MICHEL ENGUEHARD

Isométries parfaites entre blocs de groupes symétriques

Astérisque, tome 181-182 (1990), p. 157-171

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__181-182__157_0>

Isométries parfaites entre blocs de groupes symétriques

Michel Enguehard

Introduction

Soit p un nombre premier. Un p-bloc b d'un groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est défini par un p-cœur, c'est-à-dire une partition sans p-crochet ; si ce p-cœur est une partition de l'entier k, $N = (n-k)/p$ est un entier : c'est le "poids" du bloc (voir [J–K], chapitres 2 et 6). Il est connu de longue date que le poids est un invariant très significatif d'un p-bloc d'un groupe symétrique. Deux blocs de même poids ont le même nombre de caractères ordinaires, le même nombre de caractères modulaires (G. de B. Robinson [Ro.1]), et leurs matrices de Cartan ont mêmes invariants de similitude (M. Osima, [Os.1] [Os.2]). On a plus : les matrices de décomposition ont également mêmes invariants de similitude et les centres des algèbres des blocs sont isomorphes. On présente ces propriétés en exhibant des isométries "parfaites" au sens de M. Broué ([Br.2]) entre les groupes de Grothendieck des blocs correspondants (notre théorème 11).

L'existence de ces isométries est déduite de la formule de Murnaghan-Nakayama (voir 2), autrement dit de la connaissance —théorique— des valeurs des caractères irréductibles. On aurait aimé, dans l'optique du théorème 3.1 de [Br.2], exhiber une isométrie parfaite à l'aide d'un objet parfait dans la catégorie dérivée envisagée par M. Broué (et notée ${}_b\mathbf{Deb}$) dans l'article cité. Au moins peut-on espérer que l'éventuel bicomplexe coupable ne se cachera pas très longtemps.

Un résultat nouveau portant sur les blocs des groupes symétriques implique en général un résultat nouveau portant sur les blocs des groupes linéaires, et un article sur ce sujet est prévu, démontrant l'existence d'isométries parfaites entre certains blocs de groupes linéaires ou unitaires (*). D'autre part, il est clair qu'un travail analogue est possible à propos de formules dérivées de (ou analogues à) la formule de Murnaghan-Nakayama, par exemple sur les caractères de certains produits

(*) juin 88 : l'existence d'isométries parfaites entre blocs de groupes linéaires ou de groupes unitaires de même poids a fait l'objet d'une conférence au colloque de Bad Honnef "Darstellungstheorie endlicher Gruppen und endlich-dimensionaler Algebren", 30 juin 1988 voir [En.2]

S.M.F.
Astérisque 181-182 (1990)

en couronne (formule d'Osima, [Os.3]), sur ceux des groupes de représentations des groupes symétriques (formules de Morris [Mo]) ou mieux faisant intervenir des symboles au lieu de partitions telles la formule de R. Boyce sur les produits scalaires entre caractères unipotents et caractères de Deligne-Lusztig ([Bo]) dans les groupes de type classique et la formule de Asai (Fong-Srinivasan [F-S], (3.1) (3.2)) sur le foncteur de Lusztig R_L^G; dans ces dernières apparaît une géométrie de "e-crochets" et "e-cocrochets" sur les symboles admettant des e-décompositions ([Ol]). Sans trop se hasarder on peut en espérer des applications aux blocs des groupes de type classique (*).

Le groupe de Grothendieck d'un groupe symétrique est décomposé en somme directe selon une méthode déjà utilisée par Osima [Os.2], et qui est une variante *adhoc* de la décomposition de l'espace des fonctions centrales sur un groupe fini à l'aide des nombres de décomposition généralisés. La décomposition abstraite $x = x_p x_{p'}$ est remplacée par une décomposition "concrète" $x = x_{(p)} x_{(p')}$ où $x_{(p)}$ est le produit des cycles de longueur divisible par p dans la domposition standard en produit de cycles de supports disjoints. Bien entendu cette décomposition du groupe de Grothendieck croise convenablement la décomposition par blocs. Soient alors b et b' deux blocs de groupes symétriques de même poids. L'ensemble des classes d'éléments (x) telles $x = x_{(p)}$ et que le centralisateur de x contienne un bloc b_x défini par le même cœur que le bloc initial $b = b_1$ est en bijection naturelle avec son analogue relativement à b' ; pour chaque classe (x) est définie une isométrie I_x entre les groupes de Grothendieck de b_x et de $b'_{x'}$. Ici intervient un théorème de type combinatoire démontré dans [En.1] ; dans ce théorème la bijection habituelle entre partitions de p-cœurs différents via le "p-quotient" (ou "star-diagram") est assortie d'une relation entre signatures des crochets si bien que les formules de Murnaghan-Nakayama se correspondent via I_x. Il en résulte que I_x échange les sous-groupes engendrés par les caractères projectifs (théorème 9). Il est alors facile d'en déduire que l'isométrie de b vers b' est parfaite. Il est clair que l'on est en présence d'un système local d'isométries, compatible à la fusion au sens de M. Broué (voir ? dans ces actes) mais la décomposition non abstraite utilisée permet une démonstration plus rapide.

(*) décembre 88 : un article est en préparation sur les groupes de type **B**, **C** et **D**, basé sur un théorème combinatoire analogue à notre théorème 8, et relatif à la géométrie des "cocrochets" de symboles ; un autre est prévu sur les extensions du groupe symétrique.

