}$$

où α_i désigne l'unité cyclotomique $(1 - \zeta_5^i)/(1 - \zeta_5)$, grâce au changement de variables

$$t = (1 - \zeta_5)u - 1, \quad z = (1 - \zeta_5)^{5/2} w. \tag{23}$$

Si v est une place de caractéristique 5, alors $\alpha_i = \sum_{j=0}^{i-1} \zeta^j \equiv i \pmod{v}$ de sorte que les α_i sont distincts et non nuls mod v et que (22) définit une courbe lisse en v (de réduction mod v $t^2 = u^5 - u$).

La démonstration qui précède montre aussi que X a bonne réduction sur le corps $K' = \mathbf{Q}(\sqrt{1 - \zeta_5}, \sqrt[5]{2})$.

4.2. Points de Weierstrass.

Notons R' l'anneau des entiers de K' , $R_1 = R'[1/5]$, $B' = \text{Spec } R'$ et $B_1 = \text{Spec } R_1$. Notons W_∞ (resp. W_i , $i = 0, \dots, 4$) le point de $X(K')$ au-dessus du point à l'infini de $\mathbf{P}^1$ (resp. du point d'abscisse $x = -\zeta_5^i/\sqrt[5]{4}$). Nous désignons encore par W_α ($\alpha \in \{\infty, 0, \dots, 4\}$) les sections correspondantes du modèle propre et lisse $\mathcal{X}'$ de X au-dessus de B' . Ce sont les points de Weierstrass de $\mathcal{X}' \rightarrow B'$ (cf. 1.1).

⁴Rappelons que ζ_5 désigne une racine primitive cinquième de l'unité.

PROPOSITION 10 - Pour $\alpha \neq \beta \in \{\infty, 0, \dots, 4\}$, le sous-schéma $W_\alpha \cap W_\beta$ de $\mathcal{X}'$ s'identifie à $\text{Spec } R'/(\sqrt[5]{2})$.

Démonstration. Il est clair sur l'équation (22) que W_α et W_β ne se rencontrent pas au-dessus d'une place de caractéristique 5 (en fait, au-dessus de toute place de caractéristique différente de 2). Soit $\mathcal{X}_1$ l'image inverse de B_1 dans $\mathcal{X}'$. Il suffit, pour démontrer la proposition, de prouver que le sous-schéma $W_\alpha \cap W_\beta \cap \mathcal{X}_1$ de $\mathcal{X}_1$ s'identifie à $\text{Spec } R_1/(\sqrt[5]{2})$.

Les $W_\alpha \cap \mathcal{X}_1$ sont contenus dans l'ouvert affine de $\mathcal{X}_1$ d'équation $x' + x'^3 y' = y'^2$ considéré plus haut, et admettent comme équation

$$\begin{aligned} W_\infty : \quad x' &= y' = 0 \\ W_i : \quad x' &= -\zeta_5^{-i} \sqrt[5]{4}, \quad y' = -\zeta_5^{2i} \sqrt[5]{2} \quad (0 \leq i \leq 4). \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $1 - \zeta_5^k$ est inversible dans R_1 si $k \not\equiv 0 \pmod{5}$, on en déduit l'assertion annoncée. ■

Notons $X_{\mathbb{C}}$ la surface de Riemann déduite de X (rappelons que X est définie sur $\mathbb{Q}$) et G la fonction de Green-Arakelov sur $X_{\mathbb{C}} \times X_{\mathbb{C}}$. Compte tenu de la définition de l'intersection d'Arakelov, on déduit immédiatement de la proposition précédente:

COROLLAIRE - Pour $\alpha \neq \beta \in \{\infty, 0, \dots, 4\}$, on a

$$(W_\alpha \cdot W_\beta)_{\mathcal{X}'} = \frac{1}{5} [K' : \mathbb{Q}] \log 2 - \sum_{\sigma: K' \hookrightarrow \mathbb{C}} \log G(\sigma W_\alpha, \sigma W_\beta). \quad (24)$$

Remarquons que le point σW_∞ de $X_{\mathbb{C}}$ est indépendant du plongement σ de K' dans $\mathbb{C}$: c'est toujours le point à l'infini de $X_{\mathbb{C}}$. Les autres points de Weierstrass de $X_{\mathbb{C}}$ sont permutés par l'automorphisme T de $X_{\mathbb{C}}$ défini par

$$T(x, y) = (\zeta_5^{-1} x, y),$$

qui admet le point à l'infini comme un point fixe. Par suite, $G(\sigma W_\infty, \sigma W_i)$ est *indépendant* de σ et de $i \in \{0, \dots, 4\}$. Notons-le $G(W_\infty, W_0)$. Le corollaire du théorème 2 donne

$$G(W_\infty, W_0) = \left[\prod_{j=0}^4 G(W_\infty, W_j) \right]^{1/5} = 2^{1/5} \|\Delta_2\| (X_{\mathbb{C}})^{-1/40} \|H\| (X_{\mathbb{C}})^{1/2}.$$

Il vient donc

PROPOSITION 11 - Pour tout $i \in \{0, \dots, 4\}$, on a

$$\frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} (W_\infty \cdot W_i)_{\mathcal{X}'} = \frac{1}{40} \log \|\Delta_2\| (X_{\mathbb{C}}) - \frac{1}{2} \log \|H\| (X_{\mathbb{C}}). \quad (25)$$

et les deux membres de (25) sont indépendants de i .