Les résultats présentés ont fait l'objet d'une conférence au séminaire sur la théorie des groupes finis, à Paris en mars 1988, et du rapport [En.1] partiellement repris ici.

Je tiens à remercier Paul Fong qui, par une lecture attentive et amicale a grandement contribué à réduire la liste prévisible d'errata.

1. Quelques notations.

Soit un corps $\mathcal{K}$ de caractéristique nulle, complet pour une valuation discrète et dont l'anneau de valuation $\mathcal{A}$ a un corps résiduel $\mathcal{F}$ de caractéristique p. Si G est un groupe fini, on note $\mathcal{R}(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathcal{K}G$-modules de type fini; on considère que $\mathcal{R}(G)$ est un groupe abélien de fonctions centrales sur G, admettant une base formée des caractères des représentations absolument irréductibles de G.

Reprenant des notations analogues à celles de J.-P. Serre [Se], on note $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules projectifs de type fini et $e_G: \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(G) \to \mathcal{R}(G)$ l'injection canonique. Rappelons que l'image de e_G est le sous-groupe des éléments de $\mathcal{R}(G)$ de valeur nulle sur tout élément de G dont l'ordre est divisible par p ([Se], par. 16, Th. 36).

Soient enfin $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(G)$ le groupe de Grothendieck de G sur $\mathcal{F}$, assimilé au groupe des fonctions centrales sur G engendré par les caractères de Brauer des représentations de G sur $\mathcal{F}$, et $d_G: \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(G)$ l'application de décomposition. Les applications e_G et d_G sont adjointes (on suppose $\mathcal{K}$ assez gros) et $c_G = d_G \circ e_G$ est l'application dite de Cartan.

L'ensemble des partitions d'un entier n est noté $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P} := \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.

2. Caractères des groupes symétriques et formule de Murnaghan-Nakayama

Tous les groupes symétriques considérés, en particulier $\mathcal{S}_6$, sont munis de leur représentation naturelle. Si $m, n \in \mathbb{N}$ et $m \leq n$, il existe donc une injection naturelle de $\mathcal{S}_m$ dans $\mathcal{S}_n$, définie à automorphismes intérieurs de $\mathcal{S}_n$ près. Une telle famille d'injections définit elle-même une injection de l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathcal{S}_m$ dans l'ensemble des classes de conjugaisons de $\mathcal{S}_n$ (par adjonction de $(n-m)$ points fixes).

Les classes de conjugaison de $\mathcal{S}_n$, tout comme ses représentations simples, sont paramétrées par $\mathcal{P}_n$. Si $\lambda \in \mathcal{P}_n$, notons χ_λ le caractère irréductible correspondant et z_λ l'ordre du centralisateur dans $\mathcal{S}_n$ d'un élément de la classe définie par λ. Pour combiner la formule de Murnaghan-Nakayama (voir 3) et le théorème combinatoire rappelé en 8, introduisons les notations suivantes :

Si $x \in \mathcal{S}_n$, soit $x_{(p)}$ (resp. $x_{(p')}$) le produit des cycles de la décomposition en cycles de x dont la longueur est divisible par p (resp. non divisible par p). On a clairement $x = x_{(p)}x_{(p')} = x_{(p')}x_{(p)}$; cette décomposition se transporte par conjugaison dans $\mathcal{S}_n$ et $x_{(p')}$ est d'ordre premier à p, $x_{(p)}$ d'ordre divisible par p ou égal à 1. Notons que si $x_{(p)}$ et $y_{(p)}$ sont conjugués dans $\mathcal{S}_n$, les p-composantes x_p et y_p de x et de y le sont aussi. La classe de $x_{(p)}$ dans $\mathcal{S}_n$ est caractérisée par une partition dont les composantes autres que 1 sont divisibles par p. Au contraire, la classe de $x_{(p')}$ est caractérisée par une partition dont toutes les composantes sont premières à p. Inversement, si $\beta = \{\beta_j\}_{1\leq j\leq r}$ est une partition (dont les composantes sont en ordre décroissant) de $b = \sum_j \beta_j$, à la partition $\{p\beta_j\}_{1\leq j\leq r}$ de pb, laquelle sera notée $p\cdot\beta$, est associée une classe de $\mathcal{S}_{pb}$, ou encore, si $n \geq pb$, une classe d'éléments de $\mathcal{S}_n$, admettant $(n - pb)$ points fixes. Notons $\mathcal{P}_m^{(p')}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}_m$ dont toute composante est première à p. Il est clair que si $x \in \mathcal{S}_n$, et si $x_{(p')}$ admet pb points fixes, la classe de $x_{(p')}$ est définie par un élément de $\mathcal{P}_{n-pb}^{(p')}$. La décomposition précédente établit donc une bijection

$$\mathcal{P}_n \to \cup_{\{b\in\mathbb{N}\mid 0\leq pb\leq n\}}\mathcal{P}_b \times \mathcal{P}_{n-pb}^{(p')}.$$

Notons que si par cette bijection λ a pour image (β,ν), on a $z_\lambda = z_{p.\beta}z_\nu$.

Si $\lambda \in \mathcal{P}_n$, $a \in \mathbb{N}$ et $I \subset \mathbb{N}$, notons $\mathcal{C}_a(\lambda)$ (resp. $\mathcal{C}_I(\lambda)$) l'ensemble des crochets de λ de longueur a (resp. dont la longueur appartient à I). Si $\gamma \in \mathcal{C}_a(\lambda)$, l'ablation de γ à λ fournit une partition de $(n - a)$, qui est notée $\gamma * \lambda$. La signature de γ (voir [J–K] ou [En], 2.2 et 2.3 ; en termes classiques, elle vaut $(-1)^{l(\gamma)}$, où $l(\gamma)$ est la "longueur de jambe" de γ) est notée $\epsilon(\gamma)$. La formule de Murnaghan-Nakayama s'écrit, si $(x,y) \in \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_d$, $m + d = n$ et y est un cycle de longueur d,

$$[\lambda](xy) = \sum_{\gamma\in\mathcal{C}_d(\lambda)} \epsilon(\gamma)[\gamma * \lambda](x).$$

Soit alors $e \in \mathbb{N}^\times$. Soit l'équivalence la plus fine dans l'ensemble des partitions telle que

"si $\gamma \in \mathcal{C}_{e\mathbb{N}}(\lambda)$, λ et $\gamma * \lambda$ sont équivalents."

Soit $\mathcal{B}$ une classe selon cette équivalence. Il existe alors un unique $\kappa \in \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{C}_e(\kappa) = \emptyset$; la partition κ est dite "cœur de $\mathcal{B}$". Supposons que κ soit une partition de l'entier k. On a alors

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{P}_k = \{\kappa\}, \qquad \mathcal{B} \cap \mathcal{P}_m \neq \emptyset \quad \text{si et seulement si} \quad m - k \in e\mathbb{N}.$$

Ceci conduit à poser dans ces conditions $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\kappa)$ et $\mathcal{B} \cap \mathcal{P}_{k+eN} = \mathcal{B}_N(\kappa)$ (1)

3. Les u-nombres de Osima.

Soit β une partition et soit $x \in \mathcal{S}_n$ tel que $x_{(p')} = 1$ et $x_{(p)}$ de type $\{p\beta_j\}_j$. L'injection naturelle, définie à automorphismes intérieurs près, de $\mathcal{S}_{n-pb}$ dans le centralisateur de x dans $\mathcal{S}_n$ et la formule de Murnaghan-Nakayama (itérée) montrent l'existence d'une application

$$r^{\beta}_{\mathcal{S}_n} : \mathcal{R}(\mathcal{S}_n) \to \mathcal{R}(\mathcal{S}_{n-pb})$$

telle que

$$(r^{\beta}_{\mathcal{S}_n}(\chi))(y) = \chi(xy) \quad (y \in \mathcal{S}_{n-pb}).$$

Plus précisément, on a

$$r^{\beta}_{\mathcal{S}_n}(\chi_\lambda) = \sum_{\gamma = \{\gamma_j\}_{1 \le j \le r}} \epsilon(\gamma_r \circ \cdots \circ \gamma_1)\, \chi_{\gamma_r * \cdots * \gamma_1 * \lambda} \qquad (\lambda \in \mathcal{P}_n),$$

où $\gamma = \{\gamma_j\}_{1 \le j \le r}$ parcourt l'ensemble des suites telles que $\gamma_1 \in \mathcal{C}_{p\beta_1}(\lambda)$ et, pour $j = 1, \cdots, r-1$, $\gamma_{j+1} \in \mathcal{C}_{p\beta_{j+1}}(\gamma_j * \cdots * \lambda)$. On voit en particulier que $r^{\beta}_{\mathcal{S}_n}(\chi_\lambda)$ décompose sur des irréductibles χ_μ où μ a le même p-cœur que λ ; si le p-cœur de λ est une partition de k et si $n - pb < k$, alors $r^{\beta}_{\mathcal{S}_n}(\chi_\lambda) = 0$.

Osima ([Os.1]) a appelé "u-numbers" les coefficients des matrices des applications composées

$$d^{\beta}_{\mathcal{S}_n} = d_{\mathcal{S}_{n-pb}} \circ r^{\beta}_{\mathcal{S}_n} : \mathcal{R}(\mathcal{S}_n) \to \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{n-pb}) \qquad (\beta \in \mathcal{P}_b \text{ et } pb \le n)$$

ces applications étant repérées sur les bases formées par les caractères irréductibles. Les fonctions $d^{\beta}_{\mathcal{S}_n}$ se prolongent en des applications linéaires entre espaces de fonctions centrales et sont des variantes *adhoc* des applications de décomposition généralisée de Brauer d^x_G (G groupe fini, $x \in G_p$) définies par $(d^x_G)(\chi)(y) = \chi(xy)$ si $y \in C_G(x)_{p'}$..

(1) Ces notations ne font pas allusion à l'entier e qui est supposé fixé mais sera égal à p plus loin

Lemme 4. *Soit*

$$D_{\mathcal{S}_n}: \mathcal{R}(\mathcal{S}_n) \to \oplus_{(b,\beta)} \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{n-pb}) \qquad (b \in \mathbb{N},\ pb \leq n \text{ et } \beta \in \mathcal{P}_b).$$

L'application $D_{\mathcal{S}_n}$ *est injective, de conoyau fini, et on a, si* $\chi, \chi' \in \mathcal{R}(Sn)$,

$$\langle \chi, \chi' \rangle_{\mathcal{S}_n} = \sum_{(b,\beta)} z_{p\cdot\beta}^{-1} \langle d_{\mathcal{S}_n}^{\beta}(\chi), d_{\mathcal{S}_n}^{\beta}(\chi') \rangle_{\mathcal{S}_{n-pb}}.$$

Le lemme 4 est une variante *adhoc* de la décomposition abstraite de l'espace des fonctions centrales sur un groupe fini via les nombres de décomposition généralisés. La décomposition à droite est en somme orthogonale.