Le théorème 1 donne alors:

COROLLAIRE – L ’invariant $e(X)$ vaut

$$\frac{1}{[K' : \mathbf{Q}]} (\omega_{\mathcal{X}'/B'} \cdot \omega_{\mathcal{X}'/B'}) = -\frac{1}{5} \log \|\Delta_2\|(X_{\mathbf{C}}) + 4 \log \|H\|(X_{\mathbf{C}}). \quad (26)$$

4.3. Différentielles

Gardant les notations de 4.2., notons $f : \mathcal{X}' \rightarrow B'$ le morphisme structural, et considérons le R' -module localement libre de rang deux

$$E = f_* \omega_{\mathcal{X}'/B'}.$$

Pour calculer le degré d’Arakelov de E muni de ses métriques canoniques, considérons sur X les 1-formes

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{dx}{z} = \frac{dx}{2y+1} = \frac{dy}{5x^4} \\ \omega_2 &= x \omega_1. \end{aligned} \quad (27)$$

On constate sans peine que ω_1 et ω_2 définissent des 1-formes globales sur le modèle propre et lisse de X sur $\text{Spec } \mathbf{Z}[1/5]$, à diviseurs disjoints. Considérant ω_1 et ω_2 comme des sections rationnelles de E , nous voyons donc qu’elles forment une base du $R'[1/5]$ -module $E \otimes_{R'} R'[1/5]$. Pour voir ce qui se passe en une place v de caractéristique résiduelle 5, on utilise l’équation (22). Le changement de variables (23) donne

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2^{-2/5} (1 - \zeta_5)^{-3/2} \frac{du}{w} \\ \omega_2 &= 2^{-4/5} (1 - \zeta_5)^{-3/2} [(1 - \zeta_5)u - 1] \frac{du}{w}. \end{aligned}$$

Or il est immédiat d’après l’équation (22) que du/w et $u du/w$ forment une base de $E \otimes_{R'} R'_v$, où R'_v est le complété de R' en v . Comme on a

$$\varepsilon := \omega_1 \wedge \omega_2 = 2^{-6/5} (1 - \zeta_5)^{-2} \frac{du}{w} \wedge \frac{u du}{w}$$

dans $\Lambda_{R'}^2(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_5$, on en déduit que le diviseur de ε (vue comme section rationnelle de $\Lambda_{R'}^2(E)$) est celui de $(1 - \zeta_5)^{-2}$. Si v est normalisée de sorte que $v(5) = 1$, on a donc $v(\varepsilon) = -1/2$ puisque $v(1 - \zeta_5) = 1/4$.

Pour calculer le degré de E , il reste à déterminer la norme archimédienne de ε , qui est définie sur $\mathbf{Q}$. Il vient en effet, d’après ce qui précède,

$$\frac{1}{[K' : \mathbf{Q}]} \deg E = -\frac{1}{2} \log 5 - \log \|\varepsilon\|. \quad (28)$$

Rappelons que, par définition, on a

$$\|\varepsilon\|^2 = AD - B\bar{B}$$

où

$$A = \frac{i}{2} \int_{X_C} \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1, \quad B = \frac{i}{2} \int_{X_C} \omega_1 \wedge \bar{\omega}_2 \quad \text{et} \quad D = \frac{i}{2} \int_{X_C} \omega_2 \wedge \bar{\omega}_2.$$

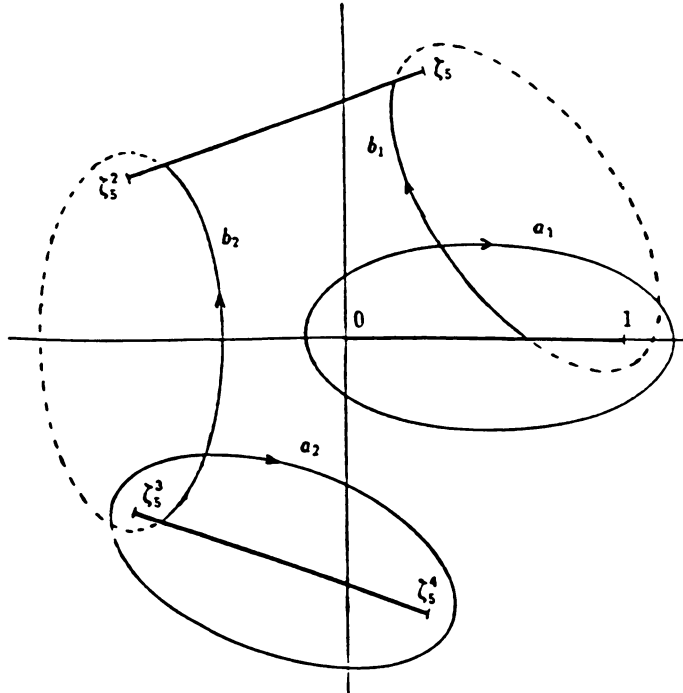
4.4. Calcul des périodes de X

Les valeurs des intégrales A , B et D se déduisent de celles des formes différentielles ω_1 et ω_2 , grâce aux relations bilinéaires de Riemann.

Par le changement de variables $x = -2^{-2/5}U^{-1}$, $z = VU^{-3}$, l'équation $z^2 = 4x^5 + 1$ de X sur K' devient $V^2 = U^6 - U$. Dans ce nouveau modèle, les points de Weierstrass de X sont les points d'ordonnée nulle, et les différentielles ω_1 et ω_2 du paragraphe précédent s'écrivent

$$\omega_1 = 2^{-2/5}UdU/V \quad \text{et} \quad \omega_2 = -2^{-4/5}dU/V.$$

Pour calculer les périodes de la courbe X_C , choisissons la base symplectique (a_1, a_2, b_1, b_2) de $H_1(X_C, \mathbf{Z})$ représentée sur le dessin suivant, figurant X_C comme revêtement ramifié à 2 feuillets du "plan des U ":



Posons, comme en 3.5,

$$\Omega' = \left(\int_{a_i} \omega_j \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \quad \text{et} \quad \Omega'' = \left(\int_{b_i} \omega_j \right)_{1 \leq i, j \leq 2}.$$

Le calcul de ces matrices est facilité par l'existence de l'automorphisme T de X défini par $(U, V) \mapsto (\zeta_5 U, \zeta_5^3 V)$, déjà considéré en 4.2. L'action de T sur les différentielles de première espèce de X est donnée par les formules

$$T^* \omega_1 = \zeta_5^{-1} \omega_1, \quad T^* \omega_2 = \zeta_5^{-2} \omega_2, \quad (29)$$

et celle sur les cycles par ⁵

$$\begin{aligned} T(a_1) &= -a_1 - b_1 & T(a_2) &= a_1 + b_1 - b_2 \\ T(b_1) &= a_1 + a_2 & T(b_2) &= a_2. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$b_1 = -a_1 - T(a_1), \quad a_2 = -a_1 - T(a_1) - T^2(a_1), \quad b_2 = T^2(a_1) + T^3(a_1). \quad (30)$$