Les groupes $\mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{n-pb})$ ont même rang, en raison de l'existence de la bijection $\mathcal{P}_n \to \cup_{\{b \in \mathbb{N} | 0 \leq pb \leq n\}} \mathcal{P}_b \times \mathcal{P}_{n-pb}^{(p')}$ établie en 2, et $D_{\mathcal{S}_n}$ est clairement injective. Ainsi la somme directe $\oplus_{(b,\beta)} \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_{n-pb})$ est un groupe de fonctions centrales sur $\mathcal{S}_n$. Si ϕ appartient au composant d'indice (b, β), on étend ϕ à $\mathcal{S}_n$ en $\tilde{\phi}$ par

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x_{(p')}) & \text{si } x_{(p)} \text{ est de type } p \cdot \beta; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plongeons ces $\mathbb{Z}$-modules dans les espaces de fonctions centrales qu'ils engendrent. Si $\lambda \in \mathcal{P}_n$ s'envoie sur $(\beta, \nu) \in \mathcal{P}_b \times \mathcal{P}_{n-pb}^{(p')}$, la fonction caractéristique Φ_λ de la classe de conjugaison de $\mathcal{S}_n$ de type λ est de norme z_λ^{-1} tandis que $d_{\mathcal{S}_n}^{\beta}(\Phi_\lambda)$ est la fonction caractéristique de la classe de type ν, de norme $z_\nu^{-1} = z_{p\cdot\beta} z_\lambda^{-1}$. Les fonctions caractéristiques de classes de conjugaison formant une base orthogonale, on en déduit l'égalité. ∎

Lemme 5. *Pour* $b \in \mathbb{N}$, $pb \leq n$ *et* $\beta \in \mathcal{P}_b$, *soit*

$$e_{\mathcal{S}_n}^{\beta}: \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_{n-pb}) \to \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$$

l'adjointe de $d_{\mathcal{S}_n}^{\beta}$.

a) Si $\chi \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_{n-pb})$, *on a*

$$e_{\mathcal{S}_n}^{\beta}(\chi)(x) = \begin{cases} z_{p\cdot\beta}\chi(x_{(p')}), & \text{si } x_{(p)} \text{ est de type } p.\beta; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) L'application

$$E_{\mathcal{S}_n} = \oplus_{(b,\beta)} e_{\mathcal{S}_n}^{\beta}: \oplus_{(b,\beta)} \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_{n-pb}) \to \mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$$

est injective de conoyau fini, adjointe de $D_{\mathcal{S}_n}$.
c) Pour tout $b \in \mathbb{N}$ *tel que* $pb \leq n$ *et* $\beta \in \mathcal{P}_b$, *on a*

$$d^{\beta}_{\mathcal{S}_n} \circ e^{\beta}_{\mathcal{S}_n} = z_{p.\beta} c_{\mathcal{S}_{n-pb}}.$$

Pour calculer commodément les adjointes, plongeons encore les $\mathbb{Z}$-modules considérés dans les espaces de fonctions centrales qu'ils engendrent. Soient $\mu \in \mathcal{P}_n$, Φ_μ la fonction caractéristique de la classe de type μ, x un élément de cette classe ; supposons que μ décompose en $(\gamma, \rho) \in \mathcal{P}_c \times \mathcal{P}^{(p')}_{n-pc}$ et soit y un élément de la classe de type ρ de $\mathcal{S}_{n-pc}$. Enfin soit $\chi \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_{n-pb})$. Il est clair que

$$\langle e^{\beta}_{\mathcal{S}_n}(\chi), \Phi_\mu \rangle_{\mathcal{S}_n} = z_\mu^{-1} e^{\beta}_{\mathcal{S}_n}(\chi)(x),$$

tandis que

$$\langle \chi, d^{\beta}_{\mathcal{S}_n}(\Phi_\mu) \rangle_{\mathcal{S}_{n-pb}} = \begin{cases} z_\rho^{-1}\chi(y) & \text{si } \gamma = \beta; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit l'assertion a).

Les assertions b), c) résultent de a) et du fait que $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_{n-pb})$ sépare les classes p-régulières de $\mathcal{S}_{n-pb}$. ∎

Le lemme 5 contient en particulier les résultats de Osima ([Os.2], [J–K] 6.2.28, 6.2.35) sur les “u-nombres”, à savoir les relations d'orthogonalité entre les matrices $U^{\beta}_{\mathcal{S}_n}$ des applications $d^{\beta}_{\mathcal{S}_n}$ relativement aux bases formées par les irréductibles :

$$U^{\beta}_{\mathcal{S}_n}\, {}^tU^{\gamma}_{\mathcal{S}_n} = \delta^{\gamma}_{\beta} z_{p.\beta} C_{\mathcal{S}_{n-pb}},$$

(où $C_{\mathcal{S}_{n-pb}}$ est la matrice de Cartan de $\mathcal{S}_{n-pb}$).