Compte tenu du fait que, pour toute forme différentielle ω ,

$$\int_{T^i a_1} \omega = \int_{a_1} (T^i)^* \omega,$$

les relations (29) et (30) permettent d'exprimer Ω' et Ω'' en fonction des périodes

$$B_1 = \int_{a_1} \omega_1 \quad \text{et} \quad B_2 = \int_{a_1} \omega_2.$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \Omega' &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 - \zeta_5 - \zeta_5^3 & -1 - \zeta_5^3 - \zeta_5^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \\ \Omega'' &= \begin{pmatrix} -1 - \zeta_5^3 & -1 - \zeta_5^4 \\ \zeta_5 + \zeta_5^4 & \zeta_5^2 + \zeta_5^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de la matrice des périodes de $X_{\mathbb{C}}$ associée à la base (a_1, a_2, b_1, b_2) :

$$\Omega = \Omega'' \Omega'^{-1} = \begin{pmatrix} -\zeta_5^4 & \zeta_5^2 + 1 \\ \zeta_5^2 + 1 & \zeta_5^2 - \zeta_5^3 \end{pmatrix},$$

puis, grâce à la formule (21) et aux relations

$$|\det \Omega'|^2 = 2 - \zeta_5^2 - \zeta_5^3 = \sqrt{5} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

⁵Au signe près, on trouve ces formules dans [12].

$$\det \operatorname{Im} \Omega = \frac{5(\zeta_5 + \zeta_5^4)}{4} = \frac{5(-1 + \sqrt{5})}{8},$$

on trouve

$$\|\varepsilon\|^2 = \frac{5\sqrt{5}}{4} |B_1 B_2|^2. \quad (31)$$

Par ailleurs, les périodes B_1 et B_2 s'expriment simplement au moyen de la fonction B d'Euler, définie par

$$B(a, b) := \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

En effet, on a

$$|B_1| = 2^{3/5} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x-x^6}} \quad \text{et} \quad |B_2| = 2^{1/5} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^6}},$$

donc, grâce au changement de variable $t = x^5$,

$$|B_1| = \frac{2^{3/5}}{5} B(3/10, 1/2) \quad \text{et} \quad |B_2| = \frac{2^{1/5}}{5} B(1/10, 1/2). \quad (32)$$

La formule d'Euler $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ jointe à la formule de duplication $\sqrt{2\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$ permet d'écrire, pour tout $x > 0$,

$$B(x, 1/2) = 2\pi \frac{\Gamma(2x)}{2^{2x}\Gamma(x+1/2)^2},$$

d'où

$$B_1 = \frac{2\pi}{5} \Gamma(3/5) \Gamma(4/5)^{-2}, \quad B_2 = \frac{2\pi}{5} \Gamma(1/5) \Gamma(3/5)^{-2}$$

et

$$\|\varepsilon\|^2 = \frac{5\sqrt{5}}{4} (4\pi^2 \Gamma(1/5) \Gamma(3/5)^{-1} \Gamma(4/5)^{-2})^2.$$

En recourant à la formule

$$\sqrt{5}\Gamma(1/5)\Gamma(2/5)\Gamma(3/5)\Gamma(4/5) = 4\pi^2,$$

conséquence de la formule de multiplication de Gauss, on obtient finalement

PROPOSITION 12 - *La hauteur de Faltings stable $h(X)$ de la jacobienne de X vaut*

$$\frac{1}{[K' : \mathbf{Q}]} \deg E = \log 4\pi - \frac{1}{2} \log \Gamma(1/5)^5 \Gamma(2/5)^3 \Gamma(3/5) \Gamma(4/5)^{-1}.$$

Observons que la hauteur $h'(X)$ admet l'expression suivante, peut-être plus élégante:

$$h'(X) = 2 \log 2\pi - \frac{1}{2} \log \Gamma(1/5)^5 \Gamma(2/5)^3 \Gamma(3/5) \Gamma(4/5)^{-1}.$$

4.5. Résultats numériques et remarques

Après calculs sur ordinateur, on trouve

$$\begin{aligned}\|\Delta_2\|(X_{\mathbf{C}}) &= 0,2070469497 \dots 10^{-4} \\ \log \|\Delta_2\|(X_{\mathbf{C}}) &= -10,78515008 \dots \\ \log \|H\|(X_{\mathbf{C}}) &= -0,4854 \dots \\ e(X) &= 0,2152 \dots \\ h(X) &= -2,597239125 \dots \\ h'(X) &= -1,452509239 \dots\end{aligned}$$

Observons que nous aurions pu calculer $e(X)$ à partir de $h(X)$ et de l'invariant de Faltings $\delta(X_{\mathbf{C}})$, grâce à la formule de Noether ([8]) qui s'écrit ici, puisque X a potentiellement partout bonne réduction,

$$12h(X) = e(X) + \delta(X_{\mathbf{C}}) - 8 \log(2\pi),$$

et à la formule (cf. [2])

$$\delta(X_{\mathbf{C}}) = -16 \log(2\pi) - \log \|\Delta_2\|(X_{\mathbf{C}}) - 4 \log \|H\|.$$

Si l'on compare ces relations aux formules (26) et (28), on trouve

$$h(X) = -2 \log(2\pi) - \frac{1}{10} \log \|\Delta_2\|(X_{\mathbf{C}})$$

puis

$$\|\varepsilon\| = (2\pi)^2 5^{-1/2} \|\Delta_2\|(X_{\mathbf{C}})^{1/10}.$$

En fait, cette dernière équation découle directement des formules de Thomaë ([10], p. 3.121).

Montrons maintenant que X contredit l'analogie arithmétique "naïf" de l'inégalité $c_1^2 \leq 3c_2$ de Bogomolov-Miyaoka, et même, plus généralement, l'analogie de l'inégalité

$$c_1^2 \leq \lambda c_2, \tag{33}$$

pour tout $\lambda > 0$.