6. Les p-blocs.

De la formule de Murnaghan-Nakayama on déduit ([J–K], 2.7.27, 6.1.21, ou [Pu], [Br.1]) que les irréductibles χ_λ et $\chi_{\lambda'}$ associés à deux partitions λ et λ' d'un même entier sont dans un même bloc si et seulement si λ et λ' ont même p-cœur au sens de 2. Les p-blocs des groupes symétriques sont paramétrés par les couples (N, κ), où κ est un p-cœur et $N \in \mathbb{N}$; le bloc correspondant, qui sera noté $b_N(\kappa)$, est un bloc du groupe $\mathcal{S}_{k+pN}$, si $\kappa \in \mathcal{P}_k$ (en règle générale, les objets attachés au bloc $b_N(\kappa)$ seront indexés par N et porteront κ en variable). Les p-blocs de $\mathcal{S}_n$ sont donc indexés sur l'ensemble des p-cœurs partitions de k tel que $(n-k) \in p\mathbb{N}$.

L'ensemble des irréductibles attachés à $b_N(\kappa)$ est alors paramétré par $\mathcal{B}_N(\kappa)$ et le sous-module facteur direct de $\mathcal{R}(\mathcal{S}_n)$ attaché à $b_N(\kappa)$ est

$$\mathcal{R}(b_N(\kappa)) = \mathcal{R}_N(\kappa) := \sum_{\lambda \in \mathcal{B}_N(\kappa)} \mathbb{Z}[\lambda].$$

De la formule de Murnaghan-Nakayama et de la classification des blocs il résulte aussi clairement que les applications $r^{\beta}_{\mathcal{S}_n}$ décomposent en somme directe bloc à bloc, soit selon chaque p-cœur. De même décomposent les applications $d^{\beta}_{\mathcal{S}_n}$ (comme les applications de décomposition généralisées) et leurs adjointes $e^{\beta}_{\mathcal{S}_n}$. On définit donc avec des notations évidentes pour tout couple (N, κ) et par restriction

$$\mathcal{P}_N(\kappa) := \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(b_N(\kappa)) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_{k+pN}) \qquad (\kappa \in \mathcal{P}_k) \quad (n = k + pN)$$

$$\mathcal{R}^{(p')}_N(\kappa) := \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(b_N(\kappa)) \subset \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_n) \qquad (\kappa \in \mathcal{P}_k) \quad (n = k + pN)$$

$$\text{restriction de } r^{\beta}_{\mathcal{S}_{k+pN}} \ : \qquad r^{\beta}_N(\kappa) \colon \mathcal{R}_N(\kappa) \to \mathcal{R}_{N-b}(\kappa) \qquad (b \leq N)$$

$$\text{restriction de } d^{\beta}_{\mathcal{S}_{k+pN}} \ : \qquad d_N(\kappa) \colon \mathcal{R}_N(\kappa) \to \mathcal{R}^{(p')}_N(\kappa)$$

$$d^{\beta}_N(\kappa) = d_{N-b}(\kappa) \circ r^{\beta}_N(\kappa) \colon \mathcal{R}_N(\kappa) \to \mathcal{R}^{(p')}_{N-b}(\kappa) \qquad (b \leq N,\ \beta \in \mathcal{P}_b)$$

$$e^{\beta}_N(\kappa) = {}^t d^{\beta}_N(\kappa) \colon \mathcal{P}_{N-b}(\kappa) \to \mathcal{R}_N(\kappa) \qquad (b \leq N,\ \beta \in \mathcal{P}_b)$$

$$D_N(\kappa) = \oplus_{(b,\beta)} d^{\beta}_N(\kappa) : \mathcal{R}_N(\kappa) \to \oplus_{(b,\beta)} \mathcal{R}^{(p')}_{N-b}(\kappa)$$

$$E_N(\kappa) = \oplus_{(b,\beta)} e^{\beta}_N(\kappa) : \oplus_{(b,\beta)} \mathcal{P}_{N-b}(\kappa) \to \mathcal{R}_N(\kappa)$$

où (b, β) parcourt l'ensemble des couples tels que $(b \in \mathbb{N},\ b \leq N,\ \beta \in \mathcal{P}_b)$. Les lemmes 4 et 5 conduisent à

Proposition 7. *Les applications $D_N(\kappa)$ et $E_N(\kappa)$ sont injectives de conoyaux finis et adjointes l'une de l'autre. On a*

$$D_N(\kappa) \circ E_N(\kappa) = \oplus_{(b,\beta)} z_{p \cdot \beta} C_{N-b}(\kappa)$$

où $C_m(\kappa)$ est l'application de Cartan du bloc $b_m(\kappa)$.

8. L'isométrie.

L'existence d'une bonne isométrie entre blocs de poids égaux est fondée sur le

Théorème : d'un cœur à l'autre. *Soit $e \in I\!N$, $e \neq 0$. Soient deux e-cœurs $\kappa \in \mathcal{P}_k$ et $\mu \in \mathcal{P}_m$ et $\mathcal{B}(\kappa)$, $\mathcal{B}(\mu)$ les sous-ensembles de $\mathcal{P}$ qu'ils définissent. Il existe des applications*

$$\Psi: \mathcal{B}(\kappa) \to \mathcal{B}(\mu), \quad \textit{bijective},$$

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathcal{B}(\kappa),\ \Phi_\lambda: \mathcal{C}_{eI\!N}(\lambda) \to \mathcal{C}_{eI\!N}(\Psi(\lambda)), \quad \textit{bijectives},$$

$$\alpha: \mathcal{B}(\kappa) \to \{-1, 1\},$$

telles que, si $\lambda \in \mathcal{B}_N(\kappa)$ et si $\gamma \in \mathcal{C}_{eI\!N}(\lambda)$,
a) $\Psi(\lambda) \in \mathcal{B}_N(\mu)$, Φ_λ conserve la longueur des crochets, et $\Phi_\lambda(\gamma) * \Psi(\lambda) = \Psi(\gamma * \lambda)$.
b) $\epsilon(\Phi_\lambda(\gamma)) = \alpha(\lambda)\alpha(\gamma * \lambda)\epsilon(\gamma)$.
(notations du paragraphe 2)

Une fonction signe α convenable est le "e-signe relatif" introduit par Morris et Olsson [M–O], autrement dit $\alpha(\lambda) = \sigma(\lambda)\sigma(\Psi(\lambda))$, où σ est la fonction introduite par Robinson pour e premier ([Ro.2], [J–K], p.82). L'application Ψ n'est pas unique. Dans [En.1] comme dans tous les travaux précédents comparant des blocs de poids égaux de groupes symétriques, on utilise le passage aux e-quotients, et on connait donc une famille d'applications sur lequel le groupe additif de $Z\!\!Z/eZ\!\!Z$ opère transitivement.

Soient donc deux p-cœurs $\kappa \in \mathcal{P}_k$ et $\mu \in \mathcal{P}_m$ et fixons arbitrairement des applications Ψ, Φ et α comme dans le théorème précédent. Considérons, pour tout $N \in I\!N$, les isométries

$$I_N: \mathcal{R}_N(\kappa) \to \mathcal{R}_N(\mu)$$

définies par

$$I_N(\chi_\lambda) = \alpha(\lambda)\chi_{\Psi(\lambda)} \qquad (\lambda \in \mathcal{B}_N(\kappa)).$$

Théorème 9. *Soient $\kappa \in \mathcal{P}_k$ et $\mu \in \mathcal{P}_m$ deux p-cœurs et*

$$I_N: \mathcal{R}_N(\kappa) \to \mathcal{R}_N(\mu) \qquad (N \in I\!N)$$

des isométries comme au paragraphe 8.
a) Soit $\beta = \{\beta_j\}_{1 \le j \le r}$ une partition de b. Si $b \le N$, on a

$$I_{N-b} \circ r_N^\beta(\kappa) = r_N^\beta(\mu) \circ I_N.$$

b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$I_N(e_N(\kappa)(\mathcal{P}_N(\kappa))) = e_N(\mu)(\mathcal{P}_N(\mu)).$$

L'assertion b) montre en particulier que le nombre de caractères irréductibles modulaires d'un bloc ne dépend que de l'entier N et que les matrices de décomposition des deux blocs $b_N(\kappa)$ et $b_N(\mu)$ ont les mêmes invariants de similitude.

L'assertion a) se déduit du théorème 8 et du calcul des applications $r^{\beta}_{\mathcal{S}_n}$ par la formule de Murnaghan-Nakayama.

Soit $\chi \in \mathcal{R}_N(\kappa)$; χ est dans l'image de $e_N(\kappa)$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathcal{S}_n$ non p-régulier, on a $\chi(x) = 0$. Or x est non p-régulier si et seulement si $x_{(p)} \neq 1$. Si $x_{(p)}$ est de type $p \cdot \beta$, on a $\chi(x) = r^{\beta}_N(\kappa)(\chi)(x_{(p')})$. Donc χ est dans l'image de $e_N(\kappa)$ si et seulement si $r^{\beta}_N(\kappa)(\chi) = 0$ pour toute partition β d'un entier non nul b au plus égal à N. Il résulte donc de l'assertion a) que

$$I_N(e_N(\kappa)(\mathcal{P}_N(\kappa))) \subset e_N(\mu)(\mathcal{P}_N(\mu)).$$

L'inclusion réciproque est également vraie par I_N^{-1}. ∎

Corollaire 10. *Soit, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'isométrie*

$$j_N : \mathcal{P}_N(\kappa) \to \mathcal{P}_N(\mu)$$

telle que $I_N \circ e_N(\kappa) = e_N(\mu) \circ j_N$, soit

$$J_N = \oplus_{(b,\beta)} j_{N-b} \qquad (b \in \mathbb{N},\ b \leq N,\ \beta \in \mathcal{P}_b)$$

et par adjonction,

$${}^tJ_N = \oplus_{(b,\beta)} {}^tj_{N-b} : \oplus_{(b,\beta)} \mathcal{R}^{(p')}_{N-b}(\mu) \to \oplus_{(b,\beta)} \mathcal{R}^{(p')}_{N-b}(\kappa).$$

On a

$$D_N(\kappa) \circ I_N^{-1} = {}^tJ_N \circ D_N(\mu)$$

et

$$I_N \circ E_N(\kappa) = E_N(\mu) \circ J_N.$$

L'existence de j_N résulte de l'assertion b) de 9. Par adjonction de la relation définissant j_{N-b} on obtient

$$d_{N-b}(\mu) \circ I_{N-b} = {}^t j_{N-b}^{-1} \circ d_{N-b}(\kappa),$$

d'où, en utilisant l'assertion a) de 9,

$$d_N^\beta(\mu) \circ I_N = {}^t j_{N-b}^{-1} \circ d_N^\beta(\kappa),$$

ceci pour tout (b, β) tel que $b \leq N$ et $\beta \in \mathcal{P}_b$. Il en résulte la première égalité du corollaire 10. La seconde s'en déduit par adjonction. ∎