Rappelons que les classes de Chern d'une surface projective X fibrée sur une courbe B de genre g sont données par

$$c_1^2(X) = (\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) + 2(2g - 2)(2q - 2)$$

$$c_2(X) = 12 \deg f_* \omega_{X/B} - (\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) + (2g - 2)(2q - 2),$$

tandis que l'analogie arithmétique de $2q - 2$ est le logarithme de la valeur absolue du discriminant D_K du corps de base K . Ainsi, la traduction

arithmétique de (33) affirmerait que, si X est une courbe de genre g lisse sur $\overline{\mathbf{Q}}$, admettant un modèle stable sur un corps de nombres K , on a

$$e(X) + \frac{2(2g-2)}{[K:\mathbf{Q}]} \log |D_K| \leq \lambda(12h(X) - e(X) + \frac{2g-2}{[K:\mathbf{Q}]} \log |D_K|)$$

(cf. Parshin [11] et [7], 3.2.3.2) c'est-à-dire, lorsque $g = 2$,

$$e(X) \leq \lambda(12h(X) - e(X) + \frac{2}{[K:\mathbf{Q}]} \log |D_K|) - \frac{4}{[K:\mathbf{Q}]} \log |D_K|.$$

Lorsque X est la courbe d'équation $y^2 + y = x^5$ et que K est le corps $\mathbf{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt{1-\zeta_5})$, on a

$$[K:\mathbf{Q}] = 40, \quad D_K = 2^{72} 5^{85}, \quad \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \log |D_K| = 4,667720\dots,$$

et compte tenu des valeurs de $h(X)$ et $e(X)$ données plus haut, le membre de gauche de l'inégalité précédente est positif, alors que le coefficient de λ dans le membre de droite est strictement négatif.

On peut s'assurer qu'il en va toujours ainsi si l'on considère certaines variantes de cette inégalité, par exemple si l'on substitue $h'(X)$ à $h(X)$, ou $2^{-r_2} D_K$ à D_K , r_2 désignant le nombre de places complexes de K (ici $r_2 = 20$), ou encore en substituant à K le corps $K(\sqrt{-30030})$, et donc tous les corps apparaissant dans la tour de Golod-Shafarevich qui lui est classiquement associée.

Signalons enfin que ces vérifications n'exigent pas de connaître une valeur numérique de $e(X)$, mais seulement l'inégalité $e(X) \geq 0$, démontrée par Faltings dans [5] et la valeur de $h(X)$, exprimée plus haut au moyen de la fonction Γ .

Appendice: démonstration du théorème 2

A.1. Quelques formules relatives aux surfaces de Riemann de genre 2

La démonstration du théorème 2 va procéder en deux étapes. Tout d'abord, nous établirons les formules suivantes, qui relient les fonctions $\|\theta\|$ et G , mais font intervenir des constantes "inconnues" $\delta(X)$, $A(X)$ et $B(X)$.

i) Il existe $\delta(X) \in \mathbf{R}$ tel que, quels que soient $(x_1, x_2, y) \in X^3$, $x_1 \neq x_2$,

et $(\omega_1, \omega_2) \in H^0(X, \omega_X)^2$,

$$\|\theta\|(x_1 + x_2 - y) \|\omega_1 \wedge \omega_2\| = e^{-\frac{\delta(X)}{8}} \left\| \begin{pmatrix} \omega_1(x_1) & \omega_2(x_1) \\ \omega_1(x_2) & \omega_2(x_2) \end{pmatrix} \right\|_A \frac{G(x_1, y)G(x_2, y)}{G(x_1, x_2)}. \quad (34)$$

ii) Il existe $A(X) \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout couple (x, y) de points de X distincts,

$$\log G(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\Theta+x-y} \log \|\theta\| \mu + A(X). \quad (35)$$

iii) Quel que soit $(x, y, z) \in X^3$, on a

$$G(x, \sigma(y))G(x, z)G(y, z) = e^{A(X)} \|\theta\|(x + y - z). \quad (36)$$

iv) Il existe $B(X) \in \mathbf{R}$ tel que, quel que soit $(x, y) \in X^2$,

$$G(x, y)G(x, \sigma(y)) = e^{B(X)} \|J\|(x, y). \quad (37)$$

Ensuite, nous établirons la proposition suivante, qui permet d'exprimer les constantes $\delta(X)$, $A(X)$ et $B(X)$ au moyen de $\|\Delta_2\|(X)$ et $\|H\|(X)$.

PROPOSITION 13 - Pour tout couple (P, Q) de points de Weierstrass de X distincts, on a

$$\log \|J\|(P, Q) - \int_{\Theta+P-Q} \log \|\theta_0\| \mu - 2 \log \|H\|(X) = 2 \log(2\pi). \quad (38)$$

Déduisons à présent le théorème 2 des formules (34) à (38).

D'après (37), il vient, pour tout couple (P, Q) de points de Weierstrass de X ,

$$G(P, Q)^2 = e^{B(X)} \|J\|(P, Q). \quad (39)_{PQ}$$

L'identité (36) montre que, pour tout triplet (P, Q, R) de points de Weierstrass de X , on a

$$G(P, Q) G(Q, R) G(R, P) = e^{A(X)} \|\theta\|(P + Q + R - K). \quad (40)$$

De plus, on déduit facilement de la définition de $\|\Delta_2\|(X)$ et des relations de Rosenhain

$$\|J\|(P, Q) \|J\|(Q, R) \|J\|(R, P) = (2\pi)^6 \|\theta\|(P + Q + R - K)^2 \|\Delta_2\|(X)^{1/2}. \quad (41)$$

En éliminant les valeurs de G , $\|J\|$ et $\|\theta\|$ entre les identités $(39)_{PQ}$, $(39)_{QR}$, $(39)_{RP}$ et (41), nous obtenons alors:

$$2A(X) - 3B(X) = 6\log(2\pi) + \frac{1}{2}\log\|\Delta_2\|(X). \quad (42)$$

Par ailleurs, les relations $(39)_{PQ}$ et (35) donnent, pour tout couple (P, Q) de points de Weierstrass de X distincts:

$$\log\|J\|(P, Q) - \int_{\Theta+P-Q} \log\|\theta\|\mu = 2A(X) - B(X). \quad (43)$$

La proposition 13 montre alors:

$$2A(X) - B(X) = 2\log(2\pi) + 2\log\|H\|(X). \quad (44)$$

On déduit immédiatement de (42) et (44) les valeurs de $A(X)$ et $B(X)$:

$$\begin{aligned} A(X) &= -\frac{1}{8}\log\|\Delta_2\|(X) + \frac{3}{2}\log\|H\|(X) \\ B(X) &= -2\log(2\pi) - \frac{1}{4}\log\|\Delta_2\|(X) + \log\|H\|(X), \end{aligned} \quad (45)$$

puis on obtient le théorème 2 en reportant (45) dans $(39)_{PQ}$.

A.2. Démonstration des formules (34) à (37)

Démonstration de (34). Cette formule est établie dans [5], p. 402. On peut en donner une démonstration directe — qui n'est en fait qu'une variante de la démonstration de [5] — en montrant que, comme fonction de chacune des trois variables x, y et z décrivant X , les logarithmes des deux membres de (34) ont même image par $d'd''$: cela découle de (16) et des valeurs des courbures des métriques $\|\cdot\|_{\mathcal{O}(\Theta)}$ et $\|\cdot\|_A$. ■

Démonstration de (35). En prenant le logarithme de l'identité (34), puis en l'intégrant par rapport à la mesure $\nu(x_1)$, on obtient, compte tenu des relations (15) et (14),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Theta+x_2-y} \log\|\theta\|\mu + \log\|\omega_1 \wedge \omega_2\| \\ &= -\frac{\delta(X)}{8} + \int_X \log \left\| \begin{pmatrix} \omega_1(x_1) & \omega_2(x_1) \\ \omega_1(x_2) & \omega_2(x_2) \end{pmatrix} \right\|_A \nu(x_1) + \log G(x_2, y). \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\log G(x, y) - \frac{1}{2} \int_{\Theta+x-y} \log\|\theta\|\mu = \varphi(x). \quad (46)$$

Or on sait que

$$\log G(x, y) = \log G(y, x).$$

De plus, comme $\|\theta\|$, μ et Θ sont invariants par l'involution $t \mapsto K - t$ de $\text{Pic}^1 X$, il vient

$$\int_{\Theta+y-x} \log \|\theta\| \mu = \int_{K-(\Theta+y-x)} \log \|\theta\| \mu = \int_{\Theta+x-y} \log \|\theta\| \mu.$$

Ainsi, le premier membre de (46) est symétrique en x et y , et φ est constante. ■

Démonstration de (36). Il suffit de démontrer (36) lorsque x est distinct de y et de $\sigma(y)$. Dans ce cas, $x + y$ est distinct de K et $x + y - \Theta$ rencontre transversalement Θ en x et y . De plus, d'après (34), il existe $C(x, y) \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $z \in X \setminus \{x, y\}$

$$\log \|\theta\|(x + y - z) - \log G(x, z) - \log G(y, z) = C(x, y). \quad (47)$$

Si l'on intègre cette égalité relativement à la mesure $\nu(z)$, on trouve, d'après (15) et (14),

$$C(x, y) = \frac{1}{2} \int_{x+y-\Theta} \log \|\theta\| \mu.$$

Comme $x + y - \Theta = K - (\Theta + \sigma(x) - y)$ et que $\log \|\theta\|$ et μ sont invariants par l'involution $t \mapsto K - t$ de $\text{Pic}^1 X$, on en déduit

$$C(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\Theta+\sigma(x)-y} \log \|\theta\| \mu. \quad (48)$$

L'identité (36) découle immédiatement de (35), (47) et (48). ■

Démonstration de (37). La fonction $\|J\|$ (sur $X \times X$) s'annule exactement sur les couples $(x, y) \in X^2$ tels que x et y aient même image par l'application de Gauss

$$X \simeq \Theta \rightarrow \check{\mathbf{P}}(T_0 \text{Pic } X) \simeq \mathbf{P}(H^0(X, \omega_X)).$$

Or cette application n'est autre que le morphisme "canonique" et s'identifie à l'application évidente $X \rightarrow X/\sigma$. On prouve ainsi que le quotient

$$\frac{\|J\|(x, y)}{G(x, y)G(x, \sigma(y))}$$

se prolonge en une fonction continue non nulle sur $X \times X$. De plus, les relations (14) et (16) montrent que le logarithme de cette fonction est harmonique en chacune des variables. Elle est donc constante. ■

A.3. Démonstration de la proposition 13

A.3.1. Soit D l'hypersurface dans $\mathcal{H}_2$ orbite sous $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{Z})$ des matrices diagonales dans $\mathcal{H}_2$.

Pour toute base symplectique $\mathcal{B}$ de $H_1(X, \mathbf{Z})$, la matrice des périodes Ω de X associée à $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{H}_2$. De plus, les points de Weierstrass de X sont en bijection avec l'ensemble $\mathcal{I}$ des classes, modulo $\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2$, des couples $(a, b) \in (\frac{1}{2}\mathbf{Z})^2 \times (\frac{1}{2}\mathbf{Z})^2$ tels que $4 \cdot {}^t a \cdot b$ soit impair, par l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\rightarrow \mathrm{Pic}^1 X \\ [(a, b)] &\mapsto [a + \Omega b] + \Delta_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

où $[a + \Omega b]$ désigne la classe dans $\mathbf{C}^2/(\mathbf{Z}^2 + \Omega \mathbf{Z}^2) \simeq \mathrm{Pic}^0 X$ de $a + \Omega b$.

Réciproquement, tout élément de $\mathcal{H}_2 \setminus D$ est la matrice des périodes d'une surface de Riemann de genre 2 dont l'homologie est munie d'une base symplectique. Cela se prouve facilement en considérant "l'application des périodes" $\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$, qui est un morphisme dominant, et son prolongement de $\overline{\mathcal{M}_2}$ vers la compactification de Satake de $\mathcal{A}_2$.

Par suite, la proposition 13 peut s'exprimer comme une identité entre fonctions sur $\mathcal{H}_2 \setminus D$.