Théorème 11. *Soient $\kappa \in \mathcal{P}_k$ et $\mu \in \mathcal{P}_m$ deux p-cœurs. Les isométries*

$$I_N : \mathcal{R}_N(\kappa) \to \mathcal{R}_N(\mu) \qquad (N \in \mathbb{N})$$

définies au paragraphe 8 *sont parfaites.*

Rappelons à quelles conditions l'isométrie I_N sera dite parfaite (selon M. Broué [Br.2], 1.1). Posons pour cela

$$\Theta_N = \sum_{\lambda \in \mathcal{B}_N(\kappa)} \chi_\lambda \otimes I_N(\chi_\lambda)^o$$

(on désigne par χ^o le contragrédient d'un caractère χ). Alors Θ_N est un caractère généralisé du produit direct $\mathcal{S}_{k+pN} \times \mathcal{S}_{m+pN}$, appartenant au bloc $b_N(\kappa) \otimes b_N(\mu)$ et qui caractérise I_N (*); les conditions sont

(i) Pour tout $(x, y) \in \mathcal{S}_{k+pN} \times \mathcal{S}_{m+pN}$, $\Theta_N(x, y) \in (|C_{\mathcal{S}_{k+pN}}(x)|.\mathcal{A}) \cap (|C_{\mathcal{S}_{m+pN}}(y)|.\mathcal{A})$,

(ii) Si $\Theta_N(x, y) \neq 0$, alors x est d'ordre premier à p si et seulement si y est d'ordre premier à p.

Lemme 12. *Soit, pour tout (b, β) tel que $b \leq N$ et $\beta \in \mathcal{P}_b$, $\Phi(b, \beta)$ une base de $\mathcal{R}_{N-b}^{(p')}(\mu)$ et $\{\hat{\phi} \mid \phi \in \Phi(b, \beta)\}$ une base de $\mathcal{P}_{N-b}(\kappa)$ dont l'image par j_{N-b} est*

(*) Θ_N est l'expression de I_N comme élément de $Hom(\mathcal{R}_N(\kappa), \mathcal{R}_N(\mu))$ identifié à $\mathcal{R}_N(\kappa) \otimes \mathcal{R}_N(\mu)$; rappelons que les représentations irréductibles des groupes symétriques sont rationnelles.

duale de $\Phi(b,\beta)$. Les applications $E_N(\kappa)$ et $D_N(\mu)$ étant adjointes, Θ_N s'écrit dans $\oplus_{(b,\beta)}\mathcal{P}_{N-b}(\kappa)\otimes\mathcal{R}^{(p')}_{N-b}(\mu)$ sous la forme

$$\oplus_{(b,\beta)}\sum_{\phi\in\Phi(b,\beta)}\hat{\phi}\otimes\phi.$$

L'assertion du lemme 12 résulte du corollaire 10 et du fait que les applications D_N, E_N et J_N décomposent selon des sommes orthogonales indexées sur les couples (b,β). ∎

On obtient donc, si $(x,y)\in\mathcal{S}_{k+pN}\times\mathcal{S}_{m+pN}$,

$$\Theta_N(x,y)=\sum_{(b,\beta)}\sum_{\phi\in\Phi(b,\beta)}e^{\beta}_N(\kappa)(\hat{\phi})(x)\tilde{\phi}(y),$$

où $\tilde{\phi}$ a été défini en 3.4, et où $e^{\beta}_N(\kappa)$, restriction de $e^{\beta}_{\mathcal{S}_{k+pN}}$, a été calculé au lemme 5. On en déduit immédiatement que

si les types des décompositions en cycles de $x_{(p)}$ et $y_{(p)}$ sont différents, $\Theta_N(x,y)$ est nul.

(en particulier (ii) est vrai)

et que

Si $x_{(p)}$ et $y_{(p)}$ sont de même type $p\cdot\beta$ ($\beta\in\mathcal{P}_b$), on a

$$\Theta_N(x,y)=\sum_{\phi\in\Phi(b,\beta)}z_{p\cdot\beta}\hat{\phi}(x_{(p')})\phi(y_{(p')}).$$

Or, puisque $\hat{\phi}$ est projectif, $\hat{\phi}(x_{(p')})$ est divisible dans $\mathcal{A}$ par l'ordre z du centralisateur de $x_{(p')}$ dans $\mathcal{S}_{k+p(N-b)}$. En outre on a $|C_{\mathcal{S}_{k+pN}}(x)|=z.z_{p\cdot\beta}$. La condition de divisibilité est donc démontrée pour x. Par symétrie elle est vraie également pour y. ∎

13. Quelques exemples.

(notations de [J–K], appendice et [En.1])

(1) $p=3$, $b_1(\emptyset)$, le 3-bloc principal de $\mathcal{S}_3$.

On choisit le 3-quotient de position nulle (voir [En.1]). Les 3-décompositions et 3-signatures $\sigma(\lambda)$ relativement à ce 3-quotient sont les suivants:

λ	3-quotient	$\sigma(\lambda)$
(3)	$(\emptyset,\emptyset,1)$	1
(2.1)	$(\emptyset,1,\emptyset)$	-1
(1^3)	$(1,\emptyset,\emptyset)$	1

L'action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (qui équivaut à un changement de quotient, cf la remarque après [En.1], 2.10) définit une isométrie de bicaractère

$$\Theta = (3)\otimes(1^3) - (2.1)\otimes(3) - (1^3)\otimes(2.1).$$

Les projectifs indécomposables sont $P = P_{(3)} = (3) + (2.1)$ et $P' = P_{(2.1)} = (2.1) + (1^3)$. Notons que Θ est combinaison linéaire sur $\mathbb{Z}$ de "biprojectifs", ce qui implique que Θ est parfait ([Br], 1.2): on a $\Theta = P\otimes P' - Q$, où Q est un $\mathcal{S}_3$-module-$\mathcal{S}_3$ dont les restrictions à $\mathcal{S}_3 \times \{1\}$ et à $\{1\} \times \mathcal{S}_3$ sont projectives. Enfin l'isométrie induit sur le groupe $\mathcal{P}(\mathcal{S}_3)$ un isomorphisme dont la matrice relativement aux indécomposables est

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) $p = 3$, de $\mathcal{S}_6$ à $\mathcal{S}_8$, de $b_2(\emptyset)$ à $b_2(1^2)$.