Il est commode, pour formuler et établir cette identité, d'introduire quelques notations.

Soit $\mathcal{T}$ le quotient de $\mathbf{C}^2 \times \mathcal{H}_2$ par l'action de $\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2$ définie par

$$(n_1, n_2) \cdot (z; Z) = (z + n_1 + Zn_2; Z),$$

où $(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2$, $z \in \mathbf{C}^2$ et $Z \in \mathcal{H}_2$. L'application

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{H}_2 \\ [(z; Z)] &\mapsto Z \end{aligned}$$

est un morphisme lisse entre variétés $\mathbf{C}$ -analytiques. Sa fibre en $Z \in \mathcal{H}_2$ est la surface abélienne $\mathbf{C}^2/(\mathbf{Z}^2 + \mathbf{Z}Z^2)$.

Pour tout $n = [(n_1, n_2)] \in (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)/(\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2)$, nous poserons

$$\begin{aligned} s_n : \quad \mathcal{H}_2 &\rightarrow \mathcal{T} \\ Z &\mapsto [(n_1 + Zn_2; Z)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_n : \quad \mathcal{T} &\rightarrow \mathcal{T} \\ [(z; Z)] &\mapsto [(z + n_1 + Zn_2; Z)]. \end{aligned}$$

Il est clair que ce sont des applications $\mathbf{C}$ -analytiques, que s_n est une section de π et que t_n est un automorphisme de $\mathcal{T}$ préservant les fibres de π .

La fonction $\|\theta\|_0$ sur $\mathbf{C}^2 \times \mathcal{H}_2$ est invariante sous l'action de $\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2$ et peut donc être considérée comme une fonction sur $\mathcal{T}$. Le lieu Θ_0 des zéros de $\|\theta\|_0$ est une hypersurface lisse dans $\mathcal{T}$ et le morphisme

$$\pi : \Theta_0 \setminus \pi^{-1}(D) \rightarrow \mathcal{H}_2 \setminus D$$

est lisse.

L'espace $\mathcal{H}_2$ est muni d'une forme de Kähler naturelle

$$\kappa = \frac{i}{16\pi} \text{Tr}(Y^{-1}.dZ.Y^{-1}.d\bar{Z}), \quad (Y = \text{Im } Z).$$

Par ailleurs, la forme de type $(1, 1)$ sur $\mathbf{C}^2 \times \mathcal{H}_2$

$$\mu_1 = \frac{i}{2} {}^t(dz - dZ.Y^{-1}.y).Y^{-1}.(d\bar{z} - d\bar{Z}.Y^{-1}.y)$$

est invariante par l'action de $\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2$ et définit donc une forme de type $(1, 1)$ sur $\mathcal{T}$, que nous noterons encore μ_1 . De plus, pour tout $n \in (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)/(\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2)$, on a

$$s_n^* \mu_1 = 0 \quad \text{et} \quad t_n^* \mu_1 = \mu_1. \quad (49)$$

Nous poserons enfin

$$\mu_0 = \mu_1 + \pi^* \kappa. \quad (50)$$

On vérifie facilement l'égalité de courants ⁶ sur $\mathcal{T}$

$$\frac{1}{\pi i} d' d'' \log \|\theta\|_0 = \mu_0 - [\Theta_0]. \quad (51)$$

Notons $\int_\pi$ l'opération "d'intégration le long des fibres de π " des formes différentielles ou des courants sur $\mathcal{T}$. On établit aisément les identités

$$\int_\pi [\Theta_0] \mu_0 = \int_\pi \mu_0^2 = 2 \quad \text{et} \quad \int_\pi \mu_0^3 = 6\kappa. \quad (52)$$

A.3.2. Il découle des formules précédentes et des formules des paragraphes 2.1 et 2.2 que la proposition 13 peut se réécrire comme suit:

PROPOSITION 14 - *Pour tout couple (I_1, I_2) d'éléments de $\mathcal{I}$ distincts, l'identité suivante est satisfaite sur $\mathcal{H}_2 \setminus D$:*

$$\sum_{I \in \mathcal{I} \setminus \{I_1, I_2\}} s_{I+I_1+I_2}^* \log \|\theta\|_0 - \int_\pi [t_{I_1-I_2}(\Theta_0)] \log \|\theta\|_0 \mu_0 - \int_\pi \log \|\theta\|_0 \mu_0^2 = 2 \log 2. \quad (53)$$

⁶ Si C est un cycle analytique dans une variété analytique, nous notons $[C]$ le courant d'intégration sur ce cycle.

On remarquera que chacune des sections $s_{I_1+I_2}$ ne rencontre pas Θ_0 au-dessus de l'ouvert $\mathcal{H}_2 \setminus D$. De plus le morphisme

$$\pi : t_{I_1-I_2}(\Theta_0) \setminus \pi^{-1}(D) \rightarrow \mathcal{H}_2 \setminus D$$

est lisse, et Θ_0 est transverse à $t_{I_1-I_2}(\Theta_0)$ dans chaque fibre $\pi^{-1}(Z)$, pour $Z \in \mathcal{H}_2 \setminus D$; par conséquent, la fonction généralisée

$$\int_{\pi} [t_{I_1-I_2}(\Theta_0)] \log \|\theta\|_0 \mu_0$$

est continue, et sa valeur en $Z \in \mathcal{H}_2 \setminus D$ coïncide bien avec

$$\int_{\pi^{-1}(Z)} [t_{I_1-I_2}(\Theta_0)] \log \|\theta\|_0 \mu_0.$$

Une remarque analogue s'applique à la fonction généralisée

$$\int_{\pi} \log \|\theta\|_0 \mu_0^2.$$

Notons φ la fonction sur $\mathcal{H}_2 \setminus D$ définie par le membre de gauche de (53). On sait déjà, d'après l'égalité (43) (démontrée plus haut à partir de (34-37) sans faire appel à la proposition 13), que cette fonction ne dépend pas de (I_1, I_2) , mais que, pour tout $Z \in \mathcal{H}_2 \setminus D$, $\varphi(Z)$ ne dépend que de la classe d'isomorphie de la surface de Riemann $\Theta_0 \cap \pi^{-1}(Z)$. La fonction φ est donc invariante sous l'action de $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{Z})$.

L'identité (53) résulte des énoncés suivants:

LEMME 1 – *Lorsque $Z' \in \mathcal{H}_2 \setminus D$ tend vers un point Z de D , $\varphi(Z')$ tend vers $2 \log 2$.*

LEMME 2 – *La fonction φ est pluriharmonique sur $\mathcal{H}_2 \setminus D$.*

En effet, le lemme 1 montre que la fonction φ se prolonge en une fonction $\bar{\varphi}$ continue sur $\mathcal{H}_2$, qui, comme φ , est $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{Z})$ -invariante. De plus, d'après le lemme 2, $\bar{\varphi}$ est pluriharmonique sur le complémentaire de l'hypersurface D , donc pluriharmonique partout ("théorème de prolongement de Riemann"). Ces propriétés de $\bar{\varphi}$ entraînent qu'elle est constante, donc égale à $2 \log 2$: toute fonction pluriharmonique sur l'espace analytique quotient $\mathcal{H}_2 / \mathrm{Sp}_4(\mathbf{Z})$ est constante, car l'espace $\mathcal{H}_2 / \mathrm{Sp}_4(\mathbf{Z})$ est le complémentaire d'un fermé analytique de codimension 2 dans sa compactification de Satake, qui est une variété projective normale.

A.3.3. Démonstration du lemme 1

Pour tout $\tau \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Im} \tau > 0$, on note E_{τ} la courbe elliptique $\mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})$, $e_2(\tau)$ la classe de $(1 + \tau)/2$ dans E_{τ} et ν_{τ} la 2-forme sur E_{τ}

$$\nu_{\tau} = \frac{i}{2 \mathrm{Im} \tau} dz \wedge d\bar{z}.$$

On rappelle que $\|\theta\|_0(z; \tau)$ définit une fonction sur E_τ dont l'unique zéro est $e_2(\tau)$.

Comme φ est $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{Z})$ -invariante, on peut supposer Z de la forme

$$\begin{pmatrix} \tau' & 0 \\ 0 & \tau'' \end{pmatrix}.$$

La fibre $\pi^{-1}(Z)$ s'identifie à $E_{\tau'} \times E_{\tau''}$; on notera p' et p'' ses projections sur $E_{\tau'}$ et $E_{\tau''}$.

Nous pouvons de plus choisir I_1 et I_2 de sorte que, en posant

$$P'_i = p' \circ s_{I_i}(Z) \quad \text{et} \quad P''_i = p'' \circ s_{I_i}(Z), \quad i \in \{1, 2\},$$

on ait

$$P'_1 \neq P'_2 \quad \text{et} \quad P''_1 \neq P''_2. \quad (54)$$

Il suffit par exemple de prendre

$$I_1 = \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad I_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

On vérifie alors que, pour tout $I \in \mathcal{I} \setminus \{I_1, I_2\}$, on a

$$p' \circ s_{I+I_1+I_2}(Z) \neq e_2(\tau') \quad \text{et} \quad p'' \circ s_{I+I_1+I_2}(Z) \neq e_2(\tau'').$$

Par suite, la fonction

$$\sum_{I \in \mathcal{I} \setminus \{I_1, I_2\}} s_{I+I_1+I_2}^* \log \|\theta\|_0$$

est définie et continue au voisinage de Z . De plus, comme

$$\Theta_0 \cap \pi^{-1}(Z) = p'^{-1}(e_2(\tau')) \cup p''^{-1}(e_2(\tau'')),$$

la condition (54) assure que Θ_0 et $t_{I_1-I_2}(\Theta_0)$ sont transverses dans $\pi^{-1}(Z)$. Cela entraîne que

$$\int_{\pi} [t_{I_1-I_2}(\Theta_0)] \log \|\theta\|_0 \mu_0$$

est elle aussi définie et continue au voisinage de Z . Il en va clairement de même de

$$\int_{\pi} \log \|\theta\|_0 \mu_0^2.$$

On obtient ainsi que φ admet une limite en Z , qui vaut

$$\begin{aligned} & \sum_{I \in \mathcal{I} \setminus \{I_1, I_2\}} \log \|\theta\|_0(s_{I+I_1+I_2}(Z)) - \int_{E_{\tau'} \times E_{\tau''}} \log \|\theta\|_0(\cdot; Z) \mu_0^2 \\ & - \int_{E_{\tau'} \times E_{\tau''}} [\{Q'\} \times E_{\tau''} \cup E_{\tau'} \times \{Q''\}] \log \|\theta\|_0(\cdot; Z) \mu_0, \end{aligned}$$

avec $Q' = e_2(\tau') + P'_1 - P'_2$ et $Q'' = e_2(\tau'') + P''_1 - P''_2$. On vérifie sans difficulté que cette expression vaut $2 \log 2$, au moyen des formules

$$\|\theta\|_0(z', z''; Z) = \|\theta\|_0(z'; \tau') \|\theta\|_0(z'', \tau''),$$

$$\mu_0 = p'^* \nu_{\tau'} + p''^* \nu_{\tau''} \quad \text{sur } \pi^{-1}(Z),$$

et du lemme suivant:

LEMME 3 – *Pour tout $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im } \tau > 0$, on a*

$$\int_{E_\tau} \log \|\theta\|_0(z; \tau) \nu_\tau(z) = \frac{1}{3} \log \left[\frac{1}{2} \|\theta\|_0(0; \tau) \|\theta\|_0\left(\frac{1}{2}; \tau\right) \|\theta\|_0\left(\frac{\tau}{2}; \tau\right) \right].$$

Démonstration. Ce lemme se déduit immédiatement des formules de [5], p. 417, *lemma a*) et *proof a*). On peut aussi le démontrer directement à partir du développement en produit infini de $\theta(z; \tau)$. ■