Si l'on se réfère aux quotients de position nulle, on obtient la correspondance suivante

(λ)	$\sigma(\lambda)$	(3−quotient)	$\sigma(\Psi(\lambda))$	$(\Psi(\lambda))$
(6)	1	$(\emptyset,\emptyset,2)$	-1	(6.2)
(5.1)	-1	$(\emptyset,2,\emptyset)$	1	$(2^3.1^2)$
(3^2)	1	$(\emptyset,1,1)$	-1	$(3.2.1^3)$
(4.1^2)	1	$(2,\emptyset,\emptyset)$	1	(7.1)
$(3.2.1)$	-1	$(1,\emptyset,1)$	1	(4^2)
(2^3)	1	$(1,1,\emptyset)$	1	(4.1^4)
(3.1^3)	1	$(\emptyset,\emptyset,1^2)$	1	$(3.2^2.1)$
(2.1^4)	-1	$(\emptyset,1^2,\emptyset)$	1	(1^8)
(1^6)	1	$(1^2,\emptyset,\emptyset)$	-1	(4.2^2)

Les groupes $\mathcal{P}_2(\emptyset)$ et $\mathcal{P}_2(1^2)$ sont de rang 5, et les bases standard y sont $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$, dont les coefficients sont

	(6)	(5.1)	(3^2)	(4.1^2)	(3.2.1)	(2^3)	(3.1^3)	(2.1^4)	(1^6)
P_1	1	1			1	1			
P_2		1	1	1	1				
P_3			1		1			1	1
P_4				1	1		1		
P_5					1	1	1	1	

	(7.1)	(6.2)	(4^2)	(4.2^2)	$(3.2^2.1)$	(4.1^4)	$(3.2.1^3)$	$(2^3.1^2)$	(1^8)
Q_1	1	1		1	1				
Q_2		1	1	1					
Q_3			1	1			1		1
Q_4				1	1	1	1		
Q_5					1		1	1	

Sur ces bases la matrice J_2 est

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

[Bo] R. Boyce, *Cyclotomic polynomial and irreducible representations of finite groups of Lie type*, (à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.).

[Br.1] M. Broué, *Les ℓ-blocs des groupes $GL(n,q)$ et $U(n,q^2)$ et leurs structures locales*, Séminaire Bourbaki **640** février 1985.

[Br.2] M. Broué, *Blocs, isométries parfaites, catégories dérivées*, *C. R.* Acad. *Sci. Paris*, **307** (1988) 13–18.

[B–R] R. Brauer and G. de B. Robinson, , Trans. Roy. Soc. Can., XLI, III, III (1947) 11–25.

[En.1] M. Enguehard, *Isométries parfaites dans les groupes symétriques*, rapport de recherche du LMENS, DMI, Ecole Normale Supérieure, (1988).

[En.2] M. Enguehard, *Isométries parfaites entre blocs de groupes linéaires ou unitaires*, preprint, DMI, Ecole Normale Supérieure, (décembre 1988).

[F–S] P. Fong and B. Srinivasan, *Generalized Harish-Chandra Theory for Unipotent Characters of Finite Classical Groups*, J. Algebra **104** (1986), 301–309.

[J–K] G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group.* Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **16** (1981) Addison-Wesley P. C., Reading, Ma.

[Mo] A. O. Morris, *The spin representation of the symmetric group*, Canad. J. Math. **17** (1965), 543–549.

[M–O] A. O. Morris and J. B. Olsson, *On p-quotients for spin characters* Københavns Universitet Matematisk Institut, Preprint Series 1987, **6**.

[Ol.1] J. B. Olsson, *Remarks on symbols, hooks and degrees of unipotent characters*, J. Combinatorics A **42** (1986), 223–238.

[Os.1] M. Osima, *Some remarks on the characters of the symmetric group*, Canad. J. Math. **5** (1953), 336–343.

[Os.2] M. Osima, *Some remarks on the characters of the symmetric group II*, Canad. J. Math. **6** (1954), 511–521.

[Os.3] M. Osima, *On the representations of the generalized symmetric group*, Math. J. Okayama Univ. **4** (1954b), 39–56.

[Pu] Ll. Puig, *The Nakayama conjecture and the Brauer pairs*, Publ. Math. de l'U. Paris VII **25** Séminaire sur les groupes finis, 171–189.

[Ro.1] G. de B. Robinson, *On the modular representations of the symmetric group*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37** (1951), 694–696.

[Ro.2] G. de B. Robinson, *Representation Theory of the symmetric Group*, Edinburgh Univ. Press (1961).

[Se] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*, Méthodes, (1971) Hermann, Paris.

M. ENGUEHARD
E.N.S.
D.M.I.
45 rue d'Ulm
75005 PARIS, France