A.3.4. Démonstration du lemme 2

Soient φ_1 , φ_2 et φ_3 les fonctions sur $\mathcal{H}_2 \setminus D$

$$\varphi_1 = \sum_{I \in \mathcal{I} \setminus \{I_1, I_2\}} s_{I+I_1+I_2}^* \log \|\theta\|_0,$$

$$\varphi_2 = \int_{\pi} [t_{I_1-I_2}(\Theta_0)] \log \|\theta\|_0 \mu_0,$$

$$\varphi_3 = \int_{\pi} \log \|\theta\|_0 \mu_0^2.$$

Il vient, d'après (49), (50) et (51),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} d' d'' \varphi_1 &= \sum_{I \in \mathcal{I} \setminus \{I_1, I_2\}} s_{I+I_1+I_2}^* \mu_0 \\ &= 4\kappa. \end{aligned} \tag{55}$$

Le calcul de $d' d'' \varphi_2$ fait intervenir des produits de courants. L'existence de ces produits et la validité des calculs qui suivent résultent de la transversalité des hypersurfaces Θ_0 et $t_{I_1-I_2}(\Theta_0)$. De plus on a

$$\{\Theta_0 \cap t_{I_1-I_2}(\Theta_0)\} \setminus \pi^{-1}(D) = s_{I_1}(\mathcal{H}_2 \setminus D) \cup s_{I_2}(\mathcal{H}_2 \setminus D). \tag{56}$$

Cela découle du fait que, si P et Q sont deux points distincts d'une surface de Riemann de genre 2, alors les diviseurs Θ et $\Theta + P - Q$ sont transverses dans $\text{Pic}^1 X$ et l'on a

$$\Theta \cap (\Theta + P - Q) = \{P, Q\}.$$

Comme $[t_{I_1-I_2}(\Theta_0)]$ et μ_0 sont d' et d'' -fermées, il vient

$$\frac{1}{\pi i} d' d'' \varphi_2 = \int_{\pi} [t_{I_1-I_2}(\Theta_0)] \frac{1}{\pi i} d' d'' \log \|\theta\|_0 \mu_0,$$

puis, d'après (51),

$$\frac{1}{\pi i} d' d'' \varphi_2 = \int_{\pi} [t_{I_1-I_2}(\Theta_0)] (\mu_0 - [\Theta_0]) \mu_0. \quad (57)$$

De plus, on tire de (56), (49) et (50)

$$\begin{aligned} \int_{\pi} [t_{I_1-I_2}(\Theta_0)] \cdot [\Theta_0] \cdot \mu_0 &= \int_{\pi} ([s_{I_1}(\mathcal{H}_2 \setminus D)] + [s_{I_2}(\mathcal{H}_2 \setminus D)]) \cdot \mu_0 \\ &= s_{I_1}^* \mu_0 + s_{I_2}^* \mu_0 \\ &= 2\kappa, \end{aligned} \quad (58)$$

tandis que, d'après (49),

$$\int_{\pi} [t_{I_1-I_2}(\Theta_0)] \mu_0^2 = \int_{\pi} [\Theta_0] \mu_0^2. \quad (59)$$

On trouve enfin, en utilisant le fait que μ_0^2 est d' et d'' -fermée, puis les égalités (51) et (52):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} d' d'' \varphi_3 &= \int_{\pi} \frac{1}{\pi i} \log \|\theta\|_0 \mu_0^2 \\ &= \int_{\pi} \mu_0^3 - \int_{\pi} [\Theta_0] \mu_0^2 \\ &= 6\kappa - \int_{\pi} [\Theta_0] \mu_0^2. \end{aligned} \quad (60)$$

Les identités (55), (57), (58), (59) et (60) montrent que $d' d'' \varphi = 0$. ■

Bibliographie

- [1] S. JU. ARAKELOV. Intersection theory of divisors on an arithmetic surface, *Izv. Akad. Nauk. SSSR* 38. 6 (1974), 1167–1180.
- [2] J.-B. BOST. Fonctions de Green-Arakelov, fonctions thêta et courbes de genre 2, *C. R. Acad. Sci. Paris*. 305, I (1987), 643–646.
- [3] J.-B. BOST et J.-F. MESTRE. Moyenne arithmético-géométrique et Périodes des Courbes de genre 1 et 2, *Gazette des Mathématiciens*. 38 (1988), 36–64.

- [4] P. DELIGNE. Le déterminant de la cohomologie, *Contemporary Mathematics*. **67** (AMS 1987), 93–177.
- [5] G. FALTINGS. Calculus on arithmetic surfaces, *Ann. of Math.* **119** (1984), 387–424.
- [6] J. IGUSA. Arithmetic variety of moduli for genus two, *Ann. of Math.* **72** (1960), 612–649.
- [7] L. MORET-BAILLY. Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques, *ce volume*.
- [8] L. MORET-BAILLY. La formule de Noether pour les surfaces arithmétiques, *Invent. Math.* **98** (1989), 491–498.
- [9] L. MORET-BAILLY. Métriques permises, in Séminaire sur les pinces arithmétiques: la conjecture de Mordell, *édité par L. Szpiro, Astérisque*. **127** (1985), 29–87.
- [10] D. MUMFORD. *Tata Lectures on Theta*. Volume II, Progress in Math. **43**, Birkhäuser (1984).
- [11] A.N. PARSHIN. The Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality for arithmetical surfaces and its applications, *Sém. de théorie des nombres de Paris 1986 – 87, Progress in Math.* **75**.
- [12] H.E. RAUCH. Theta constants on a Riemann surface with many automorphisms, *Symposia Mathematica*. **III** (1970), 305–323.
- [13] F. RICHELOT. De transformatione integralium Abelianorum primi ordinis commentatio, *J. reine angew. Math.* **16** (1837), 221–341.
- [14] G. ROSENHAIN. Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe, *Mémoires des savants étrangers*. **XI** (1851), 362–468.

Jean-Benoît BOST – IHES, 35, route de Chartres, F-91440 BURES-SUR-YVETTE.

Jean-François MESTRE – ENS, 45, rue d’Ulm, F-75230 PARIS CEDEX 05 (EARN/BITNET: MESTRE@FRULM11).

Laurent MORET-BAILLY – IRMAR, Université de Rennes-I, Campus de Beaulieu, F-35042 RENNES CEDEX (EARN/BITNET: MORET@FRCICB81).